1. Основные уравнения математической физики

В математической физике возникают самые разнообразные дифференциальные уравнения, описывающие различные физические процессы. Целью нашего курса является изучение трёх основных уравнений:
уравнения колебаний, уравнения теплопроводности и уравнения, которое мы пока будем называть стационарным уравнением.

Всюду ниже предполагаются выполненными условия:

$$c(x) \geqslant c_0 = const > 0, \quad \rho(x) \geqslant \rho_0 = const > 0, \quad k(x) \geqslant k_0 = const > 0. \tag{1.1}$$

1.1. Уравнение колебаний

Опр. 1.1. Уравнением колебаний (волновым уравнением) называется уравнение вида:

$$\rho(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}\,(k(x)\operatorname{grad} u) + q(x,\,t)u = F(x,\,t), \qquad x = (x_1,\,\ldots,\,x_n), \tag{1.2}$$

в котором $\rho,\ p,\ q,\ F$ – заданные функции, а $u(x,\ t)$ – искомая функция и для функций $\rho(x)$ и $k(x)$ выполнены условия (1.1).
В случае, когда пространство x одномерно, уравнение принимает вид:

$$\rho(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + q(x,\,t)u = F(x,\,t), \qquad x = (x_1,\,\ldots,\,x_n), \tag{1.3}$$

Если $F(x,\,t) \equiv 0$, то уравнение (1.2) называется **однородным**, в противном случае – **неоднородным**.

Выражение $\operatorname{div}\,(k(x)\operatorname{grad} u)$ в n-мерном пространстве переменных x понимается следующим образом:

$$\operatorname{div}\,(k(x)\operatorname{grad} u) = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_m}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x_m}\right).$$

В частном случае, когда $k = k_0 = const$ и её можно вынести за знак производных и суммы, получаем:

$$\operatorname{div}\,(k_0 \operatorname{grad} u) = k_0 \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} = \Delta u.$$

Уравнение (1.2) описывает, в частности, малые поперечные колебания струны (а при двумерном прсотранстве x – колебания мембраны), малые продольные колебания упругого стержня, электрические колебания в проводах. На примере уравнения поперечных колебаний струны рассмотрим смысл всех входящих в него функций.

- Искомая функция $u(x,\,t)$ представляет собой величину отклонения струны в точке x в момент времени t от её равновесного положения.
- Функция $\rho(x)$ имеет смысл линейной плотности струны (то есть $\rho(x)dx$ равняется массе кусочка струны длины dx в точке x).
- Функция $k(x)$ задаёт натяжение струны (а в случае продольных колебаний стержня постоянного сечения – модуль Юнга в точке x).

© Д.С. Ткаченко

- Функция $q(x,\, t)$ определяет сопротивление среды и задаёт уровень затухания колебаний.
- Функция $F(x,\, t)$ называется «правой частью» и представляет собой внешнюю силу, действующую на струну.

В простейшем случае, когда

$$\rho(x) = \rho_0 = const > 0, \quad \frac{k(x)}{\rho_0} = a^2 = const > 0, \quad q \equiv 0,$$

уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f(x,\, t), \qquad x = (x_1,\, \ldots,\, x_n), \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,\, t), \qquad n = 1, \tag{1.5}$$

где функция правой части $f(x,\, t) = \frac{F(x,t)}{\rho_0}$.

Замечание 1.1. Уравнения (1.4) – (1.5) также часто называют **волновым уравнением**.

1.2. Уравнение теплопроводности

Опр. 1.2. Уравнением теплопроводности называется уравнение вида:

$$c(x)\rho(x)\,\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}\,(k(x)\operatorname{grad} u) = F(x,\, t), \qquad x = (x_1,\, \ldots,\, x_n), \tag{1.6}$$

в котором $\rho,\ k,\ F$ – заданные функции, а $u(x,\ t)$ – искомая функция и для функций $c(x),\ \rho(x)$ и $k(x)$ выполнены условия (1.1).
В случае, когда пространство x одномерно, уравнение принимает вид:

$$c(x)\rho(x)\,\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = F(x,\, t), \qquad x = (x_1,\, \ldots,\, x_n), \tag{1.7}$$

Если $F(x,\, t) \equiv 0$, то уравнение (1.6) называется **однородным**, в противном случае – **неоднородным**.

Уравнение (1.6) описывает, в частности, распространение тепла в тонком стрежне, тонкой мембране или объёмном теле, диффузию вещества. На примере распространение тепла в тонком стрежне рассмотрим смысл всех входящих в уравнение функций.

- Искомая функция $u(x,\, t)$ представляет собой температуру стержня в точке x в момент времени t.
- Функция $\rho(x)$ имеет смысл линейной плотности стержня.
- Функция $c(x)$ есть удельная теплоёмкость.
- $k(x)$ – коэффициент теплопроводности в точке x.
- Функция $F(x,\, t)$ называется «правой частью» и представляет собой плотность источников тепла.

В простейшем случае, когда

$$c(x) = c_0 = const > 0, \quad \rho(x) = \rho_0 = const > 0, \quad \frac{k(x)}{c_0\rho_0} = a^2 = const > 0,$$

уравнение принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\Delta u = f(x,\, t), \qquad x = (x_1,\, \ldots,\, x_n), \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,\, t), \qquad n = 1, \tag{1.9}$$

где функция правой части $f(x,\, t) = \frac{F(x,t)}{c_0\rho_0}$.

Замечание 1.2. Уравнения (1.8) – (1.9) также часто называют **уравнением теплопроводности**.

1.3. Стационарные уравнения

Если уравнения колебаний или теплопроводности описывают процесс, установившийся во времени, и никакие входящие в уравнения функции уже от времени не зависят, то производные по времени $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ обращаются в нуль, и уравнение принимает вид:

$$-\operatorname{div}\,(k(x)\operatorname{grad} u) + q(x)u = F(x), \qquad x = (x_1,\, \ldots,\, x_n). \tag{1.10}$$

Уравнение (1.10) описывает, в частности, стационарное распространение тепла в тонком стрежне, тонкой мембране или объёмном теле, установившуюся концентрацию вещества, равновесное положение мембраны по действием внешней постоянной силы и т.п. Смысл всех входящих в уравнение функций наследуется из нестационарного уравнения, из которого оно получилось. В простейшем случае, когда

$$k(x) = a^2 = const > 0, \quad q(x) \equiv 0,$$

уравнение принимает вид уравнения Лапласа или Пуассона.

Опр. 1.3. **Уравнением Лапласа** называется уравнение вида:

$$\Delta u = 0, \qquad x = (x_1,\, \ldots,\, x_n), \tag{1.11}$$

в котором $u(x,\, t)$ – искомая функция.
Уравнением Пуассона называется уравнение вида:

$$\Delta u = f(x), \qquad x = (x_1,\, \ldots,\, x_n), \tag{1.12}$$

в котором $f = -\frac{F(x)}{a^2}$ – заданная функция, а $u(x,\, t)$ – искомая функция.

2. Основные задачи для уравнений математической физики

2.1. Задача Коши

Если рассмотреть бесконечную струну, то естественно предположить, что её колебания полностью описываются тремя равенствами: уравнением колебаний, начальным положением и

скоростью в каждой точке $x \in (-\infty,\ +\infty)$ в начальный момент времени $t = 0$. Отсюда возникает понятие:

Опр. 2.1. Пусть

$$\Omega = \mathbb{R}^n = \{x = (x_1,\ \ldots,\ x_n) \mid\ x_i \in (-\infty,\ +\infty)\}\,,$$

$$Q = \Omega \times (0,\ +\infty) = \{(x,\ t) \mid\ x \in \Omega,\ \ t > 0\}\,,$$

$$Q^* = \Omega \times [0,\ +\infty) = \{(x,\ t) \mid\ x \in \Omega,\ \ t \geqslant 0\}\,.$$

задачей Коши для уравнения колебаний называется задача:
Найти функцию $u(x,\ t) \in C^2(Q) \bigcap C(Q^*)$ *из условий:*

$$\begin{cases} \rho(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}\,(k(x)\operatorname{grad} u) + q(x,\ t)u = F(x,\ t), & (x,\ t) \in Q; \\ u(x,\ 0) = \varphi(x), & x \in \Omega; \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0) = \psi(x), & x \in \Omega;\,, \end{cases} \tag{2.1}$$

где $\varphi(x),\ \ \psi(x)$ – заданные функции, называемые **начальными данными** или **данными Коши**, а для заданных функций $\rho(x),\ k(x),\ q(x,\ t)$ и $F(x,\ t)$ выполнены условия (1.1) и:

$$\rho,\ \varphi,\ \psi \in C(\Omega), \quad k \in C^1(\Omega), \qquad q,\ F \in C(Q^*).$$

Аналогично определяется задача Коши для уравнения теплопроводности:

Опр. 2.2. **задачей Коши для уравнения теплопроводности** называется задача:
Найти функцию $u(x,\ t)u(x,\ t) \in C^{2,1}(Q) \bigcap C(Q^*)$ *из условий:*

$$\begin{cases} c(x)\rho(x)\,\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}\,(k(x)\operatorname{grad} u) = F(x,\ t), & (x,\ t) \in Q; \\ u(x,\ 0) = \varphi(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{2.2}$$

где $\varphi(x)$ – заданная функция, называемая **начальными данными** или **данными Коши**, а для заданных функций $c(x),\ \rho(x),\ k(x)$ и $F(x,\ t)$ выполнены условия (1.1) и:

$$c,\ \rho,\ \varphi \in C(\Omega), \quad k \in C^1(\Omega), \qquad F \in C(Q^*).$$

Для стационарного уравнения определять задачу Коши бессмысленно, поскольку раз решение от времени не зависит, то оно должно совпадать со своим начальным условием $\varphi(x)$.

2.2. Виды краевых условий

Перейдём к рассмотрению уравнений в ограниченных областях. Пусть

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n \ -\ \text{ограниченная область с гладкой границей} \quad \partial\Omega \in C^2.$$

Тогда поведение решения уравнения будет, очевидно зависеть от того, что с ним происходит на границе. Например, края колеблющейся мембраны можно закрепить, отпустить или закрепить упруго (на пружинках).

Опр. 2.3. **Краевым (граничным) условием I-го рода** называется условие:

$$u(x,\,t)\Big|_{\partial\Omega} = \mu(x,\,t), \qquad x \in \partial\Omega, \quad t \geqslant 0 \tag{2.3}$$

с заданной функцией $\mu(x,\,t)$.
Краевым (граничным) условием II-го рода называется условие:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big|_{\partial\Omega} = \nu(x,\,t), \qquad x \in \partial\Omega, \quad t \geqslant 0, \tag{2.4}$$

где $\vec{n}$ – внешняя единичная нормаль к поверхности $\partial\Omega$, а функция $\nu(x,\,t)$ задана.
Краевым (граничным) условием III-го рода называется условие:

$$\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} + \beta u\right)\Big|_{\partial\Omega} = \chi(x,\,t), \qquad x \in \partial\Omega, \quad t \geqslant 0 \tag{2.5}$$

с заданной функцией $\chi(x,\,t)$.
Краевое уловие называется **однородным**, если функция в его правой части (μ, ν или χ) равна всюду нулю, и **неоднородным** в противном случае.

Замечание 2.1. Краевое условие III-го рода является наиболее общим, так как при $\alpha = 0$ оно превращается в условие I-го рода, а при $\beta = 0$ – в условие II-го рода.
Заметим также, что α и β могут быть функциями.

Опр. 2.4. Однородное граничное условие I-го рода называют **условием Дирихле**:

$$u(x,\,t)\Big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad x \in \partial\Omega, \quad t \geqslant 0. \tag{2.6}$$

Однородное граничное условие II-го рода называют **условием Неймана**:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad x \in \partial\Omega, \quad t \geqslant 0. \tag{2.7}$$

Замечание 2.2. Неоднородное краевое условие I-го рода также иногда называют условием Дирихле, а неоднородное краевое условие II-го рода – условием Неймана.
Условие I-го рода в случае уравнения колебаний имеет смысл **жёстко закреплённого края**, условие Неймана – **свободного края**, а условие III-го рода – **края, закреплённого упруго**.
В случае уравнения теплопроводности условие I-го рода означает **край, на котором поддерживается заданная температура**, условие Неймана – **теплоизолированный край**, а условие III-го рода – **край, на котором происходит конвективный теплообмен с окружающей средой**.

2.3. Задача Дирихле для стационарного уравнения

Если рассмотреть ограниченную струну, мембрану или ёмкость, где происходила диффузия или теплообмен, то естественно предположить, что решение уравнения будет зависеть от того, что происходит на границе данного тела. К примеру, форма мембраны не может не зависеть от её же профиля на границе. Поэтому вводят определение:

Опр. 2.5. Пусть

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n \ - \ \text{ограниченная область с гладкой границей} \quad \partial\Omega \in C^3;$$

$$\overline{\Omega} = \Omega \bigcup \partial\Omega \ - \ \text{её замыкание.}$$

Задачей Дирихле для стационарного уравнения (граничной задачей I-го рода) называется задача:
Найти функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \bigcap C(\overline{\Omega})$ *из условий:*

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\ (k(x)\mathrm{grad}\, u) + q(x)u = F(x), & x \in \Omega; \\ u(x) = \mu(x), & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.8}$$

где $\mu(x)$ – заданная непрерывная функция, называемая **данными Дирихле**, а для заданных функций $k(x)$, $q(x)$ и $F(x)$ выполнены условия (1.1) и:

$$q(x) \geqslant 0, \qquad k \in C^1(\Omega), \qquad q,\ F \in C(\Omega).$$

В случае одной пространственной переменной задача принимает вид:

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + q(x)u = F(x), & x \in (0,\ l); \\ u(0) = u_0, \\ u(l) = u_1. \end{cases} \tag{2.9}$$

Самый простой случай, когда

$$k(x) \equiv a^2 = const > 0, \qquad q(x) \equiv 0, \qquad n = 1,$$

получим краевую задачу I-го рода для уравнения Пуассона:

$$\begin{cases} \Delta u = f(x) = -F(x), & x \in \Omega; \\ u(x) = \mu(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.10}$$

а если и $F \equiv 0$, – задачу Дирихле для уравнения Лапласа.

2.4. Задача Неймана для стационарного уравнения

Кроме условий Дирихле, на границе могут быть условия других видов. Например,

Опр. 2.6. Пусть

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n \ - \ \text{ограниченная область с гладкой границей} \quad \partial\Omega \in C^3;$$

$$\overline{\Omega} = \Omega \bigcup \partial\Omega \ - \ \text{её замыкание.}$$

Задачей Неймана для стационарного уравнения (граничной задачей II-го рода) называется задача:
Найти функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \bigcap C(\overline{\Omega})$ *из условий:*

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\ (k(x)\mathrm{grad}\, u) + q(x)u = F(x), & x \in \Omega; \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) = \nu(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.11}$$

где $\vec{n}$ – вектор внешней нормали к поверхности Ω, $\nu(x)$ – заданная непрерывная функция, называемая **данными Неймана**, а для заданных функций $k(x)$, $q(x)$ и $F(x)$ выполнены условия (1.1) и:

$$q(x) \geqslant 0, \qquad k \in C^1(\Omega), \qquad q,\ F \in C(\Omega).$$

В случае одной пространственной переменной задача принимает вид:

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + q(x)u = F(x), & x \in (0,\ l); \\ u'(0) = u_0, \\ u'(l) = u_1. \end{cases} \tag{2.12}$$

Самый простой случай, когда

$$k(x) \equiv a^2 = const > 0, \qquad q(x) \equiv 0, \qquad n = 1,$$

получим краевую задачу II-го рода для уравнения Пуассона:

$$\begin{cases} \Delta u = f(x) = -F(x), & x \in \Omega; \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) = \nu(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.13}$$

а если и $F \equiv 0$, – задачу Неймана для уравнения Лапласа.

Замечание 2.3. Условие II-го рода в одномерном случае принимает вид

$$u'(0) = u_0, \qquad u'(l) = u_1$$

в силу того факта, что под нормалью к границе в случае одномерной ограниченной области (отрезка) понимается вектор, направленный вправо, на правом конце отрезка, и вектор, направленный влево, на левом его конце, откуда:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(0) = -u'(0), \qquad \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(l) = u'(l).$$

2.5. Третья краевая задача

Кроме условий Дирихле, на границе могут быть условия других видов. Например,

Опр. 2.7. Пусть

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n \ - \ \text{ограниченная область с гладкой границей} \quad \partial\Omega \in C^3;$$

$$\overline{\Omega} = \Omega \bigcup \partial\Omega \ - \ \text{её замыкание.}$$

Краевой задачей III-го рода) называется задача:
Найти функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \bigcap C(\overline{\Omega})$ *из условий:*

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\ (k(x)\mathrm{grad}\, u) + q(x)u = F(x), & x \in \Omega; \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) + \beta u(x) = \chi(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.14}$$

где $\vec{n}$ – вектор внешней нормали к поверхности Ω, $\chi(x)$ – заданная непрерывная функция, называемая **функцией краевого условия**, а для заданных функций $k(x)$, $q(x)$ и $F(x)$ выполнены условия (1.1) и:

$$q(x) \geqslant 0, \qquad k \in C^1(\Omega), \qquad q,\ F \in C(\Omega).$$

В случае одной пространственной переменной задача принимает вид:

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + q(x)u = F(x), & x \in (0,\ l); \\ -\alpha u'(0) + \beta u(0) = u_0, \\ \alpha u'(l) + \beta u(l) = u_1. \end{cases} \tag{2.15}$$

(Минус перед α во второй строчке возник в силу рассуждений, приведённых в замечании 2.3.)

Самый простой случай, когда

$$k(x) \equiv a^2 = const > 0, \qquad q(x) \equiv 0, \qquad n = 1,$$

получим краевую задачу III-го рода для уравнения Пуассона:

$$\begin{cases} \Delta u = f(x) = -F(x), & x \in \Omega; \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) + \beta u(x) = \chi(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.16}$$

а если и $F \equiv 0$, – задачу III-го рода для уравнения Лапласа.

2.6. Начально-краевые задачи

Наконец, если нестационарный процесс колебаний или телообмена происходит в ограниченной области, для корректной постановки задач нам потребуются как данные Коши, так и краевые условия.

Опр. 2.8. Пусть

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n \ - \ \text{ограниченная область с гладкой границей} \quad \partial\Omega \in C^3;$$

$$\overline{\Omega} = \Omega \bigcup \partial\Omega \ - \ \text{её замыкание};$$

$$Q = \Omega \times (0,\ +\infty) = \{(x,\ t) \mid \ x \in \Omega,\ \ t > 0\}\,;$$

$$Q^* = \Omega \times [0,\ +\infty) = \{(x,\ t) \mid \ x \in \Omega,\ \ t \geqslant 0\}\,;$$

$$\overline{Q} = \overline{\Omega} \times [0,\ +\infty) = \left\{(x,\ t) \mid \ x \in \overline{\Omega},\ \ t \geqslant 0\right\}.$$

Начально-краевой задачей для уравнения колебаний называется задача:
Найти функцию $u(x) \in C^2(Q) \bigcap C(Q^*)$ *из условий:*

$$\begin{cases} \rho(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}\,\left(k(x)\operatorname{grad} u\right) + q(x,\ t)u = F(x,\ t), & (x,\ t) \in Q; \\ u(x,\ 0) = \varphi(x), & x \in \Omega; \\ u_t(x,\ 0) = \psi(x), & x \in (0,\ l); \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0) = \psi(x), & x \in \Omega, \\ \alpha\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) + \beta u(x) = \chi(x,\ t), & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.17}$$

где $\chi(x,\ t)$ – заданная непрерывная функция, называемая **функцией краевого условия**, $\varphi(x),\ \psi(x) \in C(\overline{\Omega})$ – **данные Коши**, а для заданных функций $\rho(x),\ k(x),\ q(x)$ и $F(x,\ t)$ выполнены условия (1.1) и:

$$\rho \in C(\overline{\Omega}), \quad k \in C^1(\overline{\Omega}), \qquad q,\ F \in C(\overline{Q}).$$

В случае одной пространственной переменной задача принимает вид:

$$\begin{cases} \rho(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \ \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + q(x,\ t)u = F(x,\ t), & x \in (0,\ l); \\ u(x,\ 0) = \varphi(x), & x \in (0,\ l); \\ u_t(x,\ 0) = \psi(x), & x \in (0,\ l); \\ -\alpha\frac{\partial u}{\partial \vec{x}}(0) + \beta u(0) = \mu(t), & \\ \alpha\frac{\partial u}{\partial \vec{x}}(l) + \beta u(l) = \nu(t). & \end{cases} \tag{2.18}$$

В случае, когда $\alpha = 0$ получаем I-ю начально-краевую задачу, в случае $\beta = 0$ – II-ю, а при $\alpha \cdot \beta \neq 0$ – III-ю.

Самый простой случай, когда краевые условия I-го рода,

$$\rho(x) = \rho_0 = const > 0, \quad \frac{k(x)}{\rho_0} \equiv a^2 = const > 0, \qquad q(x) \equiv 0,$$

получим I-ую начально-краевую задачу для волнового уравнения:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2\Delta u = f(x,\ t) = \frac{F(x,t)}{\rho_0}, & x \in \Omega; \\ u(x,\ 0) = \varphi(x), & x \in \Omega; \\ u_t(x,\ 0) = \psi(x), & x \in \Omega; \\ u(x,\ t) = \mu(t), & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.19}$$

Опр. 2.9. Пусть Ω, $\overline{\Omega}$, Q и Q^* такие же, как в определении 2.8.
Начально-краевой задачей для уравнения теплопроводности называется задача:
Найти функцию $u(x) \in C^{2,1}(Q) \bigcap C(Q^*)$ *из условий:*

$$\begin{cases} c(x)\rho(x)\,\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}\,(k(x)\operatorname{grad} u) = F(x,\,t), & (x,\,t) \in Q; \\ u(x,\,0) = \varphi(x), & x \in \Omega; \\ \alpha\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) + \beta u(x) = \chi(x,\,t), & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.20}$$

где $\chi(x,\,t)$ – заданная непрерывная функция, называемая **функцией краевого условия**, $\varphi(x) \in C(\overline{\Omega})$ – **данные Коши**, а для заданных функций $c(x)$, $\rho(x)$, $k(x)$ и $F(x,\,t)$ выполнены условия (1.1) и:

$$c(x) \geqslant c_0 > 0, \quad \rho(x) \geqslant \rho_0 > 0, \quad k(x) \geqslant k_0 > 0, \qquad \rho \in C(\overline{\Omega}), \quad k \in C^1(\overline{\Omega}), \qquad F \in C(\overline{Q}).$$

В случае одной пространственной переменной задача принимает вид:

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + q(x)u = F(x), & x \in (0,\,l); \\ u(x,\,0) = \varphi(x), & x \in (0,\,l); \\ -\alpha\frac{\partial u}{\partial \vec{x}}(0) + \beta u(0) = \mu(t), & t > 0; \\ \alpha\frac{\partial u}{\partial \vec{x}}(l) + \beta u(l) = \nu(t) & t > 0. \end{cases} \tag{2.21}$$

В случае, когда $\alpha = 0$ получаем I-ю начально-краевую задачу, в случае $\beta = 0$ – II-ю, а при $\alpha \cdot \beta \neq 0$ – III-ю.

Самый простой случай, когда краевые условия I-го рода,

$$c(x) = c_0 = const > 0, \quad \rho(x) = \rho_0 = const > 0, \quad \frac{k(x)}{c_0\rho_0} \equiv a^2 = const > 0,$$

получим I-ую начально-краевую задачу вида:

$$\begin{cases} u_t - a^2\Delta u = f(x,\,t) = \frac{F(x,t)}{c_0\rho_0}, & x \in \Omega; \\ u(x,\,0) = \varphi(x), & x \in \Omega; \\ u(x,\,t) = \mu(t), & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.22}$$

Пример 2.1. *Поставить начально-краевую задачу для уравнения колебаний струны на отрезке* $x \in [0,\,l]$ *с начальным отклонением* $\varphi(x)$, *нулевой начальной скоростью струны и однородными краевыми условиями*

- *I-го рода на левом конце и*
- *II-го рода на правом.*

Уравнение колебаний на отрезке $[0,\,l]$ принимает вид:

$$\rho(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + q(x,\,t)u = F(x,\,t), \qquad x \in (0,\,l).$$

Начальное отклонение $\varphi(x)$ означает, что:

$$u(x,\,0) = \varphi(x), \qquad x \in (0,\,l).$$

Начальная скорость равна нулю, то есть:

$$u_t(x,\,0) = 0, \qquad x \in (0,\,l).$$

Однородное краевое условие I-го рода на левом конце (при $x = 0$) имеет вид:

$$u(0,\, t) = 0, \qquad t > 0,$$

а однородное краевое условие II-го рода на правом конце (при $x = l$), соответственно, вид:

$$u_x(0,\, t) = 0, \qquad t > 0.$$

Собрав все эти условия воедино, получаем задачу:
Найти функцию $u(x) \in C^2(Q) \bigcap C(Q^*)$, где Q и Q^* заданы в определении 2.8, из условий:

$$\begin{cases} \rho(x)\, u_{tt} - \ (k(x)u_x)_x + q(x,\, t)u = F(x,\, t), & x \in (0,\, l); \\ u(x,\, 0) = \varphi(x), & x \in (0,\, l); \\ u_t(x,\, 0) = 0, & x \in (0,\, l); \\ u(0,\, t) = 0, & t > 0; \\ u_x(l,\, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

где $\varphi(x),\ \psi(x) \in C[0,\ l]$, а для заданных функций $\rho(x),\ k(x),\ q(x)$ и $F(x,\ t)$ выполнены обычные условия:

$$\rho(x) \geqslant \rho_0 > 0, \quad k(x) \geqslant k_0 > 0, \qquad \rho \in C[0,\, l], \quad k \in C^1[0,\, l], \qquad q,\ F \in C\left([0,\, l] \times [0,\, +\infty)\right).$$

Пример 2.2. *Поставить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности на отрезке $x \in [0,\ l]$ с начальным распределением температуры $\varphi(x)$ и однородными краевыми условиями*

- *III-го рода на левом конце и*
- *I-го рода на правом.*

Уравнение теплопроводности на отрезке $[0,\ l]$ принимает вид:

$$c(x)\rho(x)\, u_t - (k(x)u_x)_x = F(x,\, t), \qquad x \in (0,\, l).$$

Начальное распределением температуры $\varphi(x)$ означает, что:

$$u(x,\, 0) = \varphi(x), \qquad x \in (0,\, l).$$

Однородное краевое условие III-го рода на левом конце (при $x = 0$) имеет вид:

$$-\alpha u_x(0,\, t) + \beta u(0,\, t) = 0, \qquad t > 0,$$

а однородное краевое условие I-го рода на правом конце (при $x = l$), соответственно, вид:

$$u(0,\, t) = 0, \qquad t > 0.$$

Собрав все эти условия воедино, получаем задачу:
Найти функцию $u(x) \in C^{2,1}(Q) \bigcap C(Q^*)$, где Q и Q^* заданы в определении 2.8, из условий:

$$\begin{cases} c(x)\rho(x)\, u_{tt} - \ (k(x)u_x)_x = F(x,\, t), & x \in (0,\, l); \\ u(x,\, 0) = \varphi(x), & x \in (0,\, l); \\ -\alpha u_x(0,\, t) + \beta u(0,\, t) = 0 = 0, & t > 0; \\ u(l,\, t) = 0, & t > 0, \end{cases}$$

где $\alpha,\ \beta$ – заданные числа, $\varphi(x) \in C[0,\ l]$, а для заданных функций $c(x),\ \rho(x),\ k(x)$ и $F(x,\ t)$ выполнены обычные условия:

$$c(x) \geqslant c_0 > 0, \quad \rho(x) \geqslant \rho_0 > 0, \quad k(x) \geqslant k_0 > 0, \qquad \rho \in C[0,\, l], \quad k \in C^1[0,\, l],$$
$$F \in C\left([0,\, l] \times [0,\, +\infty)\right).$$

Задание на самостоятельную работу:

1) подставить размерность всех физических величин, входящих в одномерные уравнения колебаний (1.3), теплопроводности (1.7) и двумерное уравнение (1.10) стационарного распределения температуры и убедиться, что эти уравнения не нарушают равенства размерностей;

2) Поставить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности на отрезке $x \in [0,\ l]$ с нулевым начальным распределением температуры и однородными краевыми условиями III-го рода на левом конце и II-го рода на правом;

3) Поставить начально-краевую задачу для уравнения колебаний на отрезке $x \in [0,\ l]$ с нулевым начальным отклонением, начальной скоростью $\psi(x)$ и однородными краевыми условиями II-го рода на левом конце и I-го рода на правом;

4) Поставить краевую задачу для уравнения Пуассона в прямоугольнике

$$x \in [0,\ l], \quad y \in [0,\ s]$$

однородными краевыми условиями II-го рода на левой и нижней сторонах и III-го рода на правой и верхней;

5) Поставить краевую задачу Неймана для уравнения Пуассона в прямоугольнике

$$x \in [0,\ l], \quad y \in [0,\ s];$$

6) Поставить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности на отрезке $x \in [0,\ l]$ с нулевым начальным распределением температуры и однородными краевыми условиями Дирихле на обоих концах;

7) Поставить начально-краевую задачу для уравнения колебаний на отрезке $x \in [0,\ l]$ с начальным отклонением $\sin\frac{\pi x}{l}$, начальной скоростью 1 и однородными краевыми условиями Неймана на обоих концах;

8) Поставить краевую задачу для уравнения Пуассона в прямоугольнике

$$x \in [0,\ l], \quad y \in [0,\ s]$$

однородными краевыми условиями Дирихле на левой и правой сторонах и Неймана на нижней и верхней;

9) Поставить краевую задачу Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике

$$x \in [0,\ l], \quad y \in [0,\ s].$$

© Д.С. Ткаченко

1. Классификация и приведение к каноническому виду уравнений в частных производных 2-го порядка

1.1. Классификация линейных УЧП 2-го порядка с 2-мя независимыми переменными

Рассмотрим общее УЧП 2-го порядка с 2-мя независимыми переменными:

$$F\left(x,\, y;\, u,\, u_x,\, u_y,\, u_{xx},\, u_{xy},\, u_{yy}\right) = 0.$$

Его частным случаем является **квазилинейное уравнение**:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + f\left(x,\, y;\, u,\, u_x,\, u_y\right) = 0.$$

Мы же будем изучать, в основном, ещё более частный случай – **линейное уравнение**:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f(x,\, y), \tag{1.1}$$

где коэффициенты $a_{ij},\ b_i,\ c$ являются, вообще говоря, функциями от $(x,\, y)$.

Опр. 1.1. Характеристической квадратичной формой уравнения (1.1) называется выражение:

$$Q(\lambda_1,\ \lambda_2) = a_{11}\lambda_1^2 + 2a_{12}\lambda_1\lambda_2 + a_{22}\lambda_2^2. \tag{1.2}$$

Выражение

$$\Delta = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} \tag{1.3}$$

называется **дискриминантом квадратичной формы** (1.2).

Опр. 1.2. Уравнение (1.1) относится к

1) **гиперболическому типу**, если $\Delta > 0$;
2) **эллиптическому типу**, если $\Delta < 0$;
3) **параболическому типу**, если $\Delta = 0$.

Замечание 1.1. В случае, когда коэффициенты $a_{ij},\ b_i,\ c$ являются функциями от $(x,\, y)$, дискриминант Δ также есть функция от $(x,\, y)$. Поэтому уравнение с переменными коэффициентами может в разных областях плоскости $\mathbb{R}^2$ иметь разный тип.

Замечание 1.2. Тип уравнения не изменяется при невырожденной замене переменных

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,\, y); \\ \eta = \eta(x,\, y). \end{cases}$$

© Д.С. Ткаченко

Опр. 1.3. Каноническим видом уравнения

1) гиперболического типа называется вид

$$v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + \beta_1 v_\xi + \beta_2 v_\eta + \gamma v = g(\xi,\, \eta), \quad \text{либо}$$
$$v_{\xi\eta} + \beta_1 v_\xi + \beta_2 v_\eta + \gamma v = g(\xi,\, \eta);$$

2) эллиптического типа называется вид

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \beta_1 v_\xi + \beta_2 v_\eta + \gamma v = g(\xi,\, \eta);$$

3) параболического типа называется вид

$$v_{\eta\eta} + \beta_1 v_\xi + \beta_2 v_\eta + \gamma v = g(\xi,\, \eta);$$

1.2. Приведение к каноническому виду УЧП 2-го порядка с 2-мя независимыми переменными

Алгоритм.

1) Находим Δ, определяем тип уравнения.

2) Находим первые интегралы **характеристических уравнений:**

в случае, когда $a_{11} \neq 0$: $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{11}}$;

в случае, когда $a_{22} \neq 0$: $\quad \frac{dx}{dy} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{22}}$.

3) Первые интегралы имеют вид:

в случае гиперболического типа: $\quad \varphi(x,\, y) = c, \quad \psi(x,\, y) = c$;

в случае эллиптического типа: $\quad \alpha(x,\, y) \pm i\beta(x,\, y) = c$;

в случае параболического типа: $\quad \delta(x,\, y) = c$.

4) Делаем замену переменных:

в случае гиперболического типа: $\quad \begin{cases} \xi = \varphi(x,\, y); \\ \eta = \psi(x,\, y). \end{cases}$;

в случае эллиптического типа: $\quad \begin{cases} \xi = \alpha(x,\, y); \\ \eta = \beta(x,\, y). \end{cases}$;

в случае параболического типа: $\quad \begin{cases} \xi = \delta(x,\, y); \\ \eta = \varepsilon(x,\, y). \end{cases}$,

где $\varepsilon(x,\, y)$ – любая функция из C^1 такая, что: $\quad \begin{vmatrix} \delta_x & \delta_y \\ \varepsilon_x & \varepsilon_y \end{vmatrix} \neq 0.$

Результатом произведённой замены будет канонический вид уравнения.

Пример 1.1. № 91.

Привести к каноническому виду в каждой области, где сохраняется тип, уравнение

$$y u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

<u>Шаг 1.</u> Ищем дискриминант.
Так как в нашем случае $a_{11} = y, \;\; a_{12} = 0, \;\; a_{22} = 1$, то

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -y.$$

Поэтому

а) в полуплоскости $y < 0$ дискриминант $\Delta > 0 \quad \Rightarrow \quad$ гиперболический тип;

б) в полуплоскости $y > 0$ дискриминант $\Delta < 0 \quad \Rightarrow \quad$ эллиптический тип;

в) на прямой $y = 0$ дискриминант $\Delta = 0 \quad \Rightarrow \quad$ параболический тип.

<u>Шаг 2.</u> Составим характеристические уравнения.
Так как $a_{22} = 1 \neq 0$, характеристические уравнения имеют вид:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{22}}, \qquad \text{то есть} \qquad \frac{dx}{dy} = \pm\sqrt{-y}. \tag{1.4}$$

Это – уравнения с разделяющимися переменными. Решаем их:

а) в полуплоскости $y < 0$

$$dx = \pm\sqrt{-y}dy \qquad \Rightarrow \qquad x + c = \mp\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}.$$

Поэтому первые интегралы имеют вид:

$$\boxed{\varphi(x,\, y) = x + \tfrac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}} = c, \qquad \boxed{\psi(x,\, y) = x - \tfrac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}} = c \tag{1.5}$$

б) в полуплоскости $y > 0$

$$dx = \pm i\sqrt{y}dy \qquad \Rightarrow \qquad x + c = \pm i\frac{2}{3}\, y^{\frac{3}{2}}.$$

Поэтому первые интегралы имеют вид:

$$\alpha(x,\, y) \pm i\beta(x,\, y) = c, \qquad \text{где} \quad \boxed{\alpha(x,\, y) = x}, \qquad \boxed{\beta(x,\, y) = \tfrac{2}{3}\, y^{\frac{3}{2}}} \tag{1.6}$$

в) на прямой $y = 0$

$$dx = 0 \cdot dy \qquad \Rightarrow \qquad x = c$$

Поэтому первый интеграл (единственный линейно независимый) имеет вид:

$$\boxed{\delta(x,\, y) = x.} \tag{1.7}$$

<u>Шаг 3.</u> Замена переменных.
В соответствии с алгоритмом, необходимо произвести замену:

а) в полуплоскости $y < 0$

$$\begin{cases} \xi = x + \tfrac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}; \\ \eta = x - \tfrac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}. \end{cases}$$

Тогда, введя функцию $v(\xi,\, \eta)$, получаем:

$$u_x = v_\xi + v_\eta, \qquad u_y = (-v_\xi + v_\eta)\sqrt{-y},$$

$$u_{xx} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}, \qquad u_{yy} = -y\left(v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}\right) - \frac{1}{2\sqrt{-y}}\left(-v_\xi + v_\eta\right).$$

© Д.С. Ткаченко

Подставив найденные производные в исходное уравнение, получаем:

$$yu_{xx} + u_{yy} = y\left(v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}\right) - y\left(v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}\right) - \frac{1}{2\sqrt{-y}}\left(-v_\xi + v_\eta\right) =$$
$$= y\left[4v_{\xi\eta} - \frac{1}{2(-y)^{\frac{3}{2}}}\left(-v_\xi + v_\eta\right)\right] = 0.$$

Поделив на $4y$ и выразив $2(-y)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}(\xi - \eta)$, получаем канонический вид:

$$v_{\xi\eta} - \frac{1}{6(\xi - \eta)}\left(-v_\xi + v_\eta\right) = 0.$$

б) в полуплоскости $y > 0$

$$\begin{cases} \xi = x; \\ \eta = \frac{2}{3}\, y^{\frac{3}{2}}. \end{cases}$$

Тогда, введя функцию $v(\xi,\, \eta)$, получаем:

$$u_x = v_\xi, \qquad u_y = v_\eta\,\sqrt{y},$$

$$u_{xx} = v_{\xi\xi}, \qquad u_{yy} = v_{\eta\eta}\, y + \frac{1}{2\sqrt{y}}\, v_\eta.$$

Подставив найденные производные в исходное уравнение, получаем:

$$yu_{xx} + u_{yy} = y\left(v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta}\right) + \frac{1}{2\sqrt{y}}\, v_\eta = y\left(v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}}\, v_\eta\right) =$$
$$= \left[2y^{\frac{3}{2}} = 3\eta\right] = y\left(v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \frac{1}{3\eta}\, v_\eta\right) = 0.$$

Поделив на y, получаем канонический вид:

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \frac{1}{3\eta}\, v_\eta = 0.$$

в) на прямой $y = 0$

$$\begin{cases} \xi = x; \\ \eta = y. \end{cases}$$

(Нам надо было произвольным образом выбрать $\eta(x,\, y)$ так, чтобы функции ξ, η образовывали линейно независимую пару.)
Введя функцию $v(\xi,\, \eta)$, получаем:

$$u_x = v_\xi, \qquad u_y = v_\eta, \qquad u_{xx} = v_{\xi\xi}, \qquad u_{yy} = v_{\eta\eta}.$$

Подставив найденные производные в исходное уравнение при $y = 0$, получаем:

$$u_{yy} = v_{\eta\eta} = 0.$$

Итак, канонический вид исходного уравнения на прямой $y = 0$:

$$v_{\eta\eta} = 0 \qquad \text{или, что то же самое,} \qquad u_{yy} = 0.$$

© Д.С. Ткаченко

Ответ:

$$\begin{cases} v_{\xi\eta} - \frac{1}{6(\xi-\eta)}\left(-v_\xi + v_\eta\right) = 0 & \text{в области} \quad y < 0, \quad \text{гиперболический тип;} \\ v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \frac{1}{3\eta}\, v_\eta = 0 & \text{в области} \quad y > 0, \quad \text{эллиптический тип;} \\ u_{yy} = 0 & \text{в области} \quad y = 0, \quad \text{параболический тип} \end{cases}$$

При этом

$$\begin{cases} \xi = y - x + 2\sqrt{x}, \qquad \eta = y - x - 2\sqrt{x} & \text{в области} \quad y < 0; \\ \xi = y - x, \qquad \eta = 2\sqrt{-x} & \text{в области} \quad y > 0; \\ \xi = x, \qquad \eta = y & \text{в области} \quad y = 0. \end{cases}$$

1.3. Приведение к каноническому виду УЧП 2-го порядка с постоянными коэффициентами

В этом параграфе мы будем рассматривать УЧП 2-го порядка с постоянными коэффициентами и n независимыми переменными:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, u_{x_i x_j} + f(x_1,\, \ldots,\, x_n;\; u,\, u_{x_1},\, \ldots,\, u_{x_n}) = 0, \tag{1.8}$$

$a_{ij} = const \in \mathbb{R}, \quad i,\, j = \overline{1,\; n}.$

Опр. 1.4. **Характеристической квадратичной формой уравнения** (1.8) называется выражение:

$$Q(\lambda_1,\, \ldots,\, \lambda_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, \lambda_i \lambda_j. \tag{1.9}$$

Нормальным видом квадратичной формы (1.9) называется её вид

$$\tilde{Q}(\mu_1,\, \ldots,\, \mu_n) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k\, \mu_k^2, \qquad \beta_k \in \left\{-1,\; 0,\; 1\right\}. \tag{1.10}$$

Каноническим видом уравнения (1.8) называется вид, в котором его характеристическая квадратичная форма принимает нормальный (или канонический) вид:

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k\, u_{x_k x_k} + g(x_1,\, \ldots,\, x_n;\; u,\, u_{x_1},\, \ldots,\, u_{x_n}) = 0. \tag{1.11}$$

Опр. 1.5. Уравнение (1.8) относится к

1) **гиперболическому типу**, если все коэффициенты β_k отличны от нуля и не все одного знака;

2) **эллиптическому типу**, если все коэффициенты β_k отличны от нуля и все одного знака;

3) **параболическому типу**, если хотя бы один из коэффициентов β_k равен нулю.

Алгоритм.

1) Приводим характеристическую квадратичную форму к каноническому (нормальному) виду (1.10) (методом выделения полных квадратов). Выписываем матрицу преобразования, осуществляющую этот процесс:

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \vdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \vdots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \vdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad \det A \neq 0. \tag{1.12}$$

2) Находим матрицу Γ замены переменных по закону

$$\Gamma = \left(A^T\right)^{-1}. \tag{1.13}$$

3) Производим замену переменных:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \vdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \vdots & \gamma_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \vdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix}}_{\Gamma} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

Результатом произведённой замены будет канонический вид (1.11) уравнения (1.8).

2. № 119

Привести к каноническому виду уравнение:

$$u_{xy} - 2u_{xz} + u_{yz} + u_x + \frac{1}{2}\,u_y = 0.$$

<u>Шаг 1.</u> Характеристическая квадратичная форма данного уравнения имеет вид

$$Q(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3) = \lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3.$$

Приведём её к каноническому виду:

$$Q(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3) = \lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = \begin{bmatrix} \nu_1 = \lambda_1 + \lambda_2; \\ \nu_2 = \lambda_1 - \lambda_2; \\ \nu_3 = \lambda_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\nu_1^2 - \nu_2^2\right) - \left(\nu_1 + \nu_2\right)\nu_3 + \frac{1}{2}\left(\nu_1 - \nu_2\right)\nu_3 = \frac{1}{4}\left(\nu_1^2 - \nu_2^2\right) - \frac{1}{2}\nu_1\nu_3 - \frac{3}{2}\nu_2\nu_3 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\nu_1^2 - 2\nu_1\nu_3 + \nu_3^2\right) - \frac{1}{4}\left(\nu_2^2 + 6\nu_2\nu_3 + 9\nu_3^2\right) + 2\nu_3^2 = \frac{1}{4}\left(\nu_1 - \nu_3\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\nu_2 + 3\nu_3\right)^2 + 2\nu_3^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\,\varkappa_1^2 - \frac{1}{4}\,\varkappa_2^2 + 2\varkappa_3^2 = \mu_1^2 - \mu_2^2 + \mu_3^2, \quad \text{где}$$

$$\begin{cases} \mu_1 = \frac{1}{2}\left(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3\right); \\ \mu_2 = \frac{1}{2}\left(\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3\right); \\ \mu_3 = \sqrt{2}\,\lambda_3 \end{cases} \qquad \text{то есть} \qquad \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

<u>Шаг 2.</u> Найдём матрицу замены переменных Г:

$$\Gamma = \left(A^T\right)^{-1} = -\frac{2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

<u>Шаг 3.</u> Осуществляем замену переменных:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{то есть} \qquad \begin{cases} \xi = x + y; \\ \eta = x - y; \\ \zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-x + 2y + z\right). \end{cases}$$

Чтобы подставить новые переменные в исходное уравнение, положим

$$v(\xi,\, \eta,\, \zeta) = u(x,\, y,\, z)$$

и найдём $u_x,\ u_y,\ u_{xy},\ u_{xz},\ u_{yz}$ как производные сложной функции $v\left(\xi(x,\, y,\, z),\ \eta(x,\, y,\, z),\ \zeta(x,\, y,\, z)\right)$:

$$u_x = v_\xi + v_\eta - \frac{\sqrt{2}}{2} v_\zeta, \qquad u_y = v_\xi - v_\eta + \sqrt{2} v_\zeta;$$

$$u_{xy} = v_{\xi\xi} + v_{\xi\eta} \cdot (-1) + v_{\eta\xi} \cdot 1 - v_{\eta\eta} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(v_{\xi\zeta} \cdot 2 + v_{\eta\zeta} \cdot 2\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(v_{\zeta\xi} - v_{\zeta\eta} + \sqrt{2}\, v_{\zeta\zeta}\right) \Rightarrow$$

$$u_{xy} = v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} - v_{\zeta\zeta} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(v_{\xi\zeta} + 3v_{\eta\zeta}\right);$$

$$u_{xz} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(v_{\xi\zeta} + v_{\eta\zeta}\right) - \frac{1}{2} v_{\zeta\zeta};$$

$$u_{yz} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(v_{\xi\zeta} - v_{\eta\zeta}\right) + v_{\zeta\zeta};$$

Подставляя найденный производные в левую часть исходного уравнения и приводя подобные, получаем:

$$u_{xy} - 2u_{xz} + u_{yz} + u_x + \frac{1}{2} u_y = \left(v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} - v_{\zeta\zeta} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(v_{\xi\zeta} + 3v_{\eta\zeta}\right)\right) - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(v_{\xi\zeta} + v_{\eta\zeta}\right) - \frac{1}{2} v_{\zeta\zeta}\right) +$$

$$+ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(v_{\xi\zeta} - v_{\eta\zeta}\right) + v_{\zeta\zeta}\right) + \left(v_\xi + v_\eta - \frac{\sqrt{2}}{2} v_\zeta\right) + \frac{1}{2}\left(v_\xi - v_\eta + \sqrt{2} v_\zeta\right) =$$

$$= v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + v_{\zeta\zeta} + \frac{3}{2} v_\xi + \frac{1}{2} v_\eta.$$

<u>Ответ:</u> уравнение имеет гиперболический тип,

$$v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + v_{\zeta\zeta} + \frac{3}{2} v_\xi + \frac{1}{2} v_\eta = 0, \qquad \text{где}$$

© Д.С. Ткаченко

$$\xi = x + y; \qquad \eta = x - y; \qquad \zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-x + 2y + z\right).$$

Замечание 2.1. Поскольку преобразование, приводящее квадратичную форму к нормальному виду, определено неоднозначно, то и замена переменных, приводящая уравнение к каноническому виду, также определено неоднозначно, поэтому правильных ответов много. Но в любом случае разница между количеством «плюсов» и «минусов» при вторых проихводных не зависит от способа решения.

Замечание 2.2. Старшие коэффициенты уравнения в канонической форме совпадают с коэффициентами нормального вида квадратичной формы. Поэтому, строго говоря, можно было бы не вычислять и не подставлять $u_{xy},\ u_{xz},\ u_{yz}$ в исходное уравнение, а подставить туда лишь младшие производные $u_x,\ u_y$. Однако проделанная полностью подстановка помогает находить ошибки, допущенные на предыдущих шагах.

3. № 74

Привести к каноническому виду уравнение:

$$u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 32u = 0.$$

Шаг 1. Характеристическая квадратичная форма данного уравнения имеет вид

$$Q(\lambda_1,\ \lambda_2) = \lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + 5\lambda_2^2.$$

Приведём её к каноническому виду:

$$Q(\lambda_1,\ \lambda_2) = \lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + 5\lambda_2^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 + (2\lambda_2)^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2, \quad \text{где}$$

$$\begin{cases} \mu_1 = \lambda_1 + \lambda_2; \\ \mu_2 = 2\lambda_2 \end{cases} \qquad \text{то есть} \qquad \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Найдём матрицу замены переменных Γ:

$$\Gamma = \left(A^T\right)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Шаг 3. Осуществляем замену переменных:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{то есть} \qquad \begin{cases} \xi = x; \\ \eta = \frac{1}{2}\left(-x + y\right). \end{cases}$$

Чтобы подставить новые переменные в исходное уравнение, положим

$$v(\xi,\, \eta) = u(x,\, y)$$

и найдём $u_x,\ u_y,\ u_{xx},\ u_{xy},\ u_{yy}$ как производные сложной функции $v\left(\xi(x,\, y),\ \eta(x,\, y)\right)$:

$$u_x = v_\xi - \frac{1}{2}\, v_\eta, \qquad u_y = \frac{1}{2}\, v_\eta;$$

$$u_{xx} = v_{\xi\xi} - v_{\xi\eta} + \frac{1}{4}\, v_{\eta\eta}, \qquad u_{xy} = \frac{1}{2}\, v_{\xi\eta} - \frac{1}{4}\, v_{\eta\eta}, \qquad u_{yy} = \frac{1}{4}\, v_{\eta\eta}.$$

Подставляя найденный производные в левую часть исходного уравнения и приводя подобные, получаем:

$$u_{xx}+2u_{xy}+5u_{yy}-32u=\left(v_{\xi\xi}-v_{\xi\eta}+\frac{1}{4}\,v_{\eta\eta}\right)+2\left(\frac{1}{2}\,v_{\xi\eta}-\ \frac{1}{4}\,v_{\eta\eta}\right)+5\left(\frac{1}{4}\,v_{\eta\eta}\right)-32v=$$
$$=v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}-32v.$$

<u>Ответ:</u> уравнение имеет эллиптический тип,

$$v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}-32v=0,\qquad \text{где}\qquad \xi=x;\qquad \eta=\frac{1}{2}\left(-x+y\right).$$

4. № 75

Привести к каноническому виду уравнение:

$$u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}+9u_x+9u_y-9u=0.$$

<u>Шаг 1.</u> Характеристическая квадратичная форма данного уравнения имеет вид

$$Q(\lambda_1,\ \lambda_2)=\lambda_1^2-2\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2.$$

Приведём её к каноническому виду:

$$Q(\lambda_1,\ \lambda_2)=\lambda_1^2-2\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2=(\lambda_1-\lambda_2)^2=\mu_1^2+0\cdot\mu_2^2,\quad \text{где}$$
$$\begin{cases}\mu_1=\lambda_1-\lambda_2;\\ \mu_2=\lambda_2\end{cases}\qquad \text{то есть}\qquad \begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}.$$

(В качестве μ_2 можно было взять любую линейную комбинацию λ_1 и λ_2, такую чтобы матрица замены переменных была невырождена.)

<u>Шаг 2.</u> Найдём матрицу замены переменных Γ:

$$\Gamma=\left(A^T\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

<u>Шаг 3.</u> Осуществляем замену переменных:

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\qquad \text{то есть}\qquad \begin{cases}\xi=x;\\ \eta=x+y.\end{cases}$$

Чтобы подставить новые переменные в исходное уравнение, положим

$$v(\xi,\,\eta)=u(x,\,y)$$

и найдём $u_x,\ u_y,\ u_{xx},\ u_{xy},\ u_{yy}$ как производные сложной функции $v\left(\xi(x,\,y),\ \eta(x,\,y)\right)$:

$$u_x=v_\xi+v_\eta,\qquad u_y=v_\eta;$$
$$u_{xx}=v_{\xi\xi}+2v_{\xi\eta}+v_{\eta\eta},\qquad u_{xy}=v_{\xi\eta}+v_{\eta\eta},\qquad u_{yy}=v_{\eta\eta}.$$

Подставляя найденный производные в левую часть исходного уравнения и приводя подобные, получаем:

$$u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}+9u_x+9u_y-9u=(v_{\xi\xi}+2v_{\xi\eta}+v_{\eta\eta})-2\left(v_{\xi\eta}+v_{\eta\eta}\right)+(v_{\eta\eta})+9\left(v_\xi+v_\eta\right)+9\left(v_\eta\right)-9v=$$
$$=v_{\xi\xi}+9v_\xi+18v_\eta-9v.$$

<u>Ответ:</u> уравнение имеет параболический тип,

$$v_{\xi\xi}+9v_\xi+18v_\eta-9v=0,\qquad \text{где}\qquad \xi=x;\qquad \eta=x+y.$$

© Д.С. Ткаченко

5. № 76

Привести к каноническому виду уравнение:

$$2u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} + 7u_x + 4u_y - 2u = 0.$$

<u>Шаг 1.</u> Характеристическая квадратичная форма данного уравнения имеет вид

$$Q(\lambda_1,\ \lambda_2) = \lambda_1^2 + 3\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2.$$

Приведём её к каноническому виду:

$$Q(\lambda_1,\ \lambda_2) = \lambda_1^2 + 3\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 = \left(\frac{3}{2}\lambda_1 + \lambda_2\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\lambda_1\right)^2 = \mu_1^2 - \mu_2^2, \quad \text{где}$$

$$\begin{cases} \mu_1 = \frac{3}{2}\lambda_1 + \lambda_2; \\ \mu_2 = \frac{1}{2}\lambda_1 \end{cases} \qquad \text{то есть} \qquad \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

<u>Шаг 2.</u> Найдём матрицу замены переменных Γ:

$$\Gamma = \left(A^T\right)^{-1} = -2\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

<u>Шаг 3.</u> Осуществляем замену переменных:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{то есть} \qquad \begin{cases} \xi = y; \\ \eta = 2x - 3y. \end{cases}$$

Чтобы подставить новые переменные в исходное уравнение, положим

$$v(\xi,\, \eta) = u(x,\, y)$$

и найдём $u_x,\ u_y,\ u_{xx},\ u_{xy},\ u_{yy}$ как производные сложной функции $v\left(\xi(x,\, y),\ \eta(x,\, y)\right)$:

$$u_x = 2v_\eta, \qquad u_y = v_\xi - 3v_\eta;$$

$$u_{xx} = 4v_{\eta\eta}, \qquad u_{xy} = 2v_{\xi\eta} - 6v_{\eta\eta}, \qquad u_{yy} = v_{\xi\xi} - 6v_{\xi\eta} + 9v_{\eta\eta}.$$

Подставляя найденный производные в левую часть исходного уравнения и приводя подобные, получаем:

$$\begin{aligned} 2u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} + 7u_x + 4u_y - 2u = \\ = 2\left(4v_{\eta\eta}\right) + 3\left(2v_{\xi\eta} - 6v_{\eta\eta}\right) + \left(v_{\xi\xi} - 6v_{\xi\eta} + 9v_{\eta\eta}\right) + 7\left(2v_\eta\right) + 4\left(v_\xi - 3v_\eta\right) - 2v = \\ = v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + 4v_\xi + 2v_\eta - 2v. \end{aligned}$$

<u>Ответ:</u> уравнение имеет гиперболический тип,

$$v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + 4v_\xi + 2v_\eta - 2v = 0, \qquad \text{где} \qquad \xi = y; \qquad \eta = 2x - 3y.$$

© Д.С. Ткаченко

6. № 77

Привести к каноническому виду уравнение:

$$u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} - 3u_x - 15u_y + 27x = 0.$$

<u>Шаг 1.</u> Характеристическая квадратичная форма данного уравнения имеет вид

$$Q(\lambda_1,\ \lambda_2) = \lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_2^2.$$

Приведём её к каноническому виду:

$$Q(\lambda_1,\ \lambda_2) = \lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_2^2 = \left(\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\lambda_2\right)^2 = \mu_1^2 - \mu_2^2, \quad \text{где}$$

$$\begin{cases} \mu_1 = \lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2; \\ \mu_2 = \frac{3}{2}\lambda_2 \end{cases} \qquad \text{то есть} \qquad \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

<u>Шаг 2.</u> Найдём матрицу замены переменных Γ:

$$\Gamma = \left(A^T\right)^{-1} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

<u>Шаг 3.</u> Осуществляем замену переменных:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{то есть} \qquad \begin{cases} \xi = x; \\ \eta = \frac{-x+2y}{3}. \end{cases}$$

Чтобы подставить новые переменные в исходное уравнение, положим

$$v(\xi,\, \eta) = u(x,\, y)$$

и найдём $u_x,\ u_y,\ u_{xx},\ u_{xy},\ u_{yy}$ как производные сложной функции $v\left(\xi(x,\, y),\ \eta(x,\, y)\right)$:

$$u_x = v_\xi - \frac{1}{3}v_\eta, \qquad u_y = \frac{2}{3}v_\eta;$$

$$u_{xx} = v_{\xi\xi} - \frac{2}{3}v_{\xi\eta} + \frac{1}{9}v_{\eta\eta}, \qquad u_{xy} = \frac{2}{3}v_{\xi\eta} - \frac{2}{9}v_{\eta\eta}, \qquad u_{yy} = \frac{4}{9}v_{\eta\eta}.$$

Подставляя найденный производные (а также ξ вместо x) в левую часть исходного уравнения и приводя подобные, получаем:

$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} - 3u_x - 15u_y + 27x = \\ &= \left(v_{\xi\xi} - \frac{2}{3}v_{\xi\eta} + \frac{1}{9}v_{\eta\eta}\right) - 2\left(\frac{2}{3}v_{\xi\eta} - \frac{2}{9}v_{\eta\eta}\right) - 2\left(\frac{4}{9}v_{\eta\eta}\right) - 3\left(v_\xi - \frac{1}{3}v_\eta\right) - 15\left(\frac{2}{3}v_\eta\right) + 27\xi = \\ &\qquad\qquad = v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} - 3v_\xi - 5v_\eta + 27\xi. \end{aligned}$$

<u>Ответ:</u> уравнение имеет гиперболический тип,

$$v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} - 3v_\xi - 5v_\eta + 27\xi = 0, \qquad \text{где} \qquad \xi = x; \qquad \eta = \frac{-x+2y}{3}.$$

© Д.С. Ткаченко

7. Избавление от младших производных

В УЧП 2-го порядка с постоянными коэффициентами всегда можно избавиться от первых производных **при помощи замены**

$$v(\xi_1, \ldots, \xi_n) = w(\xi_1, \ldots, \xi_n) \cdot e^{a_1\xi_1 + \ldots + a_n\xi_n}.$$

Пример 7.1. После приведения уравнения из № 77 к каноническому виду

$$v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} - 3v_\xi - 5v_\eta + 27\xi = 0,$$

сделаем замену:

$$v(\xi, \eta) = w(\xi, \eta) \cdot e^{a\xi + b\eta}, \qquad \text{откуда}$$

$$v_\xi = (w_\xi + aw) \cdot e^{a\xi+b\eta}, \qquad v_\eta = (w_\eta + bw) \cdot e^{a\xi+b\eta},$$

$$v_{\xi\xi} = \left(w_{\xi\xi} + 2aw_\xi + a^2 w\right) \cdot e^{a\xi+b\eta}, \qquad v_{\eta\eta} = \left(w_{\eta\eta} + 2aw_\eta + a^2 w\right) \cdot e^{a\xi+b\eta}.$$

Подставим эти выражения в левую часть уравнния:

$$\begin{aligned} &v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} - 3v_\xi - 5v_\eta + 27\xi = \\ &\quad = \left[\left(w_{\xi\xi} + 2aw_\xi + a^2 w\right) - \left(w_{\eta\eta} + 2bw_\eta + b^2 w\right) - 3\left(w_\xi + aw\right) - 5\left(w_\eta + bw\right)\right] \cdot e^{a\xi+b\eta} + 27\xi = \\ &\quad = \left[w_{\xi\xi} - w_{\eta\eta} + (2a-3)\, w_\xi + (-2b-5)\, w_\eta + \left(a^2 - b^2 - 3a - 5b\right) w + 27\xi \cdot e^{-a\xi-b\eta}\right] \cdot e^{a\xi+b\eta}. \end{aligned}$$

Теперь мы можем выбрать a и b так, чтобы скобки, умножаемые на w_ξ и w_η стали равны нулю:

$$a = \frac{3}{2}, \qquad b = -\frac{5}{2}, \qquad \Rightarrow \qquad a^2 - b^2 - 3a - 5b = \frac{9 - 25 - 18 - 50}{4} = -\frac{84}{4} = -21.$$

После подстановки найденных a и b и сокращения на $e^{a\xi+b\eta}$ получим:

$$w_{\xi\xi} - w_{\eta\eta} - 21w + 27\xi \cdot e^{-\frac{3}{2}\xi + \frac{5}{2}\eta} = 0$$

Задание на самостоятельную работу:

1) *Привести к каноническому виду уравнение*[1]*:*

$$4u_{xx} - 4u_{xy} - 2u_{yz} + u_x + u_z = 0.$$

Ответ:

$$v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + v_{\zeta\zeta} + v_\eta = 0, \qquad \text{где} \qquad \xi = \frac{1}{2}x; \quad \eta = \frac{1}{2}x + y, \quad \zeta = -\frac{1}{2}x - y + z.$$

2) № 95: *Привести к каноническому виду уравнение:*

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 5u_{yy} - 3u_x + u_y + u = 0$$

и избавиться от младших производных. **Ответ:**

$$w_{\xi\xi} + w_{\eta\eta} + \frac{19}{2}w = 0, \qquad \text{где} \qquad \xi = 2x + y; \quad \eta = x, \quad \zeta = -\frac{1}{2}x - y + z.$$

[1] Этот пример решён в методической разработке А.В. Бицадзе, Д.Ф. Калиниченко, А.И. Прилепко «Классификация уравнений математической физики. Решение задач для уравнений эллиптического типа», стр. 15 – 17.

3) № 90*: *Привести к каноническому виду в каждой области, где сохраняется тип, уравнение*

$$xu_{xx} + 2xu_{xy} + (x-1)u_{yy} = 0.$$

<u>Ответ:</u>

$$\begin{cases} v_{\xi\eta} + \frac{1}{2(\xi-\eta)}\left(v_\xi - v_\eta\right) = 0 & \text{в области} \quad x > 0, \quad \text{гиперболический тип;} \\ v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} - \frac{1}{\eta} v_\eta = 0 & \text{в области} \quad x < 0, \quad \text{эллиптический тип;} \\ u_{yy} = 0 & \text{в области} \quad x = 0, \quad \text{параболический тип.} \end{cases}$$

© Д.С. Ткаченко

Задача Коши для волнового уравнения. Формула Даламбера

№ 370, 438, I, II, 385, 439, 445, 371, III, IV, 372, 446.

1. № 370

Найти общее решение уравнения

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0. \tag{1.1}$$

Шаг 1. Находим замену переменных

Способ 1 (через уравнения характеристик) Дискриминант характеристической квадратичной формы в данном случае равен a^2:

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = a^2 > 0, \qquad \Rightarrow \qquad \text{гиперболический тип.}$$

Так как $a_{11} = 1 \neq 0$, составим уравнения характеристик $\frac{dx}{dt} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{11}}$:

$$\frac{dx}{dt} = \pm a, \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm at,$$

и первые интегралы имеют вид:

$$x + at = c, \qquad x - at = c.$$

Поэтому заменой, приводящей уравнние (1.1) к каноническому виду, является замена:

$$\begin{cases} \xi = x + at; \\ \eta = x - at. \end{cases} \tag{1.2}$$

Способ 2 (через характеристическую квадратичную форму) В данном случае нам удобнее (и это верно всегда для уравнения гиперболического типа на прямой, если мы хотим явно найти решение) привести квадратичную форму не к обычному её нормальному виду, а к виду $\tilde{Q} = \mu_1\mu_2$. Произведём необходимые преобразования:

$$Q(\lambda_1,\, \lambda_2) = \lambda_1^2 - a^2\lambda_2^2 = \Big[\text{как разность квадратов}\Big] = (\lambda_1 + a\lambda_2)(\lambda_1 - a\lambda_2) = \mu_1\mu_2,$$

где $\mu_{1,2}$ связаны с $\lambda_{1,2}$ по правилу

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Построим матрицу Γ замены переменных:

$$\Gamma = \left(A^T\right)^{-1} = \frac{1}{-2a} \begin{pmatrix} -a & -1 \\ -a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2a} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2a} \end{pmatrix}$$

Откуда, учитывая, что λ_1 у нас соответствует производной по t, а λ_2 – по x, получаем, что замену переменных надо произвести по правилу:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2a} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \qquad \text{то есть} \qquad \begin{cases} \xi = \frac{1}{2a}(x + at); \\ \eta = \frac{1}{2a}(x - at). \end{cases}$$

© Д.С. Ткаченко

Итак, оба способа приводят нас к необходимости одной и той же замены (1.2) (с точностью до числового множителя).

<u>Шаг 2.</u> Приведение к каноническому виду

Пусть $v(\xi,\,\eta) = u(x,\,t)$. Замена (1.2) даёт нам следующие соотношения для производных:

$$u_x = v_\xi + v_\eta, \qquad u_t = a\left(v_\xi - v_\eta\right),$$

$$u_{xx} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}, \qquad u_{tt} = a^2\left(v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}\right).$$

Подставив их в уравнение (1.1), получаем:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = a^2\left(v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}\right) - a^2\left(v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}\right) = 0,$$

или, после сокращения,

$$v_{\xi\eta} = 0. \tag{1.3}$$

<u>Шаг 3.</u> Решение уравнения

Уравнение (1.3) решить легко. В самом деле, раз производная по η от функции двух переменных $\frac{\partial v}{\partial \xi}$ равна нулю, то $\frac{\partial v}{\partial \xi}$ не зависит от η, то есть:

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = h(\xi).$$

Проинтегрируем последнее равенство по ξ и учтём, что вместо константы интегрирования надо поставить произвольную функцию от η, так как дифференцирование по ξ любую $f_2(\eta)$ обратит в нуль.

$$v(\xi,\,\eta) = \underbrace{\int h(\xi)d\xi}_{=f_1(\xi)} + f_2(\eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta).$$

Переходя к исходным переменным, получаем:

$$u(x,\,t) = f_1(x + at) + f_2(x - at), \tag{1.4}$$

где $f_{1,2}$ – произвольные дважды дифференцируемые функции.

Геометрический смысл равенства (1.4).

Пусть $f_2 \equiv 0$. Тогда в момент времени $t = 0$ профиль струны задаётся равенством

$$u(x,\,0) = f_1(x),$$

в момент времени $t = 1$ – равенством

$$u(x,\,1) = f_1(x + a),$$

то есть график f_1 к моменту $t = 1$ сдвинулся <u>влево</u> на величину a, и так далее.

Если же, наоборот, $f_1 \equiv 0$. Тогда в момент времени $t = 0$ профиль струны задаётся равенством

$$u(x,\,0) = f_2(x),$$

в момент времени $t = 1$ – равенством

$$u(x,\,1) = f_2(x - a),$$

то есть график f_2 к моменту $t = 1$ сдвинулся <u>вправо</u> на величину a, и так далее.

<u>Вывод:</u> Решение уравнения колебаний (1.1) представляет собой сумму двух волн, бегущих влево и вправо со скоростью a:

$$u(x,\,t) = \underbrace{f_1(x + at)}_{\longleftarrow} + \underbrace{f_2(x - at)}_{\longrightarrow}.$$

2. Формула Даламбера

Рассмотрим задачу Коши на прямой для простейшего случая волнового уравнения:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,\, t), & x \in (-\infty,\, +\infty), \quad t \in (0,\, +\infty); \\ u(x,\, 0) = \varphi(x), & x \in (-\infty,\, +\infty); \\ u_t(x,\, 0) = \psi(x), & x \in (-\infty,\, +\infty). \end{cases} \tag{2.1}$$

Теорема 2.1.

Усл. *Функции* $f(x,\, t) \in C\left((-\infty,\, +\infty) \times [0,\, +\infty)\right)$, $\varphi(x),\ \psi(x) \in C(-\infty,\, +\infty)$.

Утв. *Решение задачи Коши* (2.1) *задаётся* ***формулой Даламбера****:*

$$u(x,\, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds + \frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s,\, \tau)dsd\tau. \tag{2.2}$$

Доказательство. Полное доказательство мы приведём позже, в теме «Применение преобразования Фурье к решению уравнений математической физики», № 815, 816. Кроме того, его можно получить элементарной подстановкой формулы Даламбера в равенства (2.1)[1]. А здесь ограничимся случаем

$$f(x,\, t) \equiv 0.$$

Итак: мы убедились, что всякое решение уравнения $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ представляется в виде

$$u(x,\, t) = f_1(x+at) + f_2(x-at). \tag{1.4}$$

Подставим в это равенство начальное условие:

$$\begin{cases} u(x,\, 0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x); \\ u_t(x,\, 0) = a\left(f_1'(x) - f_2'(x)\right) = \psi(x). \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} f_1(y) + f_2(y) = \varphi(y); \\ f_1(y) - f_2(y) = \frac{1}{a}\int\limits_0^y \psi(s)ds + 2c. \end{cases}$$

Найдя полусумму и полуразность этих равенств, получим:

$$\begin{cases} f_1(y) = \frac{\varphi(y)}{2} + \frac{1}{a}\int\limits_0^y \psi(s)ds + c; \\ f_2(y) = \frac{\varphi(y)}{2} - \frac{1}{a}\int\limits_0^y \psi(s)ds - c. \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} f_1(x+at) = \frac{\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_0^{x+at} \psi(s)ds + c; \\ f_2(x-at) = \frac{\varphi(x-at)}{2} - \frac{1}{2a}\int\limits_0^{x-at} \psi(s)ds - c. \end{cases}$$

[1] Заметим, что такой способ позволит убедиться лишь в том, что существует решение (2.1), задаваемое формулой (2.2). Но он не гарантирует, что нет других решений, задаваемых какими-то другими формулами.

Наконец, подставим $f_{1,2}$ в формулу (1.4):

$$u(x,\,t) = f_1(x+at)+f_2(x-at) = \frac{\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_0^{x+at}\psi(s)ds+c+\frac{\varphi(x-at)}{2}-\frac{1}{2a}\int\limits_0^{x-at}\psi(s)ds-c =$$

$$= \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\underbrace{\left(\int\limits_0^{x+at}\psi(s)ds-\int\limits_0^{x-at}\psi(s)ds\right)}_{\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds}+c-c =$$

$$= \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds.$$

□

3. № 438^M

Найти решение задачи Коши

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=\beta x^2, & x\in(-\infty,\,+\infty),\quad t\in(0,\,+\infty);\\ u(x,\,0)=e^{-x}, & x\in(-\infty,\,+\infty);\\ u_t(x,\,0)=\gamma, & x\in(-\infty,\,+\infty). \end{cases} \tag{3.1}$$

Чтобы найти решение, нам достаточно применить формулу Даламбера. Вычислим сначала самый сложный входящий в неё интеграл:

$$\frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(s,\,\tau)dsd\tau = \frac{\beta}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}s^2dsd\tau =$$

$$= \frac{\beta}{2a}\int\limits_0^t\frac{s^3}{3}\Big|_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}d\tau = \frac{\beta}{6a}\int\limits_0^t\left((x+a(t-\tau))^3-(x-a(t-\tau))^3\right)d\tau =$$

$$= \frac{\beta}{6a}\int\limits_0^t\left(\left(x^3+3x^2(t-\tau)+3x(t-\tau)^2+(t-\tau)^3\right)-\left(x^3-3x^2(t-\tau)+3x(t-\tau)^2-(t-\tau)^3\right)\right)d\tau =$$

$$= \frac{\beta}{6a}\int\limits_0^t\left(6x^2(t-\tau)+2(t-\tau)^3\right)d\tau = \Big[\tau-t=p,\quad d\tau=dp\Big] =$$

$$= \frac{\beta}{6a}\int\limits_{-t}^0\left(6x^2(-p)+2p^3\right)dp = \frac{\beta}{6a}\left(-6x^2\,\frac{p^2}{2}\Big|_{p=-t}^{p=0}+2\,\frac{p^4}{4}\Big|_{p=-t}^{p=0}\right) = \frac{\beta}{12a}\left(6x^2t^2+t^4\right).$$

Тогда, из формулы Даламбера получаем:

$$u(x,\,t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds + \frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s,\,\tau)dsd\tau =$$

$$= \frac{e^{-x-at}+e^{-x+at}}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\gamma ds + \frac{\beta}{12a}\left(6x^2t^2+t^4\right) =$$

$$= e^{-x}\cdot\frac{e^{-at}+e^{+at}}{2} + \frac{\gamma}{2a}\Big((x+at)-(x-at)\Big) + \frac{\beta}{12a}\left(6x^2t^2+t^4\right) =$$

$$= e^{-x}\operatorname{ch} at + \gamma t + \frac{\beta}{12a}\left(6x^2t^2+t^4\right).$$

4. № I

Нарисовать профиль бесконечной струны в моменты времени $t = \frac{1}{4a},\ \frac{1}{2a},\ \frac{3}{4a},\ \frac{1}{a},\ \frac{2}{a}$, *если её колебания описываются задачей Коши:*

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = 0, & x\in(-\infty,\,+\infty), \quad t\in(0,\,+\infty); \\ u(x,\,0) = \varphi(x), & x\in(-\infty,\,+\infty); \\ u_t(x,\,0) = \psi(x), & x\in(-\infty,\,+\infty), \end{cases} \tag{4.1}$$

где функция

$$\psi(x)\equiv 0,$$

а функция $\varphi(x)$ *имеет вид, приведённый на рисунке.*

<u>Решение:</u> По формуле Даламбера (2.2) при $f\equiv 0$ и $\psi(x)\equiv 0$ получаем:

$$u(x,\,t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}$$

Отсюда можно сделать вывод, что функция $u(x,\,t)$ есть сумма двух волн одинакового профиля $f = \frac{\varphi}{2}$, одна из которых бежит влево, а другая вправо. Тогда

при $t = 0$:

при $t = \frac{1}{4a}$:

при $t = \frac{1}{2a}$:

при $t = \frac{3}{4a}$:

при $t = \frac{1}{a}$:

при $t = \frac{2}{a}$:

5. № II

Нарисовать профиль бесконечной струны в моменты времени $t = \frac{1}{4a}, \frac{1}{2a}, \frac{1}{a}, \frac{2}{a}, \frac{3}{a}$, *если её колебания описываются задачей Коши:*

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x \in (-\infty,\ +\infty), \quad t \in (0,\ +\infty); \\ u(x,\ 0) = \varphi(x), & x \in (-\infty,\ +\infty); \\ u_t(x,\ 0) = \psi(x), & x \in (-\infty,\ +\infty), \end{cases} \tag{5.1}$$

где функция

$$\varphi(x) \equiv 0,$$

а функция $\psi(x)$ *имеет вид, приведённый на рисунке.*

<u>Решение:</u> По формуле Даламбера (2.2) при $f \equiv 0$ и $\varphi(x) \equiv 0$ получаем:

$$u(x,\ t) = \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds = \Psi(x+at) - \Psi(x-at),$$

где $\Psi(y)$ – некоторая первообразная функции $\frac{\psi(x)}{2a}$, например, функция

$$\Psi(y) = \frac{1}{2a} \int\limits_{-1}^{y} \psi(s)ds.$$

(В качестве нижнего предела мы взяли (-1), поскольку все изменения с функцией $\psi(x)$ происходят только справа от этого числа.)

Отсюда можно сделать вывод, что функция $u(x,\,t)$ есть разность двух волн одинакового профиля Ψ, одна из которых бежит влево, а другая вправо. Причём из волны, бегущей влево, вычитается волна, бегущая вправо. Найдём $\Psi(y)$ для нашего случая:

$$\Psi(y) = \frac{1}{2a}\int\limits_{-1}^{y}\psi(s)ds = \begin{cases} 0, & \text{когда} \quad y \in (-\infty,\ -1]; \\ \frac{y+1}{2a}, & \text{когда} \quad y \in [-1,\ 1]; \\ \frac{1}{a}, & \text{когда} \quad y \in [1,\ +\infty). \end{cases}$$

График этой функции выглядит так:

Поэтому профиль струны будет принимать в различные моменты времени форму:

при $t = 0$:

при $t = \frac{1}{4a}$:

при $t = \frac{1}{2a}$:

при $t = \frac{1}{a}$:

при $t = \frac{2}{a}$:

при $t = \frac{3}{a}$:

6. № 385

Найти решение задачи:

$$\begin{cases} u_{xx} - 2u_{xy} + 4e^y = 0, & x \in (0,\ +\infty), \quad y \in (-\infty,\ +\infty); \\ u(0,\ y) = \varphi(y), & y \in (-\infty,\ +\infty); \\ u_x(0,\ y) = \psi(y), & y \in (-\infty,\ +\infty). \end{cases} \tag{6.1}$$

Прежде чем решать эту задачу, заметим, что если переименовать переменную x в t, а y – в x, то получится обычная задача Коши для УЧП 2-го порядка.

<u>Шаг 1.</u> Находим замену переменных

<u>Способ 1 (через уравнения характеристик)</u> Дискриминант характеристической квадратичной формы в данном случае равен a^2:

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = (-1)^2 - 1 \cdot 0 = 1 > 0, \qquad \Rightarrow \qquad \text{гиперболический тип.}$$

Так как $a_{11} = 1 \neq 0$, составим уравнения характеристик $\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{11}}$:

$$\frac{dy}{dx} = -1 \pm 1 = \left[\begin{array}{l} 0, \\ -2, \end{array} \right. \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} y = c, \\ y = -2x + c, \end{cases}$$

и первые интегралы имеют вид:

$$y = c, \qquad y + 2x = c.$$

Поэтому заменой, приводящей уравнние (6.1) к каноническому виду, является замена:

$$\begin{cases} \xi = y; \\ \eta = y + 2x. \end{cases} \tag{6.2}$$

<u>Способ 2 (через характеристическую квадратичную форму)</u> В данном случае нам удобнее (как всегда для уравнения гиперболического типа на прямой) привести квадратичную форму не к обычному её нормальному виду, а к виду $\tilde{Q} = \mu_1\mu_2$. Произведём необходимые преобразования:

$$Q(\lambda_1,\, \lambda_2) = \lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2 = (\lambda_1 - 2\lambda_2)\lambda_1 = \mu_1\mu_2,$$

где $\mu_{1,2}$ связаны с $\lambda_{1,2}$ по правилу

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Построим матрицу Γ замены переменных:

$$\Gamma = \left(A^T\right)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Откуда, учитывая, что λ_1 у нас соответствует производной <u>по x</u>, а λ_2 – <u>по y</u>, получаем, что замену переменных надо произвести по правилу:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{то есть} \qquad \begin{cases} \xi = -\,\frac{1}{2}\cdot y; \\ \eta = \frac{1}{2}(2x + y). \end{cases}$$

Итак, оба способа приводят нас к необходимости одной и той же замены (6.2) (с точностью до числового множителя).

<u>Шаг 2.</u> Приведение к каноническому виду

Пусть $v(\xi,\, \eta) = u(x,\, t)$. Замена (6.2) даёт нам следующие соотношения для производных:

$$u_x = 2v_\eta, \qquad u_y = v_\xi + v_\eta,$$

$$u_{xx} = 4v_{\eta\eta}, \qquad u_{xy} = 2\left(v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}\right).$$

Подставив их в уравнение (6.1), получаем:

$$u_{xx} - 2u_{xy} + 4e^y = 4v_{\eta\eta} - 2\cdot 2\left(v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}\right) + 4e^\xi = 0,$$

или, после сокращения,

$$v_{\xi\eta} = e^\xi. \tag{6.3}$$

<u>Шаг 3.</u> Решение уравнения

Уравнение (6.3) решить легко – достаточно проинтегрировать его по ξ и η. Сначала интегрируем по η:

$$v_\xi = \eta\cdot e^\xi + h(\xi).$$

(Напомним, что функция $h(\xi)$ появилась вместо и в качестве константы интегрирования.)
Теперь проинтегрируем последнее равенство по ξ и учтём, что вместо константы интегрирования надо поставить произвольную функцию от η:

$$v(\xi,\, \eta) = \eta\cdot e^\xi + \underbrace{\int h(\xi)d\xi}_{=f_1(\xi)} + f_2(\eta) = \eta\cdot e^\xi + f_1(\xi) + f_2(\eta).$$

© Д.С. Ткаченко

Переходя к исходным переменным, получаем:

$$u(x,\,t) = (y+2x)\cdot e^y + f_1(y) + f_2(y+2x), \tag{6.4}$$

где $f_{1,2}$ – произвольные дважды дифференцируемые функции.

<u>Шаг 4.</u> Использование начальных условий

Подставляя общее решение (6.4) уравнения в начальные условия, получаем:

$$\begin{cases} u(0,\,y) = \varphi(y), \\ u_x(0,\,y) = \psi(y), \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} ye^y + f_1(y) + f_2(y) = \varphi(y), \\ 2e^y + 2f_2'(y) = \psi(y). \end{cases}$$

Из последнего уравнения сразу находится $f_2(s)$:

$$f_2(s) = \int\limits_0^s \left(\frac{1}{2}\psi(y) - e^y\right) dy + c = \frac{1}{2}\underbrace{\int\limits_0^s \psi(y)dy}_{\Psi(s)} - e^y\Big|_0^s + c_1 = \frac{1}{2}\Psi(s) - e^s + 1 + c_1 =$$

$$= \Big[c = c_1 + 1\Big] = \frac{1}{2}\Psi(s) - e^s + c.$$

Подставляя найденную функцию $f_2(s) = \frac{1}{2}\Psi(s) - e^s + c$, в первое начальное условие, найдём $f_1(s)$:

$$f_1(s) = \varphi(s) - \frac{1}{2}\Psi(s) + e^s - c - se^s = \varphi(s) - \frac{1}{2}\Psi(s) + (1-s)e^s - c.$$

Осталось подставить

$$f_1(s) = \varphi(s) - \frac{1}{2}\Psi(s) + (1-s)e^s - c \qquad \text{и} \qquad f_2(s) = \frac{1}{2}\Psi(s) - e^s + c$$

в формулу общего решения (6.4).

$$\begin{aligned} u(x,\,t) &= (y+2x)\cdot e^y + f_1(y) + f_2(y+2x) = \\ &= (y+2x)\cdot e^y + \varphi(y) - \frac{1}{2}\Psi(y) + (1-y)e^y - c + \frac{1}{2}\Psi(y+2x) - e^{y+2x} + c = \\ &= (2x+1)\cdot e^y - e^{y+2x} + \varphi(y) + \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^{y+2x}\psi(y)dy - \int\limits_0^{y}\psi(y)dy\right) = \\ &= (2x+1)\cdot e^y - e^{y+2x} + \varphi(y) + \frac{1}{2}\int\limits_y^{y+2x}\psi(y)dy. \end{aligned}$$

<u>Ответ:</u>

$$u(x,\,t) = (2x+1)\cdot e^y - e^{y+2x} + \varphi(y) + \frac{1}{2}\int\limits_y^{y+2x}\psi(y)dy.$$

© Д.С. Ткаченко

Задание на самостоятельную работу:

1) **№ 349.** *Пользуясь формулой Даламбера, найти решение задачи Коши:*

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \alpha x t, & x \in (-\infty,\ +\infty), \quad t \in (0,\ +\infty); \\ u(x,\,0) = x, & x \in (-\infty,\ +\infty); \\ u_t(x,\,0) = \sin x, & x \in (-\infty,\ +\infty). \end{cases}$$

Ответ:

$$u(x,\,t) = x + \sin x \sin t + \frac{\alpha}{6} x t^3.$$

2) **№ 445.** *Доказать что в случае, когда* $f(x,\,t) \equiv 0$

а) из нечётности $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ и $\psi(-x) = -\psi(x)$ функций φ и ψ следует, что $u(0,\,t) = 0$;

б) из чётности $\varphi(-x) = \varphi(x)$ и $\psi(-x) = \psi(x)$ функций φ и ψ следует, что $u_x(0,\,t) = 0$.

3) **№ 371.** *Найти общее решение уравнения:*

$$2u_{xx} - 5u_{xy} + 3u_{yy} = 0.$$

Ответ: $u(x,\,t) = f_1(3x + 2y) + f_2(x + y)$, где $f_{1,2}$ – произвольные дважды дифференцируемые функции.

4) **III.** *Нарисовать профиль бесконечной струны в моменты времени* $t = 0,\ \frac{1}{4a},\ \frac{1}{2a},\ \frac{9}{4a},\ \frac{3}{a},\ \frac{5}{a}$, *если её колебания описываются задачей Коши:*

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x \in (-\infty,\ +\infty), \quad t \in (0,\ +\infty); \\ u(x,\,0) = \varphi(x), & x \in (-\infty,\ +\infty); \\ u_t(x,\,0) = \psi(x), & x \in (-\infty,\ +\infty), \end{cases} \tag{6.5}$$

где функция

$$\psi(x) \equiv 0,$$

а функция $\varphi(x)$ *имеет вид, приведённый на рисунке.*

5) **IV.** *Нарисовать профиль бесконечной струны в моменты времени* $t = 0,\ \frac{1}{4a},\ \frac{1}{2a},\ \frac{1}{a},\ \frac{2}{a},\ \frac{4}{a}$, *если её колебания описываются задачей Коши:*

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x \in (-\infty,\ +\infty), \quad t \in (0,\ +\infty); \\ u(x,\,0) = \varphi(x), & x \in (-\infty,\ +\infty); \\ u_t(x,\,0) = \psi(x), & x \in (-\infty,\ +\infty), \end{cases} \tag{6.6}$$

где функция

$$\varphi(x) \equiv 0,$$

а функция $\psi(x)$ *имеет вид, приведённый на рисунке.*

6) **№ 446.** *Доказать что в случае, когда* $\varphi(x) \equiv \psi(x) \equiv 0$

а) из нечётности $f(-x,\,t) = -f(x,\,t)$ функции f по x следует, что $u(0,\,t) = 0$;

б) из чётности $f(-x,\,t) = f(x,\,t)$ функции f по x следует, что $u_x(0,\,t) = 0$.

7) **№ 372.** *Найти общее решение уравнения:*

$$2u_{xx} + 6u_{xy} + 4u_{yy} + u_x + u_y = 0.$$

<u>Ответ:</u> $u(x,\,t) = f_1(y-x) + f_2(2x-y)e^{\frac{x-y}{2}}$, где $f_{1,2}$ – произвольные дважды дифференцируемые функции.

© Д.С. Ткаченко

Волновое уравнение на полупрямой. Метод продолжения и метод характеристик

№ 447, 449, 451, 448, 450, 452, 454, 453, 455, 456, 457, I, II, III, IV, V.

1. Метод продолжения

Рассмотрим задачу Коши на прямой для простейшего случая волнового уравнения:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,\, t), & x \in (-\infty,\, +\infty), \quad t \in (0,\, +\infty); \\ u(x,\, 0) = \varphi(x), & x \in (-\infty,\, +\infty); \\ u_t(x,\, 0) = \psi(x), & x \in (-\infty,\, +\infty). \end{cases} \tag{1.1}$$

Вспомним утверждения, доказанные в номерах 445 и 446:

№ 445.

Усл. $f(x,\, t) \equiv 0.$

Утв. **а)** из нечётности $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ и $\psi(-x) = -\psi(x)$ функций φ и ψ следует, что

$$u(0,\, t) = 0;$$

б) из чётности $\varphi(-x) = \varphi(x)$ и $\psi(-x) = \psi(x)$ функций φ и ψ следует, что

$$u_x(0,\, t) = 0.$$

№ 446.

Усл. $\varphi(x),\ \psi(x) \equiv 0.$

Утв. **а)** из нечётности $f(-x,\, t) = -f(x,\, t)$ по переменной x функции f следует, что

$$u(0,\, t) = 0;$$

б) из чётности $f(-x,\, t) = f(x,\, t)$ по переменной x функции f следует, что

$$u_x(0,\, t) = 0.$$

Это наблюдение и легло в основу метода продолжения. Продемонстрируем его на примерах, а затем сформулируем в виде теоремы.

2. № 447

Найти решение задачи для волнового уравнения на полупрямой в случае однородного краевого условия первого рода:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0,\ t > 0; \\ u(x,\, 0) = \varphi(x), & x \geqslant 0; \\ u_t(x,\, 0) = \psi(x), & x \geqslant 0; \\ u(0,\, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Пока мы ещё не умеем решать задачи на полупрямой, зато всё знаем о решении задачи Коши на прямой. Рассмотрим вспомогательную задачу на прямой:

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, & x \in (-\infty,\, +\infty), \ \ t > 0; \\ v(x,\, 0) = \varphi_1(x), & x \in (-\infty,\, +\infty); \\ v_t(x,\, 0) = \psi_1(x), & x \in (-\infty,\, +\infty), \end{cases} \tag{2.2}$$

© Д.С. Ткаченко

где функции $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ построены по функциям $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ их **нечётным продолжением** на всю числовую ось:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{при} \quad x > 0; \\ 0, & \text{при} \quad x = 0; \\ -\varphi(-x), & \text{при} \quad x < 0, \end{cases} \qquad \psi_1(x) = \begin{cases} \psi(x), & \text{при} \quad x > 0; \\ 0, & \text{при} \quad x = 0; \\ -\psi(-x), & \text{при} \quad x < 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Рассмотрим, каким условиям удовлетворяет $v(x,\, t)$ на промежутке $x \in (0,\, +\infty)$. Так как v – решение (2.2), то:

1) из первого равенства (2.2) следует, что

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, \qquad x \in (0,\, +\infty), \;\; t > 0;$$

2) из второго равенства (2.2) следует, что

$$v(x,\, 0) = \varphi_1(x) \equiv \varphi(x), \qquad x \in (0,\, +\infty), \;\; t > 0;$$

3) из третьего равенства (2.2) следует, что

$$v_t(x,\, 0) = \psi_1(x) \equiv \psi(x), \qquad x \in (0,\, +\infty), \;\; t > 0.$$

Наконец, в силу утверждения из № 445, для решения $v(x,\, t)$ вспомогательной задачи (2.2) справедливо соотношение

$$v(0,\, t) = 0, \qquad t > 0.$$

Поэтому оказывается, что **решение $v(x,\, t)$ вспомогательной задачи (2.2) является также решением задачи (2.1) на полупрямой**[1]:

$$u(x,\, t) \equiv v(x,\, t), \qquad x \geqslant 0, \;\; t \geqslant 0.$$

А для решения задачи (2.2) на всей прямой у нас есть формула Даламбера, по которой в случае $f(x,\, t) \equiv 0$ получаем:

$$v(x,\, t) = \frac{\varphi_1(x + at) + \varphi_1(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi_1(s) ds.$$

Ответ:

$$u(x,\, t) = \frac{\varphi_1(x + at) + \varphi_1(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi_1(s) ds,$$

где функции $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ определены равенствами (2.3).

3. № 449

Найти решение задачи для волнового уравнения на полупрямой в случае однородного краевого условия первого рода:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,\, t), & x > 0, \; t > 0; \\ u(x,\, 0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u_t(x,\, 0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u(0,\, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

[1] То, что другого решения у задачи (2.1) нет, следует из соответствующей теоремы единственности.

Пока мы ещё не умеем решать задачи на полупрямой, зато всё знаем о решении задачи Коши на прямой. Рассмотрим вспомогательную задачу на прямой:

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = f_1(x,\, t), & x \in (-\infty,\, +\infty),\ \ t > 0; \\ v(x,\, 0) = 0, & x \in (-\infty,\, +\infty); \\ v_t(x,\, 0) = 0, & x \in (-\infty,\, +\infty), \end{cases} \tag{3.2}$$

где функции $f_1(x,\, t)$ построена по функции $f(x,\, t)$ её **<u>нечётным продолжением</u>** по переменной x на всю числовую ось:

$$f_1(x,\, t) = \begin{cases} f(x,\, t), & \text{при} \quad x > 0; \\ 0, & \text{при} \quad x = 0; \\ -f(-x,\, t), & \text{при} \quad x < 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Рассмотрим, каким условиям удовлетворяет $v(x,\, t)$ на промежутке $x \in (0,\, +\infty)$. Так как v – решение (3.2), то:

1) из первого равенства (3.2) следует, что

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = f(x,\, t), \qquad x \in (0,\, +\infty),\ \ t > 0;$$

2) из второго равенства (3.2) следует, что

$$v(x,\, 0) = 0 \equiv \varphi(x), \qquad x \in (0,\, +\infty),\ \ t > 0;$$

3) из третьего равенства (3.2) следует, что

$$v_t(x,\, 0) = 0 \equiv \psi(x), \qquad x \in (0,\, +\infty),\ \ t > 0.$$

Наконец, в силу утверждения из № 446, для решения $v(x,\, t)$ вспомогательной задачи (3.2) справедливо соотношение

$$v(0,\, t) = 0, \qquad t > 0.$$

Поэтому оказывается, что **решение $v(x,\, t)$ вспомогательной задачи (3.2) является также решением задачи (3.1) на полупрямой**[2]:

$$u(x,\, t) \equiv v(x,\, t), \qquad x \geqslant 0,\ \ t \geqslant 0.$$

А для решения задачи (3.2) на всей прямой у нас есть формула Даламбера, по которой в случае $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$ получаем:

$$v(x,\, t) = \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_1(s,\, \tau) ds d\tau.$$

<u>Ответ:</u>

$$u(x,\, t) = \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_1(s,\, \tau) ds d\tau,$$

где функция $f_1(x,\, t)$ определена равенством (3.3).

[2] То, что другого решения у задачи (3.1) нет, следует из соответствующей теоремы единственности.

4. № 451

Найти решение задачи для волнового уравнения на полупрямой в случае однородного краевого условия первого рода:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,\, t), & x > 0,\ t > 0; \\ u(x,\, 0) = \varphi(x), & x \geqslant 0; \\ u_t(x,\, 0) = \psi(x), & x \geqslant 0; \\ u(0,\, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Рассмотрим две вспомогательные задачи на полупрямой:

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, & x,\, t > 0; \\ v(x,\, 0) = \varphi(x), & x \geqslant 0; \\ v_t(x,\, 0) = \psi(x), & x \geqslant 0; \\ v(0,\, t) = 0, & t > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} w_{tt} - a^2 v_{xx} = f(x,\, t), & x,\, t > 0; \\ w(x,\, 0) = \varphi(x), & x \geqslant 0; \\ w_t(x,\, 0) = \psi(x), & x \geqslant 0; \\ w(0,\, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

Как легко заметить, функция

$$u(x,\, t) \equiv v(x,\, t) + w(x,\, t)$$

является решением исходной задачи (4.1).
С другой стороны, задачи (4.2) мы уже решили, соответственно, в номерах 447 и 449. Воспользуемся их результатами:

$$v(x,\, t) = \frac{\varphi_1(x + at) + \varphi_1(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi_1(s) ds,$$

$$w(x,\, t) = \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_1(s,\, \tau) ds d\tau,$$

где функции $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ и $f_1(x,\, t)$ определены равенствами

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{при} \quad x > 0; \\ 0, & \text{при} \quad x = 0; \\ -\varphi(-x), & \text{при} \quad x < 0, \end{cases} \qquad \psi_1(x) = \begin{cases} \psi(x), & \text{при} \quad x > 0; \\ 0, & \text{при} \quad x = 0; \\ -\psi(-x), & \text{при} \quad x < 0, \end{cases} \tag{4.3}$$

$$f_1(x,\, t) = \begin{cases} f(x,\, t), & \text{при} \quad x > 0; \\ 0, & \text{при} \quad x = 0; \\ -f(-x,\, t), & \text{при} \quad x < 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

Поэтому для решения $u(x,\, t) \equiv v(x,\, t) + w(x,\, t)$ задачи (4.1) получаем:
<u>Ответ:</u>

$$u(x,\, t) = \frac{\varphi_1(x + at) + \varphi_1(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi_1(s) ds + \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_1(s,\, \tau) ds d\tau,$$

где функции $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ и $f_1(x,\, t)$ определены равенствами (4.3) и (4.4), соответственно.

© Д.С. Ткаченко

5. № 448

Найти решение задачи для волнового уравнения на полупрямой в случае однородного краевого условия второго рода:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0,\ t > 0; \\ u(x,\,0) = \varphi(x), & x \geqslant 0; \\ u_t(x,\,0) = \psi(x), & x \geqslant 0; \\ u_x(0,\,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Пока мы ещё не умеем решать задачи на полупрямой, зато всё знаем о решении задачи Коши на прямой. Рассмотрим вспомогательную задачу на прямой:

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, & x \in (-\infty,\,+\infty),\ \ t > 0; \\ v(x,\,0) = \varphi_1(x), & x \in (-\infty,\,+\infty); \\ v_t(x,\,0) = \psi_1(x), & x \in (-\infty,\,+\infty), \end{cases} \tag{5.2}$$

где функции $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ построены по функциям $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ их **<u>чётным продолжением</u>** на всю числовую ось:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{при} \quad x \geqslant 0; \\ \varphi(-x), & \text{при} \quad x < 0, \end{cases} \qquad \psi_1(x) = \begin{cases} \psi(x), & \text{при} \quad x \geqslant 0; \\ \psi(-x), & \text{при} \quad x < 0. \end{cases} \tag{5.3}$$

Рассмотрим, каким условиям удовлетворяет $v(x,\,t)$ на промежутке $x \in (0,\,+\infty)$. Так как v – решение (5.2), то:

1) из первого равенства (5.2) следует, что

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, \qquad x \in (0,\,+\infty),\ \ t > 0;$$

2) из второго равенства (5.2) следует, что

$$v(x,\,0) = \varphi_1(x) \equiv \varphi(x), \qquad x \in (0,\,+\infty),\ \ t > 0;$$

3) из третьего равенства (5.2) следует, что

$$v_t(x,\,0) = \psi_1(x) \equiv \psi(x), \qquad x \in (0,\,+\infty),\ \ t > 0.$$

Наконец, в силу утверждения из № 446, для решения $v(x,\,t)$ вспомогательной задачи (5.2) справедливо соотношение

$$v_x(0,\,t) = 0, \qquad t > 0.$$

Поэтому оказывается, что **решение $v(x,\,t)$ вспомогательной задачи (5.2) является также решением задачи (5.1) на полупрямой**[3]:

$$u(x,\,t) \equiv v(x,\,t), \qquad x \geqslant 0,\ \ t \geqslant 0.$$

А для решения задачи (5.2) на всей прямой у нас есть формула Даламбера, по которой в случае $f(x,\,t) \equiv 0$ получаем:

$$v(x,\,t) = \frac{\varphi_1(x+at) + \varphi_1(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi_1(s)ds.$$

<u>Ответ:</u>

$$u(x,\,t) = \frac{\varphi_1(x+at) + \varphi_1(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi_1(s)ds,$$

где функции $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ определены равенствами (5.3).

[3] То, что другого решения у задачи (5.1) нет, следует из соответствующей теоремы единственности.

6. № 450

Найти решение задачи для волнового уравнения на полупрямой в случае однородного краевого условия второго рода:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,\, t), & x > 0,\ t > 0; \\ u(x,\, 0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u_t(x,\, 0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u_x(0,\, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{6.1}$$

Пока мы ещё не умеем решать задачи на полупрямой, зато всё знаем о решении задачи Коши на прямой. Рассмотрим вспомогательную задачу на прямой:

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = f_1(x,\, t), & x \in (-\infty,\, +\infty),\ \ t > 0; \\ v(x,\, 0) = 0, & x \in (-\infty,\, +\infty); \\ v_t(x,\, 0) = 0, & x \in (-\infty,\, +\infty), \end{cases} \tag{6.2}$$

где функции $f_1(x,\, t)$ построена по функции $f(x,\, t)$ её **<u>чётным продолжением</u>** по переменной x на всю числовую ось:

$$f_1(x,\, t) = \begin{cases} f(x,\, t), & \text{при} \quad x \geqslant 0; \\ f(-x,\, t), & \text{при} \quad x < 0. \end{cases} \tag{6.3}$$

Рассмотрим, каким условиям удовлетворяет $v(x,\, t)$ на промежутке $x \in (0,\, +\infty)$. Так как v – решение (6.2), то:

1) из первого равенства (6.2) следует, что

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = f(x,\, t), \qquad x \in (0,\, +\infty),\ \ t > 0;$$

2) из второго равенства (6.2) следует, что

$$v(x,\, 0) = 0 \equiv \varphi(x), \qquad x \in (0,\, +\infty),\ \ t > 0;$$

3) из третьего равенства (6.2) следует, что

$$v_t(x,\, 0) = 0 \equiv \psi(x), \qquad x \in (0,\, +\infty),\ \ t > 0.$$

Наконец, в силу утверждения из № 446, для решения $v(x,\, t)$ вспомогательной задачи (6.2) справедливо соотношение

$$v_x(0,\, t) = 0, \qquad t > 0.$$

Поэтому оказывается, что **решение $v(x,\, t)$ вспомогательной задачи (6.2) является также решением задачи (6.1) на полупрямой**[4]:

$$u(x,\, t) \equiv v(x,\, t), \qquad x \geqslant 0,\ \ t \geqslant 0.$$

А для решения задачи (6.2) на всей прямой у нас есть формула Даламбера, по которой в случае $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$ получаем:

$$v(x,\, t) = \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_1(s,\, \tau) ds d\tau.$$

<u>Ответ:</u>

$$u(x,\, t) = \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_1(s,\, \tau) ds d\tau,$$

где функция $f_1(x,\, t)$ определена равенством (6.3).

[4] То, что другого решения у задачи (6.1) нет, следует из соответствующей теоремы единственности.

7. № 452

Найти решение задачи для волнового уравнения на полупрямой в случае однородного краевого условия второго рода:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,\, t), & x > 0,\ t > 0; \\ u(x,\, 0) = \varphi(x), & x \geqslant 0; \\ u_t(x,\, 0) = \psi(x), & x \geqslant 0; \\ u_x(0,\, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{7.1}$$

Рассмотрим две вспомогательные задачи на полупрямой:

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, & x,\, t > 0; \\ v(x,\, 0) = \varphi(x), & x \geqslant 0; \\ v_t(x,\, 0) = \psi(x), & x \geqslant 0; \\ v_x(0,\, t) = 0, & t > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} w_{tt} - a^2 v_{xx} = f(x,\, t), & x,\, t > 0; \\ w(x,\, 0) = \varphi(x), & x \geqslant 0; \\ w_t(x,\, 0) = \psi(x), & x \geqslant 0; \\ w_x(0,\, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{7.2}$$

Как легко заметить, функция

$$u(x,\, t) \equiv v(x,\, t) + w(x,\, t)$$

является решением исходной задачи (7.1).
С другой стороны, задачи (7.2) мы уже решили, соответственно, в номерах 448 и 450. Воспользуемся их результатами:

$$v(x,\, t) = \frac{\varphi_1(x + at) + \varphi_1(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi_1(s) ds,$$

$$w(x,\, t) = \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_1(s,\, \tau) ds d\tau,$$

где функции $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ и $f_1(x,\, t)$ определены равенствами

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{при} \quad x \geqslant 0; \\ \varphi(-x), & \text{при} \quad x < 0, \end{cases} \qquad \psi_1(x) = \begin{cases} \psi(x), & \text{при} \quad x \geqslant 0; \\ \psi(-x), & \text{при} \quad x < 0, \end{cases} \tag{7.3}$$

$$f_1(x,\, t) = \begin{cases} f(x,\, t), & \text{при} \quad x \geqslant 0; \\ f(-x,\, t), & \text{при} \quad x < 0. \end{cases} \tag{7.4}$$

Поэтому для решения $u(x,\, t) \equiv v(x,\, t) + w(x,\, t)$ задачи (7.1) получаем:
<u>Ответ:</u>

$$u(x,\, t) = \frac{\varphi_1(x + at) + \varphi_1(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi_1(s) ds + \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_1(s,\, \tau) ds d\tau,$$

где функции $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ и $f_1(x,\, t)$ определены равенствами (7.3) и (7.4), соответственно.
Результаты номеров 447 – 452 сформулируем в виде теоремы:

© Д.С. Ткаченко

Теорема 7.1 (Метод продолжения).

Утв. 1. *Решение задачи*

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,\, t), & x > 0,\ t > 0; \\ u(x,\, 0) = \varphi(x), & x \geqslant 0; \\ u_t(x,\, 0) = \psi(x), & x \geqslant 0; \\ u(0,\, t) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

задаётся формулой Даламбера

$$u(x,\, t) = \frac{\varphi_1(x + at) + \varphi_1(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi_1(s) ds + \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_1(s,\, \tau) ds d\tau,$$

где функции $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ и $f_1(x,\, t)$ есть ***нечётные*** *по x продожения функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x,\, t)$ на всю числовую прямую.*

Утв. 2. *Решение задачи*

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,\, t), & x > 0,\ t > 0; \\ u(x,\, 0) = \varphi(x), & x \geqslant 0; \\ u_t(x,\, 0) = \psi(x), & x \geqslant 0; \\ u_x(0,\, t) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

задаётся формулой Даламбера

$$u(x,\, t) = \frac{\varphi_1(x + at) + \varphi_1(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi_1(s) ds + \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_1(s,\, \tau) ds d\tau,$$

где функции $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ и $f_1(x,\, t)$ есть ***чётные*** *по x продожения функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x,\, t)$ на всю числовую прямую.*

Замечание 7.1. Метод продолжения в приведённом виде не распространяется на

- краевое условие 3-го рода и
- на неоднородные краевые условия.

При этом случай неоднородных краевых условий (при $\varphi,\ \psi,\ f \equiv 0$) мы научимся решать методом характеристик.

8. Метод характеристик

Будем рассматривать задачу нахождения функции $u(x,\, t)$ на полупрямой $x > 0$ из условий

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0,\ t > 0; \\ u(x,\, 0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u_t(x,\, 0) = 0, & x \geqslant 0; \\ \text{(КУ)} \end{cases} \tag{8.1}$$

где краевое условие (КУ) имеет один из видов:

$$\left[\begin{array}{lll} u(0,\,t)=\mu(t), & t>0\ - & \text{краевое условие I-го рода;} \\ u_x(0,\,t)=\nu(t), & t>0\ - & \text{краевое условие II-го рода;} \\ u_x(0,\,t)-hu(0,\,t)=\varkappa(t), & t>0\ - & \text{краевое условие III-го рода.} \end{array}\right. \tag{КУ}$$

Поскольку решение уравнения $u_{tt}-a^2u_{xx}=0$ имеет вид

$$u(x,\,t)=\underbrace{f_1(x+at)}_{\longleftarrow}+\underbrace{f_2(x-at)}_{\longrightarrow}$$

двух волн, одна из которых бежит влево, а другая вправо, внешней силы f нет, в начальный момент струна справа от $x=0$ имеет нулевое отклонение от положения равновесия и нулевую скокрость, то обе волны $f_1(x+at)$ и $f_2(x-at)$ имеют в начальный момент $t=0$ носитель (то есть множество точек, где они отличны от нуля) слева от $x=0$. При этом волна $f_1(x+at)$ при $t>0$ побежит влево, и поэтому никак не повлияет на решение справа от нуля. Поэтому мы смело можем считать, что $f_1(s)\equiv 0,\quad s\in\mathbb{R}$.

Вывод: Решение задачи (8.1) для уравнения колебаний на полупрямой представляет собой одну волну, бегущую вправо со скоростью a, вызванную движением края $x=0$:

$$u(x,\,t)=\underbrace{f_2(x-at)}_{\longrightarrow},\qquad x,\,t\geqslant 0.$$

9. № 454

Найти решение задачи для волнового уравнения на полупрямой в случае неоднородного краевого условия второго рода:

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0, & x>0,\ t>0; \\ u(x,\,0)=0, & x\geqslant 0; \\ u_t(x,\,0)=0, & x\geqslant 0; \\ u_x(0,\,t)=\nu(t), & t>0. \end{cases} \tag{9.1}$$

Так как решение задачи (9.1) представляет собой одну волну, бегущую вправо со скоростью a, вызванную движением края $x=0$:

$$u(x,\,t)=\underbrace{f_2(x-at)}_{\longrightarrow},\qquad x,\,t\geqslant 0, \tag{9.2}$$

то нам осталось только найти функцию $f_2(s)$. Выясним, какие требования накладывают на $f_2(s)$ условия задачи (9.1).

1) Уравнение $u_{tt}-a^2u_{xx}=0$ выполняется автоматически для любой $f_2(s)\in C^2(\mathbb{R})$;

2) начальное условие $u(x,\,0)=0,\ \ x\geqslant 0$ требует, чтобы $f_2(s)=0$ при $s>0$;

3) начальное условие $u_t(x,\,0)=0,\ \ x\geqslant 0$ требует, чтобы $f_2'(s)=0$ при $s>0$;

4) краевое условие $u_x(0,\,t)=\nu(t),\ \ t\geqslant 0$ требует, чтобы $f_2'(-at)=\nu(t),\ \ t>0$ или, после замены переменной $s=-at$,

$$f_2'(s)=\nu\left(-\frac{s}{a}\right)\ \text{ при }\ s<0.$$

Заметим, что условие 3) следует из условия 2). Таким образом, поведение функции задаётся условием 2) при $s > 0$ и условием 4) при $s < 0$.
Из условия 4) найдём $f_2(s)$ при $s < 0$:

$$f_2(s) = \int\limits_0^s \nu\left(-\frac{p}{a}\right) dp + \underbrace{f_2(0)}_{=0} = \left[r = -\frac{p}{a}\right] = -a \int\limits_0^{-\frac{s}{a}} \nu(r)\, dr, \qquad s < 0.$$

Подставляя вместо s выражение $(x - at)$ и вспоминая условие 2), получаем:
<u>Ответ:</u>

$$u(x,\, t) = f_2(x - at) = \begin{cases} 0, & x \geqslant at > 0; \\ -a \int\limits_0^{-\frac{x-at}{a}} \nu(r)\, dr, & x < at. \end{cases}$$

10. № 453

Найти решение задачи для волнового уравнения на полупрямой в случае неоднородного краевого условия первого рода:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0,\ t > 0; \\ u(x,\, 0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u_t(x,\, 0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u(0,\, t) = \mu(t), & t > 0. \end{cases} \tag{10.1}$$

Так как решение задачи (10.1) представляет собой одну волну, бегущую вправо со скоростью a, вызванную движением края $x = 0$:

$$u(x,\, t) = \underbrace{f_2(x - at)}_{\longrightarrow}, \qquad x,\, t \geqslant 0, \tag{10.2}$$

то нам осталось только найти функцию $f_2(s)$. Выясним, какие требования накладывают на $f_2(s)$ условия задачи (10.1).

1) Уравнение $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ выполняется автоматически для любой $f_2(s) \in C^2(\mathbb{R})$;

2) начальное условие $u(x,\, 0) = 0,\ \ x \geqslant 0$ требует, чтобы $f_2(s) = 0$ при $s > 0$;

3) начальное условие $u_t(x,\, 0) = 0,\ \ x \geqslant 0$ требует, чтобы $f_2'(s) = 0$ при $s > 0$;

4) краевое условие $u(0,\, t) = \mu(t),\ \ t \geqslant 0$ требует, чтобы $f_2(-at) = \mu(t),\ \ t > 0$ или, после замены переменной $s = -at$,

$$f_2(s) = \mu\left(-\frac{s}{a}\right) \ \text{ при } \ s < 0.$$

Заметим, что условие 3) следует из условия 2). Таким образом, поведение функции задаётся условием 2) при $s > 0$ и условием 4) при $s < 0$.
Подставляя вместо s выражение $(x - at)$, из условий 2) и 4) получаем:
<u>Ответ:</u>

$$u(x,\, t) = f_2(x - at) = \begin{cases} 0, & x \geqslant at > 0; \\ \mu\left(-\frac{x-at}{a}\right), & x < at. \end{cases}$$

11. № 455

Найти решение задачи для волнового уравнения на полупрямой в случае неоднородного краевого условия второго рода:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0,\ t > 0; \\ u(x,\,0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u_t(x,\,0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u_x(0,\,t) - hu(x,\,0) = \varkappa(t), & t > 0. \end{cases} \tag{11.1}$$

Так как решение задачи (11.1) представляет собой одну волну, бегущую вправо со скоростью a, вызванную движением края $x = 0$:

$$u(x,\,t) = \underbrace{f_2(x - at)}_{\longrightarrow}, \qquad x,\,t \geqslant 0, \tag{11.2}$$

то нам осталось только найти функцию $f_2(s)$. Выясним, какие требования накладывают на $f_2(s)$ условия задачи (11.1).

1) Уравнение $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ выполняется автоматически для любой $f_2(s) \in C^2(\mathbb{R})$;

2) начальное условие $u(x,\,0) = 0,\ \ x \geqslant 0$ требует, чтобы $f_2(s) = 0$ при $s > 0$;

3) начальное условие $u_t(x,\,0) = 0,\ \ x \geqslant 0$ требует, чтобы $f_2'(s) = 0$ при $s > 0$;

4) краевое условие $u_x(0,\,t) - hu(x,\,0) = \varkappa(t),\ \ t \geqslant 0$ требует, чтобы $f_2'(-at) - hf_2(-at) = \varkappa(t),\ \ t > 0$ или, после замены переменной $s = -at$,

$$f_2'(s) - hf_2(s) = \varkappa\left(-\frac{s}{a}\right) \ \text{ при } \ s < 0.$$

Заметим, что условие 3) следует из условия 2). Таким образом, поведение функции задаётся условием 2) при $s > 0$ и условием 4) при $s < 0$.
Из условия 4), которое есть линейное ОДУ, найдём $f_2(s)$ при $s < 0$.
Обозначим $\varkappa\left(-\frac{s}{a}\right) = \gamma(s)$. Тогда уравнение для $f_2(s)$ примет вид:

$$f_2'(s) - hf_2(s) = \gamma(s). \tag{11.3}$$

Сначала найдём решение соответствующего однородного уравнения:

$$f_{2o}'(s) - hf_{2o}(s) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{df_{2o}}{f_{2o}} = hds \qquad \Longrightarrow \qquad f_{2o}(s) = ce^{hs}.$$

Далее, в соответствии с методом вариации постоянной, будем искать решение $f_2(s)$ неоднородного уравнения (11.3) в виде

$$f_2(s) = c(s)e^{hs}. \tag{11.4}$$

Подставляем искомый вид решения в (11.3):

$$\underbrace{c'(s)e^{hs} + hc(s)e^{hs}}_{f_2'(s)} - \underbrace{hc(s)e^{hs}}_{hf_2(s)} = \gamma(s) \qquad \Longrightarrow \qquad c'(s) = \gamma(s)e^{-hs} \qquad \Longrightarrow$$

$$c(s) = \int\limits_0^s \gamma(p)e^{-hp}dp + c_1.$$

© Д.С. Ткаченко

Подставим найденную функцию $c(s)$ в (11.4):

$$f_2(s) = e^{hs} \cdot \int\limits_0^s \gamma(p) e^{-hp} dp + c_1 e^{hs}.$$

Учитывая, что в силу условия 2) функция $f_2(s)$ должна в точке $s = 0$ обратиться в ноль, найдём c_1:

$$f_2(0) = e^0 \cdot \int\limits_0^0 \gamma(p) e^{-hp} dp + c_1 e^0 = c_1 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad c_1 = 0.$$

Поэтому, окончательно,

$$f_2(s) = e^{hs} \cdot \int\limits_0^s \gamma(p) e^{-hp} dp, \qquad s < 0. \tag{11.5}$$

Вспомним, что $\gamma(p) = \varkappa\left(-\frac{p}{a}\right)$. Тогда после замены $p = -ar$ получим

$$f_2(s) = -ae^{hs} \cdot \int\limits_0^{-\frac{s}{a}} \varkappa(r) e^{ahr} dr, \qquad s < 0.$$

Подставляя вместо s выражение $(x - at)$ и вспоминая условие 2), находим функцию $u(x,\, t)$:
<u>Ответ:</u>

$$u(x,\, t) = f_2(x - at) = \begin{cases} 0, & x \geqslant at > 0; \\ -ae^{h(x-at)} \cdot \int\limits_0^{-\frac{x-at}{a}} \varkappa(r) e^{ahr} dr, & x < at. \end{cases}$$

12. № 456

Найти решение общей задачи для волнового уравнения на полупрямой с краевым условием первого рода:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,\, t), & x > 0,\ t > 0; \\ u(x,\, 0) = \varphi(x), & x \geqslant 0; \\ u_t(x,\, 0) = \psi(x), & x \geqslant 0; \\ u(0,\, t) = \mu(t), & t > 0. \end{cases} \tag{12.1}$$

Представим решение данной задачи в виде суммы решений двух вспомогательных задач:

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = f(x,\, t), & x,\, t > 0; \\ v(x,\, 0) = \varphi(x), & x \geqslant 0; \\ v_t(x,\, 0) = \psi(x), & x \geqslant 0; \\ v(0,\, t) = 0, & t > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} w_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, & x,\, t > 0; \\ w(x,\, 0) = 0, & x \geqslant 0; \\ w_t(x,\, 0) = 0, & x \geqslant 0; \\ w(0,\, t) = \mu(t), & t > 0. \end{cases} \tag{12.2}$$

В силу линейности этих задач, функция

$$u(x,\, t) \equiv v(x,\, t) + w(x,\, t)$$

является решением исходной задачи (12.1).
С другой стороны, задачи (12.2) мы уже решили, соответственно, в номерах 551 и 553. Воспользуемся их результатами:

$$v(x,\, t) = \frac{\varphi_1(x + at) + \varphi_1(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi_1(s) ds + \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_1(s,\, \tau) ds d\tau,$$

где функции $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ и $f_1(x,\,t)$ есть нечётные по x продолжения функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x,\,t)$ на всю ось $x \in (-\infty,\,+\infty)$.

$$w(x,\,t) = \begin{cases} 0, & x \geqslant at > 0; \\ \mu\left(-\frac{x-at}{a}\right)dr, & x < at. \end{cases}$$

Поэтому для решения $u(x,\,t) \equiv v(x,\,t) + w(x,\,t)$ задачи (12.1) получаем:
Ответ:

$$u(x,\,t) = \frac{\varphi_1(x+at)+\varphi_1(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi_1(s)ds + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_1(s,\,\tau)dsd\tau +$$
$$+\begin{cases} 0, & x \geqslant at > 0; \\ \mu\left(-\frac{x-at}{a}\right)dr, & x < at. \end{cases}$$

где функции $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ и $f_1(x,\,t)$ есть нечётные по x продолжения функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x,\,t)$ на всю ось $x \in (-\infty,\,+\infty)$.

13. № 457

Найти решение общей задачи для волнового уравнения на полупрямой с краевым условием первого рода:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = f(x,\,t), & x > 0,\ t > 0; \\ u(x,\,0) = \varphi(x), & x \geqslant 0; \\ u_t(x,\,0) = \psi(x), & x \geqslant 0; \\ u_x(0,\,t) = \nu(t), & t > 0. \end{cases} \tag{13.1}$$

Представим решение данной задачи в виде суммы решений двух вспомогательных задач:

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2v_{xx} = f(x,\,t), & x,\,t > 0; \\ v(x,\,0) = \varphi(x), & x \geqslant 0; \\ v_t(x,\,0) = \psi(x), & x \geqslant 0; \\ v(0,\,t) = 0, & t > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} w_{tt} - a^2v_{xx} = 0, & x,\,t > 0; \\ w(x,\,0) = 0, & x \geqslant 0; \\ w_t(x,\,0) = 0, & x \geqslant 0; \\ w_x(0,\,t) = \nu(t), & t > 0. \end{cases} \tag{13.2}$$

В силу линейности этих задач, функция

$$u(x,\,t) \equiv v(x,\,t) + w(x,\,t)$$

является решением исходной задачи (13.1).
С другой стороны, задачи (13.2) мы уже решили, соответственно, в номерах 552 и 554. Воспользуемся их результатами:

$$v(x,\,t) = \frac{\varphi_1(x+at)+\varphi_1(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi_1(s)ds + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_1(s,\,\tau)dsd\tau,$$

где функции $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ и $f_1(x,\,t)$ есть чётные по x продолжения функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x,\,t)$ на всю ось $x \in (-\infty,\,+\infty)$.

$$w(x,\,t) = \begin{cases} 0, & x \geqslant at > 0; \\ -a\int\limits_0^{-\frac{x-at}{a}}\nu(r)\,dr, & x < at. \end{cases}$$

Поэтому для решения $u(x,\,t) \equiv v(x,\,t) + w(x,\,t)$ задачи (13.1) получаем:
Ответ:

$$u(x,\,t) = \frac{\varphi_1(x+at)+\varphi_1(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi_1(s)ds + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_1(s,\,\tau)dsd\tau +$$

$$+\begin{cases} 0, & x \geqslant at > 0; \\ -a\int\limits_0^{-\frac{x-at}{a}} \nu\,(r)\,dr, & x < at. \end{cases}$$

где функции $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ и $f_1(x,\,t)$ есть чётные по x продолжения функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x,\,t)$ на всю ось $x \in (-\infty,\,+\infty)$.

Задание на самостоятельную работу:

1) **I.** *Нарисовать профиль полубесконечной струны в моменты времени* $t = 0,\ \frac{1}{4a},\ \frac{1}{2a},\ \frac{9}{4a},\ \frac{3}{a},\ \frac{5}{a}$, *если её колебания описываются задачей:*

а) $\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = 0, & x,\ t > 0; \\ u(x,\,0) = \varphi(x), & x \geqslant 0; \\ u_t(x,\,0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u(0,\,t) = 0, & t \geqslant 0, \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = 0, & x,\ t > 0; \\ u(x,\,0) = \varphi(x), & x \geqslant 0; \\ u_t(x,\,0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u_x(0,\,t) = 0, & t \geqslant 0, \end{cases}$

где функция $\varphi(x)$ *имеет вид, приведённый на рисунке.*

2) **II.** *Нарисовать профиль полубесконечной струны в моменты времени* $t = 0,\ \frac{1}{4a},\ \frac{1}{2a},\ \frac{1}{a},\ \frac{2}{a},\ \frac{4}{a}$, *если её колебания описываются задачей:*

а) $\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = 0, & x,\ t > 0; \\ u(x,\,0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u_t(x,\,0) = \psi(x), & x \geqslant 0; \\ u(0,\,t) = 0, & t \geqslant 0, \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = 0, & x,\ t > 0; \\ u(x,\,0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u_t(x,\,0) = \psi(x), & x \geqslant 0; \\ u_x(0,\,t) = 0, & t \geqslant 0, \end{cases}$

где функция $\psi(x)$ *имеет вид, приведённый на рисунке.*

3) **III.** *Нарисовать профиль полубесконечной струны в моменты времени* $t = 0,\ \frac{1}{4a},\ \frac{1}{2a},\ \frac{9}{4a},\ \frac{3}{a},\ \frac{5}{a}$, *если её колебания описываются задачей:*

а) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x,\ t > 0; \\ u(x,\,0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u_t(x,\,0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u(0,\,t) = \mu(t), & t \geqslant 0, \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x,\ t > 0; \\ u(x,\,0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u_t(x,\,0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u_x(0,\,t) = \nu(t), & t \geqslant 0, \end{cases}$

где функции $\mu(x)$ *и* $\nu(x)$ *имеют вид, приведённый на рисунке.*

4) **IV.** *Решить задачи:*

а) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = Axt, & x,\ t > 0; \\ u(x,\,0) = \sin x, & x \geqslant 0; \\ u_t(x,\,0) = \sin 2x, & x \geqslant 0; \\ u(0,\,t) = 0, & t \geqslant 0. \end{cases}$

б) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & x,\ t > 0; \\ u(x,\,0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u_t(x,\,0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u_x(0,\,t) - hu(0,\ t) = U_0 \sin t, & t \geqslant 0. \end{cases}$

© Д.С. Ткаченко

Уравнение теплопроводности на прямой и полупрямой

№ 582, 586, 588, 574, 581, 583, 585, 587, 584.

1. Формула Пуассона

В n-мерном Евклидовом пространстве $E_n = \{x = (x_1, \ldots, x_n)\}$ рассмотрим задачу Коши для простейшего случая уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t - a^2\Delta u = f(x, t), & x \in E_n, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in E_n. \end{cases} \tag{1.1}$$

Опр. 1.1. Её решение задаётся **формулой Пуассона**:

$$u(x, t) = \frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n} \int\limits_{E_n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}} \cdot \varphi(\xi) d\xi + \int\limits_0^t \int\limits_{E_n} \frac{e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}}}{\left(2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^n} \cdot f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \tag{1.2}$$

где $|x-\xi|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - \xi_k)^2$.

В частном случае, когда $n = 1$, формула Пуассона принимает вид:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \cdot \varphi(\xi) d\xi + \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{\left(2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^n} \cdot f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \tag{1.3}$$

2. № 582

Найти решение задачи для уравнения теплопроводности на полупрямой в случае однородного краевого условия второго рода (условие теплоизолированного конца):

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x > 0, \ t > 0; \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \geqslant 0; \\ u_x(0, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу на прямой:

$$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = 0, & x \in (-\infty, +\infty), \quad t > 0; \\ v(x, 0) = \varphi_1(x), & x \in (-\infty, +\infty), \end{cases} \tag{2.2}$$

где функция $\varphi_1(x)$ построена по функции $\varphi(x)$ её **чётным продолжением** на всю числовую ось:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{при} \quad x \geqslant 0; \\ \varphi(-x), & \text{при} \quad x < 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

Рассмотрим, каким условиям удовлетворяет $v(x, t)$ на промежутке $x \in (0, +\infty)$. Так как v – решение (2.2), то:

1) из первого равенства (2.2) следует, что

$$v_t - a^2 v_{xx} = 0, \qquad x \in (0, +\infty), \quad t > 0;$$

2) из второго равенства (2.2) следует, что

$$v(x,\,0) = \varphi_1(x) \equiv \varphi(x), \qquad x \in (0,\,+\infty),\;\; t > 0.$$

Убедимся, что для решения $v(x,\,t)$ вспомогательной задачи (2.2) справедливо соотношение

$$v_x(0,\,t) = 0, \qquad t > 0.$$

Для этого воспользуемся формулой Пуассона для случая $f \equiv 0$:

$$v(x,\,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \cdot \varphi_1(\xi)d\xi = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{0}^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}} \right) \cdot \varphi(\xi)d\xi.$$

Тогда

$$v_x(x,\,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{0}^{+\infty} \left[\left(-\frac{2(x-\xi)}{4a^2t} \right) \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} + \left(-\frac{2(x+\xi)}{4a^2t} \right) \cdot e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}} \right] \cdot \varphi_1(\xi)d\xi,$$

откуда для $v_x(0,\,t)$ получаем:

$$v_x(0,\,t) = \frac{1}{4a^3t\sqrt{\pi t}} \int\limits_{0}^{+\infty} \underbrace{\left(\xi e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}} - \xi e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}} \right)}_{=0} \cdot \varphi(\xi)d\xi = 0.$$

Таким образом, найденная функция $v(x,\,t)$ удовлетворяет, помимо условий $v_t - a^2v_{xx} = 0$ и $v(x,\,0) = \varphi(x)$, краевому условию

$$v_x(0,\,t) = 0, \qquad t > 0.$$

Поэтому оказывается, что **решение $v(x,\,t)$ вспомогательной задачи (2.2) является также решением задачи (2.1) на полупрямой**[1]:

$$u(x,\,t) \equiv v(x,\,t), \qquad x \geqslant 0,\;\; t \geqslant 0.$$

<u>Ответ:</u>

$$u(x,\,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{0}^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}} \right) \cdot \varphi(\xi)d\xi.$$

3. № 586

Найти решение задачи для уравнения теплопроводности на полупрямой в случае однородного краевого условия второго рода:

$$\begin{cases} u_t - a^2u_{xx} = f(x,\,t), & x > 0,\; t > 0; \\ u(x,\,0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u_x(0,\,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу на прямой:

$$\begin{cases} v_t - a^2v_{xx} = f_1(x,\,t), & x \in (-\infty,\,+\infty),\;\; t > 0; \\ v(x,\,0) = 0, & x \in (-\infty,\,+\infty), \end{cases} \tag{3.2}$$

[1] То, что другого решения у задачи (2.1) нет, следует из соответствующей теоремы единственности.

где функция $f_1(x,\,t)$ построена по функции $f(x,\,t)$ её **чётным продолжением** на всю числовую ось:

$$f_1(x,\,t) = \begin{cases} f(x,\,t), & \text{при} \quad x \geqslant 0; \\ f(-x,\,t), & \text{при} \quad x < 0, \end{cases} \tag{3.3}$$

Рассмотрим, каким условиям удовлетворяет $v(x,\,t)$ на промежутке $x \in (0,\,+\infty)$. Так как v – решение (3.2), то:

1) из первого равенства (3.2) следует, что

$$v_t - a^2 v_{xx} = f_1(x\,t) \equiv f(x,\,t), \qquad x \in (0,\,+\infty), \;\; t > 0;$$

2) из второго равенства (3.2) следует, что

$$v(x,\,0) = 0, \qquad x \in (0,\,+\infty), \;\; t > 0.$$

Убедимся, что для решения $v(x,\,t)$ вспомогательной задачи (3.2) справедливо соотношение

$$v_x(0,\,t) = 0, \qquad t > 0.$$

Для этого воспользуемся формулой Пуассона для случая $\varphi(x) \equiv 0$:

$$v(x,\,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot f(\xi,\,\tau)d\xi d\tau = \int\limits_0^t \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot f(\xi,\,\tau)d\xi d\tau. \tag{3.4}$$

Тогда

$$v_x(x,\,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^{+\infty} \frac{-2}{4a^2(t-\tau)} \cdot \frac{(x-\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} + (x+\xi)e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot f(\xi,\,\tau)d\xi d\tau,$$

откуда для $v_x(0,\,t)$ получаем:

$$v_x(0,\,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^{+\infty} \frac{-2}{4a^2(t-\tau)} \cdot \frac{\overbrace{-\xi e^{-\frac{\xi^2}{4a^2(t-\tau)}} + \xi e^{-\frac{\xi^2}{4a^2(t-\tau)}}}^{=0}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot f(\xi,\,\tau)d\xi d\tau = 0.$$

Таким образом, найденная функция $v(x,\,t)$ удовлетворяет, помимо условий $v_t - a^2 v_{xx} = f_1(x,\,t)$ и $v(x,\,0) = 0$, ещё и краевому условию

$$v_x(0,\,t) = 0, \qquad t > 0.$$

Поэтому оказывается, что **решение $v(x,\,t)$ вспомогательной задачи (3.2) является также решением задачи (3.1) на полупрямой**[2]:

Ответ:

$$u(x,\,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot f(\xi,\,\tau)d\xi d\tau.$$

[2] То, что другого решения у задачи (3.1) нет, следует из соответствующей теоремы единственности.

4. № 588

Найти решение задачи для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} + hu = f(x,\,t), & x > 0,\ t > 0; \\ u(x,\,0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u_x(0,\,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

<u>Шаг 1.</u> Избавление от младшего слагаемого
Чтобы избавиться от слагаемого hu, которое отличает данную задачу от уже решённой в № 586, сделаем **замену**:

$$w(x,\,t) = u(x,\,t)\cdot e^{ht} \qquad \Longrightarrow \qquad w_t = (u_t + hu)\cdot e^{ht}. \tag{4.2}$$

Умножим уравнение $u_t - a^2 u_{xx} + hu = f(x,\,t)$ на e^{ht} и получим для новой функции w

$$w_t - a^2 w_{xx} = f(x,\,t)\cdot e^{ht}.$$

Таким образом, введённая функция $w(x,\,t)$ является решением задачи:

$$\begin{cases} w_t - a^2 w_{xx} = f_1(x,\,t) \equiv f(x,\,t)\cdot e^{ht}, & x > 0,\ t > 0; \\ w(x,\,0) = 0, & x \geqslant 0; \\ w_x(0,\,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

<u>Шаг 2.</u> Решение полученной задачи
Решение этой задачи мы получили в № 586. Воспользуемся результатом:

$$w(x,\,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot \underbrace{f_1(\xi,\,\tau)}_{f(\xi,\,\tau)\cdot e^{h\tau}} d\xi d\tau.$$

Возвращаясь к функции $u(x,\,t) = w(x,\,t)\cdot e^{-ht}$, получаем:
<u>Ответ:</u>

$$u(x,\,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot f(\xi,\,\tau)\cdot e^{-h(t-\tau)} d\xi d\tau.$$

5. № 574^M

Показать, что функция

$$u(x,\,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \cdot \varphi(\xi) d\xi, \tag{5.1}$$

где $\varphi(x)$ – непрерывная ограниченная на $\mathbb{R}$ функция, является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0; \\ u(x,\,0) = \varphi(x), & x \geqslant 0. \end{cases} \tag{5.2}$$

<u>Шаг 1.</u> Формальное дифференцирование (5.1)
Найдём формально (то есть не задумываясь над правомощностью этих действий) производные от функции $u(x,\,t)$, входящие в уравнение (5.1).

$$u_t = -\frac{1}{4a\sqrt{\pi}\,t^{\frac{3}{2}}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \cdot \varphi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t^2} \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \cdot \varphi(\xi) d\xi;$$

далее, так как

$$\frac{d}{dx}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} = -\,\frac{2(x-\xi)}{4a^2t}\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}, \qquad \frac{d^2}{dx^2}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} = \left(-\,\frac{1}{2a^2t} + \frac{(x-\xi)^2}{4a^4t^2}\right)\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}},$$

то для u_{xx} получаем выражение

$$u_{xx} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-\,\frac{1}{2a^2t} + \frac{(x-\xi)^2}{4a^4t^2}\right)\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\cdot\varphi(\xi)d\xi.$$

<u>Шаг 2.</u> Подстановка формальных производных в уравнение теплопроводности

Подставив найденные формальные производные u_t и u_{xx} в уравнение $u_t - a^2u_{xx} = 0$, видим, что окрашенные одинаково слагаемые друг друга сокращают, и уравнение превращается в верное тождество:

$$u_t - a^2u_{xx} = -\,\frac{1}{4a\sqrt{\pi}\,t^{\frac{3}{2}}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\cdot\varphi(\xi)d\xi + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t^2}\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\cdot\varphi(\xi)d\xi -$$

$$-\,a^2\cdot\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-\,\frac{1}{2a^2t} + \frac{(x-\xi)^2}{4a^4t^2}\right)\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\cdot\varphi(\xi)d\xi \equiv 0.$$

<u>Шаг 3.</u> Формальная подстановка решения в начальное условие

Функция $u(x,\,t)$, заданная формулой (5.1), не определена при $t = 0$. Однако, её можно доопределить в начальный момент времени по непрерывности, то есть считать её равной в момент $t = 0$ её пределу при $t \to 0+0$:

$$u(0,\,t) = \lim_{t\to 0+0} u(x,\,t) = \lim_{t\to 0+0}\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\cdot\varphi(\xi)d\xi =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\lim_{t\to 0+0}\left(\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}}\right)\cdot\varphi(\xi)d\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} 0\cdot\varphi(\xi)d\xi = 0.$$

Таким образом, мы убедились, что формула (5.1) действительно задаёт решение задачи (5.2), если все формальные действия Шагов 1 и 3 являются правомощными.

<u>Шаг 4.</u> Обоснование правомощности формальных действий

Поскольку все интегралы, участвующие в наших формальных операциях, являются равномерно по параметрам x и t сходящимися в любом замкнутом прямоугольнике $(x,\,t) \in [x_1,\,x_2]\times[0,\,T]$[3], их можно в этом прямоугольнике дифференцировать по параметру и переходить к пределу по параметру.

А равномерная сходимость этих интегралов легко показать по признаку Вейерштрасса, например,

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\cdot\varphi(\xi)d\xi$$

в силу ограниченности $|\varphi(\xi)| \leqslant M$, можно мажорировать интегралом

$$\frac{M}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi,$$

[3]Предполагается, что эти интегралы доопределены при $t = 0$ нулём.

сходимость которого легко проверить:

$$\frac{M}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi = \left[\begin{array}{c} y=\frac{\xi-x}{2a\sqrt{t}}, \\ \\ dy=\frac{d\xi}{2a\sqrt{t}} \end{array}\right] = \frac{M}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy =$$

$$= \Big[\text{как интеграл Эйлера – Пуассона}\Big] = \frac{M}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{M}{2}.$$

Итак, все проделанные на шагах 1–3 формальные действия мы действительно имели право делать.

6. № 581

Найти решение задачи для уравнения теплопроводности на полупрямой в случае однородного краевого условия первого рода:

$$\begin{cases} u_t - a^2u_{xx} = 0, & x>0,\ t>0; \\ u(x,\,0)=\varphi(x), & x\geqslant 0; \\ u(0,\,t)=0, & t>0. \end{cases} \tag{6.1}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу на прямой:

$$\begin{cases} v_t - a^2v_{xx} = 0, & x\in(-\infty,\,+\infty),\ \ t>0; \\ v(x,\,0)=\varphi_1(x), & x\in(-\infty,\,+\infty), \end{cases} \tag{6.2}$$

где функция $\varphi_1(x)$ построена по функции $\varphi(x)$ её **нечётным продолжением** на всю числовую ось:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{при}\quad x\geqslant 0; \\ -\varphi(-x), & \text{при}\quad x<0, \end{cases} \tag{6.3}$$

Рассмотрим, каким условиям удовлетворяет $v(x,\,t)$ на промежутке $x\in(0,\,+\infty)$. Так как v – решение (6.2), то:

1) из первого равенства (6.2) следует, что

$$v_t - a^2v_{xx} = 0, \qquad x\in(0,\,+\infty),\ \ t>0;$$

2) из второго равенства (6.2) следует, что

$$v(x,\,0)=\varphi_1(x)\equiv\varphi(x), \qquad x\in(0,\,+\infty),\ \ t>0.$$

Убедимся, что для решения $v(x,\,t)$ вспомогательной задачи (6.2) справедливо соотношение

$$v(0,\,t)=0, \qquad t>0.$$

Для этого воспользуемся формулой Пуассона для случая $f\equiv 0$:

$$v(x,\,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\cdot\varphi_1(\xi)d\xi = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{0}^{+\infty}\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right)\cdot\varphi(\xi)d\xi.$$

Тогда для $v(0,\,t)$ получаем:

$$v(0,\,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{0}^{+\infty}\underbrace{\left(e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}}\right)}_{=0}\cdot\varphi(\xi)d\xi.$$

Таким образом, найденная функция $v(x,\,t)$ удовлетворяет, помимо условий $v_t - a^2 v_{xx} = 0$ и $v(x,\,0) = \varphi(x)$, краевому условию

$$v(0,\,t) = 0, \qquad t > 0.$$

Поэтому оказывается, что **решение** $v(x,\,t)$ **вспомогательной задачи** (6.2) **является также решением задачи** (6.1) **на полупрямой**[4]:

$$u(x,\,t) \equiv v(x,\,t), \qquad x \geqslant 0, \;\; t \geqslant 0.$$

<u>Ответ:</u>

$$u(x,\,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right) \cdot \varphi(\xi) d\xi.$$

7. № 583

Найти решение задачи для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} + hu = 0, & x > 0, \; t > 0; \\ u(x,\,0) = \varphi(x), & x \geqslant 0; \\ u(0,\,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{7.1}$$

<u>Шаг 1.</u> Избавление от младшего слагаемого
Чтобы избавиться от слагаемого hu, которое отличает данную задачу от уже решённой в № 581, сделаем **замену**:

$$w(x,\,t) = u(x,\,t) \cdot e^{ht} \qquad \Longrightarrow \qquad w_t = (u_t + hu) \cdot e^{ht}. \tag{7.2}$$

Умножим уравнение $u_t - a^2 u_{xx} + hu = 0$ на e^{ht} и получим для новой функции w

$$w_t - a^2 w_{xx} = 0.$$

Таким образом, введённая функция $w(x,\,t)$ является решением задачи:

$$\begin{cases} w_t - a^2 w_{xx} = 0, & x > 0, \; t > 0; \\ w(x,\,0) = \varphi_1(x) \equiv \varphi(x) \cdot e^{h \cdot 0}, & x \geqslant 0; \\ w(0,\,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{7.3}$$

<u>Шаг 2.</u> Решение полученной задачи
Решение этой задачи мы получили в № 581. Воспользуемся результатом:

$$w(x,\,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right) \cdot \underbrace{\varphi_1(\xi)}_{=\varphi(\xi)} d\xi.$$

Возвращаясь к функции $u(x,\,t) = w(x,\,t) \cdot e^{-ht}$, получаем:
<u>Ответ:</u>

$$u(x,\,t) = \frac{e^{-ht}}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right) \cdot \varphi(\xi) d\xi.$$

[4] То, что другого решения у задачи (6.1) нет, следует из соответствующей теоремы единственности.

8. № 585

Найти решение задачи для уравнения теплопроводности :

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f(x,\, t), & x > 0,\ t > 0; \\ u(x,\, 0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u(0,\, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{8.1}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу на прямой:

$$\begin{cases} v_t - a^2 v_{xx} = f_1(x,\, t), & x \in (-\infty,\, +\infty),\ \ t > 0; \\ v(x,\, 0) = 0, & x \in (-\infty,\, +\infty), \end{cases} \tag{8.2}$$

где функция $f_1(x,\, t)$ построена по функции $f(x,\, t)$ её **нечётным продолжением** на всю числовую ось:

$$f_1(x,\, t) = \begin{cases} f(x,\, t), & \text{при} \quad x \geqslant 0; \\ -f(-x,\, t), & \text{при} \quad x < 0, \end{cases} \tag{8.3}$$

Рассмотрим, каким условиям удовлетворяет $v(x,\, t)$ на промежутке $x \in (0,\, +\infty)$. Так как v – решение (8.2), то:

1) из первого равенства (8.2) следует, что

$$v_t - a^2 v_{xx} = f_1(x\, t) \equiv f(x,\, t), \qquad x \in (0,\, +\infty),\ \ t > 0;$$

2) из второго равенства (8.2) следует, что

$$v(x,\, 0) = 0, \qquad x \in (0,\, +\infty),\ \ t > 0.$$

Убедимся, что для решения $v(x,\, t)$ вспомогательной задачи (8.2) справедливо соотношение

$$v(0,\, t) = 0, \qquad t > 0.$$

Для этого воспользуемся формулой Пуассона для случая $\varphi(x) \equiv 0$:

$$v(x,\, t) = \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot f(\xi,\, \tau) d\xi d\tau = \int\limits_0^t \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot f(\xi,\, \tau) d\xi d\tau. \tag{8.4}$$

Тогда для $v(0,\, t)$ получаем:

$$v(0,\, t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^{+\infty} \frac{\overbrace{e^{-\frac{\xi^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{\xi^2}{4a^2(t-\tau)}}}^{=0}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot f(\xi,\, \tau) d\xi d\tau = 0.$$

Таким образом, найденная функция $v(x,\, t)$ удовлетворяет, помимо условий $v_t - a^2 v_{xx} = f_1(x,\, t)$ и $v(x,\, 0) = 0$, ещё и краевому условию

$$v(0,\, t) = 0, \qquad t > 0.$$

Поэтому оказывается, что **решение $v(x,\, t)$ вспомогательной задачи (8.2) является также решением задачи (8.1) на полупрямой**[5]:

Ответ:

$$u(x,\, t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot f(\xi,\, \tau) d\xi d\tau.$$

[5] То, что другого решения у задачи (8.1) нет, следует из соответствующей теоремы единственности.

9. № 587

Найти решение задачи для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} + hu = f(x,\, t), & x > 0,\ t > 0; \\ u(x,\, 0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u(0,\, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{9.1}$$

<u>Шаг 1.</u> Избавление от младшего слагаемого
Чтобы избавиться от слагаемого hu, которое отличает данную задачу от уже решённой в № 585, сделаем **замену**:

$$w(x,\, t) = u(x,\, t) \cdot e^{ht} \qquad \Longrightarrow \qquad w_t = (u_t + hu) \cdot e^{ht}. \tag{9.2}$$

Умножим уравнение $u_t - a^2 u_{xx} + hu = f(x,\, t)$ на e^{ht} и получим для новой функции w

$$w_t - a^2 w_{xx} = f(x,\, t) \cdot e^{ht}.$$

Таким образом, введённая функция $w(x,\, t)$ является решением задачи:

$$\begin{cases} w_t - a^2 w_{xx} = f_1(x,\, t) \equiv f(x,\, t) \cdot e^{ht}, & x > 0,\ t > 0; \\ w(x,\, 0) = 0, & x \geqslant 0; \\ w(0,\, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{9.3}$$

<u>Шаг 2.</u> Решение полученной задачи
Решение этой задачи мы получили в № 585. Воспользуемся результатом:

$$w(x,\, t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot \underbrace{f_1(\xi,\, \tau)}_{f(\xi,\,\tau)\cdot e^{h\tau}} d\xi d\tau.$$

Возвращаясь к функции $u(x,\, t) = w(x,\, t) \cdot e^{-ht}$, получаем:
<u>Ответ:</u>

$$u(x,\, t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot f(\xi,\, \tau) \cdot e^{-h(t-\tau)} d\xi d\tau.$$

10. № 584

Найти решение задачи для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} + hu = 0, & x > 0,\ t > 0; \\ u(x,\, 0) = \varphi(x), & x \geqslant 0; \\ u_x(0,\, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{10.1}$$

<u>Шаг 1.</u> Избавление от младшего слагаемого
Чтобы избавиться от слагаемого hu, которое отличает данную задачу от уже решённой в № 581, сделаем **замену**:

$$w(x,\, t) = u(x,\, t) \cdot e^{ht} \qquad \Longrightarrow \qquad w_t = (u_t + hu) \cdot e^{ht}. \tag{10.2}$$

Умножим уравнение $u_t - a^2 u_{xx} + hu = 0$ на e^{ht} и получим для новой функции w

$$w_t - a^2 w_{xx} = 0.$$

Таким образом, введённая функция $w(x,\,t)$ является решением задачи:

$$\begin{cases} w_t - a^2 w_{xx} = 0, & x > 0,\ t > 0; \\ w(x,\,0) = \varphi_1(x) \equiv \varphi(x) \cdot e^{h\cdot 0}, & x \geqslant 0; \\ w_x(0,\,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{10.3}$$

<u>Шаг 2.</u> Решение полученной задачи
Решение этой задачи мы получили в № 582. Воспользуемся результатом:

$$w(x,\,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right) \cdot \underbrace{\varphi_1(\xi)}_{=\varphi(\xi)} d\xi.$$

Возвращаясь к функции $u(x,\,t) = w(x,\,t) \cdot e^{-ht}$, получаем:
<u>Ответ:</u>

$$u(x,\,t) = \frac{e^{-ht}}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right) \cdot \varphi(\xi) d\xi.$$

Задание на самостоятельную работу:

1) **I.** *Вычислить точное значение решения задачи*

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x,\ t > 0; \\ u(x,\,0) = \sin 4x, & x \geqslant 0; \\ u_t(x,\,0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u(0,\,t) = \sin 9t, & t \geqslant 0 \end{cases}$$

в точке $x = \frac{3\pi}{4}$ *в момент времени* $t = \frac{2\pi}{3}$.

2) **II.** *Вычислить точное значение решения задачи*

а) $\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = e^{-x^2}, & x,\ t > 0; \\ u(x,\,0) = 0, & x \geqslant 0; \\ u_x(0,\,t) = 0, & t \geqslant 0. \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0, & x,\ t > 0; \\ u(x,\,0) = \cos \pi x, & x \geqslant 0; \\ u_x(0,\,t) = 0, & t \geqslant 0. \end{cases}$

в точке $x = 0$ *в момент времени* $t = 1$.

© Д.С. Ткаченко

Задачи Штурма-Лиувилля в простейшем случае

1. I рода слева – I рода справа.

Решить задачу Штурма-Лиувилля с краевыми условиями I-го рода:

$$\begin{cases} \mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0, \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}(l) = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Общее решение уравнения $\mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0$ имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) \qquad \text{при } \lambda > 0;$$
$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x} \qquad \text{при } \lambda < 0;$$
$$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0;$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x)$. Поэтому из второго краевого условия $X(l) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda}\, l = \pi n$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

  $$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

  Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

  $$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

- При $\lambda < 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = -c_1$, $\Rightarrow$ $X(x) = 2c_1 \operatorname{sh} \sqrt{-\lambda}\, x$. Поэтому из второго краевого условия $X(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет отрицательных собственных чисел.

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_1 x$. Поэтому из второго краевого условия $X(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет собственного числа, равного нулю.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.2}$$

задачи (1.1).

2. II рода слева – II рода справа.

Решить задачу Штурма-Лиувилля с краевыми условиями II-го рода:

$$\begin{cases} \mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0, \\ \mathbf{X}'(0) = \mathbf{X}'(l) = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Общее решение уравнения $\mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0$ имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) \qquad \text{при } \lambda > 0;$$
$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x} \qquad \text{при } \lambda < 0;$$
$$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0;$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $X'(0) = 0$, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, x)$ $\Rightarrow$ $X'(x) = -c_2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\, x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda}\, l = \pi k$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:
$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \qquad n \in \mathbb{N}.$$
Им соответствует бесконечное множество собственных функций:
$$X_n(x) = \frac{2}{l}\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$
(множитель $\frac{2}{l}$ появляется, чтобы система этих функций превратилась из ортогональной в ортонормированную)

- При $\lambda < 0$ имеем из краевого условия $X'(0) = 0$, что $c_1 = c_2$, $\Rightarrow$ $X(x) = 2c_1 \operatorname{ch}\sqrt{-\lambda}\, x$ $\Rightarrow$ $X'(x) = 2c_1\sqrt{-\lambda}\operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda}\, x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет отрицательных собственных чисел.

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $X'(0) = 0$, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_2$. Второе краевое условие $X'(l) = 0$ выполнено, поэтому задача Штурма–Лиувилля (**??**)–(**??**) имеет собственное число, равное нулю: $\lambda_0 = 0$. Ему соответствует собственная функциця $X_0(x) \equiv \frac{1}{l}$.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений
$$\lambda_0 = 0, \quad X_0(x) \equiv 1; \quad \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.2}$$
задачи (2.1).

3. I рода слева – II рода справа.

Решить задачу Штурма-Лиувилля с краевым условием I-го рода на левом конце отрезка $[0, l]$ и II-го рода – на правом:
$$\begin{cases} \mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0, \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}'(l) = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$
Общее решение уравнения $\mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0$ имеет вид
$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) \qquad \text{при } \lambda > 0;$$
$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x} \qquad \text{при } \lambda < 0;$$
$$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0;$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x)$ $\Rightarrow$ $X'(x) = c_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\, x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda}\, l = \pi k - \frac{\pi}{2}$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:
$$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2, \qquad n \in \mathbb{N}.$$
Им соответствует бесконечное множество собственных функций:
$$X_n(x) = \cos\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

- При $\lambda < 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_1 = -c_2$, $\Rightarrow$ $X(x) = 2c_1 \operatorname{sh}\sqrt{-\lambda}\,x$ $\Rightarrow$ $X'(x) = 2c_1\sqrt{-\lambda}\operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda}\,x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет отрицательных собственных чисел.

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_1 x$. Второе краевое условие $X'(l) = 0$ означает тогда, что $c_1 = 0$, поэтому задача Штурма–Лиувилля (3.1) не имеет собственного числа, равного нулю.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right), \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.2}$$

задачи (3.1).

4. II рода слева – I рода справа.

Решить задачу Штурма-Лиувилля с краевым условием II-го рода на левом конце отрезка $[0,\, l]$ и I-го рода – на правом:

$$\begin{cases} \mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0, \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}'(l) = 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Общее решение уравнения $\mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0$ имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\,x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\,x) \qquad \text{при } \lambda > 0;$$
$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,x} \qquad \text{при } \lambda < 0;$$
$$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0;$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}'(0) = 0$, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(x) = c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\,x)$. Поэтому из второго краевого условия $X(p) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda}\,p = \pi\left(-\frac{1}{2} + k\right)$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi(2k-1)}{2p}\right)^2, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{4.2}$$

  Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$\mathbf{X}_k(x) = \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2p}x\right), \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{4.3}$$

- При $\lambda < 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}'(0) = 0$, что $c_1 = c_2$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(x) = 2c_1 \operatorname{ch}\sqrt{-\lambda}\,x$. Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}(p) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет нетривиальных решений при $\lambda < 0$.

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}'(0) = 0$, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(x) = c_2$. Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}(p) = 0$ получаем, что $c_2 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет нетривиальных решений при $\lambda = 0$.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi(2k-1)}{2p}\right)^2, \quad \mathbf{X}_k(x) = \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2p}x\right), \quad k \in \mathbb{N} \tag{4.4}$$

задачи (4.1).

5. I рода слева – III рода справа.

Решить задачу Штурма-Лиувилля с краевым условием I-го рода на левом конце отрезка $[0,\, l]$ и III-го рода – на правом:

$$\begin{cases} \mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0, \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}'(l) + hX(l) = 0, \qquad h > 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Общее решение уравнения $\mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0$ имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) \qquad \text{при } \lambda > 0;$$
$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x} \qquad \text{при } \lambda < 0;$$
$$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0;$$

- При $\lambda > 0$ из краевого условия $X(0) = 0$ следует, что

  $$c_2 = 0, \;\; \Rightarrow \;\; X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x) \;\; \Rightarrow \;\; X'(x) = c_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\, x).$$

  Поэтому из второго краевого условия $X'(l) + hX(l) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda}\, \cos(\sqrt{\lambda}\, l) + h \sin(\sqrt{\lambda}\, l) = 0$, откуда (очевидно, косинус не может быть равен нулю, т.к. тогда синус равнялся бы (± 1), и равенство не было бы выполнено)

  $$\sqrt{\lambda} = -h \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda}\, l)$$

  Это уравнение, как легко увидеть из графика, имеет бесконечно много решений λ_n, $n \in \mathbb{N}$. Сами эти решения явным образом выписать нельзя, но любое может быть найдено со сколь угодно большой точностью численно. Мы их искать не будем, удовлетворившись знанием, что они есть, и их можно найти.
  Таким образом, существует бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

  $$\lambda_n > 0 \quad - \quad \text{решения уравнения} \qquad \sqrt{\lambda} = -h \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda}\, l), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

  Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

  $$X_n(x) = \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, x\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

- При $\lambda < 0$ задача Штурма–Лиувилля никогда не имеет нетривиальных решений.

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0, \;\; \Rightarrow \;\; X(x) = c_1 x \;\; \Rightarrow \;\; X'(x) = c_1$), и второе краевое условие $X'(l) + hX(l) = 0$ даёт требование $c_1 + c_1 l = 0$, откуда $c_1 = 0$, и у данной задачи нет нетривиальных решений при $\lambda = 0$.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n > 0 \quad - \quad \text{решения уравнения } \sqrt{\lambda} = -h \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda}\, l), \qquad X_n(x) = \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, x\right), \quad n \in \mathbb{N} \tag{5.2}$$

задачи (5.1).

6. II рода слева – III рода справа.

Решить задачу Штурма-Лиувилля с краевым условием II-го рода на левом конце отрезка $[0,\, l]$ и III-го рода – на правом:

$$\begin{cases} \mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0, \\ \mathbf{X}'(0) = \mathbf{X}'(l) + hX(l) = 0, \qquad h > 0. \end{cases} \tag{6.1}$$

Общее решение уравнения $\mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0$ имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) \qquad \text{при } \lambda > 0;$$
$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x} \qquad \text{при } \lambda < 0;$$
$$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0;$$

- При $\lambda > 0$ имеем
$$X'(x) = c_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\, x) - c_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}\, x)$$
И из краевого условия $X'(0) = 0$ следует, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, x)$ $\Rightarrow$ $X'(x) = -c_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}\, x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) + hX(l) = 0$ получаем, что $-\sqrt{\lambda}\, \sin(\sqrt{\lambda}\, l) + h \cos(\sqrt{\lambda}\, l) = 0$, откуда (очевидно, косинус не может быть равен нулю, т.к. тогда синус равнялся бы (± 1), и равенство не было бы выполнено)
$$\sqrt{\lambda}\ \mathrm{tg}(\sqrt{\lambda}\, l) = h$$
Это уравнение, как легко увидеть из графика, имеет бесконечно много решений λ_n, $n \in \mathbb{N}$. Сами эти решения явным образом выписать нельзя, но любое может быть найдено со сколь угодно большой точностью численно. Мы их искать не будем, удовлетворившись знанием, что они есть, и их можно найти.
Таким образом, существует бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:
$$\lambda_n > 0 \quad - \quad \text{решения уравнения} \qquad \sqrt{\lambda_n}\ \mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_n}\, l) = h, \qquad n \in \mathbb{N}.$$
Им соответствует бесконечное множество собственных функций:
$$X_n(x) = \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, x\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

- При $\lambda < 0$ задача Штурма–Лиувилля никогда не имеет нетривиальных решений.

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $X'(0) = 0$, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_2$ $\Rightarrow$ $X'(x) = 0$), и второе краевое условие $X'(l) + hX(l) = 0$ даёт требование $c_2 = 0$, т.е. данная задача Штурма–Лиувилля при $\lambda = 0$ также не имеет нетривиальных решений.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n > 0 \quad - \quad \text{решения уравнения} \ \sqrt{\lambda_n}\ \mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_n}\, l) = h, \qquad X_n(x) = \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, x\right), \quad n \in \mathbb{N} \tag{6.2}$$

задачи (6.1).

7. III рода слева – I рода справа.

Решить задачу Штурма-Лиувилля с краевым условием III-го рода на левом конце отрезка $[0,\, l]$ и I-го рода – на правом:

$$\begin{cases} \mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0, \\ \mathbf{X}'(0) - hX(0) = X(l) = 0, \qquad h > 0. \end{cases} \tag{7.1}$$

Общее решение уравнения $\mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0$ имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) \qquad \text{при } \lambda > 0;$$
$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x} \qquad \text{при } \lambda < 0;$$
$$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0;$$

- При $\lambda > 0$ имеем
$$X'(x) = c_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\, x) - c_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}\, x)$$
И из краевого условия $\mathbf{X}'(0) + hX(0) = 0$ следует, что
$$\sqrt{\lambda}\, c_1 - h\, c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\lambda} = h \frac{c_2}{c_1}.$$
С другой стороны, из второго краевого условия $X(l) = 0$ получаем, что
$$c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, l) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, l) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{c_2}{c_1} = -\operatorname{tg}(\sqrt{\lambda}\, l).$$
Из двух последних равенств, наконец, получаем:
$$\sqrt{\lambda} = -h \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda}\, l), \qquad \sqrt{\lambda} c_1 - h c_2 = 0.$$
Уравнение $\sqrt{\lambda} = -h \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda}\, l)$, как легко увидеть из графика, имеет бесконечно много решений λ_n, $n \in \mathbb{N}$. Сами эти решения явным образом выписать нельзя, но любое может быть найдено со сколь угодно большой точностью численно. Мы их искать не будем, удовлетворившись знанием, что они есть, и их можно найти.
Таким образом, существует бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:
$$\lambda_n > 0 \quad - \quad \text{решения уравнения} \qquad \sqrt{\lambda} = -h \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda}\, l), \qquad n \in \mathbb{N}.$$
Им соответствует бесконечное множество собственных функций:
$$X_n(x) = h \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, x\right) + \sqrt{\lambda} \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, x\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

- При $\lambda < 0$ задача Штурма–Лиувилля никогда не имеет нетривиальных решений.

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}'(0) - hX(0) = 0$, что $c_1 - hc_2 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_2(hx + 1)$, и второе краевое условие $X(l) = 0$ даёт требование $c_2(hl + 1) = 0$. Отсюда $c_2 = c_1 = 0$ (поскольку $hl > 0$ по условию задачи), и у данной задачи нетривиальных решений, соответствующих $\lambda = 0$ нет.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\begin{cases} \lambda_n > 0 \quad - \quad \text{решения уравнения } \sqrt{\lambda} = -h \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda}\, l), \\ X_n(x) = h \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, x\right) + \sqrt{\lambda} \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, x\right), \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{7.2}$$

задачи (7.1).

8. III рода слева – II рода справа.

Решить задачу Штурма-Лиувилля с краевым условием III-го рода на левом конце отрезка $[0,\, l]$ и II-го рода – на правом:

$$\begin{cases} \mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0, \\ \mathbf{X}'(0) - h\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}'(l) = 0, \qquad h > 0. \end{cases} \tag{8.1}$$

Общее решение уравнения $\mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0$ имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) \qquad \text{при } \lambda > 0;$$
$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x} \qquad \text{при } \lambda < 0;$$
$$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0;$$

- При $\lambda > 0$ имеем
$$X'(x) = c_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\, x) - c_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}\, x)$$
И из краевого условия $\mathbf{X}'(0) + hX(0) = 0$ следует, что
$$\sqrt{\lambda}\, c_1 - h\, c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\lambda} = h \frac{c_2}{c_1}.$$
С другой стороны, из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что
$$c_1 \cos(\sqrt{\lambda}\, l) - c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\, l) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{c_2}{c_1} = \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda}\, l).$$
Из двух последних равенств, наконец, получаем:
$$\sqrt{\lambda} = h \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda}\, l), \qquad \sqrt{\lambda} c_1 = h c_2.$$
Уравнение $\sqrt{\lambda} = h \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda}\, l)$, как легко увидеть из графика, имеет бесконечно много решений λ_n, $n \in \mathbb{N}$. Сами эти решения явным образом выписать нельзя, но любое может быть найдено со сколь угодно большой точностью численно. Мы их искать не будем, удовлетворившись знанием, что они есть, и их можно найти.
Таким образом, существует бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:
$$\lambda_n > 0 \quad - \quad \text{решения уравнения} \qquad \sqrt{\lambda} = h \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda}\, l), \qquad n \in \mathbb{N}.$$
Им соответствует бесконечное множество собственных функций:
$$X_n(x) = h \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, x\right) + \sqrt{\lambda} \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, x\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

- При $\lambda < 0$ задача Штурма–Лиувилля никогда не имеет нетривиальных решений.

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}'(0) - hX(0) = 0$, что $c_1 - hc_2 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_2(hx + 1)$, и второе краевое условие $X(l) = 0$ даёт требование $c_2(hl + 1) = 0$. Отсюда $c_2 = c_1 = 0$ (поскольку $hl > 0$ по условию задачи), и у данной задачи нетривиальных решений, соответствующих $\lambda = 0$ нет.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\begin{cases} \lambda_n > 0 \quad - \quad \text{решения уравнения } \sqrt{\lambda} = h \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda}\, l), \\ X_n(x) = h \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, x\right) + \sqrt{\lambda} \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, x\right), \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{8.2}$$

задачи (9.1).

9. III рода слева – III рода справа.

Решить задачу Штурма-Лиувилля с краевыми условиями III-го рода:

$$\begin{cases} \mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0, \\ \mathbf{X}'(0) - H\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}'(l) + h\mathbf{X}(l) = 0, \qquad H, h > 0. \end{cases} \tag{9.1}$$

Общее решение уравнения $\mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0$ имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) \qquad \text{при } \lambda > 0;$$
$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x} \qquad \text{при } \lambda < 0;$$
$$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0;$$

- При $\lambda > 0$ имеем
$$X'(x) = c_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\, x) - c_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}\, x)$$
И из краевого условия $\mathbf{X}'(0) - HX(0) = 0$ следует, что
$$\sqrt{\lambda}\, c_1 - H\, c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\lambda} = H \frac{c_2}{c_1}.$$
С другой стороны, из второго краевого условия $\mathbf{X}'(l) + h\mathbf{X}(l) = 0$ получаем, что
$$\sqrt{\lambda} \Big(c_1 \cos(\sqrt{\lambda}\, l) - c_2 \sin(\sqrt{\lambda}\, l) \Big) + h \Big(c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, l) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, l) \Big) = 0 \quad \Rightarrow$$
$$c_1 \Big(\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\, l) + h \sin(\sqrt{\lambda}\, l) \Big) + c_2 \Big(-\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}\, x) + h \cos(\sqrt{\lambda}\, x) \Big) = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \frac{c_2}{c_1} = \frac{\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\, l) + h \sin(\sqrt{\lambda}\, l)}{\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}\, x) - h \cos(\sqrt{\lambda}\, x)}.$$
Из двух последних равенств получаем:
$$\frac{\sqrt{\lambda}}{H} = \frac{\frac{\sqrt{\lambda}}{h} \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda}\, l) + 1}{\frac{\sqrt{\lambda}}{h} - \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda}\, l)},$$
откуда
$$\operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda}\, l) \cdot \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{H} + \frac{\sqrt{\lambda}}{h} \right) = \frac{\lambda}{Hh} - 1 = \frac{\sqrt{\lambda}}{h} \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{H} - \frac{h}{\sqrt{\lambda}} \right).$$
Итак,
$$\operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda}\, l) = \frac{\sqrt{\lambda}}{h} \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{H} - \frac{h}{\sqrt{\lambda}} \right) \cdot \frac{Hh}{\sqrt{\lambda}\,(H + h)}$$
и, наконец,
$$\operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda}\, l) = \frac{H}{H + h} \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{H} - \frac{h}{\sqrt{\lambda}} \right). \tag{9.2}$$
Другим способом уравнение для нахождения λ можно получить из
$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\, l) + h \sin(\sqrt{\lambda}\, l)}{\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}\, x) - h \cos(\sqrt{\lambda}\, x)} = -\operatorname{tg}\left(\alpha + \sqrt{\lambda}\, l \right),$$
где
$$\alpha = \arcsin \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda + h^2}.$$

Тогда, вспомнив, что $\sqrt{\lambda} = H\frac{c_2}{c_1}$, получим:

$$\sqrt{\lambda} = -H\,\mathrm{tg}\left(\alpha + \sqrt{\lambda}\,l\right), \qquad \alpha = \arcsin\frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda + h^2}. \tag{9.3}$$

Каждое из уравнений (9.2) и (9.3), как легко увидеть из графика, имеет бесконечно много положительных решений λ_n, $n \in \mathbb{N}$.
Таким образом, существует бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

$$\lambda_n > 0 \quad - \quad \text{решения уравнения} \qquad \mathrm{ctg}(\sqrt{\lambda}\,l) = \frac{H}{H+h}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{H} - \frac{h}{\sqrt{\lambda}}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$X_n(x) = H\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right) + \sqrt{\lambda}\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

- При $\lambda < 0$ задача Штурма–Лиувилля никогда не имеет нетривиальных решений.
- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}'(0) - HX(0) = 0$, что $c_1 - Hc_2 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_2(Hx+1)$, и второе краевое условие $\mathbf{X}'(l) + h\mathbf{X}(l) = 0$ даёт требование $c_2(H + hHl + h) = 0$. Отсюда $c_2 = c_1 = 0$ (поскольку $H, h, l > 0$ по условию задачи), и у данной задачи нетривиальных решений, соответствующих $\lambda = 0$ нет.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\begin{cases} \lambda_n > 0 \quad - \quad \text{решения уравнения} \;\; \mathrm{ctg}(\sqrt{\lambda}\,l) = \frac{H}{H+h}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{H} - \frac{h}{\sqrt{\lambda}}\right) \\ X_n(x) = H\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right) + \sqrt{\lambda}\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right), \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{9.4}$$

задачи (9.1).

10. Разложение функций в ряд Фурье по собственным функциям задач Штурма – Лиувилля

Теорема 10.1 (В.А. Стеклов).

Усл. $\{\mathbf{X}_k\}_{k=1}^{\infty}$ – *ортогональная система собственных функций задачи Штурма–Лиувилля.*

Утв. $\forall f(x) \in C^2[a,b]$, *удовлетворяющей краевым условиям,* $\exists\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbf{X}_k(x),$$

причём последний ряд сходится к $f(x)$ абсолютно и равномерно на $[a,b]$, а для c_k верно представление

$$c_k = \frac{(f, \mathbf{X}_k)}{\|\mathbf{X}_k\|^2} = \frac{\int\limits_a^b f(x)\mathbf{X}_k(x)dx}{\int\limits_a^b \mathbf{X}_k^2(x)dx}$$

Доказательство. Выведем формулу для вычисления c_k.
В силу общих свойств рядов Фурье, их (как сходящиеся равномерно на любом отрезке, где нет точек разрыва $f(x)$) можно интегрировать почленно. Поэтому, в силу ортогональности системы $\{\mathbf{X}_k\}$ в $L_2[0,\, l]$:

$$(\mathbf{X}_k,\ \mathbf{X}_n)_{L_2[0,\,l]} \equiv \int\limits_0^l \mathbf{X}_k(x)\mathbf{X}_n(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad k \neq n; \\ \|\mathbf{X}_n\|^2, & \text{при} \quad k = n. \end{cases} \tag{10.1}$$

Преположим, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\mathbf{X}_k(x)$ действительно сходится на $[0,\, l]$ к функции $f(x)$, то есть верно равенство:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\mathbf{X}_k(x), \qquad x \in [0,\, l].$$

Домножим это равенство на $\mathbf{X}_n$ в смысле скалярного произведения в $L_2[0,\, l]$, то есть

- домножим его на $\mathbf{X}_n$ и
- проинтегрируем по $[0,\, l]$.

В силу (10.1), получим

$$(f,\ \mathbf{X}_n) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\,(\mathbf{X}_k,\ \mathbf{X}_n) = c_n\,(\mathbf{X}_n,\ \mathbf{X}_n) = c_n\|\mathbf{X}_n\|^2.$$

Отсюда сразу получается доказываемая формула

$$c_k = \frac{(f, \mathbf{X}_k)}{\|\mathbf{X}_k\|^2}.$$

□

В силу данной теоремы, нам достаточно один раз вычислить $\|\mathbf{X}_k\|^2$ для каждой задачи Штурма-Лиувилля, чтобы знать вид коэффициентов разложения c_k.

11. Коэффициенты разложения функций в ряд Фурье по собственным функциям задач Штурма – Лиувилля

11.1. I–I

$$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \int\limits_0^l \sin^2\left(\frac{\pi kx}{l}\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi kx}{l}\right)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\Big|_0^l - \underbrace{\frac{l}{2\pi k}\sin\left(\frac{2\pi kx}{l}\right)\Big|_{x=0}^{x=l}}_{=0}\right) = \frac{l}{2}.$$

11.2. I–II

$$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \int\limits_0^l \sin^2\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2l}\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \left(1-\cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{l}\right)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\Big|_0^l - \underbrace{\frac{l}{\pi(2k-1)}\sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{l}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=l}}_{=0}\right) = \frac{l}{2}.$$

11.3. I–III

$$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \int\limits_0^l \sin^2\left(\sqrt{\lambda_k}\,x\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \left(1-\cos\left(2\sqrt{\lambda_k}\,x\right)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(x\Big|_0^l - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}}\,\sin\left(2\sqrt{\lambda_k}\,x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=l}\right) =$$

$$= \left[\sqrt{\lambda_k} = -h\,\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_k}\,l)\right] = \frac{1}{2}\cdot\left(l + \frac{2\sin(\sqrt{\lambda_k}\,l)\cos(\sqrt{\lambda_k}\,l)}{2h\,\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_k}\,l)}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(l + \frac{\cos^2(\sqrt{\lambda_k}\,l)}{h}\right) =$$

$$= \left[\cos^2\beta = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\beta},\quad \mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_k}\,l) = -\frac{\sqrt{\lambda_k}}{h}\right] = \frac{1}{2}\cdot\left(l + \frac{1}{h\left(1+\frac{\lambda_k}{h^2}\right)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(l + \frac{h}{h^2+\lambda_k}\right) = \frac{l\,(h^2+\lambda_k)+h}{2\,(h^2+\lambda_k)}.$$

11.4. II–I

$$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \int\limits_0^l \cos^2\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2l}\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \left(1+\cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{l}\right)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\Big|_0^l + \underbrace{\frac{l}{\pi(2k-1)}\sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{l}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=l}}_{=0}\right) = \frac{l}{2}.$$

11.5. II–II

$$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \int\limits_0^l \cos^2\left(\frac{\pi kx}{l}\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \left(1+\cos\left(\frac{2\pi kx}{l}\right)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\Big|_0^l + \underbrace{\frac{l}{2\pi k}\sin\left(\frac{2\pi kx}{l}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=l}}_{=0}\right) = \frac{l}{2}.$$

11.6. II–III

$$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \int\limits_0^l \cos^2\left(\sqrt{\lambda_k}\,x\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \left(1+\cos\left(2\sqrt{\lambda_k}\,x\right)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(l + \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}}\sin\left(2\sqrt{\lambda_k}\,x\right)\Big|_{x=0}^{x=l}\right) = \frac{1}{2}\left(l + \frac{\sin\left(2\sqrt{\lambda_k}\,l\right)}{2\sqrt{\lambda_k}}\right).$$

откуда, пользуясь тождествами $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}$, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, получаем:

$$l + \frac{\sin\left(2\sqrt{\lambda_k}\,l\right)}{2\sqrt{\lambda_k}} = \left[\sqrt{\lambda_k} = \frac{h}{\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_k}\,l)}\right] = l + \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_k}\,l\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_k}\,l\right)}{h}\,\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_k}\,l) =$$

$$= l + \frac{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_k}\,l\right)}{h} = l + \frac{1-\cos^2\left(\sqrt{\lambda_k}\,l\right)}{h} = \left[\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}\right] =$$

$$= l + \frac{1-\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\left(\sqrt{\lambda_k}\,l\right)}}{h} = \left[\mathrm{tg}^2\left(\sqrt{\lambda_k}\,l\right) = \frac{h^2}{\lambda_k}\right] = l + \frac{1-\frac{\lambda_k}{\lambda_k+h^2}}{h} =$$

$$= l + \frac{h^2}{h\left(\lambda_k+h^2\right)} = \frac{l\left(\lambda_k+h^2\right)+h}{\lambda_k+h^2}.$$

В итоге для коэффициентов $\alpha_n \equiv A_n$ получаем равенство:

$$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{l\left(\lambda_k+h^2\right)+h}{\lambda_k+h^2}.$$

11.7. III–I

$$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \int\limits_0^l \left(h\sin\left(\sqrt{\lambda_k}\,x\right) + \sqrt{\lambda_k}\cos\left(\sqrt{\lambda_k}\,x\right)\right)^2 dx = \left[\alpha = \arccos\frac{h}{\sqrt{h^2+\lambda_k}}\right] =$$

$$= \left(h^2+\lambda_k\right)\int\limits_0^l \sin^2\left(\sqrt{\lambda_k}\,x+\alpha\right)dx = \frac{h^2+\lambda_k}{2}\int\limits_0^l \left(1-\cos\left(2\sqrt{\lambda_k}\,x+2\alpha\right)\right)dx =$$

$$= \frac{h^2+\lambda_k}{2}\cdot\left(x\Big|_0^l - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}}\,\sin\left(2\sqrt{\lambda_k}\,x+2\alpha\right)\Big|_{x=0}^{x=l}\right) =$$

$$= \frac{h^2+\lambda_k}{2}\cdot\left(l\;-\;\frac{\sin(2\sqrt{\lambda_k}\;l)\cos 2\alpha + \cos(2\sqrt{\lambda_k}\;l)\sin 2\alpha - \sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}}\right).$$

Преобразуем выражения $\frac{\sin(2\sqrt{\lambda_k}\;l)\cos 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}}$ и $\frac{\cos(2\sqrt{\lambda_k}\;l)\sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}}$:

$$\frac{\sin(2\sqrt{\lambda_k}\;l)\cos 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} = \left[\sqrt{\lambda_k} = -h\,\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_k}\;l)\right] = \frac{2\sin(\sqrt{\lambda_k}\;l)\cos(\sqrt{\lambda_k}\;l)}{-2h\,\mathrm{tg}\left(\sqrt{\lambda_k}\;l\right)}\cos(2\alpha) =$$

$$= -\frac{1}{h}\cos^2(\sqrt{\lambda_k}\;l)\cos(2\alpha) = \left[\cos^2\beta = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\,\beta}\right] = -\frac{1}{h}\cdot\frac{1}{1+\frac{\lambda_k}{h^2}}\cos(2\alpha) =$$

$$= \left[\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{h^2-\lambda_k}{h^2+\lambda_k}\right] = -\frac{h}{h^2+\lambda_k}\cdot\frac{h^2-\lambda_k}{h^2+\lambda_k}.$$

$$\frac{\cos(2\sqrt{\lambda_k}\ l)\sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} = \left[\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1 = \frac{2}{1+\operatorname{tg}^2\beta} - 1 = \frac{1-\operatorname{tg}^2\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta}\right] =$$
$$= \frac{1-\operatorname{tg}^2\left(\sqrt{\lambda_k}\ l\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\sqrt{\lambda_k}\ l\right)} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} = \left[\operatorname{tg}(\sqrt{\lambda_k}\ l) = -\frac{\sqrt{\lambda_k}}{h}\right] = \frac{h^2-\lambda_k}{h^2+\lambda_k} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} =$$
$$= \left[\frac{\sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} = \frac{h}{h^2+\lambda_k}\right] = \frac{h}{h^2+\lambda_k} \cdot \frac{h^2-\lambda_k}{h^2+\lambda_k}.$$

Таким образом,

$$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \frac{h^2+\lambda_k}{2} \cdot \left(l\ -\ \frac{-\sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}}\right) = \frac{h^2+\lambda_k}{2} \cdot \left(l\ +\ \frac{h}{h^2+\lambda_k}\right) = \frac{l\,(h^2+\lambda_k)+h}{2}.$$

11.8. III–II

$$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \int\limits_0^l \left(h\sin\left(\sqrt{\lambda_k}\ x\right) + \sqrt{\lambda_k}\cos\left(\sqrt{\lambda_k}\ x\right)\right)^2 dx = \left[\alpha = \arccos\frac{h}{\sqrt{h^2+\lambda_k}}\right] =$$
$$= \left(h^2+\lambda_k\right)\int\limits_0^l \sin^2\left(\sqrt{\lambda_k}\ x + \alpha\right) dx = \frac{h^2+\lambda_k}{2}\int\limits_0^l \left(1-\cos\left(2\sqrt{\lambda_k}\ x + 2\alpha\right)\right) dx =$$
$$= \frac{h^2+\lambda_k}{2} \cdot \left(x\Big|_0^l - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}}\ \sin\left(2\sqrt{\lambda_k}\ x + 2\alpha\right)\Big|_{x=0}^{x=l}\right) =$$
$$= \frac{h^2+\lambda_k}{2} \cdot \left(l\ -\ \frac{\sin(2\sqrt{\lambda_k}\ l)\cos 2\alpha + \cos(2\sqrt{\lambda_k}\ l)\sin 2\alpha - \sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}}\right).$$

Преобразуем выражения $\frac{\sin(2\sqrt{\lambda_k}\ l)\cos 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}}$ и $\frac{\cos(2\sqrt{\lambda_k}\ l)\sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}}$:

$$\frac{\sin(2\sqrt{\lambda_k}\ l)\cos 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} = \left[\sqrt{\lambda_k}\ = h\operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda_k}\ l)\right] = \frac{2\sin(\sqrt{\lambda_k}\ l)\cos(\sqrt{\lambda_k}\ l)}{2h\operatorname{ctg}\left(\sqrt{\lambda_k}\ l\right)}\cos(2\alpha) =$$
$$= \frac{1}{h}\sin^2(\sqrt{\lambda_k}\ l)\cos(2\alpha) = \left[\sin^2\beta = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\beta}\right] = \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{1+\frac{\lambda_k}{h^2}}\cos(2\alpha) =$$
$$= \left[\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{h^2-\lambda_k}{h^2+\lambda_k}\right] = \frac{h}{h^2+\lambda_k} \cdot \frac{h^2-\lambda_k}{h^2+\lambda_k}.$$

$$\frac{\cos(2\sqrt{\lambda_k}\ l)\sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} = \left[\cos 2\beta = 1 - 2\sin^2\beta = 1\ -\ \frac{2}{1+\operatorname{ctg}^2\beta} = -\frac{1-\operatorname{ctg}^2\beta}{1+\operatorname{ctg}^2\beta}\right] =$$
$$= -\frac{1-\operatorname{ctg}^2\left(\sqrt{\lambda_k}\ l\right)}{1+\operatorname{ctg}^2\left(\sqrt{\lambda_k}\ l\right)} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} = \left[\operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda_k}\ l) = \frac{\sqrt{\lambda_k}}{h}\right] = -\frac{h^2-\lambda_k}{h^2+\lambda_k} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} =$$
$$= \left[\frac{\sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} = \frac{h}{h^2+\lambda_k}\right] = -\frac{h}{h^2+\lambda_k} \cdot \frac{h^2-\lambda_k}{h^2+\lambda_k}.$$

Таким образом,

$$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \frac{h^2+\lambda_k}{2} \cdot \left(l\ -\ \frac{-\sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}}\right) = \frac{h^2+\lambda_k}{2} \cdot \left(l\ +\ \frac{h}{h^2+\lambda_k}\right) = \frac{l\,(h^2+\lambda_k)+h}{2}.$$

11.9. III–III

$$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \int\limits_0^l \left(H\sin\left(\sqrt{\lambda_k}\,x\right) + \sqrt{\lambda_k}\cos\left(\sqrt{\lambda_k}\,x\right)\right)^2 dx = \left[\alpha = \arccos\frac{H}{\sqrt{H^2+\lambda_k}}\right] =$$

$$= \left(H^2+\lambda_k\right)\int\limits_0^l \sin^2\left(\sqrt{\lambda_k}\,x+\alpha\right)dx = \frac{H^2+\lambda_k}{2}\int\limits_0^l \left(1-\cos\left(2\sqrt{\lambda_k}\,x+2\alpha\right)\right)dx =$$

$$= \frac{H^2+\lambda_k}{2}\cdot\left(x\Big|_0^l - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}}\,\sin\left(2\sqrt{\lambda_k}\,x+2\alpha\right)\Big|_{x=0}^{x=l}\right) =$$

$$= \frac{H^2+\lambda_k}{2}\cdot\left(l\;-\;\frac{\sin(2\sqrt{\lambda_k}\,l)\cos 2\alpha + \cos(2\sqrt{\lambda_k}\,l)\sin 2\alpha - \sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}}\right).$$

Преобразуем выражения $\frac{\sin(2\sqrt{\lambda_k}\,l)\cos 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}}$ и $\frac{\cos(2\sqrt{\lambda_k}\,l)\sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}}$:

$$\frac{\sin(2\sqrt{\lambda_k}\,l)\cos 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} = \left[\operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda_k}\,l) = \frac{1}{H+h}\cdot\frac{\lambda_k - Hh}{\sqrt{\lambda_k}}\right] =$$

$$= \frac{H+h}{\lambda_k - Hh}\cdot\frac{2\sin(\sqrt{\lambda_k}\,l)\cos(\sqrt{\lambda_k}\,l)}{2\operatorname{tg}\left(\sqrt{\lambda_k}\,l\right)}\cos(2\alpha) = \frac{H+h}{\lambda_k - Hh}\cdot\cos^2(\sqrt{\lambda_k}\,l)\cdot\cos(2\alpha) =$$

$$= \left[\cos^2\beta = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\beta} = \frac{\operatorname{ctg}^2\beta}{1+\operatorname{ctg}^2\beta}\right] =$$

$$= \frac{H+h}{\lambda_k - Hh}\cdot\frac{(\lambda_k - Hh)^2}{\lambda_k\,(H+h)^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{(\lambda_k - Hh)^2}{\lambda_k(H+h)^2}}\cdot\cos(2\alpha) =$$

$$= \left[\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{H^2-\lambda_k}{H^2+\lambda_k}\right] = \frac{(H+h)\,(\lambda_k - Hh)}{\lambda_k\,(H+h)^2 + (\lambda_k - Hh)^2}\cdot\frac{H^2-\lambda_k}{H^2+\lambda_k}.$$

$$\frac{\cos(2\sqrt{\lambda_k}\,l)\sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} = \left[\cos 2\beta = 1 - 2\sin^2\beta = 1\;-\;\frac{2}{1+\operatorname{ctg}^2\beta} = -\,\frac{1-\operatorname{ctg}^2\beta}{1+\operatorname{ctg}^2\beta}\right] =$$

$$= -\,\frac{1-\operatorname{ctg}^2\left(\sqrt{\lambda_k}\,l\right)}{1+\operatorname{ctg}^2\left(\sqrt{\lambda_k}\,l\right)}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} = \left[\operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda_k}\,l) = \frac{\lambda_k - Hh}{\sqrt{\lambda_k}(H+h)}\right] =$$

$$= -\,\frac{\lambda_k\,(H+h)^2 - (\lambda_k - Hh)^2}{\lambda_k\,(H+h)^2 + (\lambda_k - Hh)^2}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} =$$

$$= \left[\frac{\sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} = \frac{H}{H^2+\lambda_k}\right] = -\,\frac{\lambda_k\,(H+h)^2 - (\lambda_k - Hh)^2}{\lambda_k\,(H+h)^2 + (\lambda_k - Hh)^2}\cdot\frac{H}{H^2+\lambda_k}.$$

Поэтому

$$\frac{\sin(2\sqrt{\lambda_k}\ l)\cos 2\alpha + \cos(2\sqrt{\lambda_k}\ l)\sin 2\alpha - \sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} =$$

$$= \frac{(H+h)(\lambda_k - Hh)}{\lambda_k (H+h)^2 + (\lambda_k - Hh)^2} \cdot \frac{H^2 - \lambda_k}{H^2 + \lambda_k} - \frac{\lambda_k (H+h)^2 - (\lambda_k - Hh)^2}{\lambda_k (H+h)^2 + (\lambda_k - Hh)^2} \cdot \frac{H}{H^2 + \lambda_k} - \frac{H}{H^2 + \lambda_k} =$$

$$= \frac{(H+h)(\lambda_k - Hh)(H^2 - \lambda_k) - H\left(\lambda_k (H+h)^2 - (\lambda_k - Hh)^2\right) - H\left(\lambda_k (H+h)^2 + (\lambda_k - Hh)^2\right)}{\left(\lambda_k (H+h)^2 + (\lambda_k - Hh)^2\right)(H^2 + \lambda_k)} =$$

$$= \frac{(H+h)(\lambda_k - Hh)(H^2 - \lambda_k) - 2H\lambda_k (H+h)^2}{\underbrace{\left(\lambda_k (H+h)^2 + (\lambda_k - Hh)^2\right)}_{=(H^2+\lambda_k)(h^2+\lambda_k)}(H^2 + \lambda_k)} =$$

$$= \frac{(H+h)\left(-\lambda_k^2 + \lambda_k H(H+h) - H^3 h - 2H\lambda_k (H+h)\right)}{(H^2 + \lambda_k)^2 (h^2 + \lambda_k)} =$$

$$= \frac{-(H+h)\left(\lambda_k^2 + \lambda_k H(H+h) + H^3 h\right)}{(H^2 + \lambda_k)^2 (h^2 + \lambda_k)} = \frac{-(H+h)(\lambda_k + Hh)(\lambda_k + H^2)}{(H^2 + \lambda_k)^2 (h^2 + \lambda_k)}.$$

Наиболее простой вид это выражение принимает при $H = h$. В этом случае (он встречается в № 653, 658, 693)

$$\frac{\sin(2\sqrt{\lambda_k}\ l)\cos 2\alpha + \cos(2\sqrt{\lambda_k}\ l)\sin 2\alpha - \sin 2\alpha}{2\sqrt{\lambda_k}} = -\frac{2h}{h^2 + \lambda_k}.$$

Итак, в общем случае (при $H \neq h$)

$$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \frac{l(H^2 + \lambda_k)^2 (h^2 + \lambda_k) + (H+h)(\lambda_k + Hh)(\lambda_k + H^2)}{2(H^2 + \lambda_k)(h^2 + \lambda_k)}.$$

А в случае $H = h$

$$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \frac{l(h^2 + \lambda_k) + 2h}{2}.$$

12. Таблица собственных чисел и функций задач Штурма – Лиувилля с различными краевыми условиями

Кр. усл.	Собственные числа и функции
I – I	$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}$
I – II	$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right), \quad n \in \mathbb{N}$
I – III	$\begin{cases} \lambda_n > 0 \quad - \text{ решения уравнения } \sqrt{\lambda} = -h\,\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda}\,l), \\ X_n(x) = \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right), \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$
II – I	$\lambda_k = \left(\frac{\pi(2k-1)}{2p}\right)^2, \quad \mathbf{X}_k(x) = \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2p}x\right), \quad k \in \mathbb{N}$
II – II	$\lambda_0 = 0, \quad X_0(x) \equiv 1; \quad \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}$
II – III	$\begin{cases} \lambda_n > 0 \quad - \text{ решения уравнения } \sqrt{\lambda_n}\,\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_n}\,l) = h, \\ X_n(x) = \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right), \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$
III – I	$\begin{cases} \lambda_n > 0 \quad - \text{ решения уравнения } \sqrt{\lambda} = -h\,\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda}\,l), \\ X_n(x) = h\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right) + \sqrt{\lambda}\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right), \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$
III – II	$\begin{cases} \lambda_n > 0 \quad - \text{ решения уравнения } \sqrt{\lambda} = h\,\mathrm{ctg}(\sqrt{\lambda}\,l), \\ X_n(x) = h\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right) + \sqrt{\lambda}\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right), \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$
III – III	$\begin{cases} \lambda_n > 0 \quad - \text{ решения уравнения } \mathrm{ctg}(\sqrt{\lambda}\,l) = \frac{H}{H+h}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{H} - \frac{h}{\sqrt{\lambda}}\right) \\ X_n(x) = H\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right) + \sqrt{\lambda}\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right), \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$

13. Таблица норм собственных функций задач Штурма – Лиувилля с различными краевыми условиями

Кр. усл.	$\|\mathbf{X}_k\|^2$
I – I	$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \frac{l}{2}$
I – II	$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \frac{l}{2}$
I – III	$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \frac{l\left(h^2+\lambda_k\right)+h}{2(h^2+\lambda_k)}$
II – I	$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \frac{l}{2}$
II – II	$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \frac{l}{2}$
II – III	$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{l\left(\lambda_k+h^2\right)+h}{\lambda_k+h^2}$
III – I	$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \frac{l\left(h^2+\lambda_k\right)+h}{2}$
III – II	$\|\mathbf{X}_k\|^2 = \frac{l\left(h^2+\lambda_k\right)+h}{2}$
III – III	$\begin{cases} \|\mathbf{X}_k\|^2 = \frac{l\left(H^2+\lambda_k\right)^2\left(h^2+\lambda_k\right)+(H+h)(\lambda_k+Hh)\left(\lambda_k+H^2\right)}{2(H^2+\lambda_k)(h^2+\lambda_k)} \\ \text{в случае } H = h \qquad \|\mathbf{X}_k\|^2 = \frac{l\left(h^2+\lambda_k\right)+2h}{2} \end{cases}$

1 Метод Фурье для однородного гиперболического уравнения с однородными краевыми условиями.

№ 643.
Найти решение $u(x,t)$ начально-краевой задачи

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u_t(x,0) = \psi(x), \\ u(0,t) = u(l,t) = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Шаг 1. Будем искать решение уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ с краевыми условиями $u(0,t) = u(l,t) = 0$ в виде $U(x,t) = X(x)T(t)$.
Сразу заметим, что краевые условия означают для функции $X(x)$ следующее:

$$X(0) = X(l) = 0. \tag{1.2}$$

Подставим $U(x,t)$ в уравнение, получим:

$$X(x)T"(t) = a^2 X"(x)T(t)$$

Предположив, что $X(x)T(t) \neq 0$, поделим это равенство на $a^2 X(x)T(t) \neq 0$:

$$-\frac{X"(x)}{X(x)} = -\frac{T"(t)}{a^2 T(t)} = \lambda.$$

Отсюда для функции $X(x)$ имеем задачу

$$X"(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{1.3}$$
$$X(0) = X(l) = 0, \tag{1.4}$$

а для функции $T(t)$ – уравнение:

$$T"(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{1.5}$$

Задача (1.3)–(1.4) есть задача Штурма–Лиувилля. Общее решение уравнения (1.3) имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) \qquad \text{при } \lambda > 0; \tag{1.6}$$
$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x} \qquad \text{при } \lambda < 0; \tag{1.7}$$
$$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0; \tag{1.8}$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x)$. Поэтому из второго краевого условия $X(l) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda}\, l = \pi n$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.9}$$

  Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.10}$$

- При $\lambda < 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = -c_1$, $\Rightarrow$ $X(x) = 2c_1 \operatorname{sh}\sqrt{-\lambda}\,x$. Поэтому из второго краевого условия $X(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет отрицательных собственных чисел.
- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_1 x$. Поэтому из второго краевого условия $X(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет собственного числа, равного нулю.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

задачи (1.3), (1.4). Стало быть, рассматривать задачу (1.5) имеет смысл только при $\lambda = \lambda_n$, и мы получаем семейство задач:

$$T"_n(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{1.11}$$

Решение этого линейного однородного уравнения второго порядка имеет вид:

$$T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right), \qquad t > 0, \tag{1.12}$$

где A_n, B_n – произвольные постоянные.

<u>Шаг 2.</u> Решаем задачу (1.1)**.**

Будем искать решение задачи (1.1) в виде $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t)$, т.е.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\left(A_n \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right)\right). \tag{1.13}$$

Из условий задачи мы ещё не использовали только начальные условия
$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x)$. Для функции $u(x,t)$ искомого вида они означают:

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x), \tag{1.14}$$

$$\psi(x) = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n a \sqrt{\lambda_n} X_n(x). \tag{1.15}$$

Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, входящие в начальные условия, разлагаются в ряд

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n X_n(x), \qquad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n X_n(x), \tag{1.16}$$

Выясним, какими должны быть коэффициенты α_n, β_n. Для этого домножим (1.16) на $X_m = \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right)$ скалярно в смысле $L_2[0,l]$:

$$(\varphi, X_m) = \alpha_m \int\limits_0^l \sin^2\left(\frac{\pi m x}{l}\right) dx = \frac{\alpha_m}{2} \int\limits_0^l \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi m x}{l}\right)\right) dx = \frac{\alpha_m}{2} \int\limits_0^l dx = \frac{l \alpha_m}{2},$$

откуда

$$\alpha_n = \frac{2}{l}(\varphi, X_n) = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx. \tag{1.17}$$

Аналогично, для β_n имеем представление:

$$\beta_n = \frac{2}{l}(\psi, X_n) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \psi(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx. \tag{1.18}$$

Таким образом, для коэффициентов $A_n,\ B_n$ из представления (1.13) решения $u(x,t)$, сопоставляя (1.14) – (1.16), получим:

$$A_n = \alpha_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx; \tag{1.19}$$

$$B_n = \frac{\beta_n}{a\sqrt{\lambda_n}} = \frac{2}{a\pi n}\int\limits_0^l \psi(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx. \tag{1.20}$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (1.13) найденные коэффициенты $A_n,\ B_n$ из (1.19), (1.20).

№ 649^m.
Найти решение $u(x,t)$ уравнения

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u(0,t) = u_x(l,t) = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases} \tag{1.21}$$

Шаг 1. Будем искать решение уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ с краевыми условиями $u(0,t) = u_x(l,t) = 0$ в виде $U(x,t) = X(x)T(t)$.
Сразу заметим, что краевые условия означают для функции $X(x)$ следующее:

$$X(0) = X'(l) = 0. \tag{1.22}$$

Подставим $U(x,t)$ в уравнение, получим:

$$X(x)T"(t) = a^2 X"(x)T(t)$$

Предположив, что $X(x)T(t) \neq 0$, поделим это равенство на $a^2 X(x)T(t) \neq 0$:

$$-\frac{X"(x)}{X(x)} = -\frac{T"(t)}{a^2 T(t)} = \lambda.$$

Отсюда для функции $X(x)$ имеем задачу

$$X"(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{1.23}$$
$$X(0) = X'(l) = 0, \tag{1.24}$$

а для функции $T(t)$ – уравнение:

$$T"(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{1.25}$$

Задача (1.23)–(1.24) есть задача Штурма–Лиувилля. Общее решение уравнения (1.23) имеет вид

$$X(x) = c_1\sin(\sqrt{\lambda}\,x) + c_2\cos(\sqrt{\lambda}\,x) \qquad \text{при } \lambda > 0; \tag{1.26}$$
$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,x} \qquad \text{при } \lambda < 0; \tag{1.27}$$
$$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0; \tag{1.28}$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x)$ $\Rightarrow$ $X'(x) = c_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\, x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda}\, l = \pi\left(\frac{1}{2} + k\right)$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.29}$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.30}$$

- При $\lambda < 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = -c_1$, $\Rightarrow$ $X(x) = 2c_1 \operatorname{sh}\sqrt{-\lambda}\, x$ $\Rightarrow$ $X'(x) = 2c_1\sqrt{-\lambda}\operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda}\, x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет отрицательных собственных чисел

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_1 x$ $\Rightarrow$ $X'(x) = c_1$). Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет собственного числа, равного нулю.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

задачи (1.23), (1.24). Стало быть, рассматривать задачу (1.25) имеет смысл только при $\lambda = \lambda_n$, и мы получаем семейство задач:

$$T"_n(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{1.31}$$

Решение этого линейного однородного уравнения второго порядка имеет вид:

$$T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right), \qquad t > 0, \tag{1.32}$$

где A_n, B_n – произвольные постоянные.

<u>Шаг 2.</u> Решаем задачу (1.21)**.**

Будем искать решение задачи (1.21) в виде $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t)$, т.е.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)\left(A_n \cos\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right)\right). \tag{1.33}$$

Из условий задачи мы ещё не использовали только начальные условия
$u(x,0) = \varphi(x)$, $\quad u_t(x,0) = \psi(x)$. Для функции $u(x,t)$ искомого вида они означают:

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x), \tag{1.34}$$

$$\psi(x) = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n a\sqrt{\lambda_n} X_n(x). \tag{1.35}$$

Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, входящие в начальные условия, разлагаются в ряд

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n X_n(x), \qquad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n X_n(x), \tag{1.36}$$

Выясним, какими должны быть коэффициенты $\alpha_n,\ \beta_n$. Для этого домножим (1.36) на $X_m = \sin\left(\frac{\pi(2m-1)}{2l}x\right)$ скалярно в смысле $L_2[0,l]$:

$$(\varphi, X_m) = \alpha_m \int\limits_0^l \sin^2\left(\frac{\pi(2m-1)}{2l}x\right)dx = \frac{\alpha_m}{2}\int\limits_0^l \left(1-\cos\left(\frac{\pi(2m-1)}{l}x\right)\right)dx =$$

$$= \frac{\alpha_m}{2}\int\limits_0^l dx = \frac{l\alpha_m}{2},$$

откуда

$$\alpha_n = \frac{2}{l}(\varphi, X_n) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx. \tag{1.37}$$

Аналогично, для β_n имеем представление:

$$\beta_n = \frac{2}{l}(\psi, X_n) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \psi(x)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx. \tag{1.38}$$

Таким образом, для коэффициентов $A_n,\ B_n$ из представления (1.33) решения $u(x,t)$, имеем:

$$A_n = \alpha_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx; \tag{1.39}$$

$$B_n = \frac{\beta_n}{a\sqrt{\lambda_n}} = \frac{4}{a\pi(2n-1)}\int\limits_0^l \psi(x)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx. \tag{1.40}$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (1.33) найденные коэффициенты $A_n,\ B_n$ из (1.39), (1.44).

№ 645.

Найти решение $u(x,t)$ уравнения

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u(0,t) = u_x(l,t) = 0, \\ u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = \sin\frac{\pi x}{2l} + \sin\frac{3\pi x}{2l}. \end{cases} \tag{1.41}$$

Данная задача – частный случай рассмотренной в №649^m. Поэтому мы можем сразу воспользоваться формулами (1.33), (1.39), (1.44) для получения ответа. Найдём по (1.39)

коэффициенты A_n:

$$A_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l x\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx =$$

$$= \frac{2}{l}\left[-\frac{2l}{(2n-1)\pi}x\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=l} + \frac{2l}{(2n-1)\pi}\int\limits_0^l \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}x\right)dx\right] =$$

$$= \frac{2}{l}\left[\frac{4l^2}{(2n-1)^2\pi^2}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=l}\right] = \frac{2}{l}\left[\frac{4l^2}{(2n-1)^2\pi^2}(-1)^{n+1}\right] = \frac{8l}{(2n-1)^2\pi^2}(-1)^{n+1}. \tag{1.42}$$

Для того, чтобы найти B_n, заметим, что заданная функция $\psi(x)$ уже разложена в ряд по функциям $X_n(x) = \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}x\right)$:

$$\psi(x) = \sin\frac{\pi x}{2l} + \sin\frac{3\pi x}{2l}. \tag{1.43}$$

Следовательно, $\beta_1 = \beta_2 = 1,\ \ \beta_3 = \beta_4 = \ldots = 0$, откуда, т.к. $B_n = \beta_n\frac{2l}{\pi(2n-1)a}$,

$$B_1 = \frac{2l}{\pi a}, \qquad B_2 = \frac{2l}{3\pi a}, \qquad B_3 = B_4 = \ldots = 0. \tag{1.44}$$

Подставим найденные A_n и B_n в
$u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)\left(A_n\cos\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right) + B_n\sin\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right)\right)$.
Получим ответ:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)\left(\frac{8l}{(2n-1)^2\pi^2}(-1)^{n+1}\cos\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2l}t\right)\right) +$$
$$+ \frac{2l}{a\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2l}x\right)\sin\left(\frac{\pi a}{2l}t\right) + \frac{2l}{3a\pi}\sin\left(\frac{3\pi}{2l}x\right)\sin\left(\frac{3\pi a}{2l}t\right).$$

№ 649.
Найти решение $u(x,t)$ уравнения

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx}, \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases} \tag{1.45}$$

Шаг 1. Будем искать решение уравнения $u_{tt} = a^2u_{xx}$ с краевыми условиями $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$ в виде $U(x,t) = X(x)T(t)$.
Сразу заметим, что краевые условия означают для функции $X(x)$ следующее:

$$X'(0) = X'(l) = 0. \tag{1.46}$$

Подставим $U(x,t)$ в уравнение, получим:

$$X(x)T"(t) = a^2X"(x)T(t)$$

Предположив, что $X(x)T(t) \neq 0$, поделим это равенство на $a^2X(x)T(t) \neq 0$:

$$-\frac{X"(x)}{X(x)} = -\frac{T"(t)}{a^2T(t)} = \lambda.$$

Отсюда для функции $X(x)$ имеем задачу

$$X"(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{1.47}$$
$$X'(0) = X'(l) = 0, \tag{1.48}$$

а для функции $T(t)$ – уравнение:

$$T"(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{1.49}$$

Задача (1.47)–(1.48) есть задача Штурма–Лиувилля. Общее решение уравнения (1.47) имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) \qquad \text{при } \lambda > 0; \tag{1.50}$$
$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x} \qquad \text{при } \lambda < 0; \tag{1.51}$$
$$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0; \tag{1.52}$$

- При $\lambda > 0$ имеем
$$X'(x) = c_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\, x) - c_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}\, x)$$
И из краевого условия $X'(0) = 0$ следует, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, x)$ $\Rightarrow$ $X'(x) = -c_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}\, x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda}\, l = \pi n$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:
$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.53}$$
Им соответствует бесконечное множество собственных функций:
$$X_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.54}$$

- При $\lambda < 0$ имеем
$$X'(x) = c_1 \sqrt{-\lambda} e^{\sqrt{-\lambda}\, x} - c_2 \sqrt{-\lambda} e^{-\sqrt{-\lambda}\, x}$$
И из краевого условия $X'(0) = 0$ следует, что $c_1 = c_2$, $\Rightarrow$ $X(x) = 2c_1 \operatorname{ch} \sqrt{-\lambda}\, x$ $\Rightarrow$ $X'(x) = 2c_1 \sqrt{-\lambda} \operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda}\, x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет отрицательных собственных чисел

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $X'(0) = 0$, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_2$ $\Rightarrow$ $X'(x) = 0$), и второе краевое условие $X'(l) = 0$ выполняется автоматически, т.е. данная задача Штурма–Лиувилля имеет собственное число, равное нулю и соответствующую ему собственную функцию:
$$\lambda_0 = 0, \qquad X_0(x) = 1. \tag{1.55}$$
Заметим, что эта пара (собственное число–собственная функция) может быть записана в том же виде, что и λ_n в (1.53) и X_n и (1.54) при $n = 0$:
$$\lambda_0 = \tfrac{\pi^2 0^2}{l^2} = 0, \qquad X_0 = \cos\left(\tfrac{\pi 0 x}{l}\right) = 1.$$

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad X_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}.$$

задачи (1.47), (1.48). Стало быть, рассматривать задачу (1.49) имеет смысл только при $\lambda = \lambda_n$, и мы получаем семейство задач:

$$T"_n(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{1.56}$$

При $n = 0$ это уравнение вырождается в

$$T"_0(t) = 0, \qquad t > 0.$$

Его решение:

$$T_0 = A_0 + B_0 t, \tag{1.57}$$

где $A_0,\ B_0$ – произвольные постоянные.
При $n > 0$ решение этого линейного однородного уравнения второго порядка имеет вид:

$$T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right), \qquad t > 0, \tag{1.58}$$

где $A_n,\ B_n$ – произвольные постоянные.

<u>Шаг 2.</u> Решаем задачу (1.45)**.**

Будем искать решение задачи (1.45) в виде $u(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n(x) T_n(t)$, т.е.

$$u(x,t) = A_0 + B_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\left(A_n \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right)\right). \tag{1.59}$$

Из условий задачи мы ещё не использовали только начальные условия
$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x)$. Для функции $u(x,t)$ искомого вида они означают:

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) T_n(0) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x), \tag{1.60}$$

$$\psi(x) = u_t(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) T_n'(0) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n a}{l} B_n X_n(x). \tag{1.61}$$

Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, входящие в начальные условия, разлагаются в ряд Фурье по косинусам:

$$\varphi(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos\frac{\pi n x}{l}, \qquad \psi(x) = \frac{\beta_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cos\frac{\pi n x}{l}, \tag{1.62}$$

где коэффициенты $\alpha_n,\ \beta_n$ имеют вид:

$$\alpha_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx, \qquad \beta_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx.$$

(Конечно, эти формулы для вычисления $\alpha_n,\ \beta_n$ мы могли получить тем же способом, что и формулы (1.37), (1.38), но мы воспользовались знанием стадартных формул для ряда Фурье).

Таким образом, для коэффициентов $A_n,\ B_n$ из представления (1.59) решения $u(x,t)$, имеем:

$$A_n = \alpha_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx \quad n > 0, \qquad A_0 = \frac{\alpha_0}{2} = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) dx \quad n = 0; \tag{1.63}$$

$$B_n = \frac{l\beta_n}{\pi n a} = \frac{2l}{\pi n a}\int\limits_0^l \psi(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx \quad n > 0, \qquad B_0 = \frac{\beta_0}{2} = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \psi(x)dx \quad n = 0. \quad (1.64)$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (1.59) найденные коэффициенты $A_n,\ B_n$ из (1.63), (1.64).

2 Метод Фурье для однородного параболического уравнения с однородными краевыми условиями.

№ 688.
Найти решение $u(x,t)$ уравнения

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ u(0,t) = u_x(l,t) = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \tag{2.1}$$

Шаг 1. Будем искать решение уравнения $u_t = a^2 u_{xx}$ с краевыми условиями $u(0,t) = u_x(l,t) = 0$ в виде $U(x,t) = X(x)T(t)$.
Сразу заметим, что краевые условия означают для функции $X(x)$ следующее:

$$X(0) = X'(l) = 0. \tag{2.2}$$

Подставим $U(x,t)$ в уравнение, получим:

$$X(x)T'(t) = a^2 X"(x)T(t)$$

Предположив, что $X(x)T(t) \neq 0$, поделим это равенство на $a^2 X(x)T(t) \neq 0$:

$$-\frac{X"(x)}{X(x)} = -\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \lambda.$$

Отсюда для функции $X(x)$ имеем задачу

$$X"(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{2.3}$$
$$X(0) = X'(l) = 0, \tag{2.4}$$

а для функции $T(t)$ – уравнение:

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{2.5}$$

Задача (2.3)–(2.4) есть задача Штурма–Лиувилля. Общее решение уравнения (2.3) имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) \qquad \text{при } \lambda > 0; \tag{2.6}$$
$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x} \qquad \text{при } \lambda < 0; \tag{2.7}$$
$$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0; \tag{2.8}$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x)$ $\Rightarrow$ $X'(x) = c_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\, x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda}\, l = \pi\left(\frac{1}{2} + k\right)$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.9}$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l} x\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.10}$$

- При $\lambda < 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_1 = -c_2$, $\Rightarrow$ $X(x) = 2c_1 \operatorname{sh}\sqrt{-\lambda}\,x$ $\Rightarrow$ $X'(x) = 2c_1\sqrt{-\lambda}\operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda}\,x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет отрицательных собственных чисел

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_1 x$ $\Rightarrow$ $X'(x) = c_1$). Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет собственного числа, равного нулю.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений $\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2$, $X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)$, $n \in \mathbb{N}$ задачи (2.3), (2.4). Стало быть, рассматривать задачу (1.25) имеет смысл только при $\lambda = \lambda_n$, и мы получаем семейство задач:

$$T_n'(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{2.11}$$

Решение этого линейного однородного уравнения первого порядка имеет вид:

$$T_n(t) = A_n e^{-\frac{(\pi(2n-1)a)^2}{(2l)^2}t} \tag{2.12}$$

где A_n – произвольные постоянные.

<u>Шаг 2.</u> Решаем задачу (2.1)**.**

Будем искать решение задачи (2.1) в виде $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t)$, т.е.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right) A_n e^{-\frac{(\pi(2n-1)a)^2}{(2l)^2}t}. \tag{2.13}$$

Из условий задачи мы ещё не использовали только начальные условия $u(x,0) = \varphi(x)$. Для функции $u(x,t)$ искомого вида они означают:

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x), \tag{2.14}$$

$$\tag{2.15}$$

Пусть функция $\varphi(x)$, входящая в начальное условие, разлагается в ряд

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n X_n(x), \tag{2.16}$$

Выясним, какими должны быть коэффициенты α_n. Для этого домножим (2.16) на $X_m = \sin\left(\pi\left(-\frac{1}{2} + m\right)x\right)$ скалярно в смысле $L_2[0,l]$:

$$(\varphi, X_m) = \alpha_m \int\limits_0^l \sin^2\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx = \frac{\alpha_m}{2}\int\limits_0^l \left(1 - \cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)\right)dx =$$

$$= \frac{\alpha_m}{2}\int\limits_0^l dx = \frac{l\alpha_m}{2},$$

откуда

$$\alpha_n = \frac{2}{l}(\varphi, X_n) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx. \tag{2.17}$$

Таким образом, для коэффициентов A_n из представления (2.14) решения $u(x,t)$, имеем:

$$A_n = \alpha_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx. \tag{2.18}$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (2.14) найденные коэффициенты A_n из (2.18).

№ 687^M.
Найти решение $u(x,t)$ начально-краевой задачи

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u(0,t) = u(l,t) = 0. \end{cases} \tag{2.19}$$

Шаг 1. Будем искать решение уравнения $u_t = a^2 u_{xx}$ с краевыми условиями $u(0,t) = u(l,t) = 0$ в виде $U(x,t) = X(x)T(t)$.
Сразу заметим, что краевые условия означают для функции $X(x)$ следующее:

$$X(0) = X(l) = 0. \tag{2.20}$$

Подставим $U(x,t)$ в уравнение, получим:

$$X(x)T'(t) = a^2 X"(x)T(t)$$

Предположив, что $X(x)T(t) \neq 0$, поделим это равенство на $a^2 X(x)T(t) \neq 0$:

$$-\frac{X"(x)}{X(x)} = -\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \lambda.$$

Отсюда для функции $X(x)$ имеем задачу

$$X"(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{2.21}$$
$$X(0) = X(l) = 0, \tag{2.22}$$

а для функции $T(t)$ – уравнение:

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{2.23}$$

Задача (2.21)–(2.22) есть задача Штурма–Лиувилля (мы уже изучали её в № 643). Общее решение уравнения (2.21) имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\,x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\,x) \qquad \text{при } \lambda > 0; \tag{2.24}$$
$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,x} \qquad \text{при } \lambda < 0; \tag{2.25}$$
$$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0; \tag{2.26}$$

- При $\lambda > 0$ существует бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:
$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.27}$$
Им соответствует бесконечное множество собственных функций:
$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.28}$$
- При $\lambda < 0$ задача Штурма–Лиувилля не имеет нетривиальных решений.
- При $\lambda = 0$ данная задача Штурма–Лиувилля не имеет нетривиальных решений.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений
$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$
задачи (2.21), (2.22). Стало быть, рассматривать задачу (2.23) имеет смысл только при $\lambda = \lambda_n$, и мы получаем семейство задач:
$$T_n'(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{2.29}$$
Решение этого линейного однородного уравнения второго порядка имеет вид:
$$T_n(t) = A_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2} t} \qquad t > 0, \tag{2.30}$$
где A_n – произвольные постоянные.

<u>Шаг 2.</u> Решаем задачу (2.19)**.**

Будем искать решение задачи (2.19) в виде $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t)$, т.е.
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) A_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2} t}. \tag{2.31}$$
Из условий задачи мы ещё не использовали только начальное условие $u(x,0) = \varphi(x)$. Для функции $u(x,t)$ искомого вида они означают:
$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x), \tag{2.32}$$
Пусть функция $\varphi(x)$, входящая в начальное условие, разлагается в ряд Фурье по синусам:
$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \qquad \text{где} \tag{2.33}$$
$$b_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx. \tag{2.34}$$
$$\tag{2.35}$$
Сопоставляя (2.32) и (2.33), (2.34) для коэффициентов $A_n \equiv b_n$ получим:
$$A_n \equiv b_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx. \tag{2.36}$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (2.31) найденные коэффициенты A_n из (2.36).

№ 687.
Найти решение $u(x,t)$ начально-краевой задачи

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ u(x,0) = Ax, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0. \end{cases} \tag{2.37}$$

Шаг 1. Будем искать решение уравнения $u_t = a^2 u_{xx}$ с краевыми условиями $u(0,t) = u(l,t) = 0$ в виде $U(x,t) = X(x)T(t)$.
Мы уже несколько раз решали эту задачу, в частности в № 687^M. У неё есть бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

Поэтому для функций $T_n(t)$ у нас получается семейство задач:

$$T_n'(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{2.38}$$

Решение этого линейного однородного уравнения второго порядка имеет вид:

$$T_n(t) = A_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2} t} \qquad t > 0, \tag{2.39}$$

где A_n – произвольные постоянные.

Шаг 2. Решаем задачу (2.37)**.**

Будем искать решение задачи (2.37) в виде $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t)$, т.е.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) A_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2} t}. \tag{2.40}$$

Из условий задачи мы ещё не использовали только начальное условие $u(x,0) = \varphi(x)$. Но в данном случае функция $\varphi(x)$ нам задана:

$$\varphi(x) = Ax.$$

Поэтому воспользуемся формулами, полученными в № 687^M.

$$A_n \equiv b_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx, \qquad \text{где} \tag{2.41}$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx. \tag{2.42}$$

Найдём коэффициенты $A_n \equiv b_n$:

$$A_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l Ax \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx = -A \frac{2l}{\pi n l} \left(x \cos \frac{\pi n x}{l} \Big|_{x=0}^{x=l} - \int\limits_0^l \cos\left(\frac{\pi n x}{l} dx\right) \right) =$$

$$= -A \frac{2}{\pi n} \left((l(-1)^n - 0) - \frac{l}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \Big|_{x=0}^{x=l} \right) = \frac{2Al(-1)^{n+1}}{\pi n}.$$

Таким образом,

$$A_n = \frac{2Al(-1)^{n+1}}{\pi n}.$$

Подставляем найденные коэффициенты A_n в формулу (2.40):

$$u(x,t) = \frac{2Al}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2}t}.$$

№ 691.

Найти решение $u(x,t)$ уравнения

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) + hu(l,t) = 0, \qquad h > 0. \end{cases} \tag{2.43}$$

Шаг 1. Будем искать решение уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ с краевыми условиями $u_x(0,t) = u_x(l,t) + hu(l,t) = 0$ в виде $U(x,t) = X(x)T(t)$.

Сразу заметим, что краевые условия означают для функции $X(x)$ следующее:

$$X'(0) = X'(l) + hX(l) = 0. \tag{2.44}$$

Подставим $U(x,t)$ в уравнение, получим:

$$X(x)T'(t) = a^2 X"(x)T(t)$$

Предположив, что $X(x)T(t) \neq 0$, поделим это равенство на $a^2 X(x)T(t) \neq 0$:

$$\frac{X"(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda.$$

Отсюда для функции $X(x)$ имеем задачу

$$X"(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{2.45}$$

$$X'(0) = X'(l) + hX(l) = 0, \tag{2.46}$$

а для функции $T(t)$ – уравнение:

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{2.47}$$

Задача (2.45)–(2.46) есть задача Штурма–Лиувилля. Общее решение уравнения (2.45) имеет вид

$$X(x) = c_1\sin(\sqrt{\lambda}\,x) + c_2\cos(\sqrt{\lambda}\,x) \qquad \text{при } \lambda > 0; \tag{2.48}$$

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,x} \qquad \text{при } \lambda < 0; \tag{2.49}$$

$$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0; \tag{2.50}$$

- При $\lambda > 0$ имеем

  $$X'(x) = c_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\,x) - c_2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\,x)$$

  И из краевого условия $X'(0) = 0$ следует, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_2\cos(\sqrt{\lambda}\,x)$ $\Rightarrow$ $X'(x) = -c_2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\,x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) + hX(l) = 0$ получаем, что $-\sqrt{\lambda}\,\sin(\sqrt{\lambda}\,l) + h\cos(\sqrt{\lambda}\,l) = 0$, откуда (очевидно, косинус не может быть равен нулю, т.к. тогда синус равнялся бы (± 1), и равенство не было бы выполнено)

  $$\sqrt{\lambda}\,\operatorname{tg}(\sqrt{\lambda}\,l) = h \tag{2.51}$$

Это уравнение, как легко увидеть из графика, имеет бесконечно много решений λ_n, $n \in \mathbb{N}$. Сами эти решения явным образом выписать нельзя, но любое может быть найдено со сколь угодно большой точностью численно. Мы их искать не будем, удовлетворившись знанием, что они есть, и их можно найти.

Таким образом, существует бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

$$\lambda_n > 0 \quad - \quad \text{решения уравнения} \qquad \sqrt{\lambda_n}\,\operatorname{tg}(\sqrt{\lambda_n}\,l) = h, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.52}$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$X_n(x) = \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.53}$$

- При $\lambda < 0$ задача Штурма–Лиувилля никогда не имеет нетривиальных решений.
- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $X'(0) = 0$, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_2$ $\Rightarrow$ $X'(x) = 0$), и второе краевое условие $X'(l) + hX(l) = 0$ даёт требование $c_2 = 0$, т.е. данная задача Штурма–Лиувилля при $\lambda = 0$ также не имеет нетривиальных решений.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n \quad - \quad \text{решения уравнения (2.51)}, \qquad X_n(x) = \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

задачи (2.45), (2.46). Стало быть, рассматривать задачу (2.47) имеет смысл только при $\lambda = \lambda_n$, и мы получаем семейство задач:

$$T_n'(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{2.54}$$

Общее решение этого линейного однородного уравнения второго порядка имеет вид:

$$T_n(t) = A_n e^{-\sqrt{\lambda_n}\,t}, \qquad t > 0, \tag{2.55}$$

где A_n – произвольные постоянные.

<u>Шаг 2.</u> Решаем задачу (2.43)**.**

Будем искать решение задачи (2.43) в виде $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t)$, т.е.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right) \cdot A_n e^{-\sqrt{\lambda_n}\,t}. \tag{2.56}$$

Из условий задачи мы ещё не использовали только начальное условие $u(x,0) = \varphi(x)$. Для функции $u(x,t)$ искомого вида они означают:

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x), \tag{2.57}$$

Пусть функция $\varphi(x)$, входящая в начальное условие, разлагается в ряд

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n X_n(x), \tag{2.58}$$

Выясним, какими должны быть коэффициенты $\alpha_n \equiv A_n$. Для этого домножим (2.58) на $X_m = \cos\left(\sqrt{\lambda_m}\,x\right)$ скалярно в смысле $L_2[0,l]$ и учтём, что система собственных функций задачи Штурма–Лиувилля всегда является ортогональной в смысле этого скалярного произведения:

$$(\varphi, X_m) = \alpha_m \int\limits_0^l \cos^2\left(\sqrt{\lambda_m}\,x\right) dx = \frac{\alpha_m}{2} \int\limits_0^l \left(1 + \cos\left(2\sqrt{\lambda_m}\,x\right)\right) dx =$$

$$= \frac{\alpha_m}{2}\left(l + \frac{1}{2\sqrt{\lambda_m}} \sin\left(2\sqrt{\lambda_m}\,x\right)\Big|_{x=0}^{x=l}\right) = \frac{\alpha_m}{2}\left(l + \frac{\sin\left(2\sqrt{\lambda_m}\,l\right)}{2\sqrt{\lambda_m}}\right).$$

откуда, пользуясь тождествами $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}$, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, получаем:

$$l + \frac{\sin\left(2\sqrt{\lambda_m}\,l\right)}{2\sqrt{\lambda_m}} = \left[\sqrt{\lambda_m} = \frac{h}{\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_m}\,l)}\right] = l + \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_m}\,l\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_m}\,l\right)}{h}\,\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_m}\,l) =$$

$$= l + \frac{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_m}\,l\right)}{h} = l + \frac{1-\cos^2\left(\sqrt{\lambda_m}\,l\right)}{h} = \left[\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}\right] =$$

$$= l + \frac{1 - \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\left(\sqrt{\lambda_m}\,l\right)}}{h} = \left[\mathrm{tg}^2\left(\sqrt{\lambda_m}\,l\right) = \frac{h^2}{\lambda_m}\right] = l + \frac{1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_m+h^2}}{h} =$$

$$= l + \frac{h^2}{h\left(\lambda_m + h^2\right)} = \frac{l\left(\lambda_m + h^2\right) + h}{\lambda_m + h^2}.$$

В итоге для коэффициентов $\alpha_n \equiv A_n$ получаем равенство:

$$A_n = \alpha_n = 2\frac{\lambda_n + h^2}{l\left(\lambda_n + h^2\right) + h}(\varphi, X_n) = 2\frac{\lambda_n + h^2}{l\left(\lambda_n + h^2\right) + h} \int\limits_0^l \varphi(x)\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,l\right) dx. \qquad (2.59)$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (2.56) найденные коэффициенты A_n из (2.59).

<u>Ответ:</u> $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left\{2\frac{\lambda_n+h^2}{l(\lambda_n+h^2)+h}\int\limits_0^l \varphi(x)\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,l\right) dx\right\}\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right)e^{-\sqrt{\lambda_n}\,t}$.

3 Метод Фурье для неоднородного параболического уравнения с однородными краевыми условиями второго рода.

Рассмотрим неоднородную начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности с однородными краевыми условиями второго рода.

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), \qquad x \in (0,l),\ \ t > 0, \qquad (3.1)$$

$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, \qquad t > 0, \qquad (3.2)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in [0,l]. \qquad (3.3)$$

<u>Шаг 1.</u> Решение задачи Штурма–Лиувилля.
Рассмотрим задачу

$$X"(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad (3.4)$$

$$X'(0) = X'(l) = 0. \qquad (3.5)$$

Задача (3.4)–(3.5) есть задача Штурма–Лиувилля. Общее решение уравнения (3.4) имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) \qquad \text{при } \lambda > 0; \tag{3.6}$$

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x} \qquad \text{при } \lambda < 0; \tag{3.7}$$

$$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0; \tag{3.8}$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $X'(0) = 0$, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, x)$ $\Rightarrow$ $X'(x) = -c_2\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}\, x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda}\, l = \pi k$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.9}$$

  Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$X_n(x) = \frac{2}{l} \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.10}$$

  (множитель $\frac{2}{l}$ появляется, чтобы система этих функций превратилась из ортогональной в ортонормированную)

- При $\lambda < 0$ имеем из краевого условия $X'(0) = 0$, что $c_1 = c_2$, $\Rightarrow$ $X(x) = 2c_1 \operatorname{ch} \sqrt{-\lambda}\, x$ $\Rightarrow$ $X'(x) = 2c_1\sqrt{-\lambda} \operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda}\, x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет отрицательных собственных чисел.

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $X'(0) = 0$, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_2$. Второе краевое условие $X'(l) = 0$ выполнено, поэтому задача Штурма–Лиувилля (3.4)–(3.5) имеет собственное число, равное нулю: $\lambda_0 = 0$. Ему соответствует собственная функциця $X_0(x) \equiv \frac{1}{l}$.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_0 = 0, \quad X_0(x) \equiv 1; \quad \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

задачи (3.4)–(3.5).

<u>Шаг 2.</u> Будем искать решение уравнения $u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t)$ с краевыми условиями $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$ в виде
$u(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n T_n(t)$, где функции $X_n(x)$ имееют вид:

$$X_0(x) \equiv \frac{1}{l}, \qquad X_n(x) = \frac{2}{l} \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right). \tag{3.11}$$

Заметим сразу, что каждое слагаемое приведённого ряда удовлетворяет краевым условиям (3.2), что достаточно (если ряд допускает почленный переход к пределу при $x \to 0+0$, $x \to l = -0$) для того, чтобы функция $u(x,t)$, определённая таким образом, также удовлетворяла краевым условиям (3.2).

Пусть функция $f(x,t)$ разложена при каждом $t \in [0,T]$ в ряд Фурье по косинусам

$$f(x,t) = \frac{f_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) f_n(t). \tag{3.12}$$

При этом, в силу утверждения 8.1 (лекция 8),

$$f_n(t) = (f, X_n) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x,t)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx. \tag{3.13}$$

Тогда уравнение 3.1 приобретает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(X_n(x)T_n'(t) - a^2X"_n(x)T_n(t)\right) = \frac{f_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right).$$

Для его выполнения достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} &\frac{1}{l}T_0'(t) = \frac{f_0(t)}{2} && \text{для } n = 0 \\ &X_n(x)T_n'(t) - a^2X"_n(x)T_n(t) = f_n(t)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) && \text{для } n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

то есть

$$\begin{aligned} &T_0'(t) = \frac{f_0(t)}{2}\cdot l && \text{для } n = 0 \\ &\left(T_n'(t) + \frac{(\pi n a)^2}{l^2}T_n(t)\right)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) = f_n(t)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) && \text{для } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Это заведомо выполнено, если

$$T_0'(t) = \frac{f_0(t)}{2}\cdot l \qquad \text{для } n = 0 \tag{3.14}$$

$$T_n'(t) + \frac{(\pi n a)^2}{l^2}T_n(t) = f_n(t) \qquad \text{для } n \in \mathbb{N}, \tag{3.15}$$

Итак мы получили условия на функции $T_n(t)$, достаточные для того, чтобы функция $u(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} T_n(t)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$ была (если ряд – "хороший") решением уравнения $u_t - a^2u_{xx} = f(x,t)$ с краевыми условиями $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$.

<u>Шаг 3.</u> Решаем задачу (3.1) – (3.3)**.**

Из условий задачи (3.1) – (3.3) мы ещё не использовали только начальные условия $u(x,0) = \varphi(x)$. Пусть функция $\varphi(x)$, входящая в начальное условие, разлагается в ряд по косинусам

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \qquad x \in [0,l] \qquad \text{где} \tag{3.16}$$

$$\varphi_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx. \tag{3.17}$$

Подставим функцию $u(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} T_n(t)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$ (опять-таки в предположении, что ряд – "хороший") в начальное условие:

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(0)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) = \frac{\varphi_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right).$$

Для выполнения этого равенства достаточно, чтобы

$$T_0(0) = \frac{\varphi_0}{2} \qquad \text{для } \ n = 0$$
$$T_n(0) = \varphi_n \qquad \text{для } \ n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, для функций $T_n(t)$ имеем задачу Коши:

$$\begin{cases} T_0'(t) = \frac{f_0(t)}{2} \cdot l \\ T_0(0) = \frac{\varphi_0}{2} \end{cases} \qquad \text{для } \ n = 0 \tag{3.18}$$

$$\begin{cases} T_n'(t) + \frac{(\pi n a)^2}{l^2} T_n(t) = f_n(t) \\ T_n(0) = \varphi_n \end{cases} \qquad \text{для } \ n \in \mathbb{N}. \tag{3.19}$$

Эти задачи Коши имеют единственное решение при любых $f_n \in C[0,T]$ и любых значениях $\varphi_n \in \mathbb{R}$.

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить решения задач (3.18), (3.19) в формулу $u(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$.

1 Метод Фурье для однородного параболического уравнения с однородными краевыми условиями.

№ 688.
Найти решение $u(x,t)$ уравнения

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ u(0,t) = u_x(l,t) = 0, \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \tag{1.1}$$

Шаг 1. Будем искать решение уравнения $u_t = a^2 u_{xx}$ с краевыми условиями $u(0,t) = u_x(l,t) = 0$ в виде $U(x,t) = X(x)T(t)$.
Сразу заметим, что краевые условия означают для функции $X(x)$ следующее:

$$X(0) = X'(l) = 0. \tag{1.2}$$

Подставим $U(x,t)$ в уравнение, получим:

$$X(x)T'(t) = a^2 X"(x)T(t)$$

Предположив, что $X(x)T(t) \neq 0$, поделим это равенство на $a^2 X(x)T(t) \neq 0$:

$$-\frac{X"(x)}{X(x)} = -\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \lambda.$$

Отсюда для функции $X(x)$ имеем задачу

$$X"(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{1.3}$$
$$X(0) = X'(l) = 0, \tag{1.4}$$

а для функции $T(t)$ – уравнение:

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{1.5}$$

Задача (1.3)–(1.4) есть задача Штурма–Лиувилля. Общее решение уравнения (1.3) имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) \qquad \text{при } \lambda > 0; \tag{1.6}$$
$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x} \qquad \text{при } \lambda < 0; \tag{1.7}$$
$$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0; \tag{1.8}$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x)$ $\Rightarrow$ $X'(x) = c_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\, x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda}\, l = \pi\left(\frac{1}{2} + k\right)$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.9}$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l} x\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.10}$$

- При $\lambda < 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_1 = -c_2$, $\Rightarrow$ $X(x) = 2c_1 \operatorname{sh}\sqrt{-\lambda}\,x$ $\Rightarrow$ $X'(x) = 2c_1\sqrt{-\lambda}\operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda}\,x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет отрицательных собственных чисел

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_1 x$ $\Rightarrow$ $X'(x) = c_1$). Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет собственного числа, равного нулю.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений $\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2$, $X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)$, $n \in \mathbb{N}$ задачи (1.3), (1.4). Стало быть, рассматривать задачу (**??**) имеет смысл только при $\lambda = \lambda_n$, и мы получаем семейство задач:

$$T_n'(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{1.11}$$

Решение этого линейного однородного уравнения первого порядка имеет вид:

$$T_n(t) = A_n e^{-\frac{(\pi(2n-1)a)^2}{(2l)^2}t} \tag{1.12}$$

где A_n – произвольные постоянные.

<u>Шаг 2.</u> Решаем задачу (1.1)**.**

Будем искать решение задачи (1.1) в виде $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t)$, т.е.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right) A_n e^{-\frac{(\pi(2n-1)a)^2}{(2l)^2}t}. \tag{1.13}$$

Из условий задачи мы ещё не использовали только начальные условия $u(x,0) = \varphi(x)$. Для функции $u(x,t)$ искомого вида они означают:

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x), \tag{1.14}$$

$$\tag{1.15}$$

Пусть функция $\varphi(x)$, входящая в начальное условие, разлагается в ряд

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n X_n(x), \tag{1.16}$$

Выясним, какими должны быть коэффициенты α_n. Для этого домножим (1.16) на $X_m = \sin\left(\pi\left(-\frac{1}{2}+m\right)x\right)$ скалярно в смысле $L_2[0,l]$:

$$(\varphi, X_m) = \alpha_m \int\limits_0^l \sin^2\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx = \frac{\alpha_m}{2}\int\limits_0^l \left(1 - \cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)\right)dx =$$

$$= \frac{\alpha_m}{2}\int\limits_0^l dx = \frac{l\alpha_m}{2},$$

откуда

$$\alpha_n = \frac{2}{l}(\varphi, X_n) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx. \tag{1.17}$$

Таким образом, для коэффициентов A_n из представления (1.14) решения $u(x,t)$, имеем:

$$A_n = \alpha_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx. \tag{1.18}$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (1.14) найденные коэффициенты A_n из (1.18).

№ 687^M.
Найти решение $u(x,t)$ начально-краевой задачи

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u(0,t) = u(l,t) = 0. \end{cases} \tag{1.19}$$

Шаг 1. Будем искать решение уравнения $u_t = a^2 u_{xx}$ с краевыми условиями $u(0,t) = u(l,t) = 0$ в виде $U(x,t) = X(x)T(t)$.
Сразу заметим, что краевые условия означают для функции $X(x)$ следующее:

$$X(0) = X(l) = 0. \tag{1.20}$$

Подставим $U(x,t)$ в уравнение, получим:

$$X(x)T'(t) = a^2 X"(x)T(t)$$

Предположив, что $X(x)T(t) \neq 0$, поделим это равенство на $a^2 X(x)T(t) \neq 0$:

$$-\frac{X"(x)}{X(x)} = -\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \lambda.$$

Отсюда для функции $X(x)$ имеем задачу

$$X"(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{1.21}$$
$$X(0) = X(l) = 0, \tag{1.22}$$

а для функции $T(t)$ – уравнение:

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{1.23}$$

Задача (1.21)–(1.22) есть задача Штурма–Лиувилля (мы уже изучали её в № 643). Общее решение уравнения (1.21) имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\,x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\,x) \qquad \text{при } \lambda > 0; \tag{1.24}$$
$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,x} \qquad \text{при } \lambda < 0; \tag{1.25}$$
$$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0; \tag{1.26}$$

- При $\lambda > 0$ существует бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:
$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.27}$$
Им соответствует бесконечное множество собственных функций:
$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.28}$$
- При $\lambda < 0$ задача Штурма–Лиувилля не имеет нетривиальных решений.
- При $\lambda = 0$ данная задача Штурма–Лиувилля не имеет нетривиальных решений.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений
$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$
задачи (1.21), (1.22). Стало быть, рассматривать задачу (1.23) имеет смысл только при $\lambda = \lambda_n$, и мы получаем семейство задач:
$$T_n'(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{1.29}$$
Решение этого линейного однородного уравнения второго порядка имеет вид:
$$T_n(t) = A_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2} t} \qquad t > 0, \tag{1.30}$$
где A_n – произвольные постоянные.

<u>Шаг 2.</u> Решаем задачу (1.19)**.**

Будем искать решение задачи (1.19) в виде $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t)$, т.е.
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) A_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2} t}. \tag{1.31}$$
Из условий задачи мы ещё не использовали только начальное условие $u(x,0) = \varphi(x)$. Для функции $u(x,t)$ искомого вида они означают:
$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x), \tag{1.32}$$
Пусть функция $\varphi(x)$, входящая в начальное условие, разлагается в ряд Фурье по синусам:
$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \qquad \text{где} \tag{1.33}$$
$$b_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx. \tag{1.34}$$
$$\tag{1.35}$$
Сопоставляя (1.32) и (1.33), (1.34) для коэффициентов $A_n \equiv b_n$ получим:
$$A_n \equiv b_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx. \tag{1.36}$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (1.31) найденные коэффициенты A_n из (1.36).

№ 687.
Найти решение $u(x,t)$ начально-краевой задачи

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ u(x,0) = Ax, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0. \end{cases} \tag{1.37}$$

Шаг 1. Будем искать решение уравнения $u_t = a^2 u_{xx}$ с краевыми условиями $u(0,t) = u(l,t) = 0$ в виде $U(x,t) = X(x)T(t)$.
Мы уже несколько раз решали эту задачу, в частности в № 687^M. У неё есть бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

Поэтому для функций $T_n(t)$ у нас получается семейство задач:

$$T_n'(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{1.38}$$

Решение этого линейного однородного уравнения второго порядка имеет вид:

$$T_n(t) = A_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2} t} \qquad t > 0, \tag{1.39}$$

где A_n – произвольные постоянные.

Шаг 2. Решаем задачу (1.37)**.**

Будем искать решение задачи (1.37) в виде $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t)$, т.е.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) A_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2} t}. \tag{1.40}$$

Из условий задачи мы ещё не использовали только начальное условие $u(x,0) = \varphi(x)$. Но в данном случае функция $\varphi(x)$ нам задана:

$$\varphi(x) = Ax.$$

Поэтому воспользуемся формулами, полученными в № 687^M.

$$A_n \equiv b_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx, \qquad \text{где} \tag{1.41}$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx. \tag{1.42}$$

Найдём коэффициенты $A_n \equiv b_n$:

$$A_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l Ax \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx = -A \frac{2l}{\pi n l} \left(x \cos \frac{\pi n x}{l} \Big|_{x=0}^{x=l} - \int\limits_0^l \cos\left(\frac{\pi n x}{l} dx\right) \right) =$$

$$= -A \frac{2}{\pi n} \left((l(-1)^n - 0) - \frac{l}{\pi n} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \Big|_{x=0}^{x=l} \right) = \frac{2Al(-1)^{n+1}}{\pi n}.$$

Таким образом,

$$A_n = \frac{2Al(-1)^{n+1}}{\pi n}.$$

Подставляем найденные коэффициенты A_n в формулу (1.40):

$$u(x,t) = \frac{2Al}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2}t}.$$

№ 691.

Найти решение $u(x,t)$ уравнения

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ u_x(0,t) = u_x(l,t) + hu(l,t) = 0, \qquad h > 0. \end{cases} \tag{1.43}$$

Шаг 1. Будем искать решение уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ с краевыми условиями $u_x(0,t) = u_x(l,t) + hu(l,t) = 0$ в виде $U(x,t) = X(x)T(t)$.

Сразу заметим, что краевые условия означают для функции $X(x)$ следующее:

$$X'(0) = X'(l) + hX(l) = 0. \tag{1.44}$$

Подставим $U(x,t)$ в уравнение, получим:

$$X(x)T'(t) = a^2 X"(x)T(t)$$

Предположив, что $X(x)T(t) \neq 0$, поделим это равенство на $a^2 X(x)T(t) \neq 0$:

$$\frac{X"(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda.$$

Отсюда для функции $X(x)$ имеем задачу

$$X"(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{1.45}$$

$$X'(0) = X'(l) + hX(l) = 0, \tag{1.46}$$

а для функции $T(t)$ – уравнение:

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{1.47}$$

Задача (1.45)–(1.46) есть задача Штурма–Лиувилля. Общее решение уравнения (1.45) имеет вид

$$X(x) = c_1\sin(\sqrt{\lambda}\,x) + c_2\cos(\sqrt{\lambda}\,x) \qquad \text{при } \lambda > 0; \tag{1.48}$$

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,x} \qquad \text{при } \lambda < 0; \tag{1.49}$$

$$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0; \tag{1.50}$$

- При $\lambda > 0$ имеем

  $$X'(x) = c_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\,x) - c_2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\,x)$$

  И из краевого условия $X'(0) = 0$ следует, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_2\cos(\sqrt{\lambda}\,x)$ $\Rightarrow$ $X'(x) = -c_2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\,x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) + hX(l) = 0$ получаем, что $-\sqrt{\lambda}\,\sin(\sqrt{\lambda}\,l) + h\cos(\sqrt{\lambda}\,l) = 0$, откуда (очевидно, косинус не может быть равен нулю, т.к. тогда синус равнялся бы (± 1), и равенство не было бы выполнено)

  $$\sqrt{\lambda}\,\operatorname{tg}(\sqrt{\lambda}\,l) = h \tag{1.51}$$

Это уравнение, как легко увидеть из графика, имеет бесконечно много решений λ_n, $n \in \mathbb{N}$. Сами эти решения явным образом выписать нельзя, но любое может быть найдено со сколь угодно большой точностью численно. Мы их искать не будем, удовлетворившись знанием, что они есть, и их можно найти.

Таким образом, существует бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

$$\lambda_n > 0 \quad - \quad \text{решения уравнения} \qquad \sqrt{\lambda_n}\,\operatorname{tg}(\sqrt{\lambda_n}\,l) = h, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.52}$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$X_n(x) = \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.53}$$

- При $\lambda < 0$ задача Штурма–Лиувилля никогда не имеет нетривиальных решений.
- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $X'(0) = 0$, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_2$ $\Rightarrow$ $X'(x) = 0$), и второе краевое условие $X'(l) + hX(l) = 0$ даёт требование $c_2 = 0$, т.е. данная задача Штурма–Лиувилля при $\lambda = 0$ также не имеет нетривиальных решений.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n \quad - \quad \text{решения уравнения (1.51)}, \qquad X_n(x) = \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

задачи (1.45), (1.46). Стало быть, рассматривать задачу (1.47) имеет смысл только при $\lambda = \lambda_n$, и мы получаем семейство задач:

$$T_n'(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{1.54}$$

Общее решение этого линейного однородного уравнения второго порядка имеет вид:

$$T_n(t) = A_n e^{-\sqrt{\lambda_n}\,a^2 t}, \qquad t > 0, \tag{1.55}$$

где A_n – произвольные постоянные.

<u>Шаг 2.</u> Решаем задачу (1.43)**.**

Будем искать решение задачи (1.43) в виде $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(t)$, т.е.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right) \cdot A_n e^{-\sqrt{\lambda_n}\,a^2 t}. \tag{1.56}$$

Из условий задачи мы ещё не использовали только начальное условие $u(x,0) = \varphi(x)$. Для функции $u(x,t)$ искомого вида они означают:

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)T_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x), \tag{1.57}$$

Пусть функция $\varphi(x)$, входящая в начальное условие, разлагается в ряд

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n X_n(x), \tag{1.58}$$

Выясним, какими должны быть коэффициенты $\alpha_n \equiv A_n$. Для этого домножим (1.58) на $X_m = \cos\left(\sqrt{\lambda_m}\,x\right)$ скалярно в смысле $L_2[0,l]$ и учтём, что система собственных функций задачи Штурма–Лиувилля всегда является ортогональной в смысле этого скалярного произведения:

$$(\varphi, X_m) = \alpha_m \int\limits_0^l \cos^2\left(\sqrt{\lambda_m}\,x\right) dx = \frac{\alpha_m}{2} \int\limits_0^l \left(1 + \cos\left(2\sqrt{\lambda_m}\,x\right)\right) dx =$$

$$= \frac{\alpha_m}{2}\left(l + \frac{1}{2\sqrt{\lambda_m}} \sin\left(2\sqrt{\lambda_m}\,x\right)\Big|_{x=0}^{x=l}\right) = \frac{\alpha_m}{2}\left(l + \frac{\sin\left(2\sqrt{\lambda_m}\,l\right)}{2\sqrt{\lambda_m}}\right).$$

откуда, пользуясь тождествами $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}$, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, получаем:

$$l + \frac{\sin\left(2\sqrt{\lambda_m}\,l\right)}{2\sqrt{\lambda_m}} = \left[\sqrt{\lambda_m} = \frac{h}{\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_m}\,l)}\right] = l + \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_m}\,l\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_m}\,l\right)}{h}\,\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_m}\,l) =$$

$$= l + \frac{\sin^2\left(\sqrt{\lambda_m}\,l\right)}{h} = l + \frac{1-\cos^2\left(\sqrt{\lambda_m}\,l\right)}{h} = \left[\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}\right] =$$

$$= l + \frac{1 - \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\left(\sqrt{\lambda_m}\,l\right)}}{h} = \left[\mathrm{tg}^2\left(\sqrt{\lambda_m}\,l\right) = \frac{h^2}{\lambda_m}\right] = l + \frac{1 - \frac{\lambda_m}{\lambda_m+h^2}}{h} =$$

$$= l + \frac{h^2}{h\left(\lambda_m + h^2\right)} = \frac{l\left(\lambda_m + h^2\right) + h}{\lambda_m + h^2}.$$

В итоге для коэффициентов $\alpha_n \equiv A_n$ получаем равенство:

$$A_n = \alpha_n = 2\frac{\lambda_n + h^2}{l\left(\lambda_n + h^2\right) + h}(\varphi, X_n) = 2\frac{\lambda_n + h^2}{l\left(\lambda_n + h^2\right) + h} \int\limits_0^l \varphi(x)\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,l\right) dx. \qquad (1.59)$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (1.56) найденные коэффициенты A_n из (1.59).

Ответ: $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left\{2\frac{\lambda_n+h^2}{l(\lambda_n+h^2)+h}\int\limits_0^l \varphi(x)\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,l\right) dx\right\}\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right) e^{-\sqrt{\lambda_n}\,a^2 t}$.

№ 692.

Найти решение $u(x,t)$ уравнения

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \\ u(x,0) = U, \\ u_x(0,t) - hu(0,t) = u(l,t) = 0, \qquad h > 0. \end{cases} \qquad (1.60)$$

Ответ: $u(x,t) = 2U\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{h-(-1)^n\sqrt{\lambda_n+h^2}}{\lambda_n[l(\lambda_n+h^2)+h]}e^{-a^2\lambda_n t}\Phi_n(x)$, где

$\Phi_n = \sqrt{\lambda_n}\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right) + h\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right)$, λ_n – корни уравнения $h\,\mathrm{tg}\left(\sqrt{\lambda}\,l\right) = -\sqrt{\lambda}$.

1 Метод Фурье для неоднородного параболического уравнения с однородными краевыми условиями второго рода.

№ 699^M.

Решить неоднородную начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности с однородными краевыми условиями второго рода.

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), \qquad x \in (0,l), \quad t > 0, \tag{1.1}$$
$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, \qquad t > 0, \tag{1.2}$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in [0,l]. \tag{1.3}$$

Шаг 1. Решение задачи Штурма–Лиувилля.
Рассмотрим задачу

$$X"(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{1.4}$$
$$X'(0) = X'(l) = 0. \tag{1.5}$$

Задача (1.4)–(1.5) есть задача Штурма–Лиувилля. Общее решение уравнения (1.4) имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) \qquad \text{при } \lambda > 0; \tag{1.6}$$
$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x} \qquad \text{при } \lambda < 0; \tag{1.7}$$
$$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0; \tag{1.8}$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $X'(0) = 0$, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, x)$ $\Rightarrow$ $X'(x) = -c_2\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}\, x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda}\, l = \pi k$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:
$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.9}$$
Им соответствует бесконечное множество собственных функций:
$$X_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.10}$$

- При $\lambda < 0$ имеем из краевого условия $X'(0) = 0$, что $c_1 = c_2$, $\Rightarrow$ $X(x) = 2c_1 \operatorname{ch} \sqrt{-\lambda}\, x$ $\Rightarrow$ $X'(x) = 2c_1\sqrt{-\lambda} \operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda}\, x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет отрицательных собственных чисел.

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $X'(0) = 0$, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_2$. Второе краевое условие $X'(l) = 0$ выполнено, поэтому задача Штурма–Лиувилля (1.4)–(1.5) имеет собственное число, равное нулю: $\lambda_0 = 0$. Ему соответствует собственная функциця $X_0(x) \equiv 1$

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_0 = 0, \quad X_0(x) \equiv 1; \quad \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

задачи (1.4)–(1.5).

<u>Шаг 2.</u> Будем искать решение уравнения $u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t)$ с краевыми условиями $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$ в виде
$u(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n T_n(t)$, где функции $X_n(x)$ имееют вид:

$$X_0(x) \equiv 1, \qquad X_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right). \tag{1.11}$$

Заметим сразу, что каждое слагаемое приведённого ряда удовлетворяет краевым условиям (1.2), что достаточно (если ряд допускает почленный переход к пределу при $x \to 0+0$, $x \to l = -0$) для того, чтобы функция $u(x,t)$, определённая таким образом, также удовлетворяла краевым условиям (1.2).

Пусть функция $f(x,t)$ разложена при каждом $t \in [0,T]$ в ряд Фурье по косинусам

$$f(x,t) = \frac{f_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) f_n(t). \tag{1.12}$$

При этом, коэффициенты данного ряда Фурье ищутся по формулам:

$$f_n(t) = (f, X_n) = \frac{2}{l} \int\limits_0^l f(x,t) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx. \tag{1.13}$$

Тогда уравнение (1.1) приобретает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(X_n(x) T_n'(t) - a^2 X"_n(x) T_n(t)\right) = \frac{f_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right).$$

Для его выполнения достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} &T_0'(t) = \frac{f_0(t)}{2} && \text{для } n = 0 \\ &X_n(x) T_n'(t) - a^2 X"_n(x) T_n(t) = f_n(t) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) && \text{для } n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

то есть

$$\begin{aligned} &T_0'(t) = \frac{f_0(t)}{2} && \text{для } n = 0 \\ &\left(T_n'(t) + \frac{(\pi n a)^2}{l^2} T_n(t)\right) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) = f_n(t) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) && \text{для } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Это заведомо выполнено, если

$$T_0'(t) = \frac{f_0(t)}{2} \qquad \text{для } n = 0 \tag{1.14}$$

$$T_n'(t) + \frac{(\pi n a)^2}{l^2} T_n(t) = f_n(t) \qquad \text{для } n \in \mathbb{N}, \tag{1.15}$$

Итак, мы получили условия на функции $T_n(t)$, достаточные для того, чтобы функция $u(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$ была (если ряд – "хороший") решением уравнения $u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t)$ с краевыми условиями $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$.

<u>Шаг 3.</u> Решаем задачу (1.1) – (1.3)**.**

Из условий задачи (1.1) – (1.3) мы ещё не использовали только начальные условия

$u(x,0) = \varphi(x)$. Пусть функция $\varphi(x)$, входящая в начальное условие, разлагается в ряд по косинусам

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \qquad x \in [0,l] \qquad \text{где} \tag{1.16}$$

$$\varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx. \tag{1.17}$$

Подставим функцию $u(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} T_n(t)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$ (опять-таки в предположении, что ряд – "хороший") в начальное условие:

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(0)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) = \frac{\varphi_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right).$$

Для выполнения этого равенства достаточно, чтобы

$$T_0(0) = \frac{\varphi_0}{2} \qquad \text{для } n = 0$$
$$T_n(0) = \varphi_n \qquad \text{для } n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, из (1.14), (1.15) и (1.16) – (1.17), для функций $T_n(t)$ имеем задачу Коши:

$$\begin{cases} T_0'(t) = \frac{f_0(t)}{2} \\ T_0(0) = \frac{\varphi_0}{2} \end{cases} \qquad \text{для } n = 0 \tag{1.18}$$

$$\begin{cases} T_n'(t) + \frac{(\pi n a)^2}{l^2} T_n(t) = f_n(t) \\ T_n(0) = \varphi_n \end{cases} \qquad \text{для } n \in \mathbb{N}. \tag{1.19}$$

Эти задачи Коши имеют единственное решение при любых $f_n \in C[0,T]$ и любых значениях $\varphi_n \in \mathbb{R}$.

При $n = 0$:

$$T_0(t) = \frac{\varphi_0}{2} + \frac{1}{2}\int_0^t f_0(\tau)d\tau. \tag{1.20}$$

При $n \in \mathbb{N}$:
сначала решаем однородное уравнение:

$$T_n'(t) + \frac{(\pi n a)^2}{l^2} T_n(t) = 0.$$

Его общее решение имеет вид:

$$T_n(t) = c\, e^{-\frac{(\pi n a)^2 t}{l^2}}.$$

Метод вариации постоянной позволяет нам искать решение уравнения (1.19) в виде

$$T_n(t) = c(t) e^{-\frac{(\pi n a)^2 t}{l^2}}, \qquad \Longrightarrow \qquad T_n'(t) = \left(c'(t) - \frac{(\pi n a)^2}{l^2} c(t)\right) e^{-\frac{(\pi n a)^2 t}{l^2}}.$$

Подставив эти равнества в (1.19), получим уравнение для нахождения $c(t)$:

$$c'(t) = f_n(t) e^{\frac{(\pi n a)^2 t}{l^2}},$$

откуда, с учётом начального условия $T_n(0) = \varphi_n$,

$$c(t) = \varphi_n + \int\limits_0^t f_n(\tau) e^{\frac{(\pi n a)^2 \tau}{l^2}} d\tau. \tag{1.21}$$

Таким образом,

$$T_n(t) = \varphi_n e^{-\frac{(\pi n a)^2 t}{l^2}} + \int\limits_0^t f_n(\tau) e^{-\frac{(\pi n a)^2 (t-\tau)}{l^2}} d\tau. \tag{1.22}$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить (1.20), (1.22) в формулу

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right).$$

Получаем ответ:

$$u(x,t) = \left(\frac{\varphi_0}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_0^t f_0(\tau) d\tau\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_n e^{-\frac{(\pi n a)^2 t}{l^2}} + \int\limits_0^t f_n(\tau) e^{-\frac{(\pi n a)^2 (t-\tau)}{l^2}} d\tau\right) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right).$$

№ 669^{M2}.

Решить неоднородную начально-краевую задачу для уравнения колебаний с однородными краевыми условиями второго рода.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \qquad x \in (0,l), \quad t > 0, \tag{2.1}$$
$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, \qquad t > 0, \tag{2.2}$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in [0,l]. \tag{2.3}$$
$$u_t(x,0) = \psi(x), \qquad x \in [0,l]. \tag{2.4}$$
$$\tag{2.5}$$

Шаг 1. Решение задачи Штурма–Лиувилля.
Этот шаг полностью повторяет Шаг 1. задачи № 699^M.

Шаг 2. Будем искать решение уравнения $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t)$ с краевыми условиями $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$ в виде
$u(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n T_n(t)$, где функции $X_n(x)$ имееют вид:

$$X_0(x) \equiv 1, \qquad X_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right). \tag{2.6}$$

Пусть функция $f(x,t)$ разложена при каждом $t \in [0,T]$ в ряд Фурье по косинусам

$$f(x,t) = \frac{f_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) f_n(t). \tag{2.7}$$

При этом, коэффициенты данного ряда Фурье ищутся по формулам:

$$f_n(t) = (f, X_n) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x,t) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx. \tag{2.8}$$

Тогда уравнение (2.1) приобретает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(X_n(x)T"_n(t)-a^2X"_n(x)T_n(t)\right)=\frac{f_0(t)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right).$$

Для его выполнения достаточно, чтобы

$$\begin{aligned}
&T"_0(t)=\frac{f_0(t)}{2} && \text{для } n=0\\
&X_n(x)T"_n(t)-a^2X"_n(x)T_n(t)=f_n(t)\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right) && \text{для } n\in\mathbb{N},
\end{aligned}$$

то есть

$$\begin{aligned}
&T"_0(t)=\frac{f_0(t)}{2} && \text{для } n=0\\
&\left(T"_n(t)+\frac{(\pi na)^2}{l^2}T_n(t)\right)\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right)=f_n(t)\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right) && \text{для } n\in\mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Это заведомо выполнено, если

$$T"_0(t)=\frac{f_0(t)}{2} \qquad \text{для } n=0 \tag{2.9}$$

$$T"_n(t)+\frac{(\pi na)^2}{l^2}T_n(t)=f_n(t) \qquad \text{для } n\in\mathbb{N}, \tag{2.10}$$

Итак, мы получили условия на функции $T_n(t)$, достаточные для того, чтобы функция $u(x,t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}T_n(t)\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right)$ была (если ряд – "хороший") решением уравнения $u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t)$ с краевыми условиями $u_x(0,t)=u_x(l,t)=0$.

<u>Шаг 3.</u> Решаем задачу (2.1) – (2.4)**.**

Из условий задачи (2.1) – (2.4) мы ещё не использовали только начальные условия $u(x,0)=\varphi(x)$, $u_t(x,0)=\psi(x)$. Пусть функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, входящие в начальные условия, разлагаются в ряд по косинусам

$$\varphi(x)=\frac{\varphi_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right), \qquad x\in[0,l] \qquad \text{где} \tag{2.11}$$

$$\varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right)dx. \tag{2.12}$$

$$\psi(x)=\frac{\psi_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right), \qquad x\in[0,l] \qquad \text{где} \tag{2.13}$$

$$\psi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(x)\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right)dx. \tag{2.14}$$

Подставим функцию $u(x,t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}T_n(t)\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right)$ (опять-таки в предположении, что ряд – "хороший") в начальные условия:

$$\sum_{n=0}^{\infty}T_n(0)\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right)=\frac{\varphi_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right);$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n'(0)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) = \frac{\psi_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right).$$

Для выполнения этих равенств достаточно, чтобы

$$T_0(0) = \frac{\varphi_0}{2} \qquad T_0'(0) = \frac{\psi_0}{2} \qquad \text{для } n = 0$$
$$T_n(0) = \varphi_n \qquad T_n'(0) = \psi_n \qquad \text{для } n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, из (2.9), (2.10) и (2.11) – (2.12), для функций $T_n(t)$ имеем задачу Коши:

$$\begin{cases} T"_0(t) = \frac{f_0(t)}{2} \\ T_0(0) = \frac{\varphi_0}{2} \\ T_0'(0) = \frac{\psi_0}{2} \end{cases} \qquad \text{для } n = 0 \tag{2.15}$$

$$\begin{cases} T"_n(t) + \frac{(\pi n a)^2}{l^2} T_n(t) = f_n(t) \\ T_n(0) = \varphi_n \\ T_n'(0) = \psi_n \end{cases} \qquad \text{для } n \in \mathbb{N}. \tag{2.16}$$

Эти задачи Коши имеют единственное решение при любых $f_n \in C[0,T]$ и любых значениях $\varphi_n \in \mathbb{R}$, $\psi_n \in \mathbb{R}$.

При $n = 0$:

$$T_0(t) = \frac{\varphi_0}{2} + \int_0^t \left(\frac{\psi_0}{2} + \frac{1}{2}\int_0^\tau f_0(\varkappa)d\varkappa \right) d\tau. \tag{2.17}$$

При $n \in \mathbb{N}$:
сначала решаем однородное уравнение:

$$T"_n(t) + \frac{(\pi n a)^2}{l^2} T_n(t) = 0.$$

Его общее решение имеет вид:

$$T_n(t) = c_1 \sin\frac{\pi n a t}{l} + c_2 \cos\frac{\pi n a t}{l}.$$

Метод вариации постоянной позволяет нам искать решение уравнения (2.16) в виде

$$T_n(t) = c_1(t)\sin\frac{\pi n a t}{l} + c_2(t)\cos\frac{\pi n a t}{l}, \qquad \text{где } c_{1,2}(t) \text{ – есть решения системы}$$

$$\begin{cases} c_1'(t)\sin\frac{\pi n a t}{l} + c_2'(t)\cos\frac{\pi n a t}{l} = 0; \\ \frac{\pi n a}{l}\left(c_1'(t)\cos\frac{\pi n a t}{l} - c_2'(t)\sin\frac{\pi n a t}{l}\right) = f_n(t). \end{cases}$$

откуда

$$c_1'(t) = \frac{l}{\pi n a} f_n(t)\cos\frac{\pi n a t}{l}, \qquad c_2'(t) = -\frac{l}{\pi n a} f_n(t)\sin\frac{\pi n a t}{l}.$$

С учётом начальных условий $T_n(0) = \varphi_n$, $T_n'(0) = \psi_n$ окончательно получаем

$$c_1(t) = \frac{l}{\pi n a}\psi_n + \frac{l}{\pi n a}\int_0^t f_n(\tau)\cos\frac{\pi n a \tau}{l}d\tau, \qquad c_2(t) = \varphi_n - \frac{l}{\pi n a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{\pi n a \tau}{l}d\tau. \tag{2.18}$$

Таким образом,

$$T_n(t) = \varphi_n \sin\frac{\pi n a t}{l} + \psi_n \frac{l}{\pi n a} \cos\frac{\pi n a t}{l} + \\ + \frac{l}{\pi n a}\left(\sin\frac{\pi n a t}{l}\int\limits_0^t f_n(\tau)\cos\frac{\pi n a \tau}{l}d\tau - \cos\frac{\pi n a t}{l}\int\limits_0^t f_n(\tau)\sin\frac{\pi n a \tau}{l}d\tau\right). \quad (2.19)$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить (2.17), (2.19) в формулу

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right).$$

№ 654^M. Классический способ.

Решить неоднородную начально-краевую задачу для уравнения колебаний с однородными краевыми условиями второго рода.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x), \qquad x \in (0,l), \quad t > 0, \quad (3.1)$$
$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \qquad t > 0, \quad (3.2)$$
$$u(x,0) = \frac{\beta-\alpha}{l}x + \alpha, \qquad x \in [0,l]. \quad (3.3)$$
$$u_t(x,0) = 0, \qquad x \in [0,l]. \quad (3.4)$$
$$(3.5)$$

<u>Шаг 1.</u> Решение задачи Штурма–Лиувилля.
Рассмотрим задачу

$$X"(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (3.6)$$
$$X(0) = X(l) = 0. \quad (3.7)$$

Задача (3.6)–(3.7) есть задача Штурма–Лиувилля. Её решение нам уже известно:

$$\lambda_n = \frac{(\pi n x)^2}{l^2}, \qquad X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

<u>Шаг 2.</u> Будем искать решение уравнения $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t)$ с краевыми условиями $u(0,t) = u(l,t) = 0$ в виде
$u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n T_n(t)$, где функции $X_n(x)$ имееют вид:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.8)$$

Пусть функция $f(x)$ разложена в ряд Фурье по синусам (так как в данном примере f не зависит от t, то f_n тут просто константы, не зависящие от t)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) f_n. \quad (3.9)$$

При этом, коэффициенты данного ряда Фурье ищутся по формулам:

$$f_n = (f, X_n) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx. \quad (3.10)$$

Тогда уравнение (3.1) приобретает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(X_n(x)T"_n(t)-a^2X"_n(x)T_n(t)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right).$$

Для его выполнения достаточно, чтобы

$$X_n(x)T"_n(t)-a^2X"_n(x)T_n(t)=f_n\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)\qquad\text{для}\ \ n\in\mathbb{N},$$

то есть

$$\left(T"_n(t)+\frac{(\pi na)^2}{l^2}T_n(t)\right)\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)=f_n\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)\qquad\text{для}\ \ n\in\mathbb{N}.$$

Это заведомо выполнено, если

$$T"_n(t)+\frac{(\pi na)^2}{l^2}T_n(t)=f_n\qquad\text{для}\ \ n\in\mathbb{N},\tag{3.11}$$

Итак, мы получили условия на функции $T_n(t)$, достаточные для того, чтобы функция $u(x,t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}T_n(t)\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)$ была (если ряд – "хороший") решением уравнения $u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t)$ с краевыми условиями $u(0,t)=u(l,t)=0$.

<u>Шаг 3.</u> Решаем задачу (3.1) – (3.4)**.**

Из условий задачи (3.1) – (3.4) мы ещё не использовали только начальные условия $u(x,0)=\varphi(x)=\frac{\alpha-\beta}{l}x-\alpha$, $u_t(x,0)=\psi=0$. Найдём разложение функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, входящих в начальные условия, в ряд по синусам

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right),\qquad\text{где}\quad\varphi_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\varphi(x)\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)dx.\tag{3.12}$$

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right),\qquad\text{где}\quad\psi_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\psi(x)\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)dx.\tag{3.13}$$

Подставим функцию $u(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)$ (опять-таки в предположении, что ряд – "хороший") в начальные условия:

$$\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}T'_n(0)\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right).$$

Для выполнения этих равенств достаточно, чтобы

$$T_n(0)=\varphi_n\qquad\qquad T'_n(0)=\psi_n\qquad\qquad\text{для}\ \ n\in\mathbb{N}.$$

Таким образом, из (3.11) и (3.12) – (3.13), для функций $T_n(t)$ имеем задачу Коши:

$$\begin{cases}T"_n(t)+\frac{(\pi na)^2}{l^2}T_n(t)=f_n\\[2ex] T_n(0)=\varphi_n\\[2ex] T'_n(0)=\psi_n\end{cases}\qquad\text{для}\ \ n\in\mathbb{N}.\tag{3.14}$$

Эти задачи Коши имеют единственное решение при любых $f_n \in \mathbb{R}$ и любых значениях $\varphi_n \in \mathbb{R}$, $\psi_n \in \mathbb{R}$.
Найдём φ_n, ψ_n из (3.12), (3.13) с учётом, что

$$\varphi(x) = \frac{\beta - \alpha}{l} x + \alpha, \qquad \psi = 0.$$

$$\varphi_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx = \frac{2}{l} \left(- \frac{l}{\pi n} \frac{\beta - \alpha}{l} x \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \Bigg|_{x=0}^{x=l} + \right.$$

$$\left. + \frac{l}{\pi n} \frac{\alpha - \beta}{l} \underbrace{\int\limits_0^l \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx}_{0} + \alpha \int\limits_0^l \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx \right) =$$

$$= \frac{2}{l} \left(- \frac{(-1)^n l(\beta - \alpha)}{\pi n} + \frac{\alpha\, l\, (1 - (-1)^n)}{\pi n} \right) = \frac{2}{\pi n} \left(\alpha - (-1)^n \beta\right),$$

$\psi_n = 0$.

При $n \in \mathbb{N}$:
сначала решаем однородное уравнение:

$$T"_n(t) + \frac{(\pi n a)^2}{l^2} T_n(t) = 0.$$

Его общее решение имеет вид:

$$T_n(t) = c_1 \sin \frac{\pi n a t}{l} + c_2 \cos \frac{\pi n a t}{l}.$$

Простой вид правой части позволяет нам угадать частное решение неоднородного уравнения (3.14) в виде константы: $\frac{l^2 f_n}{(\pi n a)^2}$. Поэтому общее решение (3.14) имеет вид:

$$T_n(t) = c_1 \sin \frac{\pi n a t}{l} + c_2 \cos \frac{\pi n a t}{l} + \frac{l^2 f_n}{(\pi n a)^2}.$$

Из начального условия $T_n'(0) = \psi_n = 0$ следует, что

$$c_1 = 0.$$

А второе начальное условие $T_n(0) = \varphi_n = \frac{2}{\pi n} \left(\alpha - (-1)^n \beta\right)$ даёт нам

$$c_2 = \frac{2}{\pi n} \left(\alpha - (-1)^n \beta\right) - \frac{l^2 f_n}{(\pi n a)^2}.$$

Таким образом,

$$T_n(t) = \left(\frac{2}{\pi n} \left(\alpha - (-1)^n \beta\right) - \frac{l^2 f_n}{(\pi n a)^2} \right) \cos \frac{\pi n a t}{l} + \frac{l^2 f_n}{(\pi n a)^2}. \tag{3.15}$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить (3.15) в формулу

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right).$$

Получим ответ:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi n}\left(\alpha - (-1)^n \beta\right) - \frac{l^2 f_n}{(\pi n a)^2}\right) \cos\frac{\pi n a t}{l} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l^2 f_n}{(\pi n a)^2} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right).$$

№ 654^M. Короткий способ.

Решить неоднородную начально-краевую задачу для уравнения колебаний с однородными краевыми условиями второго рода.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x), \qquad x \in (0,l), \quad t > 0, \tag{4.1}$$
$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \qquad t > 0, \tag{4.2}$$
$$u(x,0) = \frac{\beta - \alpha}{l} x + \alpha, \qquad x \in [0,l]. \tag{4.3}$$
$$u_t(x,0) = 0, \qquad x \in [0,l]. \tag{4.4}$$
$$\tag{4.5}$$

<u>Шаг 1.</u> Так как правые части всех равенств в этой задаче не зависят от времени, будем искать решение задачи в виде суммы $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$.
Найдём $w = w(x)$ такую, чтобы

$$w_{tt} - a^2 w_{xx} = f(x), \qquad x \in (0,l), \quad t > 0, \tag{4.6}$$
$$w(0,t) = w(l,t) = 0, \qquad t > 0. \tag{4.7}$$

Раз $w = w(x)$, то $w_{tt} = 0$, и задача (4.6) – (4.7) принимает более простой вид:

$$w"(x) = -\frac{f(x)}{a^2}, \qquad x \in (0,l), \tag{4.8}$$
$$w(0) = w(l) = 0. \tag{4.9}$$

Проинтегрируем уравнение (4.8) один раз:

$$w'(x) = -\frac{1}{a^2} \int_0^x f(s)ds + c_1.$$

Проинтегрируем второй раз:

$$w(x) = -\frac{1}{a^2} \int_0^x \int_0^y f(s)dsdy + c_1 x + c_2.$$

Из краевого условия $w(0) = 0$ получаем, что $c_2 = 0$, а из $w(l) = 0$, – что

$$0 = -\frac{1}{a^2} \int_0^l \int_0^y f(s)dsdy + c_1 l,$$

откуда

$$c_1 = \frac{1}{la^2} \int\limits_0^l \int\limits_0^y f(s)dsdy.$$

Итак, функция $w(x)$ нам полностью известна:

$$w(x) = \frac{x}{la^2} \int\limits_0^l \int\limits_0^y f(s)dsdy - \frac{1}{a^2} \int\limits_0^x \int\limits_0^y f(s)dsdy. \tag{4.10}$$

Тогда для $v(x,t) = u(x,t) - w(x)$ получается задача

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, \qquad x \in (0,l), \quad t > 0, \tag{4.11}$$

$$v(0,t) = v(l,t) = 0, \qquad t > 0, \tag{4.12}$$

$$v(x,0) = \frac{\beta - \alpha}{l} x + \alpha - w(x) = \varphi(x), \qquad x \in [0,l]. \tag{4.13}$$

$$v_t(x,0) = 0, \qquad x \in [0,l]. \tag{4.14}$$

$$\tag{4.15}$$

Такую задачу мы уже умеем решать (см. номер 643). Её ответ:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \left(A_n \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right)\right), \tag{4.16}$$

где A_n и B_n задаются равенствами

$$A_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx; \tag{4.17}$$

$$B_n = \frac{2}{a\pi n} \int\limits_0^l \psi(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx. \tag{4.18}$$

В нашем случае $\psi = 0$, а $\varphi = \frac{\beta-\alpha}{l} x + \alpha - w(x)$, откуда

$$A_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l \left(\frac{\beta - \alpha}{l} x + \alpha - w(x)\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx, \qquad B_n = 0$$

и функция v имеет вид

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi n a t}{l}\right). \tag{4.19}$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x)$$

найденные функции v и wиз (4.19) и (4.10).

№ 667.

Решить неоднородную начально-краевую задачу для уравнения колебаний с однородными краевыми условиями второго рода.

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t), \qquad x \in (0,l), \quad t > 0, \tag{5.1}$$
$$u(0,t) = u_x(l,t) = 0, \qquad t > 0, \tag{5.2}$$
$$u(x,0) = 0, \qquad x \in [0,l]. \tag{5.3}$$
$$u_t(x,0) = 0, \qquad x \in [0,l]. \tag{5.4}$$
$$\tag{5.5}$$

<u>Шаг 1.</u> Решение задачи Штурма–Лиувилля.
Этот шаг мы проходили, когда решали задачу № 649^M. Результат:
бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

<u>Шаг 2.</u> Будем искать решение уравнения $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t)$ с краевыми условиями $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$ в виде
$u(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} X_n T_n(t)$, где функции $X_n(x)$ имееют вид:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right). \tag{5.6}$$

Пусть функция $f(x,t)$ разложена при каждом $t \in [0,T]$ в ряд Фурье по функциям $X_n(x)$:

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right) f_n(t). \tag{5.7}$$

При этом, коэффициенты данного ряда Фурье ищутся по формулам (как мы убедились, решая № 649^M):

$$f_n(t) = (f, X_n) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x,t)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right)dx. \tag{5.8}$$

Тогда уравнение (5.1) приобретает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(X_n(x)T"_n(t) - a^2 X"_n(x)T_n(t)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right).$$

Для его выполнения достаточно, чтобы

$$X_n(x)T"_n(t) - a^2 X"_n(x)T_n(t) = f_n(t)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right) \qquad \text{для } n \in \mathbb{N},$$

то есть

$$\left(T"_n(t) + \frac{\pi^2(2n-1)^2a^2}{4l^2}T_n(t)\right)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right) = f_n(t)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right) \qquad \text{для } n \in \mathbb{N}.$$

Это заведомо выполнено, если

$$T"_n(t) + \frac{\pi^2(2n-1)^2a^2}{4l^2}T_n(t) = f_n(t) \qquad \text{для } n \in \mathbb{N}, \tag{5.9}$$

Итак, мы получили условия на функции $T_n(t)$, достаточные для того, чтобы функция $u(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} T_n(t)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)$ была (если ряд – "хороший") решением уравнения $u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t)$ с краевыми условиями $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$.

<u>Шаг 3.</u> Решаем задачу (5.1) – (5.4)**.**

Из условий задачи (5.1) – (5.4) мы ещё не использовали только начальные условия $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$. Функции $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$, входящие в начальные условия, разлагаются в ряд по функциям $X_n(x)$

$$\varphi(x) \equiv 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right), \qquad x \in [0,l] \quad \text{где} \;\; \varphi_n = 0, \tag{5.10}$$

$$\psi(x) \equiv 0 = \frac{\psi_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \qquad x \in [0,l] \quad \text{где} \;\; \psi_n = 0 \tag{5.11}$$

Подставим функцию $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right)$ (опять-таки в предположении, что ряд – "хороший") в начальные условия:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right) = 0;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right) = 0.$$

Для выполнения этих равенств достаточно, чтобы

$$T_n(0) = \varphi_n = 0 \qquad\qquad T_n'(0) = \psi_n = 0 \qquad\qquad \text{для} \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, из (5.9) и (5.10) – (5.11), для функций $T_n(t)$ имеем задачу Коши:

$$\begin{cases} T"_n(t) + \frac{\pi^2(2n-1)^2a^2}{4l^2}T_n(t) = f_n(t) \\ T_n(0) = 0 \\ T_n'(0) = 0 \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{5.12}$$

Эти задачи Коши имеют единственное решение при любых $f_n \in C[0,T]$ и любых значениях $\varphi_n \in \mathbb{R}$, $\psi_n \in \mathbb{R}$.

сначала решаем однородное уравнение:

$$T"_n(t) + \frac{\pi^2(2n-1)^2a^2}{4l^2}T_n(t) = 0.$$

Его общее решение имеет вид:

$$T_n(t) = c_1 \sin\frac{\pi(2n-1)at}{2l} + c_2\cos\frac{\pi(2n-1)at}{2l}.$$

Метод вариации постоянной позволяет нам искать решение уравнения (5.12) в виде

$$T_n(t) = c_1(t)\sin\frac{\pi(2n-1)at}{2l} + c_2(t)\cos\frac{\pi(2n-1)at}{2l}, \qquad \text{где} \;\; c_{1,2}(t) \text{ – есть решения системы}$$

$$\begin{cases} c_1'(t)\sin\frac{\pi(2n-1)at}{2l} + c_2'(t)\cos\frac{\pi(2n-1)at}{2l} = 0; \\ \frac{\pi(2n-1)a}{2l}\left(c_1'(t)\cos\frac{\pi(2n-1)at}{2l} - c_2'(t)\sin\frac{\pi(2n-1)at}{2l}\right) = f_n(t). \end{cases}$$

откуда

$$c_1'(t) = \frac{2l}{\pi(2n-1)a}\, f_n(t)\cos\frac{\pi(2n-1)at}{2l}, \qquad c_2'(t) = -\frac{2l}{\pi(2n-1)a}\, f_n(t)\sin\frac{\pi(2n-1)at}{2l}.$$

С учётом начальных условий $T_n(0) = \varphi_n = 0, \quad T_n'(0) = \psi_n = 0$ окончательно получаем

$$c_1(t) = \frac{2l}{\pi(2n-1)a}\int\limits_0^t f_n(\tau)\cos\frac{\pi(2n-1)a\tau}{2l}d\tau, \qquad c_2(t) = -\frac{2l}{\pi(2n-1)a}\int\limits_0^t f_n(\tau)\sin\frac{\pi(2n-1)a\tau}{2l}d\tau. \tag{5.13}$$

Таким образом,

$$T_n(t) = \frac{2l}{\pi(2n-1)a}\left(\sin\frac{\pi(2n-1)at}{2l}\int\limits_0^t f_n(\tau)\cos\frac{\pi(2n-1)a\tau}{2l}d\tau - \right.$$
$$\left. - \cos\frac{\pi(2n-1)at}{2l}\int\limits_0^t f_n(\tau)\sin\frac{\pi(2n-1)a\tau}{2l}d\tau\right). \tag{5.14}$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить (5.14) в формулу

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{\pi(2n-1)x}{2l}.$$

№ I.

Найти решение $u(x,t)$ задачи

$$u_{tt} - a^2u_{xx} = f(x,t), \qquad x\in(0,l),\ \ t>0, \tag{5.15}$$
$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \qquad t>0, \tag{5.16}$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x\in[0,l]. \tag{5.17}$$
$$u_t(x,0) = 0, \qquad x\in[0,l]. \tag{5.18}$$
$$\tag{5.19}$$

Решение: см. № 654^M (Классический способ), стр. 7.

№ II.

Найти решение $u(x,t)$ задачи

$$u_t - a^2u_{xx} = f(x), \qquad x\in(0,l),\ \ t>0, \tag{5.20}$$
$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \qquad t>0, \tag{5.21}$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x\in[0,l]. \tag{5.22}$$
$$\tag{5.23}$$

Решение: см. № 654^M (Короткий способ), стр. 10.

1 Сведение неоднородных краевых условий к однородным.

Рассмотрим неоднородную начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности с неоднородными краевыми условиями первого рода.

$$
\begin{aligned}
&u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), && x \in (0,l), \quad t > 0, && (1.1)\\
&u(0,t) = \mu(t) && t > 0, && (1.2)\\
&u(l,t) = \nu(t), && t > 0, && (1.3)\\
&u(x,0) = \varphi(x), && x \in [0,l]. && (1.4)
\end{aligned}
$$

Её легко свести к аналогичной задаче, но уже с однородными краевыми условиями. Это делается при помощи подходящей замены переменных:

$$v(x,\ t) = u(x,\ t) - \left(\frac{l-x}{l}\ \mu(t) + \frac{x}{l}\ \nu(t)\right). \tag{1.5}$$

В самом деле, при $x = 0$

$$v(0,\ t) = u(0,\ t) - \left(\frac{l}{l}\ \mu(t) + \frac{0}{l}\ \nu(t)\right) = \mu(t) - \mu(t) = 0.$$

А при $x = l$

$$v(l,\ t) = u(l,\ t) - \left(\frac{l-l}{l}\ \mu(t) + \frac{l}{l}\ \nu(t)\right) = \nu(t) - \nu(t) = 0.$$

Что же после такой замены произойдёт с уравнением и начальным условием? Изучим этот вопрос. Поскольку

$$u_t = v_t + \left(\frac{l-x}{l}\ \mu'(t) + \frac{x}{l}\ \nu'(t)\right), \qquad u_{xx} = v_{xx},$$

то уравнение примет вид

$$v_t - a^2 v_{xx} = f(x,t) - \left(\frac{l-x}{l}\ \mu'(t) + \frac{x}{l}\ \nu'(t)\right) = f_1(x,t).$$

Начальное условие преобразуется следующим образом:

$$v(x,0) = \varphi(x) - \left(\frac{l-x}{l}\ \mu(0) + \frac{x}{l}\ \nu(0)\right) = \varphi_1(x).$$

Итак, исходная задача свелась к задаче нахождения функции $v(x,t)$ с однородными краевыми условиями:

$$
\begin{aligned}
&v_t - a^2 v_{xx} = f_1(x,t), && x \in (0,l), \quad t > 0,\\
&v(0,t) = 0 && t > 0,\\
&v(l,t) = 0, && t > 0,\\
&v(x,0) = \varphi_1(x), && x \in [0,l],
\end{aligned}
$$

где

$$f_1(x,t) = f(x,t) - \left(\frac{l-x}{l}\ \mu'(t) + \frac{x}{l}\ \nu'(t)\right), \qquad \varphi_1(x) = \varphi(x) - \left(\frac{l-x}{l}\ \mu(0) + \frac{x}{l}\ \nu(0)\right).$$

Замечание 1.1. В случае любых краевых условий, кроме условий II-го рода на обоих концах, можно подобрать функцию

$$w(x,\ t) = (a_1 x + b_1)\mu(t) + (a_2 x + b_2)\nu(t)$$

так, чтобы для функции $v(x,\ t) = u(x,\ t) - w(x,\ t)$ выполнялись однородные краевые условия того же вида.
Отдельный случай представляют собой условия II-го рода на обоих концах. В этом случае функцию w в виде $w(x,t) = (a_1 x + b_1)\mu(t) + (a_2 x + b_2)\nu(t)$ найти можно не всегда, но всегда её можно найти в виде

$$w(x,t) = (a_1 x^2 + b_1 x)\mu(t) + (a_2 x^2 + b_2 x)\nu(t).$$

Пример 1.1. Краевые условия

$$u_x(0,t) + hu(0,t) = \mu(t), \qquad u_x(l,t) = \nu(t)$$

сводятся к однородным так:
найдём $w(x,t) = (a_1 x + b_1)\mu(t) + (a_2 x + b_2)\nu(t)$, чтобы она удовлетворяла краевым условиям

$$w_x(0,t) + hw(0,t) = \mu(t), \qquad w_x(l,t) = \nu(t).$$

Тогда

$$w(0,t) = b_1\mu(t) + b_2\nu(t), \qquad w_x(0,t) = a_1\mu(t) + a_2\nu(t), \qquad w_x(l,t) = a_1\mu(t) + a_2\nu(t).$$

Из второго краевого условия

$$\nu(t) = a_1\mu(t) + a_2\nu(t)$$

получаем:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1.$$

А из первого краевого условия с учётом найденных $a_{1,2}$

$$\mu(t) = (a_1\mu(t) + a_2\nu(t)) + h\left(b_1\mu(t) + b_2\nu(t)\right) = hb_1\mu(t) + (1 + hb_2)\nu(t)$$

находим:

$$b_1 = \frac{1}{h}, \quad b_2 = -\frac{1}{h}.$$

Наконец,

$$w(x,t) = \frac{1}{h}\mu(t) + \frac{xh - 1}{h}\nu(t).$$

Пример 1.2. Краевые условия II-го рода

$$u_x(0,t) = \mu(t), \qquad u_x(l,t) = \nu(t)$$

сводятся к однородным так:
найдём $w(x,t) = (a_1 x^2 + b_1 x)\mu(t) + (a_2 x^2 + b_2 x)\nu(t)$, чтобы она удовлетворяла краевым условиям

$$w_x(0,t) = \mu(t), \qquad w_x(l,t) = \nu(t)$$

Тогда

$$w_x(0,t) = b_1\mu(t) + b_2\nu(t), \qquad w_x(l,t) = (2a_1 l + b_1)\mu(t) + (2a_2 l + b_2)\nu(t).$$

Из первого краевого условия

$$\mu(t) = b_1\mu(t) + b_2\nu(t)$$

получаем:

$$b_1 = 1, \quad b_2 = 0.$$

А из второго краевого условия с учётом найденных $b_{1,2}$

$$\nu(t) = (2a_1 l + b_1)\mu(t) + (2a_2 l + b_2)\nu(t) = (2a_1 l + 1)\mu(t) + 2a_2 l\nu(t)$$

находим:

$$a_1 = -\frac{1}{2l}, \quad a_2 = \frac{1}{2l}.$$

Наконец,

$$w(x,t) = \left(x - \frac{x^2}{2l}\right)\mu(t) + \frac{x^2}{2l}\nu(t).$$

№ 659.

Свести задачу

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \qquad x \in (0,l), \quad t > 0, \tag{2.1}$$

$$u(0,t) = \mu(t), \quad u(l,t) = \nu(t), \qquad t > 0, \tag{2.2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in [0,l], \tag{2.3}$$

$$u_t(x,0) = \psi(x), \qquad x \in [0,l] \tag{2.4}$$

к задаче с однородными краевыми условиями.

Шаг № 1. Построение вспомогательной функции.

Найдём $w(x,t) = (a_1 x + b_1)\mu(t) + (a_2 x + b_2)\nu(t)$, чтобы она удовлетворяла краевым условиям

$$w(0,t) = \mu(t), \qquad w(l,t) = \nu(t)$$

Вид искомой функции $w(x,t)$ даёт на концах отрезка

$$w(0,t) = b_1\mu(t) + b_2\nu(t), \qquad w(l,t) = (a_1 l + b_1)\mu(t) + (a_2 l + b_2)\nu(t).$$

Из первого краевого условия

$$\mu(t) = b_1\mu(t) + b_2\nu(t)$$

получаем:

$$b_1 = 1, \quad b_2 = 0.$$

А из второго краевого условия с учётом найденных $b_{1,2}$

$$\nu(t) = (a_1 l + b_1)\mu(t) + (a_2 l + b_2)\nu(t) = (a_1 l + 1)\mu(t) + a_2 l\nu(t)$$

находим:

$$a_1 = -\frac{1}{l}, \quad a_2 = \frac{1}{l}.$$

Наконец,

$$w(x,t) = \left(1 - \frac{x}{l}\right)\mu(t) + \frac{x}{l}\nu(t) = \frac{l-x}{l}\mu(t) + \frac{x}{l}\nu(t).$$

Для построенной таким образом функции $w(x,t)$ имеем:

$$w_t = \frac{l-x}{l}\mu'(t) + \frac{x}{l}\nu'(t), \quad w_{tt} = \frac{l-x}{l}\mu"(t) + \frac{x}{l}\nu"(t), \quad w_{xx} \equiv 0, \qquad w(x,0) = \frac{l-x}{l}\mu(0) + \frac{x}{l}\nu(0).$$

Поэтому $w(x,t)$ удовлетворяет равенствам:

$$w_{tt} - w_{xx} = \frac{l-x}{l}\mu"(t) + \frac{x}{l}\nu"(t), \qquad x \in (0,l), \quad t > 0, \tag{2.5}$$

$$w(0,t) = \mu(t), \quad w(l,t) = \nu(t), \qquad t > 0, \tag{2.6}$$

$$w(x,0) = \frac{l-x}{l}\mu(0) + \frac{x}{l}\nu(0), \qquad x \in [0,l]. \tag{2.7}$$

$$w_t(x,0) = \frac{l-x}{l}\mu'(0) + \frac{x}{l}\nu'(0), \qquad x \in [0,l]. \tag{2.8}$$

<u>Шаг № 2.</u> Сведение к задаче с однородными краевыми условиями.
Для функции $v(x,t) = u(x,t) - w(x,t)$, вычитая из (**??**) – (**??**) равенства (2.5) – (2.8), получим задачу

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = -\frac{l-x}{l}\mu"(t) - \frac{x}{l}\nu"(t), \qquad x \in (0,l), \quad t > 0, \tag{2.9}$$

$$v(0,t) = v(l,t) = 0, \qquad t > 0, \tag{2.10}$$

$$v(x,0) = \varphi(x) - \left(\frac{l-x}{l}\mu(0) + \frac{x}{l}\nu(0)\right), \qquad x \in [0,l]. \tag{2.11}$$

$$v_t(x,0) = \psi(x) - \left(\frac{l-x}{l}\mu'(0) + \frac{x}{l}\nu'(0)\right), \qquad x \in [0,l]. \tag{2.12}$$

<u>№ 660.</u>

Свести задачу

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \qquad x \in (0,l), \quad t > 0, \tag{3.1}$$

$$u_x(0,t) = \mu(t), \quad u(l,t) = \nu(t), \qquad t > 0, \tag{3.2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in [0,l], \tag{3.3}$$

$$u_t(x,0) = 0, \qquad x \in [0,l] \tag{3.4}$$

к задаче с однородными краевыми условиями.
<u>Шаг № 1.</u> Построение вспомогательной функции.
Найдём $w(x,t) = (a_1x + b_1)\mu(t) + (a_2x + b_2)\nu(t)$, чтобы она удовлетворяла краевым условиям

$$w(0,t) = \mu(t), \qquad w(l,t) = \nu(t)$$

Вид искомой функции $w(x,t)$ даёт на концах отрезка

$$w_x(0,t) = a_1\mu(t) + a_2\nu(t), \qquad w(l,t) = (a_1l + b_1)\mu(t) + (a_2l + b_2)\nu(t).$$

Из первого краевого условия

$$\mu(t) = a_1\mu(t) + a_2\nu(t)$$

получаем:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 0.$$

А из второго краевого условия с учётом найденных $a_{1,2}$

$$\nu(t) = (a_1l + b_1)\mu(t) + (a_2l + b_2)\nu(t) = (l + b_1)\mu(t) + b_2\nu(t)$$

находим:

$$b_1 = -l, \quad b_2 = 1.$$

Наконец,

$$w(x,t) = (x - l)\mu(t) + \nu(t).$$

Для построенной таким образом функции $w(x,t)$ имеем:

$$w_t = (x-l)\mu'(t) + \nu'(t), \quad w_{tt} = (x-l)\mu"(t) + \nu"(t), \quad w_{xx} \equiv 0, \qquad w(x,0) = (x-l)\mu(0) + \nu(0).$$

Поэтому $w(x,t)$ удовлетворяет равенствам:

$$\begin{aligned}
&w_{tt} - w_{xx} = (x-l)\mu"(t) + \nu"(t), && x \in (0,l), \ \ t > 0, && (3.5)\\
&w_x(0,t) = \mu(t), \quad w(l,t) = \nu(t), && t > 0, && (3.6)\\
&w(x,0) = (x-l)\mu(0) + \nu(0), && x \in [0,l]. && (3.7)\\
&w_t(x,0) = (x-l)\mu'(0) + \nu'(0), && x \in [0,l]. && (3.8)
\end{aligned}$$

<u>Шаг № 2.</u> Сведение к задаче с однородными краевыми условиями.
Для функции $v(x,t) = u(x,t) - w(x,t)$, вычитая из (3.1) – (3.4) равенства (3.5) – (3.8), получим задачу

$$\begin{aligned}
&v_{tt} - v_{xx} = -(x-l)\mu"(t) - \nu"(t), && x \in (0,l), \ \ t > 0, && (3.9)\\
&v_x(0,t) = v(l,t) = 0, && t > 0, && (3.10)\\
&v(x,0) = \varphi(x) - \left((x-l)\mu(0) + \nu(0)\right), && x \in [0,l]. && (3.11)\\
&v_t(x,0) = \psi(x) - \left((x-l)\mu'(0) + \nu'(0)\right), && x \in [0,l]. && (3.12)
\end{aligned}$$

<u>№ 661.</u>

Свести задачу

$$\begin{aligned}
&u_{tt} - u_{xx} = f(x,t), && x \in (0,l), \ \ t > 0, && (4.1)\\
&u(0,t) = \mu(t), \quad u_x(l,t) + hu(l,t) = \nu(t), \qquad h > 0, && t > 0, && (4.2)\\
&u(x,0) = 0, && x \in [0,l], && (4.3)\\
&u_t(x,0) = \psi(x), && x \in [0,l] && (4.4)
\end{aligned}$$

к задаче с однородными краевыми условиями.

<u>№ 662.</u>

Свести задачу

$$\begin{aligned}
&u_{tt} - u_{xx} = f(x,t), && x \in (0,l), \ \ t > 0, && (4.1)\\
&u_x(0,t) - hu(0,t) = \mu(t), \quad u_x(l,t) = \nu(t), \qquad h > 0, && t > 0, && (4.2)\\
&u(x,0) = \varphi(x), && x \in [0,l], && (4.3)\\
&u_t(x,0) = \psi(x), && x \in [0,l] && (4.4)
\end{aligned}$$

к задаче с однородными краевыми условиями.

<u>№ 663.</u>

Свести к задаче с однородными краевыми условиями.

$$\begin{aligned}
&u_{tt} - u_{xx} = 0, && x \in (0,l), \ \ t > 0, && (5.1)\\
&u_x(0,t) - hu(0,t) = \mu(t), \quad u_x(l,t) + gu(l,t) = \nu(t), \qquad h,\, g > 0 && t > 0, && (5.2)\\
&u(x,0) = 0, && x \in [0,l], && (5.3)\\
&u_t(x,0) = 0, && x \in [0,l] && (5.4)
\end{aligned}$$

№ 655.

Найти решение $u(x,t)$ задачи

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x), \qquad x \in (0,l), \quad t > 0, \tag{6.1}$$
$$u_x(0,t) = \alpha, \quad u_x(l,t) = \beta, \qquad t > 0, \tag{6.2}$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in [0,l]. \tag{6.3}$$
$$u_t(x,0) = \psi(x), \qquad x \in [0,l]. \tag{6.4}$$

Шаг № 1. Сведём эту задачу к задаче с однородными краевыми условиями.
Найдём $w(x,t) = (a_1x^2 + b_1x)\alpha + (a_2x^2 + b_2x)\beta$, чтобы она удовлетворяла краевым условиям

$$w_x(0,t) = \alpha, \qquad w_x(l,t) = \beta$$

Вид искомой функции $w(x,t)$ даёт на концах отрезка

$$w_x(0,t) = b_1\alpha + b_2\beta, \qquad w_x(l,t) = (2a_1l + b_1)\alpha + (2a_2l + b_2)\beta.$$

Из первого краевого условия

$$\alpha = b_1\alpha + b_2\beta$$

получаем:

$$b_1 = 1, \quad b_2 = 0.$$

А из второго краевого условия с учётом найденных $b_{1,2}$

$$\beta = (2a_1l + b_1)\alpha + (2a_2l + b_2)\beta = (2a_1l + 1)\alpha + 2a_2l\beta$$

находим:

$$a_1 = -\frac{1}{2l}, \quad a_2 = \frac{1}{2l}.$$

Наконец,

$$w(x,t) = \left(x - \frac{x^2}{2l}\right)\alpha + \frac{x^2}{2l}\beta = \alpha x + \frac{\beta - \alpha}{2l}x^2.$$

Для построенной таким образом функции $w(x,t)$ имеем:

$$w_t = w_{tt} \equiv 0, \qquad w_{xx} = \frac{\beta - \alpha}{l}, \qquad w(x,0) = \alpha x + \frac{\beta - \alpha}{2l}x^2.$$

Поэтому $w(x,t)$ удовлетворяет равенствам:

$$w_{tt} - a^2 w_{xx} = a^2\frac{\alpha - \beta}{l}, \qquad x \in (0,l), \quad t > 0, \tag{6.5}$$
$$w_x(0,t) = \alpha, \quad w_x(l,t) = \beta, \qquad t > 0, \tag{6.6}$$
$$w(x,0) = \alpha x + \frac{\beta - \alpha}{2l}x^2, \qquad x \in [0,l]. \tag{6.7}$$
$$w_t(x,0) = 0, \qquad x \in [0,l]. \tag{6.8}$$

Поэтому для функции $v(x,t) = u(x,t) - w(x,t)$, вычитая из (6.1) – (6.4) равенства (6.5) – (6.8), получим задачу

$$v_{tt} - a^2 v_{xx} = f(x,t) - a^2\frac{\alpha - \beta}{l} = f_1(x), \qquad x \in (0,l), \quad t > 0, \tag{6.9}$$
$$v_x(0,t) = v_x(l,t) = 0, \qquad t > 0, \tag{6.10}$$
$$v(x,0) = \varphi(x) - \left(\alpha x + \frac{\beta - \alpha}{2l}x^2\right) = \varphi_1(x), \qquad x \in [0,l]. \tag{6.11}$$
$$v_t(x,0) = \psi(x), \qquad x \in [0,l]. \tag{6.12}$$

<u>Шаг № 2.</u> Решаем задачу с однородными краевыми условиями (6.9) – (6.12).
Эта задача – частный случай решённой ранее задачи № 669^{M2}. Её решение:

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \tag{6.13}$$

где

$$T_0(t) = \frac{\varphi_0}{2} + \int\limits_0^t \left(\frac{\psi_0}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_0^\tau f_0(\varkappa)d\varkappa\right) d\tau. \tag{6.14}$$

$$T_n(t) = \varphi_{1n} \sin\frac{\pi n a t}{l} + \psi_n \frac{l}{\pi n a} \cos\frac{\pi n a t}{l} + \\ + \frac{l}{\pi n a}\left(\sin\frac{\pi n a t}{l}\int\limits_0^t f_{1n}(\tau)\cos\frac{\pi n a \tau}{l}d\tau - \cos\frac{\pi n a t}{l}\int\limits_0^t f_{1n}(\tau)\sin\frac{\pi n a \tau}{l}d\tau\right). \tag{6.15}$$

При этом, в нашем случае $f_1(x,t) = f_1(x) \quad \Rightarrow \quad f_{1n}(t) = f_{1n}$,

$$\varphi_{1n} = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi_1(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx, \qquad \psi_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \psi(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx, \qquad f_{1n} = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f_1(x)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx.$$

Наконец, поскольку f_{1n} не зависят от времени, их в (6.15) можно вынести за знаки интегралов:

$$\int\limits_0^t f_{1n}(\tau)\cos\frac{\pi n a \tau}{l}d\tau = f_{1n}\int\limits_0^t \cos\frac{\pi n a \tau}{l}d\tau = f_{1n}\frac{l}{\pi n a}\sin\frac{\pi n a t}{l},$$

$$\int\limits_0^t f_{1n}(\tau)\sin\frac{\pi n a \tau}{l}d\tau = f_{1n}\int\limits_0^t \sin\frac{\pi n a \tau}{l}d\tau = -f_{1n}\frac{l}{\pi n a}\left(\cos\frac{\pi n a t}{l} - 1\right).$$

Кроме того, T_0 в силу (6.16) и независимости f_{10} от t имеет вид:

$$T_0(t) = \frac{\varphi_{10}}{2} + \int\limits_0^t \left(\frac{\psi_0}{2} + \frac{f_{10}}{2}\int\limits_0^\tau d\varkappa\right)d\tau = \frac{\varphi_{10}}{2} + \frac{\psi_0}{2}\,t + \frac{f_{10}}{2}\,\frac{t^2}{2}. \tag{6.16}$$

Подставляя всё это в (6.13), получим:

$$v(x,t) = \frac{\varphi_{10}}{2} + \frac{\psi_0}{2}\,t + \frac{f_{10}}{4}\,t^2 + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_{1n}\sin\frac{\pi n a t}{l} + \psi_n\frac{l}{\pi n a}\cos\frac{\pi n a t}{l}\right)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_{1n}}{(\pi n a)^2}\left(\sin^2\frac{\pi n a t}{l} + \cos^2\frac{\pi n a t}{l} - \cos\frac{\pi n a t}{l}\right)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right).$$

или, короче:

$$v(x,t) = \frac{\varphi_{10}}{2} + \frac{\psi_0}{2}\,t + \frac{f_{10}}{4}\,t^2 + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_{1n}\sin\frac{\pi n a t}{l} + \psi_n\frac{l}{\pi n a}\cos\frac{\pi n a t}{l} - \frac{f_{1n}}{(\pi n a)^2}\cos\frac{\pi n a t}{l}\right)\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right). \tag{6.17}$$

<u>Ответ:</u> $u(x,t) = \alpha x + \frac{\beta-\alpha}{2l}x^2 + v(x,t)$, где $v(x,t)$ задана в (6.17).

1 Метод Фурье для эллиптического уравнения.

№ 717 а). Случай однородных краевых условий по x.

Найти решение $u(x,t)$ краевой задачи

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & x\in(0,\ l),\ \ y\in(0,\ s),\\ u(0,y)=u_x(l,y)=0, & y\in(0,\ s),\\ u(x,0)=0,\quad u(x,s)=f(x), & x\in(0,\ l). \end{cases} \tag{1.1}$$

Шаг 1. Будем искать решение уравнения $u_{xx}+u_{yy}=0$ с краевыми условиями $u(0,y)=u_x(l,y)=0$ в виде $U(x,y)=X(x)Y(y)$.

Сразу заметим, что краевые условия при $x=0$, $x=l$ означают для функции $X(x)$ следующее:

$$X(0)=X'(l)=0. \tag{1.2}$$

Подставим $U(x,y)$ в уравнение, получим:

$$X"(x)Y(y)=-X(x)Y"(y)$$

Предположив, что $X(x)Y(y)\neq 0$, поделим это равенство на $X(x)Y(y)\neq 0$:

$$\frac{X"(x)}{X(x)}=-\frac{Y"(y)}{Y(y)}=\lambda.$$

Отсюда для функции $X(x)$ имеем задачу

$$X"(x)+\lambda X(x)=0, \tag{1.3}$$

$$X(0)=X'(l)=0, \tag{1.4}$$

а для функции $Y(y)$ – уравнение:

$$Y"(y)-\lambda Y(y)=0, \qquad y\in(0,s). \tag{1.5}$$

Задача (1.3)–(1.4) есть задача Штурма–Лиувилля. Общее решение уравнения (1.3) имеет вид

$$X(x)=c_1\sin(\sqrt{\lambda}\,x)+c_2\cos(\sqrt{\lambda}\,x) \qquad \text{при}\ \ \lambda>0; \tag{1.6}$$

$$X(x)=c_1e^{\sqrt{-\lambda}\,x}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}\,x} \qquad \text{при}\ \ \lambda<0; \tag{1.7}$$

$$X(x)=c_1x+c_2 \qquad \text{при}\ \ \lambda=0; \tag{1.8}$$

- При $\lambda>0$ имеем из краевого условия $X(0)=0$, что $c_2=0$, $\Rightarrow$ $X(x)=c_1\sin(\sqrt{\lambda}\,x)$ $\Rightarrow$ $X'(x)=c_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\,x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l)=0$ получаем, что $\sqrt{\lambda}\,l=\pi\left(\frac{1}{2}+k\right)$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

$$\lambda_n=\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2, \qquad n\in\mathbb{N}. \tag{1.9}$$

  Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$X_n(x)=\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right), \qquad n\in\mathbb{N}. \tag{1.10}$$

- При $\lambda < 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_1 = -c_2$, $\Rightarrow$ $X(x) = 2c_1 \operatorname{sh}\sqrt{-\lambda}\,x$ $\Rightarrow$ $X'(x) = 2c_1\sqrt{-\lambda}\operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda}\,x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет отрицательных собственных чисел
- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_1 x$ $\Rightarrow$ $X'(x) = c_1$). Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет собственного числа, равного нулю.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

задачи (1.3)–(1.4). Стало быть, рассматривать задачу (1.5) имеет смысл только при $\lambda = \lambda_n$, и мы получаем семейство задач:

$$Y"_n(y) - \lambda_n Y_n(y) = 0, \qquad y \in (0, s), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.11}$$

Решение этого линейного однородного уравнения первого порядка имеет вид:

$$Y_n(y) = A_n e^{\frac{\pi(2n-1)}{2l}y} + B_n e^{-\frac{\pi(2n-1)}{2l}y}, \qquad y \in (0, s), \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.12}$$

где A_n и B_n – произвольные постоянные.

<u>Шаг 2.</u> Решаем задачу (1.1)**.**

Будем искать решение задачи (1.1) в виде $u(x, y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n(x)Y_n(y)$, т.е.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)\left(A_n e^{\frac{\pi(2n-1)}{2l}y} + B_n e^{-\frac{\pi(2n-1)}{2l}y}\right). \tag{1.13}$$

Из условий задачи мы ещё не использовали только краевые условия по y:

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, s) = f(x), \qquad x \in (0,\ l).$$

Для функции $u(x, y)$ искомого вида они означают:

$$0 = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)Y_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n)\, X_n(x), \tag{1.14}$$

$$f(x) = u(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)Y_n(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n e^{\frac{\pi(2n-1)}{2l}s} + B_n e^{-\frac{\pi(2n-1)}{2l}s}\right) X_n(x), \tag{1.15}$$

Пусть функция $f(x)$, входящая в начальное условие, разлагается в ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n(x), \tag{1.16}$$

Выясним, какими должны быть коэффициенты f_n. Для этого домножим (1.16) на $X_m = \sin\left(\pi\left(-\frac{1}{2} + m\right)x\right)$ скалярно в смысле $L_2[0, l]$:

$$(f, X_m) = f_m \int\limits_0^l \sin^2\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx = \frac{f_m}{2}\int\limits_0^l \left(1 - \cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)\right)dx =$$

$$= \frac{f_m}{2}\int\limits_0^l dx = \frac{l f_m}{2},$$

откуда

$$f_n = \frac{2}{l}(f, X_n) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx. \tag{1.17}$$

Итак, для коэффициентов A_n и B_n из представления (1.13) решения $u(x,t)$, в силу (1.14) имеем:

$$A_n + B_n = 0.$$

А из (1.15)–(1.17) с учётом $B_n = -A_n$ получаем:

$$A_n\left(e^{\frac{\pi(2n-1)}{2l}s} - e^{-\frac{\pi(2n-1)}{2l}s}\right) = 2A_n\,\mathrm{sh}\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}s\right) = f_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx.$$

И, наконец,

$$A_n = -B_n = \frac{f_n}{2\,\mathrm{sh}\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}s\right)} = \frac{1}{l\,\mathrm{sh}\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}s\right)}\int\limits_0^l f(x)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx.$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (1.13) найденные коэффициенты A_n и B_n из (1). Получим

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{\mathrm{sh}\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}s\right)}\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right), \tag{1.18}$$

где f_n определены равенством (1.17).

№ 717 е).Случай неоднородных краевых условий по x.

Найти решение $u(x,t)$ краевой задачи

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x \in (0,\ l),\ \ y \in (0,\ s), \\ u(0,y) = 0, \quad u(l,y) = Ty, & y \in (0,\ s), \\ u(x,0) = 0, \quad u(x,s) = \frac{sTx}{l}, & x \in (0,\ l). \end{cases} \tag{2.1}$$

Шаг 1. Сведение краевых условий при $x = 0$, $x = l$ к однородным.

Аналогично задачам с неоднородными краевыми условиями для параболических и гиперболических уравнений, можно легко найти функцию

$$w(x,y) = (a_1x + b_1)\mu(y) + (a_2x + b_2)\nu(y)$$

, такую, чтобы

$$w(0,y) = \mu(y), \quad w(l,y) = \nu(y).$$

В нашем случае $\mu(y) = 0,\ \ \nu(y) = Ty$, и функция $w(x,y)$ имеет вид

$$w(x,y) = \frac{Txy}{l}. \tag{2.2}$$

Найденная функция $w(x,y)$ удовлетворяет равенствам

$$\begin{cases} w_{xx} + w_{yy} = 0, & x \in (0,\ l),\ \ y \in (0,\ s), \\ w(0,y) = 0, \quad w(l,y) = Ty, & y \in (0,\ s), \\ w(x,0) = 0, \quad w(x,s) = \frac{Txs}{l}, & x \in (0,\ l). \end{cases} \tag{2.3}$$

Поэтому для функции
$$v(x,y) = u(x,y) - w(x,y)$$
мы получаем задачу:
$$\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} = 0, & x \in (0,\ l),\ \ y \in (0,\ s), \\ v(0,y) = 0, \quad v(l,y) = 0, & y \in (0,\ s), \\ v(x,0) = 0, \quad v(x,s) = 0, & x \in (0,\ l). \end{cases} \tag{2.4}$$

<u>Шаг 2.</u> Решение задачи (2.4)**.** В данном случае нет необходимости искать решение методом Фурье, поскольку задача (2.4) имеет, очевидно, решение
$$v(x,t) \equiv 0, \qquad x \in (0,\ l),\ \ y \in (0,\ s).$$
Из теории краевых задач известно, что решение таких задач единственно (в случае если хотя бы одно краевое условие – не второго рода), поэтому ничего другого мы методом Фурье не найдём.

Поэтому нам осталось написать ответ:
$$u(x,y) = w(x,y) = \frac{Txy}{l}, \qquad x \in (0,\ l),\ \ y \in (0,\ s).$$

№ 718 а).

Найти решение $u(x,t)$ краевой задачи
$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x \in (0,\ +\infty),\ \ y \in (0,\ l), \\ u(0,y) = f(y), \quad u(\infty,y) = 0, & y \in (0,\ l), \\ u(x,0) = u_y(x,l) = 0, & x \in (0,\ +\infty). \end{cases} \tag{3.1}$$
В данном случае задача поставлена в полуполосе и, поскольку из двух переменных только y меняется на конечном отрезке, задачу Штурма – Лиувилля мы можем получить только для функции $Y(y)$.

<u>Шаг 1.</u> Будем искать решение уравнения $u_{xx} + u_{yy} = 0$ с краевыми условиями $u(x,0) = u_y(x,l) = 0$ в виде $\qquad U(x,y) = X(x)Y(y).$

Сразу заметим, что краевые условия при $y = 0$, $y = l$ означают для функции $Y(y)$ следующее:
$$Y(0) = Y'(l) = 0. \tag{3.2}$$
Подставим $U(x,y)$ в уравнение, получим:
$$X"(x)Y(y) = -X(x)Y"(y)$$
Предположив, что $X(x)Y(y) \neq 0$, поделим это равенство на $X(x)Y(y) \neq 0$:
$$\frac{X"(x)}{X(x)} = -\frac{Y"(y)}{Y(y)} = -\lambda.$$
Отсюда для функции $Y(y)$ имеем задачу
$$Y"(y) + \lambda Y(y) = 0, \tag{3.3}$$
$$Y(0) = Y'(l) = 0, \tag{3.4}$$

а для функции $X(x)$ – уравнение:

$$X"(x) - \lambda X(x) = 0, \qquad x \in (0,\ \infty). \tag{3.5}$$

Задача (3.3)–(3.4) есть задача Штурма–Лиувилля. Её решение мы уже находили в № 717 а).

Эта задача имеет бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2, \quad Y_n(y) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}y\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

Стало быть, рассматривать задачу (3.5) имеет смысл только при $\lambda = \lambda_n$, и мы получаем семейство задач:

$$X"_n(x) - \lambda_n X_n(x) = 0, \qquad x \in (0,\ \infty), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.6}$$

Решение этого линейного однородного уравнения первого порядка имеет вид:

$$X_n(x) = A_n e^{\frac{\pi(2n-1)}{2l}x} + B_n e^{-\frac{\pi(2n-1)}{2l}x}, \qquad y \in (0, s), \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.7}$$

где A_n и B_n – произвольные постоянные.

<u>Шаг 2.</u> Решаем задачу (3.1)**.**

Будем искать решение задачи (3.1) в виде $u(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n(x)Y_n(y)$, т.е.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}y\right)\left(A_n e^{\frac{\pi(2n-1)}{2l}x} + B_n e^{-\frac{\pi(2n-1)}{2l}x}\right). \tag{3.8}$$

Из условий задачи мы ещё не использовали только краевые условия по x:

$$u(0,y) = f(y), \quad u(\infty, y) = 0, \qquad y \in (0,\ l).$$

Для функции $u(x,y)$ искомого вида первое условие означает:

$$f(y) = u(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(0)Y_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n)\, Y_n(y), \tag{3.9}$$

А второе условие $u(\infty, y) = 0$ может выполняться только при

$$A_n = 0, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, наше решение должно иметь вид

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}y\right) e^{-\frac{\pi(2n-1)}{2l}x}. \tag{3.10}$$

Пусть функция $f(y)$, входящая в начальное условие, разлагается в ряд

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n Y_n(y), \tag{3.11}$$

Как мы выяснили, решая № 717 а), коэффициенты f_n имеют вид:

$$f_n = \frac{2}{l}(f, Y_n) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(y)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}y\right)dx. \tag{3.12}$$

Итак, для коэффициентов B_n из (3.9)–(3.12) получаем:

$$B_n = f_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(y)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}y\right)dx. \tag{3.13}$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (3.10) найденные коэффициенты B_n из (3.13). Получим

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}y\right)e^{-\frac{\pi(2n-1)}{2l}x}, \tag{3.14}$$

где f_n определены равенством (3.12).

№ 717 б).

Найти решение $u(x,t)$ краевой задачи

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & x\in(0,\ l),\ \ y\in(0,\ s),\\ u_x(0,y)=u_x(l,y)=0, & y\in(0,\ s),\\ u(x,0)=A,\quad u(x,s)=Bx, & x\in(0,\ l).\end{cases}$$

№ 717 в).

Найти решение $u(x,t)$ краевой задачи

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & x\in(0,\ l),\ \ y\in(0,\ s),\\ u_x(0,y)=u(l,y)=0, & y\in(0,\ s),\\ u(x,0)=0,\quad u(x,s)=Bx, & x\in(0,\ l).\end{cases}$$

№ 717 г).

Найти решение $u(x,t)$ краевой задачи

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & x\in(0,\ l),\ \ y\in(0,\ s),\\ u(0,y)=U,\quad u_x(l,y)=0, & y\in(0,\ s),\\ u_y(x,0)=T\sin\frac{\pi x}{2l},\quad u(x,s)=0, & x\in(0,\ l).\end{cases}$$

№ 717 д).

Найти решение $u(x,t)$ краевой задачи

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & x\in(0,\ l),\ \ y\in(0,\ s),\\ u(0,y)=0,\quad u_x(l,y)=q, & y\in(0,\ s),\\ u(x,0)=0,\quad u(x,s)=U, & x\in(0,\ l).\end{cases}$$

№ 718 б).

Найти решение $u(x,t)$ краевой задачи

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & x\in(0,\ +\infty),\ \ y\in(0,\ l),\\ u(0,y)=f(y),\quad u(\infty,y)=0, & y\in(0,\ l),\\ u_y(x,0)=u_y(x,l)+hu(x,l)=0, & x\in(0,\ +\infty),\quad h>0.\end{cases}$$

№ 718 в).

Найти решение $u(x,t)$ краевой задачи

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, & x\in(0,\ +\infty),\ \ y\in(0,\ l),\\ u(0,y)=y(l-y),\quad u(\infty,y)=0, & y\in(0,\ l),\\ u(x,0)=u(x,l)=0, & x\in(0,\ +\infty).\end{cases}$$

1. Функция Грина задачи Дирихле.

0.1. Определение и свойства функции Грина.

Рассмотрим краевую задачу для уравнения Лапласа с краевыми условиями I-го рода.
Постановка задачи: Пусть D – область евклидова пространства E^n, а $S = \partial D$ – гладкая $(n-1)$-мерная граница D. Найти функцию $u(x,\ t) \in C^2(D) \bigcap C\left(\overline{D}\right)$, удовлетворяющую условиям

$$\Delta u \equiv \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0, \qquad x \in D, \tag{0.1}$$

$$u(x)\Big|_{x\in S} = \varphi(x), \qquad x \in S, \tag{0.2}$$

где $\varphi(x) \in C(S)$ – заданная, непрерывная на S функция.

Такая задача называется **задачей Дирихле**. (Если бы краевые условия были условиями II-го рода, здача называлась бы задачей Неймана.)

Опр. 0.1. Фундаментальным (или элементарным) решением уравнения Лапласа называется функция $E(x,\ \xi), \quad x \neq \xi \in \overline{D}$ вида

$$E(x,\ \xi) = \begin{cases} \frac{1}{(n-2)|\xi - x|^{n-2}} & n > 2, \\ -\ln|\xi - x| & n = 2, \end{cases} \tag{0.3}$$

где $|\xi - x| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (\xi_i - x_i)^2}$ – расстояние между точками x и ξ.

Опр. 0.2. Функцией Грина $G(x,\ \xi)$ задачи Дирихле для уравнения Лапласа называется функция $G(x,\ \xi), \quad x \neq \xi \in \overline{D}$, обладающая сойствами:

1. Она имеет вид
$$G(x,\ \xi) = E(x,\ \xi) + g(x,\ \xi),$$
где $E(x,\ \xi)$ – Фундаментальное решение уравнения Лапласа, а функция $g(x,\ \xi)$ гармонична в D как по x, так и по ξ:
$$\Delta_x g(x,\ \xi) = \Delta_\xi g(x,\ \xi) = 0, \qquad x, \xi \in D.$$
2. $$G(x,\ \xi)\Big|_{x\in S} = G(x,\ \xi)\Big|_{\xi\in S} = 0.$$

Утверждение 0.1 (Свойства функции Грина).
Усл. *$G(x,\ \xi)$ функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в D.*
Утв.

1°	$G(x,\ \xi) \geqslant 0,$	$x \neq \xi \in D;$
2°	$\Delta_x G(x,\ \xi) = \Delta_\xi G(\xi,\ x) = 0,$	$x \neq \xi \in D;$
3°	$G(x,\ \xi) = G(\xi,\ x),$	$x \neq \xi \in \overline{D}.$

Теорема 0.1 (Представление решения задачи Дирихле при помощи функции Грина).
Усл. *$G(x,\ \xi)$ функция Грина задачи Дирихле (0.1) – (0.2).*
Утв. *Решение задачи (0.1) – (0.2) можно представить в виде:*

$$u(x) = -\frac{1}{\omega_n}\int\limits_S \frac{\partial G(x,\ \xi)}{\partial \nu_\xi}\varphi(\xi)dS_\xi, \tag{0.4}$$

где $\omega_n = \frac{2\left(\sqrt{\pi}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ *– площадь единичной сферы в* E^n,
$\Gamma(t)$ *– Гамма-функция Эйлера,* $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{(n-2)!!}{\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}}\sqrt{\pi}$,
$\frac{\partial}{\partial \nu_\xi}$ *– производная по внешней нормали к поверхности* S *в точке* $\xi \in S$,
dS_ξ *– элемент площади поверхности* S *в точке* ξ.

Пример 0.1. В случае, когда $D = \{|x| < 1\}$ – единичный шар в E^n для задачи Дирихле (0.1) – (0.2) функция Грина имеет вид:

$$G(x,\ \xi) = E(x,\ \xi) - E\left(|x|\xi,\ \frac{x}{|x|}\right),$$

а решение задачи представляется формулой Пуассона:

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{|\xi|=1} \frac{1-|x|^2}{|\xi - x|^n}\,\varphi(\xi)dS_\xi.$$

0.2. Метод электростатических изображений (метод отражений)

0.2.1. Физическая интерпретация для E^3.

В трёхмерном пространстве функцию Грина задачи Дирихле можно интерпретировать физически как потенциал поля, созданного единичным точечным зарядом, помещенным внутри заземлённой проводящей замкнутой поверхности.

Фиксируем две точки: x и y в области D. В точку x мы поместим единичный положительный заряд, а в точке y будем наблюдать результирующий потенциал.

Пусть в точке $x \in D$ расположен единичный положительный элекрический заряд. Он индуцирует на заземлённой S некоторе распределение зарядов.

Тогда потенциал электростатического поля в точке $y \in D$ есть сумма потенциала, созданного единичным зарядом, и потенциала, созданного индуцированными на S зарядами:

$$G(x,\ y) = \frac{1}{|x-y|} + g(x,\ y).$$

При этом функция $g(x,\ y)$, соответствующая потенциалу, созданному индуцированными на S зарядами, является гармонической как по $x \in D$, так и по $y \in D$.

При такой интерпретации, свойство симметричности функции Грина $G(x,\ y) = G(y,\ x)$ является математическим выражением **принципа взаимности** в физике: источник, помещённый в точке x производит в точке y такое же действие, какое производит в точке x такой же источник, помещённый в точке y. Заметим, что функцию Грина называют также **функцией точечного источника**. Заметим также, что в некоторых книгах, например, в книге Тихонов А.Н., Самарский А.А. "Уравнения математической физики"(Гл. 4, §4), коэффициент $\frac{1}{\omega_n}$ ставится не в формуле представления решения (0.4), а в определении функции источника.

Таким образом, чтобы научиться решать задачу Дирихле, надо уметь находить функцию $G = E+g$, а поскольку E – известная функция ((0.3),стр. 1), вся задача сводится к построению функции $g(x,\ \xi)$. По опеределению функции Грина, от g требуется, чтобы

$$\Delta_x g(x,\ \xi) = \Delta_\xi g(x,\ \xi) = 0, \qquad x, \xi \in D; \tag{0.5}$$

$$g(x,\ \xi)\Big|_{x\in S} = -E(x,\ \xi)\Big|_{x\in S}. \tag{0.6}$$

Эти условия, фактически, представляют собой также задачу Дирихле, только уже для функции g. Однако, эта задача во многих случаях существенно проще исходной, так как в ней граничная функция имеет очень специальный вид, а в исходной задаче она совершенно произвольна. Кроме того, найдя функцию Грина для задачи Дирихле в области D, мы сразу получаем решения всех задач Дирихле в этой области.

Наиболее распространённым способом построения функции Грина являеся **метод отражений (электростатических изображений)**. Его идея состоит в том, что функция g, представляющая собой поле индуцированных на S зарядов, строится как поле зарядов, расположенных вне области D, и таких, чтобы

$$g(x,\ \xi)\Big|_{x\in S} = -E(x,\ \xi)\Big|_{x\in S}.$$

Её можно найти, располагая заряды подходящей величины в точках, симметричных относительно S точкам, в которых расположены заряды внутри D.

0.2.2. Алгоритм

<u>Шаг 1.</u> Строим фундаментальное решение уравнения Лапласа по формуле (0.3).

<u>Шаг 2.</u> Помещаем в точку $\xi \in D$ единичный положительный заряд. Обозначаем через ξ^* точку, симметричную точке ξ относительно поверхности S, и помещаем в ξ^* заряд $q(\xi)$.

<u>Шаг 3.</u> Ищем решение задачи (0.5) – (0.6) в виде

$$g = -E(qx,\ q\xi^*) = \begin{cases} -\frac{1}{(n-2)q|\xi^*-x|^{n-2}} & n > 2, \\ \ln\Big(q\,|\xi^* - x|\Big) & n = 2, \end{cases}$$

подбирая подходящим образом заряд q. Так определённая функция g будет гармонической (то есть удовлетворяющей уравнению Лапласа), поскольку E – гармоническая. По этому находить q надо из условия (0.6). При этом удобно считать, что точка $x \in S$, – тогда q находится из краевого условия $g(x,\ \xi)\Big|_{x\in S} = -E(x,\ \xi)\Big|_{x\in S}$. (Поскольку в формуле (0.4) интеграл берётся по $\xi \in S$, а функции E, g и G обладают свойством симметричности, полученная функция $G = E + g$ будет удовлетворять определению функции Грина.)

<u>Шаг 4.</u> Строим функцию Грина по формуле $G(x,\ \xi) = E(x,\ \xi) + g(x,\ \xi)$. (В ответе надо избавиться, по возможности от выражений, зависящих от ξ^*, выразив координаты ξ^* через координаты ξ. Это делается потому, что в формуле (0.4) $\xi \in S$, и $\xi^* = \xi$, а не $x \in S$, как на Шаге 3.)

Задача 1.

Методом отражений найти функцию Грина задачи Дирихле (0.1) – (0.2) *в полуплоскости* $x_2 > 0$.

<u>Шаг 1.</u> Строим фундаментальное решение уравнения Лапласа по формуле (0.3). Для данного двумерного случая $n = 2$, и по формуле (0.3) имеем:

$$E(x,\ \xi) = -\ln|\xi - x|\,, \qquad |\xi - x| = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2}. \tag{1.1}$$

<u>Шаг 2.</u> Помещаем в точку $\xi = (\xi_1,\ \xi_2)$, $\xi_2 > 0$, единичный положительный заряд. Обозначаем через ξ^* точку, симметричную точке ξ относительно прямой $S = \{\xi_2 = 0\}$.

$$\xi^* = (\xi_1,\ -\xi_2). \tag{1.2}$$

<u>Шаг 3.</u> Ищем решение задачи (0.5) – (0.6) в виде

$$g = -E(qx,\ q\xi^*) = \ln\Big(q\,|\xi^* - x|\Big) = \ln q + \frac{1}{2}\ \ln\big((\xi_1 - x_1)^2 + (-\xi_2 - x_2)^2\big) =$$
$$= \ln q + \frac{1}{2}\ \ln\big((\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 + x_2)^2\big)\,.$$

Чтобы выпонялось краевое условие $g(x,\ \xi)\Big|_{x\in S} = -E(x,\ \xi)\Big|_{x\in S}$, очевидно, необходимо взять $q(\xi) \equiv 1$. При таком выборе, безусловно, будет выполнятся и уравнение Лапласа $\Delta_\xi g(x,\ \xi) = 0$ (поскольку оно выполняется для $E(x,\ \xi)$).
Таким образом,

$$g = \ln\big((\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 + x_2)^2\big)\,.$$

<u>Шаг 4.</u> Строим функцию Грина по формуле $G(x,\ \xi) = E(x,\ \xi) + g(x,\ \xi)$.

$$G(x,\ \xi) = \ln|\xi^* - x| - \ln|\xi - x| = \ln\frac{|\xi^* - x|}{|\xi - x|} = \ln\frac{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 + x_2)^2}{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2}.$$

<u>Ответ:</u> $G(x,\ \xi) = \ln\frac{|\xi^* - x|}{|\xi - x|} = \ln\frac{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 + x_2)^2}{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2}$.

Задача 2.

Методом отражений найти функцию Грина задачи Дирихле (0.1) – (0.2) *в полупространстве* $x_3 > 0$.

<u>Шаг 1.</u> Строим фундаментальное решение уравнения Лапласа по формуле (0.3). Для данного двумерного случая $n = 3$, и по формуле (0.3) имеем:

$$E(x,\ \xi) = \frac{1}{|\xi - x|}, \qquad |\xi - x| = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2}. \tag{2.1}$$

<u>Шаг 2.</u> Помещаем в точку $\xi = (\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)$, $\xi_3 > 0$, единичный положительный заряд. Обозначаем через ξ^* точку, симметричную точке ξ относительно плоскости $S = \{\xi_3 = 0\}$.

$$\xi^* = (\xi_1,\ \xi_2,\ -\xi_3). \tag{2.2}$$

<u>Шаг 3.</u> Ищем решение задачи (0.5) – (0.6) в виде

$$g = -E(qx,\ q\xi^*) = -\frac{1}{q\,|\xi^* - x|} = -\frac{1}{q\sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (-\xi_3 - x_3)^2}} =$$
$$= -\frac{1}{q\sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 + x_3)^2}}.$$

Чтобы выпонялось краевое условие $g(x,\ \xi)\Big|_{x\in S} = -E(x,\ \xi)\Big|_{x\in S}$, очевидно, необходимо взять $q \equiv 1$. При таком выборе, безусловно, будет выполнятся и уравнение Лапласа $\Delta_\xi g(x,\ \xi) = 0$ (поскольку оно выполняется для $E(x,\ \xi)$).
Таким образом,

$$g = -\frac{1}{\sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 + x_3)^2}}.$$

<u>Шаг 4.</u> Строим функцию Грина по формуле $G(x,\ \xi) = E(x,\ \xi) + g(x,\ \xi)$.

$$G(x,\ \xi) = \frac{1}{|\xi - x|} - \frac{1}{|\xi^* - x|}.$$

<u>Ответ:</u> $G(x,\ \xi) = \frac{1}{\sqrt{(\xi_1-x_1)^2+(\xi_2-x_2)^2+(\xi_3-x_3)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(\xi_1-x_1)^2+(\xi_2-x_2)^2+(\xi_3+x_3)^2}}.$

Задача 3.

Методом отражений найти функцию Грина задачи Дирихле (0.1) – (0.2) *в круге* $|x-x^0| < R$.

<u>Шаг 1.</u> Строим фундаментальное решение уравнения Лапласа по формуле (0.3).
Для данного двумерного случая $n = 2$, и по формуле (0.3) имеем:

$$E(x,\ \xi) = -\ln|\xi - x|\,, \qquad |\xi - x| = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2}. \tag{3.1}$$

<u>Шаг 2.</u> Помещаем в точку $\xi = (\xi_1,\ \xi_2)$, $(\xi_1 - x_1^0)^2 + (\xi_2 - x_1^0)^2 < R^2$, единичный положительный заряд. Обозначаем через ξ^* точку, симметричную точке ξ относительно окружности

$$S = \{|x - x^0| = R\},$$

то есть точку, лежащую на луче $[x^0,\ \xi)$ на таком расстоянии $|\xi^* - x^0|$ от центра окружности, чтобы $|\xi - x^0| \cdot |\xi^* - x^0| = R^2$. Или в векторном виде:

$$\overrightarrow{x^0\xi^*} = \frac{R^2}{|\xi - x^0|^2}\,\overrightarrow{x^0\xi},$$

откуда

$$\xi^* = x^0 + \frac{R^2}{|\xi - x^0|^2}\,\left(\xi - x^0\right). \tag{3.2}$$

<u>Шаг 3.</u> Ищем решение задачи (0.5) – (0.6) в виде

$$g = -E(qx,\ q\xi^*) = \ln\Big(q\,|\xi^* - x|\Big) = \ln q + \ln|\xi^* - x|\,. \tag{3.3}$$

Чтобы правильно подобрать величину заряда q, положим $x \in S$, то есть $|x - x^0| = R$ (см. рис. 1). Тогда треугольники $\Delta x^0\xi x$ и $\Delta x^0 x\xi^*$ подобны, так как угол при вершине x^0 у них общий, а прилегающие к нему стороны пропорциональны:

$$\frac{|\xi - x^0|}{|x - x^0|} = \frac{|x - x^0|}{|\xi^* - x^0|}$$

в силу свойства симметричных точек ξ и ξ^*:

$$\left|\xi - x^0\right| \cdot \left|\xi^* - x^0\right| = R^2.$$

Рис. 1: Симметричные точки и подобные треугольники

Величина q должна быть такой, чтобы для функции g вида (3.3) выполнялось краевое условие

$$g(x,\ \xi)\Big|_{x\in S} = -E(x,\ \xi)\Big|_{x\in S}.$$

В нашем случае это означает, что

$$q = \frac{|\xi - x|}{|\xi^* - x|}.$$

И из подобия треугольников $\Delta x^0\xi x$ и $\Delta x^0 x\xi^*$ окончательно получаем

$$q = \frac{|\xi - x^0|}{R}. \tag{3.4}$$

Итак,

$$g(x,\ \xi) = \ln\frac{|\xi - x^0|}{R} + \ln|\xi^* - x| = \ln\frac{|\xi - x^0|\cdot|\xi^* - x|}{R}.$$

<u>Шаг 4.</u> Строим функцию Грина по формуле $G(x,\ \xi) = E(x,\ \xi) + g(x,\ \xi)$.

$$G(x,\ \xi) = \ln\frac{|\xi - x^0|\cdot|\xi^* - x|}{R} - \ln|\xi - x| = \ln\frac{|\xi - x^0|\cdot|\xi^* - x|}{R\,|\xi - x|}.$$

Чтобы избавиться в ответе от ξ^*, ещё раз воспользуемся симметричностью точек ξ и ξ^*:

$$\left|\xi - x^0\right|\cdot\left|\xi^* - x^0\right| = R^2$$

и векторным соотношением:

$$\xi^* - x \equiv \overrightarrow{x\xi^*} = \overrightarrow{x^0\xi^*} - \overrightarrow{x^0x} = \frac{R^2}{\left|\xi - x^0\right|^2}\cdot\overrightarrow{x^0\xi} - \overrightarrow{x^0x},$$

откуда

$$\frac{|\xi^* - x|}{R} = R\left|\frac{x - x^0}{R^2} - \frac{\xi - x^0}{\left|\xi - x^0\right|^2}\right|$$

Окончательно получаем:

<u>Ответ:</u> $\quad G(x,\ \xi) = \ln\frac{R\left|\xi - x^0\right|\cdot\left|\frac{x-x^0}{R^2} - \frac{\xi - x^0}{|\xi - x^0|^2}\right|}{|\xi - x|}.$

Задача 4.

Методом отражений найти функцию Грина задачи Дирихле (0.1) – (0.2) *в шаре* $|x - x^0| < R$.

<u>Шаг 1.</u> Строим фундаментальное решение уравнения Лапласа по формуле (0.3). Для данного двумерного случая $n = 3$, и по формуле (0.3) имеем:

$$E(x,\ \xi) = -\frac{1}{|\xi - x|}, \qquad |\xi - x| = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2}. \tag{4.1}$$

<u>Шаг 2.</u> Помещаем в точку $\xi = (\xi_1,\ \xi_2)$, $(\xi_1 - x_1^0)^2 + (\xi_2 - x_1^0)^2 < R^2$, единичный положительный заряд. Обозначаем через ξ^* точку, симметричную точке ξ относительно сферы

$$S = \{|x - x^0| = R\},$$

то есть точку, лежащую на луче $[x^0,\ \xi)$ на таком расстоянии $|\xi^* - x^0|$ от центра окружности, чтобы $|\xi - x^0|\cdot|\xi^* - x^0| = R^2$. Или в векторном виде:

$$\overrightarrow{x^0\xi^*} = \frac{R^2}{|\xi - x^0|^2}\,\overrightarrow{x^0\xi},$$

откуда

$$\xi^* = x^0 + \frac{R^2}{|\xi - x^0|^2}\,\left(\xi - x^0\right). \tag{4.2}$$

<u>Шаг 3.</u> Ищем решение задачи (0.5) – (0.6) в виде

$$g = -E(qx,\ q\xi^*) = -\,\frac{1}{q\,|\xi^* - x|}. \tag{4.3}$$

Чтобы правильно подобрать величину заряда q, положим $x \in S$, то есть $|x - x^0| = R$ (см. рис. 1). Тогда треугольники $\Delta x^0\xi x$ и $\Delta x^0 x\xi^*$ подобны, так как угол при вершине x^0 у них общий, а прилегающие к нему стороны пропорциональны:

$$\frac{|\xi - x^0|}{|x - x^0|} = \frac{|x - x^0|}{|\xi^* - x^0|}$$

в силу свойства симметричных точек ξ и ξ^*:

$$\left|\xi - x^0\right| \cdot \left|\xi^* - x^0\right| = R^2.$$

Величина q должна быть такой, чтобы для функции g вида (3.3) выполнялось краевое условие

$$g(x,\ \xi)\Big|_{x\in S} = -E(x,\ \xi)\Big|_{x\in S}.$$

В нашем случае это означает, что

$$q = \frac{|\xi - x|}{|\xi^* - x|}.$$

И из подобия треугольников $\Delta x^0\xi x$ и $\Delta x^0 x\xi^*$ окончательно получаем

$$q = \frac{|\xi - x^0|}{R}.$$

Итак,

$$g(x,\ \xi) = -\,\frac{R}{|\xi - x^0| \cdot |\xi^* - x|}.$$

<u>Шаг 4.</u> Строим функцию Грина по формуле $G(x,\ \xi) = E(x,\ \xi) + g(x,\ \xi)$.

$$G(x,\ \xi) = \frac{1}{|\xi - x|} - \frac{R}{|\xi - x^0| \cdot |\xi^* - x|}.$$

Чтобы избавиться в ответе от ξ^*, ещё раз воспользуемся симметричностью точек ξ и ξ^*:

$$\left|\xi - x^0\right| \cdot \left|\xi^* - x^0\right| = R^2$$

и векторным соотношением:

$$\xi^* - x \equiv \overrightarrow{x\xi^*} = \overrightarrow{x^0\xi^*} - \overrightarrow{x^0x} = \frac{R^2}{\left|\xi - x^0\right|^2} \cdot \overrightarrow{x^0\xi} - \overrightarrow{x^0x},$$

откуда

$$\frac{|\xi^* - x|}{R} = R\left|\frac{x - x^0}{R^2} - \frac{\xi - x^0}{|\xi - x^0|^2}\right|$$

Окончательно получаем:

<u>Ответ:</u> $\quad G(x,\ \xi) = \frac{1}{|\xi - x|} - \frac{1}{R|\xi - x^0| \cdot \left|\frac{x - x^0}{R^2} - \frac{\xi - x^0}{|\xi - x^0|^2}\right|}.$

Задача 5.

Методом отражений найти функцию Грина задачи Дирихле (0.1) – (0.2) *в четверть-плоскости* $D = \{x_1 > 0,\ \ x_2 > 0\}$.

<u>Шаг 1.</u> Строим фундаментальное решение уравнения Лапласа по формуле (0.3). Для данного двумерного случая $n = 2$, и по формуле (0.3) имеем:

$$E(x,\ \xi) = -\ln|\xi - x|\,, \qquad |\xi - x| = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2}. \tag{5.1}$$

<u>Шаг 2.</u>

Помещаем в точку $\xi = (\xi_1,\ \xi_2) \in D$ единичный положительный заряд. Обозначаем через ξ^*, ξ^- точки, симметричную точке ξ относительно прямых $\{\xi_1 = 0\}$ и $\{\xi_2 = 0\}$, а через ξ^+ – точку, симметричную точкам ξ^*, ξ^- относительно прямых $\{\xi_2 = 0\}$ и $\{\xi_1 = 0\}$, соответственно.

$$\begin{aligned} \xi^* &= (-\xi_1,\ \xi_2), \\ \xi^- &= (\xi_1,\ -\xi_2), \\ \xi^+ &= (-\xi_1,\ -\xi_2). \end{aligned}$$

Рис. 2: Отражения точки ξ от границ угла

<u>Шаг 3.</u> Ищем решение задачи (0.5) – (0.6) в виде

$$\begin{aligned} g = -E(q_1 x,\ q_1\xi^*) - E(q_2 x,\ q_2\xi^-) + E(q_3 x,\ q_3\xi^+) = \\ = \ln\frac{q_1 q_2}{q_3} + \ln\frac{|\xi^* - x|\cdot|\xi^- - x|}{|\xi^+ - x|}. \end{aligned}$$

Чтобы выпонялось краевое условие

$$g(x,\ \xi)\Big|_{x\in S} = -E(x,\ \xi)\Big|_{x\in S},$$

возьмём $q_1 = q_2 = q_3 = 1$. Таким образом,

$$g = \ln\frac{|\xi^* - x|\cdot|\xi^- - x|}{|\xi^+ - x|}.$$

<u>Шаг 4.</u> Строим функцию Грина по формуле $G(x,\ \xi) = E(x,\ \xi) + g(x,\ \xi)$.

$$G(x,\ \xi) = \ln\frac{|\xi^* - x|\cdot|\xi^- - x|}{|\xi^+ - x|} - \ln|\xi - x| = \ln\frac{|\xi^* - x|\cdot|\xi^- - x|}{|\xi^+ - x|\cdot|\xi - x|}.$$

Здесь легко заметить, что выбор $q_1 = q_2 = q_3 = 1$ был удачен: в самом деле, тогда, как и требует определение функции Грина,

$$G(x,\ \xi)\Big|_{x\in S} = \ln\frac{|\xi^* - x|\cdot|\xi^- - x|}{|\xi^+ - x|\cdot|\xi - x|} = \ln(1\cdot 1) = 0.$$

Приводить полученную функцию Грина к виду, где нет ξ^*, ξ^-, ξ^+, не станем (это громоздко, но несложно).

<u>Ответ:</u> $\quad G(x,\ \xi) = \ln\frac{|\xi^* - x|\cdot|\xi^- - x|}{|\xi^+ - x|\cdot|\xi - x|}$.

Задача 6.

Методом отражений найти функцию Грина задачи Дирихле (0.1) – (0.2) *в полукруге* $D = \{x_1^2 + x_2^2 \leqslant R,\ \ x_2 > 0\}$.

<u>Шаг 1.</u> Строим фундаментальное решение уравнения Лапласа по формуле (0.3). Для данного двумерного случая $n = 2$, и по формуле (0.3) имеем:

$$E(x,\ \xi) = -\ln|\xi - x|\,, \qquad |\xi - x| = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2}. \tag{5.1}$$

<u>Шаг 2.</u>

Помещаем в точку $\xi = (\xi_1,\ \xi_2) \in D$ единичный положительный заряд. Обозначаем через ξ^* – точку, симметричную точке ξ относительно окружности, через ξ^- – точку, симметричную точке ξ, относительно прямой $\{\xi_2 = 0\}$, а через ξ^+ – точку, симметричную точке ξ^* относительно прямой $\{\xi_2 = 0\}$, а точке ξ^- относительно окружности.

$$\xi^* = \frac{R^2}{|\xi|^2}\,\xi,$$
$$\xi^- = (\xi_1,\ -\xi_2),$$
$$\xi^+ = \frac{R^2}{|\xi|^2}\,\xi^-.$$

Рис. 3: Отражения точки ξ от границ полукруга

<u>Шаг 3.</u> Ищем решение задачи (0.5) – (0.6) в виде

$$g = -E(q_1 x,\ q_1\xi^*) - E(q_2 x,\ q_2\xi^-) + E(q_3 x,\ q_3\xi^+) = \\ = \ln\frac{q_1 q_2}{q_3} + \ln\frac{|\xi^* - x|\cdot|\xi^- - x|}{|\xi^+ - x|}.$$

Чтобы выпонялось краевое условие

$$g(x,\ \xi)\Big|_{x\in S} = -E(x,\ \xi)\Big|_{x\in S} = \ln|\xi - x|\,\Big|_{x\in S},$$

возьмём заряд внутри полной окружности $q_2 = 1$, а симметричные ему и заряду в точке ξ относительно окружности $q_1 = q_3 = \frac{|\xi|}{R}$ (по аналогии с формулой (3.4), стр. 6). Таким образом,

$$g = \ln\frac{|\xi^* - x|\cdot|\xi^- - x|}{|\xi^+ - x|}.$$

<u>Шаг 4.</u> Строим функцию Грина по формуле $G(x,\ \xi) = E(x,\ \xi) + g(x,\ \xi)$.

$$G(x,\ \xi) = \ln\frac{|\xi^* - x|\cdot|\xi^- - x|}{|\xi^+ - x|} - \ln|\xi - x| = \ln\frac{|\xi^* - x|\cdot|\xi^- - x|}{|\xi^+ - x|\cdot|\xi - x|}.$$

Здесь легко заметить, что выбор $q_1 = q_2 = q_3 = 1$ был удачен: в самом деле, тогда, как и требует определение функции Грина,

$$G(x,\ \xi)\Big|_{x\in S} = \ln\frac{|\xi^* - x|\cdot|\xi^- - x|}{|\xi^+ - x|\cdot|\xi - x|} = \ln(1) = 0.$$

Приводить полученную функцию Грина к виду, где нет ξ^*, ξ^-, ξ^+, не станем (это несложно, но громоздко).
Заметим, что, хотя вид ответа точно такой же, что и в задаче №5, функция G здесь иная, поскольку совершенно иначе вычисляются координаты точек ξ^* и ξ^+.
Ответ: $G(x,\ \xi) = \ln \frac{|\xi^* - x| \cdot |\xi^- - x|}{|\xi^+ - x| \cdot |\xi - x|}$.

Задача 7.

Методом отражений найти функцию Грина задачи Дирихле (0.1) – (0.2) *в четверти круга* $D = \{x_1^2 + x_2^2 \leqslant R,\ \ x_{1,2} > 0\}$.

Шаг 1. Строим фундаментальное решение уравнения Лапласа по формуле (0.3).
Для данного двумерного случая $n = 2$, и по формуле (0.3) имеем:

$$E(x,\ \xi) = -\ln|\xi - x|\,, \qquad |\xi - x| = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2}. \tag{5.1}$$

Шаг 2.

Помещаем в точку $\xi = (\xi_1,\ \xi_2) \in D$ единичный положительный заряд. Строим точки $\xi_1^*,\ \xi_2^*,\ \xi_3^*$ – точки, симметричные точке ξ относительно сторон четверти круга. Далее строим точки $\xi_4^*,\ \xi_5^*,\ \xi_6^*,\ \xi_7^*$, симметричные построенным точкам относительно продолжений сторон четверти круга (то есть относительно окружности и прямых $\{\xi_1 = 0\}$, $\{\xi_2 = 0\}$) (см. рисунок 4).

Рис. 4: Отражения точки ξ от границ четверти круга

Шаг 3. Ищем решение задачи (0.5) – (0.6) в виде

$$g = -E(q_1 x,\ q_1\xi_1^*) + E(q_2 x,\ q_2\xi_2^*) - E(q_3 x,\ q_3\xi_3^*) + E(q_4 x,\ q_4\xi_4^*) - E(q_5 x,\ q_5\xi_5^*) + E(q_6 x,\ q_6\xi_6^*) -$$
$$- E(q_7 x,\ q_7\xi_7^*) = \ln\frac{q_1 q_3 q_5 q_7}{q_2 q_4 q_6} + \ln\frac{|\xi_1^* - x| \cdot |\xi_3^* - x| \cdot |\xi_5^* - x| \cdot |\xi_7^* - x|}{|\xi_2^* - x| \cdot |\xi_4^* - x| \cdot |\xi_6^* - x|}.$$

Чтобы выпонялось краевое условие

$$g(x,\ \xi)\Big|_{x\in S} = -E(x,\ \xi)\Big|_{x\in S} = \ln|\xi - x|\,\Big|_{x\in S},$$

возьмём заряды внутри полной окружности $q_3 = q_5 = q_6 = 1$, а симметричные им и заряду в точке ξ относительно окружности $q_1 = q_2 = q_4 = q_7 = \frac{|\xi|}{R}$ (по аналогии с формулой (3.4), стр. 6).
Таким образом,

$$g = \ln\frac{|\xi_1^* - x| \cdot |\xi_3^* - x| \cdot |\xi_5^* - x| \cdot |\xi_7^* - x|}{|\xi_2^* - x| \cdot |\xi_4^* - x| \cdot |\xi_6^* - x|}.$$

Шаг 4. Строим функцию Грина по формуле $G(x,\ \xi) = E(x,\ \xi) + g(x,\ \xi)$.

$$G(x,\ \xi) = \ln\frac{|\xi_1^* - x| \cdot |\xi_3^* - x| \cdot |\xi_5^* - x| \cdot |\xi_7^* - x|}{|\xi_2^* - x| \cdot |\xi_4^* - x| \cdot |\xi_6^* - x|} - \ln|\xi - x| = \ln\frac{|\xi_1^* - x| \cdot |\xi_3^* - x| \cdot |\xi_5^* - x| \cdot |\xi_7^* - x|}{|\xi_2^* - x| \cdot |\xi_4^* - x| \cdot |\xi_6^* - x| \cdot |\xi - x|}.$$

Здесь легко заметить, что выбор $q_1, \ldots, q_7$ был удачен: в самом деле, тогда, как и требует определение функции Грина,

$$G(x,\ \xi)\Big|_{x\in S} = \ln \frac{|\xi_1^* - x| \cdot |\xi_3^* - x| \cdot |\xi_5^* - x| \cdot |\xi_7^* - x|}{|\xi_2^* - x| \cdot |\xi_4^* - x| \cdot |\xi_6^* - x| \cdot |\xi - x|}\Big|_{x\in S} = \ln(1) = 0.$$

Приводить полученную функцию Грина к виду, где нет $\xi_1^*,\ \ldots,\ \xi_7^*$, не станем (это не очень сложно, но очень громоздко).

<u>Ответ:</u> $G(x,\ \xi) = \ln \frac{|\xi_1^*-x|\cdot|\xi_3^*-x|\cdot|\xi_5^*-x|\cdot|\xi_7^*-x|}{|\xi_2^*-x|\cdot|\xi_4^*-x|\cdot|\xi_6^*-x|\cdot|\xi-x|}$.

1. Задача для уравнения теплопроводности в шаре.

1.1. Постановка 1-ой, 2-ой и 3-ей краевых задач в шаре

Введём обозначения:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$B_R = \left\{(x, y, z): \quad r^2 < R^2\right\} \quad - \quad \text{открытый шар радиуса } R$$

$$\Gamma_R \equiv \partial B = \left\{(x, y, z): \quad r^2 = R^2\right\} \quad - \quad \text{сфера радиуса } R$$

$$\overline{B}_R \equiv B_R \bigcup \Gamma_R = \left\{(x, y, z): \quad r^2 \leqslant R^2\right\} \quad - \quad \text{замкнутый шар радиуса } R$$

$$\Omega_T = B_R \times (0,\ T) = \left\{(x, y, z;\ t): \quad r^2 < R^2;\ \ t \in (0,\ T)\right\} \quad - \quad \text{открытый цилиндр}$$

$$\Omega_T^* = B_R \times (0,\ T] = \left\{(x, y, z;\ t): \quad r^2 < R^2;\ \ t \in (0,\ T]\right\} \quad - \quad \text{открытый цилиндр с «верхней крышкой}$$

$$\overline{\Omega}_T = \overline{B}_R \times [0,\ T] = \left\{(x, y, z;\ t): \quad r^2 \leqslant R^2;\ \ t \in [0,\ T]\right\} \quad - \quad \text{замкнутый цилиндр}$$

1-ая краевая задача.

Найти функцию $u(x,\ y,\ z,\ t)$ в классе $u \in C^{2,1}_{x,t}(\Omega_T^*) \bigcap C(\overline{\Omega}_T)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u, & \text{в } \ \Omega_T^*; \\ u(x,\ y,\ z,\ 0) = f(x,\ y,\ z), & \text{в } \ B_R; \\ u(x,\ y,\ z,\ t)\Big|_{r=R} = \mu(x,\ y,\ z,\ t) & 0 < t < T, \end{cases} \tag{1.1}$$

где $a > 0$ – заданное число, $f \in C(\overline{B})$, $\mu \in C(\Gamma_R)$ – заданные функции.

2-ая краевая задача.

Найти функцию $u(x,\ y,\ z,\ t)$ в классе $u \in C^{2,1}_{x,t}(\Omega_T^*) \bigcap C^{1,0}_{x,t}(\overline{\Omega}_T)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u, & \text{в } \ \Omega_T^*; \\ u(x,\ y,\ z,\ 0) = f(x,\ y,\ z), & \text{в } \ B_R; \\ \frac{\partial u}{\partial r}(x,\ y,\ z,\ t)\Big|_{r=R} = \nu(x,\ y,\ z,\ t) & 0 < t < T, \end{cases} \tag{1.2}$$

где $a > 0$ – заданное число, $f \in C^1(\overline{B})$, $\nu \in C(\Gamma_R)$ – заданные функции.

3-ая краевая задача.

Найти функцию $u(x,\ y,\ z,\ t)$ в классе $u \in C^{2,1}_{x,t}(\Omega_T^*) \bigcap C^{1,0}_{x,t}(\overline{\Omega}_T)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u, & \text{в } \ \Omega_T^*; \\ u(x,\ y,\ z,\ 0) = f(x,\ y,\ z), & \text{в } \ B_R; \\ \frac{\partial u}{\partial r}(x,\ y,\ z,\ t) + hu(x,\ y,\ z,\ t)\Big|_{r=R} = \varkappa(x,\ y,\ z,\ t) & 0 < t < T, \end{cases} \tag{1.3}$$

где $a > 0$ – заданное число, $f \in C^1(\overline{B})$, $\varkappa \in C(\Gamma_R)$ – заданные функции.

1.2. Сферические координаты

При решении задач в шаре удобно использовать сферические координаты $(r,\ \theta,\ \varphi)$:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \tag{1.4}$$

Заданная таким образом тройка $(r,\ \theta,\ \varphi)$ является правой.

Обозначим через $\tilde{u}(r,\ \theta,\ \varphi;\ t)$ сложную функцию

$$\tilde{u}(r,\ \theta,\ \varphi;\ t) = u\big(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta;\ t\big). \tag{1.5}$$

Всюду ниже будем полагать выполненными условия:

$$f \equiv \tilde{f}(r), \qquad \mu \equiv const, \qquad \nu \equiv const, \qquad \varkappa \equiv const. \tag{1.6}$$

Из них сразу следует, что и решение $\tilde{u}$ задачи (1.1), (1.2) или (1.3) зависит только от r:

$$\Longrightarrow \qquad \tilde{u} = \tilde{u}(r).$$

Оператор Лапласа в сферических координатах

Оператор Лапласа, имеющий в декартовых координатах $(x,\ y,\ z)$ вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2}{\partial^2 z},$$

в сферических координатах (1.4) примет вид:[1]

$$\Delta\tilde{u} = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial\tilde{u}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\cdot\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\varphi^2}. \tag{1.7}$$

С учётом, что $\tilde{u} = \tilde{u}(r)$, то есть $\tilde{u}$ не зависит от θ и φ, при выполнении (1.6) получаем:

$$\Delta\tilde{u} = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial\tilde{u}}{\partial r}\right). \tag{1.8}$$

1.3. 1-ая краевая задача в сферических координатах

Рассмотрим задачу (1.1) в сферических координатах при выпонении условий (1.6) и $\mu \equiv 0$:
Найти функцию $u(r,\ t)$ из условий

$$\begin{cases} \tilde{u}_t = \frac{a^2}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial\tilde{u}}{\partial r}\right), & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ \tilde{u}(r,\ 0) = f(r), & 0 \leqslant r < R; \\ \tilde{u}(R,\ t) = 0. \end{cases} \tag{1.9}$$

Поскольку

$$\frac{a^2}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial\tilde{u}}{\partial r}\right) = a^2\,\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial r^2} + \frac{2a^2}{r}\cdot\frac{\partial\tilde{u}}{\partial r} \equiv \frac{a^2}{r}\cdot\frac{\partial^2}{\partial r^2}\big(r\tilde{u}\big),$$

[1] Подробнее см. http://tkachenko-mephi.narod.ru/KK.rar, стр. 12–13.

то уравнение $\tilde{u}_t = \frac{a^2}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}\right)$ преобразуется к виду

$$\Big(r\tilde{u}\Big)_t = a^2\Big(r\tilde{u}\Big)_{rr}.$$

Тогда естественно сделать замену:

$$v(r) = r\tilde{u}. \tag{1.10}$$

Для функции v уравнение примет, таким образом, вид

$$v_t(r,\, t) = a^2 v_{rr}(r,\, t),$$

а начальное условие $\tilde{u}(r,\, 0) = f(r)$ перепишется как

$$v(r,\ 0) = rf(r).$$

Итак, первая краевая задача при сделанных предположениях после замены u на новую неизвестную функцию $v(r,\ t)$ окончательно принимает вид: *Найти функцию $v(r,\, t)$ из условий*

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{rr}, & \text{в прямоугольнике } \ 0 < r < R, \ \ 0 < t \leqslant T; \\ v(r,\, 0) = rf(r), & \text{на интервале } 0 < r < R; \\ v(R,\, t) = 0, \quad v(0,\, t) = 0, & \text{при } 0 < t < T. \end{cases} \tag{1.11}$$

Почему вдруг добавилось новое условие $v(0,\, t) = 0$?

С одной стороны, оно следует из равенства $v(r,\, t) = r\tilde{u}(r,\, t)$, если $u(\tilde{r},\, t)$ ограничена в окрестности $r = 0$. А поскольку мы ищем только ограниченные решения $u(x,\, y,\, z,\, t)$, и даже непрерывные, то появление условия $v(0,\, t) = 0$ вполне оправдано.

С другой стороны, без этого условия задача (1.11) оказалась бы некорректно поставленной, а с условием $v(0,\, t) = 0$ она является знакомой нам по прошлому семестру начально-краевой задачей для одномерного уравнения теплопроводности.

2. № 705.

Найти ограниченную функцию $u(r,\, t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u, & \text{в } \ \Omega_T^*; \\ u(r,\, 0) = f(r), & \text{в } \ B_R; \\ u(R,\, t) = 0, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{5.1}$$

<u>Шаг 1.</u> Замена неизвестной функции
Повторяя действия из пункта 1.3, для новой неизвестной функции

$$v(r,\ t) = ru(r,\ t)$$

получаем задачу: *Найти функцию $v(r,\, t)$ из условий*

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{rr}, & \text{в прямоугольнике } \ 0 < r < R, \ \ 0 < t \leqslant T; \\ v(r,\, 0) = rf(r), & \text{на интервале } 0 < r < R; \\ v(R,\, t) = 0, \qquad v(0,\, t) = 0, & \text{при } 0 < t < T. \end{cases} \tag{5.2}$$

<u>Шаг 2.</u> Будем искать решение уравнения $v_t = a^2 v_{rr}$ с краевыми условиями $v(0,t) = v(R,t) = 0$ в виде

$$V(r,t) = \mathbf{X}(r)\mathbf{T}(t).$$

Сразу заметим, что краевые условия означают для функции $\mathbf{X}(r)$ следующее:

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}(R) = 0. \tag{5.3}$$

Подставим $V(r,t)$ в уравнение, получим:

$$\mathbf{X}(r)\mathbf{T}'(t) = a^2\mathbf{X}"(r)\mathbf{T}(t)$$

Предположив, что $\mathbf{X}(r)\mathbf{T}(t) \neq 0$, поделим это равенство на $a^2\mathbf{X}(r)\mathbf{T}(t) \neq 0$:

$$-\frac{\mathbf{X}"(r)}{\mathbf{X}(r)} = -\frac{\mathbf{T}'(t)}{a^2\mathbf{T}(t)} = \lambda.$$

Отсюда для функции $\mathbf{X}(r)$ имеем задачу

$$\mathbf{X}"(r) + \lambda\mathbf{X}(r) = 0, \tag{5.4}$$
$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}(l) = 0, \tag{5.5}$$

а для функции $\mathbf{T}(t)$ – уравнение:

$$\mathbf{T}'(t) + \lambda a^2\mathbf{T}(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{5.6}$$

Задача (5.4)–(5.5) есть задача Штурма–Лиувилля. Общее решение уравнения (5.4) имеет вид

$$\mathbf{X}(r) = c_1\sin(\sqrt{\lambda}\,r) + c_2\cos(\sqrt{\lambda}\,r) \qquad \text{при } \lambda > 0; \tag{5.7}$$
$$\mathbf{X}(r) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,r} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,r} \qquad \text{при } \lambda < 0; \tag{5.8}$$
$$\mathbf{X}(r) = c_1 r + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0; \tag{5.9}$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(r) = c_1\sin(\sqrt{\lambda}\,r)$. Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}(R) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda}\,R = \pi n$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{R}\right)^2, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{5.10}$$

  Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$\mathbf{X}_n(r) = \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{5.11}$$

- При $\lambda < 0$ нетривиальных решений нет, т.к. задача Штурма–Лиувилля не может иметь отрицательных собственных чисел

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(r) = c_1 r$. Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}(R) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет собственного числа, равного нулю.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{R}\right)^2, \quad \mathbf{X}_n(r) = \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

задачи (5.4), (5.5). Стало быть, рассматривать задачу (5.6) имеет смысл только при $\lambda = \lambda_n$, и мы получаем семейство задач:

$$\mathbf{T}_n'(t) + \frac{\pi^2 a^2 n^2}{R^2}\mathbf{T}_n(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{5.12}$$

Решение этого линейного однородного уравнения первого порядка имеет вид:

$$\mathbf{T}_n(t) = A_n e^{-\frac{(\pi n a)^2}{R^2}t} \tag{5.13}$$

где A_n – произвольные постоянные.

<u>Шаг 3.</u> Решаем задачу (5.2)**.**

Будем искать решение задачи (5.2) в виде $v(r,\,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_n(r)\mathbf{T}_n(t)$, т.е.

$$v(r,\,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi n r}{R} A_n e^{-\frac{(\pi n a)^2}{R^2}t}. \tag{5.14}$$

Из условий задачи мы ещё не использовали только начальные условия $v(r,\,0) = rf(r)$. Для функции $v(r,\,t)$ искомого вида (5.15) они означают:

$$rf(r) = v(r,\,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_n(r)\mathbf{T}_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n r}{R}, \tag{5.15}$$

$$\tag{5.16}$$

Пусть функция $rf(r)$, входящая в начальное условие, разлагается в ряд Фурье по синусам:

$$rf(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\frac{\pi n r}{R}, \tag{5.17}$$

с коэффициентами

$$\alpha_n = \frac{2}{R}(rf, \mathbf{X}_n) = \frac{2}{R}\int\limits_0^R rf(r)\sin\frac{\pi n r}{R}dr. \tag{5.18}$$

Таким образом, для коэффициентов A_n из представления (5.15) решения $v(r,\,t)$, имеем:

$$A_n = \alpha_n = \frac{2}{R}\int\limits_0^R rf(r)\sin\frac{\pi n r}{R}dr. \tag{5.19}$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (5.15) найденные коэффициенты A_n из (5.19). Получим:

$$v(r,\,t) = \frac{2}{R}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^R \rho f(\rho)\sin\frac{\pi n\rho}{R}d\rho\right)\, e^{-\frac{(\pi n a)^2}{R^2}t}\sin\frac{\pi n r}{R}.$$

Отсюда, вспоминая о замене $v(r,\,t) = ru(r,\,t)$, получаем

<u>Ответ:</u> $u(r,\,t) = \frac{2}{rR}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^R \rho f(\rho)\sin\frac{\pi n\rho}{R}d\rho\right)\, e^{-\frac{(\pi n a)^2}{R^2}t}\sin\frac{\pi n r}{R}$.

6. № 706.

Найти ограниченную функцию $u(r,\,t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2\Delta u, & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ u(r,\,0) = f(r), & 0 \leqslant r < R; \\ u_r(R,\,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{6.1}$$

<u>Шаг 1.</u> Замена неизвестной функции

Действуя аналогично пункту 1.3, для новой неизвестной функции

$$v(r,\,t) = ru(r,\,t)$$

получаем задачу: *Найти функцию $v(r,\,t)$ из условий*

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{rr}, & \text{в прямоугольнике } \ 0 < r < R, \ \ 0 < t \leqslant T; \\ v(r,\,0) = rf(r), & \text{на интервале } 0 < r < R; \\ Rv_r(R,\,t) - v(R,\,t) = 0, \qquad v(0,\,t) = 0 & \text{при } 0 < t < T. \end{cases} \tag{6.2}$$

Заметим, что условие $u_r(R,\,t) = 0$ означает для $v(r,\,t) = ru(r,\,t)$, что

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right)_{r=R} = \left.\frac{rv_r - v}{r^2}\right|_{r=R} = \frac{Rv_r(R,\,t) - v(R,\,t)}{R^2} = 0,$$

откуда и взялось краевое условие 3-го рода в задаче для v.

<u>Шаг 2.</u> Будем искать решение уравнения $v_t = a^2 v_{rr}$ с краевыми условиями $v(0,t) = Rv_r(R,\,t) - v(R,\,t) = 0$ в виде

$$V(r,t) = \mathbf{X}(r)\mathbf{T}(t).$$

Краевые условия означают для функции $\mathbf{X}(r)$ следующее:

$$\mathbf{X}(0) = 0, \qquad R\mathbf{X}'(R) - \mathbf{X}(R) = 0. \tag{6.3}$$

Подставим $V(r,t)$ в уравнение, получим:

$$\mathbf{X}(r)\mathbf{T}'(t) = a^2\mathbf{X}"(r)\mathbf{T}(t)$$

Предположив, что $\mathbf{X}(r)\mathbf{T}(t) \neq 0$, поделим это равенство на $a^2\mathbf{X}(r)\mathbf{T}(t) \neq 0$:

$$-\frac{\mathbf{X}"(r)}{\mathbf{X}(r)} = -\frac{\mathbf{T}'(t)}{a^2\mathbf{T}(t)} = \lambda.$$

Отсюда для функции $\mathbf{X}(r)$ имеем задачу

$$\mathbf{X}"(r) + \lambda\mathbf{X}(r) = 0, \tag{6.4}$$

$$\mathbf{X}(0) = 0, \quad R\mathbf{X}'(R) - \mathbf{X}(R) = 0, \tag{6.5}$$

а для функции $\mathbf{T}(t)$ – уравнение:

$$\mathbf{T}'(t) + \lambda a^2\mathbf{T}(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{6.6}$$

Задача (6.4)–(6.5) есть задача Штурма–Лиувилля. Общее решение уравнения (6.4) имеет вид

$$\mathbf{X}(r) = c_1\sin(\sqrt{\lambda}\,r) + c_2\cos(\sqrt{\lambda}\,r) \qquad \text{при } \ \lambda > 0; \tag{6.7}$$

$$\mathbf{X}(r) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,r} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,r} \qquad \text{при } \ \lambda < 0; \tag{6.8}$$

$$\mathbf{X}(r) = c_1 r + c_2 \qquad \text{при } \ \lambda = 0; \tag{6.9}$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}(0) = 0$, что

$$c_2 = 0, \ \Rightarrow \ \mathbf{X}(r) = c_1\sin(\sqrt{\lambda}\,r) \ \Rightarrow \ \mathbf{X}'(r) = c_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\,r).$$

Поэтому из второго краевого условия $R\mathbf{X}'(R) - \mathbf{X}(R) = 0$ получаем, что

$$\sqrt{\lambda}\,R\cos(\sqrt{\lambda}\,R) - \sin(\sqrt{\lambda}\,R) = 0,$$

откуда

$$\sqrt{\lambda}\,R = \mathrm{tg}(\sqrt{\lambda}\,R). \tag{6.10}$$

Это уравнение имеет бесконечное множество решений:

$$\lambda_n: \qquad \sqrt{\lambda_n}\,R = \mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_n}\,R), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{6.11}$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$\mathbf{X}_n(r) = \sin\left(\sqrt{\lambda_n} r\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{6.12}$$

- При $\lambda < 0$ нетривиальных решений нет, т.к. задача Штурма–Лиувилля не может иметь отрицательных собственных чисел
- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(r) = c_1 r$. Поэтому из второго краевого условия $R\mathbf{X}'(R) - \mathbf{X}(R) = 0$ получаем, что $c_1 R - c_1 R = 0$ – верное при всех c_1 тождество. Поэтому задача Штурма–Лиувилля имеет собственное число, равное нулю, и соответствующую ему собственную функцию

$$\mathbf{X}_0(r) = r, \qquad n = 0. \tag{6.13}$$

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_0 = 0, \qquad \lambda_n: \quad \sqrt{\lambda_n}\,R = \mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_n}\,R), \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\left\{\mathbf{X}_n(r)\right\} = \left\{r,\ \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right)\right\}, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

задачи (6.4), (6.5). Стало быть, рассматривать задачу (6.6) имеет смысл только при $\lambda = \lambda_n$, и мы получаем семейство задач:

$$\mathbf{T}_n'(t) + a^2\lambda_n \mathbf{T}_n(t) = 0, \qquad t > 0, \quad n \geqslant 0. \tag{6.14}$$

Решение этого линейного однородного уравнения первого порядка имеет вид:

$$\left\{\mathbf{T}_n(t)\right\} = \left\{A_0,\ \ \mathbf{T}_n(t) = A_n e^{-\,a^2\lambda_n\,t}\right\}, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{6.15}$$

где A_n – произвольные постоянные.

<u>Шаг 3.</u> Решаем задачу (6.2).

Будем искать решение задачи (6.2) в виде $v(r,\,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathbf{X}_n(r)\mathbf{T}_n(t)$, т.е.

$$v(r,\,t) = A_0 r + \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right) A_n e^{-\,a^2\lambda_n\,t}. \tag{6.16}$$

Из условий задачи мы ещё не использовали только начальные условия $v(r,\,0) = rf(r)$. Для функции $v(r,\,t)$ искомого вида (6.22) они означают:

$$rf(r) = v(r,\,0) = A_0 r + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_n(r)\mathbf{T}_n(0) = A_0 r + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right), \tag{6.17}$$

$$\tag{6.18}$$

Пусть функция $rf(r)$, входящая в начальное условие, разлагается в ряд Фурье по собственным функция задачи Штурма–Лиувилля:

$$rf(r) = \alpha_0 r + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r\right), \tag{6.19}$$

Выясним, какими должны быть коэффициенты $\alpha_n \equiv A_n$. Для этого домножим (6.19) на $\mathbf{X}_m = \sin\left(\sqrt{\lambda_m}\, r\right)$ скалярно в смысле $L_2[0, R]$ и учтём, что система собственных функций задачи Штурма–Лиувилля является ортогональной в смысле этого скалярного произведения (это проверяется элементарным интегрированием):

$$(rf, \mathbf{X}_m) = \alpha_m \int\limits_0^R \sin^2\left(\sqrt{\lambda_m}\, r\right) dr = \frac{\alpha_m}{2} \int\limits_0^R \left(1 - \cos\left(2\sqrt{\lambda_m}\, r\right)\right) dr =$$

$$= \frac{\alpha_m}{2}\left(R - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_m}} \sin\left(2\sqrt{\lambda_m}\, r\right)\Big|_{r=0}^{r=R}\right) = \frac{\alpha_m}{2}\left(R - \frac{\sin\left(2\sqrt{\lambda_m}\, R\right)}{2\sqrt{\lambda_m}}\right).$$

откуда, пользуясь тождествами $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}$, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, получаем:

$$R - \frac{\sin\left(2\sqrt{\lambda_m}\, R\right)}{2\sqrt{\lambda_m}} = \left[\sqrt{\lambda_m} = \frac{\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_m}\, R)}{R}\right] = R - \frac{R\sin\left(\sqrt{\lambda_m}\, R\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_m}\, R\right)}{\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_m}\, R)} =$$

$$= R - R\cos^2\left(\sqrt{\lambda_m}\, R\right) = \left[\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}\right] =$$

$$= R - \frac{R}{1+\mathrm{tg}^2\left(\sqrt{\lambda_m}\, R\right)} = \left[\mathrm{tg}^2\left(\sqrt{\lambda_m}\, R\right) = \lambda_m\, R^2\right] = R - \frac{R}{1+\lambda_m\, R^2} =$$

$$= \frac{\lambda_m\, R^3}{1+\lambda_m\, R^2}.$$

В итоге для коэффициентов $\alpha_n \equiv A_n$ получаем равенство:

$$A_n = \alpha_n = \frac{2\left(1+\lambda_n\, R^2\right)}{\lambda_m\, R^3}(rf, \mathbf{X}_n) = \frac{2\left(1+\lambda_n\, R^2\right)}{\lambda_n\, R^3} \int\limits_0^R rf(r)\, \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r\right) dr, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{6.20}$$

Осталось найти A_0. Аналогично,

$$(rf, \mathbf{X}_0) = \alpha_0 \int\limits_0^R r^2 dr = \alpha_0\, \frac{R^3}{3}, \qquad \text{откуда} \qquad A_0 = \alpha_0 = \frac{3}{R^3} \int\limits_0^R r^2 f(r)\, dr. \tag{6.21}$$

Подставим в формулу (6.22) найденные коэффициенты A_n из (6.20) и (6.21).

$$v(r,\, t) = \left(\frac{3}{R^3} \int\limits_0^R \rho^2 f(\rho)\, d\rho\right) r + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\left(1+\lambda_n\, R^2\right)}{\lambda_n\, R^3} \int\limits_0^R \rho f(\rho)\, \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, \rho\right) d\rho\right) \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r\right) e^{-\,a^2\lambda_n\, t}. \tag{6.22}$$

Вспомним, что $v(r,\, t) = ru(r,\, t)$, и поделим (6.22) на r:

<u>Ответ:</u> $u(r,t) = \frac{3}{R^3} \int\limits_0^R \rho^2 f(\rho)\, d\rho + \frac{2}{rR^3} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\lambda_n\, R^2}{\lambda_n} \int\limits_0^R \rho f(\rho)\, \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, \rho\right) d\rho\right) \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r\right) e^{-\,a^2\lambda_n\, t}.$

7. № 708(а).

Найти ограниченную функцию $u(r,\,t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2\Delta u, & \text{в } \Omega_T^*; \\ u(r,\,0) = T, & \text{в } B_R; \\ u(R,\,t) = P, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{7.1}$$

<u>Шаг 1.</u> Избавление от неоднородности в граничном условии.
Помня, что $\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r$, нужно подобрать функцию $w(r,\,t)$ (желательно простого вида), которая удовлетворяла бы и уравнению и неоднородному краевому условию. То есть будем искать решение $u(r,\,t)$ задачи (7.1) в виде

$$u(r,\,t) = v(r,\,t) + w(r,\,t),$$

где функция $w(r,\,t)$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} w_t = a^2\Delta w \equiv a^2\left(w_{rr} + \frac{2}{r}w_r\right), & \text{в } \Omega_T^*; \\ w(R,\,t) = P, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{7.2}$$

В данном случае краевое условие очень простое, и условия (7.2) выполняются, очевидно, для функции простейшего вида:

$$w(r,\,t) = P. \tag{7.3}$$

Тогда $v(r,\,t) = u - w \equiv u - P$ есть решение следующей задачи:

$$\begin{cases} v_t = a^2\Delta v, & \text{в } \Omega_T^*; \\ v(r,\,0) = T - P, & \text{в } B_R; \\ v(R,\,t) = 0, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{7.4}$$

<u>Шаг 2.</u> Решение задачи (7.5).

Задача (7.5) есть частный случай уже решённой нами в номере 705 задачи (5.1) с функцией

$$f(r) = T - P.$$

Воспользуемся результатом номера 705:

$$v(r,\,t) = \frac{2}{rR}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^R \rho f(\rho)\sin\frac{\pi n\rho}{R}d\rho\right)\,e^{-\frac{(\pi na)^2}{R^2}t}\sin\frac{\pi nr}{R}. \tag{7.5}$$

Чтобы получить ответ к нашей задаче, нам осталось только посчитать интегралы:

$$\int\limits_0^R \rho f(\rho)\sin\frac{\pi n\rho}{R}d\rho = \int\limits_0^R \rho\,(T-P)\sin\frac{\pi n\rho}{R}d\rho = (T-P)\int\limits_0^R \rho\sin\frac{\pi n\rho}{R}d\rho =$$

$$= \Big[\text{по частям}\Big] = -\,(T-P)\,\frac{R}{\pi n}\left(\rho\cos\frac{\pi n\rho}{R}\Big|_{\rho=0}^{\rho=R} - \int\limits_0^R \cos\frac{\pi n\rho}{R}d\rho\right) =$$

$$= (P-T)\,\frac{R}{\pi n}\left((-1)^n R - \frac{R}{\pi n}\sin\frac{\pi n\rho}{R}\Big|_{\rho=0}^{\rho=R}\right) = \frac{(-1)^n R^2}{\pi n}\,(P-T)\,.$$

Таким образом,

$$v(r,\,t) = \frac{2}{rR}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n R^2}{\pi n}\,(P-T)\right)\,e^{-\frac{(\pi na)^2}{R^2}t}\sin\frac{\pi nr}{R} = \frac{2R\,(P-T)}{\pi r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\,e^{-\frac{(\pi na)^2}{R^2}t}\sin\frac{\pi nr}{R}.$$

Поэтому, для функции $u(r,\,t) = v(r,\,t) + P$, получаем

<u>Ответ:</u> $u(r,t) = P + \frac{2R(P-T)}{\pi r}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\,e^{-\frac{(\pi na)^2}{R^2}t}\sin\frac{\pi nr}{R}$.

8. № 708(б).

Найти ограниченную функцию $u(r,\,t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2\Delta u, & \text{в } \Omega_T^*; \\ u(r,\,0) = T, & \text{в } B_R; \\ k\,\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=R} = q, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{8.1}$$

<u>Шаг 1.</u> Избавление от неоднородности в граничном условии.
Помня, что $\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r$, нужно подобрать функцию $w(r,\,t)$ (желательно простого вида), которая удовлетворяла бы и уравнению и неоднородному краевому условию. То есть будем искать решение $u(r,\,t)$ задачи (8.1) в виде

$$u(r,\,t) = v(r,\,t) + w(r,\,t),$$

где функция $w(r,\,t)$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} w_t = a^2\Delta w \equiv a^2\left(w_{rr} + \frac{2}{r}w_r\right), & \text{в } \Omega_T^*; \\ k\,\frac{\partial w}{\partial r}\Big|_{r=R} = q, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{8.2}$$

Из-за того, что граничное условие – второго рода, w должна содержать хотя бы r в первой степени. Но поскольку в уравнении есть слагаемое $\frac{2}{r}w_r$, которое для функции вида αr превратится в $\frac{2\alpha}{r}$, то просто полином первой степени от r удовлетворить уравнению не сможет.

В этом случае надо искать w в виде

$$w(r,\,t) = \alpha r^2 + \eta(t), \tag{8.3}$$

где $\eta(t)$ подбирается так, чтобы выполнялось уравнение $w_t = a^2\Delta w$.

Подставим искомую функцию w вида (8.3) в граничное условие:

$$k\,\frac{\partial w}{\partial r}\bigg|_{r=R} = 2k\alpha R = q \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = \frac{q}{2kR}.$$

Тогда

$$w(r,\,t) = \frac{q}{2kR}r^2 + \eta(t).$$

Подставим эту функцию в уравнение$w_t = a^2\Delta w = a^2\left(w_{rr} + \frac{2}{r}w_r\right)$:

$$\eta'(t) = a^2\left(\frac{2q}{2kR} + \frac{2}{r}\cdot\frac{2q}{2kR}r\right) = \frac{3qa^2}{kR} \qquad \Longrightarrow \qquad \eta(t) = \frac{3qa^2}{kR}t + c$$

Константу c возьмём равной нулю, нам ведь не нужно искать все решения (8.2), а достаточно найти самое простое. Итак:

$$w(r,\,t) = \frac{q}{2kR}r^2 + \frac{3qa^2}{kR}t. \tag{8.4}$$

Тогда $v(r,\,t) = u - w$ есть решение следующей задачи:

$$\begin{cases} v_t = a^2\Delta v, & \text{в } \Omega_T^*; \\ v(r,\,0) = T - w(r,\,0) = T - \frac{q}{2kR}r^2 = f(r), & \text{в } B_R; \\ v(R,\,t) = 0, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{8.5}$$

<u>Шаг 2.</u> Решение задачи (8.6).

Задача (8.6) есть частный случай уже решённой нами в номере 706 задачи (6.1) с функцией

$$f(r) = T - \frac{q}{2kR}r^2.$$

Воспользуемся результатом номера 706:

$$v(r,\,t) = \frac{3}{R^3}\int\limits_0^R \rho^2 f(\rho)\,d\rho +$$

$$+\frac{2}{rR^3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\lambda_n\,R^2}{\lambda_n}\int\limits_0^R \rho f(\rho)\,\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,\rho\right)d\rho\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right)e^{-\,a^2\lambda_n\,t}, \quad (8.6)$$

где λ_n положительные корни уравнения

$$\sqrt{\lambda_n}\,R = \mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_n}\,R), \quad n\in\mathbb{N}. \quad (8.7)$$

Чтобы получить ответ к нашей задаче, нам осталось только посчитать интегралы:

а) $$\int\limits_0^R \rho^2 f(\rho)d\rho = \int\limits_0^R \rho^2\left(T-\frac{q}{2kR}\rho^2\right)d\rho = \frac{TR^3}{3} - \frac{qR^5}{10kR} = \frac{TR^3}{3} - \frac{qR^4}{10k}$$

б) $$\int\limits_0^R \rho f(\rho)\,\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,\rho\right)d\rho = \int\limits_0^R \rho\left(T-\frac{q}{2kR}\rho^2\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,\rho\right)d\rho = -\frac{qR^2}{k\sqrt{\lambda_n}}\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right),$$

поскольку

$$\int\limits_0^R \rho\,\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,\rho\right)d\rho = \Big[\text{по частям}\Big] = \frac{-1}{\sqrt{\lambda_n}}\left(\rho\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,\rho\right)\Big|_{\rho=0}^{\rho=R} - \int\limits_0^R \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,\rho\right)d\rho\right) =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{\lambda_n}}\left(R\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right) - \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\cdot\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,\rho\right)\Big|_{\rho=0}^{\rho=R}\right) =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{\lambda_n}}\left(R\sqrt{\lambda_n} - \mathrm{tg}\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)\right)\frac{\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}{\sqrt{\lambda_n}} = \Big[\text{в силу (8.7)}\Big] = 0$$

и

$$\int\limits_0^R \rho^3\,\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,\rho\right)d\rho = \Big[2\text{ раза по частям}\Big] =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{\lambda_n}}\left(\rho^3\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,\rho\right)\Big|_{\rho=0}^{\rho=R} - 3\int\limits_0^R \rho^2\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,\rho\right)d\rho\right) =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{\lambda_n}}\left(R^3\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right) - \frac{3}{\sqrt{\lambda_n}}\left[\rho^2\,\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,\rho\right)\Big|_{\rho=0}^{\rho=R} - 2\underbrace{\int\limits_0^R \rho\,\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,\rho\right)d\rho}_{=0}\right]\right) =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{\lambda_n}}\left(R^3\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right) - 3R^2\,\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}{\sqrt{\lambda_n}}\right) =$$

$$= \left[\text{в силу (8.7)},\ \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}{\sqrt{\lambda_n}} = R\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\lambda_n}}\,R^3\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right).$$

Итак, коэффициенты A_n равны

$$A_n = \frac{1+\lambda_n\, R^2}{\lambda_n} \int\limits_0^R \rho f(\rho)\ \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,\rho\right) d\rho = \frac{1+\lambda_n\, R^2}{\lambda_n} \cdot \left(-\frac{qR^2}{k\sqrt{\lambda_n}}\ \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)\right) =$$

$$= \left[\text{в силу (8.7)},\ 1+\lambda_n\, R^2 = 1+\operatorname{tg}^2\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right) = \frac{1}{\cos^2\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}\right] =$$

$$= \frac{-qR^2}{k\lambda_n\sqrt{\lambda_n}\ \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}.$$

Подставив найденные интегралы в (8.6), получаем:

$$v(r,\,t) = \frac{3}{R^3}\left(\frac{TR^3}{3}\ -\ \frac{qR^4}{10k}\right) + \frac{2}{rR^3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-qR^2}{k\lambda_n\sqrt{\lambda_n}\ \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right)e^{-\,a^2\lambda_n\,t} =$$

$$= T\ -\ \frac{3qR}{10k}\ -\ \frac{2q}{krR}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right)e^{-\,a^2\lambda_n\,t}}{\lambda_n\sqrt{\lambda_n}\ \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}\right).$$

Поэтому, для функции $u(r,\,t) = v(r,\,t) + w(r,\,t) = v(r,\,t) + \frac{q}{2kR}r^2 + \frac{3qa^2}{kR}t$, получаем

<u>Ответ:</u> $u(r,t) = \frac{q}{2kR}r^2 + \frac{3qa^2}{kR}t + T\ -\ \frac{3qR}{10k}\ -\ \frac{2q}{krR}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right)e^{-\,a^2\lambda_n\,t}}{\lambda_n\sqrt{\lambda_n}\ \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}\right).$

1. Задача для неоднородного уравнения теплопроводности в шаре.

1.1. № 711.

Найти ограниченную функцию $u(r,\,t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2\Delta u + f(r,\,t), & \text{в } \Omega_T^*; \\ u(r,\,0) = 0, & \text{в } B_R; \\ u(R,\,t) = 0, \quad |u(r,\,t)| < \infty, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{1.1}$$

<u>Шаг 1.</u> Замена неизвестной функции
Раз все «входные данные» задачи (функция f и правая часть начального условия) зависят от пространственных переменных только через r, то искать решение надо также в виде функции, зависящей только от r и t:

$$u \equiv u(r,\,t),$$

поэтому оператор Лапласа упрощается, и уравнение принимает вид:

$$u_t = \frac{a^2}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial u}{\partial r}\right) + f(r,\,t).$$

Домножив его на r, с учётом, что

$$\frac{a^2}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial u}{\partial r}\right) \equiv a^2(ru)_{rr}$$

(см. пункт 1.3 семинара 1), окончательно для новой неизвестной функции

$$v(r,\;t) = ru(r,\;t)$$

получаем задачу: *Найти функцию $v(r,\,t)$ из условий*

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{rr} + rf(r,\,t), & \text{в прямоугольнике } \;0 < r < R,\;\; 0 < t \leqslant T; \\ v(r,\,0) = 0, & \text{на интервале } 0 < r < R; \\ v(R,\,t) = 0, \qquad v(0,\,t) = 0, & \text{при } 0 < t < T. \end{cases} \tag{1.2}$$

(Последнее условие $v(0,\,t) = 0$ получилось, как всегда, из требования ограниченности решения $u(r,\,t)$.)
<u>Шаг 2.</u> Решение задачи Штрума-Лиувилля.
Нашему уравнению соответствует однородное уравнение

$$v_t = a^2 v_{rr}.$$

Если искать его решение, удовлетворяющее краевым условиям $v(R,\,t) = 0,\;\; v(0,\,t) = 0$ в виде $\mathbf{X}(r)\mathbf{T}(t)$, то для функции $\mathbf{X}(r)$ получим задачу Штурма-Лиувилля

$$\mathbf{X}"(r) + \lambda\mathbf{X}(r) = 0, \tag{1.3}$$
$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}(l) = 0, \tag{1.4}$$

Общее решение уравнения (1.3) имеет вид

$$\mathbf{X}(r) = c_1\sin(\sqrt{\lambda}\,r) + c_2\cos(\sqrt{\lambda}\,r) \qquad \text{при } \;\lambda > 0; \tag{1.5}$$
$$\mathbf{X}(r) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,r} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,r} \qquad \text{при } \;\lambda < 0; \tag{1.6}$$
$$\mathbf{X}(r) = c_1 r + c_2 \qquad \text{при } \;\lambda = 0; \tag{1.7}$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(r) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, r)$. Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}(R) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda}\, R = \pi n$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{R}\right)^2, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.8}$$

  Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$\mathbf{X}_n(r) = \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.9}$$

- При $\lambda < 0$ нетривиальных решений нет, т.к. задача Штурма–Лиувилля не может иметь отрицательных собственных чисел

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(r) = c_1 r$. Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}(R) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет собственного числа, равного нулю.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{R}\right)^2, \quad \mathbf{X}_n(r) = \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

задачи (1.3), (1.4). **<u>Шаг 3.</u> Решаем задачу** (1.2)**.**

Будем искать решение задачи (1.2) в виде $v(r,\, t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_n(r)\mathbf{T}_n(t)$, т.е.

$$v(r,\, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\frac{\pi n r}{R}. \tag{1.10}$$

Пусть функция $rf(r,\, t)$ правой части уравнения в (1.2) разлагается в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля (в данном случае - это стандатртный ряд Фурье по синусам):

$$rf(r,\, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\frac{\pi n r}{R}, \tag{1.11}$$

при этом коэффициенты $f_n(t)$ находятся по формулам:

$$f_n(t) = \frac{2}{R}\int\limits_0^R rf(r,\, t) \sin\frac{\pi n r}{R}\, dr. \tag{1.12}$$

В самом деле, домножим равенство (1.11) скалярно на $\sin\frac{\pi m r}{R}$ и проинтегрируем по $[0,\, R]$. Поскольку собственные функции задачи Штурма-Лиувилля с краевыми условиями I-го рода образуют ортогональную систему, то все слагаемые ряда[1] с номерами, отличными от m, обратятся в ноль, и мы получим равенство:

$$\int\limits_0^R rf(r,\, t) \sin\frac{\pi m r}{R}\, dr = f_m(t) \int\limits_0^R \sin^2\frac{\pi m r}{R}\, dr = \frac{R}{2} f_m(t),$$

откуда и следует равенство (1.12).

[1] Мы предполагаем, что этот ряд можно интегрировать почленно. В данном случае это следует из общей теории рядов Фурье, но в общей ситуации придётся доказывать, что построенное в виде ряда решение позволяет производить с ним все подобные действия.

Подставим (1.10) и (1.11) в уравнение (в предположении, что ряд (1.10) можно почленно дифференцировать 1 раз по t и два раза по r) в задаче (1.2):

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t)\sin\frac{\pi nr}{R} = -a^2\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{\pi nr}{R} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{\pi nr}{R}. \tag{1.13}$$

Данное равенство будет заведомо выпонено, если ряды в левой и правой его частях совпадают почленно, то есть оно следует из

$$T_n'(t) + a^2T_n(t) = f_n(t), \qquad n\in\mathbb{N}. \tag{1.14}$$

Это – неоднородное линейное уравнение 1-го порядка с постоянными коэффициентами. Такие уравнения решают методом вариации постоянной. Поскольку общее решение соответствующего однородного уравнения

$$T_{no}'(t) + a^2T_{no}(t) = 0$$

имеет вид

$$T_{no}(t) = c_n e^{-\frac{(\pi na)^2}{R^2}t},$$

то решение (1.14) ищется в виде

$$T_n(t) = c_n(t)e^{-\frac{(\pi na)^2}{R^2}t}, \tag{1.15}$$

где $c_n(t)$ находятся из $c_n'(t) = f_n(t)e^{\frac{(\pi na)^2}{R^2}t}$. Итак,

$$c_n(t) = \int\limits_0^t f_n(\tau)e^{\frac{(\pi na)^2}{R^2}\tau}d\tau + A_n, \qquad A_n = const,$$

и для $T_n(t)$ окончательно имеем:

$$T_n(t) = \int\limits_0^t f_n(\tau)e^{-\frac{(\pi na)^2}{R^2}(t-\tau)}d\tau + A_n. \tag{1.16}$$

Из условий задачи мы ещё не использовали только начальное условие $v(r,\,0) = 0$. Для функции $v(r,\,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{\pi nr}{R}$ искомого вида (1.10) оно заведомо будет выполнено, если

$$T_n(0) = 0, \quad \text{что, в свою очередь верно при} \quad A_n = 0, \qquad n\in\mathbb{N}. \tag{1.17}$$

Таким образом, решение $v(r,\,t)$ имеет вид:

$$v(r,\,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^t f_n(\tau)e^{-\frac{(\pi na)^2}{R^2}(t-\tau)}d\tau\sin\frac{\pi nr}{R}.$$

Отсюда, вспоминая о замене $v(r,\,t) = ru(r,\,t)$ и формуле (1.12), получаем
<u>Ответ:</u>

$$u(r,\,t) = \frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^t f_n(\tau)e^{-\frac{(\pi na)^2}{R^2}(t-\tau)}d\tau\sin\frac{\pi nr}{R}, \qquad \text{где} \qquad f_n(t) = \frac{2}{R}\int\limits_0^R \xi f(\xi,\,t)\sin\frac{\pi n\xi}{R}\,d\xi.$$

1.2. № 709(б).

В однородном шаре $0 \leqslant r < R$, начиная с момента $t = 0$, действуют источники тепла постоянной плотности Q. Начальная температура шара равна T. Определить распределение температуры в шаре при $t > 0$, если с поверхности шара происходит теплоотдача потоком постоянной плотности q.

Записав эти условия математически, получим задачу:
Найти ограниченную функцию $u(r,\, t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2\Delta u + \frac{Q}{c\rho}, & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ u(r,\, 0) = T, & 0 \leqslant r < R; \\ u_r(R,\, t) = -\,\frac{q}{k}, \quad |u(r,\, t)| < \infty, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{2.1}$$

где $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, c – удельная теплоёмкость, ρ – плотность, k – коэффициент теплопроводности.

<u>Шаг 1.</u> Избавление от неоднородности в граничном условии.

Помня, что $\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r$, нужно подобрать функцию $w(r,\, t)$ (желательно простого вида), которая удовлетворяла бы и уравнению и неоднородному краевому условию. То есть будем искать решение $u(r,\, t)$ задачи (2.1) в виде

$$u(r,\, t) = v(r,\, t) + w(r,\, t),$$

где функция $w(r,\, t)$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} w_t = a^2\Delta w \equiv a^2\left(w_{rr} + \frac{2}{r}w_r\right), & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ w_r(R,\, t) = -\,\frac{q}{k}, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{2.2}$$

Из-за того, что граничное условие – второго рода, (совершенно аналогично решению № 708(б)) w должна содержать хотя бы r в первой степени. Но поскольку в уравнении есть слагаемое $\frac{2}{r}w_r$, которое для функции вида αr превратится в $\frac{2\alpha}{r}$, то просто полином первой степени от r удовлетворить уравнению не сможет.

В этом случае надо искать w в виде

$$w(r,\, t) = \alpha r^2 + \eta(t), \tag{2.3}$$

где $\eta(t)$ подбирается так, чтобы выполнялось уравнение $w_t = a^2\Delta w$.

Подставим искомую функцию w вида (5.3) в граничное условие:

$$w_r(R,\, t) = -\,\frac{q}{k} = 2\alpha R \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = -\,\frac{q}{2kR}.$$

Тогда

$$w(r,\, t) = -\,\frac{q}{2kR}r^2 + \eta(t).$$

Подставим эту функцию в уравнение $w_t = a^2\Delta w = a^2\left(w_{rr} + \frac{2}{r}w_r\right)$:

$$\eta'(t) = -a^2\left(\frac{2q}{2kR} + \frac{2}{r}\cdot\frac{2q}{2kR}r\right) = -\,\frac{3qa^2}{kR} \qquad \Longrightarrow \qquad \eta(t) = -\,\frac{3qa^2}{kR}t + c$$

Константу c возьмём равной нулю, нам ведь не нужно искать все решения (2.2), а достаточно найти самое простое. Итак:

$$w(r,\, t) = -\,\frac{q}{2kR}r^2 \;-\; \frac{3qa^2}{kR}t. \tag{2.4}$$

Тогда $v(r,\, t) = u - w$ есть решение следующей задачи:

$$\begin{cases} v_t = a^2\Delta v + \frac{Q}{c\rho}, & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ v(r,\, 0) = T - w(r,\, 0) = T + \frac{q}{2kR}r^2 = \varphi(r), & 0 \leqslant r < R; \\ v_r(R,\, t) = 0, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{2.5}$$

<u>Шаг 2.</u> Замена неизвестной функции
Действуя аналогично Шагу 1 задачи 711, для новой неизвестной функции

$$m(r,\ t) = rv(r,\ t)$$

получим задачу: *Найти функцию $v(r,\, t)$ из условий*

$$\begin{cases} m_t = a^2 m_{rr} + \frac{Q}{c\rho}\, r, & \text{в прямоугольнике } \ 0 < r < R, \ \ 0 < t \leqslant T; \\ m(r,\, 0) = r\varphi(r) \equiv Tr + \frac{q}{2kR} r^3, & \text{на интервале } 0 < r < R; \\ Rm_r(R,\, t) - m(R,\, t) = 0, \qquad m(0,\, t) = 0 & \text{при } 0 < t < T. \end{cases} \tag{2.6}$$

Краевое условие $v_r(R,\, t) = 0$ означает для $m(r,\ t) = rv(r,\ t)$, что

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{m}{r}\right)_{r=R} = \left.\frac{rm_r - m}{r^2}\right|_{r=R} = \frac{Rm_r(R,\, t) - m(R,\, t)}{R^2} = 0,$$

откуда и взялось краевое условие 3-го рода в задаче для m.
<u>Шаг 3.</u> Решение задачи Штурма-Лиувилля.
Уравнению $m_t = a^2 m_{rr}$ с краевыми условиями $m(0, t) = Rm_r(R,\, t) - m(R,\, t) = 0$ соответствует следующая задача Штурма-Лиувилля:

$$\mathbf{X}''(r) + \lambda \mathbf{X}(r) = 0, \tag{2.7}$$

$$\mathbf{X}(0) = 0, \quad R\mathbf{X}'(R) - \mathbf{X}(R) = 0. \tag{2.8}$$

Эту задачу мы уже решали в № 706 (семинар 1). Повторим проведённое там исследование.
Общее решение уравнения (2.7) имеет вид

$$\mathbf{X}(r) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, r) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, r) \qquad \text{при } \ \lambda > 0; \tag{2.9}$$

$$\mathbf{X}(r) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, r} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, r} \qquad \text{при } \ \lambda < 0; \tag{2.10}$$

$$\mathbf{X}(r) = c_1 r + c_2 \qquad \text{при } \ \lambda = 0; \tag{2.11}$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}(0) = 0$, что

$$c_2 = 0, \ \Rightarrow \ \mathbf{X}(r) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, r) \ \Rightarrow \ \mathbf{X}'(r) = c_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\, r).$$

Поэтому из второго краевого условия $R\mathbf{X}'(R) - \mathbf{X}(R) = 0$ получаем, что

$$\sqrt{\lambda}\, R \cos(\sqrt{\lambda}\, R) - \sin(\sqrt{\lambda}\, R) = 0,$$

откуда

$$\sqrt{\lambda}\, R = \mathrm{tg}(\sqrt{\lambda}\, R). \tag{2.12}$$

Это уравнение имеет бесконечное множество решений:

$$\lambda_n : \qquad \sqrt{\lambda_n}\, R = \mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_n}\, R), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.13}$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$\mathbf{X}_n(r) = \sin\left(\sqrt{\lambda_n} r\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.14}$$

- При $\lambda < 0$ нетривиальных решений нет, т.к. задача Штурма–Лиувилля не может иметь отрицательных собственных чисел

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(r) = c_1 r$. Поэтому из второго краевого условия $R\mathbf{X}'(R) - \mathbf{X}(R) = 0$ получаем, что $c_1 R - c_1 R = 0$ – верное при всех c_1 тождество. Поэтому задача Штурма–Лиувилля имеет собственное число, равное нулю, и соответствующую ему собственную функцию

$$\mathbf{X}_0(r) = r, \qquad n = 0. \tag{2.15}$$

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_0 = 0, \qquad \lambda_n : \quad \sqrt{\lambda_n}\, R = \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda_n}\, R), \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\Big\{\mathbf{X}_n(r)\Big\} = \Big\{r,\ \sin\Big(\sqrt{\lambda_n}\, r\Big)\Big\}, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

задачи (2.7), (2.8).

<u>Шаг 4.</u> Решаем задачу (2.6).

Будем искать решение задачи (2.6) в виде $m(r,\, t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathbf{X}_n(r)\mathbf{T}_n(t)$, т.е.

$$m(r,\, t) = \mathbf{T}_0(t) r + \sum_{n=1}^{\infty} \sin\Big(\sqrt{\lambda_n}\, r\Big)\, \mathbf{T}_n(t). \tag{2.16}$$

Разложим функции $f(r,\, t) \equiv \frac{Q}{c\rho}\, r$ и $r\varphi(r)$ в ряд по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля:

$$f(r,\, t) = f_0(t) r + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\Big(\sqrt{\lambda_n}\, r\Big), \tag{2.17}$$

$$r\varphi(r) = \alpha_0 r + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\Big(\sqrt{\lambda_n}\, r\Big) \tag{2.18}$$

Выясним, какими должны быть коэффициенты α_n. Для этого, поступая аналогично № 706, домножим (2.18) на $\mathbf{X}_m = \sin\big(\sqrt{\lambda_m}\, r\big)$ скалярно в смысле $L_2[0, R]$ и учтём, что система собственных функций задачи Штурма–Лиувилля является ортогональной в смысле этого скалярного произведения (это проверяется элементарным интегрированием):

$$(r\varphi, \mathbf{X}_m) = \alpha_m \int\limits_0^R \sin^2\Big(\sqrt{\lambda_m}\, r\Big)\, dr = \frac{\alpha_m}{2} \int\limits_0^R \Big(1 - \cos\Big(2\sqrt{\lambda_m}\, r\Big)\Big)\, dr =$$

$$= \frac{\alpha_m}{2}\left(R - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_m}} \sin\Big(2\sqrt{\lambda_m}\, r\Big)\Big|_{r=0}^{r=R}\right) = \frac{\alpha_m}{2}\left(R - \frac{\sin\big(2\sqrt{\lambda_m}\, R\big)}{2\sqrt{\lambda_m}}\right).$$

Поскольку, в силу тождеств $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, имеет место равенство:

$$R - \frac{\sin\big(2\sqrt{\lambda_m}\, R\big)}{2\sqrt{\lambda_m}} = \left[\sqrt{\lambda_m} = \frac{\operatorname{tg}(\sqrt{\lambda_m}\, R)}{R}\right] = R - \frac{R\sin\big(\sqrt{\lambda_m}\, R\big)\cos\big(\sqrt{\lambda_m}\, R\big)}{\operatorname{tg}(\sqrt{\lambda_m}\, R)} =$$

$$= R - R\cos^2\Big(\sqrt{\lambda_m}\, R\Big) = \left[\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\right] =$$

$$= R - \frac{R}{1+\operatorname{tg}^2\big(\sqrt{\lambda_m}\, R\big)} = \left[\operatorname{tg}^2\Big(\sqrt{\lambda_m}\, R\Big) = \lambda_m\, R^2\right] = R - \frac{R}{1+\lambda_m\, R^2} =$$

$$= \frac{\lambda_m\, R^3}{1+\lambda_m\, R^2},$$

в итоге для коэффициентов α_n получаем:

$$\alpha_n = \frac{2\,(1+\lambda_n\,R^2)}{\lambda_n\,R^3}(r\varphi, \mathbf{X}_n) = \frac{2\,(1+\lambda_n\,R^2)}{\lambda_n\,R^3}\int\limits_0^R r\varphi(r)\,\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right)dr, \qquad n\in\mathbb{N}. \tag{2.19}$$

Осталось найти α_0. Аналогично,

$$(r\varphi, \mathbf{X}_0) = \alpha_0\int\limits_0^R r^2 dr = \alpha_0\,\frac{R^3}{3}, \qquad \text{откуда} \qquad \alpha_0 = \frac{3}{R^3}\int\limits_0^R r^2\varphi(r)\,dr. \tag{2.20}$$

Абсолютно аналогичные выкладки позволяют нам найти коэффициенты $f_n(t)$ из (2.17):

$$f_n(t) = \frac{2\,(1+\lambda_n\,R^2)}{\lambda_m\,R^3}(f, \mathbf{X}_n) = \frac{2\,(1+\lambda_n\,R^2)}{\lambda_n\,R^3}\int\limits_0^R f(r,\,t)\,\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right)dr, \qquad n\in\mathbb{N}; \tag{2.21}$$

$$f_0(t) = \frac{3}{R^3}\int\limits_0^R r f(r,\,t)\,dr. \tag{2.22}$$

Однако, нам даны функции $f(r,\,t)\equiv\frac{Q}{c\rho}\,r$ и $r\varphi(r) = Tr + \frac{q}{2kR}r^3$, поэтому коэффициенты $f_n(t)$ и α_n надо будет найти явно. Но это позже. А сейчас самое время подставить в уравнение и начальное условие в (2.6) ряды (2.16), (2.17) и (2.18). Получим:

$$\begin{cases} \mathbf{T}_0'(t)r + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right)\mathbf{T}_n'(t) = -a^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right)\mathbf{T}_n(t) + \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + f_0(t)r + \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right); \\ \mathbf{T}_0(0)r + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right)\mathbf{T}_n(0) = \alpha_0 r + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right). \end{cases} \tag{2.23}$$

Очевидно, что равенства (2.23) между рядами, стоящими в левой и правой частях, будут заведомо выполнены, если будут равняться друг другу слагаемые с одинаковыми номерами:

$$\begin{cases} \mathbf{T}_0'(t) = f_0(t); \\ \mathbf{T}_0(0) = \alpha_0, \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} \mathbf{T}_n'(t) + a^2\lambda_n\mathbf{T}_n(t) = f_n(t); \\ \mathbf{T}_n(0) = \alpha_n. \end{cases} \tag{2.24}$$

Задачи (2.24) есть задачи Коши для неоднородных линейных уравнений 1-го порядка. Чтобы их решить вернёмся к вычислению $f_n(t)$.

Заметим, что в данном случае вид функции $f(r,\,t)\equiv\frac{Q}{c\rho}\,r$ в точности повторяет вид одного из слагаемых ряда (2.17), а именно, слагаемого с номером 0: $f_0(t)r$. Из этого, не вычисляя интегралы (2.21) – (2.22), можно «даром» получить, что

$$f_0(t) = \frac{Q}{c\rho}, \qquad f_n(t)\equiv 0, \qquad n\in\mathbb{N}. \tag{2.25}$$

Тогда решение $T_0(t)$ первой из задач (2.24) задаётся формулой:

$$\mathbf{T}_0(t) = \alpha_0 + f_0 t \equiv \alpha_0 + \frac{Q}{c\rho}t, \tag{2.26}$$

а решение $T_n(t)$ второй из задач (2.24) – формулой:

$$\mathbf{T}_n(t) = \alpha_n e^{-a^2\lambda_n t}, \qquad n\in\mathbb{N}. \tag{2.27}$$

Для того, чтобы полностью выписать решение $m(r,\,t)$ задачи (2.6) в виде ряда (2.16), нам не хватает только чисел α_n.

Учитывая, что $r\varphi(r) = Tr + \frac{q}{2kR}r^3$, найдём α_n по формулам (2.19) – (2.20).

$$\alpha_0 = \frac{3}{R^3}\int\limits_0^R r^2\varphi(r)\,dr = \frac{3}{R^3}\int\limits_0^R \left(Tr^2 + \frac{q}{2kR}r^4\right)\,dr = \frac{3}{R^3}\left(\frac{TR^3}{3} + \frac{q}{2kR}\cdot\frac{R^5}{5}\right) = T + \frac{3qR}{10\,k}.$$

$$\alpha_n = \frac{2\,(1+\lambda_n\,R^2)}{\lambda_n\,R^3}\int\limits_0^R r\varphi(r)\,\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right)dr =$$

$$= \frac{2\,(1+\lambda_n\,R^2)}{\lambda_n\,R^3}\int\limits_0^R \left(Tr + \frac{q}{2kR}r^3\right)\,\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right)dr = \frac{2\,(1+\lambda_n\,R^2)}{\lambda_n\,R^3}\cdot\left(\frac{qR^2}{k\sqrt{\lambda_n}}\,\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)\right) =$$

$$= \left[\text{в силу (2.13)},\;\; 1+\lambda_n\,R^2 = 1+\operatorname{tg}^2\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right) = \frac{1}{\cos^2\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}\right] =$$

$$= \frac{2q}{kR\lambda_n\sqrt{\lambda_n}\,\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}.$$

Здесь мы воспользовались взятыми при решении №708 (б) на Шаге 3 интегралами:

$$\int\limits_0^R r\,\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right)dr = \Big[\text{по частям}\Big] = \frac{-1}{\sqrt{\lambda_n}}\left(r\,\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right)\Big|_{r=0}^{r=R} - \int\limits_0^R \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right)dr\right) =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{\lambda_n}}\left(R\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right) - \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\cdot\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right)\Big|_{r=0}^{r=R}\right) =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{\lambda_n}}\left(R\sqrt{\lambda_n} - \operatorname{tg}\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)\right)\frac{\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}{\sqrt{\lambda_n}} = \Big[\text{в силу (2.13)}\Big] = 0$$

и

$$\int\limits_0^R r^3\,\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right)dr = \Big[2\text{ раза по частям}\Big] =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{\lambda_n}}\left(r^3\,\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right)\Big|_{r=0}^{r=R} - 3\int\limits_0^R r^2\,\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right)dr\right) =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{\lambda_n}}\left(R^3\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right) - \frac{3}{\sqrt{\lambda_n}}\left[r^2\,\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right)\Big|_{r=0}^{r=R} - 2\underbrace{\int\limits_0^R r\,\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right)dr}_{=0}\right]\right) =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{\lambda_n}}\left(R^3\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right) - 3R^2\,\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}{\sqrt{\lambda_n}}\right) =$$

$$= \left[\text{в силу (2.13)},\;\; \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}{\sqrt{\lambda_n}} = R\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\lambda_n}}\,R^3\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right).$$

Подставив найденные

$$\alpha_0 = T + \frac{3qR}{10\,k}, \qquad \alpha_n = \frac{2q}{kR\lambda_n\sqrt{\lambda_n}\,\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{2.28}$$

в формулы (2.26) – (2.27) для нахождения T_0 и T_n, а затем полученные T_0 и T_n – в (2.16), получим

$$m(r,\,t) = \left(T + \frac{3qR}{10\,k} + \frac{Q}{c\rho}t\right) r + \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right) \frac{2q}{kR\lambda_n\sqrt{\lambda_n}\,\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}\, e^{-a^2\lambda_n t}. \tag{2.29}$$

Вспомним, что $m(r,\,t) = rv(r,\,t)$, и поделим (2.29) на r:

$$v(r,\,t) = \left(T + \frac{3qR}{10\,k} + \frac{Q}{c\rho}t\right) + \frac{2q}{krR}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n\sqrt{\lambda_n}\,\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)} e^{-a^2\lambda_n t} \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right).$$

Наконец, поскольку

$$u(r,\,t) = v(r,\,t) + w(r,\,t) = -\,\frac{q}{2kR}r^2 \;-\; \frac{3qa^2}{kR}t + v(r,\,t),$$

мы готовы выписать окончательный
<u>Ответ:</u>

$$u(r,t) = -\,\frac{q}{2kR}r^2 \;-\; \frac{3qa^2}{kR}t + \left(T + \frac{3qR}{10\,k} + \frac{Q}{c\rho}t\right) + \\ + \frac{2q}{krR}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n\sqrt{\lambda_n}\,\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)} e^{-a^2\lambda_n t} \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right),$$

где $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, c – удельная теплоёмкость, ρ – плотность, k – коэффициент теплопроводности, а $\lambda_n > 0$ – решения уравнения (2.13): $\qquad \sqrt{\lambda_n}\,R = \mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_n}\,R), \qquad n \in \mathbb{N}.$

2.3. № 709(а). Короткий способ.

В однородном шаре $0 \leqslant r < R$, начиная с момента $t = 0$, действуют источники тепла постоянной плотности Q. Начальная температура шара равна T. Определить распределение температуры в шаре при $t > 0$, если поверхность шара поддерживается при постоянной температуре U.

Записав эти условия математически, получим задачу:
Найти ограниченную функцию $u(r,\,t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2\Delta u + \frac{Q}{c\rho}, & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ u(r,\,0) = T, & 0 \leqslant r < R; \\ u(R,\,t) = U, \quad |u(r,\,t)| < \infty, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{3.1}$$

где $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, c – удельная теплоёмкость, ρ – плотность, k – коэффициент теплопроводности.
<u>Шаг 1.</u> Избавление от неоднородности в граничном условии.
Помня, что $\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r$, нужно подобрать функцию $w(r,\,t)$ (желательно простого вида), которая удовлетворяла бы и уравнению и неоднородному краевому условию.

Поскольку в данном случае и краевое условие, и функция источников в уравнении очень просты, то мы можем найти функцию $w(r,\,t)$, удовлетворяющую сразу и <u>неоднородному</u> уравнению, и неоднородному краевому условию.

То есть мы будем искать решение $u(r,\,t)$ задачи (3.1) в виде

$$u(r,\,t) = v(r,\,t) + w(r,\,t),$$

где функция $w(r,\,t)$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} w_t = a^2\Delta w + \frac{Q}{c\rho} \equiv a^2\left(w_{rr} + \frac{2}{r}w_r\right) + \frac{Q}{c\rho}, & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ w(R,\,t) = U, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{3.2}$$

В этом случае надо искать w в виде

$$w(r,\,t) = \alpha r^2 + \beta. \tag{3.3}$$

Подставим искомую функцию w вида (3.4) в граничное условие:

$$w(R,\,t) = U = \alpha R^2 + \beta \qquad \Longrightarrow \qquad \beta = U - \alpha R^2.$$

Тогда

$$w(r,\,t) = \alpha(r^2 - R^2) + U.$$

Подставим эту функцию в уравнение $w_t = a^2\left(w_{rr} + \frac{2}{r}w_r\right) + \frac{Q}{c\rho}$:

$$0 = a^2\left(2\alpha + \frac{2}{r}\cdot 2\alpha r\right) + \frac{Q}{c\rho} = 6a^2\alpha + \frac{Q}{c\rho} \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad \alpha = -\frac{Q}{6c\rho a^2} = \left[a^2c\rho = k\right] = -\frac{Q}{6k}.$$

Итак:

$$w(r,\,t) = \frac{Q}{6k}\left(R^2 - r^2\right) + U. \tag{3.4}$$

Тогда $v(r,\,t) = u - w$ есть решение следующей задачи:

$$\begin{cases} v_t = a^2\Delta v, & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ v(r,\,0) = T - w(r,\,0) = T - U - \frac{Q}{6k}\left(R^2 - r^2\right) = \varphi(r), & 0 \leqslant r < R; \\ v(R,\,t) = 0, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{3.5}$$

<u>Шаг 2.</u> Замена неизвестной функции

Аналогично Шагу 2 задачи 709(б), для новой неизвестной функции

$$m(r,\,t) = rv(r,\,t)$$

получим задачу: *Найти функцию $v(r,\,t)$ из условий*

$$\begin{cases} m_t = a^2 m_{rr}, & \text{в прямоугольнике;} \\ m(r,\,0) = r\varphi(r) \equiv \left(T - U - \frac{Q}{6k}\left(R^2 - r^2\right)\right)r, & \text{на интервале } 0 < r < R; \\ m(R,\,t) = 0, \qquad m(0,\,t) = 0 & \text{при } 0 < t < T. \end{cases} \tag{3.6}$$

<u>Шаг 3.</u> Решение задачи Штурма-Лиувилля.

Уравнению $m_t = a^2 m_{rr}$ с краевыми условиями $m(0,t) = m(R,\,t) = 0$ соответствует следующая задача Штурма-Лиувилля:

$$\mathbf{X}''(r) + \lambda\mathbf{X}(r) = 0, \tag{3.7}$$

$$\mathbf{X}(0) = 0, \quad \mathbf{X}(R) = 0. \tag{3.8}$$

Эту задачу мы уже решали на Шаге 2 № 705 (семинар 1). Повторим проведённое там исследование.

Общее решение уравнения (3.7) имеет вид

$$\mathbf{X}(r) = c_1\sin(\sqrt{\lambda}\,r) + c_2\cos(\sqrt{\lambda}\,r) \qquad \text{при } \lambda > 0; \tag{3.9}$$

$$\mathbf{X}(r) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,r} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,r} \qquad \text{при } \lambda < 0; \tag{3.10}$$

$$\mathbf{X}(r) = c_1 r + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0; \tag{3.11}$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(r) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, r)$. Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}(R) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda}\, R = \pi n$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{R}\right)^2, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.12}$$

  Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$\mathbf{X}_n(r) = \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.13}$$

- При $\lambda < 0$ нетривиальных решений нет, т.к. задача Штурма–Лиувилля не может иметь отрицательных собственных чисел

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(r) = c_1 r$. Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}(R) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет собственного числа, равного нулю.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{R}\right)^2, \quad \mathbf{X}_n(r) = \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

задачи (3.7), (3.8).

<u>Шаг 4.</u> Решаем задачу (3.6).

Будем искать решение задачи (3.6) в виде $m(r,\, t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathbf{X}_n(r)\mathbf{T}_n(t)$, т.е.

$$m(r,\, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right) \mathbf{T}_n(t). \tag{3.14}$$

Разложим функцию $r\varphi(r) \equiv \left(T - U - \frac{Q}{6k}\left(R^2 - r^2\right)\right) r$ в ряд по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля:

$$r\varphi(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right) \tag{3.15}$$

Выясним, какими должны быть коэффициенты α_n. Для этого, поступая аналогично № 706, домножим (3.15) на $\mathbf{X}_m = \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right)$ скалярно в смысле $L_2[0, R]$ и учтём, что система собственных функций задачи Штурма–Лиувилля является ортогональной в смысле этого скалярного произведения (это проверяется элементарным интегрированием):

$$(r\varphi, \mathbf{X}_m) = \alpha_m \int\limits_0^R \sin^2\left(\frac{\pi m r}{R}\right) dr = \frac{\alpha_m}{2} \int\limits_0^R \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi m r}{R}\right)\right) dr =$$

$$= \frac{\alpha_m}{2}\left(R - \frac{R}{2\pi m} \sin\left(\frac{2\pi m r}{R}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=R}\right) = \frac{\alpha_m R}{2}.$$

Таким образом, для коэффициентов α_n получаем:

$$\alpha_n = \frac{2}{R}(r\varphi, \mathbf{X}_n) = \frac{2}{R} \int\limits_0^R r\varphi(r)\ \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right) dr, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.16}$$

Однако, нам в явном виде дана функция $r\varphi(r) = \left(T - U - \frac{Q}{6k}\left(R^2 - r^2\right)\right) r$, поэтому коэффициенты α_n тоже надо будет найти явно. Но это позже. А сейчас самое время подставить в уравнение и начальное условие в (3.6) ряды (3.14) и (3.15). Получим:

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right) \mathbf{T}_n'(t) = -a^2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n r}{R}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right) \mathbf{T}_n(t); \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right) \mathbf{T}_n(0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right). \end{cases} \tag{3.17}$$

Очевидно, что равенства (3.17) между рядами, стоящими в левой и правой частях, будут заведомо выполнены, если будут равняться друг другу слагаемые с одинаковыми номерами:

$$\begin{cases} \mathbf{T}_n'(t) + \left(\frac{\pi n a}{R}\right)^2 \mathbf{T}_n(t) = 0; \\ \mathbf{T}_n(0) = \alpha_n. \end{cases} \tag{3.18}$$

Задачи (3.18) есть задачи Коши для <u>однородных</u> линейных уравнений 1-го порядка. Общее решение задачи (3.18) имеет вид

$$\mathbf{T}_n = T_n(0)\, e^{-\left(\frac{\pi n a}{R}\right)^2 t},$$

то есть

$$\mathbf{T}_n = \alpha_n\, e^{-\left(\frac{\pi n a}{R}\right)^2 t}. \tag{3.19}$$

Найдём коэффициенты α_n. Поскольку $r\varphi(r) = \left(T - U - \frac{Q}{6k}\left(R^2 - r^2\right)\right) r$, то для вычисления α_n нам надо найти интегралы:

$$\frac{2}{R}\int\limits_0^R r \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right) dr = \Big[\text{по частям}\Big] = -\frac{2}{R}\cdot\frac{R}{\pi n}\left(r\cos\left(\frac{\pi n r}{R}\right)\Big|_{r=0}^{r=R} - \int\limits_0^R \cos\left(\frac{\pi n r}{R}\right) dr\right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\left(R(-1)^n - \frac{R}{\pi n}\cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right)\Big|_{r=0}^{r=R}}_{=0}\right) = \frac{2(-1)^{n+1}R}{\pi n}, \quad \text{и}$$

$$\frac{2}{R}\int\limits_0^R r^3 \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right) dr = \Big[\text{2 раза по частям}\Big] = -\frac{2}{R}\cdot\frac{R}{\pi n}\left(r^3\cos\left(\frac{\pi n r}{R}\right)\Big|_{r=0}^{r=R} - 3\int\limits_0^R r^2\cos\left(\frac{\pi n r}{R}\right) dr\right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\left(R^3(-1)^n - \frac{3R}{\pi n}\left[\underbrace{r^2\sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right)\Big|_{r=0}^{r=R}}_{=0} - \underbrace{2\int\limits_0^R r\sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right) dr}_{=\frac{2(-1)^{n+1}R^2}{\pi n}}\right]\right) = -\frac{2}{\pi n}\left((-1)^n R^3 + 6\frac{(-1)^{n+1}R^3}{(\pi n)^2}\right) =$$

$$= \frac{2(-1)^{n+1}R^3}{\pi n} - \frac{12(-1)^{n+1}R^3}{(\pi n)^3}.$$

Итак,

$$\alpha_n = \frac{2}{R}\int\limits_0^R \left(T - U - \frac{Q}{6k}\left(R^2 - r^2\right)\right) r\, \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right) dr =$$

$$= \left(T - U - \frac{Q}{6k}R^2\right)\frac{2(-1)^{n+1}R}{\pi n} + \frac{Q}{6k}\left(\frac{2(-1)^{n+1}R^3}{\pi n} - \frac{12(-1)^{n+1}R^3}{(\pi n)^3}\right) =$$

$$= (T - U)\frac{2(-1)^{n+1}R}{\pi n} - \frac{Q}{k}\cdot\frac{2(-1)^{n+1}R^3}{(\pi n)^3} = \left(T - U - \frac{Q}{k}\cdot\frac{R^2}{(\pi n)^2}\right)\frac{2(-1)^{n+1}R}{\pi n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Подставляем найденные α_n в формулу (3.19) вычисления $\mathbf{T}_n(t) = \alpha_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{R}\right)^2 t}$ и получаем:

$$\mathbf{T}_n(t) = \left(T - U - \frac{Q}{k} \cdot \frac{R^2}{(\pi n)^2}\right) \frac{2(-1)^{n+1} R}{\pi n} e^{-\left(\frac{\pi n a}{R}\right)^2 t}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Вернёмся к формуле (3.14) для $m(r,\, t)$. Подставим в неё полученные $\mathbf{T}_n$ и получим

$$m(r,\, t) = \frac{2R}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(U - T + \frac{QR^2}{k(\pi n)^2}\right) e^{-\left(\frac{\pi n a}{R}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right). \tag{3.20}$$

Вспомним, что $m(r,\, t) = rv(r,\, t)$, и поделим (3.20) на r:

$$v(r,\, t) = \frac{2R}{\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(U - T + \frac{QR^2}{k(\pi n)^2}\right) e^{-\left(\frac{\pi n a}{R}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right).$$

Наконец, поскольку

$$u(r,\, t) = v(r,\, t) + w(r,\, t) = \frac{Q}{6k}\,(R^2 - r^2) + U + v(r,\, t),$$

мы готовы выписать окончательный
<u>Ответ:</u> (в задачнике опечатка – знак «минус» перед Q)

$$u(r,t) = \frac{Q}{6k}\,(R^2 - r^2) + U + \frac{2R}{\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(U - T + \frac{QR^2}{k(\pi n)^2}\right) e^{-\left(\frac{\pi n a}{R}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right),$$

где $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, c – удельная теплоёмкость, ρ – плотность, k – коэффициент теплопроводности.

3.4. № 709(а). Классический способ.

В однородном шаре $0 \leqslant r < R$, начиная с момента $t = 0$, действуют источники тепла постоянной плотности Q. Начальная температура шара равна T. Определить распределение температуры в шаре при $t > 0$, если поверхность шара поддерживается при постоянной температуре U.

Записав эти условия математически, получим задачу:
Найти ограниченную функцию $u(r,\, t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u + \frac{Q}{c\rho}, & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ u(r,\, 0) = T, & 0 \leqslant r < R; \\ u(R,\, t) = U, \quad |u(r,\, t)| < \infty, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{4.1}$$

где $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, c – удельная теплоёмкость, ρ – плотность, k – коэффициент теплопроводности.
<u>Шаг 1.</u> Избавление от неоднородности в граничном условии.
Помня, что $\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r$, нужно подобрать функцию $w(r,\, t)$ (желательно простого вида), которая удовлетворяла бы и (однородному) уравнению и неоднородному краевому условию. То есть будем искать решение $u(r,\, t)$ задачи (4.1) в виде

$$u(r,\, t) = v(r,\, t) + w(r,\, t),$$

где функция $w(r,\, t)$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} w_t = a^2 \Delta w \equiv a^2 \left(w_{rr} + \frac{2}{r} w_r\right), & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ w(R,\, t) = U, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{4.2}$$

В данном простеёшем случае краевого условия I-го рода легко найти w в виде $w(r,\,t) = const$. Очевидно, все условия (4.2) выполняются для функции

$$w(r,\,t) = U. \tag{4.3}$$

Тогда $v(r,\,t) = u - w$ есть решение следующей задачи:

$$\begin{cases} v_t = a^2\Delta v + \frac{Q}{c\rho}, & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ v(r,\,0) = T - w(r,\,0) = T - U = \varphi(r), & 0 \leqslant r < R; \\ v(R,\,t) = 0, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{4.4}$$

<u>Шаг 2.</u> Замена неизвестной функции
Аналогично Шагу 2 задачи 709(б), для новой неизвестной функции

$$m(r,\ t) = rv(r,\ t)$$

получим задачу: *Найти функцию $v(r,\,t)$ из условий*

$$\begin{cases} m_t = a^2 m_{rr} + \frac{Q}{c\rho}\,r, & \text{в прямоугольнике } \ 0 < r < R, \ \ 0 < t \leqslant T; \\ m(r,\,0) = r\varphi(r) \equiv (T-U)r, & \text{на интервале } 0 < r < R; \\ m(R,\,t) = 0, \qquad m(0,\,t) = 0 & \text{при } 0 < t < T. \end{cases} \tag{4.5}$$

<u>Шаг 3.</u> Решение задачи Штурма-Лиувилля.
Уравнению $m_t = a^2 m_{rr}$ с краевыми условиями $m(0,t) = m(R,\,t) = 0$ соответствует следующая задача Штурма-Лиувилля:

$$\mathbf{X}"(r) + \lambda\mathbf{X}(r) = 0, \tag{4.6}$$

$$\mathbf{X}(0) = 0, \quad \mathbf{X}(R) = 0. \tag{4.7}$$

Эту задачу мы уже решали на Шаге 2 № 705 (семинар 1). Повторим проведённое там исследование.

Общее решение уравнения (4.6) имеет вид

$$\mathbf{X}(r) = c_1\sin(\sqrt{\lambda}\,r) + c_2\cos(\sqrt{\lambda}\,r) \qquad \text{при } \ \lambda > 0; \tag{4.8}$$

$$\mathbf{X}(r) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,r} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,r} \qquad \text{при } \ \lambda < 0; \tag{4.9}$$

$$\mathbf{X}(r) = c_1 r + c_2 \qquad \text{при } \ \lambda = 0; \tag{4.10}$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(r) = c_1\sin(\sqrt{\lambda}\,r)$. Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}(R) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda}\,R = \pi n$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{R}\right)^2, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{4.11}$$

  Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$\mathbf{X}_n(r) = \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{4.12}$$

- При $\lambda < 0$ нетривиальных решений нет, т.к. задача Штурма–Лиувилля не может иметь отрицательных собственных чисел

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(r) = c_1 r$. Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}(R) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет собственного числа, равного нулю.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{R}\right)^2, \quad \mathbf{X}_n(r) = \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

задачи (4.6), (4.7).

<u>Шаг 4.</u> Решаем задачу (4.5).

Будем искать решение задачи (4.5) в виде $m(r,\,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathbf{X}_n(r)\mathbf{T}_n(t)$, т.е.

$$m(r,\,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right) \mathbf{T}_n(t). \tag{4.13}$$

Разложим функции $f(r,\,t) \equiv \frac{Q}{c\rho} r$ и $r\varphi(r) \equiv (T-U)r$ в ряд по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля:

$$f(r,\,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right), \tag{4.14}$$

$$r\varphi(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right) \tag{4.15}$$

Выясним, какими должны быть коэффициенты α_n. Для этого, поступая аналогично № 706, домножим (4.15) на $\mathbf{X}_m = \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right)$ скалярно в смысле $L_2[0,R]$ и учтём, что система собственных функций задачи Штурма–Лиувилля является ортогональной в смысле этого скалярного произведения (это проверяется элементарным интегрированием):

$$(r\varphi, \mathbf{X}_m) = \alpha_m \int\limits_0^R \sin^2\left(\frac{\pi n r}{R}\right) dr = \frac{\alpha_m}{2} \int\limits_0^R \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi m r}{R}\right)\right) dr =$$

$$= \frac{\alpha_m}{2}\left(R - \frac{R}{2\pi m} \sin\left(\frac{2\pi m r}{R}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=R}\right) = \frac{\alpha_m R}{2}.$$

Таким образом, для коэффициентов α_n получаем:

$$\alpha_n = \frac{2}{R}(r\varphi, \mathbf{X}_n) = \frac{2}{R}\int\limits_0^R r\varphi(r)\ \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right) dr, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{4.16}$$

Абсолютно аналогичные выкладки позволяют нам найти коэффициенты $f_n(t)$ из (4.14):

$$f_n(t) = \frac{2}{R}(f, \mathbf{X}_n) = \frac{2}{R}\int\limits_0^R f(r,\,t)\ \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right) dr, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{4.17}$$

Однако, нам даны функции $f(r,\,t) \equiv \frac{Q}{c\rho} r$ и $r\varphi(r) = (T-U)r$, поэтому коэффициенты $f_n(t)$ и α_n надо будет найти явно. Но это позже. А сейчас самое время подставить в уравнение и начальное условие в (4.5) ряды (4.13), (4.14) и (4.15). Получим:

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right) \mathbf{T}'_n(t) = -a^2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi n r}{R}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right) \mathbf{T}_n(t) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right); \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right) \mathbf{T}_n(0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right). \end{cases} \tag{4.18}$$

Очевидно, что равенства (4.18) между рядами, стоящими в левой и правой частях, будут заведомо выполнены, если будут равняться друг другу слагаемые с одинаковыми номерами:

$$\begin{cases} \mathbf{T}'_n(t) + \left(\frac{\pi n a}{R}\right)^2 \mathbf{T}_n(t) = f_n(t); \\ \mathbf{T}_n(0) = \alpha_n. \end{cases} \tag{4.19}$$

Задачи (4.19) есть задачи Коши для неоднородных линейных уравнений 1-го порядка. Общее решение соответсвующего однородного уравнения

$$\mathbf{T}'_{no}(t) + \left(\frac{\pi n a}{R}\right)^2 \mathbf{T}_{no}(t) = 0$$

имеет вид

$$\mathbf{T}_{no} = ce^{-\left(\frac{\pi n a}{R}\right)^2 t},$$

откуда методом вариации постоянной получим общее решение неоднородного уравнения в (4.19):

$$\mathbf{T}_n = c(t)e^{-\left(\frac{\pi n a}{R}\right)^2 t}. \tag{4.20}$$

Подставив это решение в уравнение в (4.19), получаем условие на функцию $c(t)$:

$$c'(t) = e^{\left(\frac{\pi n a}{R}\right)^2 t} f_n(t).$$

Проинтегрировав это равенство и подставив результат в (4.20), находим (с учётом начального условия), что

$$\mathbf{T}_n(t) = \alpha_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{R}\right)^2 t} + \int\limits_0^t e^{-\left(\frac{\pi n a}{R}\right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau. \tag{4.21}$$

Чтобы получить $T_n(t)$ в явном виде, придётся найти коэффициенты α_n и $f_n(t)$. Воспользуемся формулами (4.16) и (4.17) и заданным видом функций $r\varphi(r) = (T-U)r$ и $f(r,\,t) = \frac{Q}{c\rho}r$.

$$\alpha_n = \frac{2}{R}\int\limits_0^R r\varphi(r)\ \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right) dr = \frac{2(T-U)}{R}\int\limits_0^R r\sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right) dr =$$

$$= \Big[\text{по частям}\Big] = -\frac{2(T-U)}{R}\frac{R}{\pi n}\left(r\cos\left(\frac{\pi n r}{R}\right)\Big|_{r=0}^{r=R} - \underbrace{\int\limits_0^R \cos\left(\frac{\pi n r}{R}\right) dr}_{=0} \right) =$$

$$= \frac{2(U-T)(-1)^n R}{\pi n}.$$

Таким образом, для коэффициентов α_n получаем:

$$\alpha_n = \frac{2(U-T)(-1)^n R}{\pi n}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{4.22}$$

Абсолютно аналогичные выкладки позволяют нам найти коэффициенты $f_n(t)$:

$$f_n(t) = \frac{2}{R}\int\limits_0^R f(r,\,t)\ \sin\left(\frac{2\pi n r}{R}\right) dr = \frac{2Q}{c\rho R}\int\limits_0^R r\sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right) dr =$$

$$= \Big[\text{по частям}\Big] = -\frac{2Q}{c\rho R}\frac{R}{\pi n}\left(r\cos\left(\frac{\pi n r}{R}\right)\Big|_{r=0}^{r=R} - \underbrace{\int\limits_0^R \cos\left(\frac{\pi n r}{R}\right) dr}_{=0} \right) = -\frac{2Q(-1)^n R}{c\rho\pi n},$$

откуда

$$f_n(t) = \frac{2Q(-1)^{n+1}R}{c\rho\pi n}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{4.23}$$

Итак, чтобы явно выписать $T_n(t)$ из (4.21), нам осталось найти

$$\int\limits_0^t e^{-\left(\frac{\pi na}{R}\right)^2(t-\tau)} f_n(\tau)d\tau = \frac{2Q(-1)^{n+1}R}{c\rho\pi n}\int\limits_0^t e^{-\left(\frac{\pi na}{R}\right)^2(t-\tau)}d\tau =$$

$$= \frac{2Q(-1)^{n+1}R}{c\rho\pi n}e^{-\left(\frac{\pi na}{R}\right)^2 t}\int\limits_0^t e^{\left(\frac{\pi na}{R}\right)^2\tau}d\tau = \frac{2Q(-1)^{n+1}R}{c\rho\pi n}e^{-\left(\frac{\pi na}{R}\right)^2 t}\cdot\left(\frac{R}{\pi na}\right)^2 e^{\left(\frac{\pi na}{R}\right)^2\tau}\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} =$$

$$= \Big[a^2c\rho = k\Big] = \frac{2Q(-1)^{n+1}R^3}{k(\pi n)^3}\left(1 - e^{-\left(\frac{\pi na}{R}\right)^2 t}\right).$$

Подставляем найденный интеграл и $\alpha_n = \frac{2(U-T)(-1)^n R}{\pi n}$ в (4.21)

$$\mathbf{T}_n(t) = \alpha_n e^{-\left(\frac{\pi na}{R}\right)^2 t} + \int\limits_0^t e^{-\left(\frac{\pi na}{R}\right)^2(t-\tau)} f_n(\tau)d\tau,$$

и получаем:

$$\mathbf{T}_n(t) = \frac{2(U-T)(-1)^n R}{\pi n}e^{-\left(\frac{\pi na}{R}\right)^2 t} + \frac{2Q(-1)^{n+1}R^3}{k(\pi n)^3}\left(1 - e^{-\left(\frac{\pi na}{R}\right)^2 t}\right) =$$

$$= \frac{2(-1)^n R}{\pi n}\left(U - T + \frac{QR^2}{k(\pi n)^2}\right)e^{-\left(\frac{\pi na}{R}\right)^2 t} + \frac{2Q(-1)^{n+1}R^3}{k(\pi n)^3}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{4.24}$$

Подставляем полученные T_n в (4.13), получим

$$m(r,\,t) = \frac{2R}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(U - T + \frac{QR^2}{k(\pi n)^2}\right)e^{-\left(\frac{\pi na}{R}\right)^2 t}\sin\left(\frac{\pi nr}{R}\right) -$$

$$- \frac{2QR^3}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\pi^3 n^3}\sin\left(\frac{\pi nr}{R}\right). \tag{4.25}$$

Чтобы упростить ответ, заметим, что последний ряд несложно просуммировать, и

$$12R^3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\pi^3 n^3}\sin\left(\frac{\pi nr}{R}\right) = R^2 r - r^3,$$

поскольку коэффициенты ряда Фурье по синусам для этой функции находятся по формуле

$$c_n = \frac{2}{R}\int\limits_0^R \left(R^2 r - r^3\right)\,\sin\left(\frac{\pi nr}{R}\right)dr = 12R^3\frac{(-1)^{n+1}}{(\pi n)^3}.$$

В самом деле, эта формула получается, если вычесть друг из друга следующие интегралы:

$$R^2\cdot\frac{2}{R}\int\limits_0^R r\sin\left(\frac{\pi nr}{R}\right)dr = \Big[\text{по частям}\Big] =$$

$$= -2R\cdot\frac{R}{\pi n}\left(r\cos\left(\frac{\pi nr}{R}\right)\Big|_{r=0}^{r=R} - \underbrace{\int\limits_0^R \cos\left(\frac{\pi nr}{R}\right)dr}_{=0}\right) = \frac{2(-1)^{n+1}R^3}{\pi n}, \quad \text{и}$$

$$\frac{2}{R}\int\limits_0^R r^3\sin\left(\frac{\pi nr}{R}\right)dr = \Big[2 \text{ раза по частям}\Big] = -\frac{2}{R}\cdot\frac{R}{\pi n}\left(r^3\cos\left(\frac{\pi nr}{R}\right)\Big|_{r=0}^{r=R} - 3\int\limits_0^R r^2\cos\left(\frac{\pi nr}{R}\right)dr\right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\left(R^3(-1)^n - \frac{3R}{\pi n}\left[\underbrace{r^2\sin\left(\frac{\pi nr}{R}\right)\Big|_{r=0}^{r=R}}_{=0} - \underbrace{2\int\limits_0^R r\sin\left(\frac{\pi nr}{R}\right)dr}_{=\frac{2(-1)^{n+1}R^2}{\pi n}}\right]\right) = -\frac{2}{\pi n}\left((-1)^n R^3 + 6\frac{(-1)^{n+1}R^3}{(\pi n)^2}\right) =$$

$$= \frac{2(-1)^{n+1}R^3}{\pi n} - \frac{12(-1)^{n+1}R^3}{(\pi n)^3}.$$

Таким образом,

$$m(r,\,t) = \frac{2R}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(U - T + \frac{QR^2}{k(\pi n)^2}\right)e^{-\left(\frac{\pi na}{R}\right)^2 t}\sin\left(\frac{\pi nr}{R}\right) + \frac{Q}{6k}\left(R^2 - r^2\right)r. \qquad (4.26)$$

Вспомним, что $m(r,\,t) = rv(r,\,t)$, и поделим (4.26) на r:

$$v(r,\,t) = \frac{2R}{\pi r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(U - T + \frac{QR^2}{k(\pi n)^2}\right)e^{-\left(\frac{\pi na}{R}\right)^2 t}\sin\left(\frac{\pi nr}{R}\right) + \frac{Q}{6k}\left(R^2 - r^2\right).$$

Наконец, поскольку

$$u(r,\,t) = v(r,\,t) + w(r,\,t) = U + v(r,\,t),$$

мы готовы выписать окончательный
<u>Ответ:</u> (в задачнике опечатка – знак «минус» перед Q)

$$u(r,t) = U + \frac{Q}{6k}\left(R^2 - r^2\right) + \frac{2R}{\pi r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(U - T + \frac{QR^2}{k(\pi n)^2}\right)e^{-\left(\frac{\pi na}{R}\right)^2 t}\sin\left(\frac{\pi nr}{R}\right),$$

где $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, c – удельная теплоёмкость, ρ – плотность, k – коэффициент теплопроводности.

4.5. № 709(в).

В однородном шаре $0 \leqslant r < R$, начиная с момента $t = 0$, действуют источники тепла постоянной плотности Q. Начальная температура шара равна T. Определить распределение температуры в шаре при $t > 0$, если на поверхности шара происходит конвективный теплообмен с внешней средой. Температуре среды равна P.

Записав эти условия математически, получим задачу:
Найти ограниченную функцию $u(r,\,t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2\Delta u + \frac{Q}{c\rho}, & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ u(r,\,0) = T, & 0 \leqslant r < R; \\ u_r(R,\,t) + hu(R,\,t) = hP, \quad |u(r,\,t)| < \infty, & 0 < t < T. \end{cases} \qquad (5.1)$$

где $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, c – удельная теплоёмкость, ρ – плотность, k – коэффициент теплопроводности.
<u>Шаг 1.</u> Избавление от неоднородности в граничном условии.
Помня, что $\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r$, нужно подобрать функцию $w(r,\,t)$ (желательно простого вида), которая удовлетворяла бы и уравнению и неоднородному краевому условию.

Поскольку в данном случае и краевое условие, и функция источников в уравнении очень просты (константы), то мы можем найти функцию $w(r,\,t)$, удовлетворяющую сразу и неоднородному уравнению, и неоднородному краевому условию.

То есть мы будем искать решение $u(r,\,t)$ задачи (5.1) в виде

$$u(r,\,t) = v(r,\,t) + w(r,\,t),$$

где функция $w(r,\,t)$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} w_t = a^2\Delta w + \frac{Q}{c\rho} \equiv a^2\left(w_{rr} + \frac{2}{r}w_r\right) + \frac{Q}{c\rho}, & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ w_r(R,\,t) + hw(R,\,t) = hP, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{5.2}$$

В этом случае надо искать w в виде

$$w(r,\,t) = \alpha r^2 + \beta. \tag{5.3}$$

Подставим искомую функцию w вида (5.4) в граничное условие:

$$w_r(R,\,t) + hw(R,\,t) = hP = 2\alpha R + h\alpha R^2 + h\beta \qquad \Longrightarrow \qquad \beta = P - \alpha R^2 - \frac{2R}{h}\alpha.$$

Тогда

$$w(r,\,t) = \alpha\left[(r^2 - R^2) - \frac{2R}{h}\right] + P.$$

Подставим эту функцию в уравнение $w_t = a^2\left(w_{rr} + \frac{2}{r}w_r\right) + \frac{Q}{c\rho}$:

$$0 = a^2\left(2\alpha + \frac{2}{r}\cdot 2\alpha r\right) + \frac{Q}{c\rho} = 6a^2\alpha + \frac{Q}{c\rho} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = -\frac{Q}{6c\rho a^2} = \left[a^2c\rho = k\right] = -\frac{Q}{6k}.$$

Итак:

$$w(r,\,t) = \frac{Q}{6k}\left(R^2 - r^2\right) + \frac{QR}{3kh} + P. \tag{5.4}$$

Тогда $v(r,\,t) = u - w$ есть решение следующей задачи:

$$\begin{cases} v_t = a^2\Delta v + \frac{Q}{c\rho}, & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ v(r,\,0) = T - w(r,\,0) = T - P - \frac{QR}{3kh} - \frac{Q}{6k}\left(R^2 - r^2\right) = \varphi(r), & 0 \leqslant r < R; \\ v_r(R,\,t) + hv(R,\,t) = 0, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{5.5}$$

<u>Шаг 2.</u> Замена неизвестной функции

Действуя аналогично Шагу 1 задачи 711, для новой неизвестной функции

$$m(r,\,t) = rv(r,\,t)$$

получим задачу: *Найти функцию $v(r,\,t)$ из условий*

$$\begin{cases} m_t = a^2m_{rr} + \frac{Q}{c\rho}\,r, & \text{в прямоугольнике ;} \\ m(r,\,0) = r\varphi(r) \equiv \left(T - P - \frac{QR}{3kh} - \frac{QR^2}{6k}\right)r + \frac{Q}{6k}r^3, & \text{на интервале } 0 < r < R; \\ m_r(R,\,t) + \frac{hR-1}{R}m(R,\,t) = 0, \qquad m(0,\,t) = 0 & \text{при } 0 < t < T. \end{cases} \tag{5.6}$$

Краевое условие $v_r(R,\,t) + hv(R,\,t) = 0$ означает для $m(r,\,t) = rv(r,\,t)$, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{m}{r} + h\frac{m}{r}\right)_{r=R} = \left.\frac{rm_r - m}{r^2}\right|_{r=R} + h\frac{m}{R} = \frac{Rm_r(R,\,t) + (hR-1)m(R,\,t)}{R^2} = 0,$$

откуда и взялось краевое условие $m_r(R,\,t) + \frac{hR-1}{R}m(R,\,t) = 0$ в задаче для m. Заметим, что в зависимости от значений h и R это условие либо 2-го рода (при $hR = 1$), либо 3-го рода (при $hR \neq 1$). Поэтому решать придётся, фактически, 2 задачи.

Случай второй краевой задачи ($hR = 1$).

<u>Шаг 3-2.</u> Решение задачи Штурма-Лиувилля. Случай $hR = 1$.
Уравнению $m_t = a^2 m_{rr}$ с краевыми условиями $m(0,t) = m_r(R,\, t) = 0$ соответствует следующая задача Штурма-Лиувилля:

$$\mathbf{X}"(r) + \lambda \mathbf{X}(r) = 0, \tag{5.7}$$
$$\mathbf{X}(0) = 0, \quad \mathbf{X}'(R) = 0. \tag{5.8}$$

Эта задача решена в № 688 (семинар 7 за прошлый семестр). Повторим проведённое там исследование.

Задача (5.7)–(5.8) есть задача Штурма–Лиувилля. Общее решение уравнения (5.7) имеет вид

$$\mathbf{X}(r) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, r) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, r) \qquad \text{при } \lambda > 0; \tag{5.9}$$
$$\mathbf{X}(r) = c_1 r + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0; \tag{5.10}$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(r) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, r)$ $\Rightarrow$ $\mathbf{X}'(r) = c_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\, x)$. Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}'(R) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda}\, R = \pi \left(\frac{1}{2} + k\right)$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:
$$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2R}\right)^2, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{5.11}$$
Им соответствует бесконечное множество собственных функций:
$$\mathbf{X}_n(r) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)r}{2R}\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{5.12}$$

- При $\lambda < 0$ задача Штурма–Лиувилля не имеет нетривиальных решений.

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(r) = c_1 r$ $\Rightarrow$ $\mathbf{X}'(r) = c_1$. Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}'(R) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет собственного числа, равного нулю.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2R}\right)^2, \quad \mathbf{X}_n(x) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)r}{2R}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

задачи (5.7), (5.8).

<u>Шаг 4-2. Случай $hR = 1$.</u> Решаем задачу (5.6).

Будем искать решение задачи (5.6) в виде $m(r,\, t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_n(r)\mathbf{T}_n(t)$, т.е.

$$m(r,\, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)r}{2R}\right) \mathbf{T}_n(t). \tag{5.13}$$

Разложим функцию $r\varphi(r) \equiv \left(T - P - \frac{QR}{3kh} - \frac{QR^2}{6k}\right) r + \frac{Q}{6k} r^3$ в ряд по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля:

$$r\varphi(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right) \tag{5.14}$$

Выясним, какими должны быть коэффициенты α_n. Для этого, поступая аналогично № 706, домножим (5.14) на $\mathbf{X}_m = \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right)$ скалярно в смысле $L_2[0,R]$ и учтём, что система собственных функций задачи Штурма–Лиувилля является ортогональной в смысле этого скалярного произведения (это проверяется элементарным интегрированием):

$$(r\varphi, \mathbf{X}_m) = \alpha_m \int\limits_0^R \sin^2\left(\frac{\pi(2m-1)r}{2R}\right) dr = \frac{\alpha_m}{2}\int\limits_0^R \left(1-\cos\left(\frac{\pi(2m-1)r}{R}\right)\right) dr =$$

$$= \frac{\alpha_m}{2}\left(R - \frac{R}{\pi(2m-1)}\sin\left(\frac{\pi(2m-1)r}{R}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=R}\right) = \frac{\alpha_m R}{2}.$$

Таким образом, для коэффициентов α_n получаем:

$$\alpha_n = \frac{2}{R}(r\varphi, \mathbf{X}_n) = \frac{2}{R}\int\limits_0^R r\varphi(r)\ \sin\left(\frac{\pi(2n-1)r}{2R}\right) dr, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{5.15}$$

Однако, нам в явном виде дана функция $r\varphi(r) = \left(T - P - \frac{QR}{3kh} - \frac{QR^2}{6k}\right) r + \frac{Q}{6k} r^3$, поэтому коэффициенты α_n тоже надо будет найти явно. Но это позже. А сейчас самое время подставить в уравнение и начальное условие в (5.6) ряды (5.13) и (5.14). Получим:

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)r}{2R}\right) \mathbf{T}_n'(t) = -a^2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi(2n-1)r}{2R}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi(2n-1)r}{2R}\right) \mathbf{T}_n(t); \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)r}{2R}\right) \mathbf{T}_n(0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{\pi(2n-1)r}{2R}\right). \end{cases} \tag{5.16}$$

Очевидно, что равенства (5.16) между рядами, стоящими в левой и правой частях, будут заведомо выполнены, если будут равняться друг другу слагаемые с одинаковыми номерами:

$$\begin{cases} \mathbf{T}_n'(t) + \left(\frac{\pi(2n-1)a}{2R}\right)^2 \mathbf{T}_n(t) = 0; \\ \mathbf{T}_n(0) = \alpha_n. \end{cases} \tag{5.17}$$

Задачи (5.17) есть задачи Коши для <u>однородных</u> линейных уравнений 1-го порядка. Общее решение задачи (5.17) имеет вид

$$\mathbf{T}_n = T_n(0)\, e^{-\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2R}\right)^2 t},$$

то есть

$$\mathbf{T}_n = \alpha_n\, e^{-\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2R}\right)^2 t}. \tag{5.18}$$

Найдём коэффициенты α_n. Поскольку $r\varphi(r) = \left(T - P - \frac{QR}{3kh} - \frac{QR^2}{6k}\right) r + \frac{Q}{6k} r^3$, то для вычисления α_n нам надо найти интегралы:

$$\frac{2}{R}\int\limits_0^R r\sin\left(\frac{\pi(2n-1)r}{2R}\right) dr = \Big[\text{по частям}\Big] = -\frac{2}{R}\cdot\frac{2R}{\pi(2n-1)}\left(\underbrace{r\cos\left(\frac{\pi(2n-1)r}{2R}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=R}}_{=0} - \int\limits_0^R \cos\left(\frac{\pi(2n-1)r}{2R}\right) dr\right) =$$

$$= \frac{4}{\pi(2n-1)}\cdot\frac{2R}{\pi(2n-1)}\cdot\sin\left(\frac{\pi(2n-1)r}{2R}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=R} = \frac{8(-1)^{n+1}R}{\pi^2(2n-1)^2}, \quad \text{и}$$

$$\frac{2}{R}\int\limits_0^R r^3\sin\left(\frac{\pi(2n-1)r}{2R}\right)dr = \Big[2 \text{ раза по частям}\Big] =$$

$$= -\frac{2}{R}\cdot\frac{2R}{\pi(2n-1)}\left(\underbrace{r^3\cos\left(\frac{\pi(2n-1)r}{2R}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=R}}_{=0} - 3\int\limits_0^R r^2\cos\left(\frac{\pi(2n-1)r}{2R}\right)dr\right) =$$

$$= \frac{4}{\pi(2n-1)}\cdot\frac{6R}{\pi(2n-1)}\left[r^2\sin\left(\frac{\pi(2n-1)r}{2R}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=R} - \underbrace{2\int\limits_0^R r\sin\left(\frac{\pi(2n-1)r}{2R}\right)dr}_{=\frac{8(-1)^{n+1}R^2}{\pi^2(2n-1)^2}}\right] =$$

$$= \frac{24}{\pi^2(2n-1)^2}\left((-1)^{n+1}R^3 - 8\frac{(-1)^{n+1}R^3}{\pi^2(2n-1)^2}\right) = \frac{24(-1)^{n+1}R^3}{\pi^2(2n-1)^2}\left(1-\frac{8}{\pi^2(2n-1)^2}\right).$$

Итак,

$$\alpha_n = \frac{2}{R}\int\limits_0^R\left(\left(T-P-\frac{QR}{3kh}-\frac{QR^2}{6k}\right)r+\frac{Q}{6k}r^3\right)\sin\left(\frac{\pi nr}{R}\right)dr =$$

$$= \left(T-P-\frac{QR}{3kh}-\frac{QR^2}{6k}\right)\frac{8(-1)^{n+1}R}{\pi^2(2n-1)^2} + \frac{Q}{6k}\cdot\frac{24(-1)^{n+1}R^3}{\pi^2(2n-1)^2}\left(1-\frac{8}{\pi^2(2n-1)^2}\right) =$$

$$= \left(T-P-\frac{QR}{3kh}+\frac{QR^2}{3k}\right)\frac{8(-1)^{n+1}R}{\pi^2(2n-1)^2} - \frac{Q}{k}\cdot\frac{32(-1)^{n+1}R^3}{\pi^4(2n-1)^4} =$$

$$= \left(T-P-\frac{QR}{3kh}+\frac{QR^2}{3k} - \frac{3QR^2}{k\pi^2(2n-1)^2}\right)\frac{8(-1)^{n+1}R}{\pi^2(2n-1)^2}, \qquad n\in\mathbb{N}.$$

Подставляем найденные α_n в формулу (5.18) вычисления $\mathbf{T}_n(t) = \alpha_n e^{-\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2R}\right)^2 t}$ и получаем:

$$\mathbf{T}_n(t) = \left(T-P-\frac{QR}{3kh}+\frac{QR^2}{3k} - \frac{3QR^2}{k\pi^2(2n-1)^2}\right)\frac{8(-1)^{n+1}R}{\pi^2(2n-1)^2}\cdot e^{-\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2R}\right)^2 t}, \qquad n\in\mathbb{N}.$$

Вернёмся к формуле (5.13) для $m(r,\,t)$. Подставим в неё полученные $\mathbf{T}_n$ и получим

$$m(r,\,t) = \frac{8R}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\left(T-P-\frac{QR}{3kh}+\frac{QR^2}{3k} - \frac{3QR^2}{k\pi^2(2n-1)^2}\right)\cdot e^{-\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2R}\right)^2 t}\cdot\sin\left(\frac{\pi(2n-1)r}{2R}\right). \tag{5.19}$$

Вспомним, что $m(r,\,t) = rv(r,\,t)$, и поделим (5.19) на r:

$$v(r,\,t) = \frac{8R}{\pi^2 r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\left(T-P-\frac{QR}{3kh}+\frac{QR^2}{3k} - \frac{3QR^2}{k\pi^2(2n-1)^2}\right)\cdot e^{-\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2R}\right)^2 t}\cdot\sin\left(\frac{\pi(2n-1)r}{2R}\right).$$

Наконец, поскольку

$$u(r,\,t) = v(r,\,t) + w(r,\,t) = \frac{Q}{6k}\left(R^2-r^2\right) + \frac{QR}{3kh} + P + v(r,\,t),$$

мы готовы выписать окончательный

Ответ (для случая $hR = 1$):

$$u(r,t) = \frac{Q}{6k}\,(R^2 - r^2) + \frac{QR}{3kh} + P +$$
$$+\frac{8R}{\pi^2 r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\left(T - P - \frac{QR}{3kh} + \frac{QR^2}{3k} - \frac{3QR^2}{k\pi^2(2n-1)^2}\right)\cdot e^{-\left(\frac{\pi(2n-1)a}{2R}\right)^2 t}\cdot\sin\left(\frac{\pi(2n-1)r}{2R}\right),$$

где $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, c – удельная теплоёмкость, ρ – плотность, k – коэффициент теплопроводности.

Случай третьей краевой задачи ($hR \neq 1$).

Шаг 3-3. Решение задачи Штурма-Лиувилля. Случай $hR \neq 1$.
Обозначим для сокращения записи через p коэффициент

$$p = \frac{hR - 1}{R}.$$

Уравнению $m_t = a^2 m_{rr}$ с краевыми условиями $m(0,t) = m_r(R,\,t) + \underbrace{\frac{hR-1}{R}}_{=p}\cdot m(R,\,t) = 0$ соответствует следующая задача Штурма-Лиувилля:

$$\mathbf{X}''(r) + \lambda\mathbf{X}(r) = 0, \tag{5.20}$$
$$\mathbf{X}(0) = 0, \quad \mathbf{X}'(R) + p\mathbf{X}(R) = 0. \tag{5.21}$$

Общее решение уравнения (5.20) имеет вид

$$\mathbf{X}(r) = c_1\sin(\sqrt{\lambda}\,r) + c_2\cos(\sqrt{\lambda}\,r) \qquad \text{при } \lambda > 0; \tag{5.22}$$
$$\mathbf{X}(r) = c_1 r + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0; \tag{5.23}$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}(0) = 0$, что

$$c_2 = 0, \;\Rightarrow\; \mathbf{X}(r) = c_1\sin(\sqrt{\lambda}\,r) \;\Rightarrow\; \mathbf{X}'(r) = c_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\,r).$$

Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}'(R) + p\mathbf{X}(R) = 0$ получаем, что

$$\sqrt{\lambda}\,\cos(\sqrt{\lambda}\,R) + p\sin(\sqrt{\lambda}\,R) = 0,$$

откуда

$$\sqrt{\lambda} = -p\,\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda}\,R). \tag{5.24}$$

Это уравнение имеет бесконечное множество решений:

$$\lambda_n: \qquad \sqrt{\lambda_n} = -p\,\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_n}\,R), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{5.25}$$

(Рисунок соответствует случаю $p < 0$, то есть $hR < 1$. В случае $p > 0$ тангенсы надо перевенуть, и у уравнения (5.24) также будет бесконечно много положительных корней.)

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$\mathbf{X}_n(r) = \sin\left(\sqrt{\lambda_n}r\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{5.26}$$

- При $\lambda < 0$ нетривиальных решений нет, т.к. задача Штурма–Лиувилля не может иметь отрицательных собственных чисел

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(r) = c_1 r$. Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}'(R) + p\mathbf{X}(R) = 0$ получаем, что $c_1 + pc_1 R = 0$. Это равенство верно только в случае $pR = -1$ то есть $hR - 1 = -1$. Поскольку ни h, ни R не могут равняться нулю по смыслу задачи, то равенство $c_1 + pc_1 R = 0$ возможно только при $c_1 = 0$. Следовательно, в данном случае задача Штурма-Лиувилля не имеет собственного значения, равного нулю.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n : \quad \sqrt{\lambda_n} = -p\,\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_n}\,R), \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\Big\{\mathbf{X}_n(r)\Big\} = \Big\{\sin\Big(\sqrt{\lambda_n}\,r\Big)\Big\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

задачи (5.20), (5.21).

<u>Шаг 4. Случай $hR \neq 1$</u>. Решаем задачу (5.6).

Будем искать решение задачи (5.6) в виде $m(r,\,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathbf{X}_n(r)\mathbf{T}_n(t)$, т.е.

$$m(r,\,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\Big(\sqrt{\lambda_n}\,r\Big)\,\mathbf{T}_n(t). \tag{5.27}$$

Разложим функцию $r\varphi(r)$ в ряд по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля:

$$r\varphi(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\Big(\sqrt{\lambda_n}\,r\Big) \tag{5.28}$$

Выясним, какими должны быть коэффициенты α_n. Для этого, поступая аналогично № 706, домножим (5.28) на $\mathbf{X}_m = \sin\left(\sqrt{\lambda_m}\,r\right)$ скалярно в смысле $L_2[0,R]$ и учтём, что система собственных функций задачи Штурма–Лиувилля является ортогональной в смысле этого скалярного произведения (это проверяется элементарным интегрированием):

$$(r\varphi, \mathbf{X}_m) = \alpha_m \int\limits_0^R \sin^2\Big(\sqrt{\lambda_m}\,r\Big)\,dr = \frac{\alpha_m}{2}\int\limits_0^R \Big(1 - \cos\Big(2\sqrt{\lambda_m}\,r\Big)\Big)\,dr =$$

$$= \frac{\alpha_m}{2}\left(R - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_m}}\sin\Big(2\sqrt{\lambda_m}\,r\Big)\Big|_{r=0}^{r=R}\right) = \frac{\alpha_m}{2}\left(R - \frac{\sin\left(2\sqrt{\lambda_m}\,R\right)}{2\sqrt{\lambda_m}}\right).$$

Поскольку, в силу тождеств $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}$, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, имеет место равенство:

$$R - \frac{\sin\left(2\sqrt{\lambda_m}\,R\right)}{2\sqrt{\lambda_m}} = \Big[\sqrt{\lambda_m} = -p\,\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_m}\,R)\Big] = R + \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_m}\,R\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_m}\,R\right)}{p\,\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_m}\,R)} =$$

$$= R + \frac{1}{p}\cos^2\Big(\sqrt{\lambda_m}\,R\Big) = \frac{pR + \cos^2\left(\sqrt{\lambda_m}\,R\right)}{p},$$

в итоге для коэффициентов α_n получаем:

$$\alpha_n = \frac{2p}{pR + \cos^2\left(\sqrt{\lambda_m}\,R\right)}(r\varphi, \mathbf{X}_n) = \frac{2p}{pR + \cos^2\left(\sqrt{\lambda_m}\,R\right)}\int\limits_0^R r\varphi(r)\,\sin\Big(\sqrt{\lambda_n}\,r\Big)\,dr, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{5.29}$$

Однако, нам в явном виде дана функция $r\varphi(r) = \left(T - P - \frac{QR}{3kh} - \frac{QR^2}{6k}\right) r + \frac{Q}{6k} r^3$, поэтому коэффициенты α_n тоже надо будет найти явно. Но это позже. А сейчас самое время подставить в уравнение и начальное условие в (5.6) ряды (5.27) и (5.28). Получим:

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r\right) \mathbf{T}_n'(t) = -a^2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r\right) \mathbf{T}_n(t); \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r\right) \mathbf{T}_n(0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r\right). \end{cases} \tag{5.30}$$

Очевидно, что равенства (5.30) между рядами, стоящими в левой и правой частях, будут заведомо выполнены, если будут равняться друг другу слагаемые с одинаковыми номерами:

$$\begin{cases} \mathbf{T}_n'(t) + a^2 \lambda_n \mathbf{T}_n(t) = 0; \\ \mathbf{T}_n(0) = \alpha_n. \end{cases} \tag{5.31}$$

Решение $T_n(t)$ задачи (5.31) задаётся формулой:

$$\mathbf{T}_n(t) = \alpha_n e^{-a^2 \lambda_n t}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{5.32}$$

Для того, чтобы полностью выписать решение $m(r,\, t)$ задачи (5.6) в виде ряда (5.27), нам не хватает только чисел α_n.

Учитывая, что $r\varphi(r) = \left(T - P - \frac{QR}{3kh} - \frac{QR^2}{6k}\right) r + \frac{Q}{6k} r^3$, найдём α_n по формуле (5.29).

$$\alpha_n = \frac{2p}{pR + \cos^2\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right)} \int\limits_0^R r\varphi(r)\, \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r\right) dr =$$

$$= \frac{2p}{pR + \cos^2\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right)} \int\limits_0^R \left(\left(T - P - \frac{QR}{3kh} - \frac{QR^2}{6k}\right) r + \frac{Q}{6k} r^3\right) \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r\right) dr =$$

$$= \frac{2p}{pR + \cos^2\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right)} \left[-\left(T - P - \frac{QR}{3kh} - \frac{QR^2}{6k}\right) \left(R + \frac{1}{p}\right) \frac{\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right)}{\sqrt{\lambda_n}} - \right.$$

$$\left. - \frac{Q}{6k} \left(R^3 + \frac{3R^2}{p} - \frac{6}{\lambda_n}\left(R + \frac{1}{p}\right)\right) \frac{\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right)}{\sqrt{\lambda_n}} \right].$$

Здесь мы воспользовались интегралами:

$$\int\limits_0^R r\, \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r\right) dr = \left[\text{по частям}\right] = \frac{-1}{\sqrt{\lambda_n}} \left(r\, \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, r\right)\Big|_{r=0}^{r=R} - \int\limits_0^R \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, r\right) dr \right) =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{\lambda_n}} \left(R \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right) - \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \cdot \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r\right)\Big|_{r=0}^{r=R} \right) = \left[\sqrt{\lambda_n} = -p\, \mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_n}\, R)\right] =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{\lambda_n}} \left(R \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right) + \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right)}{p\, \mathrm{tg}\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right)} \right) = -\left(R + \frac{1}{p}\right) \frac{\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right)}{\sqrt{\lambda_n}}.$$

и

$$\int\limits_0^R r^3\ \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r\right) dr = \Big[2 \text{ раза по частям}\Big] =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{\lambda_n}} \left(r^3\ \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, r\right)\Big|_{r=0}^{r=R} - 3 \int\limits_0^R r^2\ \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, r\right) dr \right) =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{\lambda_n}} \left(R^3 \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right) - \frac{3}{\sqrt{\lambda_n}} \left[r^2\ \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r\right)\Big|_{r=0}^{r=R} - \underbrace{2 \int\limits_0^R r\ \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r\right) dr}_{=-2\left(R+\frac{1}{p}\right)\frac{\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right)}{\sqrt{\lambda_n}}} \right] \right) =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{\lambda_n}} \left(R^3 \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right) - 3R^2\ \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right)}{\sqrt{\lambda_n}} - \frac{6}{\lambda_n}\left(R + \frac{1}{p}\right) \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right) \right) =$$

$$= \left[\text{в силу (5.25)},\ \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right)}{\sqrt{\lambda_n}} = -\frac{\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right)}{p} \right] =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{\lambda_n}} \left(R^3 + \frac{3R^2}{p} - \frac{6}{\lambda_n}\left(R + \frac{1}{p}\right) \right) \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right).$$

Упростим выражение для α_n, пользуясь равенствами

$$p = \frac{hR-1}{R} \qquad \Longrightarrow \qquad R + \frac{1}{p} = \frac{hR^2}{hR-1} \Longrightarrow \qquad p\left(R + \frac{1}{p}\right) = hR.$$

$$\alpha_n = \frac{2p}{pR + \cos^2\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right)} \left[-\left(T - P - \frac{QR}{3kh} - \frac{QR^2}{6k} \right) \left(R + \frac{1}{p}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{Q}{6k}\left(R^3 + \frac{3R^2}{p} - \frac{6}{\lambda_n}\left(R + \frac{1}{p}\right) \right) \right] \frac{\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right)}{\sqrt{\lambda_n}} =$$

$$= \frac{2p\left(R + \frac{1}{p}\right)}{pR + \cos^2\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right)} \left[-(T - P) + \frac{Q}{k\lambda_n} \right] \frac{\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right)}{\sqrt{\lambda_n}} +$$

$$+ \frac{2p}{pR + \cos^2\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right)} \left[\frac{QR}{6k}(2 + Rh)\left(R + \frac{1}{p}\right) - \frac{Q}{6k}\left(R^3 + \frac{3R^3}{hR-1} \right) \right] =$$

$$= \frac{2hR}{pR + \cos^2\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right)} \left[P - T + \frac{Q}{k\lambda_n} \right] \frac{\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right)}{\sqrt{\lambda_n}} +$$

$$+ \frac{2p}{pR + \cos^2\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right)} \left[\frac{Q}{6k} \cdot \frac{hR^3}{hR-1} - \frac{Q}{6k} \cdot \frac{R^3(hR+2)}{hR-1} \right] =$$

$$= \frac{2hR}{pR + \cos^2\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right)} \left[P - T + \frac{Q}{k\lambda_n} \right] \frac{\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right)}{\sqrt{\lambda_n}}.$$

Подставив с учётом, что $pR = hR - 1$, найденные

$$\alpha_n = \frac{2hR}{hR - 1 + \cos^2\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right)} \left[P - T + \frac{Q}{k\lambda_n} \right] \frac{\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right)}{\sqrt{\lambda_n}}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{5.33}$$

в формулу (5.32) для нахождения T_n, а затем полученные T_n – в (5.27), получим

$$m(r,\,t) = 2hR\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{hR-1+\cos^2\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}\left[P-T\;+\;\frac{Q}{k\lambda_n}\right]\frac{\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}{\sqrt{\lambda_n}}\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right)\;e^{-a^2\lambda_n t}. \tag{5.34}$$

Вспомним, что $m(r,\,t) = rv(r,\,t)$, и поделим (5.34) на r:

$$v(r,\,t) = \frac{2hR}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{hR-1+\cos^2\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}\left[P-T\;+\;\frac{Q}{k\lambda_n}\right]\frac{\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}{\sqrt{\lambda_n}}\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right)\;e^{-a^2\lambda_n t}.$$

Наконец, поскольку

$$u(r,\,t) = v(r,\,t) + w(r,\,t) = \frac{Q}{6k}\,(R^2-r^2) + \frac{QR}{3kh} + P + v(r,\,t),$$

мы готовы выписать окончательный
<u>Ответ:</u>

$$u(r,t) = \frac{Q}{6k}\,(R^2-r^2) + \frac{QR}{3kh} + P+$$
$$+\frac{2hR}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{hR-1+\cos^2\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}\left[P-T\;+\;\frac{Q}{k\lambda_n}\right]\frac{\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}{\sqrt{\lambda_n}}\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right)\;e^{-a^2\lambda_n t},$$

где $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, c – удельная теплоёмкость, ρ – плотность, k – коэффициент теплопроводности, а $\lambda_n > 0$ – решения уравнения (5.25): $\sqrt{\lambda_n} = -\,\frac{hR-1}{R}\,\mathrm{tg}(\sqrt{\lambda_n}\,R)$, $n \in \mathbb{N}$.

Задачи для однородного уравнения теплопроводности в прямоугольнике.

1. № 712(а).

Начальная температура однородного бесконечного прямоугольного стержня $0 \leqslant x \leqslant p$, $0 \leqslant y \leqslant s$, $-\infty < z < +\infty$, является произвольной функцией $\varphi(x,\, y)$. Определить температуру стержня при $t > 0$, если температура поверхности стержня поддерживается равной нулю.

Записав эти условия математически, с учётом, что никакие заданные функции не зависят от переменной z, получим задачу:

Найти ограниченную функцию $u(x,\, y;\, t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right), & (x,\, y) \in \Pi, \quad t > 0; \\ u(x,\, y;\, 0) = \varphi(x,\, y), & (x,\, y) \in \Pi; \\ u\Big|_{(x,\, y)\in\partial\Pi} = 0, & 0 < t < T, \end{cases} \tag{1.1}$$

где через Π обозначен прямоугольник

$$\Pi = \{(x,\, y): \quad 0 \leqslant x \leqslant p, \quad 0 \leqslant y \leqslant s\},$$

а $\partial\Pi$ – его граница.

<u>Шаг 1.</u> Предварительные рассуждения.

Если искать решение задачи (1.1) в виде двойного ряда

$$u(x,\, y;\, t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t), \tag{1.2}$$

то, подставив ряд[1] в уравнение $u_t = a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right)$, получим, что оно заведомо выполняется, если равны члены рядов в левой и правой частях с одинаковыми номерами:

$$\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}'_{kn}(t) = a^2 \cdot \left(\mathbf{X}''_k(x)\mathbf{Y}_n(y) + \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}''_n(y)\right)\mathbf{T}_{kn}(t).$$

Поделив это равенство на $a^2 \cdot \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}'_{kn}(t)}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)} = \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)} + \frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)}. \tag{1.3}$$

Так как слева стоит функция, зависящая только от t, а справа – от $(x,\, y)$, то это возможно только если и левая, и правая части этого равенства равны константе. Итак, $\exists\ \lambda_{kn}$ такая, что

$$\mathbf{T}'_{kn}(t) + \lambda_{kn}\mathbf{T}_{kn}(t) = 0, \qquad \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)} + \frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)} = \lambda_{kn}.$$

Но сумма функций, одна из которых зависит только от x, а вторая – только от y, может быть константой только в случае, если обе эти функции – константы. Тогда $\exists\ \mu_k$ и ν_n такие, что

$$\mathbf{X}''_k(x) + \mu_k\mathbf{X}_k(x) = 0, \qquad \mathbf{Y}''_n(y) + \nu_n\mathbf{Y}_n(x) = 0, \qquad \mu_k + \nu_n = \lambda_{kn}. \tag{1.4}$$

[1] Заметим, что индексы суммирования у $\mathbf{T}_{kn}$, $\mathbf{X}_k$ и $\mathbf{Y}_n$ различны. Фактически этот ряд можно записать в виде следующего повторного:

$$u(x,\, y;\, t) = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t).$$

Таким образом, естественно начать решение задачи (1.1) с решения двух задач Штурма-Лиувилля – для $\mathbf{X}_k(x)$ и для $\mathbf{Y}_n(y)$.

<u>Шаг 2.</u> Решение двух задач Штурма-Лиувилля

Краевые условия дают для функций $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(y)$ выполнение равенств:

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}(p) = 0, \qquad \mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}(s) = 0. \tag{1.5}$$

Таким образом, функции $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(x)$ есть решения задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} \mathbf{X}_k''(x) + \mu_k \mathbf{X}_k(x) = 0, \\ \mathbf{X}_k(0) = \mathbf{X}_k(p) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{Y}_n''(y) + \nu_n \mathbf{Y}_n(y) = 0, \\ \mathbf{Y}_n(0) = \mathbf{Y}_n(s) = 0, \end{cases} \tag{1.6}$$

Подобные задачи рассматривались уже не раз (№ 687 из файла Sem7, № 705 из semS1 и др.). Поэтому запишем результат:

существует бесконечное множество нетривиальных решений

$$\mu_k = \frac{\pi^2 k^2}{p^2}, \quad \mathbf{X}_k(x) = \sin\left(\frac{\pi k x}{p}\right), \qquad \nu_n = \frac{\pi^2 n^2}{s^2}, \quad \mathbf{Y}_n(y) = \sin\left(\frac{\pi n y}{s}\right), \qquad k,\, n \in \mathbb{N}.$$

В силу соотношения $\mu_k + \nu_n = \lambda_{kn}$, для функций $\mathbf{T}_{kn}$ имеем задачу

$$\mathbf{T}_{kn}'(t) + \lambda_{kn} a^2 \mathbf{T}_{kn}(t) = 0, \qquad t > 0, \qquad \lambda_{kn} = \frac{\pi^2 k^2}{p^2} + \frac{\pi^2 n^2}{s^2}. \tag{1.7}$$

Решение этого линейного однородного уравнения второго порядка имеет вид:

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = A_{kn} e^{-\,a^2 \lambda_{kn} t} \qquad t > 0, \tag{1.8}$$

где A_{kn} – произвольные постоянные.

<u>Шаг 3.</u> Решаем задачу (1.1).

Будем искать решение задачи (1.1) в виде ряда (1.2). Так как найденные на Шаге 2 функции $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(y)$ удовлетворяют краевым условиям (1.5), то функция

$$u(x,\, y;\, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(x) \mathbf{Y}_n(y) \mathbf{T}_{kn}(t)$$

удовлетворяет краевому условию $u\Big|_{(x,\,y)\in\partial\Pi} = 0$. А в силу рассуждений на Шаге 1, $u(x,\, y;\, t)$ есть решение уравнения $u_t = a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right)$.

Из условий задачи мы ещё не использовали только начальное условие $u(x,\, y;\, 0) = \varphi(x,\, y)$. Для функции $u(x,\, y;\, t)$ искомого вида (1.2) оно означает:

$$\varphi(x,\, y) = u(x,\, y;\, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi k x}{p}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{s}\right) A_{kn}, \tag{1.9}$$

Пусть функция $\varphi(x,\, y)$, входящая в начальное условие, разлагается в прямоугольнике Π в двойной ряд Фурье по синусам:

$$\varphi(x,\, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{kn} \sin\left(\frac{\pi k x}{p}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{s}\right), \tag{1.10}$$

с коэффициентами

$$\alpha_{kn} = \frac{4}{ps}\left(\varphi,\ \mathbf{X}_l \cdot \mathbf{Y}_m\right) = \frac{4}{ps} \int_0^p \int_0^s \varphi(x,\, y) \sin\left(\frac{\pi k x}{p}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{s}\right) dx dy. \tag{1.11}$$

Получим формулу (1.11) вычисления коэффициентов Фурье для двойного ряда по синусам. Для этого, как обычно, домножим (1.10) на $\sin\left(\frac{\pi l x}{p}\right)\sin\left(\frac{\pi m y}{s}\right)$ и проинтегрируем по П. Учитывая ортогональность собственных функций задач Штурма-Лиувилля, получим:

$$(\varphi,\ \mathbf{X}_l\cdot\mathbf{Y}_m)=\alpha_{lm}\int\limits_0^p\int\limits_0^s\sin^2\left(\frac{\pi l x}{p}\right)\sin^2\left(\frac{\pi m y}{s}\right)dxdy=\alpha_{lm}\int\limits_0^p\sin^2\left(\frac{\pi l x}{p}\right)dx\int\limits_0^s\sin^2\left(\frac{\pi m y}{s}\right)dy=$$

$$=\frac{\alpha_{lm}}{4}\int\limits_0^p\left(1-\cos\left(\frac{2\pi l x}{p}\right)\right)dx\int\limits_0^s\left(1-\cos\left(\frac{2\pi m y}{s}\right)\right)dy=\alpha_{lm}\cdot\frac{ps}{4}.$$

Из равенств (1.9), (1.10) и (1.11) получаем

$$A_{kn}=\alpha_{kn}=\frac{4}{ps}\int\limits_0^p\int\limits_0^s\varphi(x,\ y)\sin\left(\frac{\pi k x}{p}\right)\sin\left(\frac{\pi n y}{s}\right)dxdy. \tag{1.12}$$

Итак, мы знаем функции $\mathbf{T}_{kn}(t)$ полностью:

$$\mathbf{T}_{kn}(t)=\left(\frac{4}{ps}\int\limits_0^p\int\limits_0^s\varphi(x,\ y)\sin\left(\frac{\pi k x}{p}\right)\sin\left(\frac{\pi n y}{s}\right)dxdy\right)\cdot e^{-\,a^2\lambda_{kn}t}\qquad t>0. \tag{1.13}$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (1.2) найденные функции $\mathbf{T}_{kn}(t)$ из (1.13).

<u>Ответ:</u>

$$u(x,\ y;\ t)=\frac{4}{ps}\sum_{k,n=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^p\int\limits_0^s\varphi(\xi,\ \eta)\sin\left(\frac{\pi k\xi}{p}\right)\sin\left(\frac{\pi n\eta}{s}\right)d\xi d\eta\right)\ \sin\left(\frac{\pi k x}{p}\right)\sin\left(\frac{\pi n y}{s}\right)\cdot e^{-\,a^2\lambda_{kn}t},$$

где $\lambda_{kn}=\frac{\pi^2k^2}{p^2}+\frac{\pi^2n^2}{s^2}$.

2. № 712(б).

Начальная температура однородного бесконечного прямоугольного стержня $0\leqslant x\leqslant p$, $0\leqslant y\leqslant s$, $-\infty<z<+\infty$, является произвольной функцией $\varphi(x,\ y)$. Определить температуру стержня при $t>0$, если часть поверхности стержня $x=0$, $\ 0<y<s$ теплоизолирована, а остальная часть его поверхности поддерживается при нулевой температуре.

Записав эти условия математически, с учётом, что никакие заданные функции не зависят от переменной z, получим задачу:

Найти ограниченную функцию $u(x,\ y;\ t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t=a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right), & (x,\ y)\in\Pi,\quad t>0;\\ u(x,\ y;\ 0)=\varphi(x,\ y), & (x,\ y)\in\Pi;\\ u_x(0,\ y;\ t)=u(p,\ y;\ t)=0 & 0<y<s,\quad 0<t<T,\\ u(x,\ 0;\ t)=u(x,\ s;\ t)=0 & 0<x<p,\quad 0<t<T,\end{cases} \tag{2.1}$$

где через П обозначен прямоугольник

$$\Pi=\{(x,\ y):\quad 0\leqslant x\leqslant p,\quad 0\leqslant y\leqslant s\}.$$

<u>Шаг 1.</u> Предварительные рассуждения. (Полное повторение Шага 1 для № 712 (а).)
Если искать решение задачи (2.1) в виде двойного ряда

$$u(x,\,y;\,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t), \tag{2.2}$$

то, подставив ряд в уравнение $u_t=a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right)$, получим, что оно заведомо выполняется, если равны члены рядов в левой и правой частях с одинаковыми номерами:

$$\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}'_{kn}(t)=a^2\cdot\left(\mathbf{X}''_k(x)\mathbf{Y}_n(y)+\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}''_n(y)\right)\mathbf{T}_{kn}(t).$$

Поделив это равенство на $a^2\cdot\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}'_{kn}(t)}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)}=\frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)}+\frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)}. \tag{2.3}$$

Так как слева стоит функция, зависящая только от t, а справа – от $(x,\,y)$, то это возможно только если и левая, и правая части этого равенства равны константе. Итак, $\exists\ \lambda_{kn}$ такая, что

$$\mathbf{T}'_{kn}(t)+\lambda_{kn}\mathbf{T}_{kn}(t)=0,\qquad\qquad \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)}+\frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)}=\lambda_{kn}.$$

Но сумма функций, одна из которых зависит только от x, а вторая – только от y, может быть константой только в случае, если обе эти функции – константы. Тогда $\exists\ \mu_k$ и ν_n такие, что

$$\mathbf{X}''_k(x)+\mu_k\mathbf{X}_k(x)=0,\qquad\qquad \mathbf{Y}''_n(y)+\nu_n\mathbf{Y}_n(x)=0,\qquad\qquad \mu_k+\nu_n=\lambda_{kn}. \tag{2.4}$$

Таким образом, естественно начать решение задачи (2.1) с решения двух задач Штурма-Лиувилля – для $\mathbf{X}_k(x)$ и для $\mathbf{Y}_n(y)$.
<u>Шаг 2.</u> Решение двух задач Штурма-Лиувилля
Краевые условия дают для функций $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(y)$ выполнение равенств:

$$\mathbf{X}'(0)=\mathbf{X}(p)=0,\qquad\qquad \mathbf{Y}(0)=\mathbf{Y}(s)=0. \tag{2.5}$$

Таким образом, функции $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(x)$ есть решения задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases}\mathbf{X}''_k(x)+\mu_k\mathbf{X}_k(x)=0,\\ \mathbf{X}'_k(0)=\mathbf{X}_k(p)=0,\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}\mathbf{Y}''_n(y)+\nu_n\mathbf{Y}_n(y)=0,\\ \mathbf{Y}_n(0)=\mathbf{Y}_n(s)=0,\end{cases} \tag{2.6}$$

Решим задачу для $\mathbf{X}(x)$, аналогичную рассмотренной в № 688 из файла Sem7. Общее решение уравнения $\mathbf{X}''(x)+\mu\mathbf{X}(x)=0$ имеет вид

$$\mathbf{X}(x)=c_1\sin(\sqrt{\mu}\,x)+c_2\cos(\sqrt{\mu}\,x)\qquad \text{при}\ \ \mu>0; \tag{2.7}$$

$$\mathbf{X}(x)=c_1e^{\sqrt{-\mu}\,x}+c_2e^{-\sqrt{-\mu}\,x}\qquad \text{при}\ \ \mu<0; \tag{2.8}$$

$$\mathbf{X}(x)=c_1x+c_2\qquad \text{при}\ \ \mu=0; \tag{2.9}$$

- При $\mu>0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}'(0)=0$, что $c_1=0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(x)=c_2\cos(\sqrt{\mu}\,x)$. Поэтому из второго краевого условия $X(p)=0$ получаем, что $\sqrt{\mu}\,p=\pi\left(-\frac{1}{2}+k\right)$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

$$\mu_k=\left(\frac{\pi(2k-1)}{2p}\right)^2,\qquad k\in\mathbb{N}. \tag{2.10}$$

  Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$\mathbf{X}_k(x)=\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2p}x\right),\qquad k\in\mathbb{N}. \tag{2.11}$$

- При $\mu < 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}'(0) = 0$, что $c_1 = c_2$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(x) = 2c_1 \operatorname{ch}\sqrt{-\mu}\,x$. Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}(p) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет нетривиальных решений при $\mu < 0$.

- При $\mu = 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}'(0) = 0$, что $c_1 = 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(x) = c_2$. Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}(p) = 0$ получаем, что $c_2 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет нетривиальных решений при $\mu = 0$.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\mu_k = \left(\frac{\pi(2k-1)}{2p}\right)^2, \quad \mathbf{X}_k(x) = \cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2p}x\right), \quad k \in \mathbb{N}$$

задачи

$$\begin{cases} \mathbf{X}_k''(x) + \mu_k \mathbf{X}_k(x) = 0, \\ \mathbf{X}'(0) = \mathbf{X}(p) = 0. \end{cases}$$

Задачи, подобные задаче Штурма-Лиувилля для $\mathbf{Y}(y)$ рассматривались уже не раз (№ 687 из файла Sem7, № 705 из semS1 и др.). Поэтому запишем результат:

существует бесконечное множество нетривиальных решений

$$\nu_n = \frac{\pi^2 n^2}{s^2}, \quad \mathbf{Y}_n(y) = \sin\left(\frac{\pi n y}{s}\right), \qquad k,\, n \in \mathbb{N}.$$

В силу соотношения $\mu_k + \nu_n = \lambda_{kn}$, для функций $\mathbf{T}_{kn}$ имеем задачу

$$\mathbf{T}_{kn}'(t) + \lambda_{kn} a^2 \mathbf{T}_{kn}(t) = 0, \qquad t > 0, \qquad \lambda_{kn} = \frac{\pi^2(2k-1)^2}{(2p)^2} + \frac{\pi^2 n^2}{s^2}. \tag{2.12}$$

Решение этого линейного однородного уравнения второго порядка имеет вид:

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = A_{kn} e^{-a^2 \lambda_{kn} t} \qquad t > 0, \tag{2.13}$$

где A_{kn} – произвольные постоянные.

<u>Шаг 3.</u> Решаем задачу (2.1).

Будем искать решение задачи (2.1) в виде ряда (2.2). Так как найденные на Шаге 2 функции $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(y)$ удовлетворяют краевым условиям (2.5), то функция

$$u(x,\, y;\, t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t)$$

удовлетворяет краевому условию

$$\begin{cases} u_x(0,\, y;\, t) = u(p,\, y;\, t) = 0 & 0 < y < s, \quad 0 < t < T, \\ u(x,\, 0;\, t) = u(x,\, s;\, t) = 0 & 0 < x < p, \quad 0 < t < T. \end{cases}$$

А в силу рассуждений на Шаге 1, $u(x,\, y;\, t)$ есть решение уравнения $u_t = a^2\,(u_{xx} + u_{yy})$.

Из условий задачи мы ещё не использовали только начальное условие $u(x,\, y;\, 0) = \varphi(x,\, y)$. Для функции $u(x,\, y;\, t)$ искомого вида (2.2) оно означает:

$$\varphi(x,\, y) = u(x,\, y;\, 0) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi k x}{p}\right)\sin\left(\frac{\pi n y}{s}\right) A_{kn}, \tag{2.14}$$

Пусть функция $\varphi(x,\,y)$, входящая в начальное условие, разлагается в прямоугольнике П в двойной ряд Фурье:

$$\varphi(x,\,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{kn}\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2p}x\right)\sin\left(\frac{\pi ny}{s}\right), \tag{2.15}$$

с коэффициентами

$$\alpha_{kn}=\frac{4}{ps}(\varphi,\ \mathbf{X}_l\cdot\mathbf{Y}_m)=\frac{4}{ps}\int\limits_0^p\int\limits_0^s\varphi(x,\,y)\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2p}x\right)\sin\left(\frac{\pi ny}{s}\right)dxdy. \tag{2.16}$$

Получим формулу (2.16) вычисления коэффициентов Фурье для двойного ряда. Для этого, как обычно, домножим (1.10) на $\cos\left(\frac{\pi(2l-1)x}{2p}\right)\sin\left(\frac{\pi my}{s}\right)$ и проинтегрируем по П. Учитывая ортогональность собственных функций задач Штурма-Лиувилля, получим:

$$(\varphi,\ \mathbf{X}_l\cdot\mathbf{Y}_m)=\alpha_{lm}\int\limits_0^p\int\limits_0^s\cos^2\left(\frac{\pi(2l-1)x}{2p}\right)\sin^2\left(\frac{\pi my}{s}\right)dxdy=\alpha_{lm}\int\limits_0^p\cos^2\left(\frac{\pi(2l-1)x}{2p}\right)dx\int\limits_0^s\sin^2\left(\frac{\pi my}{s}\right)dy=$$

$$=\frac{\alpha_{lm}}{4}\int\limits_0^p\left(1+\cos\left(\frac{\pi(2l-1)x}{p}\right)\right)dx\int\limits_0^s\left(1-\cos\left(\frac{2\pi my}{s}\right)\right)dy=\alpha_{lm}\cdot\frac{ps}{4}.$$

Из равенств (2.14), (2.15) и (2.16) получаем

$$A_{kn}=\alpha_{kn}=\frac{4}{ps}\int\limits_0^p\int\limits_0^s\varphi(x,\,y)\cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2p}\right)\sin\left(\frac{\pi ny}{s}\right)dxdy. \tag{2.17}$$

Итак, мы знаем функции $\mathbf{T}_{kn}(t)$ полностью:

$$\mathbf{T}_{kn}(t)=\left(\frac{4}{ps}\int\limits_0^p\int\limits_0^s\varphi(x,\,y)\cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2p}\right)\sin\left(\frac{\pi ny}{s}\right)dxdy\right)\cdot e^{-\,a^2\lambda_{kn}t}\qquad t>0. \tag{2.18}$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (2.2) найденные функции $\mathbf{T}_{kn}(t)$ из (2.18).

<u>Ответ:</u>

$$u(x,\,y;\,t)=\frac{4}{ps}\sum_{k,n=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^p\int\limits_0^s\varphi(\xi,\,\eta)\cos\left(\frac{\pi(2k-1)\xi}{2p}\right)\sin\left(\frac{\pi n\eta}{s}\right)d\xi d\eta\right)$$
$$\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2p}x\right)\sin\left(\frac{\pi ny}{s}\right)\cdot e^{-\,a^2\lambda_{kn}t},$$

где $\lambda_{kn}=\frac{\pi^2(2k-1)^2}{(2p)^2}+\frac{\pi^2n^2}{s^2}$.

3. № 712(в).

Начальная температура однородного бесконечного прямоугольного стержня $0\leqslant x\leqslant p$, $0\leqslant y\leqslant s$, $-\infty<z<+\infty$, является произвольной функцией $\varphi(x,\,y)$. Определить температуру стержня при $t>0$, если на части поверхности стержня $x=p$, $0<y<s$ происходит конвективный теплообмен со средой, имеющей нулевую температуру, часть $y=0$, $0<x<p$ теплоизолирована, а остальная поверхность стержня поддерживается при нулевой температуре.

Записав эти условия математически, с учётом, что никакие заданные функции не зависят от

переменной z, получим задачу:
Найти ограниченную функцию $u(x,\, y;\, t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right), & (x,\, y) \in \Pi, \quad t > 0; \\ u(x,\, y;\, 0) = \varphi(x,\, y), & (x,\, y) \in \Pi; \\ u(0,\, y;\, t) = u_x(p,\, y;\, t) + hu(p,\, y;\, t) = 0 & 0 < y < s, \quad 0 < t < T, \\ u_y(x,\, 0;\, t) = u(x,\, s;\, t) = 0 & 0 < x < p, \quad 0 < t < T, \end{cases} \tag{3.1}$$

где через Π обозначен прямоугольник

$$\Pi = \{(x,\, y): \quad 0 \leqslant x \leqslant p, \quad 0 \leqslant y \leqslant s\}\,.$$

<u>Шаг 1.</u> Предварительные рассуждения. (Полное повторение Шага 1 для № 712 (а) и (б).)
Если искать решение задачи (3.1) в виде двойного ряда

$$u(x,\, y;\, t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t), \tag{3.2}$$

то, подставив ряд в уравнение $u_t = a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right)$, получим, что оно заведомо выполняется, если равны члены рядов в левой и правой частях с одинаковыми номерами:

$$\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}'_{kn}(t) = a^2 \cdot \left(\mathbf{X}''_k(x)\mathbf{Y}_n(y) + \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}''_n(y)\right)\mathbf{T}_{kn}(t).$$

Поделив это равенство на $a^2 \cdot \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}'_{kn}(t)}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)} = \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)} + \frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)}. \tag{3.3}$$

Так как слева стоит функция, зависящая только от t, а справа – от $(x,\, y)$, то это возможно только если и левая, и правая части этого равенства равны константе. Итак, $\exists\ \lambda_{kn}$ такая, что

$$\mathbf{T}'_{kn}(t) + \lambda_{kn}\mathbf{T}_{kn}(t) = 0, \qquad \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)} + \frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)} = \lambda_{kn}.$$

Но сумма функций, одна из которых зависит только от x, а вторая – только от y, может быть константой только в случае, если обе эти функции – константы. Тогда $\exists\ \mu_k$ и ν_n такие, что

$$\mathbf{X}''_k(x) + \mu_k\mathbf{X}_k(x) = 0, \qquad \mathbf{Y}''_n(y) + \nu_n\mathbf{Y}_n(x) = 0, \qquad \mu_k + \nu_n = \lambda_{kn}. \tag{3.4}$$

Таким образом, естественно начать решение задачи (3.1) с решения двух задач Штурма-Лиувилля – для $\mathbf{X}_k(x)$ и для $\mathbf{Y}_n(y)$.
<u>Шаг 2.</u> Решение двух задач Штурма-Лиувилля
Краевые условия дают для функций $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(y)$ выполнение равенств:

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}'(p) + h\mathbf{X}(p) = 0, \qquad \mathbf{Y}'(0) = \mathbf{Y}(s) = 0. \tag{3.5}$$

Таким образом, функции $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(x)$ есть решения задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} \mathbf{X}''_k(x) + \mu_k\mathbf{X}_k(x) = 0, \\ \mathbf{X}_k(0) = \mathbf{X}'_k(p) + h\mathbf{X}_k(p) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{Y}''_n(y) + \nu_n\mathbf{Y}_n(y) = 0, \\ \mathbf{Y}'_n(0) = \mathbf{Y}_n(s) = 0, \end{cases} \tag{3.6}$$

Решим задачу для $\mathbf{X}(x)$, аналогичную рассмотренной на Шаге 3-3 в № 709(в) из файла SemS3.
Общее решение уравнения $\mathbf{X}''(x) + \mu\mathbf{X}(x) = 0$ имеет вид

$$\mathbf{X}(x) = c_1\sin(\sqrt{\mu}\,x) + c_2\cos(\sqrt{\mu}\,x) \qquad \text{при } \ \mu > 0; \tag{3.7}$$

$$\mathbf{X}(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при } \ \mu = 0; \tag{3.8}$$

- При $\mu > 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}(0) = 0$, что

$$c_2 = 0, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X}(x) = c_1 \sin(\sqrt{\mu}\, x) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X}'(x) = c_1 \sqrt{\mu} \cos(\sqrt{\mu}\, x).$$

Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}'(X) + h\mathbf{X}(X) = 0$ получаем, что

$$\sqrt{\mu}\, \cos(\sqrt{\mu}\, p) + h \sin(\sqrt{\mu}\, p) = 0,$$

откуда

$$\sqrt{\mu} = -h \operatorname{tg}(\sqrt{\mu}\, p). \tag{3.9}$$

Это уравнение имеет бесконечное множество решений:

$$\mu_k : \qquad \sqrt{\mu_k} = -h \operatorname{tg}(\sqrt{\mu_k}\, p), \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{3.10}$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$\mathbf{X}_k(x) = \sin\left(\sqrt{\mu_k}\, x\right), \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{3.11}$$

- При $\mu < 0$ нетривиальных решений нет, т.к. задача Штурма–Лиувилля не может иметь отрицательных собственных чисел

- При $\mu = 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}(0) = 0$, что $c_2 = 0, \ \Rightarrow \ \mathbf{X}(x) = c_1 x$. Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}'(p) + h\mathbf{X}(p) = 0$ получаем, что $c_1 + hc_1 p = 0$. Поскольку $h > 0$ и $p > 0$, то равенство $c_1 + hc_1 p = 0$ возможно только при $c_1 = 0$. Следовательно, в данном случае задача Штурма-Лиувилля не имеет собственного значения, равного нулю.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\mu_k : \quad \sqrt{\mu_k} = -h \operatorname{tg}(\sqrt{\mu_k}\, p), \quad \mathbf{X}_k(x) = \sin\left(\sqrt{\mu_k}\, x\right), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

задачи

$$\begin{cases} \mathbf{X}_k''(x) + \mu_k \mathbf{X}_k(x) = 0, \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}'(p) + h\mathbf{X}(p) = 0, \end{cases}$$

Задача, аналогичная задаче Штурма-Лиувилля для $\mathbf{Y}(y)$ рассматривалась, например, в № 712 (б). Поэтому запишем результат:

существует бесконечное множество нетривиальных решений

$$\nu_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2s}\right)^2, \quad \mathbf{Y}_n(x) = \cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2s} x\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

задачи

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_n''(y) + \nu_n \mathbf{Y}_n(y) = 0, \\ \mathbf{Y}'(0) = \mathbf{Y}(s) = 0. \end{cases}$$

В силу соотношения $\mu_k + \nu_n = \lambda_{kn}$, для функций $\mathbf{T}_{kn}$ имеем задачу

$$\mathbf{T}_{kn}'(t) + \lambda_{kn} a^2 \mathbf{T}_{kn}(t) = 0, \qquad t > 0, \qquad \lambda_{kn} = \mu_k + \frac{\pi^2 (2n-1)^2}{(2s)^2}. \tag{3.12}$$

Решение этого линейного однородного уравнения второго порядка имеет вид:

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = A_{kn} e^{-\, a^2 \lambda_{kn} t} \qquad t > 0, \tag{3.13}$$

где A_{kn} – произвольные постоянные.

<u>Шаг 3.</u> Решаем задачу (3.1)**.**

Будем искать решение задачи (3.1) в виде ряда (3.2). Так как найденные на Шаге 2 функции $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(y)$ удовлетворяют краевым условиям (3.5), то функция

$$u(x,\,y;\,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t)$$

удовлетворяет краевому условию

$$\begin{cases} u(0,\,y;\,t)=u_x(p,\,y;\,t)+hu(p,\,y;\,t)=0 & 0<y<s, \quad 0<t<T,\\ u_y(x,\,0;\,t)=u(x,\,s;\,t)=0 & 0<x<p, \quad 0<t<T. \end{cases}$$

А в силу рассуждений на Шаге 1, $u(x,\,y;\,t)$ есть решение уравнения $u_t=a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right)$.

Из условий задачи мы ещё не использовали только начальное условие $u(x,\,y;\,0)=\varphi(x,\,y)$. Для функции $u(x,\,y;\,t)$ искомого вида (3.2) оно означает:

$$\varphi(x,\,y)=u(x,\,y;\,0)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\sqrt{\mu_k}\,x\right)\cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2s}x\right)A_{kn}, \tag{3.14}$$

Пусть функция $\varphi(x,\,y)$, входящая в начальное условие, разлагается в прямоугольнике П в двойной ряд Фурье:

$$\varphi(x,\,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{kn}\sin\left(\sqrt{\mu_k}\,x\right)\cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2s}x\right), \tag{3.15}$$

с коэффициентами

$$\alpha_{kn}=\frac{4\left(h^2+\mu_k\right)}{s\left[p\left(h^2+\mu_k\right)+h\right]}\int\limits_0^p\int\limits_0^s\varphi(x,\,y)\sin\left(\sqrt{\mu_k}\,x\right)\cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2s}x\right)dxdy. \tag{3.16}$$

Получим формулу (3.16) вычисления коэффициентов Фурье для двойного ряда. Для этого, как обычно, домножим (1.10) на $\sin\left(\sqrt{\mu_l}\,x\right)\cos\left(\frac{\pi(2m-1)}{2s}x\right)$ и проинтегрируем по П. Учитывая ортогональность собственных функций задач Штурма-Лиувилля, получим:

$$\left(\varphi,\,\mathbf{X}_l\cdot\mathbf{Y}_m\right)=\alpha_{lm}\int\limits_0^p\int\limits_0^s\sin^2\left(\sqrt{\mu_l}\,x\right)\cos^2\left(\frac{\pi(2m-1)y}{2s}\right)dxdy=\alpha_{lm}\int\limits_0^p\sin^2\left(\sqrt{\mu_l}\,x\right)dx\int\limits_0^s\cos^2\left(\frac{\pi(2m-1)y}{2s}\right)dy=$$

$$=\frac{\alpha_{lm}}{4}\int\limits_0^p\left(1-\cos\left(2\sqrt{\mu_l}\,x\right)\right)dx\int\limits_0^s\left(1+\cos\left(\frac{\pi(2m-1)y}{s}\right)\right)dy=$$

$$=\alpha_{lm}\cdot\frac{s}{4}\cdot\left(p-\frac{1}{2\sqrt{\mu_l}}\,\sin\left(2\sqrt{\mu_l}\,x\right)\Big|_{x=0}^{x=p}\right)=$$

$$=\left[\sqrt{\mu_l}=-h\,\mathrm{tg}(\sqrt{\mu_l}\,p)\right]=\alpha_{lm}\cdot\frac{s}{4}\cdot\left(p+\frac{2\sin(\sqrt{\mu_l}\,p)\cos(\sqrt{\mu_l}\,p)}{2h\,\mathrm{tg}(\sqrt{\mu_l}\,p)}\right)=\alpha_{lm}\cdot\frac{s}{4}\cdot\left(p+\frac{\cos^2(\sqrt{\mu_l}\,p)}{h}\right)=$$

$$=\left[\cos^2\beta=\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\beta},\quad \mathrm{tg}(\sqrt{\mu_l}\,p)=-\frac{\sqrt{\mu_l}}{h}\right]=\alpha_{lm}\cdot\frac{s}{4}\cdot\left(p+\frac{1}{h\left(1+\frac{\mu_l}{h^2}\right)}\right)=$$

$$=\alpha_{lm}\cdot\frac{s}{4}\cdot\left(p+\frac{h}{h^2+\mu_l}\right)=\alpha_{lm}\cdot\frac{s\left[p\left(h^2+\mu_l\right)+h\right]}{4\left(h^2+\mu_l\right)}.$$

Из равенств (3.14), (3.15) и (3.16) получаем

$$A_{kn}=\alpha_{kn}=\frac{4\left(h^2+\mu_k\right)}{s\left[p\left(h^2+\mu_k\right)+h\right]}\int\limits_0^p\int\limits_0^s\varphi(x,\,y)\cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2p}\right)\sin\left(\frac{\pi ny}{s}\right)dxdy. \tag{3.17}$$

Итак, мы знаем функции $\mathbf{T}_{kn}(t)$ полностью:

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \left(\frac{4\left(h^2+\mu_k\right)}{s\left[p\left(h^2+\mu_k\right)+h\right]} \int\limits_0^p \int\limits_0^s \varphi(x,\,y) \sin\left(\sqrt{\mu_k}\,x\right) \cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2s}x\right) dxdy \right) \cdot e^{-\,a^2\lambda_{kn}t}.$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (3.2) найденные функции $\mathbf{T}_{kn}(t)$.
<u>Ответ:</u>

$$u(x,\,y;\,t) = \sum_{k,n=1}^{\infty} A_{kn} \sin\left(\sqrt{\mu_k}\,x\right) \cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2s}x\right) \cdot e^{-\,a^2\lambda_{kn}t},$$

где $\lambda_{kn} = \mu_k + \frac{\pi^2(2n-1)^2}{(2s)^2}$, μ_k – положительные корни уравнения $\sqrt{\mu} = -h\,\mathrm{tg}(\sqrt{\mu}\,p)$, а

$$A_{kn} = \frac{4\left(h^2+\mu_k\right)}{s\left[p\left(h^2+\mu_k\right)+h\right]} \int\limits_0^p \int\limits_0^s \varphi(x,\,y) \cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2p}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{s}\right) dxdy.$$

4. № 716.

В кубе $0 \leqslant x,\,y,\,z \leqslant l$ происходит диффузия вещества, частицы которого распадаются со скоростью, пропорциональной его концентрации. Определить концентрацию вещества в этом кубе при $t > 0$, если начальная концентрация вещества в нём постоянна и равна U. Концентрация вещества на поверхности куба поддерживается равной нулю.

Записав эти условия математически, получим задачу:
Найти ограниченную функцию $u(x,\,y;\,t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2\left(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}\right) - \beta u, & (x,\,y,\,z) \in \Pi, \quad t > 0; \\ u(x,\,y,\,z;\,0) = U = \varphi(x,\,y,\,z), & (x,\,y,\,z) \in \Pi; \\ u\Big|_{(x,\,y,\,z)\in\partial\Pi} = 0, & 0 < t < T, \end{cases} \tag{4.1}$$

где через Π обозначен куб

$$\Pi = \{(x,\,y,\,z): \quad 0 \leqslant x,\,y,\,z \leqslant l\},$$

$\partial\Pi$ – его граница, β - коэффициент распада.
<u>Шаг 1.</u> Избавление от слагаемого $(-\beta u)$.
Слагаемое $(-\beta u)$, появившееся в уравнении из-за распада вещества, мешает нам провести предварительные рассуждения, аналогичные проведённым в № 712 (а-в). Однако избавиться от него очень просто: поскольку $u_t + \beta u = \left(e^{\beta t}u\right)_t \cdot e^{-\beta t}$, то достаточно домножить уравнение $u_t = \Delta u - \beta u$ на $e^{\beta t}$ и
произвести замену:

$$v(x,\,y,\,z;\,t) = e^{\beta t}u(x,\,y,\,z;\,t).$$

В результате задача (4.1) превратится в

$$\begin{cases} v_t = a^2\left(v_{xx}+v_{yy}+v_{zz}\right), & (x,\,y) \in \Pi, \quad t > 0; \\ v(x,\,y,\,z;\,0) = U, & (x,\,y,\,z) \in \Pi; \\ v\Big|_{(x,\,y,\,z)\in\partial\Pi} = 0, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{4.2}$$

Заметим, что начальное и граничное условия не изменились.
<u>Шаг 2.</u> Предварительные рассуждения.
Если искать решение задачи (4.2) в виде тройного ряда

$$v(x,\,y;\,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_m(y)\mathbf{Z}_n(z)\mathbf{T}_{kmn}(t), \tag{4.3}$$

то, подставив ряд[2] в уравнение $v_t = a^2\left(v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}\right)$, получим, что оно заведомо выполняется, если равны члены рядов в левой и правой частях с одинаковыми номерами:

$$\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_m(y)\mathbf{Z}_n(z)\mathbf{T}'_{kmn}(t) = \\ = a^2\cdot\left(\mathbf{X}''_k(x)\mathbf{Y}_m(y)\mathbf{Z}_n(z) + \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}''_m(y)\mathbf{Z}_n(z) + \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_m(y)\mathbf{Z}''_n(z)\right)\mathbf{T}_{kmn}(t).$$

Поделив это равенство на $a^2\cdot\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_m(y)\mathbf{Z}_n(z)\mathbf{T}_{kmn}(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}'_{kmn}(t)}{a^2\mathbf{T}_{kmn}(t)} = \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)} + \frac{\mathbf{Y}''_m(y)}{\mathbf{Y}_m(y)} + \frac{\mathbf{Z}''_n(z)}{\mathbf{Z}_n(z)}. \tag{4.4}$$

Так как слева стоит функция, зависящая только от t, а справа – от $(x,\,y,\,z)$, то это возможно только если и левая, и правая части этого равенства равны константе. Итак, $\exists\ \lambda_{kmn}$ такая, что

$$\mathbf{T}'_{kmn}(t) + \lambda_{kmn}\mathbf{T}_{kmn}(t) = 0, \qquad \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)} + \frac{\mathbf{Y}''_m(y)}{\mathbf{Y}_m(y)} + \frac{\mathbf{Z}''_n(z)}{\mathbf{Z}_n(z)} = \lambda_{kmn}.$$

Но сумма функций, одна из которых зависит только от x, другая – только от y, а третья – только от z, может быть константой только в случае, если все эти функции – константы. Тогда $\exists\ \mu_k,\ \nu_m$ и $\varkappa_n$ такие, что

$$\mathbf{X}''_k(x) + \mu_k\mathbf{X}_k(x) = 0, \qquad \mathbf{Y}''_m(y) + \nu_m\mathbf{Y}_m(x) = 0, \qquad \mathbf{Z}''_n(z) + \varkappa_n\mathbf{Z}_n(z) = 0, \tag{4.5}$$

$$\mu_k + \nu_m + \varkappa_n = \lambda_{kmn}. \tag{4.6}$$

Таким образом, естественно начать решение задачи (4.1) с решения трёх задач Штурма-Лиувилля – для $\mathbf{X}_k(x)$, для $\mathbf{Y}_m(y)$ и для $\mathbf{Z}_n(z)$.

<u>Шаг 3.</u> Решение трёх задач Штурма-Лиувилля

Краевые условия дают для функций $\mathbf{X}_k(x)$, для $\mathbf{Y}_m(y)$ и для $\mathbf{Z}_n(z)$ выполнение равенств:

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}(l) = 0, \qquad \mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}(l) = 0, \qquad \mathbf{Z}(0) = \mathbf{Y}(l) = 0. \tag{4.7}$$

Таким образом, функции $\mathbf{X}_k(x)$, $\mathbf{Y}_m(y)$ и $\mathbf{Z}_n(z)$ есть решения задач Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases}\mathbf{X}''_k(x) + \mu_k\mathbf{X}_k(x) = 0,\\ \mathbf{X}_k(0) = \mathbf{X}_k(p) = 0,\end{cases} \qquad \begin{cases}\mathbf{Y}''_m(y) + \nu_n\mathbf{Y}_m(y) = 0,\\ \mathbf{Y}_m(0) = \mathbf{Y}_m(z) = 0,\end{cases} \qquad \begin{cases}\mathbf{Z}''_n(z) + \varkappa_n\mathbf{Z}_n(z) = 0,\\ \mathbf{Z}_n(0) = \mathbf{Z}_n(l) = 0,\end{cases} \tag{4.8}$$

Подобные задачи рассматривались уже не раз (№ 687 из файла Sem7, № 705 из semS4 и др.). Поэтому запишем результат:

существует бесконечное множество нетривиальных решений

$$\mu_k = \frac{\pi^2k^2}{l^2}, \quad \mathbf{X}_k(x) = \sin\left(\frac{\pi kx}{l}\right), \qquad \nu_m = \frac{\pi^2m^2}{l^2}, \quad \mathbf{Y}_m(y) = \sin\left(\frac{\pi my}{l}\right), \tag{4.9}$$

$$\varkappa_n = \frac{\pi^2n^2}{l^2}, \quad \mathbf{Z}_n(z) = \sin\left(\frac{\pi nz}{l}\right), \qquad k,\,m,\,n\in\mathbb{N}. \tag{4.10}$$

В силу соотношения (4.6), для функций $\mathbf{T}_{kmn}$ имеем задачу

$$\mathbf{T}'_{kmn}(t) + a^2\lambda_{kmn}\mathbf{T}_{kmn}(t) = 0, \qquad t>0, \qquad \lambda_{kmn} = \frac{\pi^2k^2}{l^2} + \frac{\pi^2m^2}{l^2} + \frac{\pi^2n^2}{l^2}. \tag{4.11}$$

[2]Заметим, что индексы суммирования у $\mathbf{T}_{kmn}$, $\mathbf{X}_k$, $\mathbf{Y}_m$ и $\mathbf{Z}_n$ различны. Фактически этот ряд можно записать в виде следующего повторного:

$$v(x,\,y;\,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\sum_{m=1}^{\infty}\mathbf{Y}_m(y)\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{Z}_n(z)\mathbf{T}_{kmn}(t).$$

Решение этого линейного однородного уравнения второго порядка имеет вид:

$$\mathbf{T}_{kmn}(t) = A_{kmn} e^{-\,a^2 \lambda_{kmn} t} \qquad\qquad t > 0, \tag{4.12}$$

где A_{kmn} – произвольные постоянные.

<u>Шаг 4.</u> Решаем задачу (4.2).

Будем искать решение задачи (4.2) в виде ряда (4.3). Так как найденные на Шаге 3 функции $\mathbf{X}_k(x)$, $\mathbf{Y}_m(y)$ и $\mathbf{Z}_n(z)$ удовлетворяют краевым условиям (4.7), то функция

$$v(x,\, y,\, z;\, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(x) \mathbf{Y}_m(y) \mathbf{Z}_n(z) \mathbf{T}_{kmn}(t)$$

удовлетворяет краевому условию $v\Big|_{(x,\,y)\in\partial\Pi} = 0$. А в силу рассуждений на Шаге 2, $v(x,\, y,\, z;\, t)$ есть решение уравнения $v_t = a^2\left(v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}\right)$.

Из условий задачи мы ещё не использовали только начальное условие $v(x,\, y,\, z;\, 0) = U$. Для функции $v(x,\, y,\, z;\, t)$ искомого вида (4.3) оно означает:

$$\varphi(x,\, y,\, z) = U = v(x,\, y,\, z;\, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi m y}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi n z}{l}\right) A_{kmn}, \tag{4.13}$$

Пусть функция $\varphi(x,\, y,\, z) = U$, входящая в начальное условие, разлагается в кубе Π в тройной ряд Фурье по синусам:

$$\varphi(x,\, y,\, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{kmn} \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi m y}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi n z}{l}\right), \tag{4.14}$$

с коэффициентами

$$\alpha_{kmn} = \frac{8}{l^3} \int_0^l \int_0^l \int_0^l \varphi(x,\, y,\, z) \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi m y}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi n z}{l}\right) dx dy dz. \tag{4.15}$$

Получим формулу (4.15) вычисления коэффициентов Фурье для тройного ряда по синусам. Для этого, как обычно, домножим (4.14) на $\sin\left(\frac{\pi p x}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi q y}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi r z}{l}\right)$ и проинтегрируем по Π. Учитывая ортогональность собственных функций задач Штурма-Лиувилля, получим:

$$\begin{aligned}
\left(\varphi,\ \mathbf{X}_k \cdot \mathbf{Y}_m \cdot \mathbf{Z}_n\right) &= \alpha_{pqr} \int_0^l \int_0^l \int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi p x}{l}\right) \sin^2\left(\frac{\pi q y}{l}\right) \sin^2\left(\frac{\pi r z}{l}\right) dx dy dz = \\
&= \alpha_{pqr} \int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi p x}{l}\right) dx \int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi q y}{l}\right) dy \int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi r z}{l}\right) dz = \\
&= \frac{\alpha_{pqr}}{8} \int_0^l \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi p x}{l}\right)\right) dx \int_0^l \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi q y}{l}\right)\right) dy \int_0^l \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi r z}{l}\right)\right) dz = \alpha_{pqr} \cdot \frac{l^3}{8}.
\end{aligned}$$

Из равенств (4.13), (4.14) и (4.15) получаем

$$A_{kmn} = \alpha_{kmn} = \frac{8}{l^3} \int_0^l \int_0^l \int_0^l \varphi(x,\, y,\, z) \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi m y}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi n z}{l}\right) dx dy dz. \tag{4.16}$$

В данном случае, функция $\varphi(x,\,y,\,z)$ нам дана в явном виде, поэтому коэффициенты A_{kmn} придётся посчитать:

$$A_{kmn} = \frac{8U}{l^3}\int\limits_0^l\int\limits_0^l\int\limits_0^l \sin\left(\frac{\pi kx}{l}\right)\sin\left(\frac{\pi my}{l}\right)\sin\left(\frac{\pi nz}{l}\right)dxdydz =$$

$$= \frac{8U}{l^3}\cdot\frac{(-1)^3\,l^3}{\pi^3 kmn}\left(\cos\left(\frac{\pi kx}{l}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=l}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi my}{l}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=l}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi nz}{l}\right)\Bigg|_{z=0}^{z=l}\right) =$$

$$= -\frac{8U}{\pi^3 kmn}\cdot(-1)^{k+m+n} = \frac{8U(-1)^{k+m+n+1}}{\pi^3 kmn}.$$

Итак, мы знаем функции $\mathbf{T}_{kmn}(t)$ полностью:

$$\mathbf{T}_{kmn}(t) = \frac{8U(-1)^{k+m+n+1}}{\pi^3 kmn}\cdot e^{-\,a^2\lambda_{kmn}t} \qquad t>0. \tag{4.17}$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (4.3) найденные функции $\mathbf{X}_k(x)$, $\mathbf{Y}_m(y)$, $\mathbf{Z}_n(z)$ и $\mathbf{T}_{kmn}(t)$.

$$v(x,\,y,\,z;\,t) = \frac{8U}{\pi^3}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+m+n+1}}{kmn}\cdot\sin\left(\frac{\pi kx}{l}\right)\sin\left(\frac{\pi my}{l}\right)\sin\left(\frac{\pi nz}{l}\right)\cdot e^{-\,a^2\lambda_{kmn}t}.$$

Теперь вспоминаем о замене $v(x,\,y,\,z;\,t) = e^{\beta t}u(x,\,y,\,z;\,t)$, сделанной на Шаге 1, и получаем окончательный

<u>Ответ:</u>

$$u(x,\,y,\,z;\,t) = \frac{8Ue^{-\beta t}}{\pi^3}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+m+n+1}}{kmn}\cdot\sin\left(\frac{\pi kx}{l}\right)\sin\left(\frac{\pi my}{l}\right)\sin\left(\frac{\pi nz}{l}\right)\cdot e^{-\,a^2\lambda_{kmn}t},$$

где $\lambda_{kmn} = \frac{\pi^2k^2}{l^2} + \frac{\pi^2m^2}{l^2} + \frac{\pi^2n^2}{l^2}$.

(Ответ в задачнике неверный, он, очевидно, относится к аналогичной задаче, но с условием, когда на грани куба, не проходящие через начало координат, непроницаемы для вещества. В этом случае на этих гранях граничное условие будет второго рода.)

Задачи для неоднородного уравнения теплопроводности в прямоугольнике.

1. № 713.

Найти функцию $u(x,\, y;\, t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right) + f(x,\, y;\, t), & (x,\, y) \in \Pi, \quad t > 0; \\ u(x,\, y;\, 0) = 0, & (x,\, y) \in \Pi; \\ u(0,\, y;\, t) = u_x(p,\, y;\, t) = 0 & 0 < y < s, \quad 0 < t < T, \\ u(x,\, 0;\, t) = u(x,\, s;\, t) = 0 & 0 < x < p, \quad 0 < t < T, \end{cases} \tag{1.1}$$

где через Π обозначен прямоугольник

$$\Pi = \{(x,\, y): \quad 0 \leqslant x \leqslant p, \quad 0 \leqslant y \leqslant s\}\,.$$

<u>Шаг 1.</u> Предварительные рассуждения.
Если искать решение задачи (1.1) в виде двойного ряда

$$u(x,\, y;\, t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t), \tag{1.2}$$

то, подставив этот ряд и ряд

$$f(x,\, y;\, t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)f_{kn}(t), \tag{1.3}$$

в уравнение $u_t = a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right) + f$, получим, что оно заведомо выполняется, если равны члены рядов в левой и правой частях с одинаковыми номерами:

$$\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}'_{kn}(t) = a^2 \cdot \left(\mathbf{X}''_k(x)\mathbf{Y}_n(y) + \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}''_n(y)\right)\mathbf{T}_{kn}(t) + \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)f_{kn}(t).$$

Поделив это равенство на $a^2 \cdot \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}'_{kn}(t)}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)} = \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)} + \frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)} + \frac{f_{kn}(t)}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)}$$

или

$$\frac{\mathbf{T}'_{kn}(t) - f_{kn}(t)}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)} = \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)} + \frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)}. \tag{1.4}$$

Так как слева стоит функция, зависящая только от t, а справа – от $(x,\, y)$, то это возможно только если и левая, и правая части этого равенства равны константе. Итак, $\exists\ \lambda_{kn}$ такая, что

$$\mathbf{T}'_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}\mathbf{T}_{kn}(t) = f_{kn}(t), \qquad \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)} + \frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)} = \lambda_{kn}.$$

Но сумма функций, одна из которых зависит только от x, а вторая – только от y, может быть константой только в случае, если обе эти функции – константы. Тогда $\exists\ \mu_k$ и ν_n такие, что

$$\mathbf{X}''_k(x) + \mu_k\mathbf{X}_k(x) = 0, \qquad \mathbf{Y}''_n(y) + \nu_n\mathbf{Y}_n(x) = 0, \qquad \mu_k + \nu_n = \lambda_{kn}. \tag{1.5}$$

Таким образом, естественно начать решение задачи (1.1) с решения двух задач Штурма-Лиувилля – для $\mathbf{X}_k(x)$ и для $\mathbf{Y}_n(y)$.

<u>Шаг 2.</u> Решение двух задач Штурма-Лиувилля

Краевые условия дают для функций $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(y)$ выполнение равенств:

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}'(p) = 0, \qquad \mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}(s) = 0. \tag{1.6}$$

Таким образом, функции $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(x)$ есть решения задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} \mathbf{X}_k''(x) + \mu_k \mathbf{X}_k(x) = 0, \\ \mathbf{X}_k(0) = \mathbf{X}_k'(p) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{Y}_n''(y) + \nu_n \mathbf{Y}_n(y) = 0, \\ \mathbf{Y}_n(0) = \mathbf{Y}_n(s) = 0, \end{cases} \tag{1.7}$$

Общее решение уравнения $\mathbf{X}''(x) + \mu \mathbf{X}(x) = 0$ имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\mu}\, x) + c_2 \cos(\sqrt{\mu}\, x) \qquad \text{при } \mu > 0; \tag{1.8}$$

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\mu}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{-\mu}\, x} \qquad \text{при } \mu < 0; \tag{1.9}$$

$$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при } \mu = 0; \tag{1.10}$$

- При $\mu > 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\mu}\, x)$ $\Rightarrow$ $X'(x) = c_1 \sqrt{\mu} \cos(\sqrt{\mu}\, x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(p) = 0$ получаем, что $\sqrt{\mu}\, p = \pi \left(-\frac{1}{2} + k\right)$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

$$\mu_k = \left(\frac{\pi(2k-1)}{2p}\right)^2, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{1.11}$$

  Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$X_k(x) = \sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2p}\right), \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{1.12}$$

- При $\mu < 0$ задача Штурма–Лиувилля не имеет нетривиальных решений.

- При $\mu = 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_1 x$ $\Rightarrow$ $X'(x) = c_1$). Поэтому из второго краевого условия $X'(p) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет собственного числа, равного нулю.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\mu_k = \left(\frac{\pi(2k-1)}{2p}\right)^2, \quad X_k(x) = \sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2p}\right), \quad k \in \mathbb{N}$$

задачи

$$\begin{cases} \mathbf{X}_k''(x) + \mu_k \mathbf{X}_k(x) = 0, \\ \mathbf{X}_k(0) = \mathbf{X}_k'(p) = 0. \end{cases}$$

Задачи, подобные задаче для $\mathbf{Y}_n(y)$, рассматривались уже не раз (№ 687 из файла Sem7, № 705 из semS1 и др.). Поэтому запишем результат:

существует бесконечное множество нетривиальных решений

$$\nu_n = \frac{\pi^2 n^2}{s^2}, \quad \mathbf{Y}_n(y) = \sin\left(\frac{\pi n y}{s}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

В силу соотношения $\mu_k + \nu_n = \lambda_{kn}$, для функций $\mathbf{T}_{kn}$ имеем уравнение:

$$\mathbf{T}_{kn}'(t) + a^2 \lambda_{kn} T_{kn}(t) = f_{kn}(t), \qquad t > 0, \qquad \lambda_{kn} = \frac{\pi^2(2k-1)^2}{(2p)^2} + \frac{\pi^2 n^2}{s^2}.$$

А поскольку начальное условие $u(x,\,y;\,0)=0$ будет заведомо выполнено, если $\mathbf{T}_{kn}(0)=0$, то для функций $\mathbf{T}_{kn}(t)$ имеем задачу Коши:

$$\begin{cases} \mathbf{T}'_{kn}(t)+a^2\lambda_{kn}T_{kn}(t)=f_{kn}(t), & t>0, \qquad \lambda_{kn}=\frac{\pi^2(2k-1)^2}{(2p)^2}+\frac{\pi^2n^2}{s^2}; \\ \mathbf{T}_{kn}(0)=0. \end{cases} \tag{1.13}$$

<u>Шаг 3.</u> Решаем задачу (1.13).

Решение этого линейного неоднородного уравнения первого порядка получим методом вариации постоянной.

Сначала решим соответствующее однородное уравнение:

$$\mathbf{T}'_o(t)+a^2\lambda_{kn}T_o(t)=0$$

Его решение имеет вид:

$$\mathbf{T}_o(t)=ce^{-\,a^2\lambda_{kn}t} \qquad t>0,$$

где c – произвольная постоянная.

Далее будем искать общее решение неоднородного уравнения

$$\mathbf{T}'_{kn}(t)+a^2\lambda_{kn}T_{kn}(t)=f_{kn}(t)$$

в виде

$$\mathbf{T}_{kn}(t)=c(t)e^{-\,a^2\lambda_{kn}t} \qquad t>0. \tag{1.14}$$

Подставив (1.14) в уравнение, получим, что неизвестная функция $c(t)$ должна удовлетворять требованию

$$c'(t)e^{-\,a^2\lambda_{kn}t}=f_{kn}(t),$$

откуда

$$c(t)=\mathbf{T}_{kn}(0)+\int\limits_0^t f_{kn}(\tau)e^{a^2\lambda_{kn}\tau}d\tau.$$

Итак, наконец, решение задачи Коши (1.13) задаётся формулой:

$$\mathbf{T}_{kn}(t)=\int\limits_0^t f_{kn}(\tau)e^{-a^2\lambda_{kn}(t-\tau)}d\tau \qquad t>0. \tag{1.15}$$

Нам ещё надо найти, по какой формуле вычислять коэффициенты $f_{kn}(t)$ разложения функции $f(x,\,y;\,t)$ по собственным функциями задач Штурма-Лиувилля. Получим эту формулу. Для этого, как обычно, домножим (1.3) на $\sin\left(\frac{\pi(2l-1)x}{2p}\right)\sin\left(\frac{\pi my}{s}\right)$ и проинтегрируем по П. Учитывая ортогональность собственных функций задач Штурма-Лиувилля, получим:

$$(f,\,\mathbf{X}_l\cdot\mathbf{Y}_m)=f_{lm}(t)\int\limits_0^p\sin^2\left(\frac{\pi(2l-1)x}{2p}\right)dx\int\limits_0^s\sin^2\left(\frac{\pi my}{s}\right)dy=$$

$$=\frac{f_{lm}(t)}{4}\int\limits_0^p\left(1-\cos\left(\frac{\pi(2l-1)x}{p}\right)\right)dx\int\limits_0^s\left(1-\cos\left(\frac{2\pi my}{s}\right)\right)dy=f_{lm}(t)\cdot\frac{ps}{4}.$$

Отсюда,

$$f_{kn}(t)=\frac{4}{ps}\int\limits_0^p\int\limits_0^s f(x,\,y;\,t)\sin\left(\frac{\pi(2l-1)x}{2p}\right)\sin\left(\frac{\pi my}{s}\right)dy.$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (1.2) функции $\mathbf{X}_k(x) = \sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2p}\right)$, $\mathbf{Y}_n(y) = \sin\left(\frac{\pi ny}{s}\right)$ и только что найденные функции $\mathbf{T}_{kn}(t)$ из (1.15).
Ответ:

$$u(x,\,y;\,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2p}\right)\sin\left(\frac{\pi ny}{s}\right)\left(\int\limits_0^t f_{kn}(\tau)e^{-a^2\lambda_{kn}(t-\tau)}\right),$$

где $\lambda_{kn} = \frac{\pi^2(2k-1)^2}{(2p)^2} + \frac{\pi^2 n^2}{s^2}$, а $f_{kn}(t)$ находятся по формуле

$$f_{kn}(t) = \frac{4}{ps}\int\limits_0^p\int\limits_0^s f(x,\,y;\,t)\sin\left(\frac{\pi(2l-1)x}{2p}\right)\sin\left(\frac{\pi my}{s}\right)dy.$$

2. № 714.

Найти функцию $u(x,\,y;\,t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right) + A\sin\left(\frac{3\pi x}{2p}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{2s}\right), & (x,\,y)\in\Pi, \quad t>0; \\ u(x,\,y;\,0) = B\sin\left(\frac{\pi x}{2p}\right)\cos\left(\frac{3\pi y}{2s}\right), & (x,\,y)\in\Pi; \\ u(0,\,y;\,t) = u_x(p,\,y;\,t) = 0 & 0<y<s, \quad 0<t<T, \\ u_y(x,\,0;\,t) = u(x,\,s;\,t) = 0 & 0<x<p, \quad 0<t<T, \end{cases} \tag{2.1}$$

где через Π обозначен прямоугольник

$$\Pi = \{(x,\,y):\quad 0\leqslant x\leqslant p,\quad 0\leqslant y\leqslant s\}.$$

Шаг 1. Предварительные рассуждения.
Если искать решение задачи (2.1) в виде двойного ряда

$$u(x,\,y;\,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t), \tag{2.2}$$

то, подставив этот ряд и ряд

$$f(x,\,y;\,t) \equiv A\sin\left(\frac{3\pi x}{2p}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{2s}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)f_{kn}, \tag{2.3}$$

в уравнение $u_t = a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right)+f$, получим, что оно заведомо выполняется, если равны члены рядов в левой и правой частях с одинаковыми номерами:

$$\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}'_{kn}(t) = a^2\cdot\left(\mathbf{X}''_k(x)\mathbf{Y}_n(y)+\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}''_n(y)\right)\mathbf{T}_{kn}(t)+\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)f_{kn}.$$

Поделив это равенство на $a^2\cdot\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}'_{kn}(t)}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)} = \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)} + \frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)} + \frac{f_{kn}}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)}$$

или

$$\frac{\mathbf{T}'_{kn}(t)-f_{kn}}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)} = \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)} + \frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)}. \tag{2.4}$$

Так как слева стоит функция, зависящая только от t, а справа – от $(x,\,y)$, то это возможно только если и левая, и правая части этого равенства равны константе. Итак, $\exists\ \lambda_{kn}$ такая, что

$$\mathbf{T}'_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}\mathbf{T}_{kn}(t) = f_{kn}, \qquad \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)} + \frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)} = \lambda_{kn}.$$

Но сумма функций, одна из которых зависит только от x, а вторая – только от y, может быть константой только в случае, если обе эти функции – константы. Тогда $\exists\ \mu_k$ и ν_n такие, что

$$\mathbf{X}''_k(x) + \mu_k\mathbf{X}_k(x) = 0, \qquad \mathbf{Y}''_n(y) + \nu_n\mathbf{Y}_n(x) = 0, \qquad \mu_k + \nu_n = \lambda_{kn}. \tag{2.5}$$

Таким образом, естественно начать решение задачи (2.1) с решения двух задач Штурма-Лиувилля – для $\mathbf{X}_k(x)$ и для $\mathbf{Y}_n(y)$.

<u>Шаг 2.</u> Решение двух задач Штурма-Лиувилля

Краевые условия дают для функций $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(y)$ выполнение равенств:

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}'(p) = 0, \qquad \mathbf{Y}'(0) = \mathbf{Y}(s) = 0. \tag{2.6}$$

Таким образом, функции $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(x)$ есть решения задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} \mathbf{X}''_k(x) + \mu_k\mathbf{X}_k(x) = 0, \\ \mathbf{X}_k(0) = \mathbf{X}'_k(p) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{Y}''_n(y) + \nu_n\mathbf{Y}_n(y) = 0, \\ \mathbf{Y}'_n(0) = \mathbf{Y}_n(s) = 0, \end{cases} \tag{2.7}$$

Задачу для $\mathbf{X}_k(x)$ мы уже решили в № 713, стр. 2. Выпишем результат:

существует бесконечное множество нетривиальных решений

$$\mu_k = \left(\frac{\pi(2k-1)}{2p}\right)^2, \quad X_k(x) = \sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2p}\right), \quad k \in \mathbb{N}$$

первой задачи из (2.7).

Задача для $\mathbf{Y}_n(y)$ была решена на Шаге 2 в № 712(б). У неё также существует бесконечное множество нетривиальных решений

$$\nu_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2s}\right)^2, \quad \mathbf{Y}_n(y) = \cos\left(\frac{\pi(2n-1)y}{2s}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

второй задачи из (2.7)

В силу соотношения $\mu_k + \nu_n = \lambda_{kn}$, для функций $\mathbf{T}_{kn}$ имеем уравнение:

$$\mathbf{T}'_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}T_{kn}(t) = f_{kn}, \qquad t > 0, \qquad \lambda_{kn} = \frac{\pi^2(2k-1)^2}{(2p)^2} + \frac{\pi^2(2n-1)^2}{(2s)^2}. \tag{2.8}$$

Пусть функция $\varphi(x,\,y) \equiv B\sin\left(\frac{\pi x}{2p}\right)\cos\left(\frac{3\pi y}{2s}\right)$ начального условия разлагается в ряд

$$\varphi(x,\,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\varphi_{kn}. \tag{2.9}$$

В данном случае коэффициенты разложения φ_{kn} и f_{kn} найти гораздо проще, чем обычно, поскольку функции $\varphi(x,\,y)$ и $f(x,\,y;\,t)$ имеют в точности вид ОДНОГО из слагаемых соответствующего ряда. А именно:

$$\varphi(x,\,y) \equiv B\mathbf{X}_1(x)\mathbf{Y}_2(y) = B\sin\left(\frac{\pi x}{2p}\right)\cos\left(\frac{3\pi y}{2s}\right). \tag{2.10}$$

$$f(x,\,y;\,t) \equiv A\mathbf{X}_2(x)\mathbf{Y}_1(y) = A\sin\left(\frac{3\pi x}{2p}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{2s}\right). \tag{2.11}$$

Поэтому

$$\varphi_{kn} = \begin{cases} B, & k=1,\ \ n=2; \\ 0, & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \qquad f_{kn} = \begin{cases} A, & k=2,\ \ n=1; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{2.12}$$

Поскольку начальное условие

$$u(x,\,y;\,0) = \varphi(x,\,y)$$

будет заведомо выполнено, если $\mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn}$, то для функций $\mathbf{T}_{kn}(t)$ имеем задачу Коши:

$$\begin{cases} \mathbf{T}'_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}T_{kn}(t) = f_{kn}, & t>0; \\ \mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn}. \end{cases} \qquad \lambda_{kn} = \left(\frac{\pi(2k-1)}{2p}\right)^2 + \left(\frac{\pi(2n-1)}{2s}\right)^2 \tag{2.13}$$

<u>Шаг 3.</u> Решаем задачу (2.13).

Можно решить эту задачу Коши методом вариации постоянной, как в № 713 (стр.3). Но в данном случае правые части есть константы, и частное решение неоднородного уравнения легко угадывается:

$$\mathbf{T}_{\text{чно}} = \frac{f_{kn}}{a^2\lambda_{kn}}.$$

Поэтому общее решение неоднородного уравнения

$$\mathbf{T}'_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}T_{kn}(t) = f_{kn}$$

имеет вид

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \mathbf{T}_{\text{чно}} + \mathbf{T}_{\text{оо}} = \frac{f_{kn}}{a^2\lambda_{kn}} + ce^{-\,a^2\lambda_{kn}t}. \tag{2.14}$$

Подставив в (2.14) условие Коши $\mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn}$, получим, что $c = \varphi_{kn} - \frac{f_{kn}}{a^2\lambda_{kn}}$ и

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \frac{f_{kn}}{a^2\lambda_{kn}}\cdot\left(1 - e^{-\,a^2\lambda_{kn}t}\right) + \varphi_{kn}e^{-\,a^2\lambda_{kn}t}, \qquad t>0. \tag{2.15}$$

Теперь осталось выписать в явном виде все $\mathbf{T}_{kn}(t)$ во всех случаях.

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \begin{cases} Be^{-\,a^2\lambda_{12}t}, & k=1,\ \ n=2; \\ \frac{A}{a^2\lambda_{21}}\cdot\left(1 - e^{-\,a^2\lambda_{21}t}\right), & k=2,\ \ n=1; \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases} \qquad t>0. \tag{2.16}$$

<u>Шаг 4.</u> Подготовка к ответу.

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (2.2) функции $\mathbf{X}_k(x) = \sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2p}\right)$, $\mathbf{Y}_n(y) = \cos\left(\frac{\pi(2n-1)y}{2s}\right)$ и учесть, что только что найденные функции $\mathbf{T}_{kn}(t)$ из (2.16) равны нулю при всех k и n, кроме случаев $k=1,\ n=2$ и $k=2,\ n=1$. Поэтому двойной ряд

$$u(x,\,y;\,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t)$$

превратится в сумму всего двух слагаемых:

$$u(x,\,y;\,t) = \mathbf{X}_1(x)\mathbf{Y}_2(y)\mathbf{T}_{12}(t) + \mathbf{X}_2(x)\mathbf{Y}_1(y)\mathbf{T}_{21}(t),$$

то есть

$$u(x,\,y;\,t) = B\sin\left(\frac{\pi x}{2p}\right)\cos\left(\frac{3\pi y}{2s}\right)\cdot e^{-\,a^2\lambda_{12}t} + \frac{A}{a^2\lambda_{21}}\sin\left(\frac{3\pi x}{2p}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{2s}\right)\cdot\left(1-e^{-\,a^2\lambda_{21}t}\right).$$

Наконец, с учётом, что $\lambda_{kn} = \frac{\pi^2(2k-1)^2}{(2p)^2} + \frac{\pi^2(2n-1)^2}{(2s)^2}$, получаем

$$\lambda_{12} = \frac{\pi^2}{4p^2} + \frac{9\pi^2}{4s^2} = \frac{\pi^2\left(s^2+9p^2\right)}{4p^2s^2}, \qquad \lambda_{21} = \frac{9\pi^2}{4p^2} + \frac{\pi^2}{4s^2} = \frac{\pi^2\left(9s^2+p^2\right)}{4p^2s^2}.$$

<u>Ответ:</u>

$$u(x,\,y;\,t) = B\sin\left(\frac{\pi x}{2p}\right)\cos\left(\frac{3\pi y}{2s}\right)\cdot e^{-\,a^2\lambda_{12}t} + \frac{A}{a^2\lambda_{21}}\sin\left(\frac{3\pi x}{2p}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{2s}\right)\cdot\left(1-e^{-\,a^2\lambda_{21}t}\right),$$

где $\quad \lambda_{12} = \frac{\pi^2}{4p^2} + \frac{9\pi^2}{4s^2} = \frac{\pi^2\left(s^2+9p^2\right)}{4p^2s^2}, \qquad \lambda_{21} = \frac{9\pi^2}{4p^2} + \frac{\pi^2}{4s^2} = \frac{\pi^2\left(9s^2+p^2\right)}{4p^2s^2}.$

3. № 715.

Найти функцию $u(x,\,y;\,t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right) + A\sin\left(\frac{\pi x}{p}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{2s}\right), & (x,\,y)\in\Pi, \quad t>0; \\ u(x,\,y;\,0) = 0, & (x,\,y)\in\Pi; \\ u(0,\,y;\,t) = u(p,\,y;\,t) = 0 & 0<y<s, \quad 0<t<T, \\ u(x,\,0;\,t) = u_y(x,\,s;\,t) = 0 & 0<x<p, \quad 0<t<T, \end{cases} \tag{3.1}$$

где через Π обозначен прямоугольник

$$\Pi = \left\{(x,\,y):\quad 0\leqslant x\leqslant p, \quad 0\leqslant y\leqslant s\right\}.$$

<u>Шаг 1.</u> Предварительные рассуждения.
Если искать решение задачи (3.1) в виде двойного ряда

$$u(x,\,y;\,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t), \tag{3.2}$$

то, подставив этот ряд и ряд

$$f(x,\,y;\,t) \equiv A\sin\left(\frac{\pi x}{p}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{2s}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)f_{kn}, \tag{3.3}$$

в уравнение $u_t = a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right)+f$, получим, что оно заведомо выполняется, если равны члены рядов в левой и правой частях с одинаковыми номерами:

$$\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}'_{kn}(t) = a^2\cdot\left(\mathbf{X}''_k(x)\mathbf{Y}_n(y)+\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}''_n(y)\right)\mathbf{T}_{kn}(t) + \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)f_{kn}.$$

Поделив это равенство на $a^2\cdot\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}'_{kn}(t)}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)} = \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)} + \frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)} + \frac{f_{kn}}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)}$$

или

$$\frac{\mathbf{T}'_{kn}(t)-f_{kn}}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)} = \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)} + \frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)}. \tag{3.4}$$

Так как слева стоит функция, зависящая только от t, а справа – от $(x,\, y)$, то это возможно только если и левая, и правая части этого равенства равны константе. Итак, $\exists\ \lambda_{kn}$ такая, что

$$\mathbf{T}'_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}\mathbf{T}_{kn}(t) = f_{kn}, \qquad \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)} + \frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)} = \lambda_{kn}.$$

Но сумма функций, одна из которых зависит только от x, а вторая – только от y, может быть константой только в случае, если обе эти функции – константы. Тогда $\exists\ \mu_k$ и ν_n такие, что

$$\mathbf{X}''_k(x) + \mu_k\mathbf{X}_k(x) = 0, \qquad \mathbf{Y}''_n(y) + \nu_n\mathbf{Y}_n(x) = 0, \qquad \mu_k + \nu_n = \lambda_{kn}. \tag{3.5}$$

Таким образом, естественно начать решение задачи (3.1) с решения двух задач Штурма-Лиувилля – для $\mathbf{X}_k(x)$ и для $\mathbf{Y}_n(y)$.

<u>Шаг 2.</u> Решение двух задач Штурма-Лиувилля

Краевые условия дают для функций $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(y)$ выполнение равенств:

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}(p) = 0, \qquad \mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}'(s) = 0. \tag{3.6}$$

Таким образом, функции $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(x)$ есть решения задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} \mathbf{X}''_k(x) + \mu_k\mathbf{X}_k(x) = 0, \\ \mathbf{X}_k(0) = \mathbf{X}_k(p) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{Y}''_n(y) + \nu_n\mathbf{Y}_n(y) = 0, \\ \mathbf{Y}_n(0) = \mathbf{Y}'_n(s) = 0, \end{cases} \tag{3.7}$$

Обе задачи мы уже решали (см. стр. 2). Выпишем результат:

существует бесконечное множество нетривиальных решений

$$\mu_k = \left(\frac{\pi k}{p}\right)^2, \quad X_k(x) = \sin\left(\frac{\pi k x}{p}\right), \quad k \in \mathbb{N}$$

первой задачи из (3.7) и существует бесконечное множество нетривиальных решений

$$\nu_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2s}\right)^2, \quad \mathbf{Y}_n(y) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)y}{2s}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

второй задачи из (3.7).

В силу соотношения $\mu_k + \nu_n = \lambda_{kn}$, для функций $\mathbf{T}_{kn}$ имеем уравнение:

$$\mathbf{T}'_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}T_{kn}(t) = f_{kn}, \qquad t > 0, \qquad \lambda_{kn} = \frac{\pi^2k^2}{p^2} + \frac{\pi^2(2n-1)^2}{4s^2}. \tag{3.8}$$

В данном случае функция $\varphi(x,\, y) \equiv 0$ начального условия разлагается в тривиальный ряд

$$\varphi(x,\, y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\varphi_{kn}, \qquad \varphi_{kn} = 0\ \ \forall\, k,\, n \in \mathbb{N}. \tag{3.9}$$

Коэффициенты разложения f_{kn} в ряд в данном случае ищутся так же, как в № 714, поскольку функция $f(x,\, y;\, t)$ имеет в точности вид ОДНОГО из слагаемых соответствующего ряда. А именно:

$$f(x,\, y;\, t) \equiv A\mathbf{X}_1(x)\mathbf{Y}_1(y) = A\sin\left(\frac{\pi x}{p}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{2s}\right). \tag{3.10}$$

Поэтому

$$f_{kn} = \begin{cases} A, & k = n = 1; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{3.11}$$

Поскольку начальное условие

$$u(x,\,y;\,0)=\varphi(x,\,y)\equiv 0$$

будет заведомо выполнено, если $\mathbf{T}_{kn}(0)=\varphi_{kn}=0$, то для функций $\mathbf{T}_{kn}(t)$ имеем задачу Коши:

$$\begin{cases}\mathbf{T}'_{kn}(t)+a^2\lambda_{kn}T_{kn}(t)=f_{kn}, & t>0;\\ \mathbf{T}_{kn}(0)=0.\end{cases}\qquad \lambda_{kn}=\frac{\pi^2k^2}{p^2}+\frac{\pi^2(2n-1)^2}{4s^2}. \tag{3.12}$$

<u>Шаг 3.</u> Решаем задачу (3.12).

Можно решить эту задачу Коши методом вариации постоянной, как в № 713 (стр.3). Но в данном случае правые части есть константы, и частное решение неоднородного уравнения легко угадывается:

$$\mathbf{T}_{\text{чно}}=\frac{f_{kn}}{a^2\lambda_{kn}}.$$

Поэтому общее решение неоднородного уравнения

$$\mathbf{T}'_{kn}(t)+a^2\lambda_{kn}T_{kn}(t)=f_{kn}$$

имеет вид

$$\mathbf{T}_{kn}(t)=\mathbf{T}_{\text{чно}}+\mathbf{T}_{\text{оо}}=\frac{f_{kn}}{a^2\lambda_{kn}}+ce^{-\,a^2\lambda_{kn}t}. \tag{3.13}$$

Подставив в (3.13) условие Коши $\mathbf{T}_{kn}(0)=0$, получим, что $c=-\,\frac{f_{kn}}{a^2\lambda_{kn}}$ и

$$\mathbf{T}_{kn}(t)=\frac{f_{kn}}{a^2\lambda_{kn}}\cdot\left(1-e^{-\,a^2\lambda_{kn}t}\right),\qquad t>0. \tag{3.14}$$

Теперь осталось выписать в явном виде все $\mathbf{T}_{kn}(t)$ во всех случаях.

$$\mathbf{T}_{kn}(t)=\begin{cases}\frac{A}{a^2\lambda_{11}}\cdot\left(1-e^{-\,a^2\lambda_{11}t}\right), & k=1,\ \ n=1;\\ 0, & \text{в остальных случаях}\end{cases}\qquad t>0. \tag{3.15}$$

<u>Шаг 4.</u> Подготовка к ответу.

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (3.2) функции $\mathbf{X}_k(x)=\sin\left(\frac{\pi kx}{p}\right)$, $\mathbf{Y}_n(y)=\sin\left(\frac{\pi(2n-1)y}{2s}\right)$ и учесть, что только что найденные функции $\mathbf{T}_{kn}(t)$ из (3.15) равны нулю при всех k и n, кроме случая $k=n=1$. Поэтому двойной ряд

$$u(x,\,y;\,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t)$$

превратится в одно единственное слагаемое:

$$u(x,\,y;\,t)=\mathbf{X}_1(x)\mathbf{Y}_1(y)\mathbf{T}_{11}(t),$$

то есть

$$u(x,\,y;\,t)=\frac{A}{a^2\lambda_{11}}\cdot\sin\left(\frac{\pi x}{p}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{2s}\right)\cdot\left(1-e^{-\,a^2\lambda_{11}t}\right).$$

Наконец, с учётом, что $\lambda_{kn}=\frac{\pi^2k^2}{p^2}+\frac{\pi^2(2n-1)^2}{4s^2}$, получаем

$$\lambda_{11}=\frac{\pi^2}{p^2}+\frac{\pi^2}{4s^2}=\frac{\pi^2\left(4s^2+p^2\right)}{4p^2s^2}.$$

<u>Ответ:</u>

$$u(x,\,y;\,t)=\frac{4Ap^2s^2}{a^2\pi^2\left(4s^2+p^2\right)}\cdot\sin\left(\frac{\pi x}{p}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{2s}\right)\cdot\left(1-e^{-\,a^2\lambda_{11}t}\right).$$

(В задачнике ответ неверный, он, очевидно, соответствует такой же задаче, но с функцией $f=A\sin\left(\frac{\pi x}{p}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{2s}\right)\cdot e^{-t}$.)

Задачи для уравнения колебаний мембраны.

1. № 684 а).

Пренебрегая реакцией окружающей среды, определить поперечные колебания однородной прямоугольной мембраны, $0 \leqslant x \leqslant s$, $0 \leqslant y \leqslant p$ с жёстко закреплённым краем для случая, когда начальное отклонение мембраны равно $\sin\left(\frac{\pi x}{s}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{p}\right)$, а начальная скорость равна нулю.

Записав эти условия математически, получим задачу:
Найти функцию $u(x,\, y;\, t)$ из условий

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right), & (x,\, y) \in \Pi, \quad t > 0; \\ u(x,\, y;\, 0) = \varphi(x,\, y) \equiv \sin\left(\frac{\pi x}{s}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{p}\right), & (x,\, y) \in \Pi; \\ u_t(x,\, y;\, 0) = \psi(x,\, y) \equiv 0, & (x,\, y) \in \Pi; \\ u(0,\, y;\, t) = u(p,\, y;\, t) = 0 & 0 < y < s, \quad 0 < t < T, \\ u(x,\, 0;\, t) = u(x,\, s;\, t) = 0 & 0 < x < p, \quad 0 < t < T, \end{cases} \tag{1.1}$$

где через Π обозначен прямоугольник

$$\Pi = \{(x,\, y): \quad 0 \leqslant x \leqslant s, \quad 0 \leqslant y \leqslant p\}.$$

<u>Шаг 1.</u> Предварительные рассуждения.
Если искать решение задачи (1.1) в виде двойного ряда

$$u(x,\, y;\, t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t), \tag{1.2}$$

то, подставив этот ряд в уравнение $u_{tt} = a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right)$, получим, что оно заведомо выполняется, если равны члены рядов в левой и правой частях с одинаковыми номерами:

$$\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}''_{kn}(t) = a^2 \cdot \left(\mathbf{X}''_k(x)\mathbf{Y}_n(y) + \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}''_n(y)\right)\mathbf{T}_{kn}(t).$$

Поделив это равенство на $a^2 \cdot \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}''_{kn}(t)}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)} = \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)} + \frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)}. \tag{1.3}$$

Так как слева стоит функция, зависящая только от t, а справа – от $(x,\, y)$, то это возможно только если и левая, и правая части этого равенства равны константе. Итак, $\exists\ \lambda_{kn}$ такая, что

$$\mathbf{T}''_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}\mathbf{T}_{kn}(t) = 0, \qquad \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)} + \frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)} = \lambda_{kn}.$$

Но сумма функций, одна из которых зависит только от x, а вторая – только от y, может быть константой только в случае, если обе эти функции – константы. Тогда $\exists\ \mu_k$ и ν_n такие, что

$$\mathbf{X}''_k(x) + \mu_k\mathbf{X}_k(x) = 0, \qquad \mathbf{Y}''_n(y) + \nu_n\mathbf{Y}_n(x) = 0, \qquad \mu_k + \nu_n = \lambda_{kn}. \tag{1.4}$$

Таким образом, естественно начать решение задачи (1.1) с решения двух задач Штурма-Лиувилля – для $\mathbf{X}_k(x)$ и для $\mathbf{Y}_n(y)$.

<u>Шаг 2.</u> Решение двух задач Штурма-Лиувилля
Краевые условия дают для функций $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(y)$ выполнение равенств:

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}(p) = 0, \qquad \mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}(s) = 0. \tag{1.5}$$

Таким образом, функции $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(x)$ есть решения задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} \mathbf{X}_k''(x) + \mu_k \mathbf{X}_k(x) = 0, \\ \mathbf{X}_k(0) = \mathbf{X}_k(p) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{Y}_n''(y) + \nu_n \mathbf{Y}_n(y) = 0, \\ \mathbf{Y}_n(0) = \mathbf{Y}_n(s) = 0, \end{cases} \tag{1.6}$$

Эти задачи мы уже решали много раз. Выпишем результат:

существует бесконечное множество нетривиальных решений

$$\mu_k = \left(\frac{\pi k}{s}\right)^2, \quad X_k(x) = \sin\left(\frac{\pi k x}{s}\right), \quad k \in \mathbb{N}$$

первой задачи (1.6) и бесконечное множество нетривиальных решений

$$\nu_n = \left(\frac{\pi n}{p}\right)^2, \quad \mathbf{Y}_n(y) = \sin\left(\frac{\pi n y}{p}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

второй задачи (1.6).

В силу соотношения $\mu_k + \nu_n = \lambda_{kn}$, для функций $\mathbf{T}_{kn}$ имеем уравнение:

$$\mathbf{T}_{kn}''(t) + a^2 \lambda_{kn} T_{kn}(t) = 0, \qquad t > 0, \qquad \lambda_{kn} = \frac{\pi^2 k^2}{s^2} + \frac{\pi^2 n^2}{p^2}.$$

Используем начльные условия.

Разложим функции $\varphi(x,\, y)$ и $\psi(x,\, y)$ в ряд по собственным функциям задач Штурма-Лиувилля:

$$\varphi(x,\, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(x) \mathbf{Y}_n(y) \varphi_{kn}, \tag{1.7}$$

$$\psi(x,\, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(x) \mathbf{Y}_n(y) \psi_{kn}. \tag{1.8}$$

В данном случае коэффициенты разложения φ_{kn} и ψ_{kn} найти гораздо проще, чем обычно, поскольку $\psi \equiv 0$, а функция $\varphi(x,\, y)$ имеет в точности вид ОДНОГО из слагаемых соответствующего ряда. А именно:

$$\varphi(x,\, y) \equiv \mathbf{X}_1(x) \mathbf{Y}_1(y) = \sin\left(\frac{\pi x}{s}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{p}\right). \tag{1.9}$$

Поэтому

$$\varphi_{kn} = \begin{cases} 1, & k = 1, \;\; n = 1; \\ 0, & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \qquad \psi_{kn} = 0 \quad \text{при всех } k \text{ и } n. \tag{1.10}$$

А поскольку начальное условие $u(x,\, y;\, 0) = \varphi(x,\, y)$ будет заведомо выполнено, если $\mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn}$, а второе начальное условие $u_t(x,\, y;\, 0) = \psi(x,\, y) \equiv 0$, – если $\mathbf{T}_{kn}'(0) = \psi_{kn} = 0$, то для функций $\mathbf{T}_{kn}(t)$ имеем задачу Коши:

$$\begin{cases} \mathbf{T}_{kn}''(t) + a^2 \lambda_{kn} T_{kn}(t) = 0, \\ \mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn}; \\ \mathbf{T}_{kn}'(0) = 0, \end{cases} \qquad \lambda_{kn} = \frac{\pi^2 k^2}{s^2} + \frac{\pi^2 n^2}{p^2} \tag{1.11}$$

<u>Шаг 3.</u> Решаем задачу (1.11).

Общее решение этого линейного однородного уравнения второго порядка, с учётом, что $a^2\lambda_{kn} > 0$, имеет вид:

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda_{kn}}\, at) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda_{kn}}\, at)$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

Подставив $\mathbf{T}_{kn}$ во второе начальное условие $\mathbf{T}'_{kn}(0) = 0$, получим, что $c_1 = 0$, откуда

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = c_2 \cos(\sqrt{\lambda_{kn}}\, at).$$

Из первого начального условия $\mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn}$ сразу получаем, что $c_2 = \varphi_{kn}$ и, наконец, получаем, что решение задачи Коши (1.11) задаётся формулой:

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \varphi_{kn} \cos(\sqrt{\lambda_{kn}}\, at), \qquad t > 0. \tag{1.12}$$

С учётом, что $\varphi_{kn} = 0$ всегда, за исключением случая $k = n = 1$, а $\varphi_{11} = 1$, из (1.13) получаем

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \begin{cases} \cos(\sqrt{\lambda_{11}}\, at), & k = 1, \quad n = 1; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{1.13}$$

Поэтому после подстановки найденных $\mathbf{T}_{kn}(t)$ в искомый вид решения

$$u(x,\, y;\, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(x) \mathbf{Y}_n(y) \mathbf{T}_{kn}(t),$$

получим, что от ряда останется только одно слагаемое:

$$u(x,\, y;\, t) = \mathbf{X}_1(x) \mathbf{Y}_1(y) \mathbf{T}_{11}(t).$$

<u>Ответ:</u>

$$u(x,\, y;\, t) = \sin\left(\frac{\pi x}{s}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{p}\right) \cos(\sqrt{\lambda_{11}}\, at),$$

где $\lambda_{11} = \frac{\pi^2}{s^2} + \frac{\pi^2}{p^2}$.

2. № 684 в).

Пренебрегая реакцией окружающей среды, определить поперечные колебания однородной прямоугольной мембраны, $0 \leqslant x \leqslant s$, $0 \leqslant y \leqslant p$ с жёстко закреплённым краем для случая, когда колебания вызваны непрерывно распределённой по мембраны силой с плотностью $x \sin\left(\frac{2\pi y}{p}\right) \cdot e^{-t}$.

Записав эти условия математически, получим задачу:
Найти функцию $u(x,\, y;\, t)$ из условий

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right) + \frac{x}{\rho} \sin\left(\frac{2\pi y}{p}\right) \cdot e^{-t}, & (x,\, y) \in \Pi, \quad t > 0; \\ u(x,\, y;\, 0) = \varphi(x,\, y) \equiv 0, & (x,\, y) \in \Pi; \\ u_t(x,\, y;\, 0) = \psi(x,\, y) \equiv 0, & (x,\, y) \in \Pi; \\ u(0,\, y;\, t) = u(p,\, y;\, t) = 0 & 0 < y < s, \quad 0 < t < T, \\ u(x,\, 0;\, t) = u(x,\, s;\, t) = 0 & 0 < x < p, \quad 0 < t < T, \end{cases} \tag{2.1}$$

где ρ – поверхностная плотность массы мембраны, а через Π обозначен прямоугольник

$$\Pi = \{(x,\, y): \quad 0 \leqslant x \leqslant s, \quad 0 \leqslant y \leqslant p\}.$$

<u>Шаг 1.</u> Предварительные рассуждения.
Если искать решение задачи (2.1) в виде двойного ряда

$$u(x,\,y;\,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t), \tag{2.2}$$

то, подставив этот ряд и ряд

$$f(x,\,y;\,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)f_{kn}(t), \tag{2.3}$$

в уравнение $u_{tt}=a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right)+f$, получим, что оно заведомо выполняется, если равны члены рядов в левой и правой частях с одинаковыми номерами:

$$\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}''_{kn}(t)=a^2\cdot\left(\mathbf{X}''_k(x)\mathbf{Y}_n(y)+\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}''_n(y)\right)\mathbf{T}_{kn}(t)+\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)f_{kn}(t).$$

Поделив это равенство на $a^2\cdot\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}''_{kn}(t)}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)}=\frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)}+\frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)}+\frac{f_{kn}(t)}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)}$$

или

$$\frac{\mathbf{T}''_{kn}(t)-f_{kn}(t)}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)}=\frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)}+\frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)}. \tag{2.4}$$

Так как слева стоит функция, зависящая только от t, а справа – от $(x,\,y)$, то это возможно только если и левая, и правая части этого равенства равны константе. Итак, $\exists\ \lambda_{kn}$ такая, что

$$\mathbf{T}''_{kn}(t)+a^2\lambda_{kn}\mathbf{T}_{kn}(t)=f_{kn}(t),\qquad\qquad \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)}+\frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)}=\lambda_{kn}.$$

Но сумма функций, одна из которых зависит только от x, а вторая – только от y, может быть константой только в случае, если обе эти функции – константы. Тогда $\exists\ \mu_k$ и ν_n такие, что

$$\mathbf{X}''_k(x)+\mu_k\mathbf{X}_k(x)=0,\qquad\qquad \mathbf{Y}''_n(y)+\nu_n\mathbf{Y}_n(x)=0,\qquad\qquad \mu_k+\nu_n=\lambda_{kn}. \tag{2.5}$$

Таким образом, естественно начать решение задачи (2.1) с решения двух задач Штурма-Лиувилля – для $\mathbf{X}_k(x)$ и для $\mathbf{Y}_n(y)$.

<u>Шаг 2.</u> Решение двух задач Штурма-Лиувилля
Краевые условия дают для функций $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(y)$ выполнение равенств:

$$\mathbf{X}(0)=\mathbf{X}(p)=0,\qquad\qquad \mathbf{Y}(0)=\mathbf{Y}(s)=0. \tag{2.6}$$

Таким образом, функции $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(x)$ есть решения задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases}\mathbf{X}''_k(x)+\mu_k\mathbf{X}_k(x)=0,\\ \mathbf{X}_k(0)=\mathbf{X}_k(p)=0,\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}\mathbf{Y}''_n(y)+\nu_n\mathbf{Y}_n(y)=0,\\ \mathbf{Y}_n(0)=\mathbf{Y}_n(s)=0,\end{cases} \tag{2.7}$$

Эти задачи мы уже решали много раз. Выпишем результат:
существует бесконечное множество нетривиальных решений

$$\mu_k=\left(\frac{\pi k}{s}\right)^2,\quad X_k(x)=\sin\left(\frac{\pi kx}{s}\right),\quad k\in\mathbb{N}$$

первой задачи (2.7) и бесконечное множество нетривиальных решений

$$\nu_n=\left(\frac{\pi n}{p}\right)^2,\quad \mathbf{Y}_n(y)=\sin\left(\frac{\pi ny}{p}\right),\qquad n\in\mathbb{N}.$$

второй задачи (2.7).

В силу соотношения $\mu_k + \nu_n = \lambda_{kn}$, для функций $\mathbf{T}_{kn}$ имеем уравнение:

$$\mathbf{T}''_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}T_{kn}(t) = f_{kn}(t), \qquad t > 0, \qquad \lambda_{kn} = \frac{\pi^2k^2}{s^2} + \frac{\pi^2n^2}{p^2}.$$

Используем начльные условия.
Разложим функции $f(x,\, y;\, t)$, $\varphi(x,\, y)$ и $\psi(x,\, y)$ в ряд по собственным функциям задач Штурма-Лиувилля:

$$f(x,\, y;\, t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)f_{kn}, \tag{2.8}$$

$$\varphi(x,\, y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\varphi_{kn}, \tag{2.9}$$

$$\psi(x,\, y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\psi_{kn}. \tag{2.10}$$

В данном случае коэффициенты разложения φ_{kn} и ψ_{kn} найти гораздо проще, чем обычно, поскольку $\varphi = \psi \equiv 0$, а ряд для $f(x,\, y;\, t)$ получается не двойной, а одинарный. А именно:

$$f(x,\, y;\, t) \equiv \frac{\mathbf{Y}_2(y)\cdot e^{-t}}{\rho}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\sin\left(\frac{\pi kx}{s}\right), \tag{2.11}$$

где

$$\alpha_k = \frac{2}{s}\int\limits_0^s x\sin\left(\frac{\pi kx}{s}\right)dx = \frac{2}{s}\cdot\frac{s}{k\pi}\left(-x\cos\left(\frac{\pi kx}{s}\right)dx\Big|_{x=0}^{x=s} + \underbrace{\int\limits_0^s\cos\left(\frac{\pi kx}{s}dx\right)}_{=0}\right) = \frac{2s(-1)^{k+1}}{k\pi}.$$

Поэтому

$$f_{kn}(t) = \begin{cases} \frac{2s(-1)^{k+1}}{\pi k\rho}\cdot e^{-t}, & n = 2; \\ 0, & n \neq 2; \end{cases} \qquad \varphi_{kn} = 0, \qquad \psi_{kn} = 0 \quad \text{при всех } k \text{ и } n. \tag{2.12}$$

А поскольку начальное условие $u(x,\, y;\, 0) = \varphi(x,\, y)$ будет заведомо выполнено, если $\mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn} = 0$, а второе начальное условие $u_t(x,\, y;\, 0) = \psi(x,\, y) \equiv 0$, – если $\mathbf{T}'_{kn}(0) = \psi_{kn} = 0$, то для функций $\mathbf{T}_{kn}(t)$ имеем задачу Коши:

$$\begin{cases} \mathbf{T}''_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}T_{kn}(t) = f_{kn}(t), \\ \mathbf{T}_{kn}(0) = 0; \\ \mathbf{T}'_{kn}(0) = 0, \end{cases} \qquad \lambda_{kn} = \frac{\pi^2k^2}{s^2} + \frac{\pi^2n^2}{p^2} \tag{2.13}$$

<u>Шаг 3.</u> Решаем задачу (2.13).

Можно решить эту задачу Коши методом вариации постоянной, как в № 713. Но в данном случае правая часть уравнения есть ce^{-t}, и частное решение неоднородного уравнения легко угадывается:

$$\mathbf{T}_{\text{чно}} = \frac{f_{kn}(t)}{1 + a^2\lambda_{kn}}.$$

Поэтому общее решение неоднородного уравнения

$$\mathbf{T}''_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}T_{kn}(t) = f_{kn}(t)$$

имеет вид

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \mathbf{T}_{\text{ЧНО}} + \mathbf{T}_{\text{ОО}} = \frac{f_{kn}(t)}{1+a^2\lambda_{kn}} + c_1\sin(\sqrt{\lambda_{kn}}\,at) + c_2\cos(\sqrt{\lambda_{kn}}\,at). \tag{2.14}$$

Подставив в (6.14) условие Коши $\mathbf{T}_{kn}(0) = 0$, получим, что $c_2 = -\frac{f_{kn}(0)}{1+a^2\lambda_{kn}}$, а подставив в полученное

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \frac{f_{kn}(t)}{1+a^2\lambda_{kn}} + c_1\sin(\sqrt{\lambda_{kn}}\,at) - \frac{f_{kn}(0)}{1+a^2\lambda_{kn}}\cos(\sqrt{\lambda_{kn}}\,at)$$

во второе условие Коши $\mathbf{T}'_{kn}(0) = 0$, получим, что $c_1 = -\frac{f'_{kn}(0)}{(1+a^2\lambda_{kn})a\sqrt{\lambda_{kn}}}$, и, наконец,

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \frac{1}{1+a^2\lambda_{kn}}\left(f_{kn}(t) - \frac{f'_{kn}(0)}{a\sqrt{\lambda_{kn}}}\sin(\sqrt{\lambda_{kn}}\,at) - f_{kn}(0)\cos(\sqrt{\lambda_{kn}}\,at)\right). \tag{2.15}$$

Теперь осталось выписать в явном виде все $\mathbf{T}_{kn}(t)$ во всех случаях, использовав вид $f_{kn}(t)$ и $\lambda_{kn} = \frac{\pi^2k^2}{s^2} + \frac{\pi^2n^2}{p^2}$.

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \begin{cases} \frac{1}{1+a^2\pi^2\left(\frac{k^2}{s^2}+\frac{4}{p^2}\right)}\cdot\frac{2s(-1)^{k+1}}{\pi k\rho}\cdot \\ \qquad\cdot\left[e^{-t} + \frac{\sin\left(\sqrt{\frac{k^2}{s^2}+\frac{4}{p^2}}\,at\right)}{a\sqrt{\frac{k^2}{s^2}+\frac{4}{p^2}}} - \cos\left(\sqrt{\frac{k^2}{s^2}+\frac{4}{p^2}}\,at\right)\right], & k\in\mathbb{N},\ \ n=2; \\ 0, & k\in\mathbb{N},\ \ n\neq 2. \end{cases} \tag{2.16}$$

Поэтому после подстановки найденных $\mathbf{T}_{kn}(t)$ в искомый вид решения

$$u(x,\,y;\,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t),$$

получим, что от двойного ряда останется только одинарный:

$$u(x,\,y;\,t) = \mathbf{Y}_2(y)\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{T}_{k2}(t).$$

<u>Ответ:</u>

$$u(x,\,y;\,t) = \frac{2s}{\pi\rho}\cdot\sin\left(\frac{2\pi y}{p}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi kx}{s}\right)\frac{1}{1+a^2\pi^2\left(\frac{k^2}{s^2}+\frac{4}{p^2}\right)}\cdot\frac{(-1)^{k+1}}{k}\cdot$$
$$\cdot\left[e^{-t} + \frac{\sin\left(\sqrt{\frac{k^2}{s^2}+\frac{4}{p^2}}\,at\right)}{a\sqrt{\frac{k^2}{s^2}+\frac{4}{p^2}}} - \cos\left(\sqrt{\frac{k^2}{s^2}+\frac{4}{p^2}}\,at\right)\right],$$

где ρ – поверхностная плотность массы мембраны.

3. № 685 а).

В однородной прямоугольной мембране $0 \leqslant x \leqslant s$, $0 \leqslant y \leqslant p$ часть границы $x = s$, $0 < y < p$ и $y = p$, $0 < x < s$ свободна, а остальная часть закреплена жёстко. Пренебрегая реакцией окружающей среды, найти поперечные колебания мембраны, вызванные начальным отклонением Axy.

Записав эти условия математически, получим задачу:
Найти функцию $u(x,\, y;\, t)$ из условий

$$\begin{cases} u_t = a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right), & (x,\, y) \in \Pi, \quad t > 0; \\ u(x,\, y;\, 0) = \varphi(x,\, y) \equiv Axy, & (x,\, y) \in \Pi; \\ u_t(x,\, y;\, 0) = \psi(x,\, y) \equiv 0, & (x,\, y) \in \Pi; \\ u(0,\, y;\, t) = u_x(p,\, y;\, t) = 0 & 0 < y < s, \quad 0 < t < T, \\ u(x,\, 0;\, t) = u_y(x,\, s;\, t) = 0 & 0 < x < p, \quad 0 < t < T, \end{cases} \tag{3.1}$$

где через Π обозначен прямоугольник

$$\Pi = \{(x,\, y): \quad 0 \leqslant x \leqslant s, \quad 0 \leqslant y \leqslant p\}.$$

<u>Шаг 1.</u> Предварительные рассуждения. (полностью повторяют Шаг 1 из № 864 а).
Если искать решение задачи (3.1) в виде двойного ряда

$$u(x,\, y;\, t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t), \tag{3.2}$$

то, подставив этот ряд в уравнение $u_t = a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right)$, получим, что оно заведомо выполняется, если равны члены рядов в левой и правой частях с одинаковыми номерами:

$$\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}''_{kn}(t) = a^2 \cdot \left(\mathbf{X}''_k(x)\mathbf{Y}_n(y) + \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}''_n(y)\right)\mathbf{T}_{kn}(t).$$

Поделив это равенство на $a^2 \cdot \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}''_{kn}(t)}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)} = \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)} + \frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)}. \tag{3.3}$$

Так как слева стоит функция, зависящая только от t, а справа – от $(x,\, y)$, то это возможно только если и левая, и правая части этого равенства равны константе. Итак, $\exists\ \lambda_{kn}$ такая, что

$$\mathbf{T}''_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}\mathbf{T}_{kn}(t) = 0, \qquad \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)} + \frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)} = \lambda_{kn}.$$

Но сумма функций, одна из которых зависит только от x, а вторая – только от y, может быть константой только в случае, если обе эти функции – константы. Тогда $\exists\ \mu_k$ и ν_n такие, что

$$\mathbf{X}''_k(x) + \mu_k\mathbf{X}_k(x) = 0, \qquad \mathbf{Y}''_n(y) + \nu_n\mathbf{Y}_n(x) = 0, \qquad \mu_k + \nu_n = \lambda_{kn}. \tag{3.4}$$

Таким образом, естественно начать решение задачи (3.1) с решения двух задач Штурма-Лиувилля – для $\mathbf{X}_k(x)$ и для $\mathbf{Y}_n(y)$.

<u>Шаг 2.</u> Решение двух задач Штурма-Лиувилля
Краевые условия дают для функций $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(y)$ выполнение равенств:

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}'(s) = 0, \qquad \mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}'(p) = 0. \tag{3.5}$$

Таким образом, функции $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(x)$ есть решения задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} \mathbf{X}''_k(x) + \mu_k\mathbf{X}_k(x) = 0, \\ \mathbf{X}_k(0) = \mathbf{X}'_k(s) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{Y}''_n(y) + \nu_n\mathbf{Y}_n(y) = 0, \\ \mathbf{Y}_n(0) = \mathbf{Y}'_n(p) = 0, \end{cases} \tag{3.6}$$

Задачу для $\mathbf{X}_k(x)$ мы уже решили в № 713, стр. **??**. А поскольку задача для $\mathbf{Y}_n(y)$ совершенно аналогична, выпишем результат:

существует бесконечное множество нетривиальных решений

$$\mu_k = \left(\frac{\pi(2k-1)}{2s}\right)^2, \quad X_k(x) = \sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right), \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\nu_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2p}\right)^2, \quad \mathbf{Y}_n(y) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)y}{2p}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

задач из (3.6).

В силу соотношения $\mu_k + \nu_n = \lambda_{kn}$, для функций $\mathbf{T}_{kn}$ имеем уравнение:

$$\mathbf{T}''_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}T_{kn}(t) = 0, \qquad t > 0, \qquad \lambda_{kn} = \frac{\pi^2(2k-1)^2}{4s^2} + \frac{\pi^2(2n-1)^2}{4p^2}. \tag{3.7}$$

Пусть функция $\varphi(x,\, y) \equiv Axy$ начального условия разлагается в ряд

$$\varphi(x,\, y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\varphi_{kn}. \tag{3.8}$$

В данном случае коэффициенты разложения φ_{kn} находятся аналогично № 713, 715. А именно:

$$\varphi_{kn}(x,\, y) = \frac{4A}{sp}\int\limits_0^s x\sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right)dx\int\limits_0^p y\sin\left(\frac{\pi(2n-1)y}{2p}\right)dy =$$

$$= \frac{4A}{sp}\cdot\frac{2s}{\pi(2k-1)}\cdot\left[\underbrace{-x\cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=s}}_{=0} + \int\limits_0^s\cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right)dx\right]\cdot$$

$$\cdot\frac{2p}{\pi(2n-1)}\cdot\left[\underbrace{-y\cos\left(\frac{\pi(2n-1)y}{2p}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=p}}_{=0} + \int\limits_0^p\cos\left(\frac{\pi(2n-1)y}{2p}\right)dy\right] =$$

$$= \frac{4A}{sp}\cdot\left(\frac{2s}{\pi(2k-1)}\right)^2\cdot\left(\frac{2p}{\pi(2n-1)}\right)^2\cdot\left[\sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=s}\right]\cdot\left[\sin\left(\frac{\pi(2n-1)y}{2p}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=p}\right] =$$

$$= \frac{64Asp}{\pi^4(2k-1)^2(2n-1)^2}\cdot(-1)^{k+1}\cdot(-1)^{n+1} = \frac{64Asp\cdot(-1)^{k+n}}{\pi^4(2k-1)^2(2n-1)^2}.$$

Итак,

$$\varphi_{kn} = \frac{64Asp\cdot(-1)^{k+n}}{\pi^4(2k-1)^2(2n-1)^2}. \tag{3.9}$$

Поскольку начальные условия

$$u(x,\, y;\, 0) = \varphi(x,\, y), \qquad u_t(x,\, y;\, 0) = \psi(x,\, y) \equiv 0$$

будут заведомо выполнены, если

$$\mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn}, \qquad \mathbf{T}'_{kn}(0) = 0,$$

то для функций $\mathbf{T}_{kn}(t)$ имеем задачу Коши:

$$\begin{cases} \mathbf{T}''_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}T_{kn}(t) = 0, & t > 0; \\ \mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn}; \\ \mathbf{T}'_{kn}(0) = 0. \end{cases} \qquad \lambda_{kn} = \left(\frac{\pi(2k-1)}{2s}\right)^2 + \left(\frac{\pi(2n-1)}{2p}\right)^2 \tag{3.10}$$

<u>Шаг 3.</u> Решаем задачу (3.10).

Решение этой задачи Коши имеет вид

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \mathbf{T}_{kn}(0)\cos\left(\sqrt{\lambda_{kn}}\,at\right) + \frac{\mathbf{T}'_{kn}(0)}{\sqrt{\lambda_{kn}}\,a}\sin\left(\sqrt{\lambda_{kn}}\,at\right). \tag{3.11}$$

Поэтому, с учётом (3.9), получаем:

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \frac{64Asp\cdot(-1)^{k+n}}{\pi^4(2k-1)^2(2n-1)^2}\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda_{kn}}\,at\right), \qquad t > 0. \tag{3.12}$$

Всё, что нам осталось сделать, – это подставить в формулу (3.2) функции $\mathbf{X}_k(x) = \sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right)$, $\mathbf{Y}_n(y) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)y}{2p}\right)$ и только что найденные функции $\mathbf{T}_{kn}(t)$ из (3.12) в двойной ряд

$$u(x,\,y;\,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t).$$

<u>Ответ:</u>

$$u(x,\,y;\,t) = \frac{64Asp}{\pi^4}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+n}}{(2k-1)^2(2n-1)^2}\cdot\sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)y}{2p}\right)\cdot\cos\left(\sqrt{\lambda_{kn}}\,at\right),$$

где

$$\lambda_{kn} = \frac{\pi^2(2k-1)^2}{(2s)^2} + \frac{\pi^2(2n-1)^2}{(2p)^2}.$$

4. № 686 а).

В однородной прямоугольной мембране $0 \leqslant x \leqslant s$, $0 \leqslant y \leqslant p$ часть границы $x = 0$, $0 < y < p$ свободна, а остальная часть закреплена жёстко. Пренебрегая реакцией окружающей среды, найти поперечные колебания однородной прямоугольной мембраны, вызванные начальным отклонением $\cos\left(\frac{\pi x}{2s}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{p}\right)$.

Записав эти условия математически, получим задачу:
Найти функцию $u(x,\,y;\,t)$ из условий

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right), & (x,\,y) \in \Pi, \quad t > 0; \\ u(x,\,y;\,0) = \varphi(x,\,y) \equiv \cos\left(\frac{\pi x}{2s}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{p}\right), & (x,\,y) \in \Pi; \\ u_t(x,\,y;\,0) = \psi(x,\,y) \equiv 0, & (x,\,y) \in \Pi; \\ u_x(0,\,y;\,t) = u(p,\,y;\,t) = 0 & 0 < y < s, \quad 0 < t < T, \\ u(x,\,0;\,t) = u(x,\,s;\,t) = 0 & 0 < x < p, \quad 0 < t < T, \end{cases} \tag{4.1}$$

где через Π обозначен прямоугольник

$$\Pi = \{(x,\,y): \quad 0 \leqslant x \leqslant s, \quad 0 \leqslant y \leqslant p\}.$$

<u>Шаг 1.</u> Предварительные рассуждения.
Если искать решение задачи (4.1) в виде двойного ряда

$$u(x,\,y;\,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t), \tag{4.2}$$

то, подставив этот ряд в уравнение $u_{tt}=a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right)$, получим, что оно заведомо выполняется, если равны члены рядов в левой и правой частях с одинаковыми номерами:

$$\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}''_{kn}(t)=a^2\cdot\left(\mathbf{X}''_k(x)\mathbf{Y}_n(y)+\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}''_n(y)\right)\mathbf{T}_{kn}(t).$$

Поделив это равенство на $a^2\cdot\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}''_{kn}(t)}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)}=\frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)}+\frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)}. \tag{4.3}$$

Так как слева стоит функция, зависящая только от t, а справа – от $(x,\,y)$, то это возможно только если и левая, и правая части этого равенства равны константе. Итак, $\exists\ \lambda_{kn}$ такая, что

$$\mathbf{T}''_{kn}(t)+a^2\lambda_{kn}\mathbf{T}_{kn}(t)=0,\qquad\qquad \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)}+\frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)}=\lambda_{kn}.$$

Но сумма функций, одна из которых зависит только от x, а вторая – только от y, может быть константой только в случае, если обе эти функции – константы. Тогда $\exists\ \mu_k$ и ν_n такие, что

$$\mathbf{X}''_k(x)+\mu_k\mathbf{X}_k(x)=0,\qquad\qquad \mathbf{Y}''_n(y)+\nu_n\mathbf{Y}_n(x)=0,\qquad\qquad \mu_k+\nu_n=\lambda_{kn}. \tag{4.4}$$

Таким образом, естественно начать решение задачи (4.1) с решения двух задач Штурма-Лиувилля – для $\mathbf{X}_k(x)$ и для $\mathbf{Y}_n(y)$.

<u>Шаг 2.</u> Решение двух задач Штурма-Лиувилля
Краевые условия дают для функций $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(y)$ выполнение равенств:

$$\mathbf{X}'(0)=\mathbf{X}(p)=0,\qquad\qquad \mathbf{Y}(0)=\mathbf{Y}(s)=0. \tag{4.5}$$

Таким образом, функции $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(x)$ есть решения задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases}\mathbf{X}''_k(x)+\mu_k\mathbf{X}_k(x)=0,\\ \mathbf{X}'_k(0)=\mathbf{X}_k(p)=0,\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}\mathbf{Y}''_n(y)+\nu_n\mathbf{Y}_n(y)=0,\\ \mathbf{Y}_n(0)=\mathbf{Y}_n(s)=0,\end{cases} \tag{4.6}$$

Эти задачи мы уже решали много раз. Выпишем результат:
существует бесконечное множество нетривиальных решений

$$\mu_k=\left(\frac{\pi(2k-1)}{2s}\right)^2,\quad X_k(x)=\cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right),\quad k\in\mathbb{N}$$

первой задачи (4.6) и бесконечное множество нетривиальных решений

$$\nu_n=\left(\frac{\pi n}{p}\right)^2,\quad \mathbf{Y}_n(y)=\sin\left(\frac{\pi ny}{p}\right),\qquad n\in\mathbb{N}.$$

второй задачи (4.6).

В силу соотношения $\mu_k+\nu_n=\lambda_{kn}$, для функций $\mathbf{T}_{kn}$ имеем уравнение:

$$\mathbf{T}''_{kn}(t)+a^2\lambda_{kn}T_{kn}(t)=0,\qquad t>0,\qquad \lambda_{kn}=\frac{\pi^2(2k-1)^2}{4s^2}+\frac{\pi^2n^2}{p^2}.$$

Используем начльные условия.
Разложим функции $\varphi(x,\, y)$ и $\psi(x,\, y)$ в ряд по собственным функциям задач Штурма-Лиувилля:

$$\varphi(x,\, y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\varphi_{kn}, \tag{4.7}$$

$$\psi(x,\, y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\psi_{kn}. \tag{4.8}$$

В данном случае коэффициенты разложения φ_{kn} и ψ_{kn} найти гораздо проще, чем обычно, поскольку $\psi \equiv 0$, а функция $\varphi(x,\, y)$ имеет в точности вид ОДНОГО из слагаемых соответствующего ряда. А именно:

$$\varphi(x,\, y) \equiv \mathbf{X}_1(x)\mathbf{Y}_1(y) = \cos\left(\frac{\pi x}{2s}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{p}\right). \tag{4.9}$$

Поэтому

$$\varphi_{kn} = \begin{cases} 1, & k=1,\ \ n=1; \\ 0, & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \qquad \psi_{kn} = 0 \quad \text{при всех } k \text{ и } n. \tag{4.10}$$

А поскольку начальное условие $u(x,\, y;\, 0) = \varphi(x,\, y)$ будет заведомо выполнено, если $\mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn}$, а второе начальное условие $u_t(x,\, y;\, 0) = \psi(x,\, y) \equiv 0$, – если $\mathbf{T}'_{kn}(0) = \psi_{kn} = 0$, то для функций $\mathbf{T}_{kn}(t)$ имеем задачу Коши:

$$\begin{cases} \mathbf{T}''_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}T_{kn}(t) = 0, \\ \mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn}; \\ \mathbf{T}'_{kn}(0) = 0, \end{cases} \qquad \lambda_{kn} = \frac{\pi^2 k^2}{s^2} + \frac{\pi^2 n^2}{p^2} \tag{4.11}$$

<u>Шаг 3.</u> Решаем задачу (4.11).

Общее решение этого линейного однородного уравнения второго порядка, с учётом, что $a^2\lambda_{kn} > 0$, имеет вид:

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = c_1\sin(\sqrt{\lambda_{kn}}\,at) + c_2\cos(\sqrt{\lambda_{kn}}\,at)$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

Подставив $\mathbf{T}_{kn}$ во второе начальное условие $\mathbf{T}'_{kn}(0) = 0$, получим, что $c_1 = 0$, откуда

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = c_2\cos(\sqrt{\lambda_{kn}}\,at).$$

Из первого начального условия $\mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn}$ сразу получаем, что $c_2 = \varphi_{kn}$ и, наконец, получаем, что решение задачи Коши (4.11) задаётся формулой:

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \varphi_{kn}\cos(\sqrt{\lambda_{kn}}\,at), \qquad t > 0. \tag{4.12}$$

С учётом, что $\varphi_{kn} = 0$ всегда, за исключением случая $k = n = 1$, а $\varphi_{11} = 1$, из (4.13) получаем

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \begin{cases} \cos(\sqrt{\lambda_{11}}\,at), & k=1,\ \ n=1; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{4.13}$$

Поэтому после подстановки найденных $\mathbf{T}_{kn}(t)$ в искомый вид решения

$$u(x,\, y;\, t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t),$$

получим, что от ряда останется только одно слагаемое:

$$u(x,\, y;\, t) = \mathbf{X}_1(x)\mathbf{Y}_1(y)\mathbf{T}_{11}(t).$$

<u>Ответ:</u>

$$u(x,\, y;\, t) = \cos\left(\frac{\pi x}{2s}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{p}\right)\cos(\sqrt{\lambda_{11}}\, at),$$

где $\lambda_{11} = \frac{\pi^2}{4s^2} + \frac{\pi^2}{p^2}$.

5. № 686 в).

В однородной прямоугольной мембране $0 \leqslant x \leqslant s$, $0 \leqslant y \leqslant p$ часть границы $x = 0$, $\;0 < y < p$ свободна, а остальная часть закреплена жёстко. Пренебрегая реакцией окружающей среды, найти поперечные колебания однородной прямоугольной мембраны, вызванные начальным распределением скоростей

$$u_t(x,\, y;\, 0) = A(s-x)\sin\left(\frac{\pi y}{p}\right).$$

Записав эти условия математически, получим задачу:
Найти функцию $u(x,\, y;\, t)$ из условий

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right), & (x,\, y) \in \Pi, \quad t > 0; \\ u(x,\, y;\, 0) = \varphi(x,\, y) \equiv 0, & (x,\, y) \in \Pi; \\ u_t(x,\, y;\, 0) = \psi(x,\, y) \equiv A(s-x)\sin\left(\frac{\pi y}{p}\right), & (x,\, y) \in \Pi; \\ u_x(0,\, y;\, t) = u(p,\, y;\, t) = 0 & 0 < y < s, \quad 0 < t < T, \\ u(x,\, 0;\, t) = u(x,\, s;\, t) = 0 & 0 < x < p, \quad 0 < t < T, \end{cases} \tag{5.1}$$

где через Π обозначен прямоугольник

$$\Pi = \{(x,\, y): \quad 0 \leqslant x \leqslant s, \quad 0 \leqslant y \leqslant p\}.$$

<u>Шаг 1.</u> Предварительные рассуждения.
Если искать решение задачи (5.1) в виде двойного ряда

$$u(x,\, y;\, t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t), \tag{5.2}$$

то, подставив этот ряд в уравнение $u_{tt} = a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right)$, получим, что оно заведомо выполняется, если равны члены рядов в левой и правой частях с одинаковыми номерами:

$$\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}''_{kn}(t) = a^2 \cdot \left(\mathbf{X}''_k(x)\mathbf{Y}_n(y) + \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}''_n(y)\right)\mathbf{T}_{kn}(t).$$

Поделив это равенство на $a^2 \cdot \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}''_{kn}(t)}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)} = \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)} + \frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)}. \tag{5.3}$$

Так как слева стоит функция, зависящая только от t, а справа – от $(x,\, y)$, то это возможно только если и левая, и правая части этого равенства равны константе. Итак, $\exists\, \lambda_{kn}$ такая, что

$$\mathbf{T}''_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}\mathbf{T}_{kn}(t) = 0, \qquad \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)} + \frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)} = \lambda_{kn}.$$

Но сумма функций, одна из которых зависит только от x, а вторая – только от y, может быть константой только в случае, если обе эти функции – константы. Тогда $\exists\ \mu_k$ и ν_n такие, что

$$\mathbf{X}_k''(x) + \mu_k \mathbf{X}_k(x) = 0, \qquad \mathbf{Y}_n''(y) + \nu_n \mathbf{Y}_n(x) = 0, \qquad \mu_k + \nu_n = \lambda_{kn}. \tag{5.4}$$

Таким образом, естественно начать решение задачи (5.1) с решения двух задач Штурма-Лиувилля – для $\mathbf{X}_k(x)$ и для $\mathbf{Y}_n(y)$.

<u>Шаг 2.</u> Решение двух задач Штурма-Лиувилля

Краевые условия дают для функций $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(y)$ выполнение равенств:

$$\mathbf{X}'(0) = \mathbf{X}(p) = 0, \qquad \mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}(s) = 0. \tag{5.5}$$

Таким образом, функции $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(x)$ есть решения задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} \mathbf{X}_k''(x) + \mu_k \mathbf{X}_k(x) = 0, \\ \mathbf{X}_k'(0) = \mathbf{X}_k(p) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{Y}_n''(y) + \nu_n \mathbf{Y}_n(y) = 0, \\ \mathbf{Y}_n(0) = \mathbf{Y}_n(s) = 0, \end{cases} \tag{5.6}$$

Эти задачи мы уже решали много раз. Выпишем результат:

существует бесконечное множество нетривиальных решений

$$\mu_k = \left(\frac{\pi(2k-1)}{2s}\right)^2, \quad X_k(x) = \cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right), \quad k \in \mathbb{N}$$

первой задачи (6.7) и бесконечное множество нетривиальных решений

$$\nu_n = \left(\frac{\pi n}{p}\right)^2, \quad \mathbf{Y}_n(y) = \sin\left(\frac{\pi n y}{p}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

второй задачи (6.7).

В силу соотношения $\mu_k + \nu_n = \lambda_{kn}$, для функций $\mathbf{T}_{kn}$ имеем уравнение:

$$\mathbf{T}_{kn}''(t) + a^2 \lambda_{kn} T_{kn}(t) = 0, \qquad t > 0, \qquad \lambda_{kn} = \frac{\pi^2(2k-1)^2}{4s^2} + \frac{\pi^2 n^2}{p^2}.$$

Используем начльные условия.

Разложим функции $\varphi(x,\, y)$ и $\psi(x,\, y)$ в ряд по собственным функциям задач Штурма-Лиувилля:

$$\varphi(x,\, y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\varphi_{kn}, \tag{5.7}$$

$$\psi(x,\, y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\psi_{kn}. \tag{5.8}$$

В данном случае коэффициенты разложения φ_{kn} и ψ_{kn} найти проще, чем обычно, поскольку $\varphi \equiv 0$, а функция $\psi(x,\, y)$ зависит от y в точности как ОДНО из слагаемых соответствующего ряда. А именно:

$$\psi(x,\, y) \equiv A(s-x)\mathbf{Y}_1(y) = A(s-x)\sin\left(\frac{\pi y}{p}\right). \tag{5.9}$$

Поэтому, что бы получить φ_{kn}, нам лишь разложить функцию $A(s-x)$ в ряд по $\mathbf{X}_k$:

$$A(s-x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mathbf{X}_k(x).$$

Коэффициенты α_k находятся по формуле (её вывод полностью аналогичен проделанному в № 712(б), semS4)

$$\alpha_k = \frac{2}{s}\int\limits_0^s A(s-x)\cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right)dx =$$

$$= \frac{2A}{s}\left[s\int\limits_0^s \cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right)dx - \int\limits_0^s x\cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right)dx\right] =$$

$$= \frac{2A}{s}\cdot\frac{2s}{\pi(2k-1)}\left[s\sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=s} - \left(x\sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=s} - \int\limits_0^s \sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right)dx\right)\right] =$$

$$= \frac{2A}{s}\cdot\left(\frac{2s}{\pi(2k-1)}\right)^2\left(-\cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=s}\right) = \frac{8As}{\pi^2(2k-1)^2}.$$

Таким образом,

$$\psi_{kn} = \begin{cases} \frac{8As}{\pi^2(2k-1)^2}, & n=1; \\ 0, & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \qquad \varphi_{kn} = 0 \quad \text{при всех } k \text{ и } n. \tag{5.10}$$

А поскольку начальное условие $u(x,\,y;\,0) = \varphi(x,\,y)$ будет заведомо выполнено, если $\mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn} = 0$, а второе начальное условие $u_t(x,\,y;\,0) = \psi(x,\,y)$, – если $\mathbf{T}'_{kn}(0) = \psi_{kn}$, то для функций $\mathbf{T}_{kn}(t)$ имеем задачу Коши:

$$\begin{cases} \mathbf{T}''_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}T_{kn}(t) = 0, \\ \mathbf{T}_{kn}(0) = 0; \\ \mathbf{T}'_{kn}(0) = \psi_{kn}, \end{cases} \qquad \lambda_{kn} = \frac{\pi^2(2k-1)^2}{s^2} + \frac{\pi^2 n^2}{p^2} \tag{5.11}$$

<u>Шаг 3.</u> Решаем задачу (5.11)**.**

Общее решение этого линейного однородного уравнения второго порядка, с учётом, что $a^2\lambda_{kn} > 0$, имеет вид:

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = c_1\sin(\sqrt{\lambda_{kn}}\,at) + c_2\cos(\sqrt{\lambda_{kn}}\,at)$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

Подставив $\mathbf{T}_{kn}$ в первое начальное условие $\mathbf{T}_{kn}(0) = 0$, получим, что $c_2 = 0$, откуда

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = c_1\sin(\sqrt{\lambda_{kn}}\,at).$$

Из второго начального условия $\mathbf{T}'_{kn}(0) = \psi_{kn}$ получаем, что $c_1\cdot a\sqrt{\lambda_{kn}} = \psi_{kn}$ и, наконец, получаем, что решение задачи Коши (5.11) задаётся формулой:

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \frac{\psi_{kn}}{a\sqrt{\lambda_{kn}}}\sin(\sqrt{\lambda_{kn}}\,at), \qquad t > 0. \tag{5.12}$$

С учётом (6.12) получаем

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \begin{cases} \frac{8As}{\pi^2 a(2k-1)^2\sqrt{\lambda_{k1}}}\sin(\sqrt{\lambda_{k1}}\,at), & n=1; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{5.13}$$

Поэтому после подстановки найденных $\mathbf{T}_{kn}(t)$ в искомый вид решения

$$u(x,\,y;\,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t),$$

получим, что двойной ряд станет одинарным:

$$u(x,\,y;\,t) = \mathbf{Y}_1(y)\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{T}_{k1}(t).$$

<u>Ответ:</u>

$$u(x,\,y;\,t) = \frac{8As}{\pi^2 a}\sin\left(\frac{\pi y}{p}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2\sqrt{\lambda_{k1}}}\cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right)\sin(\sqrt{\lambda_{k1}}\,at),$$

где $\lambda_{k1} = \frac{\pi^2(2k-1)^2}{4s^2} + \frac{\pi^2}{p^2}$.

6. № 686 г).

В однородной прямоугольной мембране $0 \leqslant x \leqslant s$, $0 \leqslant y \leqslant p$ часть границы $x = 0$, $0 < y < p$ свободна, а остальная часть закреплена жёстко. Пренебрегая реакцией окружающей среды, найти поперечные колебания однородной прямоугольной мембраны, вызванные распределённой по мембраны поперечной силой с плотностью

$$B(s-x)\sin\left(\frac{\pi y}{p}\right)\cdot\sin t.$$

Записав эти условия математически, получим задачу:
Найти функцию $u(x,\,y;\,t)$ из условий

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right) + \frac{B(x-s)}{\rho}\sin\left(\frac{\pi y}{p}\right)\cdot\sin t, & (x,\,y)\in\Pi, \quad t>0; \\ u(x,\,y;\,0) = \varphi(x,\,y)\equiv 0, & (x,\,y)\in\Pi; \\ u_t(x,\,y;\,0) = \psi(x,\,y)\equiv 0, & (x,\,y)\in\Pi; \\ u_x(0,\,y;\,t) = u(p,\,y;\,t) = 0 & 0<y<s, \quad 0<t<T, \\ u(x,\,0;\,t) = u(x,\,s;\,t) = 0 & 0<x<p, \quad 0<t<T, \end{cases} \tag{6.1}$$

где ρ – поверхностная плотность массы мембраны, а через Π обозначен прямоугольник

$$\Pi = \{(x,\,y):\quad 0\leqslant x\leqslant s,\quad 0\leqslant y\leqslant p\}.$$

<u>Шаг 1.</u> Предварительные рассуждения.
Если искать решение задачи (6.1) в виде двойного ряда

$$u(x,\,y;\,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t), \tag{6.2}$$

то, подставив этот ряд и ряд

$$f(x,\,y;\,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)f_{kn}(t), \tag{6.3}$$

в уравнение $u_{tt} = a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right)+f$, получим, что оно заведомо выполняется, если равны члены рядов в левой и правой частях с одинаковыми номерами:

$$\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}''_{kn}(t) = a^2\cdot\left(\mathbf{X}''_k(x)\mathbf{Y}_n(y)+\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}''_n(y)\right)\mathbf{T}_{kn}(t)+\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)f_{kn}(t).$$

Поделив это равенство на $a^2\cdot\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}''_{kn}(t)}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)} = \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)}+\frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)}+\frac{f_{kn}(t)}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)}$$

или

$$\frac{\mathbf{T}''_{kn}(t) - f_{kn}(t)}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)} = \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)} + \frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)}. \tag{6.4}$$

Так как слева стоит функция, зависящая только от t, а справа – от $(x,\, y)$, то это возможно только если и левая, и правая части этого равенства равны константе. Итак, $\exists\ \lambda_{kn}$ такая, что

$$\mathbf{T}''_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}\mathbf{T}_{kn}(t) = f_{kn}(t), \qquad \frac{\mathbf{X}''_k(x)}{\mathbf{X}_k(x)} + \frac{\mathbf{Y}''_n(y)}{\mathbf{Y}_n(y)} = \lambda_{kn}.$$

Но сумма функций, одна из которых зависит только от x, а вторая – только от y, может быть константой только в случае, если обе эти функции – константы. Тогда $\exists\ \mu_k$ и ν_n такие, что

$$\mathbf{X}''_k(x) + \mu_k\mathbf{X}_k(x) = 0, \qquad \mathbf{Y}''_n(y) + \nu_n\mathbf{Y}_n(x) = 0, \qquad \mu_k + \nu_n = \lambda_{kn}. \tag{6.5}$$

Таким образом, естественно начать решение задачи (6.1) с решения двух задач Штурма-Лиувилля – для $\mathbf{X}_k(x)$ и для $\mathbf{Y}_n(y)$.

<u>Шаг 2.</u> Решение двух задач Штурма-Лиувилля

Краевые условия дают для функций $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(y)$ выполнение равенств:

$$\mathbf{X}'(0) = \mathbf{X}(p) = 0, \qquad \mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}(s) = 0. \tag{6.6}$$

Таким образом, функции $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_n(x)$ есть решения задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} \mathbf{X}''_k(x) + \mu_k\mathbf{X}_k(x) = 0, \\ \mathbf{X}'_k(0) = \mathbf{X}_k(p) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{Y}''_n(y) + \nu_n\mathbf{Y}_n(y) = 0, \\ \mathbf{Y}_n(0) = \mathbf{Y}_n(s) = 0, \end{cases} \tag{6.7}$$

Эти задачи мы уже решали много раз. Выпишем результат:

существует бесконечное множество нетривиальных решений

$$\mu_k = \left(\frac{\pi(2k-1)}{2s}\right)^2, \quad X_k(x) = \cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right), \quad k \in \mathbb{N}$$

первой задачи (6.7) и бесконечное множество нетривиальных решений

$$\nu_n = \left(\frac{\pi n}{p}\right)^2, \quad \mathbf{Y}_n(y) = \sin\left(\frac{\pi n y}{p}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

второй задачи (6.7).

В силу соотношения $\mu_k + \nu_n = \lambda_{kn}$, для функций $\mathbf{T}_{kn}$ имеем уравнение:

$$\mathbf{T}''_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}T_{kn}(t) = 0, \qquad t > 0, \qquad \lambda_{kn} = \frac{\pi^2(2k-1)^2}{4s^2} + \frac{\pi^2 n^2}{p^2}.$$

Используем начльные условия.

Разложим функции $f(x,\, y;\, t)$, $\varphi(x,\, y)$ и $\psi(x,\, y)$ в ряд по собственным функциям задач Штурма-Лиувилля:

$$f(x,\, y;\, t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)f_{kn}, \tag{6.8}$$

$$\varphi(x,\, y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\varphi_{kn}, \tag{6.9}$$

$$\psi(x,\, y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\psi_{kn}. \tag{6.10}$$

В данном случае коэффициенты разложения $\varphi_{kn} = 0$ и $\psi_{kn} = 0$, а ряд для $f(x,\, y;\, t)$ получается не двойной, а одинарный. А именно:

$$f(x,\, y;\, t) \equiv \frac{\mathbf{Y}_1(y)\cdot \sin t}{\rho}\cdot \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right), \tag{6.11}$$

где

$$\alpha_k = \frac{2}{s}\int\limits_0^s B(s-x)\cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right)dx =$$

$$= \frac{2B}{s}\left[s\int\limits_0^s \cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right)dx - \int\limits_0^s x\cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right)dx\right] =$$

$$= \frac{2B}{s}\cdot\frac{2s}{\pi(2k-1)}\left[\underbrace{s\sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=s}}_{s(-1)^{k+1}} - \left(\underbrace{x\sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=s}}_{s(-1)^{k+1}} - \int\limits_0^s \sin\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right)dx\right)\right] =$$

$$= \frac{2B}{s}\cdot\left(\frac{2s}{\pi(2k-1)}\right)^2\left(-\cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=s}\right) = \frac{8Bs}{\pi^2(2k-1)^2}.$$

Поэтому

$$f_{kn}(t) = \begin{cases} \frac{8Bs}{\pi^2(2k-1)^2\rho}\cdot\sin t, & n=1;\\ 0, & n>1; \end{cases} \qquad \varphi_{kn} = 0, \qquad \psi_{kn} = 0 \quad \text{при всех } k \text{ и } n. \tag{6.12}$$

А поскольку начальное условие $u(x,\, y;\, 0) = \varphi(x,\, y)$ будет заведомо выполнено, если $\mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn} = 0$, а второе начальное условие $u_t(x,\, y;\, 0) = \psi(x,\, y) \equiv 0$, – если $\mathbf{T}'_{kn}(0) = \psi_{kn} = 0$, то для функций $\mathbf{T}_{kn}(t)$ имеем задачу Коши:

$$\begin{cases} \mathbf{T}''_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}T_{kn}(t) = f_{kn}(t),\\ \mathbf{T}_{kn}(0) = 0;\\ \mathbf{T}'_{kn}(0) = 0, \end{cases} \qquad \lambda_{kn} = \frac{\pi^2(2k-1)^2}{4s^2} + \frac{\pi^2 n^2}{p^2} \tag{6.13}$$

<u>Шаг 3.</u> Решаем задачу (6.13)**.**

Можно решить эту задачу Коши методом вариации постоянной, как в № 713. Но в данном случае правая часть уравнения есть $c\sin t$, и частное решение неоднородного уравнения легко угадывается:

$$\mathbf{T}_{\text{чно}} = \frac{f_{kn}(t)}{a^2\lambda_{kn} - 1}.$$

Поэтому общее решение неоднородного уравнения

$$\mathbf{T}''_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}T_{kn}(t) = f_{kn}(t)$$

имеет вид

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \mathbf{T}_{\text{чно}} + \mathbf{T}_{\text{оо}} = \frac{f_{kn}(t)}{a^2\lambda_{kn} - 1} + c_1\sin(\sqrt{\lambda_{kn}}\,at) + c_2\cos(\sqrt{\lambda_{kn}}\,at). \tag{6.14}$$

Подставив в (6.14) условие Коши $\mathbf{T}_{kn}(0) = 0$, получим, что $c_2 = -\frac{f_{kn}(0)}{a^2\lambda_{kn}-1}$, а подставив в полученное

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \frac{f_{kn}(t)}{a^2\lambda_{kn} - 1} + c_1\sin(\sqrt{\lambda_{kn}}\,at) - \frac{f_{kn}(0)}{a^2\lambda_{kn} - 1}\cos(\sqrt{\lambda_{kn}}\,at)$$

во второе условие Коши $\mathbf{T}'_{kn}(0) = 0$, получим, что $c_1 = -\frac{f'_{kn}(0)}{(a^2\lambda_{kn}-1)a\sqrt{\lambda_{kn}}}$, и, наконец,

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \frac{1}{a^2\lambda_{kn} - 1}\left(f_{kn}(t) - \frac{f'_{kn}(0)}{a\sqrt{\lambda_{kn}}}\sin(\sqrt{\lambda_{kn}}\,at) - \underbrace{f_{kn}(0)}_{=0}\cos(\sqrt{\lambda_{kn}}\,at)\right). \tag{6.15}$$

Теперь осталось выписать в явном виде все $\mathbf{T}_{kn}(t)$ во всех случаях, использовав вид $f_{kn}(t)$.

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \begin{cases} \frac{1}{a^2\lambda_{k1}-1}\cdot\frac{8Bs}{\pi^2(2k-1)^2\rho}\cdot\left[\sin t - \frac{\sin(\sqrt{\lambda_{k1}}\,at)}{a\sqrt{\lambda_{k1}}}\right], & k\in\mathbb{N},\ \ n=1; \\ 0, & k\in\mathbb{N},\ \ n\neq 1. \end{cases} \tag{6.16}$$

Поэтому после подстановки найденных $\mathbf{T}_{kn}(t)$ в искомый вид решения

$$u(x,\,y;\,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{Y}_n(y)\mathbf{T}_{kn}(t),$$

получим, что от двойного ряда останется только одинарный:

$$u(x,\,y;\,t) = \mathbf{Y}_1(y)\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{X}_k(x)\mathbf{T}_{k1}(t).$$

<u>Ответ:</u>

$$u(x,\,y;\,t) = \frac{8Bs}{\pi^2\rho}\sin\left(\frac{\pi y}{p}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi(2k-1)x}{2s}\right)\cdot\frac{1}{a^2\lambda_{k1}-1}\cdot\frac{1}{(2k-1)^2}\cdot\left[\sin t - \frac{\sin(\sqrt{\lambda_{k1}}\,at)}{a\sqrt{\lambda_{k1}}}\right],$$

где ρ – поверхностная плотность массы мембраны, а $\lambda_{k1} = \frac{\pi^2(2k-1)^2}{4s^2} + \frac{\pi^2}{p^2}$.
(Ответ в задачнике не совсем верный, функция, приведённая там, не удовлетворяет начальному условию $u(x,\,y;\,t) = 0$.)