1 Комплексні числа

Для зручності для читача ми викладемо тут основні визначення і факти, що стосуються до поняття комплексного числа, дій з ними, та їх геометричної ілюстрації.

1.1 Комплексні числа

Комплексним числом називається вираз вигляду $x + iy$, де x і y – дійсні числа, а i – символ, який називається уявною одиницею. Числа x і y називаються *дійсною* і *уявною* частинами комплексного числа $x + iy$ і позначаються символами

$$x = \mathrm{Re}(x + iy), \quad y = \mathrm{Im}(x + iy). \tag{1.1.1}$$

Якщо, зокрема, $y = 0$, то $x + i0$ *ототожнюється* з дійсним числом x. Якщо ж $x = 0$, то $0 + iy$ позначається просто iy і називається *чисто уявним.*

Будемо казати, що комплексні числа $x_1 + iy_1$ і $x_2 + iy_2$ *рівні*,

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2, \tag{1.1.2}$$

тоді і тільки тоді, коли $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Відзначимо також, що якщо $x_2 = x_1$, а $y_2 = -y_1$, то комплексне число $x_2 + iy_2$ називається *спряженим* до $x_1 + iy_1$ і позначається символом $\overline{x_1 + iy_1}$. Таким чином,

$$\overline{x + iy} = x - iy. \tag{1.1.3}$$

Перейдемо до операцій над комплексними числами.

1.1.1 Операції над комплексними числами

Сумою $z_1 + z_2$ комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ називається комплексне число

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \tag{1.1.4}$$

Додавання *комутативне*:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \tag{1.1.5}$$

та *асоціативне*:

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3. \tag{1.1.6}$$

Додавання має *обернену* операцію: для довільних двох комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ існує таке z, що $z_2 + z = z_1$. z називається *різницею* чисел z_1 і z_2 і позначається $z_1 - z_2$. Очевидно,

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \tag{1.1.7}$$

Добутком $z_1 \cdot z_2$ комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ називається комплексне число

$$z = z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i(x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2). \tag{1.1.8}$$

Множення *комутативне*:

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1, \tag{1.1.9}$$

асоціативне:

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3, \tag{1.1.10}$$

і *дистрибутивне* відносно додавання:

$$(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3. \tag{1.1.11}$$

При $z_1 = z_2 = i$ з визначення множення випливає, що

$$i \cdot i = -1. \tag{1.1.12}$$

Якщо z_1 і z_2 – дійсні числа, то визначення (1.1.8) збігається зі звичайним.

Легко помітити, що формула (1.1.8) отримується при множенні $x_1 + iy_1$ та $x_2 + iy_2$ за звичайними правилами алгебрі та заміною добутку $i \cdot i$ на -1.

Відзначимо також, що добуток комплексного числа $z = x + iy$ на спряжене завжди невід'ємний. Справді, з рівності (1.1.8) маємо:

$$z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 \geq 0. \tag{1.1.13}$$

Множення має *обернену* операцію якщо тільки заданий множник не дорівнює нулю. Нехай $z_2 \neq 0$, то можна знайти таке число z, що $z_2 \cdot z = z_1$. Для цього, згідно до (1.1.8), потрібно розв'язати систему

$$\begin{cases} x_2 \cdot x - y_2 \cdot y = x_1, \\ y_2 \cdot x + x_2 \cdot y = y_1, \end{cases} \tag{1.1.14}$$

яка при $z_2 \neq 0$ завжди має єдиний розв'язок, адже її *визначник* $x_2^2 + y_2^2 > 0$. Це число z називається *часткою* двох чисел z_1 і z_2 і позначається символом z_1/z_2. Розв'язуючи систему (1.1.14), отримуємо

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{x_1^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{y_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \qquad (1.1.15)$$

Добуток n рівних чисел z називається *n-им степенем* числа z і позначається символом z^n:

$$z^n = \underbrace{z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ разів}}. \qquad (1.1.16)$$

Обернена операція – *знаходження кореня* – визначається наступним чином: число w називається *коренем n-го степеня* з z, якщо $w^n = z$ (позначається $\sqrt[n]{z}$, причому для $n = 2$ пишуть просто $\sqrt{z}$).

Нижче ми побачимо, що для довільного $z \neq 0$ корінь $\sqrt[n]{z}$ має n *різних* значень.

Рівність (1.1.12) ми можемо тепер записати у вигляді $i^2 = -1$, і для уявної одиниці i маємо

$$i = \sqrt{-1} \qquad (1.1.17)$$

(тут $\sqrt{-1}$ позначає одне з двох його можливих значень).

1.2 Геометрична ілюстрація

Розглянемо площину декартових координат xOy і домовимося зображати комплексне число $z = x + iy$ *точкою* з координатами (x, y).

При цьому дійсні числа будуть зображені точками осі x (яку будемо називати *дійсною віссю*), а чисто уявні числа – точками осі y (яку будемо називати *уявною віссю*).

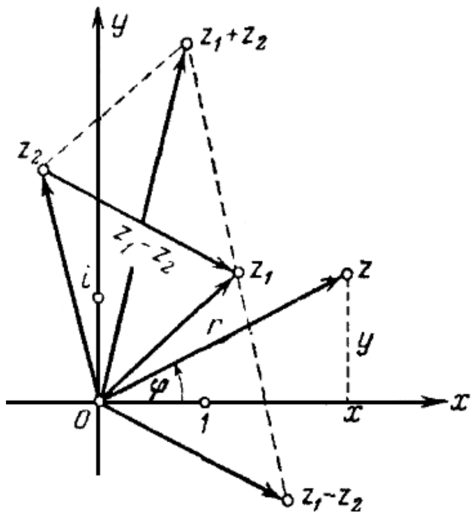
Зокрема, *зображенням* числа i слугуватиме точка $(0, 1)$ уявної осі.

Легко бачити, що існує і *обернена* відповідність: кожній точці площини xOy з координатами (x, y) відповідатиме цілком конкретне комплексне число $x + iy$.

Це дозволяє нам надалі *не розрізняти* поняття комплексного числа та точки площини і використовувати обороти "точка $1 + i$", "трикутник

$z_1 z_2 z_3$" та подібні.

Далі, кожній точці (x, y) відповідає цілком конкретний *вектор* – радіус-вектор цієї точки, а кожному радіус-вектору, що лежить у площині – цілком конкретна точка – його кінець:



З цього малюнку зрозумілий *геометричний зміст* додавання і віднімання комплексних чисел.

Надалі наряду з представленням комплексних чисел у декартових координатах, корисно буде мати їх представлення у *полярних* координатах. Для цього, як зазвичай, суміщаємо полярну вісь з додатною піввіссю x, а полюс – з початком координат.

Тоді, якщо позначити через r полярний *радіус*, а через φ – полярний *кут* точки z, то будемо мати

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{1.2.1}$$

Полярний радіус r називається *модулем* комплексного числа z і позначається символом $|z|$, кут φ – його *аргументом* і позначається символом $\operatorname{Arg} z$.

Модуль комплексного числа визначається *однозначно*:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0, \tag{1.2.2}$$

а його аргумент визначається *з точністю до* $2k\pi$:

$$\varphi = \operatorname{Arg} z = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) + 2k\pi, & \text{(I та IV квадранти)}, \\ \\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) + (2k+1)\pi, & \text{(II і III квадранти)}, \end{cases} \tag{1.2.3}$$

де arctan позначає головне значення Arctan, тобто таке, що належить $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, k – довільне ціле число.

Надалі, наряду з $\operatorname{Arg} z$ ми будемо використовувати символ $\arg z$ який буде позначати *одне* зі значень $\operatorname{Arg} z$, здебільшого головне.

Виконуються наступні нерівності:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|; \quad |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||. \tag{1.2.4}$$

Причому рівність *досягається* лише коли $\operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2$, або одне з чисел нуль.

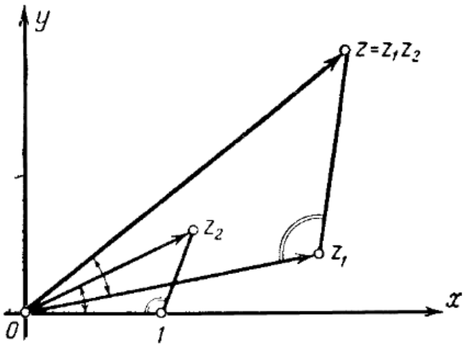
З визначення (1.1.8) попереднього пункту випливає, що при множенні комплексних чисел їх модулі *множаться*, а їх аргументи *додаються*. Справді,

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2((\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2)+ \\ + i(\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \sin\varphi_2 \cdot \cos\varphi_1)) = \\ = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

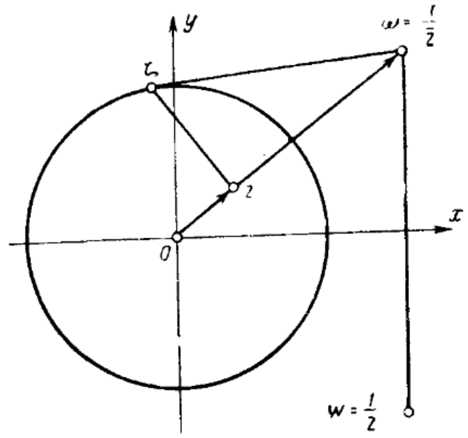
Звідси випливає, що при множенні комплексного числа z_1 на z_2 вектор z_1 *розтягується* в $|z_2|$ разів і повертається (проти годинникової стрілки) на кут $\arg z_2$.

Зокрема, множення комплексного числа z на i зводиться до повороту (без розтягнення) вектору z на *прямий* кут проти годинникової стрілки.

Для побудови добутку $z = z_1 \cdot z_2$ достатньо на відрізку Oz_1 як на основі побудувати трикутник Oz_1z який *подібний* трикутнику Oz_1z_2.



Ділення комплексного числа z_1 на z_2 зводиться до множення z_1 на $1/z_2$, тому достатньо з'ясувати геометричний зміст операції $w = 1/z$. Нехай спершу $|z| < 1$:



Опустимо із точки z перпендикуляр на промінь Oz і через точку ζ перетину перпендикуляра із колом $|z| = 1$ проведемо *дотичну* до цього кола.

Для точки ω перетину побудованої дотичної із променем Oz маємо

$$\operatorname{Arg} \omega = \operatorname{Arg} z, \tag{1.2.6}$$

а з подібності прямокутних трикутників $Oz\zeta$ і $O\zeta\omega$ маємо

$$|\omega|/|\zeta| = |\zeta|/|z|, \tag{1.2.7}$$

звідки $|\omega| = 1/|z|$, адже $|\zeta| = 1$.

Таким чином, число ω є спряженим до числа $1/z$, $\omega = 1/\overline{z}$, і для отримання точки $w = 1/z$ достатньо побудувати точку, *симетричну* до точки

ω відносно дійсної вісі.

Перехід від точки z до точки $\omega = 1/\overline{z}$ називається *інверсією*, або *симетрією відносно* одиничного *кола* $|z| = 1$.

Таким чином, операція $w = 1/z$ геометрично зводиться до *двох послідовних симетрій* – інверсії і симетрії відносно дійсної вісі.

Якщо ж $|z| > 1$ то описані побудови варто проводити у *зворотному* порядку, а якщо $|z| = 1$, то точка $\omega = 1/\overline{z}$ збігається з точкою z і побудова $w = 1/z$ зводиться до симетрії відносно дійсної вісі.

Геометричний сенс піднесення до степеня зрозумілий з геометричного сенсу множення.

Для побудови коренів степеню n із z помітимо, що із визначення кореня і формули (1.2.5) для $w = \sqrt[n]{z}$ маємо

$$|w|^n = |z|, \quad n \arg w = \arg z, \tag{1.2.8}$$

тому

$$|w| = \sqrt[n]{z}, \quad \arg w = \frac{\arg z}{n}. \tag{1.2.9}$$

Перше зі співвідношень (1.2.9) показує, що модулі всіх коренів рівні, а друге – що їх аргументи відрізняються на кратне $2\pi/n$, бо до значення $\arg z$ можна додавати кратне 2π.

Звідси випливає, що корінь степеню n із довільного комплексного числа $z \neq 0$ має n *різних* значень, і що це значення розташовані у вершинах правильного n-кутника вписаного у коло $|w| = \sqrt[n]{|z|}$: