Некоторые иррациональные числа

Глава 6

«π иррационально»

Еще Аристотель предполагал, что диаметр и окружность круга несоизмеримы. Первое доказательство этого фундаментального факта получил Йохан Хейнрих Ламберт в 1766 году. Приведенное ниже доказательство из Книги нашел Иван Нивен в 1947 году [5]. Это в высшей степени элегантное короткое доказательство использует лишь элементарные вычисления. Его идея является очень мощной: с ее помощью, например, Ивамото [2] и Коксма [3] показали, что:

- π^2 иррационально (это более сильное утверждение!),
- e^r иррационально для рациональных $r \neq 0$.

Шарль Эрмит

Метод Нивена, конечно, появился не на пустом месте: его истоки можно проследить вплоть до классической статьи Шарля Эрмита 1873 года [1], в которой впервые было установлено, что e — трансцендентное число, т. е. что e не может быть корнем многочлена с рациональными коэффициентами.

$$\begin{aligned} e &:= 1 + \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{24} + \dots \\ &= 2{,}718281828\dots \end{aligned}$$

Перед тем, как изучать π, мы рассмотрим e и его степени и убедимся в том, что они иррациональны. Это значительно проще, и мы поэтому будем следовать исторической последовательности получения результатов.

Прежде всего, легко показать (как установил Фурье в 1815 году), что $e = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}$ иррационально. В самом деле, если бы для целых $a, b > 0$ выполнялось равенство $e = \frac{a}{b}$, то мы получили бы, что *при любом* $n \geq 0$

$$n!\,b\,e \;=\; n!\,a.$$

Но это не может быть правильным, поскольку в правой части стоит целое число, тогда как левая ввиду равенства

$$e \;=\; \Big(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\Big) \;+\; \Big(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \;\dots\;\Big)$$

разбивается на целое число

$$b\,n!\Big(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\Big)$$

и остаток

$$b\Big(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \;\dots\;\Big),$$

Геометрический ряд

Для бесконечного геометрического ряда

$Q = \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \ldots$

при $q > 1$, очевидно, имеем

$qQ = 1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \ldots = 1 + Q$,

значит,

$Q = \dfrac{1}{q-1}$.

192 JOURNAL DE MATHÉMATIQUES

SUR L'IRRATIONNALITÉ DU NOMBRE

$e = 2,718\ldots$;

PAR J. LIOUVILLE.

On prouve dans les éléments que le nombre e, base des logarithmes népériens, n'a pas une valeur rationnelle. On devrait, ce me semble, ajouter que la même méthode prouve aussi que e ne peut pas être racine d'une équation du second degré à coefficients rationnels, en sorte que l'on ne peut pas avoir $ae + \frac{b}{e} = c$, a étant un entier positif et b, c, des entiers positifs ou négatifs. En effet, si l'on remplace dans cette équation e et $\frac{1}{e}$ ou e^{-1} par leurs développements déduits de celui de e^x, puis qu'on multiplie les deux membres par $1.2.3\,..n$, on trouvera aisément

$$\frac{a}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \ldots\right) \pm \frac{b}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+2} + \ldots\right) = \mu,$$

μ étant un entier. On peut toujours faire en sorte que le facteur

$$\pm\frac{b}{n+1}$$

soit positif; il suffira de supposer n pair si b est <0 et n impair si b est >0; en prenant de plus n très grand, l'équation que nous venons d'écrire conduira dès lors à une absurdité; car son premier membre étant essentiellement positif et très petit, sera compris entre 0 et 1, et ne pourra pas être égal à un entier μ. Donc, etc.

Статья Лиувилля

который *приближенно* равен $\frac{b}{n}$ и поэтому при больших n не может быть целым числом. Действительно, остаток больше $\frac{b}{n+1}$ и меньше $\frac{b}{n}$, в чем легко убедиться, проводя сравнение с геометрическим рядом:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1} \;&<\; \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \ldots \\ &<\; \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \ldots \;=\; \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Может показаться, что этот простой прием умножения на $n!$ не достаточен для доказательства иррациональности e^2. Это утверждение более сильное: $\sqrt{2}$ — пример иррационального числа, квадрат которого таковым не является.

От Джона Косгрейва мы узнали, что с помощью двух тонких приемов можно тем не менее сделать еще два шага. Каждый из них достаточен для доказательства иррациональности e^2, а их комбинация позволяет доказать иррациональность e^4. Первый прием можно найти в одностраничной статье Ж. Лиувилля 1840 года, а второй — в двухстраничном «дополнении», которое Лиувилль опубликовал на следующих двух страницах журнала [4].

Почему e^2 иррационально? Что мы можем вывести из равенства $e^2 = \frac{a}{b}$? Согласно Лиувиллю мы должны переписать его в виде

$$b\,e \;=\; a\,e^{-1},$$

подставить в это равенство ряды

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \ldots$$

и

$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \ldots,$$

и затем умножить на $n!$ с достаточно большим четным n. Тогда мы увидим, что число $n!\,be$ приблизительно целое. В самом деле,

$$n!\,b\Big(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n!}\Big)$$

— целое число, а остаток

$$n!\,b\Big(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots\Big)$$

близок к $\frac{b}{n}$: как показано выше, он больше $\frac{b}{n+1}$ и меньше $\frac{b}{n}$.

Число $n!\,ae^{-1}$ тоже приблизительно целое: оно аналогично разлагается на большое целое и остаток

$$(-1)^{n+1}n!a\Big(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} \mp \ldots\Big),$$

который приближенно равен $(-1)^{n+1}\frac{a}{n}$. Точнее, для четных n остаток больше $-\frac{a}{n}$ и меньше

$$-a\Big(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^3} - \ldots\Big) \;=\; -\frac{a}{n+1}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) \;<\; 0.$$

Но отсюда следует, что при большом четном n число $n!\,ae^{-1}$ чуть-чуть меньше целого, а $n!\,be$ чуть-чуть больше целого, и поэтому равенство $n!\,ae^{-1} = n!\,be$ не может выполняться. □

Ободренные успехом, мы теперь для доказательства иррациональности e^4 допустим, что $e^4 = \frac{a}{b}$ рационально, и запишем это в виде

$$b\,e^2 \;=\; a\,e^{-2}.$$

Можно попытаться умножить обе части на $n!$ для какого-нибудь большого n, и собрать нецелые слагаемые, но это не даст ничего полезного: сумма оставшихся членов в левой части окажется приближенно равной $b\,\frac{2^{n+1}}{n}$, в правой части — приближенно равной $(-1)^{n+1}a\,\frac{2^{n+1}}{n}$, и обе будут очень большими при больших n.

Поэтому придется изучить ситуацию внимательнее и внести в стратегию два небольших уточнения. Во-первых, будем выбирать не *произвольные* большие n, а большие степени двойки, т. е. $n = 2^m$; во-вторых, будем умножать не на $n!$, а на $\frac{n!}{2^{n-1}}$. Нам потребуется также маленькая лемма — частный случай теоремы Лежандра (см. с. 17): Для любого $n \geq 1$ число $n!$ содержит простой множитель 2 не более $n-1$ раз, и равенство имеет место тогда и только тогда, когда n есть степень двух: $n = 2^m$.

Доказать эту лемму несложно: $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ сомножителей в $n!$ четные, $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ из них делятся на 4, и т. д. Поэтому если 2^k — наибольшая степень двойки, для которой $2^k \leq n$, то $n!$ содержит простой множитель 2 ровно

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor \;\leq\; \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \ldots + \frac{n}{2^k} \;=\; n\Big(1 - \frac{1}{2^k}\Big) \;\leq\; n-1$$

раз, причем оба неравенства обращаются в равенство только в случаях, когда $n = 2^k$.

Вернемся к равенству $b\,e^2 = a\,e^{-2}$. Приведем его к виду

$$b\,\frac{n!}{2^{n-1}}\,e^2 \;=\; a\,\frac{n!}{2^{n-1}}\,e^{-2} \tag{1}$$

и подставим в него ряды

$$e^2 \;=\; 1 + \frac{2}{1} + \frac{4}{2} + \frac{8}{6} + \;\ldots\; + \frac{2^r}{r!} + \ldots$$

и

$$e^{-2} \;=\; 1 - \frac{2}{1} + \frac{4}{2} - \frac{8}{6} + \;\ldots\; + (-1)^r\frac{2^r}{r!} + \ldots$$

При $r \leq n$ мы получаем целочисленные слагаемые в обеих частях:

$$b\,\frac{n!}{2^{n-1}}\,\frac{2^r}{r!} \quad \text{и} \quad (-1)^r a\,\frac{n!}{2^{n-1}}\,\frac{2^r}{r!}\,,$$

и при $r > 0$ знаменатель $r!$ содержит простой множитель 2 *не более* $r-1$ раз, а $n!$ содержит его *ровно* $n-1$ раз. (Значит, при $r > 0$ слагаемые четные.)

Поскольку n четное (мы считаем, что $n = 2^m$), ряды, соответствующие значениям $r \geq n+1$, имеют вид

$$2b\Big(\frac{2}{n+1} + \frac{4}{(n+1)(n+2)} + \frac{8}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \;\ldots\Big)$$

и

$$2a\Big(-\frac{2}{n+1}+\frac{4}{(n+1)(n+2)}-\frac{8}{(n+1)(n+2)(n+3)}\pm\ \dots\Big).$$

Сравнение с геометрическими рядами показывает, что при больших n эти суммы приближенно равны соответственно $\frac{4b}{n}$ и $-\frac{4a}{n}$. Это значит, что при больших $n = 2^m$ левая часть (1) *чуть-чуть* больше целого числа, а правая часть *чуть-чуть* меньше, и мы приходим к противоречию! □

Таким образом, мы доказали, что e^4 иррационально. Для доказательства иррациональности e^3, e^5 и т. д. нам потребуются более сложная техника (кое-что из анализа) и новая идея, по существу принадлежащая Шарлю Эрмиту; ключом к ней является следующая простая лемма.

Лемма. *Пусть*

$$f(x) \quad = \quad \frac{x^n(1-x)^n}{n!},$$

где $n \geq 1$ — некоторое фиксированное целое число. Тогда

(i) *Функция $f(x)$ — многочлен вида $f(x) = \frac{1}{n!}\sum\limits_{i=n}^{2n} c_i x^i$ с целыми коэффициентами c_i.*

(ii) *При $0 < x < 1$ выполняются неравенства $0 < f(x) < \frac{1}{n!}$.*

(iii) *Для всех $k \geq 0$ производные $f^{(k)}(0)$ и $f^{(k)}(1)$ — целые числа.*

■ **Доказательство.** Утверждения (i) и (ii) леммы очевидны. Для доказательства (iii) заметим, что согласно (i) k-я производная $f^{(k)}$ в точке $x = 0$ равна нулю за исключением значений k из интервала $n \leq k \leq 2n$, для которых $f^{(k)}(0) = \frac{k!}{n!}c_k$ есть целое число. Из равенства $f(x) = f(1-x)$ мы получаем, что $f^{(k)}(x) = (-1)^k f^{(k)}(1-x)$ для всех x, и, следовательно, $f^{(k)}(1) = (-1)^k f^{(k)}(0)$ — тоже целое число. □

Теорема 1. *Число e^r иррационально для каждого $r \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$.*

■ **Доказательство.** Достаточно показать, что число e^s не может быть рациональным для целых положительных s (если $e^{\frac{s}{t}}$ рационально, то рационально также и $\left(e^{\frac{s}{t}}\right)^t = e^s$). Предположим, что $e^s = \frac{a}{b}$ для целых $a, b > 0$, и выберем n таким большим, чтобы выполнялось неравенство $n! > as^{2n+1}$. Положим

Неравенство $n! > e(\frac{n}{e})^n$ позволяет получить явные оценки для этих «достаточно больших» n.

$$F(x) := s^{2n}f(x) - s^{2n-1}f'(x) + s^{2n-2}f''(x) -\ \dots\ + f^{(2n)}(x),$$

где $f(x)$ — функция из леммы. Функцию $F(x)$ можно представить также бесконечной суммой

$$F(x) = s^{2n}f(x) - s^{2n-1}f'(x) + s^{2n-2}f''(x) - \dots,$$

поскольку производные $f^{(k)}(x)$ при $k > 2n$ равны 0. Отсюда следует, что $F(x)$ удовлетворяет тождеству

$$F'(x) \;=\; -s\,F(x) + s^{2n+1}f(x).$$

Поэтому дифференцирование дает

$$\frac{d}{dx}\left[e^{sx}F(x)\right] = se^{sx}F(x) + e^{sx}F'(x) = s^{2n+1}e^{sx}f(x)$$

и, следовательно,

$$N := b\int_0^1 s^{2n+1}e^{sx}f(x)dx = b\left[e^{sx}F(x)\right]_0^1 = aF(1) - bF(0).$$

Значение N является целым, так как согласно утверждению (iii) леммы числа $F(0)$ и $F(1)$ — целые. Далее, утверждение (ii) леммы позволяет оценить N снизу и сверху:

$$0 < N = b\int_0^1 s^{2n+1}e^{sx}f(x)dx < bs^{2n+1}e^{s}\frac{1}{n!} = \frac{as^{2n+1}}{n!} < 1.$$

Значит, N не может быть целым числом. Полученное противоречие доказывает, что e^s иррационально. □

Задачі

1. Доведіть, що $\forall n, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ та $n \neq m^k, m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$: $\sqrt[k]{n}$ – ірраціональне.

2. Доведіть, що $\forall\, k \in \mathbb{N}$: $\log_2(2k+1)$ – ірраціональне.