3 Елементарні функції

Цей параграф присвячений елементарним функціям комплексної змінної та їхнім геометричним ілюстраціям – відображенням, які вони здійснюють. Ці функції є природнім розповсюдженням функцій дійсної змінної у комплексну площину.

Одначе, при такому розповсюдженні функції інколи набувають нових, дивних властивостей. Так, функція e^z виявляється періодичною, а $\sin z$ і $\cos z$ – необмеженими. Ба більше, вдається визначити логарифм від'ємних (і взагалі довільних нерівних нулеві комплексних чисел).

В другому пункті ми особливо виділяємо просту дробово-раціональну функцію $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ у зв'язку з її важливістю для практичних задач.

3.1 Функції $w = z^n$ і $w = \sqrt[n]{z}$

Вже визначені в розділі 1 для всіх комплексних z. Перша з цих функцій

$$w = z^n \tag{3.1.1}$$

однозначна.

Якщо в площинах z і w ввести полярні координати

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta), \tag{3.1.2}$$

то співвідношення (3.1.1) можна представити у вигляді двох рівностей

$$\rho = r^n, \quad \theta = n\varphi, \tag{3.1.3}$$

які пов'язують дійсні величини.

З (3.1.3) видно, що відображення, яке здійснює функція $w = z^N$ зводиться до повороту кожного вектора $z \neq 0$ на кут $(n-1)\arg z$ і розтягнення його у $|z|^{n-1}$ разів.

Далі зрозуміло, що точки z_1 і z_2 з рівними модулями та аргументами які відрізняються на кратне $2\pi/n$ переходять при відображенні (3.1.1) в одну точку.

Як наслідок, для однолистості відображення $w = z^n$ у деякій області D необхідно і достатньо, аби D не містила жодних двох точок z_1 і z_2 пов'язаних співвідношеннями

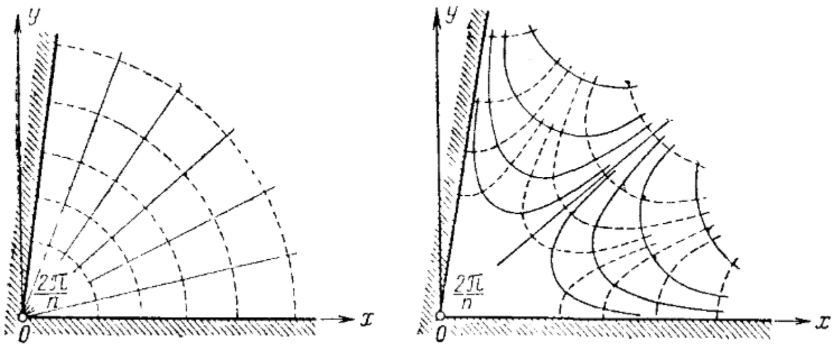
$$|z_1| = |z_2|; \quad \arg z_1 = \arg z_2 + \frac{2k\pi}{n} \quad (k \in \mathbb{Z}, k \neq 0). \tag{3.1.4}$$

Цій умові задовольняють, наприклад, сектори

$$\frac{2\pi k}{n} < \varphi < \frac{2\pi(k+1)}{n}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{3.1.5}$$

кожен з яких при відображенні (3.1.1) перетворюється у площину w з виключеною додатною піввіссю.

При цьому промені з вершиною у точці $z = 0$ переходять у промені з вершиною у точці w (тобто лише повертаються на деякий кут); дуги кіл з центром $z = 0$ – у дуги кіл з центром w (тільки, взагалі кажучи, іншого радіуса). На наступному малюнку зображений прообраз в одному з таких секторів площини z сітки полярних і декартових координат у площині w відповідно:



Справді, з рівносильної до (3.1.1) формули

$$w = u + iv = r^n \cdot (\cos n\varphi + i \sin \varphi) \tag{3.1.6}$$

випливає, що прямим $u = u_0$ і $v = v_0$ у площині z відповідають криві з полярними рівнянням

$$r = \sqrt[n]{\frac{u_0}{\cos n\varphi}}; \quad r = \sqrt[n]{\frac{v_0}{\sin n\varphi}}. \tag{3.1.7}$$

Зауважимо нарешті, що функція $w = z^n$ аналітична у всій площині, адже для довільного z існує

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{(z+h)^n - z^n}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{n \cdot z^{n-1} \cdot h + h^2 \cdot (\cdots)}{h}\right) = n \cdot z^{n-1}. \tag{3.1.8}$$

Функція
$$w = \sqrt[n]{z}, \tag{3.1.9}$$
обернена до функції $z = w^n$, n-значна при $z \neq 0$. Як випливає з розділу 2, значення кореня $\sqrt[n]{z}$ визначається значенням аргументу, вибраним для точки z.

Позначимо через $\arg z_0$ одне зі значень аргументу в точці $z_0 \neq 0$ і припустимо, що точка z описує, починаючи з z_0, деяку неперервну лінію C, яка не проходить через початок координат.

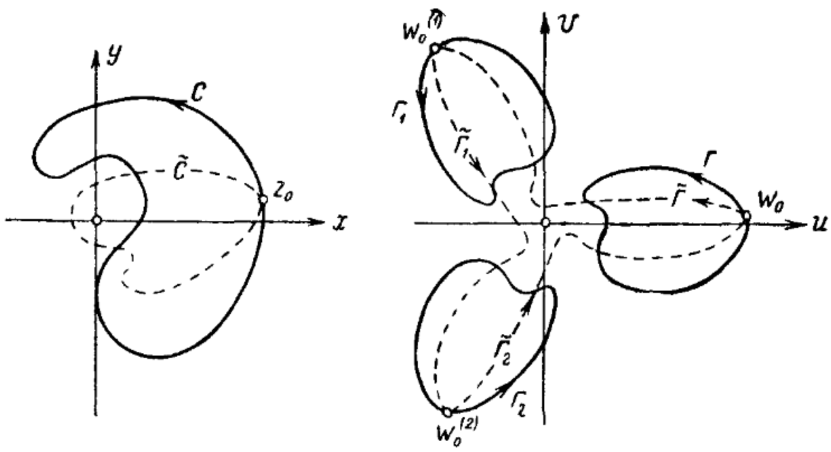
Через $\arg z$ ми будемо позначати те значення аргументу, яке змінюється при цьому неперервно.

В силу неперервності $\arg z$ і $|z|$ значення $w = \sqrt[n]{z}$, яке цілком визначається зробленим вибором аргументу також буде змінюватися неперервно.

Припустимо, що крива C замкнута і не містить всередині себе точку $z = 0$.

Тоді, при повному обході точкою z кривої C, точка $w = \sqrt[n]{z}$, де $\sqrt[n]{z}$ – вибране нами значення кореня, описує деяку замкнуту криву Γ, повертаючись до свого початкового положення, бо при цьому $\arg z$ повертається до початкового значення $\arg z_0$.

Значення кореня, які визначаються іншим вибором початкового значення $\arg z_0$ при повному обході C також описують замкнуті криві Γ_k, які відрізняються від кривої Γ тільки поворотами на ціле кратне кута $2\pi/n$:



Нехай тепер $\tilde{C}$ – замкнута крива без точок самоперетину, яка містить точку $z = 0$ всередині себе, і z_0 – деяка точка кривої $\tilde{C}$.

Тоді, при повному обході $\tilde{C}$, починаючи з z_0 у додатному напрямку, відповідна точка $w = \sqrt[n]{z}$ не повертається у своє початкове положення, а займає нове положення

$$w_0^{(1)} = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right) w_0 \tag{3.1.10}$$

– значення $\sqrt[n]{z_0}$ відмінне від w_0.

Це пояснюється тим, що $\arg z$ при обході кривої $\tilde{C}$ збільшується на 2π.

Звідси випливає, що у довільній області D яка не містить жодної замкнутої кривої, що обходить точку $z = 0$ можна виділити n неперервних і однозначних функцій, кожна з яких набуває одного зі значень $\sqrt[n]{z}$.

Ці n функцій називаються гілками багатозначної функції $w = \sqrt[n]{z}$, їх значення в кожній фіксованій точці відрізняються один від одного множником

$$\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right). \tag{3.1.11}$$

Кожна така гілка буде реалізувати однолисте відображення області D, тому в кожній точці цієї області застосовна теорема про прохідну оберненої функції (п. 5), згідно з якою існує цілком конкретне значення похідної

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)' = \frac{1}{(w^n)'} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sqrt[n]{z}}{z}, \tag{3.1.12}$$

або, якщо домовимося писати $\sqrt[n]{z} = z^{1/n}$,

$$\left(z^{1/n}\right)' = \frac{z^{1/n-1}}{n}. \tag{3.1.13}$$

Таким чином, довільна із побудованих гілок є аналітичною функцією в області D.

В області D розглядуваного типу і нескінченнозначна функція $\operatorname{Arg} z$ розпадається на нескінченну кількість неперервних і однозначних гілок.

Кожну таку гілку ми будемо позначати символом $\arg z$ і кожного разу будемо вказувати, яка ця гілка визначається.

Якщо область D містить хоча б одну замкнуту криву, яка обходить точку $z = 0$, то у такій області гілки функції $\sqrt[n]{z}$ неможливо відділити одну від одної.

Якщо в околі деякої точки $z \neq 0$ з області D ми і виділимо якусь гілку, то, рухаючись по кривій, яка обходить $z = 0$, ми прийдемо до іншої гілки.

Відповідно, в такій області D ми не можемо розглядати функцію $\sqrt[n]{z}$ як сукупність окремих однозначних аналітичних функцій.

Точка $z = 0$, в довільному околі якої неможливо відділити n окремих гілок функції $\sqrt[n]{z}$ називаються *точкою гілкування* цієї функції.

У якості прикладу області D першого типу можна розглядати площину z з вирізаною лінією L яка йде від точки $z = 0$ до нескінченності.

Якщо L збігається з додатною піввіссю, то гілки функції $w = \sqrt[n]{z}$ відображає область D на сектори

$$\frac{2k\pi}{n} < \arg w < \frac{2(k+1)\pi}{n}. \tag{3.1.14}$$

Ці відображення обернені до розглянутого вище відображення за допомогою функції $w = z^n$.

Область D напевне є областю другого типу якщо вона містить точку $z = 0$ всередині.

3.2 Функція Жуковського $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

Визначена, однозначна та аналітична для всіх $z \neq 0$.

Знайдемо область однолистості відображення

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right). \tag{3.2.1}$$

Для цього припустимо, що $z_1 \neq z_2$ переходять в одну і ту ж точку w.

Тоді маємо

$$z_1 + \frac{1}{z_1} = z_2 + \frac{1}{z_2}, \tag{3.2.2}$$

звідки

$$(z_1 - z_2) \cdot \left(1 - \frac{1}{z_1 \cdot z_2}\right) = 0 \tag{3.2.3}$$

і, як наслідок,

$$z_1 \cdot z_2 = 1. \tag{3.2.4}$$

Таким чином, для однолистості відображення (3.2.1) у деякій області D необхідно і достатньо, щоб D не містила жодних двох точок z_1 і z_2, пов'язаних співвідношенням $z_1 \cdot z_2 = 1$.

Цій умові задовольняє, наприклад, внутрішність одиничного круга $|z| < 1$ або його зовнішність $|z| > 1$.

Для того, зоб вивчити картину відображення (3.2.1), покладемо

$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right), \quad w = u + iv \tag{3.2.5}$$

і виділимо дійсну та уявну частини.

Тоді відображення (3.2.1) перепишеться у вигляді

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi, \quad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi, \tag{3.2.6}$$

і ми побачимо, що кожне коло $|z| = r_0 < 1$ переходить з його допомогою у криву

$$u = \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{1}{r_0}\right)\cos\varphi, \quad v = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_0} - r_0\right)\sin\varphi, \tag{3.2.7}$$

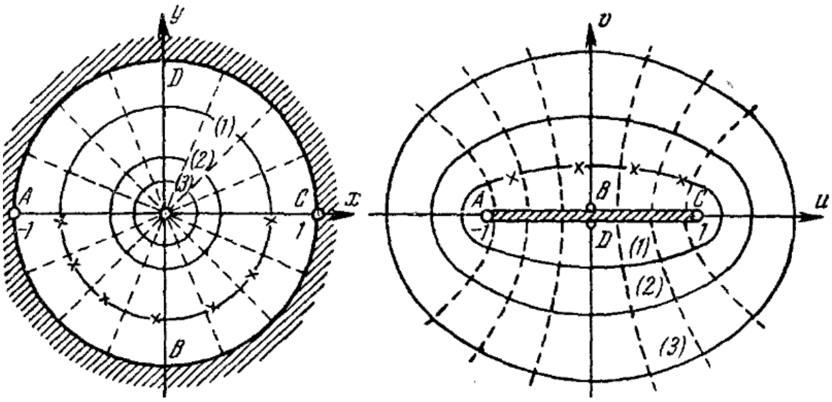
тобто в еліпс з півосями

$$a = \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{1}{r_0}\right), \quad b = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_0} - r_0\right), \tag{3.2.8}$$

який проходиться у від'ємному напрямку.

При $r_0 \to 1$ цей еліпс стискається у відрізок $[-1, 1]$ осі u, а при $r_0 \to 0$ розходиться на нескінченність.

Відповідно, функція (3.2.1) відображає внутрішність круга $|z| < 1$ на зовнішність відрізка $[-1, +1]$:



Всі внутрішні точки цього відрізка – подвійні, він немовби складається із двох берегів, причому верхнє півколо переходить у нижній берег, а нижнє півколо у верхній берег.

Помітимо ще, що радіуси $\arg z = \varphi_0$, $0 < r < 1$ переходять при відображенні (3.2.1) у гілки гіпербол

$$\frac{u^2}{\cos^2 \varphi_0} - \frac{v^2}{\sin^2 \varphi_0} = 1 \tag{3.2.9}$$

Фокуси цих гіпербол, так само як і еліпсів (3.2.7) розташовані у кінцях відрізка $[-1, +1]$.

Зі співвідношень (3.2.6) випливає також, що кола $|z| = r_0 > 1$ переходять в еліпси із півосями

$$a = \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{1}{r_0}\right), \quad b = \frac{1}{2}\left(r_0 - \frac{1}{r_0}\right) \tag{3.2.10}$$

Ці еліпси збігаються з тими, у які переходять кола $|z| = r_0 < 1$, тільки обходяться вони у додатному напрямку.

Відповідно, функція (3.2.1) відображає і зовнішність круга $|z| > 1$ також на зовнішність відрізка $[-1, +1]$ осі u, причому верхнє півколо переходить у верхній берег відрізка, а нижня – в нижній.

Обернена до функції (3.2.1) функція

$$z = w + \sqrt{w^2 - 1} \tag{3.2.11}$$

двозначна – кожній точці w вона ставить у відповідність дві точки z_1 і z_2, пов'язані умовою $z_1 \cdot z_2 = 1$.

Якщо покласти $z_1 = w + \sqrt{w^2 - 1}$, то другим значенням z, яке відповідає w буде $z_2 = w - \sqrt{w^2 - 1}$ і безпосередньо видно, що $z_1 \cdot z_2 = 1$.

Позначимо через ρ_1, θ_1 і ρ_2, θ_2 модулі і аргументи комплексних чисел $w - 1$ і $w + 1$ відповідно.

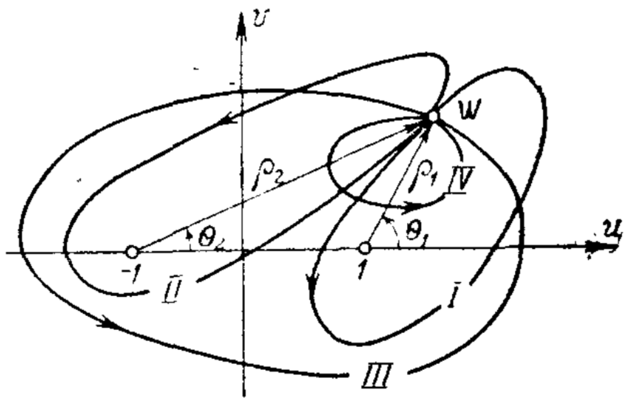
Тоді модуль і аргумент кореня у формулі (3.2.11) будуть дорівнювати $\sqrt{\rho_1 \cdot \rho_2}$ і $(\theta_1 + \theta_2)/2$.

Звідси випливає, що при обході точкою w замкнутої лінії першого або другого типу, який охоплює лише одну із точок $+1$ і -1, значення кореня змінює знак.

Справді, при такому обході θ_1 (або θ_2) змінюється на 2π, а θ_2 (або θ_1) не змінюється.

Відповідно, аргумент кореня змінюється на π, а модуль кореня при обході довільного замкнутого контуру повертається до початкового значення.

Якщо тепер точка w обходить замкнуту лінію третього типу яка охоплює обидві точки ± 1, то значення кореня не змінюється, бо при цьому і θ_1 і θ_2 змінюються на 2π і, відповідно, аргумент кореня $(\theta_1 + \theta_2)/2$ також змінюється на 2π.



Значення кореня не змінюється якщо замкнута лінія має четвертий тип, тобто не містить всередині себе жодної з точок ± 1, адже при цьому ані θ_1 ані θ_2 не змінюються.

Таким чином, в довільній області Δ у якій не можна провести замкнуту лінію яка обходить тільки одну з точок ± 1 функція (3.2.11) допускає виділення двох однозначних гілок.

Ці гілки у кожній фіксованій точці w відрізняються знаком кореня у формулі (3.2.11) і призводять до двох значень z зв'язаних умовою $z_1 \cdot z_2 = 1$.

Кожна з цих гілок реалізує однолисте відображення і, за теоремою про похідну оберненої функції, аналітична.

Якщо ж в області Δ можна обійти точку $+1$ (не обійшовши при цьому точку -1) або -1 (не обійшовши $+1$), наприклад, якщо Δ містить всередині хоча б одну з цих точок, то у такій області гілки функції (3.2.11) неможливо відрізнити одну від одної.

Точки $w = \pm 1$, у яких гілки функції (3.2.11) немовби з'єднуються між собою, називаються точками гілкування цієї функції.

У якості прикладу області Δ першого типу можна розглянути площину w із вирізаною лінією Λ яка з'єднує точки -1 і $+1$.

Якщо ж Λ є відрізком $[-1, +1]$ дійсної вісі, то дві гілки функції (3.2.11) відображають Δ, відповідно на зовнішність та внутрішність одиничного кола.

Ці відображення обернені до розглянутих вище.

3.3 Експонента і логарифм

Експоненту e^z визначимо для довільного комплексного $z = x + iy$ наступною рівністю:

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y). \tag{3.3.1}$$

Для дійсних $z = x$ це визначення збігається зі звичайним.

Експонента всюди аналітична. Справді, у довільній точці виконуються умови Коші-Рімана:

$$\frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y) = \frac{\partial}{\partial y}(e^x \sin y); \tag{3.3.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(e^x \cos y) = -\frac{\partial}{\partial x}(e^x \sin y). \tag{3.3.3}$$

Зберігається звичайна формула диференціювання

$$(e^z)' = e^z. \tag{3.3.4}$$

Справді, похідна не залежить від напрямку, тому маємо

$$(e^z)' = \frac{\partial}{\partial x}(e^x(\cos y + i\sin y)) = e^x(\cos y + i\sin y) = e^z. \tag{3.3.5}$$

Зберігається основна властивість експоненти:

$$\begin{aligned} e^{z_1}\cdot e^{z_2} = e^{x_1}\cdot(\cos y_1 + i\sin y_1)\cdot e^{x_2}\cdot(\cos y_2 + i\sin y_2) = \\ = e^{x_1+x_2}\cdot(\cos(y_1+y_2) + i\cdot\sin(y_1+y_2)) = e^{z_1+z_2}. \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Зауважимо, що експонента жодного комплексного числа не дорівнює нулю адже $|e^z| = e^x > 0$.

Покладаючи в (3.3.1) $x = 0$, $y = \varphi$ отримаємо класичну формулу Ейлера:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{3.3.7}$$

За допомогою формули Ейлера довільне комплексне число z з модулем r і аргументом φ може бути записане у степеневій формі:

$$z = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\cdot e^{i\varphi}. \tag{3.3.8}$$

Експонента періодична з чисто уявним періодом $2\pi i$. Справді, для довільного цілого k маємо

$$e^{z+2\pi ki} = e^z\cdot e^{2\pi ki} = e^z, \tag{3.3.9}$$

адже, згідно з формулою Ейлера, $e^{2\pi ki} = 1$.

Проте, якщо $e^{z_1} = e^{z_2}$, то $e^{x_1} = e^{x_2}$, $\cos y_1 = \cos y_2$, $\sin y_1 = \sin y_2$, тому $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1 + 2k\pi$, або

$$z_2 - z_1 = 2k\pi i, \tag{3.3.10}$$

де k – ціле число.

Завдяки періодичності, вивчення функції e^z на площині зводиться до вивчення її на смузі $0 \le y < 2\pi$.

Зокрема, відображення (3.3.10) однолисте на цій смузі, адже ця смуга не містить жодних двох точок, пов'язаних співвідношенням $e^{z_1} = e^{z_2}$.

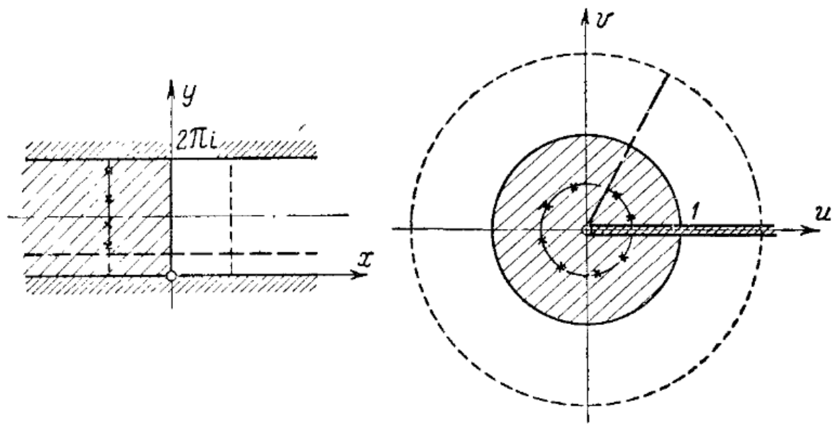
Введемо у площині w полярні координати, поклавши $w = \rho \cdot e^{i\theta}$, тоді (3.3.1) запишеться у вигляді двох рівностей:

$$\rho = e^x, \quad \theta = y. \tag{3.3.11}$$

Як наслідок, відображення (3.3.1) перетворює прямі $y = y_0$ у промені $\theta = y_0$, а відрізки $x = x_0$, $0 \le y < 2\pi$ – в кола $\rho = e^{x_0}$.

При цьому смуга $0 < y < 2\pi$ перетворюється у площину w із розрізом вздовж додатної півосі, а половина $0 < y < \pi$ цієї смуги – у верхню півплощину.

У загальному випадку, смуга $0 < \operatorname{Im} z < h$ експонента переводить в кути $0 < \arg w < h$:



Логарифм визначається як *обернена* до експоненти функція: число w називається логарифмом числа z якщо $e^w = z$, позначається

$$w = \ln z. \tag{3.3.12}$$

З визначення випливає *основна властивість логарифмів*: якщо $w_1 = \ln z_1$ і $w_2 = \ln z_2$, то $w = w_1 + w_2$ є логарифмом числа $z = z_1 \cdot z_2$:

$$\ln z_1 + \ln z_2 = \ln(z_1 \cdot z_2). \tag{3.3.13}$$

Справді, $z_1 = e^{w_1}$, $z_2 = e^{w_2}$, тому $z_1 \cdot z_2 = e^{w_1 + w_2}$.

Зокрема, покладаючи в (3.3.13) $z_1 = |z|$, $z_2 = e^{i \arg z}$, отримаємо

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z, \tag{3.3.14}$$

де символ $\arg z$ позначає *довільне* значення аргументу z, тому кожне комплексне число $z \neq 0$ має нескінченну кількість логарифмів.

Для ясності будемо позначати *багатозначну* функцію символом $\operatorname{Ln} z$:

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi). \tag{3.3.15}$$

Символом $\ln z$ будемо позначати *одне* зі значень $\operatorname{Ln} z$, вказуючи за потреби яке саме.

Як і раніше, значення $\operatorname{Ln} z$ визначається значенням аргументу, приписаного точці z.

Як і раніше, нас здебільшого цікавитиме значення логарифму *не в одній точці, а на кривій*, C яка починається у точці $z_0 \neq 0$, і по якій неперервно рухається точка z.

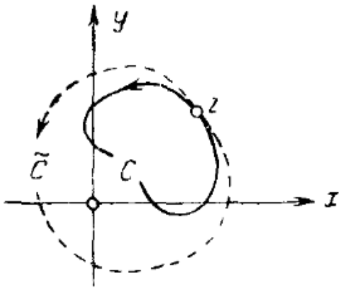
Зрозуміло що початковим значенням можна вибрати довільне, а далі будемо обирати таке значення $\operatorname{Ln} z$ яке змінюється неперервно.

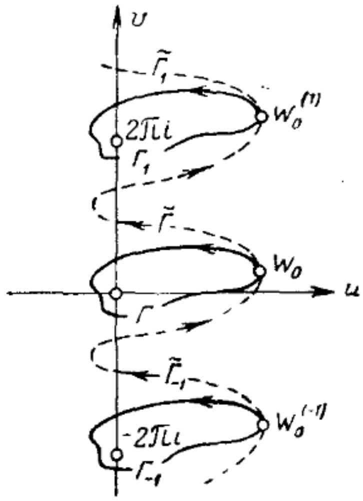
Припустимо, що крива C замкнута і *не містить* всередині точку $z = 0$.

Коли z описує криву C, точка $w = \ln z$ *пробігає* деяку замкнуту криву Γ.

Інші значення логарифму, що відрізняються лише початковим значенням $\arg z_0$, опишуть криві Γ_k які *відрізняються* від Γ *лише зсувом* на вектор $2k\pi i$.

Якщо $\tilde{C}$ – замкнута крива, що *містить* точку $z = 0$ всередині, то при обході її точкою z у додатному напрямку точка $w = \ln z$ не повернеться до свого початкового положення, а займе *нове* положення $w_0^{(1)} = w_0 + 2\pi i$.





Звідси випливає, що у довільній області D яка не містить замкнутих кривих які обходять точку $z = 0$ можна виділити *нескінченну множину неперервних і однозначних гілок* багатозначної функції $w = \operatorname{Ln} z$, значення яких у кожній фіксованій точці відрізняються на доданок $2k\pi i$.

Кожна така гілка $\ln z$ буде реалізувати взаємно-однозначне відображення області D і, відповідно, за теоремою про прохідну оберненої функції буде мати *похідну*

$$(\ln z)' = \frac{1}{(e^w)'} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}. \tag{3.3.16}$$

Зауважимо, що похідна *одна* для усіх гілок.

Таким чином, всі гілки $\operatorname{Ln} z$ будуть *аналітичними* функціями.

Якщо ж область D містить хоча б одну замкнуту криву що охоплює точку $z = 0$, то у такій області гілки функції $\operatorname{Ln} z$ розрізнити *неможливо.*

Точка $z = 0$ у якій немовби з'єднуються всі гілки функції $\operatorname{Ln} z$ називається точкою *гілкування.*

3.4 Тригонометричні та гіперболічні функції

3.4.1 Тригонометричні функції

У комплексній області просто виражаються через експоненту.

Для дійсної змінної x формула Ейлера дає

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x, \tag{3.4.1}$$

звідки

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}; \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}. \tag{3.4.2}$$

Використаємо це як визначення, тобто нехай для довільного комплексного z:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \tag{3.4.3}$$

Таким чином визначені функції для дійсних $z = x$ збігаються зі звичайними синусом і косинусом.

Також, обидві визначені функції всюди аналітичні, причому виконуються звичайні формули диференціювання:

$$(\sin z)' = \cos z; \quad (\cos z)' = -\sin z. \tag{3.4.4}$$

Обидві функції періодичні з дійсним періодом 2π.

$\sin z$ – непарна функція, $\cos z$ – парна.

Виконуються звичайні тригонометричні рівності:

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad \sin 2z = 2 \sin z \cos z, \quad \ldots \tag{3.4.5}$$

Дослідимо відображення яке реалізує перша з цих функцій. Покладаючи

$$iz = z_1, \quad e^{z_1} = z_2, \quad z_3 = -iz_2 = \frac{e^{iz}}{i}, \tag{3.4.6}$$

отримаємо

$$w = \frac{1}{2}\left(z_3 + \frac{1}{z_3}\right) = \sin z. \tag{3.4.7}$$

Таким чином, наше відображення можна розглядати як композицію вже досліджених.

Знайдемо перш за все умови його однолистості: нехай D при відображеннях (3.4.6) переходить послідовно в D_1, D_2 і D_3.

Перше і третє із відображень (3.4.6) однолисті всюди, а для однолистості другого необхідно і достатньо аби D_1 не містила жодної пари точок z_1' і

z_1'' пов'язаних співвідношенням $z_1' - z_1'' = 2k\pi i$, де k – ціле число.

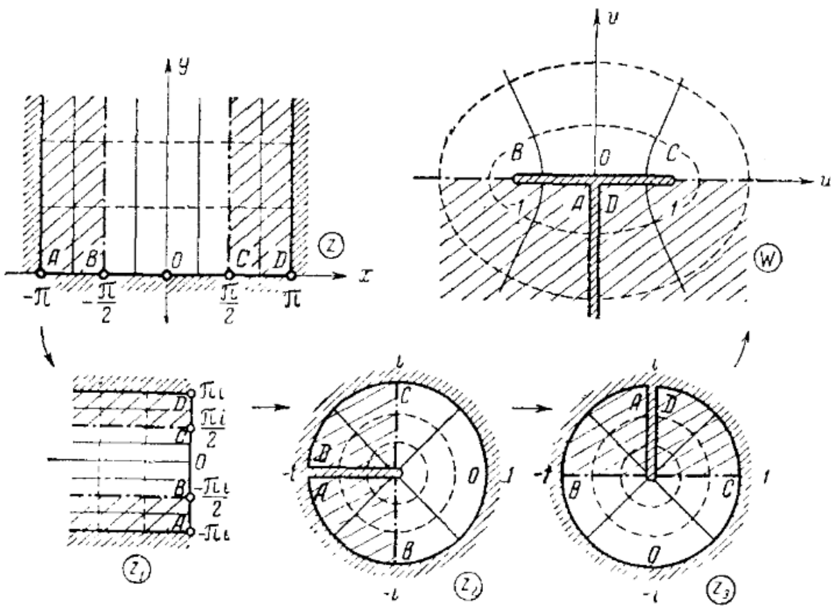
Для однолистості відображення (3.4.7) необхідно і достатньо аби область D_3 не містила жодної пари точок z_3' і z_3'' пов'язаних співвідношенням $z_3' \cdot z_3'' = 1$.
Переходячи за допомогою формул (3.4.6) до площини z отримаємо, що для однолистості відображення $w = \sin z$ в області D необхідно і достатньо, аби D не містила жодної пари точок z' і z'' пов'язаних, по-перше

$$z' - z'' = 2k\pi \quad (k \neq 0 \text{ – ціле}), \tag{3.4.8}$$

і, по-друге, співвідношенням $e^{i(z'+z'')=-1}$, або, що те саме,

$$z' + z'' = (2k+1) \cdot \pi \quad (k \text{ – ціле}), \tag{3.4.9}$$

Цим умовам задовольняє, наприклад, півсмуга $-\pi < x < \pi$, $y > 0$:



Сім'ї променів $x = x_0$ і відрізків $y = y_0$ переходять в сім'ї гіпербол та еліпсів відповідно, зі спільними фокусами.

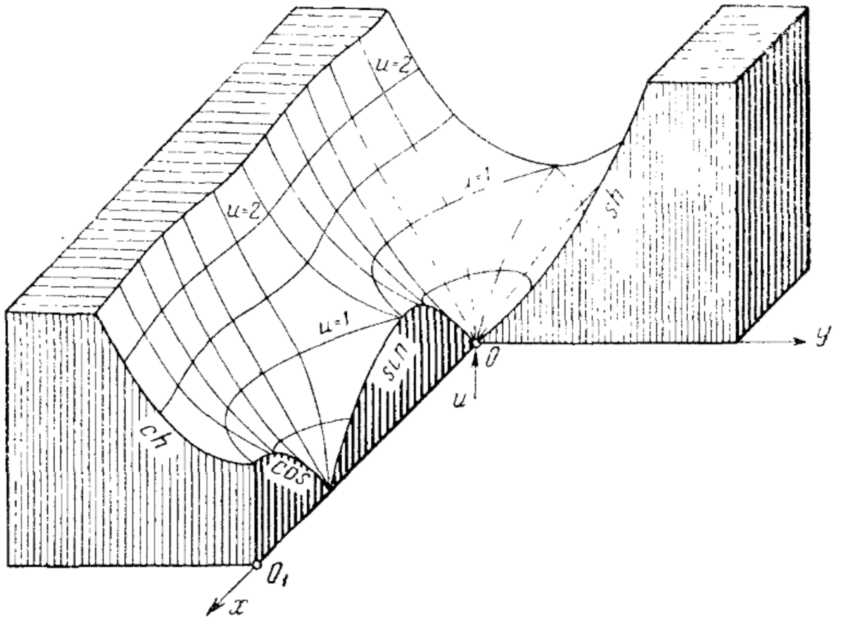
При цьому вдвічі вужча півсмуга $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$, $y > 0$ переходить у верхню півплощину.

Як бачимо, $\sin z$ в комплексній площині не є обмеженим, наприклад на променях $x = \pm\pi/2$, $y > 0$ він набуває дійсних значень за модулем більших за одиницю, і взагалі як завгодно великих.

Помітимо також, що у (замкнутій) півсмузі $-\pi \le x \le \pi$, $y \ge 0$ функція $\sin z$ набуває значення 0 лише у точках $z = 0$ і $z = \pm\pi$.

Враховуючи непарність і періодичність цієї функції, можна зробити висновок що вона обертається на нуль лише на дійсній вісі у точках $z = k\pi$.

Для повноти приводимо *поверхню модуля*, або "рельєф" функції $\sin z$, тобто поверхню у просторі (x, y, u) з рівнянням $u = |\sin z|$:



Ця поверхня періодична з дійсним періодом π.

На ній нанесені дві системи ліній – це лінії рівня $|\sin z|$ і $\arg \sin z$.

Зріз поверхні вертикальною площиною, що проходить через вісь Ox дає графік функції $|\sin x|$.

По мірі віддалення від цієї осі поверхня згладжується, а аплікати (u-координати) її точок швидко зростають.

За формою поверхня наближається до циліндра $u = e^{|y|}/2$.

Відображення яке реалізує функція $\cos z$, у силу співвідношення

$$\cos z = \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) \tag{3.4.10}$$

відрізняється від розглянутого виключно зсувом.

Функції $\tan z$ і $\cot z$ визначаються формулами

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = -i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}; \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = i\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}. \qquad (3.4.11)$$

Функція $\tan z$ аналітична всюди за виключенням точок де $\cos z$ обертається на нуль, тобто всюди окрім точок $z_k = \pi/2 + k\pi$, адже при наближенні до цих точок $\tan z$ необмежено зростає.

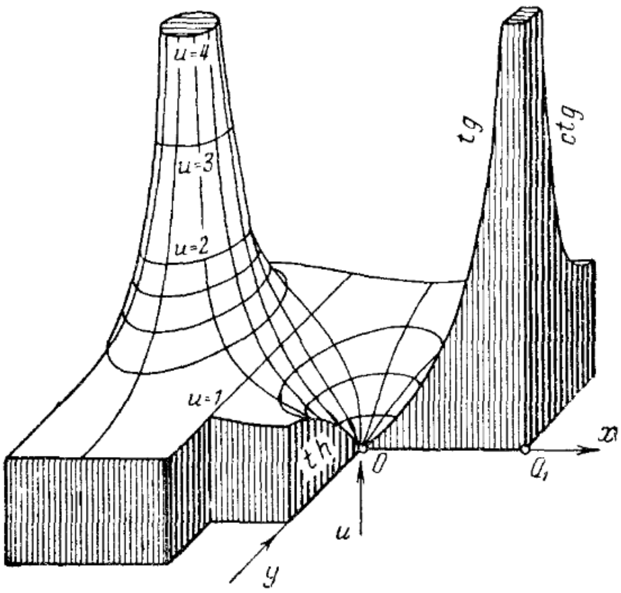
Те ж саме можна сказати про функцію $\cot z$ і точки $z_k = k\pi$.

З формул (3.4.11) випливає, що ці функції періодичні з періодом π. Справді,

$$\tan(z+\pi) = -i\frac{e^{i(z+\pi} - e^{-i(z+\pi)}}{e^{i(z+\pi} + e^{-i(z+\pi)}} = -i\frac{-e^{iz} + e^{-iz}}{-e^{iz} - e^{-iz}} = \tan z. \qquad (3.4.12)$$

Відображення яке реалізує функція $w = \tan z$ ми розглянемо пізніше.

Тут ми наведедемо лише рельєф тангенсу, тобто поверхню $u = |\tan z|$:



Ця поверхня періодична з дійсним періодом $\pi/2$.

Вона має яскраво виражені піки над точками $z = \pi/2 + k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Її зріз вертикальною площиною, що проходить через вісь Ox, дає графік $|\tan x|$.

По мірі віддалення від цієї вісі поверхня стає все більш плоською і наближається до площини $u = 1$.

На поверхні нанесені лінії рівня $|\tan z|$ і $\arg\tan z$.

3.4.2 Гіперболічні функції

Гіперболічні функції у комплексній області визначається рівностями

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \tag{3.4.13}$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \tag{3.4.14}$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}, \tag{3.4.15}$$

$$\coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}. \tag{3.4.16}$$

Вони цілком просто виражаються через тригонометричні функції:

$$\sinh z = -i \sin iz, \tag{3.4.17}$$

$$\cosh z = \cos iz, \tag{3.4.18}$$

$$\tanh z = -i \tan iz, \tag{3.4.19}$$

$$\coth z = i \cot iz, \tag{3.4.20}$$

і тому несуттєво від них відрізняються.

3.4.3 Обернені тригонометричні та гіперболічні функції

Тригонометричні та гіперболічні функції виражаються через експоненту, тому обернені тригонометричні і обернені гіперболічні функції виражаються через логарифми.

Отримаємо такий вираз для $w = \arccos z$: за визначенням

$$z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}, \tag{3.4.21}$$

звідки

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0. \tag{3.4.22}$$

Розв'язуючи це квадратне відносно e^{iw} рівняння, знаходимо

$$e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1} \tag{3.4.23}$$

і

$$w = \arccos z = -i \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) \tag{3.4.24}$$

(знаки $\pm$ у формулі коренів квадратного рівняння можна опустити якщо розуміти корінь як двозначну функцію).

У силу співвідношення

$$(z + \sqrt{z^2 - 1}) \cdot (z - \sqrt{z^2 - 1}) = 1 \tag{3.4.25}$$

зміна знаку перед коренем зводиться до зміни знаку перед логарифмом, тому знак "$-$" в останній формулі також можна не писати:

$$w = \arccos z = i \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) \tag{3.4.26}$$

Аналогічні формули можна отримати й для інших функцій:

$$\arcsin z = \frac{\pi}{2} - \arccos z = \frac{\pi}{2} - i \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}), \tag{3.4.27}$$

$$\arctan z = \frac{\pi}{2} - \arctan z = \frac{1}{2i} \cdot \ln\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right), \tag{3.4.28}$$

$$\operatorname{arcsinh} z = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1}), \tag{3.4.29}$$

$$\operatorname{arccosh} z = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}), \tag{3.4.30}$$

$$\operatorname{arctanh} z = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right), \tag{3.4.31}$$

$$\operatorname{arccoth} z = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{z + 1}{z - 1}\right). \tag{3.4.32}$$

Всі ці функції багатозначні, адже ln у правій частині формул (3.4.26)-(3.4.32) може позначати довільне значення логарифму.

Способи виділення їх однозначних гілок аналогічні розглянутим вище.

Всі такі гілки будуть аналітичними функціями.

3.5 Загальна степенева функція $w = z^a$

Визначається співвідношенням

$$z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}, \tag{3.5.1}$$

де $a = \alpha + i\beta$.

Покладаючи $z = r \cdot e^{i\varphi}$, отримаємо

$$\operatorname{Ln} z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi) \tag{3.5.2}$$

і, як наслідок,

$$z^a = e^{\alpha \ln r - \beta(\varphi + 2k\pi)} \cdot e^{i(\alpha(\varphi+2k\pi)+\beta \ln r)}, \tag{3.5.3}$$

де k – ціле число.

Звідси видно, що при $\beta \neq 0$ функція z^a завжди має нескінченно багато значень які лежать (при фіксованих z і a) на колах $|w| = \rho_k$ з радіусами

$$\rho_k = e^{\alpha \ln r - \beta\varphi} \cdot e^{-2k\pi\beta} \tag{3.5.4}$$

які утворюють геометричну нескінченну в обидві сторони прогресію зі знаменником $e^{-2\pi\beta}$.

Аргументи цих значень

$$\theta_k = \alpha\varphi + \beta \ln r + 2k\pi\alpha \tag{3.5.5}$$

утворюють також нескінченну в обидві сторони арифметичну прогресію з різницею $2\pi\alpha$.

При $\beta = 0$, тобто при дійсних a, значення z^a розташовані на колі $|w| = e^{a \ln r} = r^a$, і їх аргументи є

$$\theta_k = a\varphi + 2k\pi a. \tag{3.5.6}$$

Якщо $a = p/q$ – раціональне число, то всі значення θ_k будуть відрізнятися від q із цих значень на ціле кратне 2π.

Як наслідок, у цьому випадку функція $w = z^a$ скінченно-значна і збігається із функцією $\sqrt[q]{z^p}$:

$$z^{p/q} = \sqrt[q]{z^p}. \tag{3.5.7}$$

Якщо ж a – ірраціональне дійсне число, то серед значень θ_k у формулі (3.5.6) немає таких, які відрізняються на ціле кратне 2π і, як наслідок, функція $z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}$ нескінченнозначна.

Багатозначність загальної степеневої функції, як і тих елементарних функцій, які ми розглядали вище, обумовлена багатозначністю аргументу.

Способи виділення її однозначних гілок попереднє, точкою гілкування є $z = 0$.

Наряду із загальною степеневою функцією (3.5.1) можна розглядати загальну експоненту

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a} = e^{z \ln |a|} \cdot e^{zi \operatorname{Arg} a}. \tag{3.5.8}$$

На відміну від функції (3.5.1) функція (3.5.8) являє собою сукупність окремих, не зв'язаних між собою однозначних функцій, які відрізняються множниками $e^{2k\pi iz}$, де k – ціле число.