Задача 1.74. Знайти усі значення наступних степенів:

1. $1^{\sqrt{2}}$;
2. $(-2)^{\sqrt{2}}$;
3. 2^i;
4. 1^{-i};
5. i^i;
6. $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$;
7. $(3-4i)^{1+i}$;
8. $(-3+4i)^{1+i}$.

Розв'язок. У всіх пунктах цієї задачі використовується визначення степеню через exp:

$$a^\alpha = \exp\{\alpha \operatorname{Ln} a\} = e^{\alpha \operatorname{Ln} a}. \tag{1.1}$$

1.

$$1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\operatorname{Ln} 1} = e^{\sqrt{2}(2\pi i k)} = \cos\left(2\pi k\sqrt{2}\right) + i\sin\left(2\pi k\sqrt{2}\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2.

$$(-2)^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\operatorname{Ln}(-2)} = e^{\sqrt{2}(\ln 2 + i\pi + 2\pi i k)} =$$
$$= 2^{\sqrt{2}} \cdot \left(\cos\left(\sqrt{2}\pi(2k+1)\right) + i\sin\left(\sqrt{2}\pi(2k+1)\right)\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

3.

$$2^i = e^{i\operatorname{Ln} 2} = e^{i(\ln 2 + 2\pi i k)} = e^{-2\pi k + i\ln 2} =$$
$$= e^{-2\pi k} \cdot (\cos(\ln 2) + i\sin(\ln 2)), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

4.

$$1^{-i} = e^{-i\operatorname{Ln} 1} = e^{-i(2\pi i k)} = e^{2\pi k}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

5.

$$i^i = e^{i\operatorname{Ln} i} = e^{i(\pi/2 + 2\pi i k)} = e^{-2\pi k + i\pi/2} =$$
$$= e^{-2\pi k} \cdot (\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)) = ie^{-2\pi k}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

6.

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i} = \exp\left\{(1+i)\cdot \operatorname{Ln}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\right\} =$$
$$= \exp\left\{(1+i)\cdot\left(-\frac{i\pi}{4} + 2\pi i k\right)\right\} = \exp\left\{\frac{\pi}{4} - 2\pi k - \frac{i\pi}{4} + 2\pi i k\right\} =$$
$$= e^{\pi/4 - 2\pi k} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)\right) =$$
$$= ie^{\pi/4 - 2\pi k}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

7.

$$\begin{aligned}(3-4i)^{1+i} &= e^{(1+i)\cdot\mathrm{Ln}(3-4i)} = e^{(1+i)\cdot(\ln 5+\operatorname{arctan}_2(-4,3)+2\pi ik)} = \\ &= e^{\ln 5+\operatorname{arctan}_2(-4,3)-2\pi k+2\pi ik+i\ln 5+i\operatorname{arctan}_2(-4,3)} = \\ &= \left(\cos\left(\ln 5+\operatorname{arctan}_2(-4,3)\right)+i\sin\left(\ln 5+\operatorname{arctan}_2(-4,3)\right)\right)\cdot \\ &\qquad\cdot 5e^{\operatorname{arctan}_2(-4,3)-2\pi k},\quad k\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}(-3+4i)^{1+i} &= e^{(1+i)\cdot\mathrm{Ln}(-3+4i)} = e^{(1+i)\cdot(\ln 5+\operatorname{arctan}_2(4,-3)+2\pi ik)} = \\ &= e^{\ln 5+\operatorname{arctan}_2(4,-3)-2\pi k+2\pi ik+i\ln 5+i\operatorname{arctan}_2(4,-3)} = \\ &= \left(\cos\left(\ln 5+\operatorname{arctan}_2(4,-3)\right)+i\sin\left(\ln 5+\operatorname{arctan}_2(4,-3)\right)\right)\cdot \\ &\qquad\cdot 5e^{\operatorname{arctan}_2(4,-3)-2\pi k},\quad k\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Задача 1.81. Знайти всі значення наступних функцій:

1. $\operatorname{Arcsin}\frac{1}{2}$;
2. $\operatorname{Arccos}\frac{1}{2}$;
3. $\operatorname{Arccos} 2$;
4. $\operatorname{Arcsin} i$;
5. $\operatorname{Arctan}(1+2i)$;
6. $\operatorname{Arccosh} 2i$;
7. $\operatorname{Arctanh}(1-i)$;

Розв'язок. У кожному пункті цієї задачі використовується визначення Arccos та інших обернених тригонометричних і гіперболічних функцій через прямі, а саме:

$$\operatorname{Arccos} z = w \overset{\text{def}}{\iff} z = \cos w, \tag{1.2}$$

та подібні.

1.

$$\begin{aligned}\operatorname{Arcsin}\frac{1}{2} &= z, \\ \frac{1}{2} &= \sin z, \\ \frac{1}{2} &= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, \\ i &= e^{iz}-e^{-iz}, \\ i &= e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}, \\ i &= e^{-y+ix}-e^{y-ix},\end{aligned}$$

$$i = e^{-y}(\cos x + i\sin x) - e^{y}(\cos x - i\sin x),$$
$$i = (e^{-y} - e^{y})\cos x + i(e^{-y} + e^{y})\sin x.$$

Звідси $(e^{-y} - e^{y})\cos x = 0$ і $(e^{-y} + e^{y})\sin x = 1$.

Розв'язуючи цю систему, знаходимо $y = 0$, $x = 2\pi k \pm \pi/6$, $k \in \mathbb{Z}$, тобто остаточно маємо $z = 2\pi k \pm \pi/6$.

2.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Arccos}\frac{1}{2} &= z,\\
\frac{1}{2} &= \cos z,\\
\frac{1}{2} &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},\\
1 &= e^{iz} + e^{-iz},\\
1 &= e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)},\\
1 &= e^{-y+ix} + e^{y-ix},\\
1 &= e^{-y}(\cos x + i\sin x) + e^{y}(\cos x - i\sin x),\\
1 &= (e^{-y} + e^{y})\cos x + i(e^{-y} - e^{y})\sin x.
\end{aligned}$$

Звідси $(e^{-y} + e^{y})\cos x = 1$ і $(e^{-y} - e^{y})\sin x = 0$.

Розв'язуючи цю систему, знаходимо $y = 0$, $x = 2\pi k \pm \pi/3$, $k \in \mathbb{Z}$, тобто остаточно маємо $z = 2\pi k \pm \pi/3$.

3.

4.

5.

6.

7.

Задача 1.82. Знайти всі корені наступних рівнянь:

1.

2.

3.

4.

5.

6.

Розв'язок. 1.

2.

3.

4.

5.

6.