

§ 2. Методи обробки експертної інформації

Методи обробки експертної інформації поділяються на три основні групи: статистичні методи, алгебраїчні методи й методи шкалювання. *Статистичні методи* базуються на припущенні, що відхилення оцінок експертів від істинних значень відбувається у силу випадкових причин. Суть *алгебраїчних методів* полягає у такому: на множині допустимих оцінок задається відстань і результуюча оцінка визначається як така, відстань якої до оцінок експертів (за певним критерієм) мінімальна. Ідея *методів шкалювання* полягає у тому, що за експертною інформацією про ступінь відмінності об'єктів устанавлюється мінімальний (або близький до мінімального) набір критеріїв та оцінок об'єктів за цими критеріями, що зумовляють вказані експертами відмінності.

Статистичні методи

Експертиза 1 (E1): $\Omega = \tilde{\Omega} = E^1$, L – експерти ізольовані, Q – обернений зв'язок відсутній, $a = \varphi(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$.

Тобто результуюча числова оцінка a знаходиться за формулою середньозваженого значення (математичного сподівання випадкової величини). Степінню узгодженості думок експертів є дисперсія:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i (a - a_i)^2.$$

Як модифікація (E1) розглядається така експертиза 2: $\Omega = \tilde{\Omega} = E^3$, $a = \varphi(a_1^1, a_1^2, a_1^3; \dots; a_n^1, a_n^2, a_n^3) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\gamma_1 a_i^1 + \gamma_2 a_i^2 + \gamma_3 a_i^3}{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}$, де a_i^1 – "оптимістична" оцінка i -го експерта, a_i^2 – "реалістична" і a_i^3 – "песимістична". Для експерта – "реаліста" (психологічний тип експерта можна визначити відповідним тестуванням) доцільно покладати $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 4$, $\gamma_3 = 1$; для експерта – "оптиміста" $\gamma_1 = 3$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 2$ (він "завищує" оптимістичну оцінку), для експерта – "песиміста" $\gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 3$ (він "занижує" оптимістичну оцінку). Степінь узгодженості між оцінками визначається величиною

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \alpha_i (a - a_i)^2,$$

де $\sigma_i^2 = (a_3^i - a_1^i) / \gamma_4$, γ_4 – степінь невпевненості i -го експерта у своїй оцінці (для експерта реаліста $\gamma_4 = 36$, для інших – $\gamma_4 = 25$).

В експертизах $E1$, $E2$ можна визначити статистичну значимість отриманих результатів. Задаємо ймовірність похибки p , вважаючи, що величина a розподілена за нормальним законом із центром \bar{a} і дисперсією σ^2 . Тоді: $\bar{a} - \Delta \leq a \leq \bar{a} + \Delta$, де $\Delta = t\sigma\sqrt{n}$, величина t має розподіл Ст'юдента з $(n-1)$ -м степенем свободи (визначаємо за таблицею розподілу Ст'юдента, за величиною p).

Опишемо застосування метода Делфі для $E1$ у вигляді такої експертизи 3: $\Omega = E^1$, $\tilde{\Omega} = \left\{ z \in E^k \mid \sum_{i=1}^k z_i = 1, z_i \geq 0 \right\}$.

Відображення ϕ задається так. Весь інтервал допустимих значень величин, що оцінюються, розбивається на k інтервалів: t_1, \dots, t_k . Експерт оцінює ймовірність попадання величини, що оцінюється, у кожен з k інтервалів. Нехай p_{ij} – оцінка ймовірності попадання у j -й інтервал, що дається i -м експертом. Тоді ймовірність попадання величини в інтервал t_j на основі думок усіх експертів оцінюється величиною: $p_{t_j} = \sum_i \alpha_i p_{ij}$, $j = \overline{1, k}$.

За колективну оцінку береться медіана q_2 побудованого розподілу, яка визначається з умови: $p(t \leq q_2) = 0,5$.

Емпірично встановлено, що процедуру можна зупиняти, коли діапазон квантілів $\Delta q = q_3 - q_1$ (де $p(t \leq q_3) = 0,75$, $p(t \leq q_1) = 0,25$) зменшився в 1,6 рази порівняно з початковим [5].

Експертиза 4 полягає у зіставленні індивідуальним ранжуванням експертів колективного ранжування: $\Omega = \tilde{\Omega} = \{\text{множина всіх перестановок } m \text{ об'єктів}\}$, експерти ізольовані, обернений зв'язок відсутній.

Відображення ϕ визначається так. Кожен експерт задає місце (ранг) кожного об'єкта: r_{ij} – ранг j -го об'єкта, визначеного i -м експертом.

Об'єкти впорядковуються відповідно до величин $r_j = \sum_{i=1}^n r_{ij}$, $j = \overline{1, m}$ (сума рангів кожного об'єкта по всіх експертизах; вважаємо, що експерти мають рівну компетентність) – на перше місце ставиться об'єкт з мінімальним r_j і т. д. Колективне ранжування може бути нестрогим (ми розглядаємо випадок строгих індивідуальних ранжувань).

Степінь узгодженості думок експертів визначається за допомогою "коефіцієнта конкордації" W , що визначається нижче. Розглянемо два крайніх випадки:

- ✓ ранжування всіх експертів співпадають;
- ✓ усі ранжування відмінні (вважаємо, що $n < m$!).

Оскільки $\sum_{j=1}^m r_j = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n r_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_{ij} = 0,5 \cdot nm(m+1)$ (експерти задають

ранги від 1 до m), то "середній ранг" $r_c = 1/m \sum_{j=1}^m r_j = 0,5 \cdot n(m+1)$ і за узгодженість експертів беруть суму квадратів відхилень r_j від середнього значення r_c . Коефіцієнтом конкордації W для випадку строгих індивідуальних ранжувань називається величина:

$$W = 12 \sum_{j=1}^m \left(r_j - \frac{1}{2} n(m+1) \right)^2 / n^2 (m^3 - m).$$

У випадку нестрогих індивідуальних ранжувань (Експертиза 5) об'єктам, які "ділять" місця, приписуються рівні ранги (так, якщо два об'єкти ділять місця 2–3, то кожен із них отримує ранг 2,5).

Коефіцієнт конкордації для нестроогого ранжування:

$$W = 12 \sum_{j=1}^m \left(r_j - \frac{1}{2} n(m+1) \right)^2 / \left(n^2 (m^3 - m) - n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} (t_{ij}^3 - t_{ij}) \right),$$

де k_i – число груп рівних рангів, введених i -м експертом; t_{ij} – кількість об'єктів у j -й групі, введеної i -м експертом.

Статистичну значимість ранжування перевіряють так. Вибирається допустима ймовірність похибки p ; вважається, що величина $n(m-1)W$ має χ^2 – розподіл з $(m-1)$ – м степенем свободи. За таблицею розподілу χ^2 знаходиться W_p і, якщо $W \geq W_p$, то отримане ранжування вважається статистично значимим (тобто значимим є узгодженість думок експертів). Якщо експерти не рівнокомпетентні, α_i –

вага i -го експерта, то $r_j = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_{ij}$, інші формули залишаються без змін

(оскільки $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$).

Експертиза 6 визначається для задачі знаходження колективного ранжування за нестрогими індивідуальними ранжуваннями за допомогою попарних порівнянь об'єктів.

Множина Ω така ж, як і в $E5$; експерти ізольовані, обернений зв'язок відсутній, $\tilde{\Omega}$ – множина всіх матриць $A = (a_{ij})$, де $a_{ij} \in \{0, 1\}$, $a_{ij} + a_{ji} = 1$ ($i \neq j$), $a_{ii} = 0$, $i, j = \overline{1, m}$. Кожен експерт робить C_m^2 порів-

нянь, порівнюючи кожен об'єкт із кожним. Результат порівнянь i -го експерта представляється матрицею A^i розмірності $m \times m$, у якій $a_{jk}^i = 1$ тоді й лише тоді, коли для i -го експерта об'єкт j переважає об'єкт k . Для будь-якої пари об'єктів або перший переважає другого, або навпаки; $a_{jj} = 0$ за визначенням.

Матриця A^i , що задається i -м експертом ($i = \overline{1, m}$), є матрицею деякого бінарного відношення, яке називається відношенням переваги i -го експерта. Очевидно, що бінарне відношення, що задається матрицею A^i є повним, антирефлексивним, антисиметричним і, взагалі кажучи, не є ациклічним.

Визначення 3.2.1. Відношення переваги з матрицею A може бути виражене рангами, якщо всі об'єкти, упорядковані так, що $a_{jk} = 1$ тоді й лише тоді, коли ранг j -го об'єкта менший за ранг k .

Теорема 3.2.1. Необхідною й достатньою умовою того, що перевага виражається рангами, є ациклічність відношення переваги.

Теорема 3.2.2. Властивості відношень переваги A^i приводять до еквівалентності умов ациклічності та наявності циклів довжини 3.

Відображення ϕ в $ЕБ$ визначається так. Будується матриця

$A = (a_{jk}) = \sum_{i=1}^n A^i$, де $A^i = (a_{jk}^i)$ – матриця оцінок i -го експерта. Знахо-

дяться величини $a_j = \sum_{k=1}^m a_{jk}$, $j = \overline{1, m}$. Об'єкт із максимальним a_j отри-

мує ранг 1 (він переважає максимальну кількість інших об'єктів) і т. д.

Коефіцієнтом сумісності думок експертів називається величина:

$$v = \begin{cases} 1 - 24d/m^3 - m, & \text{якщо } m \text{ непарне,} \\ 1 - 24d/m^3 - 4m, & \text{якщо } m \text{ парне,} \end{cases}$$

де d – число циклів довжини 3 у матриці A . Величину v для матриці A^i можна використовувати як оцінку компетентності i -го експерта.

Алгебраїчний метод

Для визначення колективної числової оцінки алгебраїчним методом використовується експертиза 7: $\Omega = \tilde{\Omega} = E^1$, експерти ізольовані, об'єднаний зв'язок відсутній. Відстань d між числовими оцінками a і b визначається як $d(a, b) = |a - b|$. За колективну оцінку a беруться, наприклад, оцінки:

$$\checkmark \quad a \in \text{Arg} \min_{a \in E^1} \sum_{i=1}^n \alpha_i d(a, a_i) \quad (\text{утилітарний критерій}),$$

✓ $a \in \text{Arg min}_{a \in E^1} \max_{i=1,n} \alpha_i d(a, a_i)$ (егалітарний критерій).

Для визначення колективного ранжування алгебраїчним методом експерти задають матриці $A^i = (a_{jk}^i)$, у яких $a_{jk}^i = 1$ тоді й лише тоді, коли об'єкт i передреє об'єкту k ; якщо об'єкти j і k рівноцінні або $j = k$, $a_{jk} = 0$; якщо $a_{jk} = 1$ ($j \neq k$), то $a_{kj} = -1$.

Ранжування A і відповідну йому матрицю A будемо позначати одним символом.

Визначення 3.2.2. Ранжування C знаходиться між ранжуваннями A і B , якщо для $\forall i, j = \overline{1, m}$ $a_{ij} \leq \overline{a_{ij}} \leq b_{ij}$ або $a_{ij} \geq c_{ij} \geq b_{ij}$.

Відстань між ранжуваннями вводиться аксіоматично:

A1. $d(A, B) \geq 0$, причому $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$;

A2. $d(A, B) = d(B, A)$ (симетричність);

A3. $d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$, причому рівність досягається тоді й лише тоді, коли ранжування B знаходиться між ранжуваннями A і C (аксіома трикутника);

A4. При однакових перестановках об'єктів у ранжуваннях A і B відстань між отриманими ранжуваннями $d(A', B') = d(A, B)$ (інваріантність відносно позначень);

A5. Якщо двоє ранжувань відрізняються одне від одного лише на частині об'єктів, то відстань між початковими ранжуваннями дорівнює відстані між ранжуваннями лише цих об'єктів;

A6. Мінімальна додатня відстань між ранжуваннями дорівнює 1.

Теорема 3.2.3. Аксіоми A1–A6 однозначно визначають відстань (відстань Хемінга) $d(A, B)$ при будь-якій довжині ранжувань $m \geq 2$, а

формула: $d(A, B) = 0,5 \cdot \sum_{i,j=1}^m |a_{ij} - b_{ij}|$, визначає єдину відстань $d(A, B)$,

що задовольняє аксіомам A1–A6.

Експертиза 8: $\Omega = \tilde{\Omega} = \{\text{матриці } A_i, \text{ елементи яких визначені вище}\}$, експерти ізольовані, обернений зв'язок відсутній. За відстань береться відстань Хемінга, колективне ранжування визначається критеріями:

✓ $A^{KS} \in \text{Arg min}_{A \in \tilde{A}} \sum_{i=1}^n \alpha_i d(A, A^i)$ (медіана Кемени–Снелла);

✓ $A^{VG} \in \text{Arg min}_{A \in \tilde{A}} \max_{i=1,m} \alpha_i d(A, A^i)$ (компроміс);

✓ $A^{SZ} \in \text{Arg min}_{A \in \tilde{A}} \sum_{i=1}^n \alpha_i d^2(A, A^i)$ (середнє значення).

Вище \tilde{A} – множина матриць $m \times m$ з елементами $a_{ij} \in \{+1, -1, 0\}$, що відповідають ранжуванням (тобто матриці ациклічні). Як видно – критерій 1 відповідає принципу утилітаризма, критерій 2 – егалітаризма.

Приклад. Нехай $n = m = 3$, $A^1 = A^2 = \langle a, b, c \rangle$, $A^3 = \langle b, a, c \rangle$ (позначення $\langle a, b, c \rangle$ означає: $a \succ b \succ c$). Випишемо відповідні матриці:

$$A^1 = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Потрібно знайти медіани 1, 2 на множині матриць, що відповідають ранжуванням: $A_1 = \langle a, b, c \rangle$, $A_2 = \langle a, c, b \rangle$, $A_3 = \langle b, a, c \rangle$, $A_4 = \langle b, c, a \rangle$, $A_5 = \langle c, a, b \rangle$, $A_6 = \langle c, b, a \rangle$. Випишемо відповідні матриці: $A_1 = A = B$, $A_3 = C$,

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо:

$$\begin{aligned} d(A_1, A^1) &= d(A_1, A^2) = 0, \quad d(A_1, A^3) = 2; \quad d(A_2, A^1) = d(A_2, A^2) = 2, \quad d(A_2, A^3) = 4; \\ d(A_3, A^1) &= d(A_3, A^2) = 2, \quad d(A_3, A^3) = 0; \quad d(A_4, A^1) = d(A_4, A^2) = 4, \quad d(A_4, A^3) = 2; \\ d(A_5, A^1) &= d(A_5, A^2) = 4, \quad d(A_5, A^3) = 6; \quad d(A_6, A^1) = d(A_6, A^2) = 6, \quad d(A_6, A^3) = 4. \end{aligned}$$

Таким чином, $A^{KS} = A^{VG} = A^{SZ} = \{A_1, A_3\}$ (цього слід було очікувати, оскільки ранжування двох експертів збіглися, ранжування третього відрізняються від їхнього ранжування лише однією перестановкою). Нехай, $A^1 = A_1$, $A^2 = A_4$, $A^3 = A_6$. Тоді $A^{KS} = \{A_3, A_4\}$, $A^{VG} = \{A_3\}$, $A^{SZ} = \{A_3\}$.

Методи шкалювання

У методах шкалювання експерти оцінюють попарні відмінності між об'єктами, вказують відповідні числа. Задача полягає у зіставленні кожному об'єкту точки простору E^r , $r \geq 1$, а всій системі, що складається з m об'єктів, m точок у E^r так, щоб відстані у E^r між точками були достатньо близькими до вказаних експертами чисел. Таким чином, розв'язок задачі оцінювання у цьому випадку є вектором довжини $m \cdot r$.

Експертиза 9 (одновимірне шкалювання): $\Omega = E^m$, $\tilde{\Omega} = \{\text{нестрогі ранжування}\}$, експерти ізольовані, оберненого зв'язку немає. Для побудови ϕ необхідно зробити такі операції:

✓ Обчислюється матриця $P = \sum_{i=1}^n A^i / n$, де A^i – матриця, що відповідає ранжуванню, даному i -м експертом. Елементи p_{jk} матриці P – імовірності переваги j -го об'єкта над k -м.

✓ За заданими p_{jk} обчислюються величини z_{ij} за формулами:

$$p_{jk} = \int_{-\infty}^{z_{jk}} \left(1/\sqrt{2\pi}\right) e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{ за таблицями нормального розподілу.}$$

✓ Формується матриця $Z = (z_{jk})$, знаходяться величини $z_j = \sum_{k=1}^m z_{jk}$.

Оцінкою об'єкта A_j є середнє $\bar{z}_j = z_j / m$, $j = \overline{1, m}$.

✓ Визначаються величини \bar{p}_j за формулою:

$$\bar{p}_j = G(\bar{z}_j) = \int_{-\infty}^{\bar{z}_j} \left(1/\sqrt{2\pi}\right) e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (3.2.1)$$

Нормалізовані величини $p_j^* = \bar{p}_j / \sum_{j=1}^m \bar{p}_j$ називаються показниками відносної важливості об'єктів.

✓ Здійснюється перевірка на несуперечність. Для цього за формулою (3.2.1) знаходяться $\bar{p}_{jk} = G(\bar{z}_j - \bar{z}_k)$ і обчислюються величини

$$\Delta_{jk} = \bar{p}_{jk} - p_{jk}. \text{ Визначається середнє відхилення } \bar{\Delta}_{jk} = \sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k}}^m |\Delta_{jk}| / (m(m-1)),$$

достатня малість якого свідчить про несуперечність ранжувань експертів.

Задача багатовимірною метричного шкалювання полягає у наступному. Задається симетрична матриця відмінностей $D = (D_{jk})$ між m об'єктами A_1, \dots, A_m на основі агрегування думок n експертів (наприклад, так, як у попередній експертизі). Необхідно знайти координати m точок $\alpha^j \in E^r$, що відповідають об'єктам, так, щоб матриця $X = (x_{jk})$ відстаней між цими точками була близькою до матриці початкових відмінностей D за певним критерієм. Якщо значення критерію обертається у нуль, то говорять, що задача має точний розв'язок.

В основі Експертизи 10 лежить метод простої ординації, який полягає в такому.

Розглянемо спосіб побудови точок $\alpha^1, \dots, \alpha^m \in E^m$, що відповідають об'єктам A_1, \dots, A_m . За A_1 і A_2 оберемо об'єкти, відстань D_{jk} між якими

в агрегованій матриці D максимальна. Тоді $a_1^1 = 0$, $a_1^2 = D_{jk}$; $a_j^1 = a_j^2 = 0$, $j = \overline{2, m}$. Побудовані точки належать півпростору E^1 , утвореного першою віссю E^m .

Нехай E^r – r -вимірний півпростір, що утворюється осями з номерами $1, \dots, r$, у якому вже знайдено точки a^1, \dots, a^{r+1} . У цих точок у E^m усі координати, починаючи з $(r+1)$ -ї, дорівнюють нулю. Проекції інших точок a_{r+2}, \dots, a_m в E^r знаходяться із заданих відстаней D_{jk} між об'єктами j і k , $j, k = \overline{1, m}$. Нехай координати проекції точки a^l , $l > r+1$, в E^r – це a_1^l, \dots, a_r^l , h_l – відстань між точкою a^l й підпростором E^r . Маємо: $D_{jl}^2 = h_l^2 + \sum_{s=1}^r (a_s^j - a_s^l)^2$,

$$j = \overline{1, r+1} \Rightarrow h_l^2 = D_{jl}^2 - \sum_{s=1}^r (a_s^j - a_s^l)^2, \quad j = \overline{1, r+1}. \quad (3.2.2)$$

Ліва частина останньої рівності не залежить від a^j . Прирівнюючи праві частини при j і $j+1$, отримаємо систему r рівнянь відносно r невідомих a_1^l, \dots, a_r^l :

$$D_{jl}^2 - \sum_{s=1}^r (a_s^j - a_s^l)^2 = D_{j+1,l}^2 - \sum_{s=1}^r (a_s^{j+1} - a_s^l)^2, \quad j = \overline{1, r}.$$

Розв'язавши цю систему при $l = \overline{r+2, m}$, отримаємо проекцію точки a^l в E^r . Із рівності (3.2.2) знайдемо h_l для $l = \overline{r+2, m}$ й покладемо $a_{r+1}^l = h_l$.

Оберемо об'єкт A_j , для якого $h_j = \max_{l=r+2, m} h_l$. Зіставимо йому у просторі E^m точку $a^j = (a_1^j, \dots, a_r^j, h_j, 0, \dots, 0)$. Перенумеруємо об'єкти A_{r+2}, \dots, A_m так, щоб вибраний об'єкт мав номер $r+2$. Таким чином, отримали координати точки a^{r+2} й проекції точок a^{r+3}, \dots, a^m у простір E^{r+1} . Критерій завершення процесу вибирається так: $\alpha = 1 - \tilde{s}/s$, де

$$\tilde{s} = \sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k}}^m \sum_{s=1}^{r+1} (a_s^j - a_s^k)^2, \quad s = \sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k}}^m D_{jk}^2.$$

Якщо α менше вибраного $\varepsilon > 0$, обчислення координат точок припиняємо і образами об'єктів A_1, \dots, A_m вважаються проекції точок a^1, \dots, a^m в E^r .

В основі експертизи 11 (метод "тріюк") лежать такі теоретичні побудови. Розглянемо трикутник зі сторонами D_{ij}, D_{ik}, D_{jk} (рис 3.2.1). За теоремою косинусів:

$$D_{ij}D_{ik} \cos \Theta = (D_{ij}^2 + D_{ik}^2 - D_{jk}^2) / 2.$$

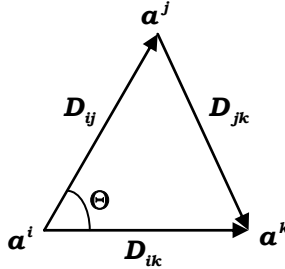


Рис. 3.2.1

Побудуємо матриці B^i , $i = \overline{1, m}$, з елементами: $b_{jk}^i = (D_{ij}^2 + D_{ik}^2 - D_{jk}^2) / 2$. Наступні властивості матриць B^i визначають існування точного розв'язку задачі метричного шкалювання й мінімальну розмірність простору E^r , при якому точний розв'язок існує.

Теорема 3.2.4. У випадку додатної напіввизначеності матриць B^i , $i = \overline{1, m}$ (тобто $(B^i x, x) \geq 0$ для $\forall x$) задача метричного шкалювання має точний розв'язок. Мінімальна розмірність простору E^r , $r = \min_i \rho_i$, де ρ_i – ранг матриці B^i , $i = \overline{1, m}$. За образи об'єктів A_s , $s = \overline{1, m}$, $s \neq i$, у просторі E^r можна взяти точки $a^s = (a_1^s, \dots, a_r^s)$, $s = \overline{1, m}$, такі, що $B^i = XX^T$, $X = (x_{pq})$, де $x_{pq} = a_q^p$, $p = \overline{1, m}$, $p \neq i$, $q = \overline{1, r}$, $a_i^l = 0$, $l = \overline{1, r}$.

У розглянутих випадках відображення ϕ є лінійним. У загальному випадку неможлива побудова точок a^j , $j = \overline{1, m}$, у просторі достатньо малої розмірності E^r із збереженням бажаної точності. Тому використовуються нелінійні методи, що базуються на інтерполяційних процедурах.

Основою Експертизи 12 ("нелінійне багатовимірне шкалювання") є така процедура. Упорядкувавши за зростанням m^2 елементів матриці відмінностей D , отримаємо лінійний порядок $r(A)$. Відобразимо об'єкти A_j у простір E^r , лінійний порядок зі зростання елементів матриці X відстаней між точками a^j , $j = \overline{1, m}$, позначимо через $r(a)$.

Виконуємо операції:

1. Будуємо ранжування $r(A)$ і нормалізуємо елементи матриці D так, щоб мінімальний дорівнював нулю, максимальний – одиниці. Отриману матрицю позначимо через \tilde{D} .

2. Точки a^j , $j = \overline{1, m}$, знаходимо як вершини правильного $(m-1)$ -вимірного симплекса, центр якого знаходиться у початку координат, ребра мають довжину 1. Координати вершин симплекса обчислюються за формулами:

$$a_{2q-1}^j = \cos[2q(j-1)\pi/m]/\sqrt{m},$$

$$a_{2q}^j = \sin[2q(j-1)\pi/n]/\sqrt{m},$$

де $q = \overline{1, [(m-1)/2]}$ ($[x]$ – ціла частина x).

Для парного m проекція на $(m-1)$ -у вісь: $a_{m-1}^j = (-1)^{j-1}/\sqrt{2m}$.

3. Будуємо ранжування $r(a)$. Якщо $r(a) = r(A)$, то обчислення закінчується. Інакше нормуємо матрицю X відстаней між точками a^j , $j = \overline{1, m}$ (аналогічно матриці D , крок 1), отримуючи \tilde{X} .

4. Знаходимо нові значення координат точок a^j , $j = \overline{1, m}$, за формулами:

$$\bar{a}_k^j = a_k^j + \Delta a_k^j, \quad j = \overline{1, m-1},$$

$$\text{де } \Delta a_k^j = \sum_{i \neq j} P_{ji}^k + R_{ji}^k, \quad P_{ji}^k = \frac{\alpha(\tilde{D}_{ji} - \tilde{x}_{ji})(a_k^i - a_k^j)}{x_{ji}}, \quad R_{ji}^k = \frac{\beta(\tilde{D}_{ji} - \bar{D})(a_k^i - a_k^j)}{D_{ji}},$$

$$\bar{D} = \sum_{j,i=1}^m \tilde{D}_{ji} / m^2; \quad \alpha = 0,2, \quad \beta = 0,05.$$

5. Покладемо $a^j = \bar{a}^j$, $j = \overline{1, m}$, будуємо ранжування $r(a)$ і переходимо на крок 1.

Методи побудови кардинальних оцінок

У практичних задачах дуже часто важливо не лише вказати факт переваги одного об'єкта над іншим (або побудувати ранжування), але й оцінити ступінь цієї переваги.

Нехай ранжуванню об'єктів $o_1 \succ o_2 \succ \dots \succ o_m$ відповідає вектор числових оцінок $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$.

Розглянемо основні методи визначення оцінок.

Метод фон Неймана–Моргенштерна (експертиза 13). Нехай $m = 2$. Маємо ранжування $o_1 \succ o_2$ і об'єкту o_2 приписується оцінка $\beta_2 = 1$.

Експерт вибирає таке значення величини γ , $0 < \gamma \leq 1$, при якому, на його думку, $\gamma\beta_1 = \beta_2$. З останнього співвідношення маємо $\beta_1 = 1/\gamma$.

Якщо $m = 3$, то $\beta_3 = 1$ і експерт визначає значення γ_1, γ_2 з умов $\gamma_1\beta_1 = \beta_3$, $\gamma_2\beta_2 = \beta_3$, звідки $\beta_1 = 1/\gamma_1$, $\beta_2 = 1/\gamma_2$. Після цього експерт повинен визначити γ_3 з умови $\gamma_3\beta_1 = \beta_2$. Оцінки об'єктів вважаються узгодженими, якщо $\gamma_3 = \gamma_1/\gamma_2$, інакше експерт переглядає початкові значення γ_1, γ_2 .

При m об'єктах число перевірок дорівнює $1 + 2 + \dots + m - 2 = (m-1)(m-2)/2$. Загальне число оцінок, які повинен встановити експерт, складається з $m-1$ початкових оцінок і $(m-1)(m-2)/2$ вторинних оцінок, всього $m(m-1)/2 = C_m^2$.

Отримані внаслідок оцінки $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ є абсолютними. Для отримання відносних оцінок потрібно обчислити значення $g_i = \beta_i / \sum_{j=1}^m \beta_j$.

Для підвищення "об'єктивності" процедури її можна легко узагальнити на випадок n експертів (використавши, наприклад, алгоритм, описаний в §§ 1, 2).

В експертизі 14 (метод Гергомена–Акофа) експерт будує ранжування (нехай це буде: $o_1 \succ o_2 \succ \dots \succ o_m$).

Об'єкту o_m приписується оцінка $\beta_m = 1$, останнім об'єктам експерт виставляє оцінки, порівнюючи їх з об'єктом o_m . Значення всіх оцінок повинно монотонно спадати зі зростанням порядкових номерів об'єктів.

Далі об'єкт o_1 послідовно порівнюється з "сумою" об'єктів $o_2 + \dots + o_n, o_2 + \dots + o_{n-1}, \dots, o_2 + o_3$ до того часу, поки o_1 не стане еквівалентним або кращим за відповідну "суму", тобто експерт вважає, що

$\beta_1 \geq \sum_{i=2}^s \beta_i$, $s \geq 3$. Після цього експерт порівнює o_2 із "сумами"

$\sum_{i=3}^l o_i, l \leq m$, і т. д. У знайдені нерівності підставляються оцінки об'єктів

і якщо нерівності справедливі, то призначені експертом оцінки і є шуканими. Інакше оцінки коректуються.

У цьому методі кількість початкових оцінок дорівнює C_m^2 , але самі порівняння для експертів є складнішими, оскільки кожного разу один об'єкт порівнюється з декількома.

Контрольні завдання до § 2

1. На основі коефіцієнтів компетентності з п. 7 контрольних завдань до § 1 спрогнозувати результат вибраного футбольного матчу (прогноз погоди на певну дату) на основі колективної оцінки. Порівняти прогнози для різної кількості експертів: $n = 2, 3, 5, 10$.

2. Для вибраних експертів визначити (іншими експертами) колективні оцінки їхньої "оптимістичності", "реалістичності", "песимістичності". Врахувати отримані оцінки в прогнозуванні з § 1. Порівняти ступінь достовірності прогнозів.

3. Провести експертизу серед студентів групи на визначення колективного ранжування "смертних гріхів": гнів, гордіня, переїдання, зневіра ("уныние"), заздрість, срібололюбство, блуд. Побудувати колективне ранжування за допомогою методів, описаних вище в § 2. Результати порівняти.

4. У кінці XX ст. в Сіетлі (США) зібрались представники різних релігійних концесій і визначили ранжування на "множині якостей homo sapiens", що будуть визначальними для XXI ст., – законотворчість, чесність, громадянськість, релігійність, порядність, цивілізованість. Проведіть експертизу, побудуйте колективне ранжування.

5. У Франції було проведено опитування серед представниць "кращої половини людства" та визначено колективне ранжування якостей представників "гіршої половини людства". Якості такі: зовнішні дані, доброта, матеріальне забезпечення, інтелект, чоловічі якості (надійність, сміливість), іронічність. Проведіть експертизу серед студенток групи та визначте колективне ранжування. Цікаво відмітити, що результати експертизи, що її проводив один з авторів протягом років серед різних вікових груп українок ні разу не збігався (навіть у індивідуальних пріоритетах) із колективним ранжуванням французенок.

6. Кожен буде індивідуальне ранжування на множині міст (Москва, Париж, Нью-Йорк, Рим, Лондон, Токіо, Сідней) і методами фон Неймана – Моргенштерна і Гермогена – Акофа оцінює ступінь переваги в бажанні відвідати ці міста.

7. Одним із методів шкалювання провести експертизу для проблеми, описаної в § 6.