Зміст

1 Комплексні числа

1.1 Комплексні числа

Комплексним числом називається вираз вигляду $x + iy$, де x і y – дійсні числа, а i – символ, який називається уявною одиницею. Числа x і y називаються *дійсною* і *уявною* частинами комплексного числа $x + iy$ і позначаються

$$z = \mathrm{Re}(x + iy), \quad y = \mathrm{Im}(x + iy). \tag{1.1.1}$$

Якщо, зокрема, $y = 0$, то $x + i0$ *ототожнюється* з дійсним числом x. Якщо ж $x = 0$, то $0 + iy$ позначається просто iy і називається *чисто уявним.*

Будемо казати, що комплексні числа $x_1 + iy_1$ і $x_2 + iy_2$ *рівні*,

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2, \tag{1.1.2}$$

тоді і тільки тоді, коли $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Відзначимо також, що якщо $x_2 = x_1$, а $y_2 = -y_1$, то комплексне число $x_2 + iy_2$ називається *спряженим* до $x_1 + iy_1$ і позначається символом $\overline{x_1 + iy_1}$. Таким чином,

$$\overline{x + iy} = x - iy. \tag{1.1.3}$$

Сумою $z_1 + z_2$ комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ називається комплексне число

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \tag{1.1.4}$$

Додавання *комутативне* та *асоціативне*:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1,$$
$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3.$$

Додавання має обернену операцію: для довільних двох комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ існує таке z, що $z_2 + z = z_1$. z називається *різницею* чисел z_1 і z_2 і позначається $z_1 - z_2$. Очевидно,

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \tag{1.1.5}$$

Добутком $z_1 \cdot z_2$ комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ називається комплексне число

$$z = z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i(x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2). \tag{1.1.6}$$

Множення *комутативне*, *асоціативне*, і *дистрибутивне* відносно додавання:

$$
\begin{gathered}
z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1, \\
z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3, \\
(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3.
\end{gathered}
$$

При $z_1 = z_2 = i$ з визначення множення випливає, що

$$i \cdot i = -1. \tag{1.1.7}$$

Відзначимо також, що добуток комплексного числа $z = x + iy$ на спряжене завжди невід'ємний. Справді, з рівності (1.1.6) маємо:

$$z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 \geq 0. \tag{1.1.8}$$

Множення має обернену операцію якщо тільки заданий множник не дорівнює нулю. Нехай $z_2 \neq 0$, то можна знайти таке число z, що $z_2 \cdot z = z_1$. Для цього, згідно до (1.1.6), потрібно розв'язати систему

$$\begin{cases} x_2 \cdot x - y_2 \cdot y = x_1, \\ y_2 \cdot x + x_2 \cdot y = y_1, \end{cases} \tag{1.1.9}$$

яка при $z_2 \neq 0$ завжди має єдиний розв'язок, адже її визначник $x_2^2 + y_2^2 > 0$. Це число z називається *часткою* двох чисел z_1 і z_2 і позначається символом z_1/z_2. Розв'язуючи систему (1.1.9), отримуємо

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{x_1^2 + y_2^2} + i\frac{y_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \tag{1.1.10}$$

Добуток n рівних чисел z називається *n-им степенем* числа z і позначається символом z^n:

$$z^n = \underbrace{z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ раз}}. \tag{1.1.11}$$

Зворотна операція – *знаходження кореня* – визначається наступним чином: число w називається *коренем n-го степеня* з z, якщо $w^n = z$ (позначається $\sqrt[n]{z}$, причому для $n = 2$ пишуть просто $\sqrt{z}$).

Рівність (1.1.7) ми можемо тепер записати у вигляді $i^2 = -1$, і для уявної одиниці i маємо

$$i = \sqrt{-1} \tag{1.1.12}$$

(тут $\sqrt{-1}$ позначає одне з двох його можливих значень).

1.2 Геометрична ілюстрація

Розглянемо площину декартових координат xOy і домовимося зображати комплексне число $z = x + iy$ точкою з координатами (x, y).

При цьому дійсні числа будуть зображені точками осі x (яку будемо називати *дійсною віссю*), а чисто уявні числа – точками осі y (яку будемо називати *уявною віссю*).

Далі, кожній точці (x, y) відповідає цілком конкретний *вектор* – радіус-вектор цієї точки, а кожному радіус-вектору, що лежить у площині – цілком конкретна точка – його кінець:

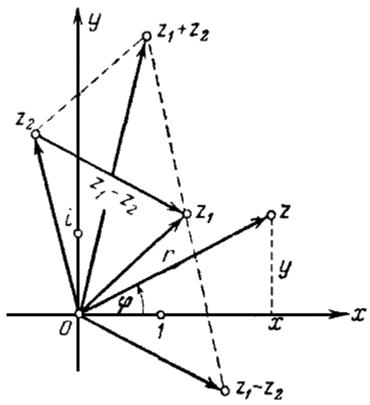

Рис. 1: геометричне зображення комплексних чисел та операцій над ними

Надалі наряду з представленням комплексних чисел у декартових координатах, корисно буде мати їх представлення у *полярних* координатах. Для цього, як зазвичай, суміщаємо полярну вісь з додатною піввіссю x, а полюс – з початком координат.

Тоді, якщо позначити через r полярний *радіус*, а через φ – полярний *кут* точки z, то будемо мати

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{1.2.1}$$

Полярний радіус r називається *модулем* комплексного числа z і позначається символом $|z|$, кут φ – його *аргументом* і позначається символом $\operatorname{Arg} z$.

Модуль комплексного числа визначається *однозначно*:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0, \tag{1.2.2}$$

а його аргумент визначається *з точністю до* $2k\pi$:

$$\varphi = \operatorname{Arg} z = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) + 2k\pi, & \text{(I та IV квадранти)}, \\ \\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) + (2k+1)\pi, & \text{(II і III квадранти)}, \end{cases} \tag{1.2.3}$$

де $\arctan$ позначає головне значення Arctan, тобто таке, що належить $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, k – довільне ціле число.

Надалі, наряду з $\operatorname{Arg} z$ ми будемо використовувати символ $\arg z$ який буде позначати *одне* зі значень $\operatorname{Arg} z$, здебільшого головне.

Виконуються наступні нерівності:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2|; \\ |z_1 - z_2| &\geq ||z_1| - |z_2||. \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

Причому рівність *досягається* лише коли $\operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2$, або одне з чисел нуль.

З визначення (1.1.6) попереднього пункту випливає, що при множенні комплексних чисел їх модулі *множаться*, а їх аргументи *додаються*. Справді,

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2((&\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) + \\ &+ i(\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \sin\varphi_2 \cdot \cos\varphi_1)) = \\ &= r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

Звідси випливає, що при множенні комплексного числа z_1 на z_2 вектор z_1 *розтягується* в $|z_2|$ разів і повертається (проти годинникової стрілки) на кут $\arg z_2$.

Зокрема, множення комплексного числа z на i зводиться до повороту (без розтягнення) вектору z на *прямий* кут проти годинникової стрілки.

Для побудови добутку $z = z_1 \cdot z_2$ достатньо на відрізку Oz_1 як на основі побудувати трикутник Oz_1z який *подібний* трикутнику $O1z_2$.

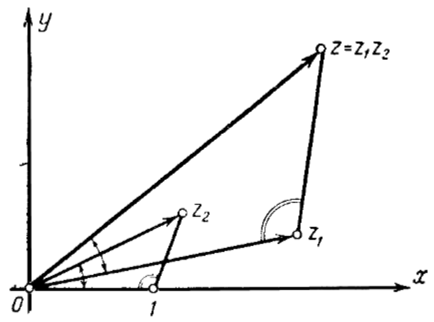

Рис. 2: побудова добутку двох комплексних чисел

Ділення комплексного числа z_1 на z_2 зводиться до множення z_1 на $1/z_2$, тому достатньо з'ясувати геометричний зміст операції $w = 1/z$. Нехай спершу $|z| < 1$:

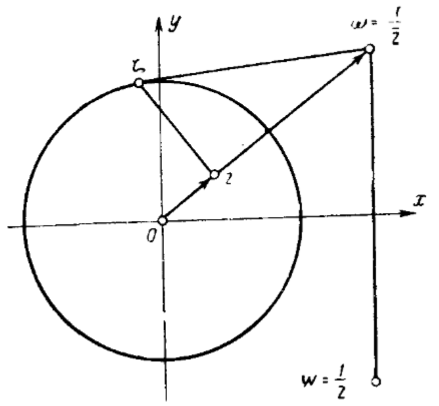

Рис. 3: геометричний зміст операції $w = 1/z$

Опустимо із точки z перпендикуляр на промінь Oz і через точку ζ перетину перпендикуляра із колом $|z| = 1$ проведемо дотичну до цього кола.

Для точки ω перетину побудованої дотичної із променем Oz маємо $\operatorname{Arg} \omega = \operatorname{Arg} z$, а з подібності прямокутних трикутників $Oz\zeta$ і $O\zeta\omega$ маємо $|\omega|/|\zeta| = |\zeta|/|z|$, звідки $|\omega| = 1/|z|$, адже $|\zeta| = 1$.

Таким чином, число ω є спряженим до числа $1/z$, $\omega = 1/\overline{z}$, і для отримання точки $w = 1/z$ достатньо побудувати точку, симетричну до точки ω відносно дійсної вісі.

Перехід від точки z до точки $\omega = 1/\overline{z}$ називається *інверсією*, або *симетрією відносно* одиничного *кола* $|z| = 1$.

Таким чином, операція $w = 1/z$ геометрично зводиться до *двох послідовних симетрій* – інверсії і симетрії відносно дійсної вісі.

Якщо ж $|z| > 1$ то описані побудови варто проводити у *зворотному* порядку, а якщо $|z| = 1$, то точка $\omega = 1/\overline{z}$ збігається з точкою z і побудова $w = 1/z$ зводиться до симетрії відносно дійсної вісі.

Геометричний сенс піднесення до степеня зрозумілий з геометричного сенсу множення.

Для побудови коренів степеню n із z помітимо, що із визначення кореня і формули (1.2.5) для $w = \sqrt[n]{z}$ маємо $|w|^n = |z|$, $n \arg w = \arg z$, тому

$$|w| = \sqrt[n]{z}, \quad \arg w = \frac{\arg z}{n}. \tag{1.2.6}$$

Перше зі співвідношень (1.2.6) показує, що модулі всіх коренів рівні, а друге – що їх аргументи відрізняються на кратне $2\pi/n$, бо до значення $\arg z$ можна додавати кратне 2π.

Звідси випливає, що корінь степеню n із довільного комплексного числа $z \neq 0$ має n різних значень, і що це значення розташовані у вершинах правильного n-кутника вписаного у коло $|w| = \sqrt[n]{|z|}$:

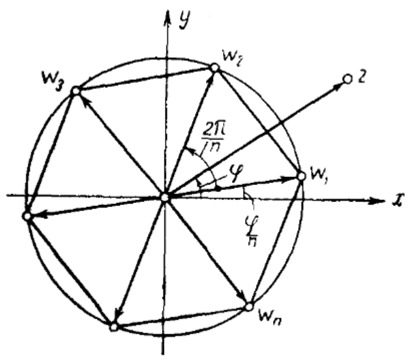

Рис. 4: корені із комплексного числа

2 Функції комплексної змінної

2.1 Геометричні поняття

ε-околом точки a називається відкритий круг радіусу ε з центром в a, тобто сукупність точок z які задовольняють нерівності $|z - a| < \varepsilon$.

Множина *відкрита* якщо разом з кожною своєю точкою вона містить якийсь ε-окіл цієї точки. Множина називається *зв'язною* якщо для довільних двох точок цієї множини існує ламана яка їх з'єднує і повністю належить множині. *Областю* на комплексній площині називають відкриту і зв'язну множину.

Граничною точкою області D називається точка яка сама не належить D, але у довільному околі якої є точки з D. Сукупність граничних точок області називається *границею* цієї області. Область D із приєднаною до неї границею називають *замкнутою областю* і позначають символом $\overline{D}$.

Надалі будемо вважати, що границя області складається зі скінченної кількості замкнутих ліній, розрізів, і точок:

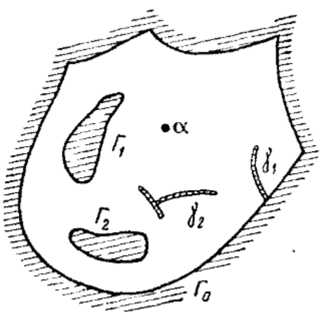

Рис. 5: область і її границі

Лінії і розрізи що входять до складу границі будемо вважати *кусково-гладкими*, тобто такими, дотична до яких змінюється неперервно.

Область D називається *обмеженою* якщо вона належить якомусь кругу $|z| < R$. Якщо область D обмежена, то кількість зв'язних частин у границі називається *порядком зв'язності* цієї області. Зокрема, якщо границя області D зв'язна, то область D називається *однозв'язною.*

Додатним напрямком обходу області D вздовж її границі Γ називається той, при якому область весь час залишається *ліворуч*. При цьому різні точки границі Γ ми відвідаємо різну кількість разів:

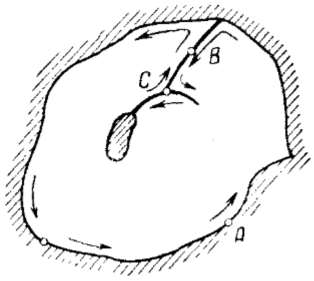

Рис. 6: обхід області

Наприклад, точку A ми відвідаємо один раз, такі точки називаються *простими*, точку B – двічі, а точку C – тричі, їх назвемо *кратними* точками, а кількість разів які точка проходиться – її *кратністю*.

Поняття граничної точки *розповсюджується* і на багатозв'язні області.

2.2 Функції комплексної змінної

Кажуть, що на множині M точок площини z задана *функція*

$$w = f(z), \tag{2.2.1}$$

якщо вказано закон, за яким кожній точці z множини M ставиться у відповідність певна точка або сукупність точок w. У першому випадку функція $f(z)$ називається *однозначною*, у другому – *багатозначною*.

Множина M називається *множиною визначення* функції $f(z)$, а сукупність N всіх значень w яких $f(z)$ набуває на M – множиною її значень. Надалі вважатимемо, що M і N – області.

Якщо покласти $z = x + iy$ і $w = u + iv$, то задання функції комплексної змінної $w = f(z)$ буде рівносильним заданню двох функцій від двох дійсних змінних:

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y). \tag{2.2.2}$$

Будемо позначати значення z на одній комплексній площині, а значення w – на іншій. Тоді функція комплексно змінної геометрично представляється як *відображення множини* M площини z на множину N площини

w.

Якщо функція $w = f(z)$ однозначна на множині M і довільним двом різним точкам M відповідають різні точки N, то відображення називається *взаємно однозначним* або *однолистим*.

Нехай задана функція $w = f(z)$ яка відображає множину M на множину N. Функція $z = \varphi(w)$ яка ставить у відповідність кожній точці w з N сукупність всіх точок z які функцією $w = f(z)$ відображаються у точку w називається *оберненою* до функції $w = f(z)$:

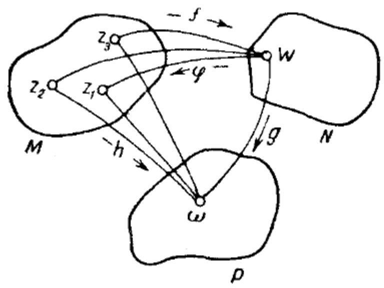

Рис. 7: обернена функція і композиція

Зрозуміло, що відображення $w = f(z)$ буде взаємно однозначним тоді і лише тоді, коли обидві функції f і φ однозначні.

Нехай функція $w = f(z)$ відображає множину M на N, а $\omega = g(w)$ – множину N на P. Функція

$$\omega = h(z) = g(f(z)), \tag{2.2.3}$$

що відображає M на P називається *складеною функцією*, складеною із f і g, а відповідне відображення h – *суперпозицією* відображень f і g.

Якщо, зокрема, відображення $w = f(z)$ взаємно однозначне і функція $z = \varphi(w)$ – обернена до f, то

$$\varphi(f(z)) = z. \tag{2.2.4}$$

2.3 Диференційовність та аналітичність

Нехай функція $f(z)$ визначена та однозначна у деякому околі точки $z_0 = x_0 + iy_0$, окрім, можливо, самої точки z_0.

Будемо казати, що існує *границя функції* $f(z)$ *при* $z \to z_0$ (позначається $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$) якщо існують границі $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = u_0$ і $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = v_0$.

Зрозуміло, що

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = u_0 + iv_0 = w_0. \tag{2.3.1}$$

Оскільки наше визначення зводиться до звичайного визначення границі дійсної функції, то основні властивості граничного переходу *зберігаютъся*. Зокрема,

$$\begin{cases} \lim(f \pm g) = \lim f \pm \lim g, \\ \lim(f \cdot g) = \lim f \cdot \lim g, \\ \lim \dfrac{f}{g} = \dfrac{\lim f}{\lim g} \quad (\lim g \neq 0). \end{cases} \tag{2.3.2}$$

Визначення границі можна також сформулювати за допомогою поняття околу: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$ тоді й тільки тоді, коли для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$ таке, що для всіх точок із δ-околу точки z_0 (окрім, можливо, самої точки z_0) відповідні точки w лежать в ε-околі точки w_0.

Іншими словами, якщо з нерівностей

$$0 < |z - z_0| < \delta \tag{2.3.3}$$

випливає

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon. \tag{2.3.4}$$

Функція $f(z)$ прямує до своєї границі *незалежно* від способу прямування точки z до z_0.

Функція $f(z)$ називається *неперервною в точці* z_0 якщо вона визначена у деякому околі точки z_0 (включаючи саму точку z_0) і

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0). \tag{2.3.5}$$

Для неперервності $f(z)$ у точці z_0 *необхідно і достатньо* неперервності $u(z, y)$ і $v(x, y)$ в (x_0, y_0).

Функція $f(z)$ називається *неперервною в області* D якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

Визначення неперервності також поширюється на довільну множину A, з тією лише поправкою, що тепер $z \to z_0$ по точках A.

Формально, функція $f(z)$ називається *неперервною на множині* A якщо у кожній точці скупчення $z_0 \in A$ границя по множині

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A}} f(z) = f(z_0). \tag{2.3.6}$$

Компактною називається обмежена і замкнута множина.

Багато властивостей неперервної на інтервалі функції переносяться на неперервну на компакті функцію. А саме, довільна функція $f(z)$ неперервна на компактній множині $\overline{A}$:

1. *обмежена на ньому*, тобто існує така стала M, що для всіх z із $\overline{A}$ справедливо
$$|f(z) \leq M;$$
2. *досягає (за модулем) екстремумів*, тобто в $\overline{A}$ існують такі точки z' і z'', що для всіх z із $\overline{A}$:
$$|f(z') \geq |f(z)|, \quad |f''(z)| \leq |f(z)|;$$
3. *рівномірно неперервна*, тобто для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$ таке, що для довільної пари точок z_1 і z_2 із $\overline{A}$ яка задовольняє нерівності $|z_1 - z_2| < \delta$, справедлива нерівність
$$|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon.$$

Теорема 2.3.1. *Якщо $w = f(z)$ – неперервна бієкція з області D у множину Δ, то Δ також область і обернена функція $z = \varphi(w)$ неперервна в Δ.*

Будемо казати, що функція $f(z)$ *диференційовна* в точці z якщо вона визначена в деякому околі точки z і існує границя

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z). \tag{2.3.7}$$

Цю границю будемо називати *похідною* функції $f(z)$ в точці z.

Теорема 2.3.2 (Умови диференційовності $f(z)$ у термінах дійсних функцій $u(x, y)$ і $v(x, y)$)**.** *Нехай $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ визначена в деякому околі точки z, причому в цій точці функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ диференційовні, тоді для диференційовності функції комплексної змінної $f(z)$ в точці z необхідно і достатньо, аби в цій точці виконувалися співвідношення*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

Ці умови заведено називати умовами Коші-Рімана.

Доведення. Необхідність отримується якщо розглянути $h = \Delta x$, $h = \Delta y$ і прирівняти.

Для достатності беремо повну похідну за якимось фіксованих напрямком і перетворюємо її з використанням умов Коші-Рімана до форми яка не залежить від напрямку. □

З використанням умов Коші-Рімана похідну функції $f(z)$ можна представити у наступних рівносильних формах:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2.3.9}$$

Оскільки звичайні властивості алгебраїчних дій і граничного переходу зберігаються, то зберігаються і звичайні правила диференціювання, тобто:

$$\begin{aligned} (f \pm g)' &= f' \pm g', \\ (f \cdot g)' &= f' \cdot g + f \cdot g', \\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}, \\ f(g(z))' &= f'(g(z)) \cdot g'(z), \\ f'(z) \cdot \varphi'(w) &= 1. \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

Функція $f(z)$ диференційовна у кожній точці області D називається *аналітичною* (*регулярною* або *голоморфною*) у цій області.

Зауважимо також, що умови Коші-Рімана виконуються якщо замість x і y взяти довільні два перпендикулярні ($n = is$) напрямки n і s, тобто

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial n}, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial v}{\partial s}. \tag{2.3.11}$$

Умови Коші-Рімана також мають запис у полярних координатах:

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -r \cdot \frac{\partial v}{\partial r}, \quad r \cdot \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \varphi}. \tag{2.3.12}$$

3 Елементарні функції

3.1 Функції $w = z^n$ і $w = \sqrt[n]{z}$

Вже визначені в розділі 1 для всіх комплексних z. Перша з цих функцій

$$w = z^n \tag{3.1.1}$$

однозначна.

Якщо в площинах z і w ввести полярні координати $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta$, то співвідношення (3.1.1) можна представити у вигляді двох рівностей

$$\rho = r^n, \quad \theta = n\varphi, \tag{3.1.2}$$

які пов'язують дійсні величини.

З (3.1.2) видно, що відображення, яке здійснює функція $w = z^N$ зводиться до повороту кожного вектора $z \neq 0$ на кут $(n-1)\arg z$ і розтягнення його у $|z|^{n-1}$ разів.

Далі зрозуміло, що точки z_1 і z_2 з рівними модулями та аргументами які відрізняються на кратне $2\pi/n$ переходять при відображенні (3.1.1) в одну точку.

Як наслідок, для однолистості відображення $w = z^n$ у деякій області D необхідно і достатньо, аби D не містила жодних двох точок z_1 і z_2 пов'язаних співвідношеннями

$$|z_1| = |z_2|; \quad \arg z_1 = \arg z_2 + \frac{2k\pi}{n} \quad (k \in \mathbb{Z}, k \neq 0). \tag{3.1.3}$$

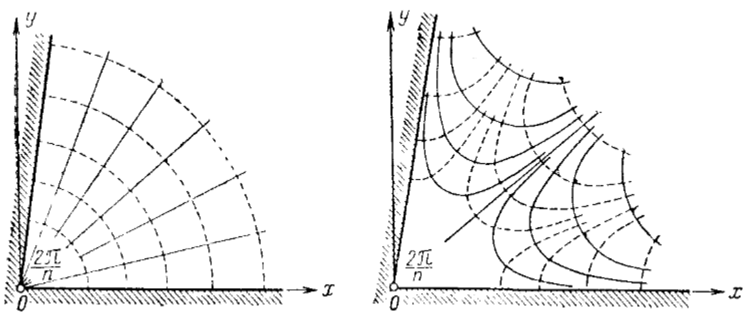

Рис. 8: прообрази полярної та декартової сіток при відображенні $w = z^n$

Зауважимо нарешті, що функція $w = z^n$ аналітична у всій площині, адже для довільного z існує

$$\lim_{hto0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{n \cdot z^{n-1} \cdot h + h^2 \cdot (\ldots)}{h} = n \cdot z^{n-1}. \tag{3.1.4}$$

Функція

$$w = \sqrt[n]{z}, \tag{3.1.5}$$

обернена до функції $z = w^n$, n-значна при $z \neq 0$. Як випливає з п. 2, значення кореня $\sqrt[n]{z}$ визначається значенням аргументу, вибраним для точки z.

Позначимо через $\arg z_0$ одне зі значень аргументу в точці $z_0 \neq 0$ і припустимо, що точка z описує, починаючи з z_0, деяку неперервну лінію C, яка не проходить через початок координат.

Через $\arg z$ ми будемо позначати те значення аргументу, яке змінюється при цьому неперервно.

В силу неперервності $\arg z$ і $|z|$ значення $w = \sqrt[n]{z}$, яке цілком визначається зробленим вибором аргументу також буде змінюватися неперервно.

Припустимо, що крива C замкнута і не містить всередині себе точку $z = 0$.

Тоді, при повному обході точкою z кривої C, точка $w = \sqrt[n]{z}$, де $\sqrt[n]{z}$ – вибране нами значення кореня, описує деяку замкнуту криву Γ, повертаючись до свого початкового положення, бо при цьому $\arg z$ повертається до початкового значення $\arg z_0$.

Значення кореня, які визначаються іншим вибором початкового значення $\arg z_0$ при повному обході C також описують замкнуті криві Γ_k, які відрізняються від кривої Γ тільки поворотами на ціле кратне кута $2\pi/n$:

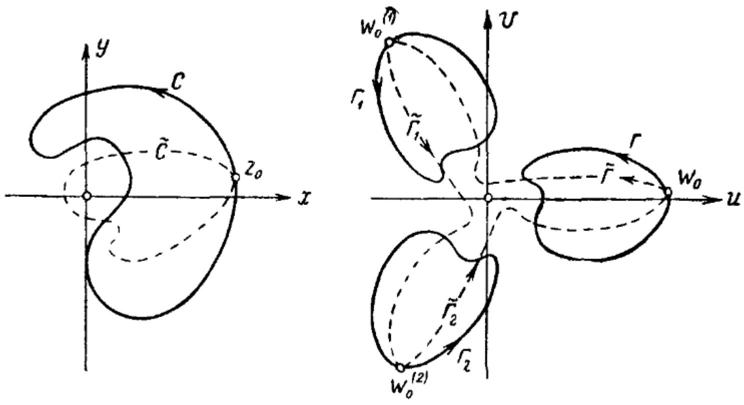

Рис. 9: дія функції $w = \sqrt[n]{z}$ на різні криві

Нехай тепер $\tilde{C}$ – замкнута крива без точок самоперетину, яка містить точку $z = 0$ всередині себе, і z_0 – деяка точка кривої $\tilde{C}$.

Тоді, при повному обході $\tilde{C}$, починаючи з z_0 у додатному напрямку, відповідна точка $w = \sqrt[n]{z}$ не повертається у своє початкове положення, а займає нове положення

$$w_0^{(1)} = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right) w_0$$

– значення $\sqrt[n]{z_0}$ відмінне від w_0.

Це пояснюється тим, що $\arg z$ при обході кривої $\tilde{C}$ збільшується на 2π.

Звідси випливає, що у довільній області D яка не містить жодної замкнутої кривої, що обходить точку $z = 0$ можна виділити n неперервних і однозначних функцій, кожна з яких набуває одного зі значень $\sqrt[n]{z}$.

Ці n функцій називаються гілками багатозначної функції $w = \sqrt[n]{z}$, їх значення в кожній фіксованій точці відрізняються один від одного множником $\cos\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right)$.

Кожна така гілка буде реалізувати однолисте відображення області D, тому в кожній точці цієї області застосовна теорема про прохідну оберненої функції (п. 5), згідно з якою існує цілком конкретне значення похідної

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)' = \frac{1}{(w^n)'} = \frac{1}{n}\frac{\sqrt[n]{z}}{z},$$

або, якщо домовимося писати $\sqrt[n]{z} = z^{1/n}$,

$$\left(z^{1/n}\right)' = \frac{z^{1/n-1}}{n}. \tag{3.1.6}$$

Таким чином, довільна із побудованих гілок є аналітичною функцією в області D.

В області D розглядуваного типу і нескінченнозначна функція $\operatorname{Arg} z$ розпадається на нескінченну кількість неперервних і однозначних гілок.

Кожну таку гілку ми будемо позначати символом $\arg z$ і кожного разу будемо вказувати, яка ця гілка визначається.

Якщо область D містить хоча б одну замкнуту криву, яка обходить точку $z = 0$, то у такій області гілки функції $\sqrt[n]{z}$ неможливо відділити одну від одної.

Якщо в околі деякої точки $z \neq 0$ з області D ми і виділимо якусь гілку, то, рухаючись по кривій, яка обходить $z = 0$, ми прийдемо до іншої гілки.

Відповідно, в такій області D ми не можемо розглядати функцію $\sqrt[n]{z}$ як сукупність окремих однозначних аналітичних функцій.

Точка $z = 0$, в довільному околі якої неможливо відділити n окремих гілок функції $\sqrt[n]{z}$ називаються точкою гілкування цієї функції.

У якості прикладу області D першого типу можна розглядати площину z з вирізаною лінією L яка йде від точки $z = 0$ до нескінченності.

Якщо L збігається з додатною піввіссю, то гілки функції $w = \sqrt[n]{z}$ відображає область D на сектори

$$\frac{2k\pi}{n} < \arg w < \frac{2(k+1)\pi}{n}.$$

Ці відображення обернені до розглянутого вище відображення за допомогою функції $w = z^n$.

Область D напевне є областю другого типу якщо вона містить точку $z = 0$ всередині.

3.2 Функція Жуковського $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$

Визначена, однозначна та аналітична для всіх $z \neq 0$.

Знайдемо область однолистості відображення

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right). \tag{3.2.1}$$

Для цього припустимо, що z_1 і z_2 переходять в одну і ту ж точку w.

Тоді маємо $z_1 + \dfrac{1}{z_1} = z_2 + \dfrac{1}{z_2}$, звідки $(z_1 - z_2) \cdot \left(1 - \dfrac{1}{z_1 \cdot z_2}\right) = 0$ і, відповідно,

$$z_1 = z_2 \quad \text{або} \quad z_1 \cdot z_2 = 1. \tag{3.2.2}$$

Таким чином, для однолистості відображення (3.2.1) у деякій області D необхідно і достатньо, щоб D не містила жодних двох точок z_1 і z_2, пов'язаних співвідношенням $z_1 \cdot z_2 = 1$.

Цій умові задовольняє, наприклад, внутрішність одиничного круга $|z| < 1$ або його зовнішність $|z| > 1$.

Для того, зоб вивчити картину відображення (3.2.1), покладемо $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, $w = u + iv$ і виділимо дійсну та уявну частини.

Тоді відображення (3.2.1) перепишеться у вигляді

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi, \quad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi, \tag{3.2.3}$$

і ми побачимо, що кожне коло $|z| = r_0 < 1$ переходить з його допомогою у криву

$$u = \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{1}{r_0}\right)\cos\varphi, \quad v = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_0} - r_0\right)\sin\varphi, \tag{3.2.4}$$

тобто в еліпс з півосями $a = \dfrac{1}{2}\left(r_0 + \dfrac{1}{r_0}\right)$, $b = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r_0} - r_0\right)$, який проходиться у від'ємному напрямку.

При $r_0 \to 1$ цей еліпс стискається у відрізок $[-1, 1]$ осі u, а при $r_0 \to 0$ розходиться на нескінченність.

Відповідно, функція (3.2.1) відображає внутрішність круга $|z| < 1$ на зовнішність відрізка $[-1, +1]$.

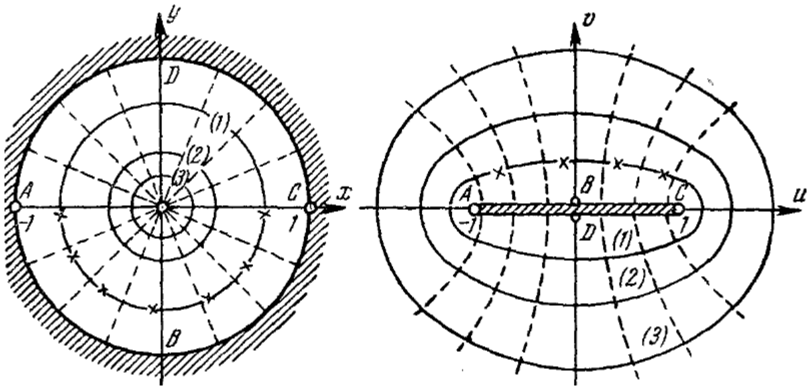

Рис. 10: дія функції Жуковського

Всі внутрішні точки цього відрізка – подвійні, він немовби складається із двох берегів, причому верхнє півколо переходить у нижній берег, а нижнє півколо у верхній берег.

Помітимо ще, що радіуси $\arg z = \varphi_0$, $0 < r < 1$ переходять при відображенні (3.2.1) у гілки гіпербол

$$\frac{u^2}{\cos^2 \varphi_0} - \frac{v^2}{\sin^2 \varphi_0} = 1 \qquad (3.2.5)$$

Фокуси цих гіпербол, так само як і еліпсів (3.2.4) розташовані у кінцях відрізка $[-1, +1]$.

Зі співвідношень (3.2.3) випливає також, що кола $|z| = r_0 > 1$ переходять в еліпси із півосями

$$a = \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{1}{r_0}\right), \quad b = \frac{1}{2}\left(r_0 - \frac{1}{r_0}\right)$$

Ці еліпси збігаються з тими, у які переходять кола $|z| = r_0 < 1$, тільки обходяться вони у додатному напрямку.

Відповідно, функція (3.2.1) відображає і зовнішність круга $|z| > 1$ також на зовнішність відрізка $[-1, +1]$ осі u, причому верхнє півколо переходить у верхній берег відрізка, а нижня – в нижній.

Обернена до функції (3.2.1) функція

$$z = w + \sqrt{w^2 - 1} \tag{3.2.6}$$

двозначна – кожній точці w вона ставить у відповідність дві точки z_1 і z_2, пов'язані умовою $z_1 \cdot z_2 = 1$.

Якщо покласти $z_1 = w + \sqrt{w^2 - 1}$, то другим значенням z, яке відповідає w буде $z_2 = w - \sqrt{w^2 - 1}$ і безпосередньо видно, що $z_1 \cdot z_2 = 1$.

Позначимо через ρ_1, θ_1 і ρ_2, θ_2 модулі і аргументи комплексних чисел $w - 1$ і $w + 1$ відповідно.

Тоді модуль і аргумент кореня у формулі (3.2.6) будуть дорівнювати $\sqrt{\rho_1 \cdot \rho_2}$ і $(\theta_1 + \theta_2)/2$.

Звідси випливає, що при обході точкою w замкнутої лінії першого або другого типу, який охоплює лише одну із точок $+1$ і -1, значення кореня змінює знак.

Справді, при такому обході θ_1 (або θ_2) змінюється на 2π, а θ_2 (або θ_1) не змінюється.

Відповідно, аргумент кореня змінюється на π, а модуль кореня при обході довільного замкнутого контуру повертається до початкового значення.

Якщо тепер точка w обходить замкнуту лінію третього типу яка охоплює обидві точки ± 1, то значення кореня не змінюється, бо при цьому і θ_1 і θ_2 змінюються на 2π і, відповідно, аргумент кореня $(\theta_1 + \theta_2)/2$ також змінюється на 2π.

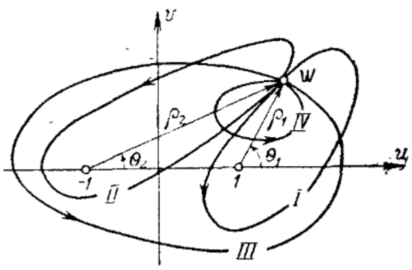

Рис. 11: дія функції $z = w + \sqrt{w^2 - 1}$ при обході різних типів кривих

Значення кореня не змінюється якщо замкнута лінія має четвертий тип, тобто не містить всередині себе жодної з точок ± 1, адже при цьому ані

θ_1 ані θ_2 не змінюються.

Таким чином, в довільній області Δ у якій не можна провести замкнуту лінію яка обходить тільки одну з точок ± 1 функція (3.2.6) допускає виділення двох однозначних гілок.

Ці гілки у кожній фіксованій точці w відрізняються знаком кореня у формулі (3.2.6) і призводять до двох значень z зв'язаних умовою $z_1 \cdot z_2 = 1$.

Кожна з цих гілок реалізує однолисте відображення і, за теоремою про похідну оберненої функції, аналітична.

Якщо ж в області Δ можна обійти точку $+1$ (не обійшовши при цьому точку -1) або -1 (не обійшовши $+1$), наприклад, якщо Δ містить всередині хоча б одну з цих точок, то у такій області гілки функції (3.2.6) неможливо відрізнити одну від одної.

Точки $w = \pm 1$, у яких гілки функції (3.2.6) немовби з'єднуються між собою, називаються точками гілкування цієї функції.

У якості прикладу області Δ першого типу можна розглянути площину w із вирізаною лінією Λ яка з'єднує точки -1 і $+1$.

Якщо ж Λ є відрізком $[-1, +1]$ дійсної віси, то дві гілки функції (3.2.6) відображають Δ, відповідно на зовнішність та внутрішність одиничного кола.

Ці відображення обернені до розглянутих вище.

3.3 Експонента і логарифм

Експоненту e^z визначимо для довільного комплексного $z = x + iy$ наступною рівністю:

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y). \tag{3.3.1}$$

Для дійсних $z = x$ це визначення збігається зі звичайним.

Експонента всюди аналітична. Справді, у довільній точці виконуються умови Коші-Рімана:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y) = \dfrac{\partial}{\partial y}(e^x \sin y); \\ \dfrac{\partial}{\partial y}(e^x \cos y) = -\dfrac{\partial}{\partial x}(e^x \sin y). \end{cases}$$

Зберігається звичайна формула диференціювання

$$(e^z)' = e^z. \tag{3.3.2}$$

Справді, похідна не залежить від напрямку, тому маємо

$$(e^z)' = \frac{\partial}{\partial x}(e^x(\cos y + i \sin y)) = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z.$$

Зберігається основна властивість експоненти:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}. \tag{3.3.3}$$

Зауважимо, що експонента жодного комплексного числа не дорівнює нулю адже $|e^z| = e^x > 0$.

Покладаючи в (3.3.1) $x = 0$, $y = \varphi$ отримаємо класичну формулу Ейлера:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi. \tag{3.3.4}$$

За допомогою формули Ейлера довільне комплексне число z з модулем r і аргументом φ може бути записане у степеневій формі:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r \cdot e^{i\varphi}. \tag{3.3.5}$$

Експонента періодична з чисто уявним періодом $2\pi i$. Справді, для довільного цілого k маємо

$$e^{z+2\pi k i} = e^z \cdot e^{2\pi k i} = e^z, \tag{3.3.6}$$

адже, згідно з формулою Ейлера, $e^{2\pi k i} = 1$.

Проте, якщо $e^{z_1} = e^{z_2}$, то $e^{x_1} = e^{x_2}$, $\cos y_1 = \cos y_2$, $\sin y_1 = \sin y_2$, тому $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1 + 2k\pi$, або

$$z_2 - z_1 = 2k\pi i, \tag{3.3.7}$$

де k – ціле число.

Завдяки періодичності, вивчення функції e^z на площині зводиться до вивчення її на смузі $0 \le y < 2\pi$.

Зокрема, відображення (3.3.1) однолисте на цій смузі, адже ця смуга не містить жодних двох точок, пов'язаних співвідношенням $e^{z_1} = e^{z_2}$.

Введемо у площині w полярні координати, поклавши $w = \rho \cdot e^{i\theta}$, тоді (3.3.1) запишеться у вигляді двох рівностей:

$$\rho = e^x, \quad \theta = y. \tag{3.3.8}$$

Як наслідок, відображення (3.3.1) перетворює прямі $y = y_0$ у промені $\theta = y_0$, а відрізки $x = x_0$, $0 \le y < 2\pi$ – в кола $\rho = e^{x_0}$.

При цьому смуга $0 < y < 2\pi$ перетворюється у площину w із розрізом вздовж додатної півосі, а половина $0 < y < \pi$ цієї смуги – у верхню півплощину.

У загальному випадку, смуга $0 < \operatorname{Im} z < h$ експонента переводить в кути $0 < \arg w < h$:

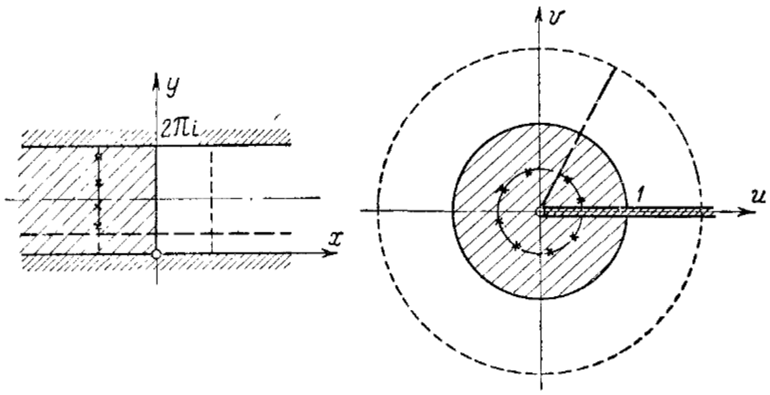

Рис. 12: дія експоненти на різні області

Логарифм визначається як *обернена* до експоненти функція: число w називається логарифмом числа z якщо $e^w = z$, позначається

$$w = \ln z. \tag{3.3.9}$$

З визначення випливає *основна властивість логарифмів*: якщо $w_1 = \ln z_1$ і $w_2 = \ln z_2$, то $w = w_1 + w_2$ є логарифмом числа $z = z_1 \cdot z_2$:

$$\ln z_1 + \ln z_2 = \ln(z_1 \cdot z_2). \tag{3.3.10}$$

Справді, $z_1 = e^{w_1}$, $z_2 = e^{w_2}$, тому $z_1 \cdot z_2 = e^{w_1+w_2}$.

Зокрема, покладаючи в (3.3.10) $z_1 = |z|$, $z_2 = e^{i \arg z}$, отримаємо

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z, \tag{3.3.11}$$

де символ $\arg z$ позначає *довільне* значення аргументу z, тому кожне комплексне число $z \neq 0$ має нескінченну кількість логарифмів.

Для ясності будемо позначати *багатозначну* функцію символом $\operatorname{Ln} z$:

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi). \tag{3.3.12}$$

Символом $\ln z$ будемо позначати *одне* зі значень $\operatorname{Ln} z$, вказуючи за потреби яке саме.

Як і раніше, значення $\operatorname{Ln} z$ визначається значенням аргументу, приписаного точці z.

Як і раніше, нас здебільшого цікавитиме значення логарифму *не в одній точці, а на кривій*, C яка починається у точці $z_0 \neq 0$, і по якій неперервно рухається точка z.

Зрозуміло що початковим значенням можна вибрати довільне, а далі будемо обирати таке значення $\operatorname{Ln} z$ яке змінюється неперервно.

Припустимо, що крива C замкнута і *не містить* всередині точку $z = 0$.

Коли z описує криву C, точка $w = \ln z$ *пробігає* деяку замкнуту криву Γ.

Інші значення логарифму, що відрізняються лише початковим значенням $\arg z_0$, опишуть криві Γ_k які *відрізняються* від Γ *лише зсувом* на вектор $2k\pi i$.

Якщо $\tilde{C}$ – замкнута крива, що *містить* точку $z = 0$ всередині, то при обході її точкою z у додатному напрямку точка $w = \ln z$ не повернеться до свого початкового положення, а займе *нове* положення $w_0^{(1)} = w_0 + 2\pi i$.

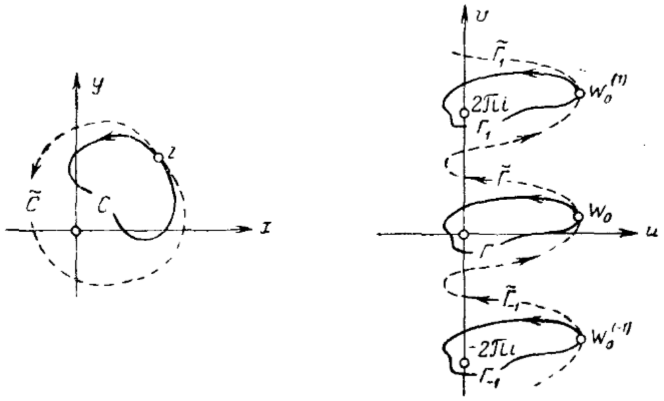

Рис. 13: дія логарифму на різні криві

Звідси випливає, що у довільній області D яка не містить замкнутих кривих які обходять точку $z = 0$ можна виділити *нескінченну множину неперервних і однозначних гілок* багатозначної функції $w = \operatorname{Ln} z$, значення яких у кожній фіксованій точці відрізняються на доданок $2k\pi i$.

Кожна така гілка $\ln z$ буде реалізувати взаємно-однозначне відображення області D і, відповідно, за теоремою про прохідну оберненої функції буде мати *похідну*

$$(\ln z)' = \frac{1}{(e^w)'} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}. \tag{3.3.13}$$

Зауважимо, що похідна *одна* для усіх гілок.

Таким чином, всі гілки $\operatorname{Ln} z$ будуть *аналітичними* функціями.

Якщо ж область D містить хоча б одну замкнуту криву що охоплює точку $z = 0$, то у такій області гілки функції $\operatorname{Ln} z$ розрізнити *неможливо.*

Точка $z = 0$ у якій немовби з'єднуються всі гілки функції $\operatorname{Ln} z$ називається точкою *гілкування.*

3.4 Тригонометричні та гіперболічні функції

У комплексній області просто виражаються через експоненту.

Для дійсної змінної x формула Ейлера дає

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x,$$

звідки

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}; \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Використаємо це як визначення, тобто нехай для довільного комплексного z:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \tag{3.4.1}$$

Таким чином визначені функції для дійсних $z = x$ збігаються зі звичайними синусом і косинусом.

Також, обидві визначені функції всюди аналітичні, причому виконуються звичайні формули диференціювання:

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z;$$

Обидві функції періодичні з дійсним періодом 2π.

$\sin z$ – непарна функція, $\cos z$ – парна.

Виконуються звичайні тригонометричні рівності:

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad \sin 2z = 2 \sin z \cos z, \quad \dots$$

Дослідимо відображення яке реалізує перша з цих функцій. Покладаючи

$$iz = z_1, \quad e^{z_1} = z_2, \quad z_3 = -iz_2 = \frac{e^{iz}}{i}, \tag{3.4.2}$$

отримаємо

$$w = \frac{1}{2}\left(z_3 + \frac{1}{z_3}\right) = \sin z. \tag{3.4.3}$$

Таким чином, наше відображення можна розглядати як композицію вже досліджених.

Знайдемо перш за все умови його однолистості: нехай D при відображеннях (3.4.2) переходить послідовно в D_1, D_2 і D_3.

Перше і третє із відображень (3.4.2) однолисті всюди, а для однолистості другого необхідно і достатньо аби D_1 не містила жодної пари точок z_1' і z_1'' пов'язаних співвідношенням

$$z_1' - z_1'' = 2k\pi i,$$

де k – ціле число.

Для однолистості відображення (3.4.3) необхідно і достатньо аби область D_3 не містила жодної пари точок z_3' і z_3'' пов'язаних співвідношенням

$$z_3' \cdot z_3'' = 1.$$

Переходячи за допомогою формул (3.4.2) до площини z отримаємо, що для однолистості відображення $w = \sin z$ в області D необхідно і достатньо, аби D не містила жодної пари точок z' і z'' пов'язаних, по-перше

$$z' - z'' = 2k\pi \quad (k \neq 0 \text{ – ціле}), \tag{3.4.4}$$

і, по-друге, співвідношенням $e^{i(z'+z'')=-1}$, або, що те саме,

$$z' + z'' = (2k+1)\pi \quad (k \neq 0 \text{ – ціле}), \tag{3.4.5}$$

Цим умовам задовольняє, наприклад, півсмуга $-\pi < x < \pi$, $y > 0$:

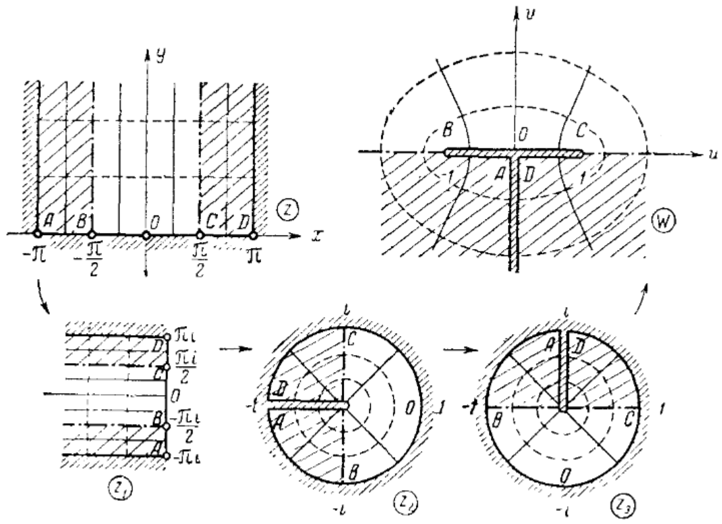

Рис. 14: послідовні відображення півсмуги $-\pi < x < \pi$, $y > 0$

Сім'ї променів $x = x_0$ і відрізків $y = y_0$ переходять в сім'ї гіпербол та еліпсів відповідно, зі спільними фокусами.

При цьому вдвічі вужча півсмуга $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$, $y > 0$ переходить у верхню півплощину.

Як бачимо, $\sin z$ в комплексній площині не є обмеженим, наприклад на променях $x = \pm\frac{\pi}{2}$, $y > 0$ він набуває дійсних значень за модулем більших за одиницю, і взагалі як завгодно великих.

Помітимо також, що у (замкнутій) півсмузі $-\pi \leq x \leq \pi$, $y \geq 0$ функція $\sin z$ набуває значення 0 лише у точках $z = 0$ і $z = \pm\pi$.

Враховуючи непарність і періодичність цієї функції, можна зробити висновок що вона обертається на нуль лише на дійсній вісі у точках $z = k\pi$. Відображення яке реалізує функція $\cos z$, у силу співвідношення

$$\cos z = \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$$

відрізняється від розглянутого виключно зсувом.

Функції $\tan z$ і $\cot z$ визначаються формулами

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = -i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}; \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = i\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}. \tag{3.4.6}$$

Функція $\tan z$ аналітична всюди за виключенням точок же $\cos z$ обертається на нуль, тобто всюди окрім точок $z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, адже при наближенні до цих точок $\tan z$ необмежено зростає.

Те ж саме можна сказати про функцію $\cot z$ і точки $z_k = k\pi$.

З формул (3.4.6) випливає, що ці функції періодичні з періодом π. Справді,

$$\tan(z + \pi) = -i\frac{e^{i(z+\pi} - e^{-i(z+\pi)}}{e^{i(z+\pi} + e^{-i(z+\pi)}} = -i\frac{-e^{iz} + e^{-iz}}{-e^{iz} - e^{-iz}} = \tan z.$$

Відображення яке реалізує функція $w = \tan z$ ми розглянемо пізніше.

Гіперболічні функції у комплексній області визначається рівностями

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \tag{3.4.7}$$

і

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}, \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}. \tag{3.4.8}$$

Вони цілком просто виражаються через тригонометричні функції:

$$\begin{cases} \sinh z = -i \sin iz, \\ \cosh z = \cos iz, \\ \tanh z = -i \tan iz, \\ \coth z = i \cot iz \end{cases} \tag{3.4.9}$$

і тому несуттєво від них відрізняються.

Тригонометричні та гіперболічні функції виражаються через експоненту, тому обернені тригонометричні і обернені гіперболічні функції виражаються через логарифми.

Отримаємо такий вираз для $w = \arccos z$: за визначенням

$$z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2},$$

звідки $e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$.

Розв'язуючи це квадратне відносно e^{iw} рівняння, знаходимо $e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}$ і

$$w = \arccos z = -i \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

(знаки $\pm$ у формулі коренів квадратного рівняння можна опустити якщо розуміти корінь як двозначну функцію).

У силу співвідношення $(z + \sqrt{z^2 - 1}) \cdot (z - \sqrt{z^2 - 1}) = 1$ зміна знаку перед коренем зводиться до зміни знаку перед логарифмом, тому знак "$-$" в останній формулі також можна не писати:

$$w = \arccos z = i \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) \tag{3.4.10}$$

Аналогічні формули можна отримати й для інших функцій:

$$\begin{aligned} \arcsin z &= \frac{\pi}{2} - \arccos z = \frac{\pi}{2} - i \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}), \\ \arctan z &= \frac{\pi}{2} - \arctan z = \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right), \\ \operatorname{arcsinh} z &= \ln(z + \sqrt{z^2 + 1}), \\ \operatorname{arccosh} z &= \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}), \\ \operatorname{arctanh} z &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right), \\ \operatorname{arccoth} z &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{z + 1}{z - 1}\right). \end{aligned} \tag{3.4.11}$$

Всі ці функції багатозначні, адже ln у правій частині формул (3.4.10) і (3.4.11) може позначати довільне значення логарифму.

Способи виділення їх однозначних гілок аналогічні розглянутим вище.

Всі такі гілки будуть аналітичними функціями.

3.5 Загальна степенева функція $w = z^a$

Визначається співвідношенням

$$z^a = e^{a\,\mathrm{Ln}\,z}, \tag{3.5.1}$$

де $a = \alpha + i\beta$.

Покладаючи $z = r \cdot e^{i\varphi}$, отримаємо $\mathrm{Ln}\,z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi)$ і, як наслідок,

$$z^a = e^{\alpha \ln r - \beta(\varphi + 2k\pi)} \cdot e^{i(\alpha(\varphi+2k\pi)+\beta \ln r)}, \tag{3.5.2}$$

де k – ціле число.

Звідси видно, що при $\beta \neq 0$ функція z^a завжди має нескінченно багато значень які лежать (при фіксованих z і a) на колах $|w| = \rho_k$ з радіусами

$$\rho_k = e^{\alpha \ln r - \beta\varphi} \cdot e^{-2k\pi\beta} \tag{3.5.3}$$

які утворюють геометричну нескінченну в обидві сторони прогресію зі знаменником $e^{-2\pi\beta}$.

Аргументи цих значень

$$\theta_k = \alpha\varphi + \beta \ln r + 2k\pi\alpha \tag{3.5.4}$$

утворюють також нескінченну в обидві сторони арифметичну прогресію з різницею $2\pi\alpha$.

При $\beta = 0$, тобто при дійсних a, значення z^a розташовані на колі $|w| = e^{a \ln r} = r^a$, і їх аргументи є

$$\theta_k = a\varphi + 2k\pi a. \tag{3.5.5}$$

Якщо $a = p/q$ – раціональне число, то всі значення θ_k будуть відрізнятися від q із цих значень на ціле кратне 2π.

Як наслідок, у цьому випадку функція $w = z^a$ скінченно-значна і збігається із функцією $\sqrt[q]{z^p}$:

$$z^{p/q} = \sqrt[q]{z^p}. \qquad (3.5.6)$$

Якщо ж a – ірраціональне дійсне число, то серед значень θ_k у формулі (3.5.5) немає таких, які відрізняються на ціле кратне 2π і, як наслідок, функція $z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}$ нескінченнозначна.

Багатозначність загальної степеневої функції, як і тих елементарних функцій, які ми розглядали вище, обумовлена багатозначністю аргументу.

Способи виділення її однозначних гілок попереднє, точкою гілкування є $z = 0$.

Наряду із загальною степеневою функцією (3.5.1) можна розглядати загальну експоненту

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a} = e^{z \ln |a|} \cdot e^{zi \operatorname{Arg} a}. \qquad (3.5.7)$$

На відміну від функції (3.5.1) функція (3.5.7) являє собою сукупність окремих, не зв'язаних між собою однозначних функцій, які відрізняються множниками $e^{2k\pi iz}$, де k – ціле число.

4 Інтегрування функцій комплексної змінної

У цьому параграфі ми розглянемо поняття інтегралу від функції комплексної змінної та найважливіші властивості аналітичних функцій, пов'язані з поняттям інтегралу або такі, що спираються на нього. Зокрема, буде, наприклад, встановлена рівносильність понять про аналітичну функцію як про функцію диференційовну в кожній точці області визначення, і як про функцію, інтеграл від якої не залежить від шляху. Це надає нову концепцію у побудові теорії аналітичних функцій. Застосування поняття інтегралу і теорем, що базуються на ньому, ми розглянемо у наступних главах.

4.1 Інтеграл від функції комплексної змінної

Нехай задана деяка орієнтована крива C, і визначена на ній функція комплексної змінної $f(z)$. За визначенням, *інтегралом* від $f(z)$ вздовж C називають

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1}-z_k) = \int\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z, \tag{4.1.1}$$

де $z_0 = a, z_1, \ldots, z_{n+1} = b$ – послідовні точки, що розбивають C на n ділянок, через a і b позначені кінці C, ζ_k – довільна точка що лежить на ділянці $[z_k, z_{k+1}]$ кривої C, і границя береться у припущенні що $\max_k |z_{k+1} - z_k| \to 0$.

Якщо C – кусково-гладка крива, а $f(z)$ – кусково-неперервна та обмежена функція, то інтеграл (4.1.1) завжди існує. Доведення зводиться до відомої з аналізу теореми про існування криволінійного інтеграла від функції дійсної змінної. Справді, поклавши

$$\begin{cases} f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \\ z_k = x_k + iy_k, \quad x_{k+1} - x_k = \Delta x_k, \quad y_{k+1} - y_k = \Delta y_k, \\ \zeta_k = \xi_k + i\eta_k, \quad u(\xi_k,\eta_k) = u_k, \quad v(\xi_k,\eta_k) = v_k, \end{cases} \tag{4.1.2}$$

отримаємо

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1}-z_k) = \sum_{k=0}^{n-1}(u_k\Delta x_k - v_k\Delta y_k) + i\sum_{k=0}^{n-1}(u_k\Delta y_k + v_k\Delta x_k). \tag{4.1.3}$$

Суми у правій частині (4.1.3) є інтегральними сумами для відповідних криволінійних інтегралів. У наших умовах ці інтеграли існують і, як наслідок, існує

$$\int\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_C (u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) + i\int\limits_C (u\,\mathrm{d}y + v\,\mathrm{d}x). \tag{4.1.4}$$

За допомогою формули (4.1.4) обчислення інтегралу від функції комплексної змінної зводиться до обчислення дійсних інтегралів.

Застосовуючи введені визначення, легко бачити, що похідні та інтеграл комплексной функції дійсної змінної $w(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$ представляються наступними лінійними комбінаціями:

$$w'(t) = \varphi'(t) + i\psi'(t), \tag{4.1.5}$$

$$\int\limits_\alpha^\beta w(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_\alpha^\beta \varphi(t)\,\mathrm{d}t + i\int\limits_\alpha^\beta \psi(t)\,\mathrm{d}t. \tag{4.1.6}$$

Нехай $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ дає параметричне представлення кривої C, причому $z(\alpha) = a$, $z(\beta) = b$. Тоді, користуючись формулою (4.1.4), ми зведемо обчислення інтегралу від $f(z)$ вздовж C до обчислення інтегралу від комплексної функції дійсної змінної:

$$\int\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{4.1.7}$$

З формули (4.1.4) також випливає, що на інтеграли від функцій комплексної змінної розповсюджуються звичайні властивості криволінійних інтегралів:

$$\int\limits_C (af(z) + bg(z))\,\mathrm{d}z = a\int\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z + b\int\limits_C g(z)\,\mathrm{d}z, \tag{4.1.8}$$

$$\int\limits_{C_1+C_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z, \tag{4.1.9}$$

$$\int\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z = -\int\limits_{C^-} f(z)\,\mathrm{d}z, \tag{4.1.10}$$

де a і b – комплексні числа, через $C_1 + C_2$ позначена крива що складається з C_1 і C_2, а через C^- – крива, що збігається з C, але проходиться у зворотному напрямку.

Доведемо ще одну властивість інтегралу: нехай $M = \max\limits_{C} |f(z)|$, l – довжина C, тоді

$$\left| \int\limits_{C} f(z)\,\mathrm{d}z \right| \le \int\limits_{C} |f(z)||\,\mathrm{d}z| \le Ml. \tag{4.1.11}$$

Доведення випливає безпосередньо з визначення інтегралу. Справді, маємо:

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\Delta z_k \right| \le \sum_{k=0}^{n-1} |f(\zeta_k)||\Delta z_k| \le M \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta z_k|,$$

де $\sum_{k=0}^{n-1} |\Delta z_k|$ – довжина ламаної $z_0 z_1 \dots z_n$ що вписана у криву C.

Перейшовши до границі при $|\Delta z_k| \to 0$ отримаємо (4.1.11).

4.2 Теорема Коші

У загальному випадку $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ залежить як від підінтегральної функції $f(z)$ так і від кривої C. Однак, якщо функція $f(z)$ аналітична у деякій однозв'язній області, що містить криву C, то інтеграл цілком визначається положенням кінців C і не залежить від вигляду цієї лінії. Іншими словами, справджується

Теорема 4.2.1 (О. Коші, 1825 р.)**.** *Якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D, то для всіх кривих C, що лежать у цій області та мають спільні кінці, інтеграл $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ набуває одного і того ж значення.*

Ми доведемо цю теорему у додатковому припущенні неперервності похідної $f'(z)$.

Доведення. Нехай, як завжди, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Завдяки співвідношенню

$$\int\limits_{C} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{C} (u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) + i \int\limits_{C} (u\,\mathrm{d}y + v\,\mathrm{d}x). \tag{4.2.1}$$

(див. також (4.1.4), питання про незалежність інтегралу $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ від шляху зводиться до питання про незалежність від шляху криволінійних інтегралів

$$\int\limits_{C} (u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y), \qquad \int\limits_{C} (u\,\mathrm{d}y + v\,\mathrm{d}x). \tag{4.2.2}$$

Але, як відомо з аналізу, в однозв'язній області для незалежності від шляху криволінійного інтеграла $\int_C (P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y)$, де P і Q – функції, що мають неперервні частинні похідні, необхідно і достатньо, аби підінтегральний вираз був повним диференціалом, тобто аби у кожній точці області D виконувалося $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Для інтегралів (4.2.2) ці співвідношення набувають вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{4.2.3}$$

а неперервність частинних похідних випливає з припущення про неперервність $f'(z)$. Рівняння (4.2.3) збігаються з умовами Коші-Рімана і задовольняються, оскільки $f(z)$ функція аналітична. □

Завдяки цій теоремі для аналітичних в однозв'язних областях функції, замість $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ можемо писати $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$, де через z_0 і z позначені кінці кривої C.

Використовуючи теорему 4.2.1 можна довести ряд тверджень аналогічних до звичайних тверджень інтегрального числення. Перш за все, виконується

Теорема 4.2.2. *Якщо функція аналітична в однозв'язній області, то інтеграл*

$$\int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = F(z), \tag{4.2.4}$$

що розглядається в залежності від своєї верхньої межі, також є аналітичною функцією, причому

$$F'(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = f(z). \tag{4.2.5}$$

Доведення. Справді, за визначенням похідної і властивостями інтегралу (4.1.9) і (4.1.10) маємо

$$F'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\int\limits_{z_0}^{z+h} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta - \int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \right) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int\limits_{z}^{z+h} d(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta. \quad (4.2.6)$$

Завдяки неперервності $f(z)$ в точці z можемо записати:

$$f(\zeta) = f(z) + \eta(\zeta),$$

де $\eta(\zeta) \to 0$ при $\zeta \to z$. Підставляючи це у (4.2.6), отримаємо

$$F'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int\limits_{z}^{z+h} f(z)\, \mathrm{d}\zeta + \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int\limits_{z}^{z+h} \eta(z)\, \mathrm{d}\zeta. \qquad (4.2.7)$$

Оскільки $f(z)$ – величина стала при інтегруванні за ζ, то

$$\int\limits_{z}^{z+h} f(z)\, \mathrm{d}\zeta = f(z) \int\limits_{z}^{z+h} \mathrm{d}\zeta = hf(z),$$

адже з визначення безпосередньо випливає, що $\int_z^{z+h} \mathrm{d}\zeta = h$.

Далі, з нерівності (4.1.11) маємо

$$\left| \int\limits_{z}^{z+h} \eta(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta \right| \le |h| \max |\eta(\zeta)|$$

(шлях інтегрування від точки z до точки $z + h$ за теоремою 4.2.1 можна вважати прямолінійним, тому його довжина дорівнює $|h|$). Таким чином, в (4.2.7) перша границя дорівнює $f(z)$, а друга – нулю, тобто $F'(z) = f(z)$, що і потрібно було довести. □

Функція, чия похідна дорівнює заданій функції $f(z)$ називається *первісною* цієї функції. Щойно доведена теорема стверджує, що інтеграл від $f(z)$ який розглядається фу функція своєї верхньої межі, є однією з первісних функції $f(z)$.

Теорема 4.2.3. *Довільні дві первісні однієї й тієї ж функції відрізняються одна від одної не більш ніж на сталий доданок.*

Доведення. Нехай $F_1(z)$ і $F_2(z)$ – ці первісні, і

$$\Phi(z) = F_1(z) - F_2(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Для доведення теореми достатньо показати, що функція $\Phi(z)$ стала.

За формулою для похідної, маємо:

$$\Phi'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0,$$

адже за нашою умовою $\Phi'(z) = F_1'(z) - F_2'(z) = f(z) - f(z) = 0$.

Звідси випливає, що $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0$, $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0$, тому $u(x,y)$ і $v(x,y)$ сталі. □

Наступна теорема дозволяє обчислювати інтеграл за допомогою первісних.

Теорема 4.2.4. *Якщо $F(z)$ – довільна первісна аналітичної функції $f(z)$, то*

$$\int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = F(z) - F(z_0). \tag{4.2.8}$$

Доведення. Справді, за теоремою 4.2.2, функція $F_1(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$ є однією з первісних для $f(z)$, а функція $F(z)$ також первісна, тому, за теоремою 4.2.3,

$$\int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = F(z) + C,$$

де C – деяка стала. Покладаючи у цій рівності $z = z_0$, знаходимо $F(z_0) + C = 0$, звідки $C = -F(z_0)$, що і дає шукану формулу (4.2.8). □

Зауважимо також, що теоремі Коші, доведеній на початку цього пункту можна надати наступного вигляду:

Теорема. *Якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D, то її інтеграл вздовж довільного замкнутого контура C, що лежить в D дорівнює нулеві:*

$$\int\limits_{C} f(z)\,\mathrm{d}z = 0. \tag{4.2.9}$$

Доведення спирається на те, що замкнутий контур C можна розкласти на два шляхи, C_1 і C_2 зі спільними початком і кінцем:

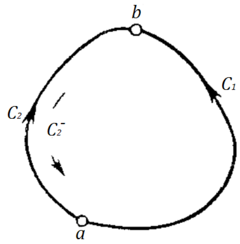

Рис. 15: Розбиття контуру на два шляхи зі спільними початком і кінцем.

За властивостями інтегралів,

$$\int\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{C_2^-} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z - \int\limits_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Як наслідок, рівність нулю інтегралу вздовж C рівносильне рівності між собою інтегралів вздовж C_1 та C_2.

На завершення сформулюємо ще одне корисну для подальшого застосування узагальнення теореми Коші. А саме, в теоремі Коші (в останньому формулюванні) мова йде про інтегра по контуру, який цілком лежить всередині області аналітичності функції, хоча інколи доводиться розглядати інтеграли вздовж кривих, на яких функція, залишаючись неперервною, перестає бути аналітичною. Виявляється, теорема Коші залишається в силі і для цього випадку:

Теорема 4.2.5. *Якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D і неперервна в замкнутій області $\overline{D}$, то інтеграл від $f(z)$ взятий вздовж границі C цієї області дорівнює нулю:*

$$\int\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0. \tag{4.2.10}$$

4.3 Розповсюдження на багатозв'язні області

Для багатозв'язних областей теорема Коші, взагалі кажучи, не виконується. Справді, функція $f(z) = 1/z$ аналітична всюди у кільці $\frac{1}{2} < |z| < 2$, одначе інтеграли від -1 до 1 вздовж верхньої та нижньої половин кола $|z| = 1$ відрізняються.

Справді, вздовж верхнього півкола C_1, де $z = e^{i\varphi}$, $0 < \varphi < \pi$, ми маємо:

$$\int\limits_{C_1} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int\limits_{\pi}^{0} \frac{ie^{i\varphi}\,\mathrm{d}\varphi}{e^{i\varphi}} = -i\pi,$$

а вздовж нижнього півкола C_2, де $z = e^{i\varphi}$, $-\pi < \varphi < 0$, ми маємо:

$$\int\limits_{C_2} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int\limits_{-\pi}^{0} \frac{ie^{i\varphi}\,\mathrm{d}\varphi}{e^{i\varphi}} = i\pi.$$

Через це ми будемо інколи використовувати символ

$$\int\limits_{a^C}^{b} f(z)\,\mathrm{d}z. \tag{4.3.1}$$

для позначення інтегралу від a до b вздовж шляху C у багатозв'язній області.

Нехай в багатозв'язній області D задані точки a і b і проста крива C_0 що їх з'єднує. Нехай C – довільна інша крива, що з'єднує ці точки (див. мал. нижче). Згідно тільки-но зробленого зауваження, можна, не змінюючи величини інтегралу, деформувати криву C в іншу криву $\widetilde{C}$, що лежить в області D, яка складається з:

1. кривої $\widetilde{C}_0$, яка разом з C_0 обмежує однозв'язну область що належить D;

2. сукупності простих замкнутих кривих γ_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$, кожна з яких містить всередині себе одну зв'язну частину границі D:

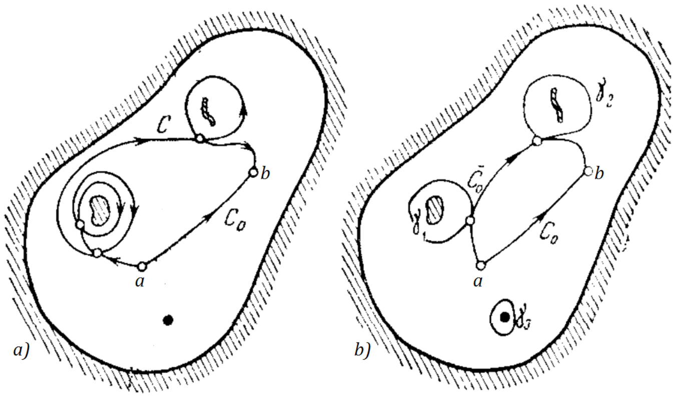

Рис. 16: Деформація кривої C у криву $\widetilde{C}$.

При цьому криві γ_k можуть проходитися декілька разів і у різних напрямках.

Для зручності, домовимося позначати через γ_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ криві, що проходяться проти годинникової стрілки. Окрім цього, введемо ще криві γ_k $(k = m + 1, \ldots, n)$, що обмежують зв'язні частини границі області D і не входять у склад $\widetilde{C}$ (як γ_3 на мал. вище).

Введемо позначення

$$\Gamma_k = \int\limits_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.3.2}$$

За неперервної деформації γ_k за якої ці криві залишаються всередині D, інтеграли (4.3.2) не змінюються. Як наслідок, величини Γ_k визначають лише функцією $f(z)$ і областю D.

Нехай N_k – цілі числа, які вказують, скільки разів і в якому напрямку проходиться γ_k у складі кривої $\widetilde{C}$. За попереднім спостереженням і властивостями інтегралів (4.1.9) і (4.1.10), маємо:

$$\int\limits_{a^C}^{b} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{a^{\widetilde{C}}}^{b} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{a^{C_0}}^{b} f(z)\,\mathrm{d}z + N_1\Gamma_1 + N_2\Gamma_2 + \ldots + N_n\Gamma_n. \tag{4.3.3}$$

Величини Γ_k називаються *періодами інтегралу* від функції $f(z)$ у багатозв'язній області D або *циклічними сталими*.

Зазначимо також, що теоремі Коші минулого пункту можна надати трохи інший сенс так, щоб вона залишилася справедливою і для багатозв'язних областей. Нехай функція $f(z)$ аналітична в багатозв'язній області D, обмеженій кривими $C_0, C_1, \ldots, C_n$ і неперервна в $\overline{D}$. Проведемо розрізи $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, що перетворюють D в однозв'язну область D^*, і позначимо через C^* границю цієї області – криву, що складається з частин кривих C_k і кривих γ_k, причому останні проходяться двічі у протилежних напрямках:

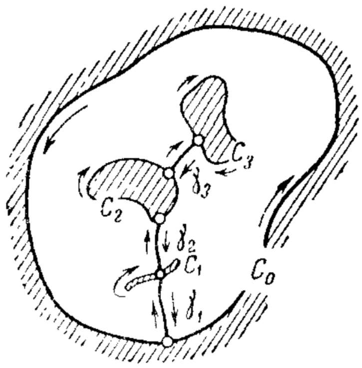

Рис. 17: Перетворення багатозв'язної області в однозв'язну.

Функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D^* і неперервна в $\overline{D^*}$. Як наслідок, за теоремою 4.2.5, і властивостями інтегралів (4.1.9) і (4.1.10):

$$\int\limits_{C^*} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{C_0} f(z)\,\mathrm{d}z + \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{C_k} f(z)\,\mathrm{d}z = 0, \tag{4.3.4}$$

де інтеграли вздовж γ_k скорочуються, а інша частина C^* збігається з $\sum_{k=0}^{n} C_k$.

При цьому ми маємо вважати, що криві C_0 і $C_1, C_2, \ldots, C_n$ обходяться так, аби область D увесь час залишалася з одного боку. Таким чином, для областей довільної зв'язності, теорема Коші виконується у наступному вигляді:

Теорема 4.3.1. *Якщо функція $f(z)$ аналітична в області D і неперервна в $\overline{D}$, то її інтеграл вздовж границі цієї області, яка проходиться так, щоб область D увесь час залишалася з одного боку, дорівнює нулю.*

4.4 Формула Коші та теорема про середнє

Нехай функція $f(z)$ аналітична у n-зв'язній області D і неперервна в $\overline{D}$. Покажемо, що для довільної внутрішньої точки z цієї області справджується так звана *формула Коші* (1831 р.):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C} \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}, \tag{4.4.1}$$

де C – межа області D що проходиться так, аби область D увесь час залишалася ліворуч.

Відзначимо, що у праву частину формули Коші входять лише значення $f(z)$ на границі C області D. Таким чином, за зазначених умов значення функції всередині області цілком визначається її значенням на границі: формула Коші дозволяє обчислити значення функції в довільній точці області, якщо відомі межеві значення цієї функції.

Для виведення формули Коші ми викинемо з області D круг радіусу r з центром в точці z і помітимо, що в отриманій $(n+1)$-зв'язній області D^* чисельних і знаменник підінтегральної функції аналітичні відносно змінної ζ, причому знаменник не обертається на нуль. Як наслідок, підінтегральна функція аналітична відносно ζ в D^*. Оскільки вона неперервна в $\overline{D^*}$, то за теоремою Коші попереднього пункту:

$$\int\limits_C \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} + \int\limits_{\gamma_r^-} \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} = 0,$$

де коло γ_r^- проходиться за годинниковою стрілкою. Звідси випливає, що

$$\int\limits_C \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} = \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}, \tag{4.4.2}$$

де γ_r проходиться проти годинникової стрілки. На колі γ_r маємо $\zeta - z = re^{i\varphi}$, тому, виносячи за знак інтегралу сталий відносно ζ множини $f(z)$, знаходимо

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r} \frac{f(z)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} = \frac{f(z)}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} \frac{rie^{i\varphi}\,\mathrm{d}\varphi}{re^{i\varphi}} = f(z). \tag{4.4.3}$$

З формул (4.4.2) і (4.4.3) маємо:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} - f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta. \tag{4.4.4}$$

Оцінимо цю різницю. Згідно з нерівністю (4.1.11):

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta\right| \le \frac{1}{2\pi}\max_{\gamma_r}|f(\zeta) - f(z)|\frac{2\pi r}{r} = \max_{\gamma_r}|f(\zeta) - f(z)| \xrightarrow[r\to 0]{} 0.$$

З іншого боку, як видно з лівої частини (4.4.4), ця різниця не залежить від r, отже вона має дорівнювати нулю, і формула Коші доведена.

Якщо, зокрема, крива C являє собою коло $|\zeta - z| = R$, то, покладаючи $\zeta - z = Re^{i\varphi}$ ми отримаємо з формули Коші

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + Re^{i\varphi}\,\mathrm{d}\varphi. \qquad (4.4.5)$$

Остання формула виражає *теорему про середнє* для аналітичних функцій:

Теорема 4.4.1. *Якщо функція $f(z)$ неперервна в замкнутому крузі і аналітична всередині цього круга, то її значення у центрі круга дорівнює середньому арифметичному її значень на колі.*

4.5 Принцип максимуму і лема Шварца

Спершу доведемо одну просту лему.

Лема 4.5.1. *Якщо в деякій області D:*

1. *стала дійсна частина аналітичної функції $f(z)$ або*
2. *сталий її модуль*

то і сама ця функція стала.

Доведення. За першої умови твердження випливає безпосередньо з рівнянь Коші-Рімана: у нас $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0$, як наслідок, в силу цих рівнянь і $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0$. Звідси робимо висновок, що v, а отже і функція $f(z)$, стала в області D.

Перейдемо до доведення леми за другої умови. Нехай $|f(z)| \equiv M$, де M – стала. Для $M = 0$ твердження леми очевидне. Якщо ж $M \neq 0$, то ми розглянемо функцію $\ln f(z) = \ln|f(z)| + i\arg f(z)$, яка у цьому випадку аналітична. Її дійсна частина стала ($= \ln M$). Як наслідок, за вже доведеною частиною леми, стала сама функція $\ln f(z)$, а отже і $f(z)$. □

Доведемо тепер *принцип максимуму модуля* для аналітичних функцій.

Теорема 4.5.1. *Якщо функція $f(z)$, не дорівнює тотожно сталій, аналітична в області D і неперервна в $\overline{D}$, то її модуль не може досягати найбільшого значення у внутрішній точці області D.*

Доведення. В силу властивостей неперервних функцій, $|f(z)|$ досягає свого максимуму M всередині або на границі D. Припустимо від супротивного, що $|f(z)|$ досягає значення M всередині D, і позначимо через $\mathcal{E}$ множину всіх точок D для яких $|f(z)| = M$. Якщо $\mathcal{E} = \overline{D}$, то всюди в D маємо $|f(z)| = M$, тобто $|f(z)|$ сталий. Звідси за лемою випливає, що і $f(z)$ стала в D, а це суперечить умовам теореми.

Якщо ж $\mathcal{E}$ не збігається з D, то існує гранична точка z_0 цієї множини яка є внутрішньою точкою D. В силу неперервності $f(z)$ маємо $|f(z_0)| = M$, адже в довільному околі z_0 є точки $\mathcal{E}$. Побудуємо коло $C : |z - z_0| = r$, що належить області D, так, щоб на ній була хоча б одна точка z_1 що не належить множині $\mathcal{E}$. (Це завжди можна зробити, адже z_0 – гранична точка $\mathcal{E}$). Тоді $|f(z_1)| < M$ і для довільного достатньо малого $\varepsilon > 0$, в силу неперервності $f(z)$, завжди можна знайти таку частину C_1 кола C яка містить точку z_1 на якій

$$|f(z)| < M - \varepsilon. \tag{4.5.1}$$

Позначимо через C_2 решту кола. На ній, очевидно,

$$|f(z)| \leq M. \tag{4.5.2}$$

За теоремою про середнє, маємо:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi r} \left(\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}s + \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}s \right), \tag{4.5.3}$$

де $\mathrm{d}s = r\,\mathrm{d}\varphi$ – елемент довжини кола C.

Переходячи у співвідношенні (4.5.3) до абсолютних величин і враховуючи нерівності (4.5.1) і (4.5.2), отримаємо

$$M = |f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi r}((M - \varepsilon)l_1 + Ml_2) = M - \frac{\varepsilon l_1}{2\pi r},$$

де l_1 і l_2 – довжини C_1 і C_2 відповідно ($l_1 + l_2 = 2\pi r$). Але остання нерівність неможлива, чим і доводиться наш принцип. □

Зауваження. *Якщо функція $f(z)$ не стала, аналітична в D і неперервна в $\overline{D}$ і, окрім цього, не обертається на 0, то і мінімум $|f(z)|$ не може досягатися всередині D.*

Для доведення достатньо застосувати принцип максимуму до функції $g(z) = 1/f(z)$.

З принципу максимуму модуля випливає корисна для подальших застосувань

Лема 4.5.2 (Г. Шварц)**.** *Якщо функція $f(z)$ аналітична в крузі $|z| < 1$ і неперервна в замкнутому крузі, причому $f(0) = 0$, і якщо всюди в крузі $|f(z)| \leq 1$, то у цьому ж крузі*

$$|f(z)| \leq |z|. \tag{4.5.4}$$

При цьому, якщо хоча б в одній внутрішній точці круга $|f(z) = |z|$, то остання рівність виконується у всьому крузі, і

$$f(z) = e^{i\alpha} z, \tag{4.5.5}$$

де α – дійсна стала.

Доведення. Для доведення розглянемо функцію

$$\varphi(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z} & z \neq 0, \\ f'(0) & z = 0. \end{cases}$$

З умов леми випливає, що $\varphi(z)$ аналітична у кільці $0 < |z| < 1$ і неперервна в замкнутому крузі $|z| \leq 1$.

В пункті 22 буде доведено, що звідси випливає аналітичність $\varphi(z)$ в точці $z = 0$. Таким чином, до $\varphi(z)$ можна застосовувати принцип максимуму модуля. Оскільки на колі $|z| = 1$ маємо $|\varphi(z)| = \left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq 1$, то за цим принципом і всюди в крузі $\varphi(z) \leq 1$, тобто $|f(z)| \leq |z|$. Перша частина леми доведена.

Якщо ж тепер у довільній внутрішній точці $|f(z_0)| = |z_0|$, то в цій точці $|\varphi(z_0) = 1$, але тоді за принципом максимуму $|\varphi(z)| \equiv 1$ у всіх точках круга, і за лемою з початку пункту $\varphi(z)$ стала. Оскільки $|\varphi(z)| \equiv 1$, то цю сталу можна представити у вигляді $e^{i\alpha}$, де α – дійсне число. Як наслідок, $f(z) = e^{i\alpha} z$. □

Геометрично, лема Шварца означає, що при довільному відображенні одиничного круга на область Δ що лежить всередині одиничного круга за допомогою аналітичної функції $w = f(z)$ для якої $f(0) = 0$, образ довільної точки z лежить ближче до початку координат ніж сама точка z. А якщо образ хоча б однієї точки z лежить на тій же відстані від початку координат що і сама точка, то Δ збігається з одиничним кругом, а перетворення є поворотом:

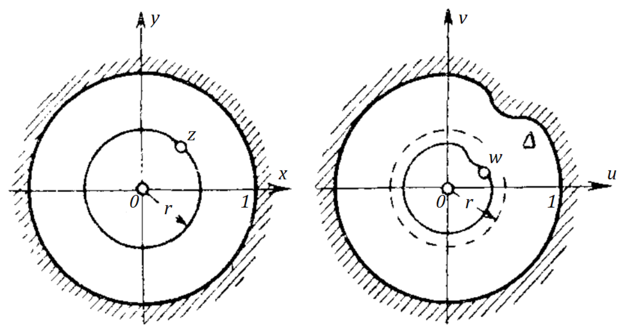

Рис. 18: Геометричний зміст леми Шварца.

4.6 Рівномірна збіжність

Цей пункт має допоміжний характер. У ньому ми розглянемо важливі питання, пов'язані з рівномірною збіжністю послідовностей і рядів аналітичних функцій.

Послідовність функцій $f_1(z)$, $f_2(z)$, ... називається *рівномірно збіжною* до функції $f(z)$ в області D (або на кривій C), якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться число n_0, яке залежить тільки від ε таке, що для всіх $n > n_0$ і всіх z із D (або на C) виконується нерівність

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon. \tag{4.6.1}$$

Доведемо дві теореми, аналогічні відповідним теоремам аналізу.

Теорема 4.6.1. *Границя $f(z)$ послідовності неперервних функцій $f_1(z)$, $f_2(z)$, ..., яка рівномірно сходиться в деякій області D (або на кривій C) також є неперервною функцією.*

Доведення. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і довільну точку z_0 області D (або кривої C). Завдяки рівномірній збіжності знайдеться n таке, що для всіх z із D (на C):

$$|f(z) - f_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.6.2}$$

Завдяки неперервності $f_n(z)$ в точці z_0 знайдеться те число $\delta > 0$, що для всіх z із D (на C), що задовольняють нерівність $|z - z_0| < \delta$ виконується нерівність
$$|f_n(z) - f_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.6.3}$$
Для таких z і вибраного вище n з нерівностей (4.6.2) і (4.6.3) маємо:
$$|f(z) - f(z_0)| \le |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + \\ + |f_n(z_0) - f(z_0)| \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \tag{4.6.4}$$
а це й означає неперервність $f(z)$. □

Теорема 4.6.2. *Якщо послідовність неперервних функцій $f_1(z)$, $f_2(z)$, … на кривій C рівномірно сходиться до $f(z)$, то виконується граничне співвідношення*
$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_C f_n(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_C \lim_{n\to\infty} f_n(z)\,\mathrm{d}z. \tag{4.6.5}$$

Доведення. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Завдяки рівномірній збіжності знайдеться таке n_0 що для всіх $n > n_0$ і для всіх z на C:
$$|f_n(z) - f(z)| \le \frac{\varepsilon}{l},$$
де l – довжина C. Для таких n:
$$\left| \int\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z - \int\limits_C f_n(z)\,\mathrm{d}z \right| = \left| \int\limits_C (f(z) - f_n(z))\,\mathrm{d}z \right| < \frac{\varepsilon}{l} l = \varepsilon,$$
а це і означає справедливість співвідношення (4.6.5). □

Доведена теорема надає можливість переходити до границі під знаком інтегралу у випадку рівномірної збіжності послідовності функцій.

З поняттям рівномірної збіжності послідовності тісно пов'язане поняття рівномірно збіжного ряду. Функціональний ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ називається *рівномірно збіжним* в області D (на кривій C) якщо послідовність його частинних сум рівномірно збіжна в цій області (на цій кривій).

Так само як і в аналізі, доводиться зручна для застосування достатня ознака рівномірної збіжності функціональних рядів.

Теорема 4.6.3. *Якщо функціональний ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ *в області* D *мажорується збіжним числовим рядом* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$*, тобто для довільної точки* z *із* D

$$|f_n(z)| \leq a_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{4.6.6}$$

то цей функціональний ряд рівномірно збіжний в D.

Доведення. Справді, за відомою теоремою порівняння цей ряд збіжний в довільній точці z із D. Позначимо його суму через $s(z)$. Для довільного n залишок $r_n(z) = s(z) - s_n(z)$ цього ряду завдяки співвідношенню (4.6.6) задовольняє нерівності

$$|r_n(z)| \leq |f_{n+1}(z)| + |f_{n+2}(z)| + \ldots \leq a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots \tag{4.6.7}$$

Права сторона цієї нерівності є залишком r_n збіжного числового ряду, тобто прямує до 0 при $n \to \infty$. Як наслідок, для довільного $\varepsilon > 0$ можна знайти n_0 яке залежить лише від ε починаючи з якого $r_n < \varepsilon$. Тоді, завдяки (4.6.7) для довільного z із D і $n > n_0$ буде виконуватися нерівність

$$|s(z) - s_n(z)| < \varepsilon,$$

а це й означає рівномірну збіжність ряду. □

З теорем 4.6.1 і 4.6.2 випливає, що сума рівномірно збіжного ряду, що складається з неперервних функцій неперервна, і що такий ряд можна почленно інтегрувати, тобто що справджується співвідношення

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_C f_n(z)\, \mathrm{d}z = \int_C \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\, \mathrm{d}z. \tag{4.6.8}$$

Питання про можливість почленного диференціювання функціональних рядів буде розглянуто у пункті 19 (теорема Веєрштрасса).

Розглянемо тепер сім'ю функцій $f(z, \alpha)$ що залежать від параметра (дійсного чи комплексного) α. Кажуть, що $f(z, \alpha)$ прямує при $\alpha \to \alpha_0$ до функції $f(z)$ *рівномірно відносно* z в області D (або на кривій C), якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta = \delta(\varepsilon)$ таке, що при $|\alpha - \alpha_0| < \delta$ для всіх z з D (або на C) виконується нерівність

$$|f(z, \alpha) - f(z)| < \varepsilon. \tag{4.6.9}$$

Точно так само як і для послідовностей, можна показати, що границя рівномірно збіжної сім'ї неперервних функцій є неперервною функцією, і що для такої сім'ї справджується граничне співвідношення

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} \int_C f(z, \alpha)\, \mathrm{d}z = \int_C \lim_{\alpha \to \alpha_0} f(z, \alpha)\, \mathrm{d}z. \tag{4.6.10}$$

Надалі нам доведеться мати справу з інтегралами вздовж необмежених кривих – *невласними інтегралами.* При цьому ми завжди будемо розглядати лише такі криві C, відрізки який, що належать довільному кругу, є кусково-гладкими. Функції $f(z)$ задані на C будемо вважати кусково-неперервними і обмеженими.

Визначимо тепер інтеграл від функції $f(z)$ вздовж необмеженої кривої C. Нехай спершу C не обмежена лише в одну сторону і a – її кінець. Тоді ми позначимо через C_l частину C з кінцем a і довжиною l і покладемо за визначенням

$$\int\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{l\to\infty}\int\limits_{C_l} f(z)\,\mathrm{d}z, \tag{4.6.11}$$

причому, якщо ця границя існує, то будемо казати, що (невласний) інтеграл (4.6.11) *збіжний.* Якщо ж C не обмежена в обидва боки, то визначимо інтеграл як суму інтегралів вздовж двох частин на які C ділиться довільною точкою a.

Нехай функція $f(z,\zeta)$ визначена для всіх z з області D і для всіх ζ на лінії C. Будемо казати, що інтеграл

$$F(z) = \int\limits_C f(z,\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

рівномірно збіжний в області D, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться l_0 таке, що для всіх z із D при довільному $l > l_0$:

$$\left|\int\limits_C f(z,\zeta)\,\mathrm{d}\zeta - \int\limits_{C_l} f(z,\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\right| < \varepsilon \tag{4.6.12}$$

Зауваження. *Визначення у припущенні необмеженості C в одну сторону, розповсюджується на необмежені в обидві сторони криві аналогічно попередньому.*

Теорема 4.6.4. *Якщо функція $f(z,\zeta)$ аналітична по z і кусково неперервна по ζ для всіх z з однозв'язної області D і для всіх ζ на лінії C, і інтеграл*

$$F(z) = \int\limits_C f(z,\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \tag{4.6.13}$$

збігається рівномірно в області D, то він є аналітичною в цій області функцією.

Доведення. Для доведення скористаємося теоремою, оберненою до теореми Коші, згідно з якою функція $F(z)$ аналітична в однозв'язній області D якщо вона неперервна в цій області, а її інтеграл вздовж довільної замкнутої кривої, що належить області, дорівнює нулю (доведення цієї теореми див. у наступному пункті).

В умовах теореми яку ми зараз доводимо неперервність функції $F(z)$ встановлюється звичним чином (як теорема 4.6.2 або співвідношення (4.6.10)). Залишається показати, що інтеграл від $F(z)$ вздовж довільного замкнутого контуру Γ, що належить області D, дорівнює нулю. Маємо:

$$\int\limits_{\Gamma} F(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\Gamma} \left(\int\limits_{C} f(z,\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \right) \mathrm{d}z. \tag{4.6.14}$$

Завдяки рівномірній збіжності інтегралу (4.6.13) за відомою з аналізу теоремою, у правій частині можна змінити порядок інтегрування, і ми отримаємо:

$$\int\limits_{\Gamma} F(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{C} \left(\int\limits_{\Gamma} f(z,\zeta)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}\zeta = 0,$$

адже внутрішній інтеграл дорівнює нулю за теоремою Коші. □

Зауважимо, що у випадку обмеженої кривої C для аналітичності функції $F(z)$ не потрібно жодних додаткових припущень щодо збіжності інтегралу (4.6.13), адже це випливає з можливості зміни порядку інтегрування у співвідношенні (4.6.14) без додаткових припущень.

4.7 Вищі похідні

За визначенням, аналітична функція – це функція комплексної змінної, яка має похідну в кожній точці деякої області D. Покажемо, що з аналітичності функції автоматично випливає існування і аналітичність всіх її послідовних похідних.

Теорема 4.7.1 (О. Коші, 1842 р.)**.** *Якщо функція $f(z)$ аналітична в області D і неперервна в $\overline{D}$, то вона має в кожній точці D похідні всіх порядків, причому n-а похідна може бути представлена формулою*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{C} \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}, \tag{4.7.1}$$

де C – межа області D.

Доведення. Нехай z – довільна внутрішня точка області D. За визначенням похідної та формулою Коші з пункту 14, яку ми застосовуємо до точок z і $z+h$ маємо:

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \\ = \frac{1}{2\pi i} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int\limits_C f(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z - h} - \frac{1}{\zeta - z} \right) = \\ = \frac{1}{2\pi i} \lim_{h\to 0} \int\limits_C \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)}. \quad (4.7.2)$$

Але, очевидно, що при $h \to 0$ функція $\frac{1}{\zeta - z - h}$ рівномірно для віх ζ на C прямує до $\frac{1}{\zeta - z}$, і, як наслідок, за теоремою 4.6.2, границя існує, причому

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z)^2}. \quad (4.7.3)$$

Для $n = 1$ теорема доведена. Далі теорема доводиться методом математичної індукції. □

Зауваження. *Як видно з доведення, теорему можна сформулювати ще наступним чином: якщо функція $\varphi(\zeta)$ неперервна на межі C області D, то функція*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{\varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}, \quad (4.7.4)$$

що задається формулою Коші, аналітична в цій області.

Зауваження. *Формули* (4.7.1) *для похідних можна отримати формальним диференціюванням формули Коші по z. Доведена теорема стверджує законність цього диференціювання.*

З формули (4.7.1) випливають важливі *нерівності Коші.* Позначимо через M максимум модуля функції $f(z)$ в області D, через R – відстань від точки z до межі області D і через l – довжину цієї межі. З (4.7.1) маємо:

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi} \left| \int\limits_C \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} \right| \leq \frac{n! M l}{2\pi R^{n+1}}. \quad (4.7.5)$$

Якщо, зокрема, $f(z)$ аналітична в крузі $|z - z_0| < R$, то, взявши в ролі D цей круг, отримаємо

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{M n!}{R^n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \quad (4.7.6)$$

Це і є нерівності Коші, які ми хотіли довести.

Скористаємося отриманими результатами для доведення двох важливих теорем теорії аналітичних функцій.

Теорема 4.7.2 (Ж. Ліувіль)**.** *Якщо функція $f(z)$ аналітична у всій площині та обмежена то вона стала.*

Доведення. Нехай всюди $|f(z)| \le M$. Для довільної точки z площини та для довільного R нерівність (4.7.6) при $n = 1$ дає:

$$|f'(z)| \le \frac{M}{R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

Але ліва частина не залежить від R, ому вона просто дорівнює нулю, тобто $|f'(z)| = 0$, або $f'(z) \equiv 0$ у всій площині. Звідси, за теоремою 4.2.4 робимо висновок, що

$$f(z) - f(z_0) = \int\limits_{z_0}^{z} f'(z)\,\mathrm{d}z \equiv 0,$$

тобто що функція $f(z)$ стала. □

Наступна теорема обернена до основної теореми Коші з пункту 12.

Теорема 4.7.3 (Г. Морера, 1886 р.)**.** *Якщо функція $f(z)$ неперервна в однозв'язній області D і інтеграл $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ по довільному замкнутому контуру, що лежить в D, дорівнює 0, то $f(z)$ аналітична в цій області.*

Доведення. З умов теореми випливає, що в області D інтеграл $\int_{z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}z$ не залежить від шляху інтегрування, тобто для фіксованого z_0 він визначає деяку функцію z:

$$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Повторюючи доведення теореми 4.2.2, ми побачимо, що ця функція має похідну $F'(z) = f(z)$, тобто аналітична. Але тоді за теоремою 4.7.1, $f(z)$ є аналітичною функцією як похідна аналітичної функції. □