12. Слабка топологія і слабка збіжність

Ми розглянули поняття сильної топології і сильної збіжності в нормованому просторі E, а також сильної топології і сильної збіжності в спряженому просторі E^*. Ці топології та поняття збіжності спиралися на поняття норми. Розглянемо відповідні поняття слабкої топології і слабкої збіжності в нормованих просторах E і E^*.

Озн. 12.1. ***Слабкою топологією*** *в просторі* E^* *називається топологія, визначена локальною базою нуля, тобто сукупністю множин*

$$U_{f_1,\dots,f_n,\varepsilon} = \left\{ x \in L : \left| f_i\left(x\right) \right| < \varepsilon, i = 1, 2, \dots, n \right\},$$

де $f_1, f_2, \dots, f_n$ *— скінченна сукупність неперервних функціоналів, а* ε *— довільне додатне число.*

Лема 12.1. *Слабка топологія слабкіша за вихідну топологію простору* L*.*

Доведення. Розглянемо скінчену сукупність неперервних функціоналів $f_1, f_2, \dots, f_n$ і довільне додатне число ε.Тоді внаслідок неперервності функціоналів $f_1, f_2, \dots, f_n$ множина $U_{f_1,\dots,f_n,\varepsilon}$ є відкритою в вихідній топології простору L, оскільки прообразом відкритої множини при неперервному відображенні є відкрита множина, і містить нуль, тобто є околом нуля, оскільки ці функціонали є лінійними. Перетин двох таких околів сам містить множину точок, в яких скінченна кількість функціоналів за модулем менше ε, отже, виконується критерій локальної бази. Оскільки нова топологія є лише частиною локальною бази нуля в вихідній топології, вона є слабкішою. ■

Зауваження 12.1. Слабка топологія є найменшою з усіх топологій, в яких є неперервними всі лінійні функціонали, неперервні у природній топології простору.

Зауваження 12.2. У нормованому просторі слабка топологія задовольняє аксіому T_2, але може не задовольняти першу аксіому зліченності, отже, вона не описується за допомогою збіжних послідовностей.

Озн. 12.2. *Послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ називається* ***слабко збіжною****, якщо вона є збіжною в слабкій топології.*

Лема 12.2. *Послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ елементів лінійного топологічного простору L є слабко збіжною до $x_0 \in L$ тоді і лише тоді, коли для будь-якого неперервного лінійного функціонала f на L числова послідовність $f(x_n)$ збігається до $f(x_0)$.*

Доведення. Необхідність. Не обмежуючи загальності, розглянемо випадок, коли $x_0 = 0$. Якщо для будь-якого околу $U_{f_1,\dots,f_k,\varepsilon}$ в слабкій топології існує таке число N, що $x_n \in U_{f_1,\dots,f_k,\varepsilon}$ для всіх $n \ge N$, то ця умова виконується і для околу $U_{f,\varepsilon}$, де $f \in L^*$ — довільний фіксований функціонал, а це означає, що $f(x_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Достатність. Припустимо, що $f(x_n) \to 0$ для будь-якого $f \in L^*$. Тоді ця умова виконується і для всіх функціоналів $f_i \in L^*, i = 1, 2, \dots, k$, що визначають довільний окіл в слабкій топології:

$$U_{f_1,f_2,\dots,f_k,\varepsilon} = \{x \in L : |f_i(x)| < \varepsilon, i = 1, 2, \dots, k\}.$$

Виберемо числа N_i так, щоб $\left|f_i\left(x_n\right)\right| < \varepsilon$ при $n \ge N_i$ і покладемо $N = \max\limits_{i=1,\dots,k} N_i$. Отже, при всіх $n \ge N$ виконується умова $x_n \in U$. Це означає, що послідовність $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ збігається в слабкій топології. ■

Лема 12.3. *Будь-яка сильно збіжна послідовність є слабко збіжною, але не навпаки.*

Доведення. Відповідно до леми 12.1, слабка топологія слабкіша за вихідну топологію лінійного топологічного простору, тому будь-яка послідовність, що збігається в сильній топології, буде збігатися і в слабкій.

Обернене твердження є невірним, тому що, наприклад, в просторі l_2 послідовність ортів $e_n = \left(0,0,\dots,0,1,0,\dots\right)$ слабко збігається до нуля, але не збігається до нуля сильно. ■

Розглянемо поняття слабкої збіжності в нормованому просторі E.

Теорема 12.1. *Якщо послідовність $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ слабко збігається в нормованому просторі E, то існує така константа C, що*

$$\left\|x_n\right\| \le C,$$

тобто будь-яка слабко збіжна послідовність в нормованому просторі є обмеженою.

Доведення. Розглянемо в просторі E^* множини

$$A_{kn} = \left\{ f \in E^* : \left|f\left(x_n\right)\right| \le k \right\},\ k,n = 1,2,\dots .$$

Оскільки при фіксованому x_n функціонали $\varphi_{x_n}\left(f\right) = f\left(x_n\right)$ є неперервними (лема 11.2), множини A_{kn} є замкненими.

Дійсно,

$$f_m \to f,\ f_m \in A_{kn} \Rightarrow \varphi_{x_n}\left(f_m\right) = f_m\left(x_n\right) \le k \Rightarrow f\left(x_n\right) \le k .$$

Отже, множина

$$A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{kn}$$

є замкненою. Оскільки послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається слабко, послідовність $\varphi_{x_n}(f)$ є обмеженою для кожного $f \in E^*$. Дійсно,

$$x_n \xrightarrow{w} x \Rightarrow \varphi_{x_n}(f) = f(x_n) \to f(x) \Rightarrow \exists k > 0 : |f(x_n)| \le k .$$

Отже, будь-який функціонал $f \in E^*$ належить деякій множині A_k, тобто

$$E^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k .$$

Оскільки простір E^* є повним (теорема 11.3), то за теоремою Бера хоча б одна з множин A_k, наприклад, A_{k_0} повинна буди щільною в деякій кулі $S(f_0, \varepsilon)$. Оскільки множина A_{k_0} є замкненою, це означає, що

$$S(f_0, \varepsilon) \subset \overline{A}_{k_0} = A_{k_0} .$$

Звідси випливає, що послідовність $\left\{\varphi_{x_n}(f)\right\}_{n=1}^{\infty}$ є обмеженою на кулі $S(f_0, \varepsilon)$, а значить, на будь-якій кулі в просторі E^*, оскільки E^* є лінійним топологічним простором. Зокрема, це стосується одиничної кулі. Таким чином, послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ є обмеженою як послідовність елементів з E^{**}. Оскільки природне відображення $\pi : E \to E^{**}$ є ізометричним, це означає обмеженість послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в просторі E. ■

Теорема 12.2. *Послідовність* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *елементів* нормованого *простору* E *слабко збігається до* $x \in E$, *якщо*

1) *значення* $\|x_n\|$ *є обмеженими в сукупності деякою константою* M *;*

2) $f(x_n) \to f(x)$ *для будь-яких функціоналів* f, *що належать множині, лінійні комбінації елементів якого скрізь щільними в* E^*.

Доведення. Із умови 2) і властивостей операцій над лінійними функціоналами випливає, що якщо φ — лінійна комбінація функціоналів f, то

$$\varphi(x_n) \to \varphi(x).$$

Нехай φ — довільний елемент з E^* і $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — сильно збіжна до φ послідовність лінійних комбінацій із функціоналів f, тобто $\|\varphi_k - \varphi\| \to 0$ (вона завжди існує внаслідок щільності). Покажемо, що $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$.

Нехай M задовольняє умову

$$\|x_n\| \le M, \quad n = 1, 2, \ldots \quad \text{і} \quad \|x\| \le M.$$

Оскільки $\varphi_k \to \varphi$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists K \in \mathbb{N} : \forall k \ge K \ \ \|\varphi - \varphi_k\| < \varepsilon.$$

З цього випливає, що

$$\begin{aligned}
|\varphi(x_n) - \varphi(x)| &\le |\varphi(x_n) - \varphi_k(x_n)| + |\varphi_k(x) - \varphi(x)| + |\varphi_k(x_n) - \varphi_k(x)| \le \\
&\le \|\varphi - \varphi_k\| M + \|\varphi - \varphi_k\| M + |\varphi_k(x_n) - \varphi_k(x)| \le \\
&\le \varepsilon M + \varepsilon M + |\varphi_k(x_n) - \varphi_k(x)|.
\end{aligned}$$

За умовою теореми, $\varphi_k(x_n) \to \varphi_k(x)$ при $n \to \infty$. Отже,

$$\varphi(x_n)-\varphi(x)\to 0 \text{ при } n\to\infty \quad \forall\varphi\in E^*. \blacksquare$$

Розглянемо поняття слабкої топології в спряженому просторі E^*. Спочатку згадаємо, що із означення 11.3 сильної топології в спряженому просторі випливає, що цю топологію можна задати за допомогою локальної бази нуля. Наведемо її еквівалентне формулювання.

Озн. 12.4. ***Сильною топологією*** *в спряженому просторі E^* називається топологія, визначена локальною базою нуля, тобто сукупністю множин*

$$B_{\varepsilon,A}=\left\{f\in E^*:\left|f(x)\right|<\varepsilon,\, x\in A\subset E\right\},$$

де A — довільна обмежена множина в E, а ε — довільне додатне число.

Зауваження 12.3. Оскільки будь-яка скінченна множина є обмеженою, то слабка топологія в E^* є слабкішою, ніж сильна топологія цього простору.

Озн. 12.5. *Послідовність $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ називається* ***слабко збіжною****, якщо вона є збіжною в слабкій топології E^*, інакше кажучи, $f_n(x)\to f(x)$ для кожного $x\in E$.*

Зауваження 12.4. В спряженому просторі сильно збіжна послідовність є одночасно слабко збіжною, але не навпаки.

В спряженому просторі мають місце теореми, аналогічні теоремам 12.1 і 12.2.

Теорема 12.3. *Якщо послідовність лінійних функціоналів $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ слабко збігається на банаховому просторі E, то існує така константа C, що*

$$\|f_n\|\le C,$$

тобто будь-яка слабко збіжна послідовність простору, спряженого до банахова простору, є обмеженою.

Теорема 12.4. *Послідовність лінійних функціоналів* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *елементів спряженого простору* E^* *слабко збігається до* $f \in E$, *якщо*

1) *послідовність* $\|f_n\|$ *є обмеженою, тобто*

$$\exists C \in R^1 : \|f_n\| \le C,\ n = 1, 2, \ldots ;$$

2) $\varphi_x(f_n) \to \varphi_x(f)$ *для будь-яких елементів* x, *що належать множині, лінійні комбінації елементів якого скрізь щільними в* E.

Простір E^* лінійних неперервних функціоналів, заданих на просторі E, можна тлумачити і як простір, спряжений до простору E, і як основний простір, спряженим до якого є простір E^{**}. Відповідно, слабку топологію в просторі E^* можна ввести або за означенням 12.4 (через скінченні множини елементів простору E), або як в основному просторі відповідно до означення 12.1 (через функціонали із простору E^{**}). Для рефлексивних просторів це одне й теж, а для нерефлексивних просторів ми таким чином отримуємо різні слабкі топології.

Озн. 12.6. *Топологія в спряженому просторі* E^*, *що вводиться за допомогою простору* E^{**} *(як в означенні 12.1), називається* ***слабкою*** *і позначається як* $\sigma\left(E^*, E^{**}\right)$.

Озн. 12.7. *Топологія в спряженому просторі* E^*, *що вводиться за допомогою простору* E *(як в означенні 12.4), називається* ****-слабкою*** *і позначається як* $\sigma\left(E^*, E\right)$

Зауваження 12.5. Очевидно, що *-слабка топологія в E^* є більш слабкою, ніж слабка топологія простору E, тобто в слабкій топології не менше відкритих множин, ніж в *-слабкій топології.

Література

1. Садовничий В.А. Теория операторов. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. — с. 114–117.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. (5-е изд.) — М.: Наука, 1981. — с. 192–202.