Урок 7. Метричні простори

Задача 7.1. *Доведіть, що метричний простір є хаусдорфовим.*

Розв'язок. Якщо $x \neq y$, то $\rho(x,y) = r > 0$. Відкриті кулі $S\left(x, \frac{r}{3}\right)$ і $S\left(y, \frac{r}{3}\right)$ є відкритими множинами, до того ж вони не перетинаються. Достатньо для довільних $x, y \in X$ покласти $V_x = S\left(x, \frac{1}{3}\rho(x,y)\right)$ і $V_y = S\left(y, \frac{1}{3}\rho(x,y)\right)$. ■

Наслідок. *Збіжна послідовність в метричному просторі може мати лише одну границю.*

Задача 7.2. *Доведіть, що метричний простір є нормальним топологічним простором.*

Розв'язок. Нехай (X, ρ) — метричний простір, F_1, F_2 — замкнені множини, $F_1 \cap F_2 = \varnothing$.

Припустимо, що $x_1 \in F_1$ і $x_2 \in F_2$. Введемо такі позначення:

$$\rho(x, F_2) = \inf_{y \in F_2} \rho(x,y), \ \rho(y, F_1) = \inf_{x \in F_1} \rho(y,x).$$

Оскільки F_1, F_2 — замкнені множини і $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, то

$$\rho(x, F_2) > 0 \text{ і } \rho(y, F_1) > 0.$$

Побудуємо відкриті кулі

$$S\left(x, \frac{1}{3}\rho(x, F_2)\right) \text{ і } S\left(y, \frac{1}{3}\rho(y, F_1)\right).$$

Позначимо

$$V_1 = \bigcup_{x \in F_1} S\left(x, \frac{1}{3}\rho(x, F_2)\right), \ V_2 = \bigcup_{y \in F_2} S\left(y, \frac{1}{3}\rho(y, F_1)\right).$$

Оскільки кулі $S\left(x, \frac{1}{3}\rho(x, F_2)\right)$ і $S\left(y, \frac{1}{3}\rho(y, F_1)\right)$ є відкритими множинами, то і множини V_1 і V_2 є відкритими. Доведемо, що $V_1 \cap V_2 = \varnothing$.

Припустимо супротивне. Нехай $\exists z \in V_1 \cap V_2$. Тоді $\exists x_0 \in F_1 : \rho(x_{0,} z) < \frac{1}{3}\rho(x_0, F_2)$ і $\exists y_0 \in F_2 : \rho(z, y_0) < \frac{1}{3}\rho(y_0, F_1)$. Припустимо, для визначеності, що $\rho(x_0, F_2) \leq \rho(y_0, F_1)$. Отже,

$$\rho(x_0, y_0) \leq \rho(x_0, z) + \rho(z, y_0) \leq \frac{1}{3}\rho(x_0, F_2) + \frac{1}{3}\rho(y_0, F_1) \leq \frac{2}{3}\rho(y_0, F_1) < \rho(y_0, F_1).$$

Це суперечить означенню відстані від точки y_0 до множини F_1 (инфімум серед усім можливих відстаней). Отримане протиріччя доводить теорему. ■

Задача 7.3 (задача божевільного математика). Чи може в метричному просторі замкнена куля більшого радіуса міститись в замкненій кулі меншого радіуса?

Розв'язок. Розглянемо метричний простір $\left(\mathbb{R}^2, \rho(x,y)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\right)$, інакше кажучи — евклідову площину. Побудуємо на цій площині дві кулі:

$$S_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 9\right\},\ S_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-2)^2+y^2\le 16\right\}.$$

Перша куля має центр в точці (0, 0) і радіус 3, а друга — центр в точці (2, 0) і радіус 4. Утворимо **новий** метричний простір (S_1,ρ), зберігши евклідову метрику, а як носій обравши множину кулю S_1. Побудуємо множину $S=S_1\cap S_2$. В просторі (S_1,ρ) множина $S=S_1\cap S_2$ містить точки із S_1, які лежать від точки $(0,2)$ на відстані не більше 4, тобто кулю с центром в точці $(0,2)$ і радіусом 4. З іншого боку, сам простір (S_1,ρ) є замкненою кулею з центром в точці (0,0) і радіусом 3. Отже, замкнена куля більшого радіуса містить замкнену кулю меншого радіуса. ■

Задача 7.4. Доведіть, що у довільному метричному просторі (X,ρ) замикання відкритої кулі $S(x_0,r)=\left\{y\in X : \rho(x_0,y)<r\right\}$ міститься в замкненій кулі $S^*(x_0,r)=\left\{x\in X : \rho(x_0,x)\le r\right\}$, тобто $\overline{S(x_0,r)}\subset S^*(x_0,r)$. Чи завжди виконується рівність $\overline{S(x_0,r)}=S^*(x_0,r)$?

Розв'язок. Нехай $x\in\overline{S(x_0,r)}$. Тоді $\exists\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\in S(x_0,r) : x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. Крім того,

$$\rho(x,x_0)\le\rho(x,x_n)+\rho(x_n,x_0)<\rho(x,x_n)+r.$$

Переходячи до границі при $n\to\infty$ і зважаючи на неперервність метрики, доходимо висновку, що

$$\rho(x,x_0)\le r.$$

Отже, точки дотику кулі $S(x_0,r)$ містяться в кулі $S^*(x_0,r)$, тобто $\overline{S(x_0,r)}\subset S^*(x_0,r)$. Покажемо тепер, що рівність виконується не для будь-яких метричних просторів.

Нехай X — довільна множина, що містить хоча б дві точки. Введемо метрику

$$\rho(x,y)=\begin{cases}1, \textit{якщо } x\ne y,\\ 0, \textit{якщо } x=y.\end{cases}$$

Побудуємо метричний простір (X,ρ) — простір ізольованих точок. Нехай x — довільна точка із множини X. Тоді $S(x,1)=\{x\}$, а $S^*(x,1)=X$. В цьому просторі відкрита куля є і замкненою. Отже, $S(x,1)=\overline{S(x,1)}\ne K(x,1)$. Отже, рівність виконується не завжди. ■

Задача 7.5. Доведіть, що у довільному метричному просторі (X,ρ) будь-яка скінченна множина є замкненою множиною.

Розв'язок. Оскільки метричні простори є різновидом топологічних, то множина є замкненою, якщо вона співпадає із своїм замиканням. За теоремою 7.4 кожна точка дотику множини є границею деякої послідовності її точок, отже замикання є підмножиною множини границь всіх послідовностей. З іншого боку, кожна границя будь-якої послідовності елементів деякої множини є точкою дотику цієї множини. Отже, можна сформулювати таке означення: множина в метричному просторі називається замкненою, якщо вона містить всі границі всіх послідовностей її елементів.

Розглянемо скінченну множину $F=\left\{x_1,x_2,...,x_n\right\}$. Будь-яка збіжна послідовність її елементів повинна містити нескінченну кількість однакових елементів, тобто утворювати стаціонарну послідовність. Отже, будь-яка послідовність елементів множини F збігається до одного із її елементів, тобто скінченна множина є замкненою. ■

Задача 7.6. Розглянемо множину векторів $R^n=\left\{x=\left(a_1,a_2,...,a_n\right):a_i\in\mathbb{R}\right\}$ і введемо між довільними її елементами $x=\left(a_1,a_2,...,a_n\right)$ і $y=\left(b_1,b_2,...,b_n\right)$ відстань $\rho\left(x,y\right)=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(a_i-b_i\right)^2}$. Доведіть, що простір $\left(R^n,\rho\right)$ є метричним.

Розв'язок. Покажемо, що функція $\rho\left(x,y\right)$ є метрикою. Для цього перевіримо виконання властивостей метрики.

1) $\rho\left(x,y\right)\geq 0,\ \rho\left(x,y\right)=0\Leftrightarrow x=y$?

Дійсно, $\rho\left(x,y\right)=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(a_i-b_i\right)^2}\quad\forall x,y\in R^n$. Крім того,

$$\rho\left(x,y\right)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(a_i-b_i\right)^2}=0\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\left(a_i-b_i\right)^2=0\Leftrightarrow\left(a_i-b_i\right)^2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_i=b_i\quad\forall i=1,...,n\Leftrightarrow x=y.$$

2) $\rho\left(x,y\right)=\rho\left(y,x\right)\ \ \forall x,y\in R^n$?.

$$\rho\left(x,y\right)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(a_i-b_i\right)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(b_i-a_i\right)^2}=\rho\left(y,x\right)\ \ \forall x,y\in R^n.$$

3) $\rho\left(x,y\right)\leq\rho\left(x,z\right)+\rho\left(z,y\right)\ \ \forall x,y,z\in R^n$?

Для доведення нерівності трикутника скористаємося нерівністю Коші.

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right).$$

Дійсно, увівши в розгляд невід'ємну допоміжну функцію

$$\varphi\left(x\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(a_ix+b_i\right)^2\geq 0,$$

отримуємо квадратний трьохчлен

$$\varphi\left(x\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(a_ix+b_i\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)x^2+2\left(\sum_{i=1}^{b}a_ib_i\right)x+\sum_{i=1}^{n}b_i^2\geq 0.$$

Оскільки цей трьохчлен є невід'ємним і коефіцієнт при першій степені x є парним, його дискримінант менше або дорівнює нулю.

$$\varphi(x) = Ax^2 + 2Bx + C \geq 0,\ \ A = \sum_{i=1}^{n} a_i^2,\ B = 2\sum_{i=1}^{b} a_i b_i,\ C = \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \Rightarrow B^2 - AC \leq 0.$$

Звідси випливає, що

$$\left(\sum_{i=1}^{b} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

Отже, нерівність Коші доведено. Добуваючи з цієї нерівності квадратний корінь, доходимо висновку, що

$$\sum_{i=1}^{b} a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\ .$$

Виділимо в лівій і правій частині повний квадрат. Для цього помножимо цю нерівність на 2.

$$2\sum_{i=1}^{b} a_i b_i \leq 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\ .$$

Тепер додамо до обох частин число $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2$.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{b} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leq 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2\ .$$

Отже,

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right)^2.$$

Добуваючи квадратний корінь з обох частин цієї нерівності, отримуємо, що

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

Введемо в розгляд вектор $z = (c_1, c_2, ..., c_n)$ і зважимо на рівність $x - y = x - z + z - y$. З цього випливає, що

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left((a_i - c_i) + (c_i - b_i)\right)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - c_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (c_i - b_i)^2}.$$

Інакше кажучи,

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

Отже, нерівність трикутника доведено. Таким чином, простір (R^n, ρ) є метричним.■

Задача 7.7. Розглянемо множину послідовностей, таких що ряд, складений з квадратів їх координат, збігається: $l_2 = \left\{ x = (a_1, a_2, ..., a_n) : \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty,\ a_i \in \mathbb{R} \right\}$, і введемо між довільними її елементами $x = (a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ і $y = (b_1, b_2, ..., b_n, ...)$ відстань $\rho(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\infty} (a_i - b_i)^2}$. Доведіть, що простір (l_2, ρ) є метричним.

Розв’язок. Перш, ніж перевіряти властивості метрики, необхідно пересвідчитись, що функція $\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(a_i-b_i)^2}$ є визначеною для всіх елементів x і y, тобто ряд $\sum_{i=1}^{\infty}(a_i-b_i)^2$ збігається для всіх $x=(a_1,a_2,...,a_n,...)$ і $y=(b_1,b_2,...,b_n,...)$ із множини l_2. З попередньої задачі маємо, що

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2=\sum_{i=1}^{n}(a_i+(-b_i))^2\le\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(-b_i)^2}\right)^2.$$

Отже, збільшивши і правій частині кількість невід’ємних доданків до ∞, отримуємо

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2\le\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}b_i^2}\right)^2.$$

Оскільки $x\in l_2$ і $y\in l_2$, то $\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2}<\infty$ і $\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}b_i^2}<\infty$ відповідно. З цього випливає, що

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2}\le const<\infty.$$

Як відомо із курсу математичного аналізу, якщо часткові суми додатного ряду є обмеженими, то цей ряд збігається. Таким чином, ряд $\sum_{i=1}^{\infty}(a_i-b_i)^2$ збігається, і відстань $\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(a_i-b_i)^2}$ є визначеною для всіх елементів $x\in l_2$ і $y\in l_2$.

Тепер перевіримо, що ця функція задовольняє властивостям метрики.

1) $\rho(x,y)\ge 0,\ \rho(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$?

$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(a_i-b_i)^2}\ge 0$. Це очевидно.

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(a_i-b_i)^2}=0\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{\infty}(a_i-b_i)^2=0\Leftrightarrow(a_i-b_i)^2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_i=b_i\Leftrightarrow x=y.$$

2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)\ \ \forall x,y\in l_2$?

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(a_i-b_i)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(b_i-a_i)^2}=\rho(y,x).$$

3) $\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y)\ \ \forall x,y,z\in l_2$?

Вище ми довели нерівність

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2\le\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}b_i^2}\right)^2.$$

Перейдемо до границі при $n\to\infty$. За теоремою про мажоруючу послідовність, отримаємо нерівність

$$\sum_{i=1}^{\infty}(a_i-b_i)^2\le\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}b_i^2}\right)^2.$$

Добуваючи з цієї нерівності квадратний корінь, доходимо висновку, що

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\left(a_i-b_i\right)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}b_i^2}\ .$$

Введемо в розгляд вектор $z=\left(c_1,c_2,...,c_n,...\right)$ і подамо вектор у вигляді $x-y=x-z+x-y$. В такому випадку,

$$\rho\left(x,y\right)=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\left(a_i-b_i\right)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left(a_i-c_i\right)+\left(c_i-b_i\right)\right)^2} \le$$

$$\le\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\left(a_i-c_i\right)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\left(c_i-b_i\right)^2}=\rho\left(x,z\right)+\rho\left(z,y\right).$$

Отже, нерівність трикутника доведено. Таким чином, простір $\left(l_2,\rho\right)$ є метричним.■

Задача 7.8. Розглянемо множину послідовностей, таких що ряд, складений з модулів їх координат, збігається: $l=\left\{x=\left(a_1,a_2,...,a_n\right):\sum_{i=1}^{\infty}\left|a_i\right|<\infty,\ a_i\in\mathbb{R}\right\}$, і введемо між довільними її елементами $x=\left(a_1,a_2,...,a_n,...\right)$ і $y=\left(b_1,b_2,...,b_n,...\right)$ відстань $\rho\left(x,y\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\left|a_i-b_i\right|$. Доведіть, що простір $\left(l,\rho\right)$ є метричним.

Розв'язок. Перш, ніж перевіряти властивості метрики, необхідно пересвідчитись, що функція $\rho\left(x,y\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\left|a_i-b_i\right|$ є визначеною для всіх елементів x і y, тобто ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\left|a_i-b_i\right|^2$ збігається для всіх $x=\left(a_1,a_2,...,a_n,...\right)$ і $y=\left(b_1,b_2,...,b_n,...\right)$ із множини l. Із властивостей модуля і умови $x\in l$ і $y\in l$ випливає, що

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|a_i-b_i\right|=\sum_{i=1}^{\infty}\left|a_i+\left(-b_i\right)\right|\le\sum_{i=1}^{\infty}\left|a_i\right|+\sum_{i=1}^{\infty}\left|-b_i\right|=\sum_{i=1}^{\infty}\left|a_i\right|+\sum_{i=1}^{\infty}\left|b_i\right|<\infty.$$

Таким чином, ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\left|a_i-b_i\right|$ збігається, і відстань $\rho\left(x,y\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\left|a_i-b_i\right|$ є визначеною для всіх елементів $x\in l$ і $y\in l$.

Тепер перевіримо, що ця функція задовольняє властивостям метрики.

1) $\rho\left(x,y\right)\ge 0,\ \rho\left(x,y\right)=0\Leftrightarrow x=y$?

$\rho\left(x,y\right)=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\left(a_i-b_i\right)^2}\ge 0$. Це очевидно.

$$\rho\left(x,y\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\left|a_i-b_i\right|=0\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{\infty}\left|a_i-b_i\right|=0\Leftrightarrow\left|a_i-b_i\right|=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_i=b_i\Leftrightarrow x=y.$$

2) $\rho\left(x,y\right)=\rho\left(y,x\right)\ \ \forall x,y\in l$?

$$\rho\left(x,y\right)=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\left|a_i-b_i\right|}=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\left|b_i-a_i\right|}=\rho\left(y,x\right).$$

3) $\rho(x,y) \le \rho(x,z)+\rho(z,y)\ \ \forall x,y,z \in l$?

Введемо в розгляд вектор $z=(c_1,c_2,...,c_n,...)$ і подамо вектор у вигляді $x-y=x-z+x-y$. В такому випадку,

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}|a_i-b_i| \le \sum_{i=1}^{\infty}|(a_i-c_i)+(c_i-b_i)| \le$$
$$\le \sum_{i=1}^{\infty}|a_i-c_i|+\sum_{i=1}^{\infty}|c_i-b_i| = \rho(x,z)+\rho(z,y).$$

Отже, нерівність трикутника доведено. Таким чином, простір (l,ρ) є метричним. ■

Задача 17.9. Розглянемо множину всіх обмежених нескінченних числових послідовностей, таких що ряд, складений з модулів їх координат, збігається: $m=\left\{x=(a_1,a_2,...,a_n): \sup\limits_i |a_i| < \infty\right\}$, і введемо між довільними її елементами $x=(a_1,a_2,...,a_n,...)$ і $y=(b_1,b_2,...,b_n,...)$ відстань $\rho(x,y)=\sup\limits_i |a_i-b_i|$. Доведіть, що простір (m,ρ) є метричним.

Розв’язок. Перш, ніж перевіряти властивості метрики, необхідно пересвідчитись, що функція $\rho(x,y)=\sup\limits_i |a_i-b_i|$ є визначеною для всіх елементів x і y, тобто число $\rho(x,y)=\sup\limits_i |a_i-b_i|$ є скінченним для всіх $x=(a_1,a_2,...,a_n,...)$ і $y=(b_1,b_2,...,b_n,...)$ із множини m. Із властивостей модуля і умови $x\in m$ і $y \in m$ випливає, що

$$\sup_i |a_i-b_i| \le \sup_i |a_i+(-c_i)| \le \sup_i |a_i| + \sup_i |-c_i| = \sup_i |a_i| + \sup_i |c_i| < \infty.$$

Таким чином, число ряд $\sup\limits_i |a_i-b_i|$ є скінченним, і відстань $\rho(x,y)=\sup\limits_i |a_i-b_i|$ є визначеною для всіх елементів $x\in m$ і $y\in m$.

Тепер перевіримо, що ця функція задовольняє властивостям метрики.

1) $\rho(x,y)\ge 0,\ \rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$?

$\rho(x,y)=\sup\limits_i |a_i-b_i| \ge 0$. Це очевидно.

$\rho(x,y)=\sup\limits_i |a_i-b_i| = 0 \Leftrightarrow |a_i-b_i|=0 \Leftrightarrow a_i=b_i \Leftrightarrow x=y.$

2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)\ \ \forall x,y\in m$?

$\rho(x,y)=\sup\limits_i |a_i-b_i| = \sup\limits_i |b_i-a_i| = \rho(y,x).$

3) $\rho(x,y)\le \rho(x,z)+\rho(z,y)\ \ \forall x,y,z\in m$?

Введемо в розгляд вектор $z=(c_1,c_2,...,c_n,...)$ і подамо вектор у вигляді $x-y=x-z+x-y$. В такому випадку, із властивостей sup випливає, що

$$|a_i-b_i| \le |(a_i-c_i)+(c_i-b_i)| \le |a_i-c_i|+|c_i-b_i| \le$$
$$\le \sup_i |a_i-c_i| + \sup_i |c_i-b_i| \le \rho(x,z)+\rho(z,y)\ \forall i=1,2,...$$

Отже,

$$\rho(x,y)=\sup_i |a_i-b_i| \le \sup_i |a_i-c_i| + \sup_i |c_i-b_i| \le \rho(x,z)+\rho(z,y).$$

Таким чином, простір (m,ρ) є метричним.■

Задача 7.10. Розглянемо множину всіх нескінченних числових послідовностей, $s=\{x=(a_1,a_2,...,a_n)\}$ і введемо між довільними її елементами $x=(a_1,a_2,...,a_n,...)$ і $y=(b_1,b_2,...,b_n,...)$ відстань $\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|a_i-b_i|}{1+|a_i-b_i|}$. Доведіть, що простір (s,ρ) є метричним.

Розв'язок. Перш, ніж перевіряти властивості метрики, необхідно пересвідчитись, що функція $\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|a_i-b_i|}{1+|a_i-b_i|}$ є визначеною для всіх елементів x і y, тобто ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|a_i-b_i|}{1+|a_i-b_i|}$ збігається для всіх $x=(a_1,a_2,...,a_n,...)$ і $y=(b_1,b_2,...,b_n,...)$ із множини s.

$$\frac{|a_i-b_i|}{1+|a_i-b_i|}\le 1\Rightarrow\frac{1}{2^i}\frac{|a_i-b_i|}{1+|a_i-b_i|}\le\frac{1}{2^i}\Rightarrow\rho(x,y)\le\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}=1.$$

Отже, оскільки ряд складається із додатних членів і всі його часткові суми є обмеженими, він є збіжним і відстань $\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|a_i-b_i|}{1+|a_i-b_i|}$ є визначеною для всіх елементів $x\in s$ і $y\in s$.

Тепер перевіримо, що ця функція задовольняє властивостям метрики.

1) $\rho(x,y)\ge 0,\ \rho(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$?

$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|a_i-b_i|}{1+|a_i-b_i|}\ge 0.$. Це очевидно.

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|a_i-b_i|}{1+|a_i-b_i|}=0\Leftrightarrow\frac{1}{2^i}\frac{|a_i-b_i|}{1+|a_i-b_i|}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow|a_i-b_i|=0\Leftrightarrow a_i=b_i\Leftrightarrow x=y.$$

2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)\ \ \forall x,y\in s$?

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|a_i-b_i|}{1+|a_i-b_i|}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|b_i-a_i|}{1+|b_i-a_i|}=\rho(y,x).$$

3) $\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y)\ \ \forall x,y,z\in s$?

Спочатку доведемо допоміжну нерівність.

$\frac{\alpha}{1+\alpha}\le\frac{\beta}{1+\beta}\ \ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}:0\le\alpha\le\beta.$

Дійсно,

$$0\le\alpha\le\beta\Rightarrow\alpha+\alpha\beta\le\beta+\alpha\beta\Rightarrow\alpha(1+\beta)\le\beta(1+\alpha)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\alpha(1+\beta)}{(1+\alpha)(1+\beta)}\le\frac{\beta(1+\alpha)}{(1+\alpha)(1+\beta)}\Rightarrow\frac{\alpha}{1+\alpha}\le\frac{\beta}{1+\beta}.$$

Введемо в розгляд вектори елементами $x=(a_1,a_2,...,a_n,...)$, $y=(b_1,b_2,...,b_n,...)$ і $z=(c_1,c_2,...,c_n,...)$. В такому випадку,

$$|a_i - b_i| \le |(a_i - c_i) + (c_i - b_i)| \le |a_i - c_i| + |c_i - b_i|.$$

Покладемо,

$$\alpha = |a_i - b_i|,\ \beta = |a_i - c_i| + |c_i - b_i|.$$

Тоді маємо,

$$\frac{|a_i - b_i|}{1 + |a_i - b_i|} \le \frac{|a_i - c_i| + |c_i - b_i|}{1 + |a_i - c_i| + |c_i - b_i|} =$$

$$= \frac{|a_i - c_i|}{1 + |a_i - c_i| + |c_i - b_i|} + \frac{|c_i - b_i|}{1 + |a_i - c_i| + |c_i - b_i|} \le$$

$$\le \frac{|a_i - c_i|}{1 + |a_i - c_i|} + \frac{|c_i - b_i|}{1 + |c_i - b_i|}.$$

Множачи на $\frac{1}{2^i}$ і сумуючи обидві частині нерівності, отримуємо таку нерівність.

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|a_i - b_i|}{1 + |a_i - b_i|} \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|a_i - c_i|}{1 + |a_i - c_i|} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|c_i - b_i|}{1 + |c_i - b_i|} =$$

$$= \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

Таким чином, простір (s, ρ) є метричним.■

Задача 7.11. Розглянемо множину $C[a,b]$ всіх функцій, неперервних на відрізку $[a,b]$ і введемо між довільними її елементами $x(t)$ і $y(t)$ відстань $\rho(x, y) = \max\limits_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|$. Доведіть, що простір $(C[a,b], \rho)$ є метричним.

Розв'язок. Перш, ніж перевіряти властивості метрики, необхідно пересвідчитись, що функція $\rho(x, y) = \max\limits_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|$ є визначеною для всіх елементів x і y, тобто число $\max\limits_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|$ є скінченним. Дійсно, за другою теоремою Вейєрштрасса, якщо функція $f(t)$ є неперервною на відрізку $[a,b]$, то вона досягає на ньому свої нижні і верхні грані, тобто своїх мінімальне і максимальне значення. Отже, оскільки різниця неперервних функцій є неперервною функцією, відстань $\rho(x, y) = \max\limits_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|$ є визначеною для всіх елементів $x \in C[a,b]$ і $y \in C[a,b]$.

Тепер перевіримо, що ця функція задовольняє властивостям метрики.

1) $\rho(x, y) \ge 0,\ \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$?

$\rho(x, y) = \max\limits_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)| \ge 0.$. Це очевидно.

$\rho(x, y) = \max\limits_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)| = 0 \Leftrightarrow x(t) = y(t)\ \forall t \in [a,b] \Leftrightarrow x(t) \equiv y(t).$

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)\ \ \forall x, y \in C[a,b]$?

$$\rho(x,y)=\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|=\max_{t\in[a,b]}|y(t)-x(t)|=\rho(y,x).$$

3) $\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y)\ \ \forall x,y,z\in C[a,b]$?

$$|x(t)-y(t)|\le|x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|\le$$
$$\le\max_{t\in[a,b]}|x(t)-z(t)|+\max_{t\in[a,b]}|z(t)-y(t)|=$$
$$=\rho(x,z)+\rho(z,y).$$

Отже,

$$\rho(x,y)=\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|\le$$
$$\le\max_{t\in[a,b]}|x(t)-z(t)|+\max_{t\in[a,b]}|z(t)-y(t)|=$$
$$=\rho(x,z)+\rho(z,y).$$

Таким чином, простір $(C[a,b],\rho)$ є метричним. ■

Задача 7.12. Розглянемо множину $C[a,b]$ всіх функцій, неперервних на відрізку $[a,b]$ і введемо між довільними її елементами $x(t)$ і $y(t)$ відстань $\rho_{L_2}(x,y)=\sqrt{\int\limits_a^b(x(t)-y(t))^2\,dt}$. Доведіть, що простір $(C[a,b],\rho_{L_2})$ є метричним.

Розв'язок. Перш, ніж перевіряти властивості метрики, необхідно пересвідчитись, що функція $\rho_{L_2}(x,y)=\sqrt{\int\limits_a^b(x(t)-y(t))^2\,dt}$ є визначеною для всіх елементів x і y, тобто число $\sqrt{\int\limits_a^b(x(t)-y(t))^2\,dt}$ є скінченним. По-перше, неперервні функції є інтегрованими. По-друге, якщо функції $f(t)$ і $g(t)$ є інтегрованими на відрізку $[a,b]$ і $f(t)\le g(t)$ на всьому відрізку, то

$$\int\limits_a^b f(t)\,dt\le\int\limits_a^b g(t)\,dt.$$

Звідси і з другої теореми Вейєрштрасса випливає, що

$$(x(t)-y(t))^2\le\max_{t\in[a,b]}(x(t)-y(t))^2=C.$$

В такому випадку

$$\int\limits_a^b(x(t)-y(t))^2\,dt\le(b-a)\max_{t\in[a,b]}(x(t)-y(t))^2=C(b-a).$$

Отже,

$$\sqrt{\int\limits_a^b(x(t)-y(t))^2\,dt}\le\sqrt{C(b-a)}.$$

Тепер перевіримо, що ця функція задовольняє властивостям метрики.

1) $\rho(x,y)\ge0,\ \rho(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$?

$\rho(x,y)=\sqrt{\int_a^b (x(t)-y(t))^2\,dt}\geq 0.$ Це очевидно.

Необхідність.

$\rho(x,y)=\sqrt{\int_a^b (x(t)-y(t))^2\,dt}=0 \Leftrightarrow x(t)\equiv y(t)\;\; t\in[a,b]$?

Достатність.

$\sqrt{\int_a^b (x(t)-y(t))^2\,dt}=0 \Rightarrow \int_a^b (x(t)-y(t))^2\,dt=0.$

Розглянемо первісну

$$F(s)=\int_a^s (x(t)-y(t))^2\,dt\;\;\forall s\in[a,b]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall s\in[a,b]\;\; F'(s)=(x(s)-y(s))^2\geq 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall s\in[a,b]\;\; F(s_2)-F(s_1)=\int_{s_1}^{s_2} F'(t)\,dt\geq 0,\;\; s_2\geq s_1.$$

Розглянемо довільну точку s на відрізку $[a,b]$: $a\leq s\leq b$. З цього випливає, що

$$0=F(a)\leq F(s)\leq F(b)=\int_a^b (x(t)-y(t))^2\,dt=0\;\;\forall s\in[a,b]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow F'(s)\equiv 0\;\;\forall s\in[a,b]\Rightarrow (x(t)-y(t))^2\equiv 0\Rightarrow x(t)\equiv y(t)\;\;\forall t\in[a,b].$$

2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)\;\;\forall x,y\in C[a,b]$?

$$\rho(x,y)=\sqrt{\int_a^b (x(t)-y(t))^2\,dt}=\sqrt{\int_a^b (y(t)-x(t))^2\,dt}=\rho(y,x).$$

3) $\rho(x,y)\leq\rho(x,z)+\rho(z,y)\;\;\forall x,y,z\in C[a,b]$?

Нехай $f(t),g(t)\in C[a,b]$. Введемо допоміжну невід’ємну функцію

$$\varphi(x)=\int_a^b (sf(t)+g(t))\,dt=s^2\int_a^b f^2(t)\,dt+2s\int_a^b f(t)g(t)\,dt+\int_a^b g^2(t)\,dt\geq 0$$

Перепишемо цю нерівність в наступному вигляді.

$$As^2+2Bs+C\geq 0\,,$$

де $A=\int_a^b f^2(t)\,dt,\;B=\int_a^b f(t)g(t)\,dt,\;C=\int_a^b g^2(t)\,dt.$ З цього випливає, що дискримінант відповідного квадратного трьохчлена відносно s менше або дорівнює нулю.

$$B^2-AC\leq 0.$$

Отже, ми довели нерівність Буняковського

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2\leq\left(\int_a^b f^2(t)\,dt\right)\left(\int_a^b g^2(t)\,dt\right)$$

Добудемо квадратний корінь з обох частин нерівності Буняковського.

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt\leq\sqrt{\int_a^b f^2(t)\,dt}\sqrt{\int_a^b g^2(t)\,dt}.$$

Додамо до обох частин суму $\int\limits_a^b x^2(t)dt + \int\limits_a^b y^2(t)dt.$

$$\int\limits_a^b f(t)g(t)\,dt + \int\limits_a^b f^2(t)dt + \int\limits_a^b g^2(t)dt \le$$

$$\le \sqrt{\int\limits_a^b f^2(t)\,dt}\sqrt{\int\limits_a^b g^2(t)\,dt} + \int\limits_a^b f^2(t)dt + \int\limits_a^b g^2(t)dt.$$

З цієї нерівності випливає, що

$$\int\limits_a^b \left(f(t)+g(t)\right)^2 dt \le \left(\sqrt{\int\limits_a^b f^2(t)\,dt} + \sqrt{\int\limits_a^b g^2(t)\,dt}\right)^2.$$

Отже,

$$\sqrt{\int\limits_a^b \left(f(t)+g(t)\right)^2 dt} \le \sqrt{\int\limits_a^b f^2(t)\,dt} + \sqrt{\int\limits_a^b g^2(t)\,dt}.$$

Покладемо $f(t) \equiv x(t) - z(t),\ \ g(t) = z(t) - y(t).$ Тоді

$$\sqrt{\int\limits_a^b \left(x(t)-y(t)\right)^2 dt} \le \sqrt{\int\limits_a^b \left(x(t)-z(t)\right)^2 dt} + \sqrt{\int\limits_a^b \left(z(t)-y(t)\right)^2 dt}.$$

Таким чином, простір $\left(C[a,b], \rho_{L_2}\right)$ є метричним. ■