Урок 11. Нормовані простори

Перевірка, чи є відображення нормою, здійснюється шляхом перевірки чотирьох властивостей норм.

Задача 11.1. Чи є нормою відображення $f: R \to R$, де
$$f(x) = |arctg\ x|\ ?$$
Розв'язок.

1). Відображення є невід'ємним, оскільки $f(x) \geq 0\ \ \forall x \in C[a,b]$.

2). Перевіримо першу аксіому норми: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \equiv 0$? Відображення $f(x)$ її задовольняє, оскільки з того, що $f(x) = |arctg\ x| = 0$, випливає, що $x = 0$. І навпаки, якщо $x = 0$, то $f(x) = |arctg\ x| = 0$.

3). Перевіримо другу аксіому норми. Знайдемо параметри λ і точку x, для яких аксіома не виконується. Покладемо $x = \sqrt{3}$, $\lambda = \frac{1}{3}$. Тоді $\|\lambda x\| = arctg\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$. З іншого боку, $|\lambda|\|x\| = \frac{1}{3}arctg\sqrt{3} = \frac{1}{3}\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{9}$. Отже, $\exists x, \lambda \in R: \|\lambda x\| \neq |\lambda|\|x\|$. Отже, відображення f не є нормою. ■

Задача 11.2. Чи є нормою відображення $f: R^2 \to R$, де
$$f(x) = |\xi_1| + |\xi_2|, \text{ де } x = (\xi_1, \xi_2)\ ?$$
Розв'язок.

1). Відображення є невід'ємним, оскільки $f(x) \geq 0\ \ \forall x \in R^2$.

2). Перевіримо першу аксіому норми: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \equiv 0$? Відображення $f(x)$ її задовольняє, оскільки з того, що $f(x) = |\xi_1| + |\xi_2| = 0$, випливає, що $|\xi_1| = 0$ і $|\xi_2| = 0$, тобто $\xi_1 = \xi_2 = 0$ і $x = (0,0) = 0$. І навпаки, якщо $x = 0$, то $\xi_1 = \xi_2 = 0$, тобто $|\xi_1| = 0$ і $|\xi_2| = 0$, отже, $f(x) = |\xi_1| + |\xi_2| = 0$. Перша аксіома виконується.

3). Перевіримо другу аксіому. Вона виконується, оскільки
$$f(\lambda x) = |\lambda\xi_1| + |\lambda\xi_2| = |\lambda|(|\xi_1| + |\xi_2|) = |\lambda| f(x).$$

4). Перевіримо третю аксіому. Нехай $x = (\xi_1, \xi_2)$ і $y = (\eta_1, \eta_2)$. Аксіома виконується, оскільки
$$f(x+y) = |\xi_1 + \eta_1| + |\xi_2 + \eta_2| \leq |\xi_1| + |\eta_1| + |\xi_2| + |\eta_2| = f(x) + f(y).\ ■$$

Задача 11.3. Чи є нормою відображення $f: R^n \to R$, де
$$f(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ \ x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n), \text{ якщо } 0 < p < 1 \text{ і } n \geq 2.$$
Розв'язок.

1). Відображення є невід'ємним, оскільки $f(x) \geq 0\ \ \forall x \in R^2$.

2). Перевіримо першу аксіому норми: $f(x)=0 \Leftrightarrow x\equiv 0$? Відображення $f(x)$ її задовольняє, оскільки з того, що $f(x)=\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, випливає, що $|\xi_k|=0,\ k=1,2,...,n$, тобто $x=(0,0,...,0)=0$. І навпаки, якщо $x=0$, то $|\xi_k|=0,\ k=1,2,...,n$, отже, $f(x)=0$. Перша аксіома виконується.

3). Перевіримо другу аксіому. Вона виконується, оскільки

$$f(\lambda x)=\left(\sum_{k=1}^{n}|\lambda\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(|\lambda|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}=|\lambda|f(x).$$

4). Третя аксіома не виконується. Виберемо вектори $x=\left(\frac{1}{2},0,...,0\right)$ і $y=\left(0,\frac{1}{2},0,...,0\right)$. З одного боку, якщо $0<p<1$ і $n\geq 2$, то

$$f(x)=\left(\left(\frac{1}{2}\right)^p+0+...\right)^{\frac{1}{p}}=\frac{1}{2} \text{ і } f(y)=\left(0+\left(\frac{1}{2}\right)^p+...\right)^{\frac{1}{p}}=\frac{1}{2}.$$

З іншого боку,

$$f(x+y)=\left(\left(\frac{1}{2}\right)^p+\left(\frac{1}{2}\right)^p+0+...\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\frac{2}{2^p}\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}}=2^{\frac{1-p}{p}}=2^{\frac{1}{p}-1}.$$

Якщо $0<p<1$, то $\frac{1}{p}-1>0$, тобто $2^{\frac{1}{p}-1}>1$. Отже,

$$f(x+y)\geq f(x)+f(y).$$

Це означає, що відображення f не є нормою. ■

Задача 11.4. Чи є нормою відображення $f:C[a,b]\to R$, де

$$f(x)=\max_{a\leq t\leq\frac{a+b}{2}}|x(t)|,\ \ x(t)\in C[a,b]?$$

Розв’язок.

1). Відображення є невід’ємним, оскільки $f(x)\geq 0\ \ \forall x\in C[a,b]$.

2). Перевіримо першу аксіому норми: $f(x)=0 \Leftrightarrow x\equiv 0$? Відображення $f(x)$ її не задовольняє, оскільки з того, що $f(x)=\max_{a\leq t\leq\frac{a+b}{2}}|x(t)|=0$, випливає, що $|x(t)|=0\ \ \forall t\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$, проте це не означає, що $x(t)\equiv 0\ \ \forall t\in[a,b]$. Отже, перша аксіома не виконується, тобто $f(x)$ не є нормою. ■

Задача 11.5. Чи є нормою відображення $f:C[a,b]\to R$, де

$$f(x)=|x(a)|+\max_{a\leq t\leq b}|x'(t)|,\ \ x(t)\in C^{(1)}[a,b]?$$

Розв’язок.

1). Відображення є невід’ємним, оскільки $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in C^{(1)}[a,b]$.

2). Перевіримо першу аксіому норми: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \equiv 0$?

Якщо $f(x) = |x(a)| + \max\limits_{a \leq t \leq b} |x'(t)| = 0$, то одночасно виконуються дві умови

$$\begin{cases} |x(a)| = 0, \\ \max\limits_{a \leq t \leq b} |x'(t)| = 0. \end{cases}$$

Із другої рівності випливає, що $x(t) \equiv C$, а з першої, — що $C = 0$. Отже, $x(t) \equiv 0$.

З іншого боку, якщо $x(t) \equiv 0$, то $f(x) = 0$. Отже, перша аксіома виконується.

3). Друга і третя аксіоми (однорідність і нерівність трикутника) є очевидними наслідками властивостей модуля.

Отже, відображення $f(x) = |x(a)| + \max\limits_{a \leq t \leq b} |x'(t)|$, $x(t) \in C^{(1)}[a,b]$ є нормою. ■

Задача 11.6. Чи є нормою відображення $f : C[a,b] \to R$, де

$$f(x) = |x(b) - x(a)| + \max_{a \leq t \leq b} |x'(t)|, \quad x(t) \in C^{(1)}[a,b]?$$

Розв’язок.

1). Відображення є невід’ємним, оскільки $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in C^{(1)}[a,b]$.

2). Перевіримо першу аксіому норми: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \equiv 0$?

Якщо $f(x) = |x(b) - x(a)| + \max\limits_{a \leq t \leq b} |x'(t)| = 0$, то одночасно виконуються дві умови

$$\begin{cases} |x(b) - x(a)| = 0, \\ \max\limits_{a \leq t \leq b} |x'(t)| = 0. \end{cases}$$

Із другої рівності випливає, що $x(t) = C \quad \forall t \in [a,b]$, а з першої, — що $C = x(b) = x(a)$. Якщо $x(a) \neq 0$, то $x(t) \not\equiv 0$. Отже, перша аксіома не виконується, тобто $f(x)$ не є нормою. ■

Перевірка збіжності послідовності в повному просторі зводиться до перевірки її фундаментальності. Якщо послідовність не є фундаментальною, то вона не є збіжною в жодному просторі.

Задача 11.7. Чи збігається в нормованому просторі l_2 послідовність

$$x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n}, 0, \ldots, 0}_{n}, 1, 0, 0, \ldots \right)?$$

Розв’язок. Оскільки

$$\|x_n - x_{n+1}\|^2 = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)^2 + 2 > 2,$$

послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не є збіжною. ■

Задача 11.9. Чи збігається в нормованому просторі l_1 послідовність

$$x_n = \left(\underbrace{0,0,...,0}_{n-1}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{(n+1)^2}, ... \right)?$$

Розв'язок. Оскільки простір l_1 є повним за нормою $\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|$, то для збіжності послідовності достатньо показати, що вона є фундаментальною.

$$\|x_n - x_{n+p}\| = \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{k^2} \le \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \to 0 \text{ при } n \to \infty .$$

Отже, послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ є збіжною. ■

Означення. В нормованому просторі E дві норми $\|x\|$ і $\|x\|_*$ називаються еквівалентними, якщо такі додатні константи C_1 і C_2, що

$$C_1 \|x\| \le \|x\|_* \le C_2 \|x\|.$$

Задача 11.10. Доведіть, що в скінченновимірних нормованих просторах всі норми є еквівалентними.

Розв'язок. Нехай E — n-вимірний дійсний нормований простір з нормою $\|x\|$. Виберемо в E деякий базис $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ і покажемо, що норма $\|x\|$ є еквівалентною евклідовій нормі

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} ,$$

де $x_1, x_2, ..., x_n$ — координати вектора x по базису $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$.

Перш за все зауважимо, що

$$\|x\| = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \|e_k\| \le \|x\|_2 \sum_{k=1}^{n} \|e_k\| = C_2 \|x\|_2 ,$$

де $c_2 = \sum_{k=1}^{n} \|e_k\|$.

Для оцінки норми $\|x\|$ зверху введемо функцію $f(x) = \|x\|$, що залежить від n змінних $x_1, x_2, ..., x_n$ простору R^n. Оскільки це норма, вона є неперервною функцією на R^n. Отже, вона є неперервною, зокрема, на одиничній сфері $S_1 = \left\{ x \in R^n : \|x\|_2 = 1 \right\}$. Норма є невід'ємною функцією, яка обертається в нуль лише на нульовому елементі. Це означає, що на одиничній сфері $f(x) > 0$. Оскільки сфера S_1 — компакт, то за теоремою Вейєрштрасса вона досягає на ній свій мінімум, тобто

$$\exists x_0 \in S_1 : f(x_0) = \min_{x \in S_1} f(x) > 0 .$$

Таким чином,

$$\forall x \in S_1 \ \ \|x\| \ge C_1 ,$$

де $C_1 = f(x_0)$. Тоді, з цього випливає, що $\left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\| \ge C_1$. З цього випливає, що

$$\forall x \neq 0 \quad \|x\| = \left\| \|x\|_2 \frac{\|x\|}{\|x\|_2} \right\| = \|x\|_2 \left\| \frac{\|x\|}{\|x\|_2} \right\| \geq C_1 \|x\|_2 .$$

Для $x = 0$ нерівність $\|x\| \geq c_1 \|x_2\|$ є очевидною. Таким чином, норми $\|x\|$ і $\|x\|_*$ є еквівалентними нормі $\|x\|_2$. Отже вони є еквівалентними і одна одній:

$$C_3 \|x\| \leq C_1 \|x\|_2 \leq \|x\|_* \leq C_2 \|x\|_2 \leq C_4 \|x\|. \ ■$$

Означення. В нормованому просторі E норма $\|x\|$ називається підпорядкованою нормі $\|x\|_*$, якщо $\|x\| \leq \|x\|_*$.

Задача 11.11. Доведіть, що дві норми є еквівалентними тоді і лише тоді, коли із збіжності послідовності за однією із норм випливає збіжність за іншою нормою.

Розв'язок. Необхідність. Нехай послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається за нормою $\|x\|_1$, яка еквівалентною нормі $\|x\|_2$, тобто $\exists C_1, C_2 > 0 : C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1 \ \ \forall x \in E$. Тоді, як легко бачити, вона збігається і за нормою $\|x\|_2$ за теоремою про мажоруючу послідовність..

Достатність. Нехай послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається за нормами $\|x\|_1$ і $\|x\|_2$. Позначимо через I тотожній оператор, що діє із $\left(E, \|x\|_1\right)$ і $\left(E, \|x\|_2\right)$, тобто $x = Ix$. Цей оператор є лінійним і неперервним, отже він є обмеженим. Таким чином, існує константа $C_2 > 0$, така що $\|Ix\|_2 = \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1 \ \ \forall x \in \left(E, \|x\|_1\right)$.

Аналогічно, розглядаючи тотожне відображення простору $\left(E, \|x\|_2\right)$ на простір $\left(E, \|x\|_1\right)$, отримуємо оцінку

$$\|Ix\|_1 = \|x\|_1 \leq C \|x\|_2 \ \ \forall x \in \left(E, \|x\|_2\right).$$

Поклавши $C_1 = \dfrac{1}{C}$, приходимо до нерівності

$$C_1 \|x\|_2 \leq \|x\|_1 .$$

Отже,

$$C_1 \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C_2 \|x\|_2 ,$$

тобто норми є еквівалентними. ■

Задача 11.12. Нехай на лінійному просторі E задано дві норми $\|x\|_1$ і $\|x\|_2$, відносно яких простір E є банаховим. Доведіть, що якщо одна із цих норм є підпорядкованою іншій, то вони є еквівалентними.

Розв'язок. Якщо норма $\|x\|_1$ підпорядкована $\|x\|_2$, то із збіжності послідовності за нормою $\|x\|_2$ випливає її збіжність за нормою $\|x\|_1$. Будь-яка збіжна послідовність є фундаментальною, до того ж простір E є повним за обома нормами, тобто всі фундаментальні послідовності є збіжними за обома нормами. Це означає, що класи збіжних послідовностей за обома нормами в просторі E збігаються, тобто норми є еквівалентними. ■

Задача 11.13. Чи є простір l_1 повним відносно норми

$$\|x\|_1 = \sup_k |\xi_k|, \quad x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in l_1 ?$$

Розв'язок. Простір l_1 є повним відносно норми $\|x\|_2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|$, яка є підпорядкована нормі $\|x\|_1$: $\|x\|_1 \le \|x\|_2$. Отже, якщо б простір l_1 був повним відносно норми $\|x\|_1$, то ці норми були б еквівалентними. Якщо деяка послідовність збігається за однією з норм, то вона збігається і за еквівалентною нормою.

Розглянемо послідовність $x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}, 0, ...0, ... \right)$, що є збіжною за нормою $\|x\|_1$, оскільки

$$\|x_n\| = \sup_k |\xi_k| = \frac{1}{n} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Виявляється, що за нормою $\|x\|_2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|$ вона не є збіжною, оскільки вона не є фундаментальною.

$$\|x - x_{2n}\|_2 = \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} \right| + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = 1.$$

Отже, простір l_1 не є повним відносно норми

$$\|x\|_1 = \sup_k |\xi_k|, \quad x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in l_1. \ ■$$

Задача 11.14. Чи еквівалентні в просторі $C[a,b]$ норми $\|f\| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$ і $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$?

Розв'язок. Не обмежуючі загальності, покладемо $a = 0, b = \pi$. Розглянемо послідовність функцій $f_n(x) = \begin{cases} \sin nx, \textit{ якщо } 0 \le nx \le \pi \\ 0, \textit{ в супротивному випадку}. \end{cases}$

Маємо, що $\max_{x \in [a,b]} |f_n(x)| = 1, \ \int_0^{\pi} |f_n(x)| dx = \frac{2}{n}.$ Отже, ці норми не можуть бути еквівалентними. ■

Задача 11.15. Доведіть, що будь-який скінченновимірний нормований простір E є повним.

Розв'язок. Нехай послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною. Тоді вона є обмеженою. За теоремою Больцано–Вейерштраса із неї можна виділити підпослідовність, збіжну до деякого елемента $x_0 \in E$. В такому випадку фундаментальна послідовність також збігається до $x_0 \in E$. ■