28 січня 2019 р.

Задача 1. Для кожного з наступних відношень на множині натуральних чисел опишіть впорядковані пари, що належать відношенням:

1. $R = \{(x, y) | x + y = 9\}$;
2. $R = \{(x, y) | x + y < 7\}$;
3. $R = \{(x, y) | y = x^2\}$;
4. $R = \{(x, y) | 4x = y^2\}$.

Розв'язок.

1. Спершу задамо це відношення через цикл:
$$R = \left\{ (n, 9 - n) \middle| n = \overline{1..8} \right\}.$$
Також випишемо всі пари які входять до цього відношення:
$$R = \{(1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (7, 2), (8, 1)\}.$$

2. Спершу задамо це відношення через цикли:
$$R = \left\{ (n, k - n) \middle| n = \overline{1..k}, k = \overline{2..6} \right\}.$$
Також випишемо всі пари які входять до цього відношення:
$$R = \{(1, 5), (1, 4), (1, 3), (1, 2), (1, 1), (2, 4), (2, 3), \\ (2, 2), (2, 1), (3, 3), (3, 2), (3, 1), (4, 2), (4, 1), (5, 1)\}.$$

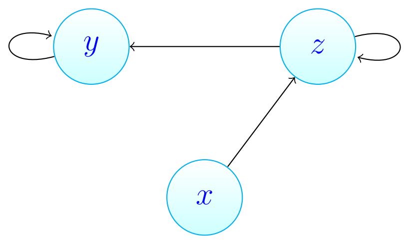
3. Спершу задамо це відношення словами: R – *відношення пар натуральних чисел вигляду*
$$(\text{число}, \text{квадрат цього числа}).$$
Також випишемо пари які входять до цього відношення:
$$R = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), \ldots\}.$$

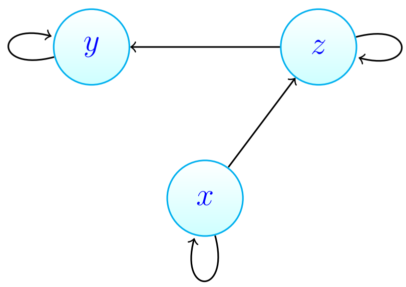
4. Спершу задамо це відношення словами: R – *відношення пар натуральних чисел вигляду*
$$(\text{квадрат половини другого числа}, \text{парне число}).$$
Також випишемо пари які входять до цього відношення:
$$R = \{(1, 2), (4, 4), (9, 6), (16, 8), \ldots\}.$$

Задача 2. Яке відношення задається матрицею A? Побудуйте для нього граф.

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;
3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

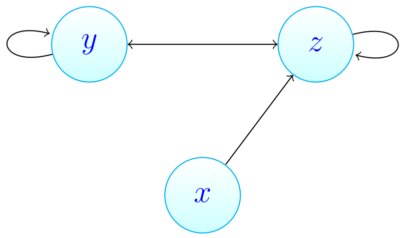
Розв'язок. Для зручності у цій задачі позначимо $\Omega = \{x, y, z\}$. Тоді

1. Спершу випишемо всі пари які входять до цього відношення:
$$R = \{(x, z), (y, y), (z, y), (z, z)\}.$$
Тепер наведемо його граф:


2. Спершу випишемо всі пари які входять до цього відношення:
$$R = \{(x, x), (x, z), (y, y), (z, y), (z, z)\}.$$
Тепер наведемо його граф:


3. Спершу випишемо всі пари які входять до цього відношення:
$$R = \{(x, z), (y, y), (y, z), (z, y), (z, z)\}.$$

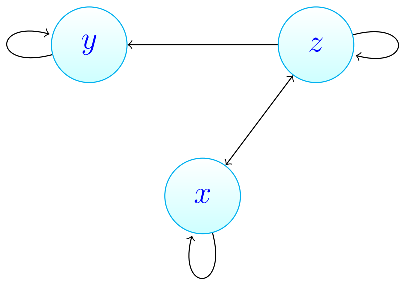
Тепер наведемо його граф:



4. Спершу випишемо всі пари які входять до цього відношення:

$$R = \{(x, x), (x, z), (y, y), (z, x), (z, y), (z, z)\}.$$

Тепер наведемо його граф:



Задача 3. Визначте, які з наступних відношень на множині людей рефлексивні, симетричні або транзитивні:

1. "мати тих же самих батьків";
2. "бути братом";
3. "буту старше" або "бути молодше";
4. "бути знайомим";
5. "бути не вище";

Розв'язок.

1. Рефлексивне, симетричне, транзитивне, тобто відношення еквівалентності.

2. Взагалі кажучи це відношення є композицією відношень[1] "бути чоловіком (особою чоловічої статі)" та "мати спільних батьків", на основі чого і проводиться подальший його аналіз.

   Або не рефлексивне (бо жінка не є своїм братом) або навіть антирефлексивне (якщо ми вважаємо що і чоловік не є своїм братом).

   Не симетричне (дочка X не є братом сина X але син X є братом дочки X), але і не антисиметрчине (бо існує X такий що у X існують два сини Y, Z, тоді Y брат Z і Z брат Y).

   Транзитивне, бо якщо X брат Y і Y брат Z, то у них всіх спільні батьки, і при цьому X чоловік (адже він брат Y).

3. Антирефлексивне, антисисетричне і транзитивне, тобто відношення строгого порядку.

4. Рефлексивне (бо людина знає[2] саму себе).

   Симетричне[3], бо якщо людина X знає людину Y то вони знайомі, а отже Y знає X.

   Взагалі кажучи не транзитивне, бо я знаю декана, декан знає ректора, але ректора я не знаю.

5. Рефлексивне, антисиметричне і транзитивне, тобто відношення нестрогого (часткового) порядку.

Задача 4. Маємо множину $A = \{1, 2, 3, 4\}$ і її розбиття на класи $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$. Задайте відношення еквівалентності R.

Розв'язок. Спершу випишемо всі пари які входять до цього відношення:

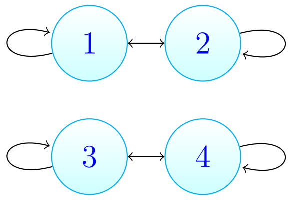
$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}.$$

Тепер наведемо його граф:

[1] Тут відношення "бути чоловіком" – унарне і застосовується до першого аргументу.

[2] Хоча якщо пригадати філософів Древньої Греції які стверджували що сенс життя у тому, щоб "пізнати себе", то можна засумніватися у тому що всі люди себе знають.

[3] Здебільшого саме так вважають у задачах математичних олімпіад, хоча і не завжди.



Для повноти опису наведемо також його матрицю:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$