## Урок 15. Гільбертові простори і компактні оператори

**Задача 15.1.** Оператор $A \in \mathcal{L}(H,H)$ називається оператором скінченного рангу, якщо його область значень $\operatorname{Im} A$ є скінченновимірною. Доведіть, що оператор скінченного рангу, заданий на гільбертовому просторі $H$, є компактним.

*Доведення.* Нехай $\{\varphi_k\}_{k=1}^N$ — ортонормований базис для $\operatorname{Im} A$, а $\{x_n\}$ — послідовність в просторі $H$, така що $\|x_n\| \le 1$. Тоді для кожного $n$

$$Ax_n = \sum_{k=1}^{N} (Ax_n, \varphi_k)\varphi_k .$$

Позначимо $a_n^{(k)} = (Ax_n, \varphi_k)$. Тоді для кожного $k$ послідовність $\left\{a_n^{(k)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ є обмеженою, тому що

$$\left|a_n^{(k)}\right| = \left|(Ax_n, \varphi_k)\right| \le \|Ax_n\|\|\varphi_k\| \le \|A\|\|x_n\|\|\varphi_k\| \le \|A\| .$$

Оскільки кожна обмежена числова послідовність містить збіжну підпослідовність, знайдемо підпослідовність $\left\{x_k^{(1)}\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_m\}_{m=1}^{\infty}$, що задовольняє умові $\lim\limits_{m\to\infty} a_m^{(1)} = a^{(1)}$. Потім виберемо підпослідовність $\left\{x_k^{(2)}\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \left\{x_k^{(1)}\right\}_{m=1}^{\infty}$, що задовольняє умові $\lim\limits_{m\to\infty} a_m^{(2)} = a^{(2)}$. Продовжуючи, отримаємо підпослідовність $\left\{x_k^{(N)}\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \left\{x_k^{(N-1)}\right\}_{m=1}^{\infty}$, що задовольняє умові $\lim\limits_{m\to\infty} a_m^{(N)} = a^{(N)}$ для всіх $1 \le k \le N$.

Покладемо $y = \sum\limits_{k=1}^{N} a^{(k)}\varphi_k$. Тоді

$$\left\|Ax_m^{(m)} - y\right\|^2 = \sum_{k=1}^{N} \left|a_m^{(k)} - a^k\right|^2 \to 0 \text{ при } m \to \infty .$$

Таким чином, послідовність $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ містить збіжну підпослідовність, тобто оператор $A$ є компактним. ■

**Задача 15.2.** Доведіть, що тотожній оператор $I$ в нескінченновимірному гільбертовому просторі $H$ не є компактним.

*Доведення.* Нехай $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормований базис в гільбертовому просторі $H$. Тоді якщо $n \ne m$, то $\|\varphi_n - \varphi_m\| = \sqrt{2}$. Отже, послідовність $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ не є фундаментальною, а значить, не збігається. Крім того, ортонормований базис є обмеженою множиною і власним образом при тотожному відображенні. Таким чином, обмежена множина $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ відображається тотожним оператором у послідовність $\{I\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, яка не є збіжною, тому оператор $I$ не є компактним. ■

**Задача 15.3.** Доведіть, що оператор $A : l_2 \to l_2$, визначений формулою $A(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \left(x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{4}x_3, \ldots, 2^{-n+1}x_n, \ldots\right)$ є компактним.

*Доведення.* Покажемо, що оператор $A$ можна записати як границю рівномірно збіжної послідовності операторів скінченного рангу.

Для кожного $N$ визначимо оператор $A_N : l_2 \to l_2$

$$A_N\left(x_1, x_2, x_3, \ldots\right) = \left(x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{4}x_3, \ldots, 2^{-N+1}x_N, 0, 0, \ldots\right).$$

Оператор $A$ має скінченний ранг і для кожної послідовності $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_2$

$$\left\|\left(A - A_N\right)x\right\|^2 = \left\|\left(0, \ldots 0, 2^{-N}x_{N+1}, 2^{-N-1}x_{N+2}, \ldots\right)\right\|^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-2n+2}x_n^2 \le 2^{-2N}\sum_{n=N+1}^{\infty} x_n^2 \le 2^{-2N}\|x\|^2.$$

Отже,

$$\left\|A - A_N\right\| \le 2^{-2N},$$

тому

$$\lim_{N\to\infty}\left\|A - A_N\right\| = 0. \blacksquare$$

**Задача 15.4.** Якщо $A$ — лінійний компактний оператор, оператор $B$ — лінійний обмежений, то оператори $AB$ і $BA$ є компактними.

Доведення. Якщо множина $M \subset E$ є обмеженою, то $BM$ — обмежена множина, оскільки обмежений оператор переводить будь-яку обмежену множину в обмежену множину. Отже, множина $ABM$ є відносно компактною. Це означає, що оператор $AB$ є компактним. Аналогічно, якщо множина $M \subset E$ є обмеженою, то $AM$ — відносно компактна множина, оскільки компактний оператор переводить будь-яку обмежену множину у відносно компактну множину. Оператор $B$ — неперервний, тому множина $BAM$ є відносно компактною. Це означає, що оператор $BA$ є компактним. $\blacksquare$

**Задача 15.5.** Нехай $P$ — ортогональний проектор на замкнений підпростір $M$ гільбертового простору $H$. Доведіть, що 1) $P^2 = P$; 2) $I - P$ є ортогональним проектором на $M^{\perp}$, 3) $P$ — обмежене лінійне відображення на $H$, таке що $\|Px\| \le \|x\|$ і $\|P\| = 1$.

Доведення. В гільбертовому просторі $H$ будь-який елемент $x \in H$ можна записати як суму $x = u + v$, де $u \in M$ і $v \in M^{\perp}$. Ортогональний проектор визначається формулою $Px = u$.

1) $P^2x = Pu = u = Px$

2) $v = x - u = x - Px = \left(I - P\right)x \Rightarrow I - P$ є ортогональним проектором на $M^{\perp}$.

3) $u \perp v \Rightarrow \|x\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \Rightarrow \|Px\|^2 = \|v\|^2 \le \|x\|^2 \Rightarrow \|P\| \le 1$.

$Px = x \;\; \forall x \in M \Rightarrow \|Px\| = \|x\|$ для $\|x\| \ne 0 \Rightarrow \|P\| = 1$. $\blacksquare$