Задача 1.2. Знайти модулі і аргументи комплексних чисел (a і b – дійсні числа):

1. $\dfrac{1}{i}$; 2. $\dfrac{1-i}{1+i}$; 3. $\dfrac{2}{1-3i}$; 4. $\left(1+i\sqrt{3}\right)^3$.

Розв'язок. Скористаємося правилами арифметичних дій з модулями та аргументами комплексних чисел, а саме

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \tag{1.1}$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2), \tag{1.2}$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \tag{1.3}$$

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2). \tag{1.4}$$

1.

$$\left|\frac{1}{i}\right| = \frac{|1|}{|i|} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$\arg\left(\frac{1}{i}\right) = \arg 1 - \arg i = 0 - \pi/2 = -\pi/2.$$

2.

$$\left|\frac{1-i}{1+i}\right| = \frac{|1-i|}{|1+i|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1.$$

$$\arg\left(\frac{1-i}{1+i}\right) = \arg(1-i) - \arg(1+i) = -\pi/4 - \pi/4 = -\pi/2.$$

3.

$$\left|\frac{2}{1-3i}\right| = \frac{|2|}{|1-3i|} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{2}{5}}.$$

$$\arg\left(\frac{2}{1-3i}\right) = \arg(2) - \arg(1-3i) = 0 - \arctan(-3) = -\arctan(-3).$$

4.

$$\left|\left(1+i\sqrt{3}\right)^3\right| = \left|1+i\sqrt{3}\right|^3 = 2^3 = 8.$$

$$\arg\left(\left(1+i\sqrt{3}\right)^3\right) = 3 \cdot \arg\left(1+i\sqrt{3}\right) = 3 \cdot \pi/3 = \pi.$$

Задача 1.4. Знайти всі значення наступних коренів (і побудувати їх):

1. $\sqrt[3]{1}$;	4. $\sqrt[6]{-8}$;	7. $\sqrt{3+4i}$;
2. $\sqrt[3]{i}$;	5. $\sqrt[8]{1}$;	8. $\sqrt[3]{-2+2i}$;
3. $\sqrt[4]{-1}$;	6. $\sqrt{1-i}$;	9. $\sqrt[5]{-4+3i}$.

Розв'язок. Знайдемо значення вищезгаданих коренів через їхні модулі та аргументи, а саме

$$\left|\sqrt[n]{z}\right| = \sqrt[n]{|z|}, \tag{1.5}$$

$$n\arg\left(\sqrt[n]{z}\right) = n\varphi = \arg(z). \tag{1.6}$$

1. $\left|\sqrt[3]{1}\right| = \sqrt[3]{|1|} = 1,$

$$3\varphi \equiv \arg(1) \implies 3\varphi \equiv 0 \implies \varphi = \frac{2k\pi}{3}, \quad k = 0..2.$$

2. $\left|\sqrt[3]{i}\right| = \sqrt[3]{|i|} = 1,$

$$3\varphi \equiv \arg(i) \implies 3\varphi \equiv \pi/2 \implies \varphi = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k = 0..2.$$

3. $\left|\sqrt[4]{-1}\right| = \sqrt[4]{|-1|} = 1,$

$$4\varphi \equiv \arg(-1) \implies 4\varphi \equiv \pi \implies \varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \quad k = 0..3.$$

4. $\left|\sqrt[6]{-8}\right| = \sqrt[6]{|-8|} = \sqrt{2},$

$$6\varphi \equiv \arg(-8) \implies 6\varphi \equiv \pi \implies \varphi = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, \quad k = 0..5.$$

5. $\left|\sqrt[8]{1}\right| = \sqrt[8]{|1|} = 1,$

$$8\varphi \equiv \arg(1) \implies 8\varphi \equiv 0 \implies \varphi = \frac{k\pi}{4}, \quad k = 0..7.$$

6. $\left|\sqrt{1-i}\right| = \sqrt{|1-i|} = \sqrt[4]{2},$

$$2\varphi \equiv \arg(1-i) \implies 2\varphi \equiv -\pi/4 \implies \varphi = -\frac{\pi}{8} + k\pi, \quad k = 0,1.$$

7. $\left|\sqrt{3+4i}\right| = \sqrt{|3+4i|} = \sqrt{5},$

$$2\varphi \equiv \arg(3+4i) \implies 2\varphi \equiv \arctan(4/3) \implies$$
$$\implies \varphi = \arctan(4/3)/2 + k\pi, \quad k = 0,1.$$

8. $\left|\sqrt[3]{-2+2i}\right| = \sqrt[3]{|-2+2i|} = \sqrt{2}$,

$$3\varphi \equiv \arg(-2+2i) \implies 3\varphi \equiv 3\pi/4 \implies \varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k = 0..2.$$

9. $\left|\sqrt[5]{-4+3i}\right| = \sqrt[5]{|-4+3i|} = \sqrt[5]{5}$,

$$5\varphi \equiv \arg(-4+3i) \implies 5\varphi \equiv \arctan(-3/4) \implies$$
$$\implies \varphi = \arctan(-3/4)/5 + \frac{2k\pi}{5}, \quad k = 0..4.$$

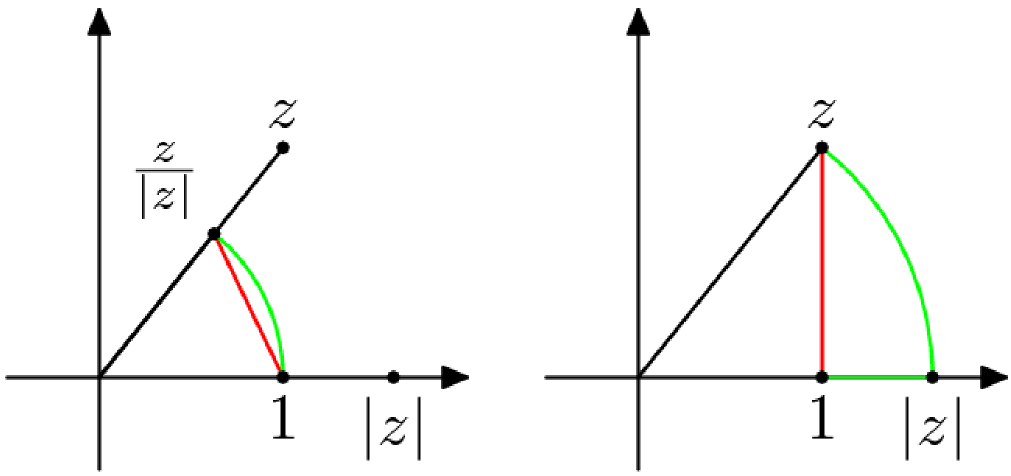
Задача 1.8. Виходячи з геометричних міркувань, довести нерівності

1. $\left|\dfrac{z}{|z|} - 1\right| \le |\arg z|$;
2. $|z-1| \le ||z|-1| + |z| \cdot |\arg z|$.

Розв'язок. У кожному з пунктів використовується теорема про ту, яку огинають, і ту, яка огинає.

1. LHS – довжина хорди одиничного кола, що з'єднує точки 1 і $z/|z|$, а RHS – довжина дуги цього ж кола, що з'єднує ці ж точки, тому LHS $\le$ RHS.

2. LHS – довжина відрізку між точками 1 і z, а RHS – сума довжини відрізку між точками 1 і $|z|$ і довжини дуги кола радіусу $|z|$ між точками $|z|$ і z, тому LHS $\le$ RHS.



Задача 1.9. Довести тотожність

$$|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2),$$

і з'ясувати її геометричний зміст.

Розв'язок. Ця тотожність – ніщо інше як правило паралелограма, "сума квадратів довжин сторін паралелограма рівна сумі квадратів довжин його діагоналей".