10. Нормовані простори і простір лінійних неперервних операторів

Озн. 10.1. *Нехай E — лінійний простір над полем К. Відображення* $\| \cdot \| : E \to R^+$ *називається* ***нормою*** *в просторі E, якщо* $\forall \left(x \in E,\, y \in E,\, \lambda \in K \right)$ *виконуються аксіоми норми:*

1. $\|x\| = 0$ *тоді і тільки тоді, коли* $x = 0$ *(віддільність);*
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ *(однорідність);*
3. $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ *(нерівність трикутника).*

Озн. 10.2. *Лінійний простір із введеною на ньому нормою називається* ***нормованим***.

Ясно, що нормований простір є метричним, оскільки в ньому можна ввести метрику $\rho(x, y) = \|x - y\|$. З цього випливає, що норма елемента в нормованому просторі є відстанню між ним і нульовим елементом: $\|x\| = \rho(x, \theta)$.

Приклад 10.1. Простір

$$l = \left\{ x = \left(x_1, x_2, ..., x_n, ... \right) : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty \right\}$$

є нормованим з нормою $\|x\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$.

Озн. 10.3. *Послідовність* $\{x_n\}$ *елементів нормованого простору E називається* ***збіжною за нормою***, *або* ***сильно збіжною***, *або просто* ***збіжною***, *до елемента* $x_0 \in E$, *якщо* $\|x_n - x_0\| \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Якщо $\{x_n\}$ *збігається до елемента* $x_0 \in E$, *то* $\lim\limits_{n \to \infty} \|x_n\| = \|x_0\|$.

Озн. 10.4. *Повний нормований простір називається* ***банаховим****.*

Озн. 10.5. *Функціонал називається* ***обмеженим****,* якщо

$$\exists C > 0 : \left| f\left(x\right) \right| \le C \|x\|_E . \qquad (1)$$

Озн. 10.7. Найменша серед усіх додатних констант, що задовольняють нерівність (1) називається **нормою функціонала**.

$$\|f\| = \sup_{x \ne 0, x \in E} \frac{\left| f\left(x\right) \right|}{\|x\|} .$$

Озн. 10.8. *Нехай* E_1 *і* E_2 *– нормовані простори. На множині* $D \subset E_1$ *задано* ***оператор****, або відображення* A*, із значеннями в* E_2*, якщо кожному елементу* $x \in D$ *поставлено у відповідність елемент* $y = Ax \in E_2$*.*

Озн. 10.9. *Оператор* A *називається* **лінійним***, якщо*

1. $\alpha x_1 + \beta x_2 \in D$ *для довільних* $x_1, x_2 \in D$*, де* α, β *– дійсні числа;*
2. $A\left(\alpha x_1 + \beta x_2\right) = \alpha A\left(x_1\right) + \beta A\left(x_2\right)$ *для довільних* $x_1, x_2 \in D$*,* α, β *– дійсні числа.*

Озн. 10.10. *Якщо* A *– лінійний оператор з* E_1 *в* E_2 *такий, що* $D = E_1$*, та з умови* $x_n \to x_0$*,* $x_n, x_0 \in E_1$ *випливає, що* $A\left(x_n\right) \to A\left(x_0\right)$ *в* E_2*, то* A *називається* ***лінійним неперервним оператором****.*

Озн. 10.10. *Оператор* A *називається* ***обмеженим*** *в просторі E, якщо існує така константа C, якщо* $\forall x \in E$

$$\|Ax\| \le C \|x\| .$$

Озн. 10.12. *Найменша константа* C, *яка* $\forall x \in E$ *задовольняє нерівність* $\|Ax\| \le C\|x\|$, *називається* ***нормою оператора A***.

Теорема 10.1. *Лінійний оператор, заданий на лінійному нормованому просторі, є неперервним тоді і тільки тоді, коли він обмежений.*

Доведення. Необхідність. Припустимо, що A — неперервний, лінійний, але не обмежений оператор. Тоді

$$\forall n \in N \; \exists x_n \in E : \|Ax_n\|_F > n\|x_n\|_E .$$

Покладемо

$$\xi_n = \frac{1}{n}\frac{x_n}{\|x_n\|} .$$

За побудовою

$$\xi_n = \frac{1}{n}\frac{x_n}{\|x_n\|} \to 0, \quad n \to \infty .$$

Оцінимо норму елемента $\|A\xi_n\|_F$:

$$\|A\xi_n\|_F = \left\| A\left(\frac{1}{n}\frac{x_n}{\|x_n\|}\right)\right\|_F = \frac{1}{n\|x_n\|_E}\|Ax_n\|_F > \frac{n\|x_n\|_E}{n\|x_n\|_E} = 1.$$

З цього випливає, що

$$\lim_{n\to\infty}\|A\xi_n\|_F \ne 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} A\xi_n \ne 0 .$$

A — лінійний оператор $\Rightarrow$

$\Rightarrow A0 = A(x-x) = Ax - Ax = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} A\xi_n \ne A0$

$\Rightarrow A$ — не неперервний. Отримане протиріччя доводить, що оператор A є обмеженим.

Достатність. A — обмежений оператор $\Rightarrow$

$$\exists C > 0 \; \forall x \in E \; \|Ax\|_F \le C\|x\|_E .$$

Нехай

$x_n \to x \Rightarrow \|x_n - x\|_E \to 0 \Rightarrow \|Ax_n - Ax\|_F = \|A(x_n - x)\|_F \leq$

$\leq C\|x - x_n\|_E \to 0 \Rightarrow \|Ax_n - Ax\|_F \to 0 \Rightarrow Ax_n \to Ax$ *при* $n \to \infty$

Це означає, що оператор A — неперервний. ■

Озн. 10.13. *Лінійні оператори A, що відображають нормований простір E в нормований простір F, утворюють* ***нормований простір операторів*** $L(E,F)$ *з нормою*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\neq 0,\, x\in E} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|=1,\, x\in E} \|Ax\|_F = \sup_{\|x\|\leq 1,\, x\in E} \|Ax\|_F .$$

Теорема 10.2. *Нехай A — лінійний обмежений оператор, що діє із нормованого простору E в банахів простір F. Якщо область визначення оператора D(A) щільна в E, то існує такий лінійний обмежений оператор* $\overline{A}: E \to F$ *такий що,* $\overline{A}x = Ax \ \ \forall x \in D(A)$ *і* $\|\overline{A}\| = \|A\|$.

Доведення. Нехай $x \in E \setminus D(A)$. Оскільки $\overline{D(A)} = E$, то

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(A): \lim_{n\to\infty} x_n = x .$$

Із нерівності

$$\|Ax_n - Ax_m\|_F \leq \|A\|\|x_n - x_m\|_E$$

і обмеженості оператора A випливає, що

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N > 0 : \forall n, m \geq N \ \|Ax_n - Ax_m\|_F \leq \|A\| \cdot \|x_n - x_m\|_E < \varepsilon .$$

Це означає, що послідовність $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною. Оскільки простір F є повним, ця послідовність є збіжною:

$$\exists \overline{A}x = \lim_{n\to\infty} A_n x .$$

Покажемо, що цей елемент визначений коректно, тобто не залежить від вибору послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(A): \lim_{n\to\infty} x_n = x$

Припустимо, що існує ще одна послідовність $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(A)$, яка збігається до елемента x:

$$\lim_{n\to\infty} x'_n = x.$$

Нехай

$$y = \lim_{n\to\infty} Ax_n,\ y' = \lim_{n\to\infty} Ax'_n.$$

З того що

$$\lim_{n\to\infty} \|Ax_n - Ax'_n\|_F \le \lim_{n\to\infty} \|A\| \|x_n - x'_n\|_E = 0,$$

випливає

$$\|y - y'\|_F = \lim_{n\to\infty} \|y - y'\|_F \le$$
$$\le \lim_{n\to\infty} \|y - Ax_n\|_F + \lim_{n\to\infty} \|Ax_n - Ax'_n\|_F + \lim_{n\to\infty} \|Ax'_n - y'\|_F = 0.$$

Отже, $y = y'$.

Лінійність оператора $\overline{A}$ випливає із лінійності оператора А і властивостей границь.

Оскільки оператор $\overline{A}$ збігається с оператором A в області визначення $D(A)$, але має більш широку область визначення,

$$\|A\| \le \|\overline{A}\|.$$

З іншого боку,

$$\|Ax_n\|_F \le \|A\| \cdot \|x_n\|_E \quad \forall x_n \in E.$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty} \|Ax_n\|_F = \left\| A\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)\right\|_F = \|\overline{A}x\|_F \le$$
$$\le \|A\| \cdot \left\|\lim_{n\to\infty} x_n\right\|_E = \|A\| \cdot \|x\|_E \quad \forall x \in E.$$

Це означає, що

$$\|\overline{A}\| \le \|A\|.$$

Порівнюючи оцінки $\|\overline{A}\|$, отримуємо

$$\|\overline{A}\| = \|A\|. \blacksquare$$

Теорема Хана-Банаха в нормованому просторі. *Нехай* E *— дійсний нормований простір,* L *— його підпростір,* f_0 *— обмежений лінійний функціонал на* L*. Цей лінійний функціонал можна продовжити до деякого лінійного функціонала* f*, заданого на всьому просторі* E *без збільшення норми:*

$$\|f\| = \|f_0\|.$$

Доведення. Нехай f_0 — обмежений лінійний функціонал на L. Значить,

$$|f_0(x)| \le \|f_0\| \cdot \|x\|,\ x \in L.$$

За теоремою Хана-Банаха в лінійному просторі

$$\exists\ f \text{ — продовження } f_0 \text{ на } E: |f(x)| \le \|f_0\| \cdot \|x\|\quad \forall x \in E$$

З цього випливає, що

$$\|f\| \le \|f_0\|.$$

З іншого боку, $L \subset E \Rightarrow$

$$\|f\| = \sup_{x \ne 0,\, x \in E} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \ge \sup_{x \ne 0,\, x \in L} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \ne 0,\, x \in L} \frac{|f_0(x)|}{\|x\|} = \|f_0\|.$$

Отже, $\|f\| = \|f_0\|$. $\blacksquare$

Література

1. Садовничий В,А. Теория операторов. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. — с.96–102.