28 січня 2019 р.

Задача 1. Для кожного з наступних відношень на множині натуральних чисел опишіть впорядковані пари, що належать відношенням:

1. $R = \{(x, y) | x + y = 9\}$;
2. $R = \{(x, y) | x + y < 7\}$;
3. $R = \{(x, y) | y = x^2\}$;
4. $R = \{(x, y) | 4x = y^2\}$.

Розв'язок.

1. Спершу задамо це відношення через цикл:
$$R = \left\{(n, 9 - n), n = \overline{1..8}\right\}.$$
Також випишемо всі пари які входять до цього відношення:
$$R = \{(1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (7, 2), (8, 1)\}.$$
2. Спершу задамо це відношення через цикли:
$$R = \left\{(n, k - n), n = \overline{1..k - 1}, k = \overline{2..6}\right\}.$$
Також випишемо всі пари які входять до цього відношення:
$$R = \{(1, 5), (1, 4), (1, 3), (1, 2), (1, 1), (2, 4), (2, 3), (2, 2), (2, 1), (3, 3), (3, 2), (3, 1), (4, 2), (4, 1), (5, 1)\}.$$
3. Спершу задамо це відношення словами: R – *відношення пар натуральних чисел вигляду*
$$(\text{число}, \text{квадрат цього числа}).$$
Також випишемо пари які входять до цього відношення:
$$R = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), \ldots\}.$$
4. Спершу задамо це відношення словами: R – *відношення пар натуральних чисел вигляду*
$$(\text{квадрат половини другого числа}, \text{парне число}).$$
Також випишемо пари які входять до цього відношення:
$$R = \{(1, 2), (4, 4), (9, 6), (16, 8), \ldots\}.$$

Задача 2. Яке відношення задається матрицею A? Побудуйте для нього граф.

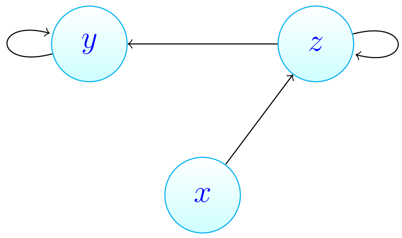
1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;
3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

Розв'язок. Для зручності у цій задачі позначимо $\Omega = \{x, y, z\}$. Тоді

1. Спершу випишемо всі пари які входять до цього відношення:

$$R = \{(x, z), (y, y), (z, y), (z, z)\}.$$

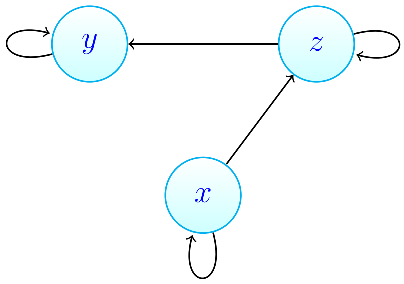
Тепер наведемо його граф:



2. Спершу випишемо всі пари які входять до цього відношення:

$$R = \{(x, x), (x, z), (y, y), (z, y), (z, z)\}.$$

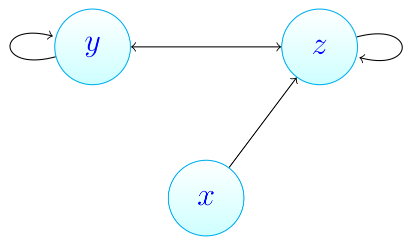
Тепер наведемо його граф:



3. Спершу випишемо всі пари які входять до цього відношення:

$$R = \{(x, z), (y, y), (y, z), (z, y), (z, z)\}.$$

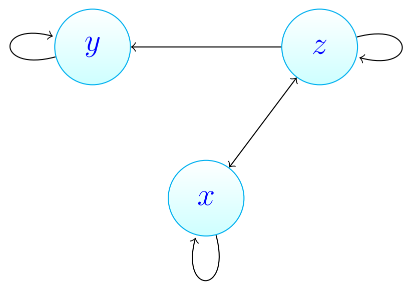
Тепер наведемо його граф:



4. Спершу випишемо всі пари які входять до цього відношення:

$$R = \{(x, x), (x, z), (y, y), (z, x), (z, y), (z, z)\}.$$

Тепер наведемо його граф:



Задача 3. Визначте, які з наступних відношень на множині людей рефлексивні, симетричні або транзитивні:

1. "мати тих же самих батьків";
2. "бути братом";
3. "буту старше" або "бути молодше";
4. "бути знайомим";
5. "бути не вище";

Розв'язок.

1. Рефлексивне, симетричне, транзитивне, тобто відношення еквівалентності.
2. Взагалі кажучи це відношення є композицією відношень[1] "бути чоловіком (особою чоловічої статі)" та "мати спільних батьків", на основі чого і проводиться подальший його аналіз.

   Або не рефлексивне (бо жінка не є своїм братом) або навіть антирефлексивне (якщо ми вважаємо що і чоловік не є своїм братом).

   Не симетричне (дочка X не є братом сина X але син X є братом дочки X), але і не антисиметрчине (бо існує X такий що у X існують два сини Y, Z, тоді Y брат Z і Z брат Y).

   Транзитивне, бо якщо X брат Y і Y брат Z, то у них всіх спільні батьки, і при цьому X чоловік (адже він брат Y).
3. Антирефлексивне, антисисетричне і транзитивне, тобто відношення строгого порядку.
4. Рефлексивне (бо людина знає[2] саму себе).

[1] Тут відношення "бути чоловіком" – унарне і застосовується до першого аргументу.

[2] Хоча якщо пригадати філософів Древньої Греції які стверджували що сенс життя у тому, щоб "пізнати себе", то можна засумніватися у тому що всі люди себе знають.

Симетричне[3], бо якщо людина X знає людину Y то вони знайомі, а отже Y знає X.

Взагалі кажучи не транзитивне, бо я знаю декана, декан знає ректора, але ректора я не знаю.

5. Рефлексивне, антисиметричне і транзитивне, тобто відношення нестрогого (часткового) порядку.

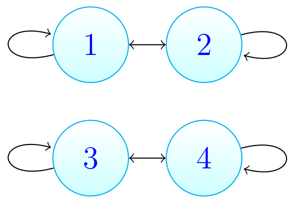
[3]Здебільшого саме так вважають у задачах математичних олімпіад, хоча і не завжди.

Задача 4. Маємо множину $A = \{1, 2, 3, 4\}$ і її розбиття на класи еквівалентності $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$. Задайте відношення еквівалентності R.

Розв'язок. Спершу випишемо всі пари які входять до цього відношення:

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}.$$

Тепер наведемо його граф:



Для повноти опису наведемо також його матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

11 лютого 2019 р.

Задача (класна)**.** Побудувати функцію вибору, яка породжена бінарним відношенням

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Розв'язок. Скористаємося визначенням:

$$\forall X \subseteq \Omega: \quad C^R(X) = \{x \in X : \forall y \in X : y\bar{R}x\}.$$

При знаходженні $C^R(X)$ будемо дивитися на відповідну під-матрицю R і шукати ті x_i у стовпцях яких усі нулі, тобто не існує елементу що більший за них:

X	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_1, x_2, x_3\}$
$C^R(X)$	$\{x_1\}$	$\emptyset$	$\{x_3\}$	$\{x_1\}$	$\{x_3\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

Задача 1. Побудувати функцію вибору, яка породжена бінарним відношенням

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Розв'язок. Скористаємося визначенням:

$$\forall X \subseteq \Omega: \quad C^R(X) = \{x \in X : \forall y \in X : y\bar{R}x\}.$$

При знаходженні $C^R(X)$ будемо дивитися на відповідну під-матрицю R і шукати ті x_i у стовпцях яких усі нулі, тобто не існує елементу що більший за них:

X	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_1, x_2, x_3\}$
$C^R(X)$	$\emptyset$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_3\}$	$\{x_3\}$

Задача (класна). Побудувати бінарне відношення, яке породжує задану функцію вибору, якщо таке існує:

X	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_1, x_2, x_3\}$
$C^R(X)$	$\{x_1\}$	$\emptyset$	$\{x_3\}$	$\{x_1\}$	$\{x_3\}$	$\emptyset$	$\{x_2\}$

Розв'язок. Існування бінарного відношення що породжує задану функцію вибору рівносильне нормальності відповідної функції вибору, яка, очевидно, не виконується.

Зокрема, $x_2 \in C(\{x_1, x_2, x_3\})$, але $x_2 \notin C(\{x_2\})$, суперечить нормальності.

Задача 2. Побудувати бінарне відношення, яке породжує задану функцію вибору, якщо таке існує:

X	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_1, x_2, x_3\}$
$C^R(X)$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{x_3\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_3\}$	$\{x_3\}$

Розв'язок. Існування бінарного відношення що породжує задану функцію вибору рівносильне нормальності відповідної функції вибору, яка, очевидно, не виконується.

Зокрема, $x_2 \in C(\{x_1, x_2\})$, але $x_2 \notin C(\{x_2\})$, суперечить нормальності.

Задача 3. Побудувати ЛФФВ для заданої функції вибору:

X	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_1, x_2, x_3\}$
$C^R(X)$	$\emptyset$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_2\}$	$\emptyset$	$\{x_3\}$	$\{x_3\}$

Розв'язок. Побудуємо $\beta(X)$ і $\beta(C(X))$ для всіх $X \subseteq \Omega$:

X	$C(X)$	$\beta(X)$	$\beta(C(X))$
$\{x_1\}$	$\emptyset$	$(1, 0, 0)$	$(0, 0, 0)$
$\{x_2\}$	$\{x_2\}$	$(0, 1, 0)$	$(0, 1, 0)$
$\{x_3\}$	$\{x_3\}$	$(0, 0, 1)$	$(0, 0, 1)$
$\{x_1, x_2\}$	$\{x_2\}$	$(1, 1, 0)$	$(0, 1, 0)$
$\{x_1, x_3\}$	$\emptyset$	$(1, 0, 1)$	$(0, 0, 0)$
$\{x_2, x_3\}$	$\{x_3\}$	$(0, 1, 1)$	$(0, 0, 1)$
$\{x_1, x_2, x_3\}$	$\{x_3\}$	$(1, 1, 1)$	$(0, 0, 1)$

Побудуємо f_i, де $i = 1, 2, 3$. Для цього виписуємо всі можливі значення $\vec{\beta}(X)$ де $\beta_i(X) = 1$ і беремо $f_i(\vec{\beta}) = \beta_i(C(X))$:

β_1	β_2	β_3	f_1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

β_1	β_2	β_3	f_2
0	1	0	1
0	1	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

β_1	β_2	β_3	f_3
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	1	1

Записуємо ДДНФ (а також стислу форму) для f_i:

$$f_1(\beta_2, \beta_3) \equiv 0$$
$$f_2(\beta_1, \beta_3) = \bar{\beta}_1 \cdot \bar{\beta}_3 \vee \beta_1 \cdot \bar{\beta}_3 = \bar{\beta}_3$$
$$f_3(\beta_1, \beta_2) = \bar{\beta}_1 \cdot \bar{\beta}_2 \vee \bar{\beta}_1 \cdot \beta_2 \vee \beta_1 \cdot \beta_2 = \beta_1 \to \beta_2$$

Задача 4. Побудувати функцію вибору за заданою ЛФФВ:

$$f_1(\beta_2, \beta_3) = \bar{\beta}_2 \vee \beta_3, \quad f_2(\beta_1, \beta_3) = \beta_1 \cdot \bar{\beta}_3, \quad f_3(\beta_1, \beta_2) \equiv 1.$$

Розв'язок. Перш за все відновимо табличку істинності для f_i. Для цього виписуємо всі можливі значення $\vec{\beta}(X)$ де $\beta_i(X) = 1$ і дописуємо туди значення $f_i(\vec{\beta})$:

β_1	β_2	β_3	f_1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

β_1	β_2	β_3	f_2
0	1	0	0
0	1	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

β_1	β_2	β_3	f_3
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Відновлюємо відомі значення $\beta(C(X))$ за значеннями f_i:

X	$C(X)$	$\beta(X)$	$\beta(C(X))$
$\{x_1\}$	$\{x_1, ?\}$	$(1,0,0)$	$(1,?,?)$
$\{x_2\}$	$\{?\}$	$(0,1,0)$	$(?,0,?)$
$\{x_3\}$	$\{x_3, ?\}$	$(0,0,1)$	$(?,?,1)$
$\{x_1, x_2\}$	$\{x_2, ?\}$	$(1,1,0)$	$(0,1,?)$
$\{x_1, x_3\}$	$\{x_1, x_3, ?\}$	$(1,0,1)$	$(1,?,1)$
$\{x_2, x_3\}$	$\{x_3, ?\}$	$(0,1,1)$	$(?,0,1)$
$\{x_1, x_2, x_3\}$	$\{x_1, x_3, ?\}$	$(1,1,1)$	$(1,0,1)$

Зрозуміло, що решта (позначені зараз як ?) значень $\beta(C(X))$ – нулі, адже відповідні елементи x_i просто не належать відповідним підмножинам X_j, тому маємо наступну функцію вибору:

X	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_1, x_2, x_3\}$
$C^R(X)$	$\{x_1\}$	$\emptyset$	$\{x_3\}$	$\{x_2\}$	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_3\}$	$\{x_1, x_3\}$

25 лютого 2019 р.

Задача 1. Розв'язати задачу двох-критеріальної оптимізації

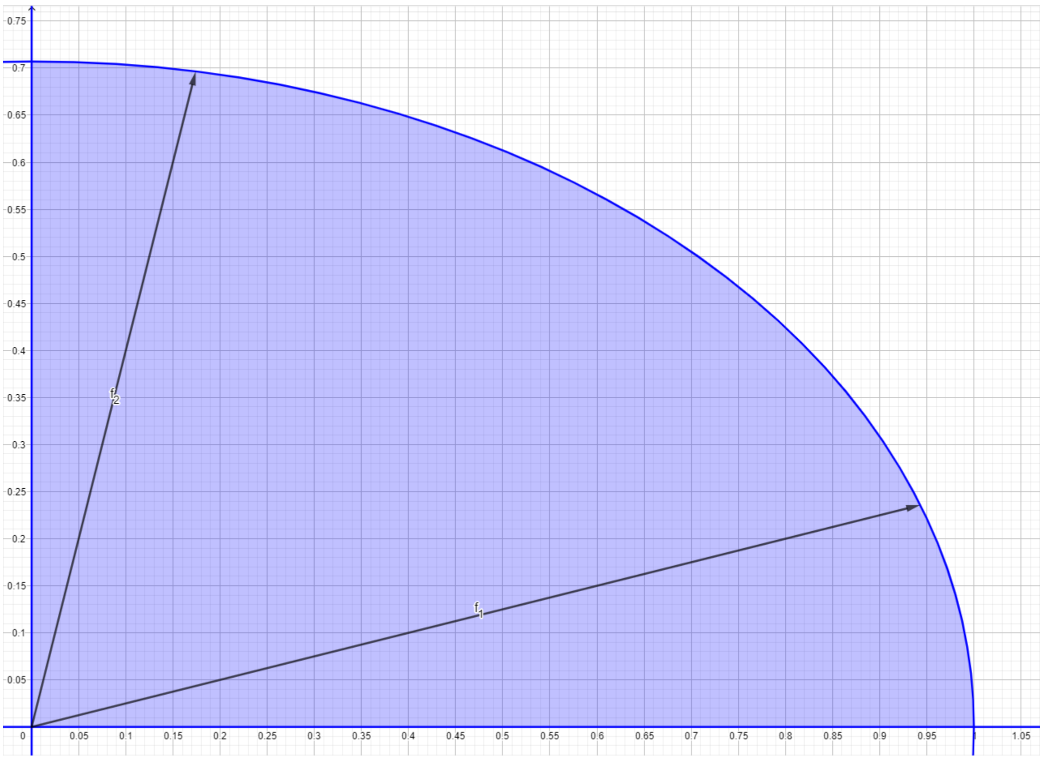
$$f_1 = 4x_1 + x_2 \to \max, \quad f_2 = x_1 + 4x_2 \to \max$$

з допустимою областю що визначається нерівностями

$$x_1^2 + 2x_2^2 \le 1, \quad x_{1,2} \ge 0$$

методом ідеальної точки з $s = 1$.

Розв'язок. Перш за все зобразимо допустиму область:



Далі знаходимо $a_i = \max_x f_i(x)$, $i = 1, 2$. Для цього спершу знаходимо $\tilde{x}_i = \arg\max f_i$.

З графічних міркувань, $\tilde{x}_1$ – точка дотику опорної прямої що перпендикулярна вектору f_1 (див. мал. вище) до допустимої області, тобто точка $\tilde{x}_1 = \left(\frac{8}{\sqrt{65}}, \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 65}}\right)$, а відповідне значення

$$a_1 = f_1(\tilde{x}_1) = 4 \cdot \frac{8}{\sqrt{65}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 65}} = \frac{1 + 32\sqrt{2}}{\sqrt{2 \cdot 65}}.$$

Аналогічно знаходимо $\tilde{x}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$, а відповідне значення

$$a_2 = f_2(\tilde{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{5}} + 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{1 + 4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}.$$

Далі записуємо

$$\rho_1(f(x), a) = \left(\frac{1 + 32\sqrt{2}}{\sqrt{2 \cdot 65}} - 4x_1 - x_2\right) + \left(\frac{1 + 4\sqrt{2}}{\sqrt{5}} - x_1 - 4x_2\right) \to \min.$$

Ця задача еквівалентна задачі $x_1 + x_2 \to \max$ за умови $x_1^2 + 2x_2^2 = 1$.

Записуємо функцію Лагранжа цієї задачі

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1 + x_2 + \lambda(x_1^2 + 2x_2^2 - 1) \to \max.$$

Знаходимо необхідні умови екстремуму

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 1 + 2\lambda x_1 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 1 + 4\lambda x_2 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1^2 + 2x_2^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

З цієї системи маємо $x_1 = -\frac{1}{2\lambda}$, а $x_2 = -\frac{1}{4\lambda}$, тобто $x_1 = 2x_2$.

Враховуючи $x_1^2 + 2x_2^2 = 1$, остаточно знаходимо $x^\star = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

У свою чергу $f(x^\star) = \left(\frac{6}{\sqrt{6}}, \frac{9}{\sqrt{6}}\right)$.

Задача 2. Розв'язати задачу двох-критеріальної оптимізації

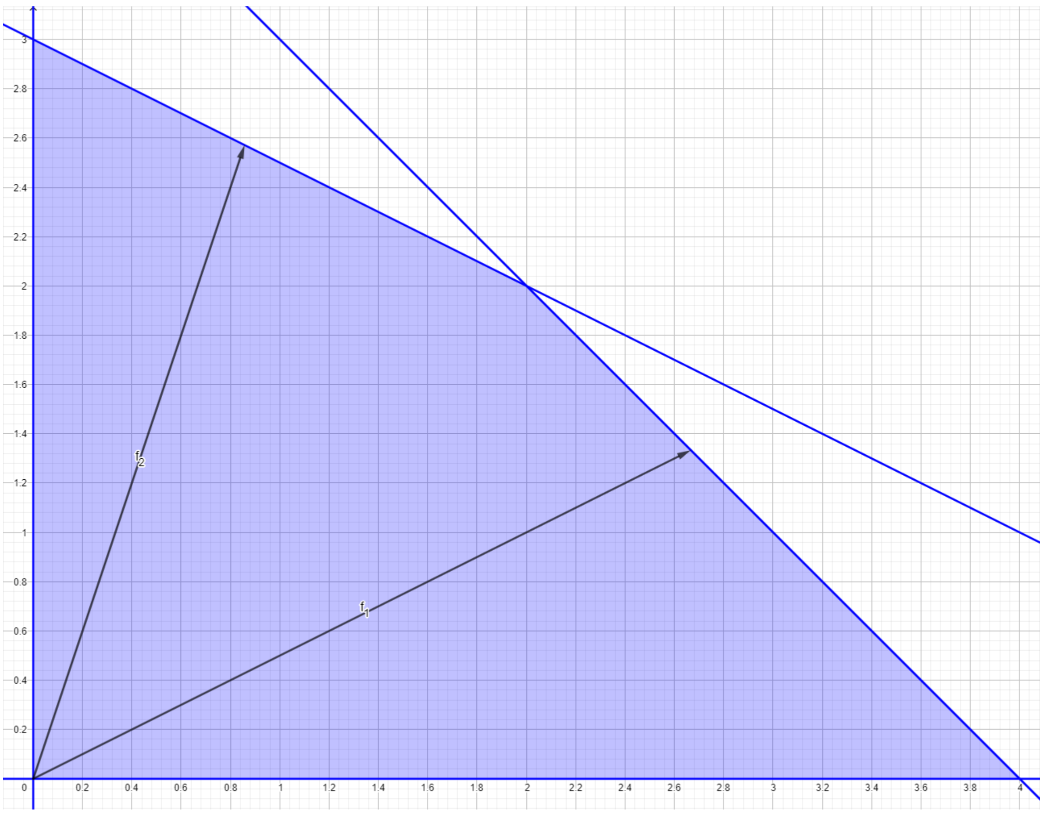
$$f_1 = 2x_1 + x_2 \to \max, \quad f_2 = x_1 + 3x_2 \to \max$$

з допустимою областю що визначається нерівностями

$$x_1 + x_2 \le 4, \quad x_1 + 2x_2 \le 6, \quad x_{1,2} \ge 0$$

методом ідеальної точки з $s = 2$.

Розв'язок. Перш за все зобразимо допустиму область:



Далі знаходимо $a_i = \max_x f_i(x)$, $i = 1, 2$. Для цього спершу знаходимо $\tilde{x}_i = \arg\max f_i$.

З графічних міркувань, $\tilde{x}_1$ — точка дотику опорної прямої що перпендикулярна вектору f_1 (див. мал. вище) до допустимої області, тобто точка $\tilde{x}_1 = (4, 0)$, а відповідне значення

$$a_1 = f_1(\tilde{x}_1) = 2 \cdot 4 + 0 = 8.$$

Аналогічно знаходимо $\tilde{x}_2 = (0, 3)$, а відповідне значення

$$a_2 = f_2(\tilde{x}_2) = 0 + 3 \cdot 3 = 9.$$

Далі записуємо

$$\rho_2(f(x), a) = (8 - 2x_1 - x_2)^2 + (9 - x_1 - 3x_2)^2 \to \min .$$

Записуємо функцію Лагранжа цієї задачі

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = (8 - 2x_1 - x_2)^2 + (9 - x_1 - 3x_2)^2 + \\ + \lambda_1 \cdot (4 - x_1 - x_2) + \lambda_2 \cdot (6 - x_1 - 2x_2) \to \min . \end{aligned}$$

Знаходимо необхідні умови екстремуму

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = -4 \cdot (8 - 2x_1 - x_2) - 2 \cdot (9 - x_1 - 3x_2) - \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = -2 \cdot (8 - 2x_1 - x_2) - 6 \cdot (9 - x_1 - 3x_2) - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 4 - x_1 - x_2 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 6 - x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases}$$

З цієї системи маємо $x^\star = (2, 2)$.

У свою чергу $f(x^\star) = (6, 8)$.

Задача 3. Розв'язати задачу двох-критеріальної оптимізації

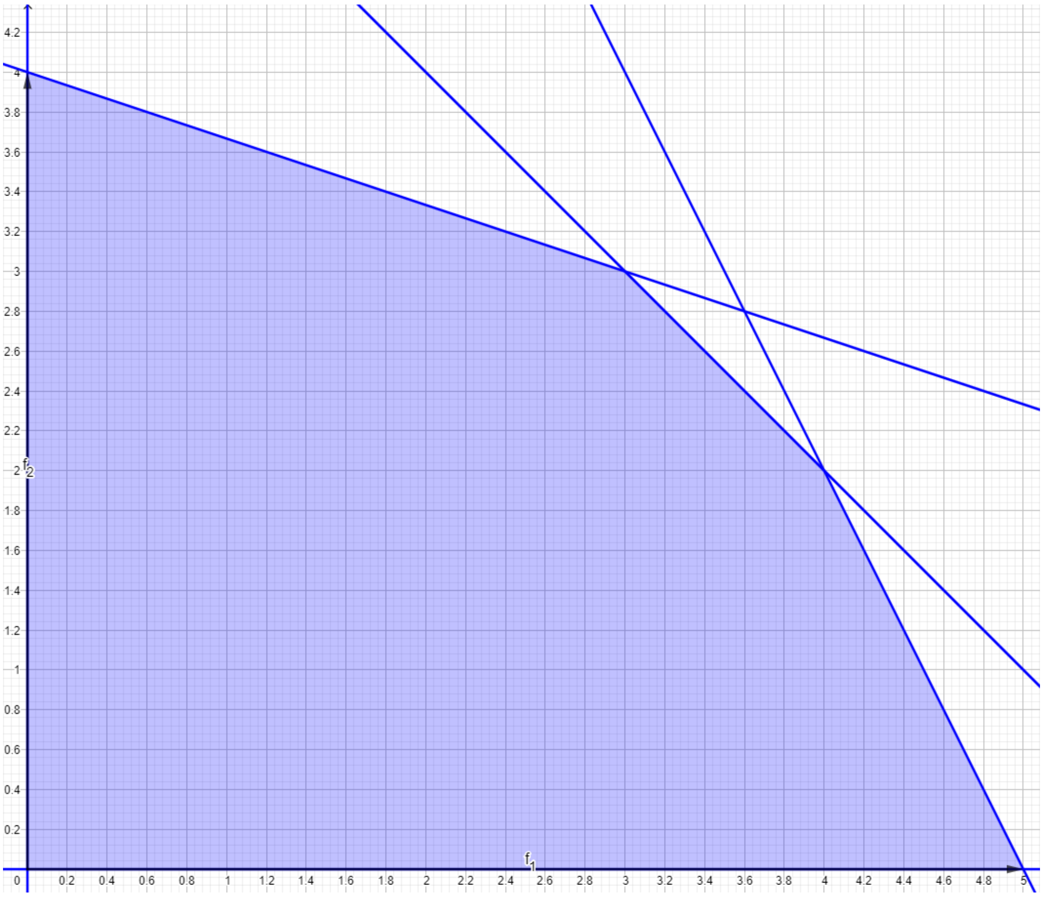
$$f_1 = x_1 \to \max, \quad f_2 = x_2 \to \max$$

з допустимою областю що визначається нерівностями

$$2x_1 + x_2 \le 10, \quad x_1 + 3x_2 \le 12, \quad x_1 + x_2 \le 6, \quad x_{1,2} \ge 0$$

методом ідеальної точки з $s = \infty$.

Розв'язок. Перш за все зобразимо допустиму область:



Далі знаходимо $a_i = \max_x f_i(x)$, $i = 1, 2$. Для цього спершу знаходимо $\tilde{x}_i = \arg\max f_i$.

З графічних міркувань, $\tilde{x}_1$ – точка дотику опорної прямої що перпендикулярна вектору f_1 (див. мал. вище) до допустимої області, тобто точка $\tilde{x}_1 = (5, 0)$, а відповідне значення

$$a_1 = f_1(\tilde{x}_1) = 5.$$

Аналогічно знаходимо $\tilde{x}_2 = (0, 4)$, а відповідне значення

$$a_2 = f_2(\tilde{x}_2) = 4.$$

Далі записуємо

$$\rho_2(f(x), a) = \max\{5 - x_1, 4 - x_2\} \to \min.$$

З логічних (які, щоправда, не справджуються для деяких неопуклих задача) міркувань, цей мінімум досягається на межі допустимої області де $5 - x_1 = 4 - x_2$.

Враховуючи нерівності що обмежують допустиму область маємо $x^\star = (2.5, 3.5)$.

У свою чергу $f(x^\star) = (2.5, 3.5)$.

11 березня 2019 р.

Задача 1. Розв'язати задачу багато-критеріальної оптимізації

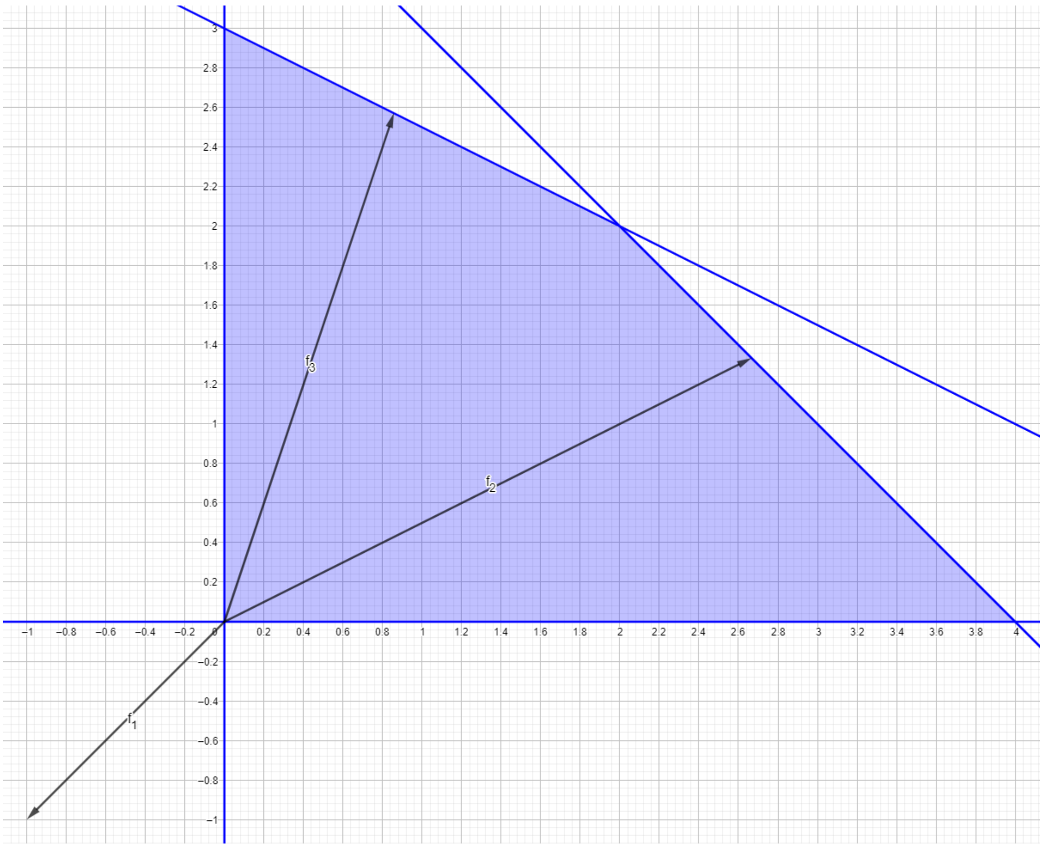
$$f_1 = -x_1 - x_2 \to \max, \quad f_2 = 2x_1 + x_2 \to \max, \quad f_3 = x_1 + 3x_2 \to \max$$

з допустимою областю що визначається нерівностями

$$x_1 + x_2 \leq 4, \quad x_1 + 2x_2 \leq 6, \quad x_{1,2} \geq 0$$

методом послідовних поступок (величини поступок вибрати самостійно).

Розв'язок. Перш за все зобразимо допустиму область G_0:



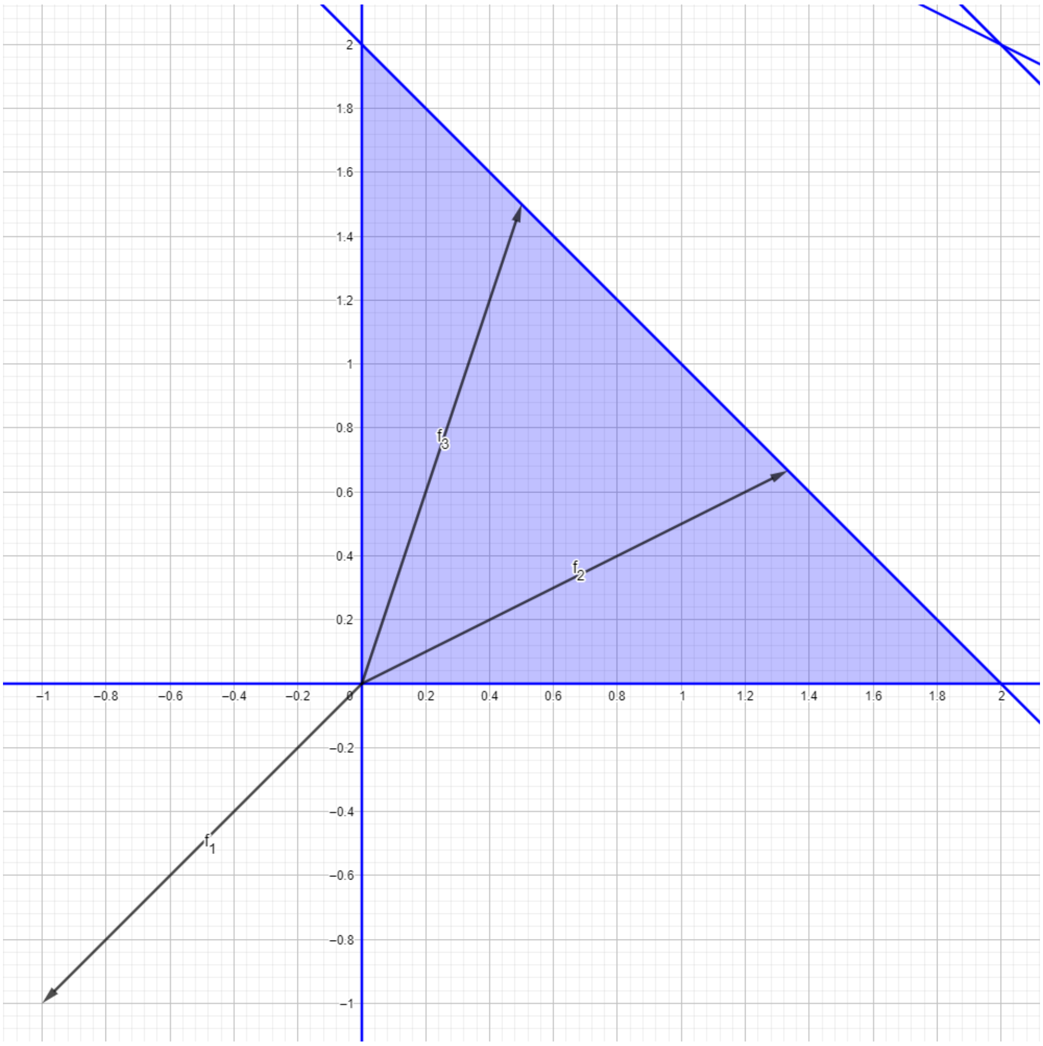
З графічних міркувань знаходимо

$$\tilde{x}_1 = \arg\max f_1(x_1, x_2) = (0, 0), \quad f_1^\star = \max_{x \in G_0} f_1(x_1, x_2) = 0.$$

Покладаючи величину поступки Δf_1 за першим критерієм рівною 2 отримуємо, що до допустимої області додається умова

$$f_1(x_1, x_2) \geq f_1^\star - \Delta f_1 = -2,$$

тому уточнена допустима область G_1 має вигляд:



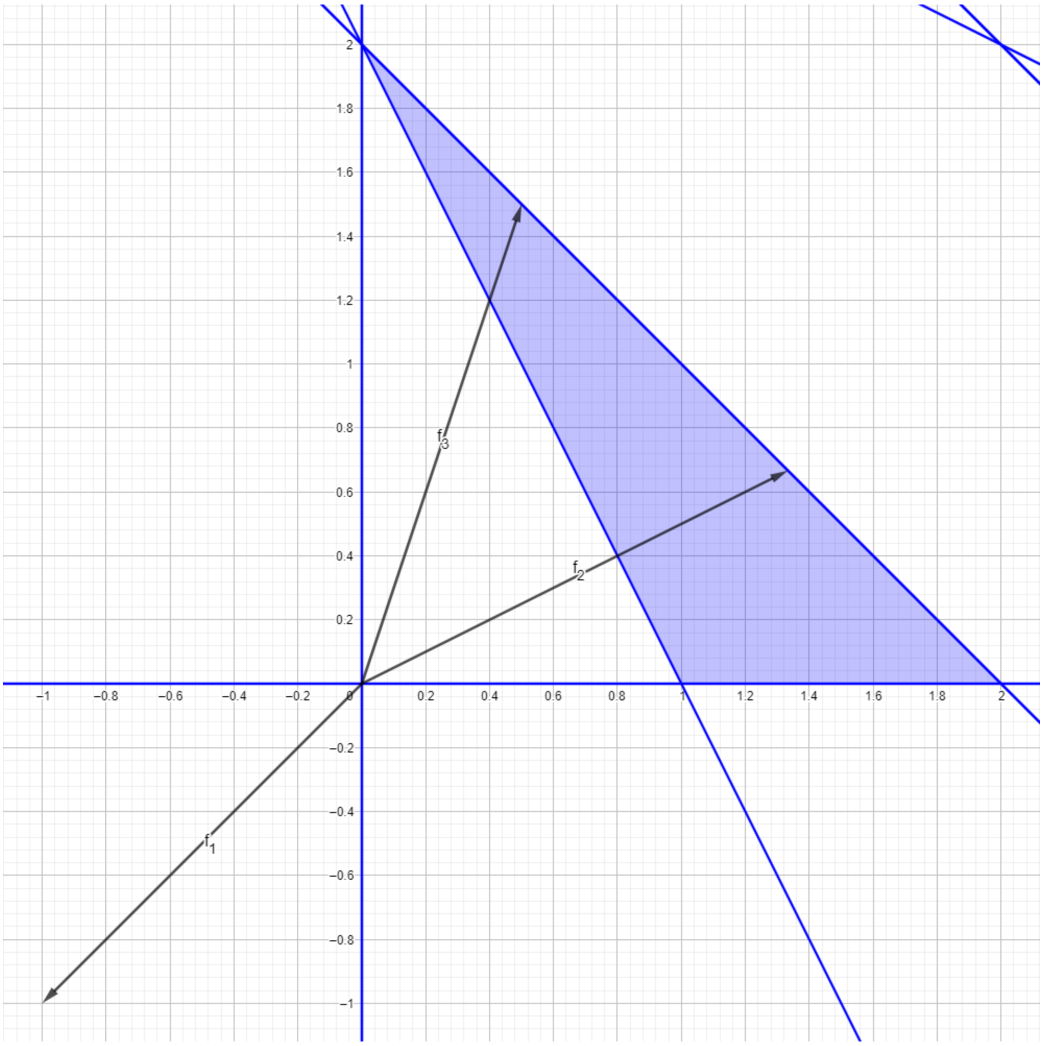
З графічних міркувань знаходимо

$$\tilde{x}_2 = \arg\max f_2(x_1, x_2) = (2, 0), \quad f_2^\star = \max_{x \in G_1} f_2(x_1, x_2) = 4.$$

Покладаючи величину поступки Δf_2 за другим критерієм рівною 2 отримуємо, що до допустимої області додається умова

$$f_2(x_1, x_2) \geq f_2^\star - \Delta f_2 = 2,$$

тому уточнена допустима область G_2 має вигляд:



З графічних міркувань знаходимо

$$\tilde{x}_3 = \arg\max f_3(x_1, x_2) = (0, 2), \quad f_3^\star = \max_{x \in G_2} f_3(x_1, x_2) = 6.$$

Оскільки це останній критерій, то ми не робимо поступок, а просто кажемо, що знайдена точка $\tilde{x}_3$ є розв'язком $x^\star$.

Наостанок зауважимо, що $f(x^\star) = (-2, 2, 6)$.

Задача 2. Розв'язати задачу багато-критеріальної оптимізації

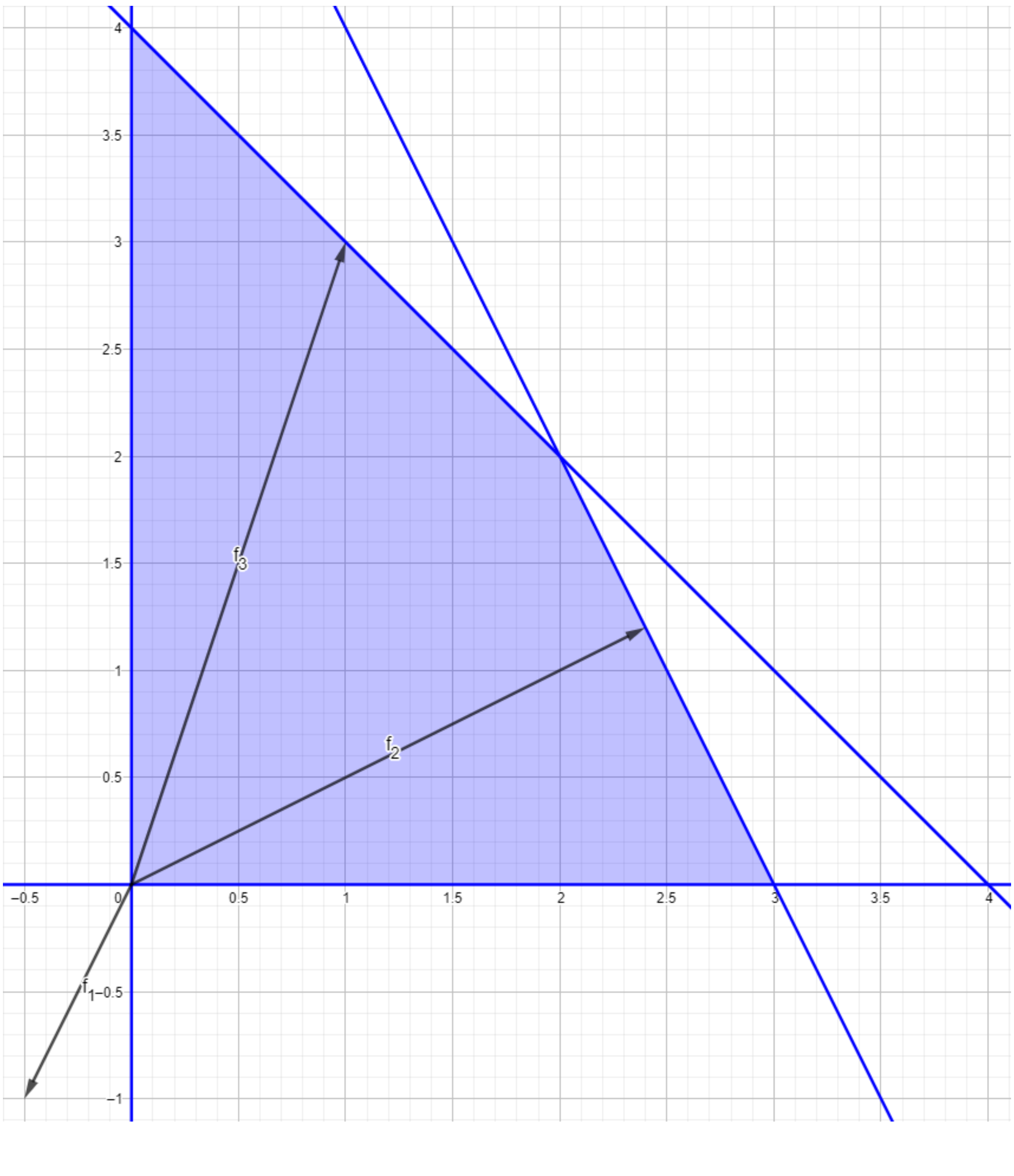
$$f_1 = -x_1 - 2x_2 \to \max, \quad f_2 = 2x_1 + x_2 \to \max, \quad f_3 = x_1 + 3x_2 \to \max$$

з допустимою областю що визначається нерівностями

$$x_1 + x_2 \leq 4, \quad 2x_1 + x_2 \leq 6, \quad x_{1,2} \geq 0$$

методом послідовних поступок (величини поступок вибрати самостійно).

Розв'язок. Перш за все зобразимо допустиму область G_0:



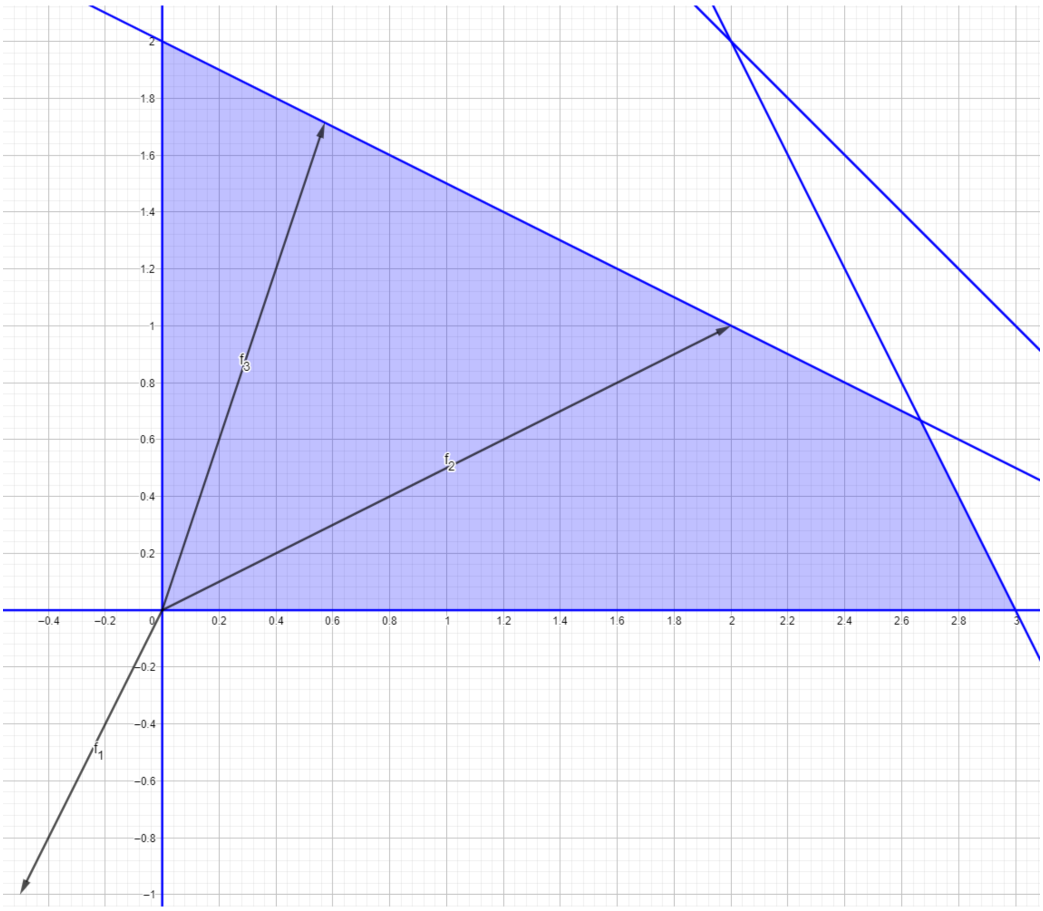
З графічних міркувань знаходимо

$$\tilde{x}_1 = \arg\max f_1(x_1, x_2) = (0, 0), \quad f_1^\star = \max_{x \in G_0} f_1(x_1, x_2) = 0.$$

Покладаючи величину поступки Δf_1 за першим критерієм рівною 4 отримуємо, що до допустимої області додається умова

$$f_1(x_1, x_2) \geq f_1^\star - \Delta f_1 = -4,$$

тому уточнена допустима область G_1 має вигляд:



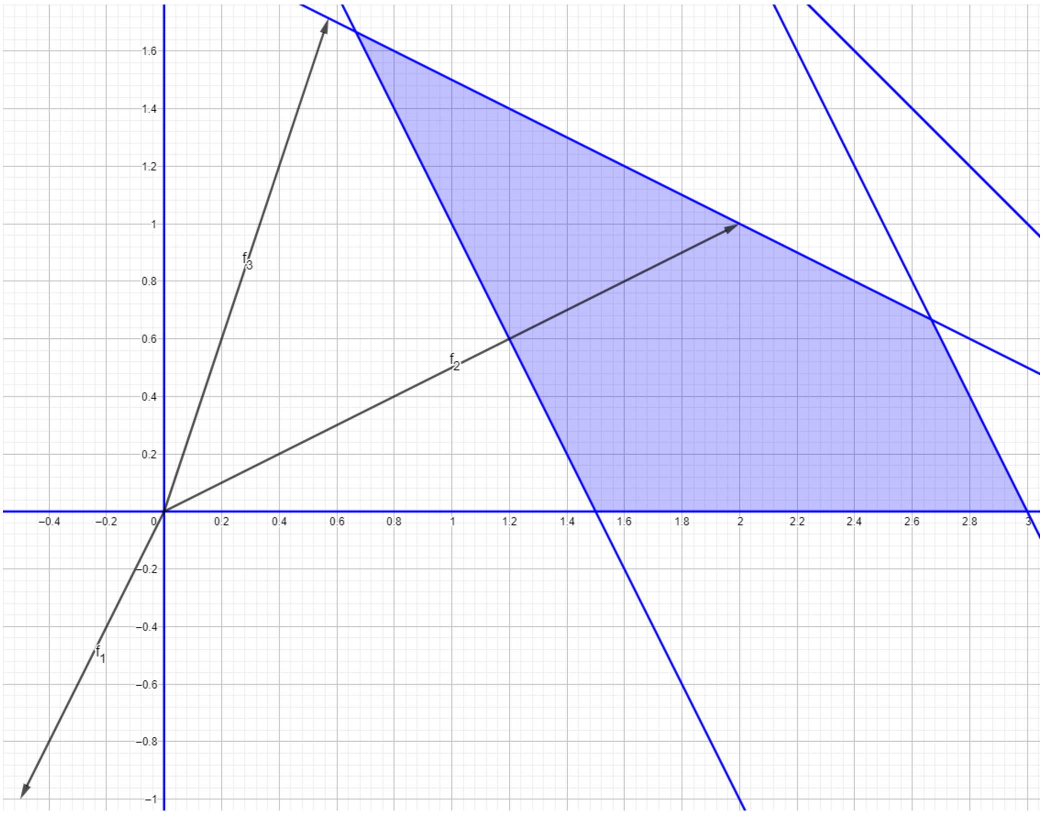
З графічних міркувань знаходимо

$$\tilde{x}_2 = \arg\max f_2(x_1, x_2) = (3 - t, 2t), \; t \in \left[0, \frac{1}{3}\right], \quad f_2^\star = \max_{x \in G_1} f_2(x_1, x_2) = 6.$$

Покладаючи величину поступки Δf_2 за другим критерієм рівною 3 отримуємо, що до допустимої області додається умова

$$f_2(x_1, x_2) \geq f_2^\star - \Delta f_2 = 3,$$

тому уточнена допустима область G_2 має вигляд:



З графічних міркувань знаходимо

$$\tilde{x}_3 = \arg\max f_3(x_1, x_2) = \left(\frac{2}{3}, 1\ \frac{2}{3}\right), \quad f_3^\star = \max_{x \in G_2} f_3(x_1, x_2) = 5\ \frac{2}{3}.$$

Оскільки це останній критерій, то ми не робимо поступок, а просто кажемо, що знайдена точка $\tilde{x}_3$ є розв'язком $x^\star$.

Наостанок зауважимо, що

$$f(x^\star) = \left(-4, 3, 5\ \frac{2}{3}\right).$$