Урок 1. Топологічні структури. Відкриті і замкнені множини. Підпростори

Задача 1.1. Нехай $X = \{a, b\}$. Доведіть, що система множин $\tau = \{\varnothing, X, \{b\}\}$ утворює топологічну структуру в множині X і назвіть замкнені множини в топологічному просторі $X = \{a, b\}$.

Розв'язок. Перевіримо виконання аксіом топологічної структури.

1) $\varnothing, X \in \tau$.
2) Доведемо, що довільне об'єднання елементів τ належить τ. Розглянемо лише довільні об'єднання різних множин системи τ, оскільки варіанти, коли об'єднання складається з однієї й тієї ж множини є тривіальним випадком. Довільні об'єднання різних множин із τ можна класифікувати наступним чином.
   2.1. Якщо в об'єднання входить $\varnothing$, її можна відкинути і розглядати лише решту, оскільки $\forall A \quad \varnothing \bigcup A = A$.
   2.2. Решту об'єднань можна розділити на об'єднання, що містять X і такі, що не містять X.
      2.2.1. Об'єднання, що містять X, збігаються з X і тому належать τ.
      2.2.2. Об'єднання, що не містять X, збігаються з $\{b\}$ і тому належать системі τ.
3) Доведемо, що скінченні перетини множин із τ належать τ. Розділимо всі ці перетини на ті, що містять $\varnothing$ і ті, ще не містять цієї множини.
   3.1. Якщо перетин містить $\varnothing$, він дорівнює $\varnothing$, оскільки $\forall A \quad \varnothing \bigcap A = \varnothing$. Отже, він належить τ.
   3.2. Перетини, що не містять $\varnothing$, можна розділити на такі, що містять $\{b\}$ і такі, що не містять цієї множини.
      3.2.1. Перетини, що не містять ані $\varnothing$, ані $\{b\}$, дорівнюють X і належать системі τ.
      3.2.2. Перетини не містять ані $\varnothing$, ані X, дорівнюють $\{b\}$ і належать τ.

Отже, ми пересвідчились, що всі три аксіоми топологічної структури виконуються, тому множина τ є топологічною структурою.

Для того щоб знайти замкнені множини в топологічному просторі $X = \{a, b\}$, треба розглянути доповнення до відкритих множин, тобто елементів топологічної структури: $X \setminus \varnothing = X, \quad X \setminus X = \varnothing, \ X \setminus \{b\} = \{a\}$. Отже замкненими множинами є $\varnothing$, X, $\{a\}$.

Топологічна структура $\tau = \{\varnothing, X, \{b\}\}$ називається *зв'язною двокрапкою*. ■

Задача 1.2. Нехай $X = \{a, b\}$. Доведіть, що система множин $\tau = \left\{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{a\} \bigcup \{b\}\right\}$ утворює топологічну структуру в множині X і назвіть замкнені множини в топологічному просторі $X = \{a, b\}$.

Розв'язок. Перевіримо виконання аксіом топологічної структури.

1) $\varnothing, X \in \tau$.
2) Те, що довільне об'єднання елементів τ належить τ є очевидним фактом.
3) Доведемо, що скінченні перетини множин із τ належать τ. Розділимо всі ці перетини на ті, що містять $\varnothing$ і ті, ще не містять цієї множини.

3.1. Якщо перетин містить $\varnothing$, він дорівнює $\varnothing$, оскільки $\forall A \quad \varnothing \bigcap A = \varnothing$. Отже, він належить τ.

3.2. Перетини, що не містять $\varnothing$, можна розділити на такі, що містять X і такі, що не містять цієї множини.

3.2.1. Перетини, що не містять $\varnothing$, але містять X, дорівнюють $\{a\}$, $\{b\}$ або $\{a\} \bigcup \{b\}$.

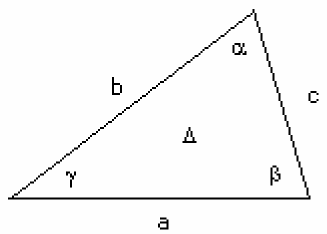
3.2.2. Перетини, що не містять ані $\varnothing$, ані X, являють собою перетини множин $\{a\}$, $\{b\}$ або $\{a\} \bigcup \{b\}$. Залежно від того, чи $a = b$ вони дорівнюють $\{a\}$ або $\{b\}$.

Отже, ми пересвідчились, що всі три аксіоми топологічної структури виконуються, тому множина τ є топологічною структурою.

Для того щоб знайти замкнені множини в топологічному просторі $X = \{a, b\}$, треба розглянути доповнення до відкритих множин, тобто елементів топологічної структури: $X \setminus \varnothing = X \in \tau,$ $X \setminus X = \varnothing \in \tau,$ $X \setminus \{a\} = \{b\} \in \tau,$ $X \setminus \{b\} = \{a\} \in \tau,$ $X \setminus \left(\{a\} \bigcup \{b\}\right) =$ $X \setminus \{a\} \bigcap X \setminus \{b\}$= $\{a\} \bigcap \{b\} \in \tau$. Отже, замкненими множинами є $\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{a\} \bigcup \{b\}$. Топологічна структура $\tau = \left\{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{a\} \bigcup \{b\}\right\}$ називається *простою двокрапкою*. Як бачимо, вона складається із множин, які одночасно є і відкритими, і замкненими. ■

Задача 1.3. (Топологія трикутника.) Розглянемо множину $X = \left\{a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \Delta\right\}$ і топологічну структуру $\tau = \left\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, \bigcup\limits_{i \in \{1,\dots,9\}} X_i\right\}$, де $X_1 = \varnothing$, $X_2 = X$, $X_3 = \left\{\alpha, b, c, \Delta\right\}$, $X_4 = \left\{\beta, a, c, \Delta\right\}$, $X_5 = \left\{\gamma, a, b, \Delta\right\}$, $X_6 = \left\{a, \Delta\right\}$, $X_7 = \left\{b, \Delta\right\}$, $X_8 = \left\{c, \Delta\right\}$, $X_9 = \left\{\ \Delta\right\}$. Назвіть одноточкові замкнені множини в цій топології.

Розв'язок. Ця топологія називається топологією трикутника, тому що елементи множини X можна інтерпретувати як сторони трикутника a, b і c, кути між сторонами трикутника α, β і γ, а також сам трикутник Δ (див. рисунок).



Для того щоб розв'язати задачу, перевіримо всі одноточкові множини.

Чи можна стверджувати, що $\{a\}$ — замкнена множина? Для цього треба з’ясувати властивості її доповнення $X \setminus \{a\} = \left\{b,\, c,\, \alpha,\, \beta,\, \gamma,\, \Delta\right\}$. Якщо ми доведемо, що цю множину неможливо подати як об’єднання відкритих множин, то покажемо, що множина $\{a\}$ є не замкненою. Дійсно, для утворення множини $X \setminus \{a\} = \left\{b,\, c,\, \alpha,\, \beta,\, \gamma,\, \Delta\right\}$ нам потрібні множини, що містять її елементи, але водночас не містять точку a. Виявляється, що точки b, c, α и Δ можна знайти в множині $X_3 = \left\{\alpha,\, b,\, c,\, \Delta\right\}$, але ми не можемо знайти точки β і γ, уникнувши точки a (див. множини X_4 і X_5). Аналогічно можна довести, що множини $\{b\}$, $\{c\}$ і $\{\Delta\}$ не є замкненими.

З іншого боку,

$$X \setminus \{\alpha\} = \left\{a,\, b,\, c,\, \beta,\, \gamma,\, \Delta\right\} = X_4 \cup X_5,$$

$$X \setminus \{\beta\} = \left\{a,\, b,\, c,\, \alpha,\, \gamma,\, \Delta\right\} = X_3 \cup X_5,$$

$$X \setminus \{\gamma\} = \left\{a,\, b,\, c,\, \alpha,\, \beta,\, \Delta\right\} = X_3 \cup X_4.$$

Отже, замкненими одноточковими множинами в топології трикутника є множини $\{\alpha\}$, $\{\beta\}$ і $\{\gamma\}$. ■

Задача 1.4. Нехай (X,τ) — топологічний простір, $M \subset X$. Доведіть, що (M,τ_M), де $\tau_M = \left\{U_M^{(\alpha)} = U_\alpha \cap M,\, U_\alpha \in \tau\right\}$, є топологічним простором.

Розв’язок. Перевіримо виконання аксіом топологічного простору.

1). $\varnothing = \varnothing \cap M \in \tau_M$, $M = M \cap X \in \tau_M$.

2). $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_M^{(\alpha)} = \bigcup\limits_{\alpha \in A} \left(U_\alpha \cap M\right) = M \cap \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau_M$.

3). $\bigcap\limits_{\alpha=1}^{n} U_M^{(\alpha)} = \bigcap\limits_{\alpha=1}^{n} \left(M \cap U_\alpha\right) = M \cap \bigcap\limits_{\alpha=1}^{n} U_\alpha \in \tau_M$.

Топологічна структура τ_M називається топологією в M, індукованою топологічним простором (X,τ), а топологічний простір (M,τ_M) називається підпростором простору (X,τ). ■

Задача 1.5. Доведіть, що для того щоб довільна відкрита множина B в підпросторі (A,τ_A) була відкритою в просторі (X,τ_X) необхідно і достатньо, щоб множина A сама була відкритою в просторі (X,τ_X).

Розв’язок. Запишемо формально, що треба довести.

Дано: $B \in (A,\tau_A)$, $B \subseteq A \subseteq X$, $B \in \tau_A$.

Довести: $B \in \tau_X \Leftrightarrow A \in \tau_X$.

Необхідність. $B \in \tau_X \Rightarrow A \in \tau_X$?

$\forall B \subseteq A \subseteq X \; B \in \tau_X \Rightarrow A \overset{def}{=} B \in \tau_X$.

Інакше кажучи, якщо будь-яка підмножина множини A є відкритою в топології τ_X, то відкритою в ній є і сама множина A, яка, безперечно, є підмножиною самої себе.

Достатність. $A \in \tau_X \Rightarrow B \in \tau_X$?

$A \in \tau_X, B \in \tau_A \Rightarrow A \in \tau_X, \exists U \in \tau_X : B = A \bigcap U \Rightarrow B \in \tau_X.$

Інакше кажучи, з огляду на те, що множина B є елементом індукованої топології τ_A, існує множина U, відкрита в топології τ_X, така що $B = A \bigcap U$. З урахуванням того, що за умовою множина A є відкритою в топології τ_X, множина B є перетином двох множин, відкритих в топології τ_X, тобто за третьою аксіомою топологічної структури, є відкритою в топології τ_X. ■

Задача 1.6. Доведіть, що підмножина M множини A є замкненою в просторі (A, τ_A) тоді і лише тоді, коли вона є перетином A і деякої замкненої в X множини.

Розв'язок. Запишемо, що треба довести.

Дано: $M \subseteq A \subseteq X$.

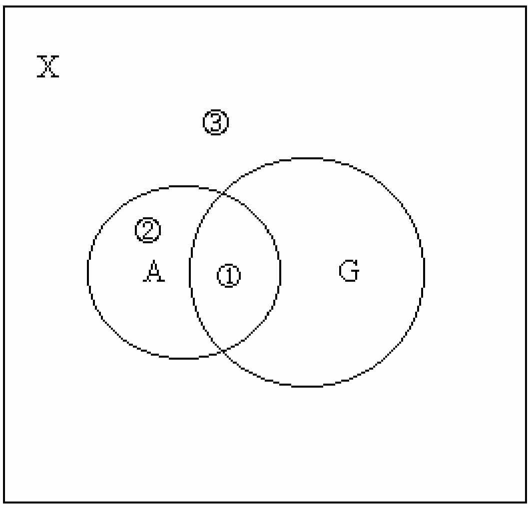
Довести. $A \setminus M \in \tau_A \Leftrightarrow \exists F \subset X : X \setminus F \in \tau_X, M = F \bigcap A.$

Необхідність.

$\forall M \subseteq A \subseteq X, A \setminus M \in \tau_A \Rightarrow \exists F \subset X : X \setminus F \in \tau_X, M = F \bigcap A$?

$A \setminus M \in \tau_A \Rightarrow \exists N \in \tau_A : M = A \setminus N \Rightarrow \exists G \in \tau_X : M = A \setminus (A \bigcap G)$, $A \setminus G \subseteq X \setminus G \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists G \in \tau_X : M = A \bigcap (X \setminus G).$



① — $A \bigcap G$

② — $M = A \setminus (A \bigcap G)$

③ — $X \setminus G$

Інакше кажучи, нехай множина M є замкненою в просторі (A, τ_A). Із цього випливає, що вона є доповненням до деякої множини N, яка є елементом топології τ_A і має вигляд $A \bigcap G$, де G — деяка множина, відкрита в топології τ_X. Зважаючи на те, що $A \setminus (A \bigcap G) = A \setminus G$ і те що $A \subseteq X$, маємо, що $A \setminus G \subseteq X \setminus G$ і $M = A \bigcap (X \setminus G)$. Оскільки множина G є відкритою в топології τ_X, її доповнення є замкненою. Таким чином, ми подали довільну замкнену підмножину M множини $A \subseteq X$ як перетин множини A і множини, замкненої в топології τ_X.

Достатність.

$\forall M \subseteq A \subseteq X \; \exists F \subset X : X \setminus F \in \tau_X, M = F \bigcap A \Rightarrow A \setminus M \in \tau_A$?

$$\exists F \subset X : X \setminus F \in \tau_X, M = F \bigcap A \Rightarrow \exists G \in \tau_X : M = A \bigcap (X \setminus G),\; A \subseteq X \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A \setminus M = A \setminus \big(A \bigcap (X \setminus G)\big) = A \bigcap G \Rightarrow A \setminus M \in \tau_A.$$

Інакше кажучи, припустимо, що множину M можна подати як перетин множини A і множини F, замкненої в топології τ_X. Оскільки множина F є замкненою в топології τ_X, її доповнення G є відкритою в топології τ_X. Отже, множину M можна подати як перетин $M = A \bigcap (X \setminus G)$. Таким чином, доповнення до множини M в топології τ_A є доповненням множини $A \bigcap (X \setminus G)$ до множини A. Зважаючи на те, що $A \subseteq X$, маємо, що $A \setminus M = A \bigcap G$, тобто належить індукованій топології τ_A, тобто множина M є замкненою. ■

Задача 1.7. Доведіть рівність $\overline{A} = A \bigcup A'$?.

Розв'язок. Доведемо взаємні включення.

$$\overline{A} \subset A \bigcup A' ?$$

1) $x \in \overline{A}, x \in A \Rightarrow x \in A \bigcup A'$.

2) $x \in \overline{A}, x \notin A \Rightarrow A \setminus \{x\} = A, x \in \overline{A \setminus \{x\}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall O(x) \in \tau \quad O(x) \bigcap A \setminus \{x\} \neq \varnothing \Rightarrow x \in A' \Rightarrow x \in A \bigcup A'$

$$A \bigcup A' \subset \overline{A} ?$$

1) $x \in A \bigcup A', x \in A \Rightarrow x \in \overline{A}$.

2) $x \in A \bigcup A', x \notin A \Rightarrow x \in A' \Rightarrow x \in \overline{A \setminus \{x\}} \subset A \subset \overline{A}$. ■

Задача 1.8. Доведіть, що в топологічному просторі (X, τ) множина M є замкненою тоді і лише тоді, коли вона містить всі свої граничні точки, тобто $M' \subset M : M = \overline{M} \Leftrightarrow M' \subset M.$

Розв'язок. Необхідність. Припустимо, що множина M є замкненою. Отже, за означенням, вона збігається із своїм замиканням: $M = \overline{M}$. Це означає, що вона містить всі свої точки дотику. Кожна гранична точка множини є її точкою дотику. Таким чином, множина M містить всі свої граничні точки

Достатність. Для того щоб довести твердження згадаємо, що $\overline{M} = M \bigcup M'$. Отже, якщо $M' \subset M$, то $M = \overline{M}$. ■

Задача 1.9. Наведіть приклад топологічного простору (X,τ) і його множини $M \subseteq X$, в якому множина M' граничних точок множини M не є замкненою.

Розв'язок 1. Розглянемо числову пряму $\mathbb{R}$ із топологією $\tau = \{\varnothing, \mathbb{R}, (-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$. Похідна множина множини $\{0\}$ є промінь $(0,\infty)$, який не є ані відкритою, а ні замкненою множиною у цій топології.

Розв'язок 2. (С.Кравченко). Розглянемо носій $X = \{a,b\}$ із тривіальною топологією $\tau = \{\varnothing, X\}$. Похідна множина множини $\{a\}$ є множина $\{b\}$, яка не є ані відкритою, а ні замкненою.

Розв'язок 3. (S.Lipschuts). Розглянемо носій $X = \{a,b,c,d,e\}$ із топологією $\tau = \{\varnothing, X, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$. Тоді $\{a,b,c\}' = \{b,d,e\}$, яка не є замкненою множиною, оскільки її доповнення $\{a,c\}$ не належить топології. ■

Задача 1.10. Доведіть, що похідна множина будь-якої скінченої множини в дискретній топології є порожньою.

Розв'язок. Оскільки $(A \cup B) = A' \cup B'$ і скінченну множину можна подати як скінченне об'єднання одноточкових множин, похідна множина яких є порожньою, похідна множина скінченної множини є порожньою. ■

Задача 1.11. Доведіть, що похідна множина будь-якої множини в дискретній топології не зміниться, якщо до цієї множини додати або відняти скінчену кількість точок.

Розв'язок. Оскільки $(A \setminus \{x\})' = A' = (A \cup \{x\})'$, то похідна множина будь-якої множини не зміниться, якщо до цієї множини додати або відняти скінчену кількість точок.

Урок 2. Внутрішність множини, ніде не щільні і скрізь щільні множини, межа множини

Означення 2.1. *Нехай* X — *довільна множина. Відображення* $\mathrm{cl}: 2^X \to 2^X$ *називається* ***оператором замикання Куратовського на X****, якщо воно задовольняє наступні умови* (***аксіоми Куратовського****):*
К.1. $\mathrm{cl}(M \bigcup N) = \mathrm{cl}(M) \bigcup \mathrm{cl}(N)$ (аддитивність);
К.2. $M \subset \mathrm{cl}(M)$;
К.3. $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(M)) = \mathrm{cl}(M)$ (ідемпотентність);
К.4. $\mathrm{cl}(\varnothing) = \varnothing$.

Означення 2.2. *Нехай* X — *довільна множина. Відображення* $\mathrm{cl}: 2^X \to 2^X$ *називається* ***оператором взяття внутрішності множини X****, якщо воно задовольняє наступні умови:*
К.1. $\mathrm{Int}(M \bigcap N) = \mathrm{Int}(M) \bigcap \mathrm{Int}(N)$ (аддитивність);
К.2. $\mathrm{Int}(M) \subset M$;
К.3. $\mathrm{Int}(\mathrm{Int}(M)) = \mathrm{Int}(M)$ (ідемпотентність);
К.4. $\mathrm{Int}(\varnothing) = \varnothing$.

Теорема. Множина топологічного простору є відкритою тоді і лише тоді, коли разом з кожною точкоювона містить і деякий її окіл.

Доведення. Необхідність. Нехай (X,τ) — топологічний простір і $A \in \tau$. Візьмемо довільну точку $x \in A$. Оскільки $A \in \tau$, то околом точки x, що міститься в множині A, є сама множина A.

Достатність. Нехай $A \subset X$ і $\forall x \in A \, \exists O(x) \subset A$. Позначимо $E = \bigcup_{x \in A} O(x)$. Тоді $E \in \tau$ як об’єднання відкритих множин і $E \subset A$. Покажемо, що $A \subset E$. Якщо $x \in A$, то x належить деякому околу $O(x) \in E$. Отже, $x \in E$. Таким чином, $A = E \in \tau$. □

Задача 2.1. Нехай (X,τ) – топологічний простір і $M \subseteq X$. Доведіть рівність

$$X \setminus IntM = \overline{X \setminus M}. \tag{2.1}$$

Розв’язок.

1). Покажемо, що $\forall M \subseteq X$

$$X \setminus IntM \subseteq \overline{X \setminus M}.$$

$$x \in X \setminus IntM \Rightarrow x \in X, x \notin IntM \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in X, \forall O(x) \in \tau \;\; O(x) \bigcap (X \setminus M) \neq \varnothing \Rightarrow x \in \overline{X \setminus M}.$$

2). Покажемо, що $\forall M \subseteq X$

$$\overline{X \setminus M} \subseteq X \setminus IntM.$$

$$x \in \overline{X \setminus M} \Rightarrow \forall O(x) \in \tau \;\; O(x) \bigcap X \setminus M \neq \varnothing \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall O(x) \in \tau \;\; O(x) \not\subset Int\, M \Rightarrow x \in X \setminus IntM.$$

Коментар. Доведення рівності зводиться до доведення двох протилежних включень.

1). Якщо точка x належить доповненню внутрішності множини M, то довільний окіл цієї точки перетинається з доповненням до множини M, адже інакше існував би окіл точки x, який не перетинався б з доповненням до множини M, а значить, цілком би лежав в множині M, тобто точка x була б внутрішньою, що суперечить умові. Отже, точка x є точкою дотику множини $X\setminus M$.

2). Якщо точка x належить множині $\overline{X\setminus M}$, то вона є точкою дотику множини $X\setminus M$. Це означає, що її довільний окіл перетинається з множиною $X\setminus M$. З цього випливає, що жодний окіл точки x не може належати внутрішності множини M, адже в цьому випадку він не перетинався би з множиною $X\setminus M$. ■

Зауваження. Якщо (X,τ) – топологічний простір і $B\subseteq A\subseteq X$, то

$$A\setminus Int\ B=\overline{A\setminus B}.$$

Задача 2.2. Нехай (X,τ) – топологічний простір і $M\subseteq X$. Доведіть рівність

$$X\setminus\overline{M}=Int\left(X\setminus M\right). \qquad (2.2)$$

Розв'язок.

1). Покажемо, що $\forall M\subseteq X$

$$X\setminus\overline{M}\subseteq Int\left(X\setminus M\right).$$

$$x\in X\setminus\overline{M}\ \Rightarrow x\in X,\, x\notin\overline{M}\ \Rightarrow \exists O(x)\in\tau\ \ O(x)\cap M=\varnothing\Rightarrow x\in Int\left(X\setminus M\right).$$

2). Покажемо, що $\forall M\subseteq X$

$$Int\left(X\setminus M\right)\subseteq X\setminus\overline{M}.$$

$$x\in Int\left(X\setminus M\right)\ \Rightarrow \exists O(x)\in\tau\ \ O(x)\subset\left(X\setminus M\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\exists O(x): O(x)\cap M=\varnothing\Rightarrow x\notin\overline{M}\ \Rightarrow x\in X\setminus\overline{M}.$$

Коментар. Доведення рівності зводиться до доведення двох протилежних включень.

1). Якщо точка належить множині $X\setminus\overline{M}$, то вона не є точкою дотику. Отже, існує її окіл, що не перетинається з множиною M. З цього випливає, що множина x є внутрішньою точкою множини $X\setminus M$.

2). Якщо точка x є внутрішньою точкою множини $X\setminus M$, то існує її окіл, що цілком міститься в цій множині. Цей окіл не перетинається з множиною M, тобто точка x не є точкою дотику множини M. З цього випливає, що ця точка не належить замиканню множини M, тобто лежить в множині $X\setminus\overline{M}$. ■

Зауваження. Якщо (X,τ) – топологічний простір і $B\subseteq A\subseteq X$, то

$$A\setminus\overline{B}=Int\left(A\setminus B\right).$$

Задача 2.3. Нехай (X,τ) – топологічний простір і $M\subseteq X$. Доведіть, що 1) $IntM$ є найбільшою відкритою множиною, що міститься в множині M і 2) $IntM$ об'єднанням всіх відкритих підмножин множини M.

Розв'язок.

1). $A\in\tau,\, A\subset M\ \Rightarrow A=\bigcup\limits_{x\in A}O(x)\subset\bigcup\limits_{x\in M}O(x),\ O(x)\subset A\subset M, O(x)\in\tau\Rightarrow$

$\Rightarrow\ A\subset IntM.$

2). $IntM = \bigcup_{\alpha} G_\alpha, G_\alpha \in \tau, G_\alpha \subset M$.

2.1). $IntM \subseteq \bigcup_{\alpha} G_\alpha, G_\alpha \in \tau, G_\alpha \subset M$.

$x \in IntM \Rightarrow \exists O(x) \in \tau:\ O(x) \subset M \Rightarrow x \in \bigcup_{x \in M} O(x)$.

2.2). $\bigcup_{\alpha} G_\alpha \subseteq IntM, G_\alpha \in \tau, G_\alpha \subset M$.

$x \in \bigcup_{\alpha} G_\alpha \Rightarrow \exists G_\alpha \subset M, x \in G_\alpha \in \tau \Rightarrow x \in IntM$. ■

Задача 2.4. Нехай (X,τ) – топологічний простір і $M \subseteq X$. Доведіть рівність

$$IntM = X \setminus \overline{X \setminus M}.$$

Розв’язок. Прямий спосіб (другий спосіб – див. задачу 2.1).

1). $\forall A \in (X,\tau)\ A \subset \overline{A} \Rightarrow X \setminus M \subset \overline{X \setminus M} \Rightarrow X \setminus \overline{X \setminus M} \subset X \setminus (X \setminus M) = M$.

$X \setminus \overline{X \setminus M} \in \tau,\ X \setminus \overline{X \setminus M} \subset M \Rightarrow X \setminus \overline{X \setminus M} \subset IntM$.

2). $\forall U \subset M, U \in \tau\ \ X \setminus M \subset X \setminus U = \overline{X \setminus U} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{X \setminus M} \subset \overline{\overline{X \setminus U}} = \overline{X \setminus U} = X \setminus U \Rightarrow U \subset X \setminus \overline{X \setminus M}$.

$U \subset Int\ M \Rightarrow IntM \subset X \setminus \overline{X \setminus M}$.

Коментар. Доведення рівності зводиться до доведення двох протилежних включень.

1). Оскільки будь-яка множина міститься в своєму замиканні, то доповнення множини M міститься в множині $\overline{X \setminus M}$. За властивостями операції доповнення для множин $X \setminus \overline{X \setminus M}$ і $X \setminus (X \setminus M)$ мають місце обернені включення. Крім того, $X \setminus (X \setminus M) = M$. Оскільки множина $X \setminus \overline{X \setminus M}$ є доповненням до замикання, вона є відкритою множиною і міститься в множині M, а найбільшою відкритою множиною, що міститься в множині M є її внутрішність. Отже, $X \setminus \overline{X \setminus M} \in IntM$.

2). Розглянемо довільну відкриту множину U, що міститься в M. За властивостями операції доповнення множини M міститься в доповненні множини U. В свою чергу, доповнення множини U є замкненим, оскільки множина U є відкритою. Отже, доповнення множини U співпадає із своїм замиканням. Застосуємо до включення, що ми отримали, операцію замикання. З огляду на властивість монотонності замикання, замикання доповнення множини M міститься в замиканні замикання доповнення множини U. Внаслідок ідемпотентності операції замикання маємо, що замикання замикання доповнення множини U співпадає із замиканням доповнення множини U, що в свою чергу співпадає з доповненням множини U. Беручи доповнення до лівої і правої частин включення, отримуємо, що $U \subset X \setminus \overline{X \setminus M}$. Тепер зважимо на те, що множина U є довільною і все, що вище доведено виконується і для множини $IntM$. Отже, $IntM \subset X \setminus \overline{X \setminus M}$. ■

Задача 2.5. Доведіть, що множина A топологічного простору (X,τ) є скрізь щільною в X тоді і лише тоді, коли $A \cap U \neq \varnothing$ для довільної непорожньої відкритої множини в X множини U.

$$\overline{A} = X \Leftrightarrow \forall U \in \tau, U \neq \varnothing\ \ A \cap U \neq \varnothing.$$

Розв’язок. Необхідність.

$\overline{A} = X \Rightarrow \forall x \in X \ \forall O(x) \in \tau \ \ O(x) \cap A \neq \varnothing$

$\forall x \in U \ \ U \overset{\Delta}{=} O(x), U \neq \varnothing \Rightarrow \ A \cap U \neq \varnothing$

Достатність.

$\forall U \in \tau, U \neq \varnothing \ \ A \cap U \neq \varnothing \Rightarrow \ \forall x \in X \ \forall O(x) \in \tau \ \ O(x) \cap A \neq \varnothing \Rightarrow \overline{A} = X$.

Коментар. Необхідність. Припустимо, що множина A є скрізь щільною в X. Це означає, що її замикання співпадає з множиною X, тобто кожна точка множини X є точкою дотику множини A. За означенням точки дотику множини A, кожний її окіл перетинається з A. З іншого боку, будь-яка непорожня відкрита множина U є околом кожної своєї точки. Оскільки будь-яка точка множини X є точкою дотику множини A, то і точки множини U є точками дотику множини A, а значить, множина U є околом точок дотику множини A і, за означенням, повинна перетинатися з A.

Достатність. Припустимо, що довільна непорожня відкрита множина U перетинається з множиною A. Це означає, що яку б точку x з множини X ми не взяли б, будь-який її окіл (тобто відкрита множина, що містить точку x) перетинається з множиною A. З цього випливає, що всі точки x з множини X є точками дотику множини A. Отже, $\overline{A} = X$. ■

Задача 2.6. Доведіть, що множина A топологічного простору (X, τ) є ніде не щільною в X тоді і лише тоді, коли $Int\ \overline{A} = \varnothing$.

$$\forall U \in \tau, U \neq \varnothing \ \ U \setminus \overline{A} \neq \varnothing \Leftrightarrow Int\ \overline{A} = \varnothing.$$

Розв’язок. Необхідність.

$\forall U \in \tau, U \neq \varnothing \ \ U \cap \left(X \setminus \overline{A}\right) \neq \varnothing \Rightarrow \forall U \in \tau, U \neq \varnothing \ \exists x \in U : x \in X \setminus \overline{A}$.

?! $Int\overline{A} \neq \varnothing \Rightarrow \forall x \in Int\overline{A} \ \exists O(x) \in \tau : O(x) \subseteq \overline{A} \Rightarrow \forall y \in O(x) \ y \in \overline{A}$ **?!** $\Rightarrow$

$\Rightarrow Int\overline{A} = \varnothing.$

Достатність.

?! $\exists U \in \tau, U \neq \varnothing : U \setminus \overline{A} = \varnothing \Rightarrow U \subseteq Int\overline{A}, U \neq \varnothing$ **?!** $\Rightarrow Int\overline{A} \neq \varnothing$

Коментар. Необхідність. Припустимо, що множина A топологічного простору (X, τ) є ніде не щільною в X. За означенням, множина називається ніде не щільною, якщо вона не є щільною в довільній непорожній відкритій множині U, тобто в кожній непорожній відкритій множині є точка, яка не є точкою дотику множини A. Якщо внутрішність замикання ніде не щільної множини A була б непорожньою, то будь-яка точка цієї *відкритої* множини була б точкою дотику. Але за означенням в цій множині повинна міститись точка, яка *не є* точкою дотику множини A. Отже, якщо множина A є ніде не щільною, то внутрішність її замикання є порожньою.

І навпаки, нехай внутрішність замикання множини A є порожньою. Припустимо, що множина A все ж таки не є ніде не щільною, тобто в X існує непорожня відкрита множина U, кожна точка якої є точкою дотику множини A. Тоді точки множини U є внутрішніми точками множини A. Але за умовою внутрішність множини A є порожньою. ■

Задача 2.7. Доведіть, що множина A топологічного простору (X,τ) є ніде не щільною в X тоді і лише тоді, коли довільна непорожня відкрита множина в X містить непорожню відкриту множину, в якій немає точок A.

$$Int\ \overline{A}=\varnothing \Leftrightarrow \forall U\in\tau, U\neq\varnothing\ \exists W\subset U, W\in\tau, W\neq\varnothing : A\bigcap W=\varnothing.$$

Розв'язок. Необхідність.

$Int\ \overline{A}=\varnothing, U\in\tau, U\neq\varnothing \Rightarrow \exists x\in U\setminus\overline{A} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists V\in\tau, V\neq\varnothing, x\in V : A\bigcap V=\varnothing.$

$W\triangleq V\bigcap U \Rightarrow W\subset U,\ W\subset V \Rightarrow W\bigcap A=\varnothing.$

Достатність.

?! $\forall U\in\tau, U\neq\varnothing\ \exists V\subset U, V\in\tau, V\neq\varnothing : A\bigcap V=\varnothing$, $U\triangleq Int\ \overline{A}\neq\varnothing \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists W\subset Int\overline{A} : A\bigcap W=\varnothing \Rightarrow \forall x\in W\ x\in Int\overline{A}, x\in X\setminus Int\overline{A}$ **!?** $\Rightarrow Int\ \overline{A}=\varnothing.$

Коментар. Необхідність. Нехай множина A топологічного простору (X,τ) є ніде не щільною в X. Розглянемо довільну відкриту множину U в X. Із означення ніде не щільної множини випливає, що в множині U є точка x, яка не є точкою дотику множини A. Це означає, що існує окіл V точки x, що не перетинається з множиною A. Але із цього ще не випливає, що саме цей окіл міститься в множині U. Отже, утворимо множину W, що є перетином множин V і U. Оскільки ця множина V не перетинається з множиною A, то і W не перетинається з множиною A. Одночасно, множина W є підмножиною множини U. Таким чином, ми довели, що в довільній непорожній відкритій множині в X існує непорожня відкрита підмножина, що не містить точок множини A.

Достатність. Припустимо, що довільна непорожня відкрита множина в X містить непорожню відкриту множину, в якій немає точок A, але внутрішність замикання множини A не є порожньою. Оскільки внутрішність замикання є відкритою множиною, то за умовою в ній повинна міститись підмножина W, що не перетинається з A. Отже, довільна точка x множини W, з одного боку, належить внутрішності множини A, а з іншого, належить її доповненню. Отримано суперечність. Отже, внутрішність замикання множини A порожня. ■

Задача 2.8. Доведіть, що множина A в топологічному просторі (X,τ) є ніде не щільною в X тоді і лише тоді, коли доповнення її замикання скрізь щільне в X .

$$Int\ \overline{A}=\varnothing \Leftrightarrow \overline{X\setminus\overline{A}}=X.$$

Розв'язок. Необхідність. (Див. задачу 2.1).

$Int\ \overline{A}=\varnothing \Rightarrow \overline{X\setminus\overline{A}}=X\setminus Int\ \overline{A}=X.$

Достатність.

$X=\overline{X\setminus\overline{A}}=X\setminus Int\ \overline{A} \Rightarrow Int\ \overline{A}=\varnothing$. ■

Задача 2.9. Доведіть, що відкрита множина $A\subseteq X$ є скрізь щільною тоді і лише тоді, коли $X\setminus A$ є ніде не щільною.

$$\overline{A}=X, A\in\tau \Leftrightarrow Int\left(\overline{X\setminus A}\right)=\varnothing.$$

Розв'язок. Необхідність.

$\overline{A} = X,\ A \in \tau \Rightarrow Int\left(\overline{X \setminus A}\right) = Int\left(X \setminus A\right) = Int\left(\overline{A} \setminus A\right) = \overline{A} \setminus \overline{A} = \varnothing.$

Достатність. (Див. задачу 2.2).

$Int\left(\overline{X \setminus A}\right) = \varnothing \Rightarrow Int\left(X \setminus A\right) = \varnothing.$

$X = X \setminus \varnothing = X \setminus Int\left(X \setminus A\right) = \overline{X \setminus X \setminus A} = \overline{A}.$

Коментар. Необхідність. Припустимо, що відкрита множина $A \subseteq X$ є скрізь щільною і розглянемо внутрішність замикання її доповнення, прагнучи довести, що вона порожня. Оскільки A — відкрита множина, то $X \setminus A$ — замкнена множина, отже, $X \setminus A = \overline{X \setminus A}$. Звідси випливає, що $Int\left(\overline{X \setminus A}\right) = Int\left(X \setminus A\right)$. З іншого боку, множина A є скрізь щільною, то $X = \overline{A}$. Отже, $Int\left(X \setminus A\right) = Int\left(\overline{A} \setminus A\right)$. Крім того, різниця між замкненою і відкритою множиною є відкритою. З цього випливає, що $Int\left(\overline{A} \setminus A\right) = \overline{A} \setminus \overline{A} = \varnothing.$

Достатність. Нехай множина $X \setminus A$ є ніде не щільною, тобто $Int\left(\overline{X \setminus A}\right) = \varnothing.$ Оскільки множина A є відкритою, то $X \setminus A$ є замкненою множиною і $\overline{X \setminus A} = X \setminus A.$ Отже, $Int\left(\overline{X \setminus A}\right) = Int\left(X \setminus A\right) = \varnothing$. Отже, множину X можна подати як $X = X \setminus Int\left(X \setminus A\right)$. За формулою (2.2) маємо, що $X \setminus Int\left(X \setminus A\right) = \overline{X \setminus X \setminus A} = \overline{A}.$

Розглянемо ще один спосіб розв’язку цієї задачі, що базується на використанні закону заперечення. Припустимо, що множина $X \setminus A$ не є ніде не щільною, тобто є щільною в деякій непорожній відкритій множині: $\exists U \in \tau : \overline{X \setminus A} \supset U$. Але множина $X \setminus A$ є замкненою, тобто $X \setminus A = \overline{X \setminus A}.$ Отже, $\exists U \in \tau : X \setminus A \supset U$. Таким чином, в X існує відкрита множина U, яка не перетинається з множиною $A.$ Тоді будь-яка точка множини U не буде точкою дотику множини A, що суперечить умові $\overline{A} = X$.

І навпаки, припустимо, що відкрита множина A не є скрізь щільною, тобто в X існує точка x, яка не є точкою дотику множини A. Тоді існує окіл U точки x, який не перетинається з множиною A, тобто цілком міститься в множині $Int\left(X \setminus A\right)$. Оскільки множина A є відкритою, множина $X \setminus A$ є замкненою, тобто $X \setminus A = \overline{X \setminus A}.$ таким чином, $Int\left(X \setminus A\right) = Int\left(\overline{X \setminus A}\right) \neq \varnothing.$ ■

Задача 2.10. Доведіть, що перетин скінченої кількості відкритих скрізь щільних в X множин є скрізь щільним.

$$G_\alpha \in \tau, \overline{G}_\alpha = X \Rightarrow \overline{\bigcap_{\alpha=1}^{n} G_\alpha} = X.$$

Розв’язок.

$A \in \tau,\ \overline{A} = X \Rightarrow \overline{X \setminus \overline{A}} = X.$

$A \in \tau,\ \overline{A} = X,\ B \in \tau,\ \overline{B} = X \overset{2.8}{\Leftrightarrow} \overline{X \setminus \left(\overline{A \cap B}\right)} = X.$

$\overline{A\cap B}\subset\bar{A}\cap\bar{B}\ \Rightarrow\ X\setminus\overline{A\cap B}\supset X\setminus\left(\bar{A}\cap\bar{B}\right)\ \Rightarrow$

$\overline{X\setminus\overline{A\cap B}}\supset\overline{X\setminus\left(\bar{A}\cap\bar{B}\right)}=\overline{X\setminus\bar{A}\cup X\setminus\bar{B}}=\overline{X\setminus\bar{A}}\cup\overline{X\setminus\bar{B}}=X\cup X=X\ \Rightarrow\Rightarrow$

$\overline{X\setminus\overline{A\cap B}}=X.$

Коментар. Щоб розв’язати задачу, зведемо скінчений перетин множин до послідовності попарних перетинів і розглянемо перетин двох відкритих і скрізь щільних множин. Для цього скористаємось задачею 2.8 і доведемо, що доповнення до перетину двох відкритих скрізь щільних множин A і B є ніде не щільним, тобто $\overline{X\setminus\overline{A\cap B}}=X$. Для цього зауважимо, що $\overline{A\cap B}\subset\bar{A}\cap\bar{B}$ і з властивістю доповнення $X\setminus\overline{A\cap B}\supset X\setminus\left(\bar{A}\cap\bar{B}\right)$. Використовуючи властивості монотонності і аддитивності замикання доходимо висновку, що $\overline{X\setminus\overline{A\cap B}}=X$. ■

Задача 2.11. Доведіть, рівність

$$Fr\,M=\bar{M}\setminus IntM=\left(\bar{M}\setminus M\right)\cup\left(M\setminus Int\,M\right).$$

Розв’язок.

1). $Fr\,M=\bar{M}\setminus IntM$?

$X\setminus Fr\,M=X\setminus\left(\bar{M}\cap\overline{X\setminus M}\right)=$

$=X\setminus\bar{M}\cup X\setminus\overline{X\setminus M}=X\setminus\bar{M}\cup Int\,M$.

$Fr\,M=X\setminus\left(X\setminus\bar{M}\cup Int\,M\right)=X\setminus X\setminus\bar{M}\cap X\setminus Int\,M=$

$=\bar{M}\cap X\setminus Int\,M=\bar{M}\setminus Int\,M.$

2). $Fr\,M=\left(\bar{M}\setminus M\right)\cup\left(M\setminus Int\,M\right)$?

$Fr\,M=\bar{M}\cap\overline{X\setminus M}=\bar{M}\cap\overline{X\setminus M}\cap X=$

$=\bar{M}\cap\overline{X\setminus M}\cap\left(M\cup\left(X\setminus M\right)\right)=$

$=\left[\left(\bar{M}\cap\overline{X\setminus M}\right)\cap M\right]\cup\left[\left(\bar{M}\cap\overline{X\setminus M}\right)\cap\left(X\setminus M\right)\right]=$

а) $M\subset\bar{M}\ \Rightarrow\ \left(\bar{M}\cap\overline{X\setminus M}\right)\cap M=M\cap\overline{X\setminus M},$

б) $X\setminus M\subset\overline{X\setminus M}\ \Rightarrow\ \left(\bar{M}\cap\overline{X\setminus M}\right)\cap\left(X\setminus M\right)=\bar{M}\cap X\setminus M.$

а), б) $\Rightarrow\ Fr\,M=\left(M\cap\overline{X\setminus M}\right)\cup\left(\bar{M}\cap X\setminus M\right).$

в) $X\setminus\left(M\cap\overline{X\setminus M}\right)=\left(X\setminus M\right)\cup X\setminus\overline{X\setminus M}\ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ M\cap\overline{X\setminus M}=\left(X\setminus M\right)\cap X\setminus Int\,M=M\setminus Int\,M.$

г) $\bar{M}\cap X\setminus M=\bar{M}\setminus M.$

в), г) $\Rightarrow\ Fr\,M=\left(\bar{M}\setminus M\right)\cup\left(M\setminus Int\,M\right).$

Коментар. Доведемо рівності за схемою 1 ⇔ 2, 1 ⇔ 3.

1). Розглянемо доповнення до межі: $X\setminus Fr\,M$. За означенням $Fr\,M=\bar{M}\cap\overline{X\setminus M}$. Отже, $X\setminus Fr\,M=X\setminus\left(\bar{M}\cap\overline{X\setminus M}\right)$. За принципом двоїстості,

$X\setminus\left(\overline{M}\cap\overline{X\setminus M}\right)=\left(X\setminus\overline{M}\right)\cup\left(X\setminus\overline{X\setminus M}\right)$. Зважаючи на формулу $Int\,M = X\setminus\overline{X\setminus M}$, отримаємо рівність $X\setminus Fr\,M = X\setminus\overline{M}\cup Int\,M$. Розглядаючи доповнення до цієї множини, доходимо висновку, що $Fr\,M = X\setminus\left(X\setminus\overline{M}\cup Int\,M\right)$. За принципом двоїстості це означає, що $Fr\,M = X\setminus X\setminus\overline{M}\cap X\setminus Int\,M$. Але $X\setminus X\setminus\overline{M}=\overline{M}$ і $\overline{M}\subset X$, отже, $Fr\,M=\overline{M}\cap X\setminus Int\,M=\overline{M}\setminus M$.

2). За означенням $Fr\,M=\overline{M}\cap\overline{X\setminus M}$. Застосуємо прийом $A\subset X\Rightarrow A=A\cap X$ і подамо X як об’єднання множин M і $X\setminus M$. Це дає нам змогу подати межу у такому вигляді: $Fr\,M=\overline{M}\cap\overline{X\setminus M}\cap\left(M\cup\left(X\setminus M\right)\right)$. Розкриваючи цей вираз за принципом двоїстості, отримаємо рівність

$$Fr\,M=\left[\left(\overline{M}\cap\overline{X\setminus M}\right)\cap M\right]\cup\left[\left(\overline{M}\cap\overline{X\setminus M}\right)\cap\left(X\setminus M\right)\right].$$

Тепер зважимо на те, що $M\subset\overline{M}$, отже $\overline{M}\cap M=M$ і $\left(\overline{M}\cap\overline{X\setminus M}\right)\cap M=M\cap\overline{X\setminus M}$. Крім того, $X\setminus M\subset\overline{X\setminus M}$, отже $\left(X\setminus M\right)\cap\overline{X\setminus M}=X\setminus M$. Таким чином, $Fr\,M=\left(M\cap\overline{X\setminus M}\right)\cup\left(\overline{M}\cap X\setminus M\right)$.

Щоб уточнити вигляд множини $M\cap\overline{X\setminus M}$, розглянемо її доповнення $X\setminus\left(M\cap\overline{X\setminus M}\right)$. За принципом двоїстості воно дорівнює $\left(X\setminus M\right)\cup X\setminus\overline{X\setminus M}$. За формулою $Int\,M=X\setminus\overline{X\setminus M}$ це означає, що $X\setminus\left(M\cap\overline{X\setminus M}\right)=\left(X\setminus M\right)\cup Int\,M$. Повертаючись до множини $M\cap\overline{X\setminus M}$, обчислимо ще одне доповнення і застосуємо принцип двоїстості: $X\setminus X\setminus\left(M\cap\overline{X\setminus M}\right)=\left(M\cap\overline{X\setminus M}\right)=\left[X\setminus\left(X\setminus M\right)\right]\cap\left(X\setminus Int\ \right)=M\cap\left(X\setminus Int\ \right)$. З огляду на те, що $M\subset X$, маємо, що $M\cap\overline{X\setminus M}=M\setminus Int\,M$.

Щоб уточнити вигляд множини $\overline{M}\cap X\setminus M$ візьмемо до уваги, що $\overline{M}\subset X$, отже, $\overline{M}\cap X\setminus M=\overline{M}\setminus M$.

Таким чином,

$$Fr\,M=\left(M\cap\overline{X\setminus M}\right)\cup\left(\overline{M}\cap X\setminus M\right)=\left(\overline{M}\setminus M\right)\cup\left(M\setminus Int\,M\right).\ \blacksquare$$

Задача 2.12. Нехай $\left(X,\tau\right)$ – топологічний простір. Доведіть, що множина M топологічного простору $\left(X,\tau\right)$ є відкритою тоді і лише тоді, коли $M\cap FrM=\varnothing$.

Розв’язок. Необхідність.

$M\in\tau\Rightarrow M=Int\,M\Rightarrow Fr\,M=\overline{M}\setminus M\Rightarrow M\cap Fr\,M=\varnothing$.

Достатність.

$M\cap Fr\,M=\varnothing\Rightarrow M\cap\left(\overline{M}\setminus Int\,M\right)=\varnothing\Rightarrow M\setminus Int\,M=\varnothing\Rightarrow$

$\Rightarrow M=Int\,M\Rightarrow M\in\tau$.

Коментар. Необхідність. Нехай множина M є відкритою. Тоді вона співпадає із своєю внутрішністю: $M=Int\,M$. Отже, у формулі $Fr\,M=\left(\overline{M}\setminus M\right)\cup\left(M\setminus Int\,M\right)$ зникає другий член і $Fr\,M=\overline{M}\setminus M$. Це значить, що множина $Fr\,M$ лежить в множині $X\setminus M$, тобто не перетинається з M: $M\cap Fr\,M=\varnothing$.

Достатність. Припустимо, що $M \bigcap Fr\, M = \varnothing$. Подамо межу за формулою $Fr\, M = \bar{M} \setminus Int\, M$. Тоді $M \bigcap \left(\bar{M} \setminus Int\, M \right) = \varnothing$. З включення $M \subset \bar{M}$ випливає, що $M \bigcap \left(\bar{M} \setminus Int\, M \right) = M \setminus Int\, M = \varnothing$. Це означає, що $M = Int\, M$, тобто є відкритою множиною. ■

Задача 2.13. Нехай (X, τ) – топологічний простір. Доведіть, що множина M топологічного простору (X, τ) є замкненою тоді і лише тоді, коли $Fr\, M \subseteq M$.

Розв'язок. Необхідність.

$X \setminus M \in \tau \Rightarrow M = \bar{M} \Rightarrow Fr\, M = \left(\bar{M} \setminus M \right) \bigcup \left(M \setminus Int\, M \right) = M \setminus Int\, M \Rightarrow$

$\Rightarrow Fr\, M \subseteq M$.

Достатність.

$Fr\, M \subseteq M$, $Fr\, M = \left(\bar{M} \setminus M \right) \bigcup \left(M \setminus Int\, M \right) \Rightarrow Fr\, M = M \setminus Int\, M \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{M} \setminus M = \varnothing \Rightarrow M = \bar{M} \Rightarrow X \setminus M \in \tau$.

Коментар. Необхідність. Нехай множина M є замкненою. Тоді вона співпадає зі своїм замиканням $M = \bar{M}$. Зважаючи на формулу $Fr\, M = \left(\bar{M} \setminus M \right) \bigcup \left(M \setminus Int\, M \right)$, доходімо висновку, що $Fr\, M = M \setminus Int\, M$. З цього випливає, що $Fr\, M \subseteq M$.

Достатність. Нехай $Fr\, M \subseteq M$. Аналіз формули $Fr\, M = \left(\bar{M} \setminus M \right) \bigcup \left(M \setminus Int\, M \right)$ показує, що в такому випадку межа не може містити точок множини $\bar{M} \setminus M$, тобто $Fr\, M = M \setminus Int\, M$. Отже, $\bar{M} \setminus M = \varnothing$, звідки випливає, що $\bar{M} = M$, тобто $X \setminus M \in \tau$. ■

Урок 3. Збіжність

Задача 3.1. Нехай $x_n \to x$ при $n \to \infty$ і $x_n \in M$. Доведіть, що $x \in \bar{M}$.

Розв’язок.

$x_n \to x \Rightarrow \forall O(x) \in \tau\ \exists N > 0: \forall n \geq N\ x_n \in O(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall O(x) \in \tau\ O(x) \cap \{x_1, x_2, ...\} \neq \varnothing,\ x_n \in M \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall O(x) \in \tau\ O(x) \cap M \neq \varnothing \Rightarrow x \in \bar{M}$.

Коментар. Оскільки x є границею послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, то за означенням для довільного околу $O(x)$ точки x існує таке натуральне число N, що для всіх чисел $n \geq N$ елементи x_n лежать в околі $O(x)$. Отже, перетин довільного околу $O(x)$ з послідовністю $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ є непорожнім. Оскільки $x_n \in M$, з цього випливає, що перетин довільного околу $O(x)$ з множиною M є непорожньою множиною, тобто точка x є точкою дотику множини M. ■

Задача 3.2. Чи вірно, що для довільної точки $x \in M$ знайдеться така послідовність $x_n \in M$, що $x_n \to x$ при $n \to \infty$?

Розв’язок. Такою послідовністю є стаціонарна послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, тобто послідовність, всі елементи якого, починаючи з деякого номера дорівнюють x: $\exists N > 0: x_n = x\ \forall n \geq N$.■

Задача 3.3. Наведіть приклад простору (X, τ), в якому деяка точка x є граничною для множини $X \setminus \{x\}$ і жодна послідовність з $X \setminus \{x\}$ не збігається до x.

Розв’язок. Нехай X — довільна незліченна множина. Задамо в просторі X топологію, оголосивши відкритими порожню множину і всі підмножини, які утворені із X викиданням не більш ніж зліченної кількості точок.

$$\tau = \{\varnothing, X \setminus \{x_1, x_2, ..., x_{n,} ...\}\}.$$

Спочатку покажемо, що в цьому просторі збіжними є лише стаціонарні послідовності. Припустимо, що в просторі існує нестаціонарна послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, що збігається до x. Тоді, взявши в якості околу точки x множину U, яка утворюється викиданням із X всіх членів послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, які відрізняються від точки x (якщо ця точка належить послідовності), ми дійдемо до протиріччя з тим, що окіл U мусить містити всі точки послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, починаючи з деякого номера. Якщо точка x не належить цій послідовності, то послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ буде вилучена повністю. Отже, в цьому випадку існує окіл U точки x, який не містить жодного елементу x_n, тобто послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не збігається до x.

На другому етапі доведення розглянемо підмножину $X \setminus \{x\}$, що утворюється шляхом видалення із X однієї точки x. Очевидно, точка x є граничною точкою множини X. Справді, якщо U — довільний відкритий окіл точки x, то за означенням відкритих в X множин, доповнення $X\backslash U$ є не більш ніж зліченим.

$U\in\tau \Rightarrow U = X \setminus \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} \Rightarrow$

$\Rightarrow X \setminus U = X \setminus X \setminus\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} \Rightarrow$

$\Rightarrow A \setminus U \neq\varnothing$ (оскільки card $A = c$).

Отже, доповнення $X\backslash U$ не може містити незлічену множину X, а значить, в околі точки x міститься незліченна множина точок простору X, а значить, точка x є граничною точкою множини X. З іншого боку, оскільки в просторі X збіжними є лише стаціонарні послідовності, то із $x\notin A$ випливає, що жодна послідовність точок із множини X не може збігатися до точки x. ■

Задача 3.4. Наведіть приклад множини з двома різними топологіями, в яких збігаються класи збіжних послідовностей, що містять нескінченну кількість різних точок.

Розв’язок. Класи збіжних послідовностей збігаються. коли будь-яка послідовність, яка збігається в топологічному просторі (X,τ_1) збігається і в (X,τ_2) до тієї ж точки, і навпаки.

Нехай першим простором є тривіальний топологічний простір $(X,\{0,X\})$, а другим — простір Зариського $(X,\{\varnothing,X,X\setminus\{x_1,x_2,...,x_n\}\})$. Як в тривіальному просторі, так і просторі Зариського будь-яка послідовність, що містять нескінченну кількість різних точок, є збіжною і збігається до всіх точок простору, тобто класи збіжних послідовностей збігаються. ■

Задача 3.5. Нехай $X=(0,1]$, а топологія τ визначається множинами $\varnothing$, X і усіма можливими інтервалами (a,b), де $a,b\in(0,1)$, а також їх довільними об’єднаннями. Знайдіть границю послідовності $x_n=\dfrac{1}{n}, n=1,2,\ldots$.

Розв’язок. Околами будь-якої точки $x_0\in(0,1]$ є інтервали (a_α,b_α), де $\alpha\in A$, та їх об’єднання $O(x)=\bigcup\limits_{\alpha\in A}(a_\alpha,b_\alpha)$, що містять точку x_0.

1) $\forall x_0\in(0,1)\,\forall O(x)=\bigcup\limits_{\alpha\in A}(a_\alpha,b_\alpha)\ \textit{або}\ O(x)=(a,b)$

$$\exists N=\left[\frac{1}{\inf\limits_\alpha\{a_\alpha\}}\right]\textit{або}\ N=\left[\frac{1}{a}\right]: x_n<\inf_\alpha\{a_\alpha\}\ \textit{або}\ x_n<a\ \forall n\ge N \ \Rightarrow\ x_0\ne\lim_{n\to\infty}x_n.$$

2) $\forall a,b\in(0,1)\ 1\notin(a,b), 1\ne\bigcup\limits_{a,b}(a,b)$, але $1\in X$, $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}\in(0,1]=X\ \Rightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=1.$

Коментар. Розглянемо довільну точку $x_0\in(0,1)$. Її довільним околом є або окремий інтервал або об’єднання інтервалів, що містить точку x_0. Якщо околом є окремий інтервал (a,b), то для всіх номерів $n\ge\left[\dfrac{1}{a}\right]$ всі числа x_n менше a, тобто не належать околу (a,b). Якщо ж околом є об’єднання інтервалів $\bigcup\limits_{\alpha\in A}(a_\alpha,b_\alpha)$, то для всіх номерів $n > \left[\dfrac{1}{\inf\limits_{\alpha} \{a_\alpha\}} \right]$ виконується нерівність $x_n < \inf\limits_{\alpha} \{a_\alpha\}$, тобто числа x_n не належать околу. Отже, жодна точка $x_0 \in (0,1)$ не може бути границею послідовності $\left\{ \dfrac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$, тому що довільний її окіл містить лише скінченну кількість елементів цієї послідовності.

Точки $x_0 = 1$ не належить жодному околу виду (a,b), де $a,b \in (0,1)$ або їх об’єднанню. Отже, в топології існує єдиний окіл, що містить точку $x_0 = 1$, а саме множина-носій $(0,1]$. Цей напівінтервал містить всі елементи послідовності, отже, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 1$. ■

Задача 3.6. Нехай $X = (0,1]$, а топологія τ визначається множинами $\varnothing$, X, інтервалами $(0,a)$, де $a,b \in (0,1)$, та множинами $(0,a) \cup \{1\}$. Доведіть, що в просторі (X,τ) послідовність $x_n = \dfrac{n-1}{n}, n = 1,2,...$ не має границі.

Розв’язок.

1). $\forall x_0 \in (0,1)\, \forall O(x) = (0,a)$ *або* $O(x) = (0,a) \cup \{1\}$ $\exists N = \left[\dfrac{1}{1-a} \right] : x_n > a\ \forall n \geq N \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_0 \neq \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n}.$$

2). $\forall a \in (0,1) \exists N = \left[\dfrac{1}{1-a} \right] : x_n > a\ \ \forall n \geq N \Rightarrow 1 \neq \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n}$.

Коментар. Як і в попередній задачі, жодна точка інтервалу $(0,1)$ не може бути границею послідовності $x_n = \dfrac{n-1}{n}, n = 1,2,...$ оскільки її довільний окіл має вигляд $(0,a)$ або $(0,a) \cup \{1\}$ і містить лише скінченну кількість елементів цієї послідовності.

Крім того, околами точки $x = 1$ є об’єднання та сам напівінтервал $X = (0,1]$. Щоб точка $x = 1$ була границею послідовності необхідно, щоб її *довільний* окіл містив всі елементи послідовності, починаючи з деякого номера. Відносно множини ця умова виконується. Але об’єднання $(0,a) \cup \{1\}$ побудовано так, що воно містить лише скінченну кількість елементів послідовності $x_n = \dfrac{n-1}{n}, n = 1,2,...$ (решта розташована між точкою a та 1). Таким чином, послідовність не має жодної границі в даному просторі. ■

Задача 3.7. Доведіть, що в топологічному просторі з тривіальною топологією кожна послідовність є збіжною до довільної точки простору.

Розв’язок. Тривіальна топологія має вигляд $\{\varnothing, X\}$. Отже, для довільної послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ довільний окіл (в даному випадку — множина-носій X) довільної точки x містить всі елементи послідовності, тобто $\forall x, x_n \in X\ x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. ■

Задача 6.8. Нехай X — довільна нескінченна множина, а τ — топологія Зариського на X. Доведіть, що в (X, τ) кожна послідовність, яка містить нескінченну кількість різних точок, збігається до довільної точки множини X.

Розв’язок. Топологія Зариського має вигляд $\{\varnothing, X, X\setminus\{x_1, x_2, ..., x_n\}\}$. Якщо послідовність містить нескінченну кількість різних точок, то вона не може цілком міститись в жодній скінченній множині. Отже, починаючи з деякого номеру, вона міститься в доповненні до скінченної множини, тобто у відкритій множині із топології $\{\varnothing, X, X\setminus\{x_1, x_2, ..., x_n\}\}$. З іншого боку, ця довільна множина є околом будь-якої своєї точки. Таким чином, в топології Зариського будь-яка послідовність, що містить нескінченну кількість різних точок, збігається до всіх точок множини X. ■

Задача 3.9. Якій умові має задовольняти топологія, щоб єдиність границі збіжної послідовності мала місце?

Розв’язок. Для того щоб будь-яка збіжна послідовність мала єдину границю, ми повинні вимагати, щоб ця послідовність містилася в довільному околі границі, починаючи з деякого номера, і ця умова не виконувалась щодо околів іншої точки. Отже, необхідно, щоб для довільних різних точок x і y існували околи, що не перетинаються (такі простори називаються хаусдорфовими, або просторами T_2).■

Задача 3.10. *Якщо простір Т має злічену базу (задовольняє другій аксіомі зліченності), він є сепарабельним.*

Доведення. Нехай $B = \{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ — деяка злічeнна база в просторі T. Утворимо злічeнну множину $M = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, вибравши по одній точці $a_n \in B_n$, і доведемо, що множина M є всюди щільною, тобто в довільному околі довільної точки простору E існує точка із множини M. Дійсно, нехай x_n — довільна точка із простору T, а U_0 — її довільний окіл. Оскільки $B = \{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ — база простору T, існує окіл U_{n_0}, що цілком міститься в околі U_0. Отже, точка $a_{n_0} \in U_{n_0}$ також належить околу U, тобто множина M є всюди щільною.

Задача 3.11. Доведіть, що сепарабельний простір не обов’язково має злічeнну базу.

Доведення. Нехай X — *незлічена* множина, на якому введено топологію Зариського, яка складається із порожньої множини $\varnothing$, X і всіх можливих підмножин U із простору X, доповнення до яких $X\setminus U$ є скінченними множинами (тобто утворені шляхом викидання із множини X всіх можливих скінченних множин.)

$$\tau = \{\varnothing, X, X\setminus\{x_1, x_2, ..., x_n\}\}$$

Розглянемо довільну нескінченну підмножину M простору X. Її замикання є нескінченною і замкненою множиною.

$$card\ M = \infty,\ \bar{M} = M .$$

Це можливо лише тоді, коли $\bar{M} = X$. Оскільки це твердження розповсюджується на всі нескінченні підмножини, воно виконується і для будь-якої зліченої підмножини простору X. Отже, простір $T = (X, \tau)$ є сепарабельним.

Тепер доведемо, що простір *T* не може мати зліченої бази. Справді, припустимо, що існує $\beta = \{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ — злічена база в просторі *T*, x_0 — довільна точка із множини *X*, а $A_0 = \bigcap_k B_{n_k}$ — перетин всіх елементів із бази β, що містять точку x_0. Доведемо, що $A_0 = \{x_0\}$. Для цього припустимо, що існує точка $y_0 \in A_0, y_0 \neq x_0$. Покладемо $V = X \setminus \{y_0\}$. Ця множина належить топології Зариського, тобто є відкритою. Звідси випливає, що існує множина $B_{n_0} \in \beta$, така що $x_0 \in B_{n_0} \subset V$. Це означає, що множина A_0, а значить, і точка y_0, належить множині *V*, що суперечить її означенню. Таким чином, $A_0 = \{x_0\}$. Розглянемо доповнення $X \setminus A_0 = \bigcup_k \left(X \setminus B_{n_k} \right)$ і зауважимо, що кожна підмножина $X \setminus B_{n_k}$ містить скінченну кількість точок (оскільки вона є замкненою в топології Зариського і відрізняється від множини *X*). Таким чином, множина $\bigcup_k \left(X \setminus B_k \right)$ є зліченною (права частина рівності), а множина $X \setminus A_0 = X \setminus \{x_0\}$ є незліченою (ліва частина рівності). Отримане протиріччя спростовує наше припущення.

Урок 4. Неперервність

Задача 4.1 (критерії неперервності). Нехай (X,τ_X) і (Y,τ_Y) — топологічні простори і f — відображення X в Y. Наступні твердження є еквівалентними.

1). Відображення f є неперервним.

2). Прообраз будь-якого елемента передбази P в Y є відкритим в X.

3). Прообраз будь-якого елемента бази B в Y є відкритим в X.

4). Існують системи околів $\{B(x)\}_{x\in X}$ в X і $\{D(y)\}_{y\in Y}$ в Y, такі, що для кожного $x\in X$ і кожного $V\in D(f(x))$ знайдеться $U\in B(x)$, таке, що $f(U)\subset V$.

5). Прообраз будь-якої замкненої підмножини простору Y є замкнутим в X.

6). Для будь-якої підмножини $A\subset X$ маємо $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$.

7). Для будь-якої підмножини $B\subset Y$ маємо $\overline{f^{-1}(B)}\subset f^{-1}(\overline{B})$.

8). Для будь-якої підмножини $B\subset Y$ маємо $f^{-1}(Int\ B)\subset Int\ f^{-1}(B)$.

Передбаза топологічного простору (X, τ) — це сукупність відкритих множин $P=\{U_k\in\tau, k\in K\}$, така що сімейство усіх скінчених перетинів $\bigcap_{k=1}^{n}U_k$, $k = 1, 2, ..., n$ є базою простору (X, τ).

Будь-яка база простору є його передбазою.

Приклад. Нехай $I=[0,1]$, $\tau_I=\{I\cap U, U\subset R, U\in\tau\}$, де τ — природна топологія числової прямої R. Тоді (I,τ_I) — топологічний простір. Сімейство усіх інтервалів виду $(r_1,r_2),[0,r_2)$ и $(r_1,1]$, де $r_1,r_2\in Q$ (тобто раціональні числа), є базою простору (I,τ_I), а усі інтервали виду $[0,r_2),(r_1,1]$ — його передбазою.

Розв’язок.

$1\Rightarrow 2$.

$P=\{U_k\in\tau, k\in K\}$ — передбаза простору $(Y,\tau_Y)\Rightarrow U_k\in\tau$

$f\in C(X,Y)$, $U_k\in\tau\Rightarrow f^{-1}(U_k)\in\tau_X$.

Коментар. Передбаза складається із відкритих множин. За першим критерієм неперервності прообраз відкритої множини при неперервному відображенні є відкритою множиною. Отже, прообраз будь-якого елемента передбази P в Y є відкритим в X.

$2\Rightarrow 3$.

$P=\{U_k\in\tau, k\in K\}$ — передбаза $Y\Rightarrow \exists B=\left\{\bigcap_{k=1}^{n}U_k, n\in N, U_k\in P\right\}$ – база Y.

$$f^{-1}\left(\bigcap_{k=1}^{n}U_k\right)=\bigcap_{k=1}^{n}f^{-1}(U_k),\ U_k\in P\Rightarrow f^{-1}(U_k)\in\tau\Rightarrow\bigcap_{k=1}^{n}f^{-1}(U_k)\in\tau.$$

Коментар. База складається із скінчених перетинів елементів передбази, які є відкритими. За умовою 2), прообраз елемента бази є відкритим. Крім того, прообраз скінченого перетину множин є скінченим перетином прообразів цих відкритих множин. Отже, отримуємо, що прообраз елемента бази є прообразом скінченого перетину відкритих множин, тобто, прообразом скінченого перетину прообразів цих відкритих множин, який за третьою аксіомою Олександрова є відкритою множиною.

$3 \Rightarrow 4$.

$\forall V \in D\left(f\left(x\right)\right)\ \exists W \in B : f\left(x\right) \in W \subset V$, де B — база в $Y \Rightarrow$

$\Rightarrow f^{-1}\left(W\right) \in \tau_X$, $x \in f^{-1}\left(W\right) \Rightarrow \exists U \in B\left(x\right) : U \subset f^{-1}\left(W\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(U\right) \subset ff^{-1}\left(W\right) \subset W \subset V$.

Коментар. В довільному околі $V \in D\left(f\left(x\right)\right)$ знайдеться множина W із бази B простору *Y*, якій належить образ точки *x*. За умовою 3) це означає, що її прообраз $f^{-1}\left(W\right)$ є відкритою множиною в *X*. Значить, для довільної точки *x* із $f^{-1}\left(W\right)$ існує відкрита множина U із системи $B\left(x\right)$, що міститься в $f^{-1}\left(W\right)$. Зважаючи на монотонність будь-якого відображення, отримуємо, що $f\left(U\right) \subset ff^{-1}\left(W\right) \subset W \subset V$.

$4 \Rightarrow 5$.

$B = \overline{B} \subset Y \Rightarrow f^{-1}\left(B\right) = f^{-1}\left(Y \setminus Y \setminus B\right) = X \setminus f^{-1}\left(Y \setminus B\right)$.

$\forall x \in f^{-1}\left(Y \setminus B\right) \exists U\left(x\right) : U \subset f^{-1}\left(Y \setminus B\right)$?

$x \in f^{-1}\left(Y \setminus B\right) \Rightarrow f\left(x\right) \in Y \setminus B \in \tau_Y \Rightarrow \exists V \in D\left(f\left(x\right)\right) : V \subset Y \setminus B \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists U \in B\left(x\right) : f\left(U\right) \subset V \Rightarrow x \in U \subset f^{-1}f\left(U\right) \subset f^{-1}\left(V\right) \subset f^{-1}\left(Y \setminus B\right)$.

Коментар. Нехай *B* — замкнена множина в *Y*. Оскільки $f^{-1}\left(B\right) = X \setminus f^{-1}\left(Y \setminus B\right)$, достатньо показати, що множина $f^{-1}\left(Y \setminus B\right)$ є відкритою в *X*. Для цього покажемо, що будь-яка точка цієї множини є внутрішньою. Візьмемо довільну точку $x \in f^{-1}\left(Y \setminus B\right)$. Її образ належить множині $Y \setminus B$, яка є відкритою в *Y* (оскільки вона є доповненням до замкненої множини *B*). Отже, існує такий окіл $\exists V \in D\left(f\left(x\right)\right)$, що міститься в множині $Y \setminus B$. За умовою 4) знайдеться множина $U \in B\left(x\right)$, образ якої міститься в множині V. Застосувавши до $f\left(U\right)$ обернене відображення f^{-1}, доходимо висновку, що $x \in U \subset f^{-1}f\left(U\right) \subset f^{-1}\left(V\right) \subset f^{-1}\left(Y \setminus B\right)$. Зауважте, що тут використано універсальне включення: $\forall A \subset X\ \ A \subset f^{-1}f\left(A\right)$.

$5 \Rightarrow 6$.

$\overline{f\left(A\right)} \in Y \setminus \tau_Y \Rightarrow f^{-1}\left(\overline{f\left(A\right)}\right) \in X \setminus \tau_X$, $A \subset f^{-1}\left(\overline{f\left(A\right)}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{A} \subset \overline{f^{-1}\left(\overline{f\left(A\right)}\right)} = f^{-1}\left(\overline{f\left(A\right)}\right) \Rightarrow f\left(\overline{A}\right) \subset ff^{-1}\left(\overline{f\left(A\right)}\right) \subset \overline{f\left(A\right)}$.

$6 \Rightarrow 7$.

$A \triangleq f^{-1}\left(B\right) \Rightarrow f\left(\overline{A}\right) = f\left(\overline{f^{-1}\left(B\right)}\right) \subset \overline{ff^{-1}\left(B\right)} \subset \overline{B} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{f^{-1}\left(B\right)} \subset f^{-1}\left(\overline{B}\right)$.

$7 \Rightarrow 8$.

Застосуємо 7) до $Y \setminus B$.

$\overline{f^{-1}(Y \setminus B)} \subset f^{-1}(Y \setminus B) \Rightarrow$

$\Rightarrow f^{-1}(Int\ B) = f^{-1}\left(Y \setminus \overline{Y \setminus B}\right) = X \setminus f^{-1}\left(\overline{Y \setminus B}\right) \subset X \setminus \overline{f^{-1}(Y \setminus B)} =$

$= X \setminus \overline{X \setminus f^{-1}(B)} = Int\ f^{-1}(B)$.

$8 \Rightarrow 1$

$U \in \tau \Rightarrow U = Int\,U \Rightarrow f^{-1}(U) \subset Int\ f^{-1}(U)$, $Int\ f^{-1}(U) \subset f^{-1}(U) \Rightarrow$

$\Rightarrow f^{-1}(U) = Int\ f^{-1}(U) \Rightarrow f^{-1}(U) \in \tau_X$. ■

Урок 5. Аксіоми віддільності

Задача 5.1. Доведіть, що зв’язна двокрапка є колмогоровським, але недосяжним простором.

Розв’язок. Зв’язна двокрапка: $X=\{a,b\}$, $\tau=\{\varnothing, X, \{b\}\}$.

$\forall a\neq b\ \exists\{b\}\in\tau : b\in\{b\}, a\in\{b\} \Rightarrow (X,\tau)$ - колмогоровський простір.

$\forall a\in X\ \not\exists O(a)\in\tau, b\notin O(a) \Rightarrow (X,\tau)$ - не досяжний простір.

Коментар. Щоб простір був колмогоровським необхідно щоб для двох різних точок ми могли одну із них відокремити околом, тобто повинен існувати окіл, що містить одну точку, але не містить іншу. Для двох різних точок a і b в зв’язній двокрапці існує окіл $\{b\}$, що містить точку b, але не містить точку a. Отже, зв’язна двокрапка є колмогоровським простором. З іншого боку, точка a зовсім не має околів. Це означає, що зв’язна двокрапка досяжним простором бути не може. ■

Задача 5.2. Доведіть, що простір Зариського є досяжним, але не хаусдорфовим.

Розв’язок.

Простір Зариського: X – незлічена множина, $\tau=\{\varnothing, X, X\setminus\{x_1,x_2,...,x_n\}\}$.

$x_1\neq x_2 \Rightarrow O(x_1)=X\setminus\{x_i\neq x_1, i=1,...,n\}$, $O(x_2)=X\setminus\{x_i\neq x_2, i=1,...,n\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists O(x_1)\in\tau : O(x_1)\cap\{x_2\}=\varnothing,\ \exists O(x_2)\in\tau : O(x_2)\cap\{x_1\}=\varnothing$.

?! $\exists x_1\neq x_2\ \ \forall O(x_1), O(x_2)\in\tau : O(x_1)\cap O(x_2)=\varnothing \Rightarrow$

$\Rightarrow X\setminus\left(O(x_1)\cap O(x_2)\right)=X \Rightarrow \left(X\setminus O(x_1)\right)\cup\left(X\setminus O(x_1)\right)=X \Rightarrow$

$\Rightarrow A\cup B=X, card\ A=n, card\ B=n, card\ X>\aleph_0$. **?!**

Коментар. Доведемо, що простір Зариського є досяжним, тобто для кожних двох різних точок x_1 та x_2 існують окіл $O(x_1)$, що не містить точки x_2, і окіл $O(x_2)$, що не містить точки x_1. За побудовою топології Зариського, околом точки x_1 є множина, що утворена викиданням із незліченої множини X скінченної кількості точок. Очевидно, що серед цих скінченних множин є множини, що містять точку x_2 і не містять точки x_1. Доповнення до однієї з них можна взяти як шуканий окіл $O(x_1)$, що не містить точки x_2. Так же само можна знайти шуканий окіл $O(x_2)$.

Доведення того, що простір Зариського не є хаусдорфовим, здійснюється від супротивного. Припустимо, що існують різні точки x_1 і x_2, довільні околи яких $O(x_1)$ і $O(x_2)$ не перетинаються: $O(x_1)\cap O(x_2)=\varnothing$. Отже, доповнення перетину цих околів співпадає з множиною X, тобто $X\setminus\left(O(x_1)\cap O(x_2)\right)=X$. За принципом двоїстості це означає, що об’єднання доповнень цих околів співпадає з усім простором X, тобто $\left(X\setminus O(x_1)\right)\cup\left(X\setminus O(x_1)\right)=X$. Оскільки топологія Зариського складається із доповнень скінченних множин, звідси випливає, що незліченна множина X скаладається із скінченної кількості точок. Отримане протиріччя доводить, що простір Зариського не є хаусдорфовим. ■

Задача 5.3 (критерій регулярності). Доведіть, що для того щоб T_1-простір $\left(X,\tau\right)$ був регулярним необхідно і достатньо, щоб довільний окіл U довільної точки x містив її замкнений окіл.

Доведення. *Необхідність.* Нехай простір $\left(X,\tau\right)$ є регулярним, x — його довільна точка, а U — її довільний окіл. Покладемо $F = X \setminus U$. Тоді внаслідок регулярності простору $\left(X,\tau\right)$ існує окіл V точки x і окіл W множини F, такі що $V \cap W = \varnothing$. Звідси випливає, що $V \subset X \setminus W$, отже, $\overline{V} \subset \overline{X \setminus W} = X \setminus W \subset X \setminus F = U$.

Достатність. Нехай довільний окіл довільної точки x містить замкнену множину, якій належить ця точка, а F — довільна замкнена множина, що не містить точку x. Покладемо $G = X \setminus F \in \tau$. Нехай V — замкнена множина, що містить точку x і міститься в множині G. Тоді $W = X \setminus V$ є околом множини F, який не перетинається з множиною V. ■

Задача 5.4. Розглянемо множину $X = \mathbb{R}$ і введемо топологію так: околами будь-яких ненульових точок будемо вважати околи цих точок в природній топології дійсної осі (відкриті інтервали та їх об'єднання), а околами нуля будемо вважати околи нуля в природній топології, із яких викинуті числа $\frac{1}{n}, n = 1, 2, \ldots$. Доведіть, що побудований простір є хаусдорфовим, але не є регулярним.

Розв'язок. Множина $A = \left\{\frac{1}{n}, n = 1, 2, \ldots\right\}$ є замкненою, точка нуль їй не належить, але будь-які околи точки нуль і довільні околи множини A перетинаються.

Коментар. ■

Задача 5.5. Доведіть, що для того щоб система $\gamma = \left\{A_i, i \in I\right\}$ замкнених множин із X була замкненою базою в X, необхідно і достатньо, щоб для кожної точки $x_0 \in X$ і для кожної замкненої множини F_0, що не містить точку x_0, існувала множина $A_{j_0} \in \gamma$ така, що $x_0 \notin A_{j_0} \supset F_0$.

Розв'язок. Необхідність. Нехай $\gamma = \left\{A_i, i \in I\right\}$ – замкнена база в X. Це означає, що будь-яку замкнену множину можна подати у вигляді перетину елементів системи γ. Розглядаючи доповнення до цих множин, бачимо, що будь-яку відкриту множину можна подати у вигляді об'єднання доповнень до елементів замкненої бази. Інакше кажучи, доповнення до елементів замкненої бази утворюють відкриту базу. За властивостями відкритої бази, в довільному околі U точки x_0 існує елемент бази V, такий що $x_0 \subset V \subset U$. Розглянемо доповнення $X \setminus V$ і $X \setminus U$. Оскільки $V \subset U$, то $X \setminus U \subset X \setminus V$. Отже, поклавши $F_0 = X \setminus U$ і $A_{j_0} = X \setminus V$, ми доводимо необхідність.

Достатність. Припустимо, що для кожної точки $x_0 \in X$ і для кожної замкненої множини F_0, що не містить точку x_0, існує множина $A_{j_0} \in \gamma$ така, що $x_0 \notin A_{j_0} \supset F_0$. Розглянемо доповнення $X \setminus A_{j_0}$ і $X \setminus F_0$. Відносно цих множин виконується включення $X \setminus A_{j_0} \subset X \setminus F_0$, до того ж $x_0 \in X \setminus F_0$. Отже, оскільки замкнена множина F_0, що не містить точку x_0 є довільною, то для кожної точки $x_0 \in X$ і відкритого околу цієї точки $U = X \setminus F_0$ існує відкрита множина $V = X \setminus A_{j_0}$, така що виконується умова $x_0 \in V \subset U$. Значить, множини $\beta = \{X \setminus \gamma_i\}$ утворюють відкриту базу, тобто множина $\gamma = \{A_i, i \in I\}$ є замкненою базою. ■

Задача 5.5. Доведіть, що для того щоб система $\delta = \{B_j,\ j \in J\}$ замкнених множин із X була замкненою передбазою в X, необхідно і достатньо, щоб для кожної точки $x_0 \in X$ і для кожної замкненої множини F_0, що не містить точку x_0, існував скінченний набір елементів $B_{j_1}, B_{j_2}, ..., B_{j_n}$ такий, що $x_0 \notin \bigcup_{k=1}^{n} B_{j_k} \supset F_0$.

Розв'язок. Необхідність. Нехай система $\delta = \{B_j,\ j \in J\}$ замкнених множин із X є замкненою передбазою в X. Це означає, що будь-яку замкнену в X множину можна подати у вигляді перетину скінченних об'єднань множин із системи δ. Розглядаючи доповнення до цих множин, бачимо, що довільну відкриту множину можна подати у вигляді об'єднання скінченного перетину множин, що є доповненнями до елементів системи δ, тобто відкритими. Інакше кажучи, доповнення до елементів системи δ утворюють відкриту передбазу. За властивостями відкритої передбази скінченні об'єднання її елементів утворюють базу. Отже, доповнення до її елементів утворює замкнену базу. Таким чином, зважаючи на результат, отриманий в задачі 5.5, доходимо висновку, що для кожної замкненої множини F_0, яка не містить точку x_0, існує скінченний набір елементів $B_{j_1}, B_{j_2}, ..., B_{j_n}$ такий, що $x_0 \notin \bigcup_{k=1}^{n} B_{j_k} \supset F_0$.

Достатність. Припустимо, що для кожної замкненої множини F_0, що не містить точку x_0, існує скінченний набір елементів $B_{j_1}, B_{j_2}, ..., B_{j_n}$ такий, що $x_0 \notin \bigcup_{k=1}^{n} B_{j_k} \supset F_0$. Це означає, що множини $\bigcup_{k=1}^{n} B_{j_k}$ утворюють замкнену базу. Отже, множина $\delta = \{B_j,\ j \in J\}$ є замкненою передбазою. ■

Задача 5.6 (критерій цілковитої регулярності). Для того щоб (X, τ) був цілком регулярним (тихоновським) необхідно і достатньо, щоб кожна його точка x_0 була функціонально віддільною від усіх множин із деякої замкненої передбази $\delta = \{F_i, i \in I\}$, що її не містять.

Розв'язок. Необхідність. Якщо простір (X, τ) є цілком регулярним (тихоновським), то точка x_0 є функціонально віддільною від *усіх* замкнених множин, що її не містять, а значить, і від усіх множин із деякої замкненої передбази $\delta = \{F_i, i \in I\}$, що її не містять.

Достатність. Нехай F_0 — довільна замкнена в X множина, що не містить точку x_0, і нехай $F_{i_1}, ..., F_{i_n}$ — скінченний набір елементів із δ такий, що $x_0 \notin \overline{F} = \bigcup_{k=1}^{n} F_{i_k} \supset F_0$ (за лемою 5.2). За припущенням, існує неперервна функція $f_k : X \to [0,1]$, яка здійснює функціональну віддільність точки x_0 і замкненої множини F_{i_k}. Покладемо $f(x)=\sup_k f_k(x)$ і покажемо, що функція f здійснює функціональну віддільність точки x_0 і множини F, а тим більше, точки x_0 і множини $F_0 \subset F$.

Дійсно, $f(x_0)=\sup_k f_k(x_0)=0$. Далі, оскільки $\forall k=1,\dots,n$ $f_k(x)\le 1$, із $x\in F$ випливає, що $f(x)=\sup_k f_k(x)=1$. Крім того, із того що $x\in F=\bigcup_{k=1}^{n} F_{i_k}$ випливає, що $x\in F_{i_m}$, $1\le m\le n$, тобто $f_m(x)=1$.

Залишилося показати неперервність побудованої функції. Для цього треба довести, що $\forall x'\in X$ і $\forall \varepsilon>0$ $\exists U\in\tau,\ x'\in U$: $\forall x\in U$ $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$. Оскільки f_k — неперервна функція, то існує окіл U_k точки x', такий що $\forall x\in U_k$ $|f_k(x)-f_k(x')|<\varepsilon$. Покладемо $U=\bigcap_{k=1}^{n} U_k$. Тоді для кожного $x\in U$ і $\forall k=1,\dots,n$ виконуються нерівності

$$f_k(x')-\varepsilon < f_k(x)\le \sup_k f_k(x)=f(x),$$

$$f_k(x) < f_k(x')+\varepsilon \le \sup_k f_k(x')+\varepsilon = f(x')+\varepsilon.$$

Звідси випливає, що $f(x')-\varepsilon < f(x) < f(x')+\varepsilon$. ■

Задача 5.7 (мала лема Урисона - критерій нормальності). Досяжний простір X є нормальним тоді і лише тоді, коли для кожної замкненої підмножини $F\subset X$ і відкритої множини U, що її містить, існує такий відкритий окіл V множини F, що $\bar V\subset U$, тобто коли кожна замкнена підмножина має замкнену локальну базу.

Розв'язок. Необхідність. Нехай простір X є нормальним. Розглянемо замкнену множину F та її окіл U. Покладемо $F'=X\setminus U$. Оскільки $F\cap F'=\varnothing$, то існує відкритий окіл V множини F і відкритий окіл V' множини F', такі що $V\cap V'=\varnothing$. Отже, $V\subset X\setminus V'$. З цього випливає, що $\bar V\subset \overline{X\setminus V'}=X\setminus V'\subset X\setminus F'=U$.

Достатність. Нехай умови леми виконані, а множини F і F' — довільні замкнені підмножини простору X, що не перетинаються. Покладемо $U=X\setminus F'$. Тоді, оскільки множина U є відкритим околом множини F, то за умовою леми, існує окіл V множини F, такий що $\bar V\subset U$. Покладаючи $V'=X\setminus \bar V$ безпосередньо переконуємося, що множини V і V' не перетинаються і є околами множини F і F'. ■

Задача 5.8 (велика лема Урисона). Будь-які непорожні диз'юнктні замкнені підмножини нормального простору є функціонально віддільними.

Для самостійної роботи.

Урок 6. Компактність в топологічних просторах

Задача 6.1. Доведіть, що тривіальний простір завжди є компактним.

Розв'язок. Тривіальна топологія має вигляд $\tau = \{\varnothing, X\}$. Отже, єдиним відкритим покриттям множини-носія X є вона сама. Таким чином, в довільному відкритому покритті (що складається із одного елемента — самої множини X) існує скінченне підпокриття (що складається із одного елемента — самої множини X). ■

Задача 6.2. Доведіть, що дискретний простір є компактним тоді і лише тоді, коли він складається із скінченної кількості точок.

Розв'язок. Необхідність. Дискретний простір має вигляд $\left(X, 2^X\right)$. Припустимо, що простір компактний, а $S = \{G_i, i \in I\}$ — його *довільне* відкрите покриття. Оскільки простір компактний, існує скінченне підпокриття $P = \{G_k, k = 1, ..., n\} \subset S$. Одним із відкритих покриттів дискретного топологічного простору є база, яка складається із одноточкових множин. Якби простір складався б із нескінченної кількості точок, то в базі ми не змогли б виділити скінченну підсистему, яка сама була б покриттям. Отже, компактний дискретний простір повинен містити лише скінченну кількість точок.

Достатність. Якщо множина X містить скінченну кількість точок, то сукупність всіх підмножин множини X є скінченною. Інакше кажучи, яке б відкрите покриття ми не взяли, будь-яке підпокриття буде складатися із скінченної кількості множин. Отже, простір $\left(X, 2^X\right)$, що складається із скінченної кількості точок, є компактним. ■

Задача 6.3. Доведіть, що простір Зариського є компактним.

Розв'язок. Носієм простору Зариського є незлічена множина X, а топологія складається із множин, доповнення яких є скінченними. Нехай $S = \{G_i, i \in I\}$ — довільне відкрите покриття множини X, що містить нескінченну кількість точок. Виберемо деяку множину $G_{i_0} \neq X$, тоді $F_{i_0} = X \setminus G_{i_0}$ містить скінченну кількість точок: $x_1, x_2, ..., x_n$. Інакше кажучи, множина G_{i_0} містить майже всі точки множини X, за винятком точок $x_1, x_2, ..., x_n$. Виберемо в покритті S множини G_i, що містять ці точки: $x_1 \in G_1, x_2 \in G_2, ..., x_n \in G_n$. Отже, сукупність $G_{i_0}, G_{i_1}, ..., G_{i_n}$ утворить покриття всього простору. Це означає, що простір Зариського є компактним. ■

Задача 6.4. Доведіть, що простір $\mathbb{R}^n, n \geq 1$ не є компактним.

Розв'язок. Щоб довести, що простір $\mathbb{R}^n, n \geq 1$ не є компактним, достатньо указати деяке відкрите покриття, із якого неможливо виділити скінченне підпокриття. Прикладом такого покриття є система $P = \left\{ S(0,n) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x^2} < n \right\}, n \in \mathbb{N} \right\}$, яка складається із відкритих куль с центром в початку координат і радіусами, що дорівнюють n. Будь-яка скінченна підсистема $P_m = \{S_i(0,i), i = 1, ..., m\}$ сукупності P не може бути покриттям простору, адже об'єднанням цих множин була б куля

$S_m(0,m)$. В цю кулю не потрапить жодна точка, відстань від якої до початку координат перевищує m. Отже, простори $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ не є компактними. ■

Задача 6.5. Доведіть, що для того, щоб множина $M \subset X$ була компактною необхідно і достатньо, щоб довільне відкрите в X покриття множини M містило скінченне підпокриття.

Розв'язок. Необхідність. Нехай M — компактна підмножина простору X, а $S = \{G_i, i \in I\}$ — його довільне відкрите покриття. Розглянемо слід $\tilde{S} = \{\tilde{G}_i = G_i \cap M, i \in I\}$ покриття S на множині M. Цей слід також є відкритим в M покриттям множини M. Оскільки, за припущенням, підпростір (M, τ_M) є компактним, то із відкритого покриття $\tilde{S}$ можна вибрати скінченне підпокриття $\{\tilde{G}_{i_1}, \tilde{G}_{i_2}, ..., \tilde{G}_{i_n}\}$. Зважаючи на те, що множини $\tilde{G}_{i_1}, \tilde{G}_{i_2}, ..., \tilde{G}_{i_n}$ є частинами множини M, доходимо висновку, що множина $G_{i_1}, G_{i_2}, ..., G_{i_n}$ також утворюють відкрите в покриття X множини M.

Достатність. Нехай довільне відкрите покриття множини M містить скінченне підпокриття, а $\tilde{T} = \{\tilde{V}_i, i \in I\}$ — довільне відкрите в M покриття простору (M, τ_M). Нехай V_i є такою відкритою в X множиною, що $V_i \cap M = \tilde{V}_i$. З цього випливає, що система $T = \{V_i, i \in I\}$ утворює покриття множини M відкритими в X множинами. За умовою, існує скінченне підпокриття $V_{i_1}, V_{i_2}, ..., V_{i_n}$ покриття T. Отже, система $\{\tilde{V}_{i_1}, \tilde{V}_{i_2}, ..., \tilde{V}_{i_n}\}$ є скінченним підпокриттям покриття T. Це означає, що простір (M, τ_M) є компактним. ■

Задача 6.6. Доведіть, що замкнений відрізок числової прямої $\mathbb{R}$ є компактним.

Розв'язок. Розглянемо довільне покриття $S = \{G_i, i \in I\}$ відрізка $[a, b]$, що складається із відкритих в $\mathbb{R}$ множин. Доведемо, що воно містить скінченне підпокриття. З цього випливатиме, що відрізок $[a, b]$ є компактною множиною (див. задачу 6.5). Умовимось називати точку $x_0 \in [a, b]$ *позначеною*, якщо існує скінченна підсистема системи S, яка покриває замкнений відрізок $[a, x_0]$. Оскільки точка $x = a$ є позначеною, то множина M усіх позначених точок є непорожньою.

Покажемо, що точка $\eta = \sup M$ також є позначеною. Нехай $\eta \in G_{i_0}$. В такому випадку, оскільки множина G_{i_0} є відкритою, існує точка $\xi \in M$, така що $a < \xi < \eta$ і відрізок $[\xi, \eta]$ цілком міститься в G_{i_0}. Оскільки ξ — позначена точка, то існує скінченна система $G_{i_1}, G_{i_2}, ..., G_{i_n}$ системи S, що покриває відрізок $[a, \xi]$. Отже, система $G_{i_0}, G_{i_1}, G_{i_2}, ..., G_{i_n}$ покриває відрізок $[a, \eta]$, тобто $\eta \in M$. Покажемо тепер, що $\eta = b$. Припустимо, що $\eta < b$. Тоді, оскільки множина G_{i_0} є відкритою, існує таке число $\eta' \in (\eta, b)$ таке, що $[\eta, \eta'] \subset G_{i_0}$. Отже, підсистема $G_{i_0}, G_{i_1}, G_{i_2}, ..., G_{i_n}$ є покриттям відрізку $[a, \eta']$, тобто $\eta' \in M$. Це суперечить тому, що $\eta = \sup M$. Отже, точка b є позначеною, а значить, існує скінченна підсистема системи S, яка покриває замкнений відрізок $[a,b]$. ■

Задача 6.7. Доведіть, що замкнена підмножина компактного простору є компактною множиною.

Розв'язок. Нехай M — замкнена підмножина компактного простору X, а $\{F_\alpha, \alpha \in A\}$ — довільна центрована система замкнених в M множин. Оскільки M є замкненою в X множиною, то ця сукупність буде також центрованою системою замкнених в X множин. Оскільки X — компактний простір, то, за другим критерієм компактності, $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \neq \varnothing$. Отже, (M, τ_M) — компактний простір (з тієї ж причини). ■

Задача 6.8. Доведіть, що компактна підмножина хаусдорфова простору є замкненою.

Розв'язок. Нехай M — довільна компактна підмножина хаусдорфова простору X. Розглянемо довільну точку $x_0 \in X \setminus M$ (якщо $M = X$ або $M = \varnothing$, то доведення є тривіальним). Оскільки X — хаусдорфів простір, то для кожної точки $x \in M$ існують окіл U_x точки x і окіл V_x точки x_0, такі що $U_x \bigcap V_x = \varnothing$.

Очевидно, що система околів $\{U_x, x \in M\}$ утворює покриття компактної множини M відкритими в X множинами. Отже, (див. задачу 6.7) в цій системі існує скінченне підпокриття $\{U_{x_i}, i = 1, 2, ..., n\}$. Перетин $V_0 = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$ є околом точки x_0 і не перетинається с об'єднанням $\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$, а значить, він не перетинається із множиною M. Отже, у кожної точки x_0 існує окіл V_0, що не містить точок множини M, тобто $M = \bar{M}$. ■

Задача 6.9. Доведіть, що будь-який компакт є нормальним простором.

Розв'язок. Нехай топологічний простір X — компакт, тобто є хаусдорфовим і компактним. Доведемо, що довільні непорожні диз'юнктні множини замкнені в X множини M і N мають відкриті околи, що не перетинаються.

З одного боку, оскільки M і N — замкнені підмножини компактного простору, то внаслідок задачі 6.7 вони є компактними. З іншого боку, оскільки X — хаусдорфів простір, то для довільної точки $x \in M$ і довільної точки $y \in N$ існують околи O_x і O_y, що не перетинаються. Зафіксуємо деяку точку $y \in N$. Введемо множини $V_y = \bigcap_{y \in N} O_y$ і $U_y = \bigcup_{x \in M} O_x$ окіл об'єднаємо всі відповідні околи всіх точок множини M. Множина U_y містить множину M (оскільки вона є об'єднанням околів всіх точок множини M), а множина V_y є околом точки $y \in N$ (оскільки вона є перетином всіх околів точки y). Отже, для довільної точки $y \in N$ існує відкрита множина U_y, що містить множину M, і відкритий окіл V_y, такі що $U_y \bigcap V_y = \varnothing$. Об'єднання околів V_y

всіх точок $y \in N$ утворює покриття множини N, тобто $\{V_y, y \in N\}$ — відкрите покриття множини N. Оскільки N — компактна множина, то в покритті $\{V_y, y \in N\}$ існує скінченне підпокриття $\{V_{y_i}, i = 1, ..., n\}$ множини N. Покладемо

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i}, V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}.$$

Оскільки всі множини U_{y_i} і V_{y_i} попарно не перетинаються, множини U і V є відкритими диз'юнктними множинами, що містять множини M і N. Отже, простір X — нормальний простір.■

Задача 6.10 (перший критерій зліченної компактності). *Доведіть, що для того щоб простір (X, τ) був зліченно компактним необхідно і достатньо, щоб кожна його нескінченна підмножина має принаймні одну граничну точку.*

Розв'язок. Необхідність. Нехай (X, τ) — зліченно компактний простір, а M — довільна нескінченна множина в X. Припустимо, усупереч твердженню, що M не має жодної граничної точки (має, не значить містить!). Це означає, що в множині M існує нескінченна послідовність різних точок $x_1, x_2, ..., x_n, ...$, що не має граничних точок. Побудуємо скінченну систему підмножин $\{F_n, n \in \mathbb{N}\}$, поклавши $F_n = \{x_n, x_{n+1}, ..., ...\}$. Із структури цих множин випливає, що будь-яка скінченна сукупність точок F_n має непорожній перетин, всі множини F_n є замкненими, але $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \varnothing.$

1). $\forall m \in \mathbb{N}$ $\bigcap_{n=1}^{m} F_n = F_m \neq \varnothing$.

2). Якщо припустити, що $F_n = \{x_n, x_{n+1}, ..., ...\}$ є не замкненою, то повинна існувати її точка дотику x, яка не належить F_n. В такому випадку в довільному околі цієї точки буде міститись хоча одна точка із F_n і вона не буде співпадати з x. Отже, точка x — гранична точка множини F_n, що суперечить припущенню про те, що послідовність $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ не має граничних точок.

3). Якщо припустити, що $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$, то має існувати точка x_m, яка належить всім множинам F_n. З іншого боку, за конструкцією множин F_n, точка x_m не може належати множинам F_n для $n > m$. Ця суперечність доводить, що $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \varnothing.$

Отже, ми побудували зліченну центровану систему замкнених множин, перетин яких порожній, що суперечить припущенню, що простір (X, τ) зліченно компактним.

Достатність. Нехай в просторі (X, τ) кожна нескінченна множина M має граничну точку. Доведемо, що простір (X, τ) є зліченно компактним. Для цього достатньо перевірити, що будь-яка зліченна центрована система $\{F_n\}$ замкнених множин має непорожній перетин. Побудуємо множини $\hat{F}_m = \bigcap_{k=1}^{m} F_k$. Оскільки система $\{F_n\}$ є центрованою, то замкнені непорожні множини $\hat{F}_m$ утворюють послідовність

$\hat{F}_1, \hat{F}_2, ..., \hat{F}_m, ...,$ що не зростає. Очевидно, що $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \hat{F}_m$. Можливі два варіанти: серед множин $\hat{F}_m$ є лише скінченна кількість попарно різних множин, або нескінченна кількість таких множин. Розглянемо ці варіанти окремо.

1). Якщо серед множин $\hat{F}_m$ є лише скінченна кількість попарно різних множин, то починаючи з деякого номера m_0 виконується умова $F_{m_0} = F_{m_0+1} = \dots$. Тоді твердження доведено, оскільки $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \hat{F}_m = \hat{F}_{m_0} \neq \varnothing$.

2). Якщо серед множин $\hat{F}_m$ є лише нескінченна кількість попарно різних множин, то можна вважати, що $\hat{F}_m \setminus \hat{F}_{m+1} \neq \varnothing$. Оберемо по одній точці з кожної множини $\hat{F}_m \setminus \hat{F}_{m+1}$. Отже, ми побудували нескінченну множину різних точок, яка, за умовою, має граничну точку x^* . Всі точки $x_m, x_{m+1}, \dots$ належать множинам $\hat{F}_m$. Отже, $x^* \in \hat{F}_m$ $\forall m \in \mathbb{N}$. З цього випливає, що $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \hat{F}_m \neq \varnothing$. ■

Задача 6.11 (другий критерій зліченної компактності). *Доведіть що для того щоб досяжний простір* (X, τ) *був зліченно компактним необхідно і достатньо, щоб кожна нескінченна послідовність точок із* X *має принаймні одну граничну точку.*

Розв'язок. Необхідність. Нехай (X, τ) — зліченно компактний простір, а $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — довільна послідовність точок із X . Розглянемо два варіанти.

1). Якщо послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ містить нескінченну кількість різних точок, то множина $M = \{x_n,\, x_n \neq x_m\}$ є нескінченною. Із теореми 6.4 випливає, що існує точка x^*, яка є граничною. Оскільки простір (X, τ) є T_1-простором, то в довільному околі точки x^* існує нескінченна кількість точок множини M . Це означає, що точка x^* є граничною і для послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

2). Якщо послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ містить скінченну кількість різних точок, то існує стаціонарна послідовність $x_{n_k} = x^*$, $k = 1, 2, ...$ Таким чином, точка x^* э граничною точкою послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Отже, в обох випадках послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ має граничну точку.

Достатність. Нехай кожна нескінченна послідовність точок має принаймні одну граничну точку. Припустимо, усупереч твердженню, що топологічний простір (X, τ) не є зліченно компактним. Із теореми 6.4 випливає, що в X існує нескінченна множина M , що не має граничних точок. Виділимо в M послідовність попарно різних точок. Ця послідовність також не має граничної точки (інакше її гранична точка була б граничною точкою множини M). Отримане протиріччя з припущенням доводить наше твердження. ■

Задача 6.12. *Для топологічного простору* (X,τ) *із зліченною базою компактність еквівалентна зліченній компактності.*

Розв'язок. Необхідність. Нехай (X,τ) — компактний простір. Тоді із *довільного* відкритого покриття можна виділити скінченне покриття. Значить, скінченне покриття можна виділити і із зліченного відкритого покриття.

Достатність. Нехай (X,τ) є зліченно компактним простором, а $S=\{U_\alpha,\alpha\in A\}$ — його довільне відкрите покриття. Оскільки простори із зліченою базою мають властивість Ліндельофа (теорема 6.1), то покриття S містить підпокриття S', яке, внаслідок, зліченної компактності простору (X,τ) містить скінченне підпокриття S''. Отже, простір (X,τ) є зліченно компактним. ■

Задача 6.13. *Для досяжних просторів із зліченою базою компактність, зліченна і компактність і секвенційна компактність є еквівалентними.*

Розв'язок. $1\Leftrightarrow 2$. Для топологічного простору (X,τ) із зліченною базою компактність еквівалентна зліченній компактності (задача 6.12).

$2\Leftrightarrow 3$. В класі досяжних просторів із секвенційної компактності випливає зліченна компактність. Крім того, оскільки простір має зліченну базу, то із зліченної компактності випливає секвенційна компактність. Дійсно, якщо $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — довільна нескінченна послідовність в X, то внаслідок зліченної компактності X вона має граничну точку x^*. Розглянувши зліченну локальну базу $\left\{U_k\left(x^*\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$, таку що $U_{k+1}(x)\subset U_k(x)$ (таку локальну базу можна утворити із будь-якої локальної бази $V_k(x)$, взявши як $U_k(x)=\bigcap_{n=1}^{k}V_n(x)$), можна взяти точки $x_{n_k}\in U_k\setminus U_{k+1}$ і утворити підпослідовність $\left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$, яка збігається до x^*. Отже, простір X є секвенційно компактним. ■

Урок 7. Метричні простори

Задача 7.1. *Доведіть, що метричний простір є хаусдорфовим.*

Розв'язок. Якщо $x \neq y$, то $\rho(x,y) = r > 0$. Відкриті кулі $S\left(x, \frac{r}{3}\right)$ і $S\left(y, \frac{r}{3}\right)$ є відкритими множинами, до того ж вони не перетинаються. Достатньо для довільних $x, y \in X$ покласти $V_x = S\left(x, \frac{1}{3}\rho(x,y)\right)$ і $V_y = S\left(y, \frac{1}{3}\rho(x,y)\right)$. ■

Наслідок. *Збіжна послідовність в метричному просторі може мати лише одну границю.*

Задача 7.2. *Доведіть, що метричний простір є нормальним топологічним простором.*

Розв'язок. Нехай (X, ρ) — метричний простір, F_1, F_2 — замкнені множини, $F_1 \cap F_2 = \varnothing$.

Припустимо, що $x_1 \in F_1$ і $x_2 \in F_2$. Введемо такі позначення:

$$\rho(x, F_2) = \inf_{y \in F_2} \rho(x,y),\ \rho(y, F_1) = \inf_{x \in F_1} \rho(y,x).$$

Оскільки F_1, F_2 — замкнені множини і $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, то

$$\rho(x, F_2) > 0 \text{ і } \rho(y, F_1) > 0.$$

Побудуємо відкриті кулі

$$S\left(x, \frac{1}{3}\rho(x, F_2)\right) \text{ і } S\left(y, \frac{1}{3}\rho(y, F_1)\right).$$

Позначимо

$$V_1 = \bigcup_{x \in F_1} S\left(x, \frac{1}{3}\rho(x, F_2)\right),\ V_2 = \bigcup_{y \in F_2} S\left(y, \frac{1}{3}\rho(y, F_1)\right).$$

Оскільки кулі $S\left(x, \frac{1}{3}\rho(x, F_2)\right)$ і $S\left(y, \frac{1}{3}\rho(y, F_1)\right)$ є відкритими множинами, то і множини V_1 і V_2 є відкритими. Доведемо, що $V_1 \cap V_2 = \varnothing$.

Припустимо супротивне. Нехай $\exists z \in V_1 \cap V_2$. Тоді $\exists x_0 \in F_1 : \rho(x_{0,} z) < \frac{1}{3}\rho(x_0, F_2)$ і $\exists y_0 \in F_2 : \rho(z, y_0) < \frac{1}{3}\rho(y_0, F_1)$. Припустимо, для визначеності, що $\rho(x_0, F_2) \leq \rho(y_0, F_1)$. Отже,

$$\rho(x_0, y_0) \leq \rho(x_0, z) + \rho(z, y_0) \leq \frac{1}{3}\rho(x_0, F_2) + \frac{1}{3}\rho(y_0, F_1) \leq \frac{2}{3}\rho(y_0, F_1) < \rho(y_0, F_1).$$

Це суперечить означенню відстані від точки y_0 до множини F_1 (инфімум серед усім можливих відстаней). Отримане протиріччя доводить теорему. ■

Задача 7.3 (задача божевільного математика). Чи може в метричному просторі замкнена куля більшого радіуса міститись в замкненій кулі меншого радіуса?

Розв'язок. Розглянемо метричний простір $\left(\mathbb{R}^2, \rho(x,y)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\right)$, інакше кажучи — евклідову площину. Побудуємо на цій площині дві кулі:

$$S_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 9\right\},\ S_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-2)^2+y^2\le 16\right\}.$$

Перша куля має центр в точці (0, 0) і радіус 3, а друга — центр в точці (2, 0) і радіус 4. Утворимо **новий** метричний простір (S_1,ρ), зберігши евклідову метрику, а як носій обравши множину кулю S_1. Побудуємо множину $S=S_1\cap S_2$. В просторі (S_1,ρ) множина $S=S_1\cap S_2$ містить точки із S_1, які лежать від точки $(0,2)$ на відстані не більше 4, тобто кулю с центром в точці $(0,2)$ і радіусом 4. З іншого боку, сам простір (S_1,ρ) є замкненою кулею з центром в точці (0,0) і радіусом 3. Отже, замкнена куля більшого радіуса містить замкнену кулю меншого радіуса. ■

Задача 7.4. Доведіть, що у довільному метричному просторі (X,ρ) замикання відкритої кулі $S(x_0,r)=\left\{y\in X:\rho(x_0,y)<r\right\}$ міститься в замкненій кулі $S^*(x_0,r)=\left\{x\in X:\rho(x_0,x)\le r\right\}$, тобто $\overline{S(x_0,r)}\subset S^*(x_0,r)$. Чи завжди виконується рівність $\overline{S(x_0,r)}=S^*(x_0,r)$?

Розв'язок. Нехай $x\in\overline{S(x_0,r)}$. Тоді $\exists\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\in S(x_0,r): x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. Крім того,

$$\rho(x,x_0)\le\rho(x,x_n)+\rho(x_n,x_0)<\rho(x,x_n)+r.$$

Переходячи до границі при $n\to\infty$ і зважаючи на неперервність метрики, доходимо висновку, що

$$\rho(x,x_0)\le r.$$

Отже, точки дотику кулі $S(x_0,r)$ містяться в кулі $S^*(x_0,r)$, тобто $\overline{S(x_0,r)}\subset S^*(x_0,r)$. Покажемо тепер, що рівність виконується не для будь-яких метричних просторів.

Нехай X — довільна множина, що містить хоча б дві точки. Введемо метрику

$$\rho(x,y)=\begin{cases}1, \text{ якщо } x\ne y,\\ 0, \text{ якщо } x=y.\end{cases}$$

Побудуємо метричний простір (X,ρ) — простір ізольованих точок. Нехай x — довільна точка із множини X. Тоді $S(x,1)=\{x\}$, а $S^*(x,1)=X$. В цьому просторі відкрита куля є і замкненою. Отже, $S(x,1)=\overline{S(x,1)}\ne K(x,1)$. Отже, рівність виконується не завжди. ■

Задача 7.5. Доведіть, що у довільному метричному просторі (X,ρ) будь-яка скінченна множина є замкненою множиною.

Розв’язок. Оскільки метричні простори є різновидом топологічних, то множина є замкненою, якщо вона співпадає із своїм замиканням. За теоремою 7.4 кожна точка дотику множини є границею деякої послідовності її точок, отже замикання є підмножиною множини границь всіх послідовностей. З іншого боку, кожна границя будь-якої послідовності елементів деякої множини є точкою дотику цієї множини. Отже, можна сформулювати таке означення: множина в метричному просторі називається замкненою, якщо вона містить всі границі всіх послідовностей її елементів.

Розглянемо скінченну множину $F = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Будь-яка збіжна послідовність її елементів повинна містити нескінченну кількість однакових елементів, тобто утворювати стаціонарну послідовність. Отже, будь-яка послідовність елементів множини F збігається до одного із її елементів, тобто скінченна множина є замкненою. ■

Задача 7.6. Розглянемо множину векторів $R^n = \{x = (a_1, a_2, ..., a_n) : a_i \in \mathbb{R}\}$ і введемо між довільними її елементами $x = (a_1, a_2, ..., a_n)$ і $y = (b_1, b_2, ..., b_n)$ відстань $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)^2}$. Доведіть, що простір (R^n, ρ) є метричним.

Розв’язок. Покажемо, що функція $\rho(x, y)$ є метрикою. Для цього перевіримо виконання властивостей метрики.

1) $\rho(x, y) \geq 0, \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$?

Дійсно, $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)^2} \quad \forall x, y \in R^n$. Крім того,

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)^2} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)^2 = 0 \Leftrightarrow (a_i - b_i)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_i = b_i \quad \forall i = 1, ..., n \Leftrightarrow x = y.$$

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x) \quad \forall x, y \in R^n$?.

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2} = \rho(y, x) \quad \forall x, y \in R^n.$$

3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \quad \forall x, y, z \in R^n$?

Для доведення нерівності трикутника скористаємося нерівністю Коші.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

Дійсно, увівши в розгляд невід’ємну допоміжну функцію

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n}(a_i x + b_i)^2 \geq 0,$$

отримуємо квадратний трьохчлен

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n}(a_i x + b_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)x^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{b} a_i b_i\right)x + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \geq 0.$$

Оскільки цей трьохчлен є невід’ємним і коефіцієнт при першій степені x є парним, його дискримінант менше або дорівнює нулю.

$$\varphi(x)=Ax^2+2Bx+C\ge 0,\ \ A=\sum_{i=1}^{n}a_i^2,\ B=2\sum_{i=1}^{b}a_ib_i,\ C=\sum_{i=1}^{n}b_i^2\Rightarrow B^2-AC\le 0.$$

Звідси випливає, що

$$\left(\sum_{i=1}^{b}a_ib_i\right)^2\le\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right).$$

Отже, нерівність Коші доведено. Добуваючи з цієї нерівності квадратний корінь, доходимо висновку, що

$$\sum_{i=1}^{b}a_ib_i\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\ .$$

Виділимо в лівій і правій частині повний квадрат. Для цього помножимо цю нерівність на 2.

$$2\sum_{i=1}^{b}a_ib_i\le 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\ .$$

Тепер додамо до обох частин число $\sum_{i=1}^{n}a_i^2+\sum_{i=1}^{n}b_i^2$.

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sum_{i=1}^{b}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n}b_i^2\le 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}+\sum_{i=1}^{n}a_i^2+\sum_{i=1}^{n}b_i^2\ .$$

Отже,

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i+b_i\right)^2\le\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\right)^2.$$

Добуваючи квадратний корінь з обох частин цієї нерівності, отримуємо, що

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(a_i+b_i\right)^2}\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}.$$

Введемо в розгляд вектор $z=\left(c_1,c_2,...,c_n\right)$ і зважимо на рівність $x-y=x-z+z-y$. З цього випливає, що

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(a_i-b_i\right)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\left(a_i-c_i\right)+\left(c_i-b_i\right)\right)^2}\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(a_i-c_i\right)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(c_i-b_i\right)^2}.$$

Інакше кажучи,

$$\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y).$$

Отже, нерівність трикутника доведено. Таким чином, простір $\left(R^n,\rho\right)$ є метричним.■

Задача 7.7. Розглянемо множину послідовностей, таких що ряд, складений з квадратів їх координат, збігається: $l_2=\left\{x=\left(a_1,a_2,...,a_n\right):\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2<\infty,\ a_i\in\mathbb{R}\right\}$, і введемо між довільними її елементами $x=\left(a_1,a_2,...,a_n,...\right)$ і $y=\left(b_1,b_2,...,b_n,...\right)$ відстань $\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\left(a_i-b_i\right)^2}$. Доведіть, що простір $\left(l_2,\rho\right)$ є метричним.

Розв’язок. Перш, ніж перевіряти властивості метрики, необхідно пересвідчитись, що функція $\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(a_i-b_i)^2}$ є визначеною для всіх елементів x і y, тобто ряд $\sum_{i=1}^{\infty}(a_i-b_i)^2$ збігається для всіх $x=(a_1,a_2,...,a_n,...)$ і $y=(b_1,b_2,...,b_n,...)$ із множини l_2. З попередньої задачі маємо, що

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2=\sum_{i=1}^{n}(a_i+(-b_i))^2\le\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(-b_i)^2}\right)^2.$$

Отже, збільшивши і правій частині кількість невід’ємних доданків до ∞, отримуємо

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2\le\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}b_i^2}\right)^2.$$

Оскільки $x\in l_2$ і $y\in l_2$, то $\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2}<\infty$ і $\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}b_i^2}<\infty$ відповідно. З цього випливає, що

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2}\le const<\infty.$$

Як відомо із курсу математичного аналізу, якщо часткові суми додатного ряду є обмеженими, то цей ряд збігається. Таким чином, ряд $\sum_{i=1}^{\infty}(a_i-b_i)^2$ збігається, і відстань $\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(a_i-b_i)^2}$ є визначеною для всіх елементів $x\in l_2$ і $y\in l_2$.

Тепер перевіримо, що ця функція задовольняє властивостям метрики.

1) $\rho(x,y)\ge 0,\ \rho(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$?

$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(a_i-b_i)^2}\ge 0$. Це очевидно.

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(a_i-b_i)^2}=0\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{\infty}(a_i-b_i)^2=0\Leftrightarrow(a_i-b_i)^2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_i=b_i\Leftrightarrow x=y.$$

2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)\ \ \forall x,y\in l_2$?

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(a_i-b_i)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(b_i-a_i)^2}=\rho(y,x).$$

3) $\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y)\ \ \forall x,y,z\in l_2$?

Вище ми довели нерівність

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2\le\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}b_i^2}\right)^2.$$

Перейдемо до границі при $n\to\infty$. За теоремою про мажоруючу послідовність, отримаємо нерівність

$$\sum_{i=1}^{\infty}(a_i-b_i)^2\le\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}b_i^2}\right)^2.$$

Добуваючи з цієї нерівності квадратний корінь, доходимо висновку, що

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(a_i-b_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}b_i^2} .$$

Введемо в розгляд вектор $z=(c_1,c_2,...,c_n,...)$ і подамо вектор у вигляді $x-y=x-z+x-y$. В такому випадку,

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(a_i-b_i)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\left((a_i-c_i)+(c_i-b_i)\right)^2}\le$$

$$\le\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(a_i-c_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(c_i-b_i)^2}=\rho(x,z)+\rho(z,y).$$

Отже, нерівність трикутника доведено. Таким чином, простір (l_2,ρ) є метричним.■

Задача 7.8. Розглянемо множину послідовностей, таких що ряд, складений з модулів їх координат, збігається: $l=\left\{x=(a_1,a_2,...,a_n):\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|<\infty,\ a_i\in\mathbb{R}\right\}$, і введемо між довільними її елементами $x=(a_1,a_2,...,a_n,...)$ і $y=(b_1,b_2,...,b_n,...)$ відстань $\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}|a_i-b_i|$. Доведіть, що простір (l,ρ) є метричним.

Розв’язок. Перш, ніж перевіряти властивості метрики, необхідно пересвідчитись, що функція $\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}|a_i-b_i|$ є визначеною для всіх елементів x і y, тобто ряд $\sum_{i=1}^{\infty}|a_i-b_i|^2$ збігається для всіх $x=(a_1,a_2,...,a_n,...)$ і $y=(b_1,b_2,...,b_n,...)$ із множини l. Із властивостей модуля і умови $x\in l$ і $y\in l$ випливає, що

$$\sum_{i=1}^{\infty}|a_i-b_i|=\sum_{i=1}^{\infty}|a_i+(-b_i)|\le\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|+\sum_{i=1}^{\infty}|-b_i|=\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|+\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|<\infty.$$

Таким чином, ряд $\sum_{i=1}^{\infty}|a_i-b_i|$ збігається, і відстань $\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}|a_i-b_i|$ є визначеною для всіх елементів $x\in l$ і $y\in l$.

Тепер перевіримо, що ця функція задовольняє властивостям метрики.

1) $\rho(x,y)\ge 0,\ \rho(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$?

$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(a_i-b_i)^2}\ge 0$. Це очевидно.

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}|a_i-b_i|=0\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{\infty}|a_i-b_i|=0\Leftrightarrow|a_i-b_i|=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_i=b_i\Leftrightarrow x=y.$$

2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)\ \ \forall x,y\in l$?

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}|a_i-b_i|}=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}|b_i-a_i|}=\rho(y,x).$$

3) $\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y) \;\; \forall x,y,z \in l$?

Введемо в розгляд вектор $z = (c_1, c_2, ..., c_n, ...)$ і подамо вектор у вигляді $x - y = x - z + x - y$. В такому випадку,

$$\rho(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i - b_i| \le \sum_{i=1}^{\infty} |(a_i - c_i) + (c_i - b_i)| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{\infty} |a_i - c_i| + \sum_{i=1}^{\infty} |c_i - b_i| = \rho(x,z) + \rho(z,y).$$

Отже, нерівність трикутника доведено. Таким чином, простір (l, ρ) є метричним. ■

Задача 17.9. Розглянемо множину всіх обмежених нескінченних числових послідовностей, таких що ряд, складений з модулів їх координат, збігається: $m = \left\{ x = (a_1, a_2, ..., a_n) : \sup_i |a_i| < \infty \right\}$, і введемо між довільними її елементами $x = (a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ і $y = (b_1, b_2, ..., b_n, ...)$ відстань $\rho(x,y) = \sup_i |a_i - b_i|$. Доведіть, що простір (m, ρ) є метричним.

Розв’язок. Перш, ніж перевіряти властивості метрики, необхідно пересвідчитись, що функція $\rho(x,y) = \sup_i |a_i - b_i|$ є визначеною для всіх елементів x і y, тобто число $\rho(x,y) = \sup_i |a_i - b_i|$ є скінченним для всіх $x = (a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ і $y = (b_1, b_2, ..., b_n, ...)$ із множини m. Із властивостей модуля і умови $x \in m$ і $y \in m$ випливає, що

$$\sup_i |a_i - b_i| \le \sup_i |a_i + (-c_i)| \le \sup_i |a_i| + \sup_i |-c_i| = \sup_i |a_i| + \sup_i |c_i| < \infty.$$

Таким чином, число ряд $\sup_i |a_i - b_i|$ є скінченним, і відстань $\rho(x,y) = \sup_i |a_i - b_i|$ є визначеною для всіх елементів $x \in m$ і $y \in m$.

Тепер перевіримо, що ця функція задовольняє властивостям метрики.

1) $\rho(x,y) \ge 0,\; \rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$?

$\rho(x,y) = \sup_i |a_i - b_i| \ge 0$. Це очевидно.

$\rho(x,y) = \sup_i |a_i - b_i| = 0 \Leftrightarrow |a_i - b_i| = 0 \Leftrightarrow a_i = b_i \Leftrightarrow x = y.$

2) $\rho(x,y) = \rho(y,x) \;\; \forall x,y \in m$?

$\rho(x,y) = \sup_i |a_i - b_i| = \sup_i |b_i - a_i| = \rho(y,x).$

3) $\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y) \;\; \forall x,y,z \in m$?

Введемо в розгляд вектор $z = (c_1, c_2, ..., c_n, ...)$ і подамо вектор у вигляді $x - y = x - z + x - y$. В такому випадку, із властивостей sup випливає, що

$$|a_i - b_i| \le |(a_i - c_i) + (c_i - b_i)| \le |a_i - c_i| + |c_i - b_i| \le$$

$$\le \sup_i |a_i - c_i| + \sup_i |c_i - b_i| \le \rho(x,z) + \rho(z,y) \;\forall i = 1, 2, ...$$

Отже,

$$\rho(x,y) = \sup_i |a_i - b_i| \le \sup_i |a_i - c_i| + \sup_i |c_i - b_i| \le \rho(x,z) + \rho(z,y).$$

Таким чином, простір (m,ρ) є метричним.■

Задача 7.10. Розглянемо множину всіх нескінченних числових послідовностей, $s=\{x=(a_1,a_2,...,a_n)\}$ і введемо між довільними її елементами $x=(a_1,a_2,...,a_n,...)$ і $y=(b_1,b_2,...,b_n,...)$ відстань $\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|a_i-b_i|}{1+|a_i-b_i|}$. Доведіть, що простір (s,ρ) є метричним.

Розв'язок. Перш, ніж перевіряти властивості метрики, необхідно пересвідчитись, що функція $\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|a_i-b_i|}{1+|a_i-b_i|}$ є визначеною для всіх елементів x і y, тобто ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|a_i-b_i|}{1+|a_i-b_i|}$ збігається для всіх $x=(a_1,a_2,...,a_n,...)$ і $y=(b_1,b_2,...,b_n,...)$ із множини s.

$$\frac{|a_i-b_i|}{1+|a_i-b_i|}\le 1\Rightarrow \frac{1}{2^i}\frac{|a_i-b_i|}{1+|a_i-b_i|}\le\frac{1}{2^i}\Rightarrow \rho(x,y)\le\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}=1.$$

Отже, оскільки ряд складається із додатних членів і всі його часткові суми є обмеженими, він є збіжним і відстань $\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|a_i-b_i|}{1+|a_i-b_i|}$ є визначеною для всіх елементів $x\in s$ і $y\in s$.

Тепер перевіримо, що ця функція задовольняє властивостям метрики.

1) $\rho(x,y)\ge 0,\ \rho(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$?

$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|a_i-b_i|}{1+|a_i-b_i|}\ge 0.$. Це очевидно.

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|a_i-b_i|}{1+|a_i-b_i|}=0\Leftrightarrow \frac{1}{2^i}\frac{|a_i-b_i|}{1+|a_i-b_i|}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |a_i-b_i|=0\Leftrightarrow a_i=b_i\Leftrightarrow x=y.$$

2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)\ \forall x,y\in s$?

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|a_i-b_i|}{1+|a_i-b_i|}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|b_i-a_i|}{1+|b_i-a_i|}=\rho(y,x).$$

3) $\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y)\ \forall x,y,z\in s$?

Спочатку доведемо допоміжну нерівність.

$$\frac{\alpha}{1+\alpha}\le\frac{\beta}{1+\beta}\ \ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}:0\le\alpha\le\beta.$$

Дійсно,

$$0\le\alpha\le\beta\Rightarrow\alpha+\alpha\beta\le\beta+\alpha\beta\Rightarrow\alpha(1+\beta)\le\beta(1+\alpha)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\alpha(1+\beta)}{(1+\alpha)(1+\beta)}\le\frac{\beta(1+\alpha)}{(1+\alpha)(1+\beta)}\Rightarrow\frac{\alpha}{1+\alpha}\le\frac{\beta}{1+\beta}.$$

Введемо в розгляд вектори елементами $x=(a_1,a_2,...,a_n,...)$, $y=(b_1,b_2,...,b_n,...)$ і $z=(c_1,c_2,...,c_n,...)$. В такому випадку,

$$|a_i - b_i| \le |(a_i - c_i) + (c_i - b_i)| \le |a_i - c_i| + |c_i - b_i|.$$

Покладемо,

$$\alpha = |a_i - b_i|,\ \beta = |a_i - c_i| + |c_i - b_i|.$$

Тоді маємо,

$$\frac{|a_i - b_i|}{1 + |a_i - b_i|} \le \frac{|a_i - c_i| + |c_i - b_i|}{1 + |a_i - c_i| + |c_i - b_i|} =$$

$$= \frac{|a_i - c_i|}{1 + |a_i - c_i| + |c_i - b_i|} + \frac{|c_i - b_i|}{1 + |a_i - c_i| + |c_i - b_i|} \le$$

$$\le \frac{|a_i - c_i|}{1 + |a_i - c_i|} + \frac{|c_i - b_i|}{1 + |c_i - b_i|}.$$

Множачи на $\frac{1}{2^i}$ і сумуючи обидві частині нерівності, отримуємо таку нерівність.

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|a_i - b_i|}{1 + |a_i - b_i|} \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|a_i - c_i|}{1 + |a_i - c_i|} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|c_i - b_i|}{1 + |c_i - b_i|} =$$

$$= \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

Таким чином, простір (s, ρ) є метричним.■

Задача 7.11. Розглянемо множину $C[a,b]$ всіх функцій, неперервних на відрізку $[a,b]$ і введемо між довільними її елементами $x(t)$ і $y(t)$ відстань $\rho(x, y) = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|$. Доведіть, що простір $(C[a,b], \rho)$ є метричним.

Розв'язок. Перш, ніж перевіряти властивості метрики, необхідно пересвідчитись, що функція $\rho(x, y) = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|$ є визначеною для всіх елементів x і y, тобто число $\max\limits_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|$ є скінченним. Дійсно, за другою теоремою Вейєрштрасса, якщо функція $f(t)$ є неперервною на відрізку $[a,b]$, то вона досягає на ньому свої нижні і верхні грані, тобто своїх мінімальне і максимальне значення. Отже, оскільки різниця неперервних функцій є неперервною функцією, відстань $\rho(x, y) = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|$ є визначеною для всіх елементів $x \in C[a,b]$ і $y \in C[a,b]$.

Тепер перевіримо, що ця функція задовольняє властивостям метрики.

1) $\rho(x, y) \ge 0,\ \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$?

$\rho(x, y) = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)| \ge 0.$. Це очевидно.

$\rho(x, y) = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)| = 0 \Leftrightarrow x(t) = y(t)\ \forall t \in [a,b] \Leftrightarrow x(t) \equiv y(t).$

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)\ \ \forall x, y \in C[a,b]$?

$$\rho(x,y)=\max_{t\in[a,b]}\left|x(t)-y(t)\right|=\max_{t\in[a,b]}\left|y(t)-x(t)\right|=\rho(y,x).$$

3) $\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y)\ \ \forall x,y,z\in C[a,b]$?

$$\left|x(t)-y(t)\right|\le\left|x(t)-z(t)\right|+\left|z(t)-y(t)\right|\le$$
$$\le\max_{t\in[a,b]}\left|x(t)-z(t)\right|+\max_{t\in[a,b]}\left|z(t)-y(t)\right|=$$
$$=\rho(x,z)+\rho(z,y).$$

Отже,

$$\rho(x,y)=\max_{t\in[a,b]}\left|x(t)-y(t)\right|\le$$
$$\le\max_{t\in[a,b]}\left|x(t)-z(t)\right|+\max_{t\in[a,b]}\left|z(t)-y(t)\right|=$$
$$=\rho(x,z)+\rho(z,y).$$

Таким чином, простір $\left(C[a,b],\rho\right)$ є метричним. ■

Задача 7.12. Розглянемо множину $C[a,b]$ всіх функцій, неперервних на відрізку $[a,b]$ і введемо між довільними її елементами $x(t)$ і $y(t)$ відстань $\rho_{L_2}(x,y)=\sqrt{\int\limits_a^b\left(x(t)-y(t)\right)^2dt}$. Доведіть, що простір $\left(C[a,b],\rho_{L_2}\right)$ є метричним.

Розв'язок. Перш, ніж перевіряти властивості метрики, необхідно пересвідчитись, що функція $\rho_{L_2}(x,y)=\sqrt{\int\limits_a^b\left(x(t)-y(t)\right)^2dt}$ є визначеною для всіх елементів x і y, тобто число $\sqrt{\int\limits_a^b\left(x(t)-y(t)\right)^2dt}$ є скінченним. По-перше, неперервні функції є інтегрованими. По-друге, якщо функції $f(t)$ і $g(t)$ є інтегрованими на відрізку $[a,b]$ і $f(t)\le g(t)$ на всьому відрізку, то

$$\int\limits_a^b f(t)dt\le\int\limits_a^b g(t)dt.$$

Звідси і з другої теореми Вейєрштрасса випливає, що

$$\left(x(t)-y(t)\right)^2\le\max_{t\in[a,b]}\left(x(t)-y(t)\right)^2=C.$$

В такому випадку

$$\int\limits_a^b\left(x(t)-y(t)\right)^2dt\le(b-a)\max_{t\in[a,b]}\left(x(t)-y(t)\right)^2=C(b-a).$$

Отже,

$$\sqrt{\int\limits_a^b\left(x(t)-y(t)\right)^2dt}\le\sqrt{C(b-a)}.$$

Тепер перевіримо, що ця функція задовольняє властивостям метрики.

1) $\rho(x,y)\ge0,\ \rho(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$?

$\rho(x,y)=\sqrt{\int\limits_a^b (x(t)-y(t))^2\,dt}\geq 0$. Це очевидно.

Необхідність.

$\rho(x,y)=\sqrt{\int\limits_a^b (x(t)-y(t))^2\,dt}=0 \Leftrightarrow x(t)\equiv y(t)\ \ t\in[a,b]$?

Достатність.

$\sqrt{\int\limits_a^b (x(t)-y(t))^2\,dt}=0 \Rightarrow \int\limits_a^b (x(t)-y(t))^2\,dt=0.$

Розглянемо первісну

$F(s)=\int\limits_a^s (x(t)-y(t))^2\,dt\ \ \forall s\in[a,b]\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall s\in[a,b]\ \ F'(s)=(x(s)-y(s))^2\geq 0\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall s\in[a,b]\ \ F(s_2)-F(s_1)=\int\limits_{s_1}^{s_2} F'(t)\,dt\geq 0,\ \ s_2\geq s_1.$

Розглянемо довільну точку s на відрізку $[a,b]$: $a\leq s\leq b$. З цього випливає, що

$0=F(a)\leq F(s)\leq F(b)=\int\limits_a^b (x(t)-y(t))^2\,dt=0\ \ \forall s\in[a,b]\Rightarrow$

$\Rightarrow F'(s)\equiv 0\ \ \forall s\in[a,b]\Rightarrow (x(t)-y(t))^2\equiv 0\Rightarrow x(t)\equiv y(t)\ \ \forall t\in[a,b].$

2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)\ \ \forall x,y\in C[a,b]$?

$\rho(x,y)=\sqrt{\int\limits_a^b (x(t)-y(t))^2\,dt}=\sqrt{\int\limits_a^b (y(t)-x(t))^2\,dt}=\rho(y,x).$

3) $\rho(x,y)\leq\rho(x,z)+\rho(z,y)\ \ \forall x,y,z\in C[a,b]$?

Нехай $f(t),g(t)\in C[a,b]$. Введемо допоміжну невід’ємну функцію

$\varphi(x)=\int\limits_a^b (sf(t)+g(t))\,dt=s^2\int\limits_a^b f^2(t)\,dt+2s\int\limits_a^b f(t)g(t)\,dt+\int\limits_a^b g^2(t)\,dt\geq 0$

Перепишемо цю нерівність в наступному вигляді.

$$As^2+2Bs+C\geq 0,$$

де $A=\int\limits_a^b f^2(t)\,dt,\ B=\int\limits_a^b f(t)g(t)\,dt,\ C=\int\limits_a^b g^2(t)\,dt.$ З цього випливає, що дискримінант відповідного квадратного трьохчлена відносно s менше або дорівнює нулю.

$$B^2-AC\leq 0.$$

Отже, ми довели нерівність Буняковського

$$\left(\int\limits_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2\leq\left(\int\limits_a^b f^2(t)\,dt\right)\left(\int\limits_a^b g^2(t)\,dt\right)$$

Добудемо квадратний корінь з обох частин нерівності Буняковського.

$$\int\limits_a^b f(t)g(t)\,dt\leq\sqrt{\int\limits_a^b f^2(t)\,dt}\sqrt{\int\limits_a^b g^2(t)\,dt}.$$

Додамо до обох частин суму $\int\limits_a^b x^2(t)dt + \int\limits_a^b y^2(t)dt.$

$$\int\limits_a^b f(t)g(t)\,dt + \int\limits_a^b f^2(t)dt + \int\limits_a^b g^2(t)dt \le$$

$$\le \sqrt{\int\limits_a^b f^2(t)\,dt}\sqrt{\int\limits_a^b g^2(t)\,dt} + \int\limits_a^b f^2(t)dt + \int\limits_a^b g^2(t)dt.$$

З цієї нерівності випливає, що

$$\int\limits_a^b \left(f(t) + g(t) \right)^2 dt \le \left(\sqrt{\int\limits_a^b f^2(t)\,dt} + \sqrt{\int\limits_a^b g^2(t)\,dt} \right)^2 .$$

Отже,

$$\sqrt{\int\limits_a^b \left(f(t) + g(t) \right)^2 dt} \le \sqrt{\int\limits_a^b f^2(t)\,dt} + \sqrt{\int\limits_a^b g^2(t)\,dt}.$$

Покладемо $f(t) \equiv x(t) - z(t)$, $g(t) = z(t) - y(t)$. Тоді

$$\sqrt{\int\limits_a^b \left(x(t) - y(t) \right)^2 dt} \le \sqrt{\int\limits_a^b \left(x(t) - z(t) \right)^2 dt} + \sqrt{\int\limits_a^b \left(z(t) - y(t) \right)^2 dt}.$$

Таким чином, простір $\left(C[a,b], \rho_{L_2} \right)$ є метричним. ■

Урок 8. Повні метричні простори

Задачі 8.1-8.6 описують пряму конструкцію Кантора–Хаусдорфа поповнення метричного простору.

Задача 8.1. Нехай $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальні послідовності в X. Доведіть, що числова послідовність $\{\rho(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ є збіжною.

Розв’язок. Оскільки $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальна послідовність, то

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N_1(\varepsilon) : \forall n, m \geq N_1(\varepsilon) \, \rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Оскільки $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальна послідовність, то

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N_2(\varepsilon) : \forall n, m \geq N_2(\varepsilon) \, \rho(y_n, y_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Покладемо $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тоді $\forall \varepsilon > 0$ і $\forall n, m \geq N$ внаслідок виконується нерівність

$$\left|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)\right| \leq \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отже, послідовність $\alpha_n = \rho(x_n, y_n)$ є фундаментальною. Оскільки R^1 є повним, то

$$\exists \alpha \in R^1 : \alpha = \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n).$$

■

Задача 8.2. Назвемо фундаментальні послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ і $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ еквівалентними, якщо послідовність $\{\rho(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до нуля. Доведіть, що це відношення є відношенням еквівалентності.

Розв’язок. Перевіримо, що це відношення є рефлексивним, симетричним і тразитивним.

а) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_n) = 0 \Leftrightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{x_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

б) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \Rightarrow \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(y_n, x_n) = 0 \Rightarrow \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$$

в) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{y_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0,$$

$$\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \rho(y_n, z_n) = 0,$$

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, z_n) \leq \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) + \lim_{n\to\infty} \rho(y_n, z_n) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\rho\left(x_n, z_n\right)=0$.

■

Задача 8.3. Нехай $\tilde{X}$ — множина класів еквівалентних фундаментальних в X послідовностей. Якщо $\xi\in\tilde{X}$, $\eta\in\tilde{X}$, $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}\in\xi$, $\left\{y_n\right\}_{n=1}^{\infty}\in\eta$, то покладемо $\tilde{\rho}\left(\xi,\eta\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\rho\left(x_n, y_n\right)$. Доведіть $\tilde{\rho}\left(\xi,\eta\right)$ не залежить від вибору представників класів та є метрикою на $\tilde{X}$.

Розв’язок. Для довільної точки $x\in X$ позначимо через ξ клас всіх фундаментальних послідовностей, що збігаються до x. Цей клас є непорожнім, оскільки йому належить стаціонарна послідовність $\left(x,x,\ldots\right)$. До того ж, взявши як представників класів ξ і η стаціонарні послідовності, легко переконатися, що

$$x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n,\ y=\lim\limits_{n\to\infty}y_n\Rightarrow\rho\left(x,y\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\rho\left(x_n,y_n\right)=\tilde{\rho}\left(\xi,\eta\right).$$

Таким чином, ототожнюючи елемент $x\in X$ із класом $\xi\in\tilde{X}$, ми ізометрично зануримо X в метричний простір $\tilde{X}$, і в подальшому X можна вважати підпростором $\tilde{X}$.

Покажемо, що $\tilde{\rho}\left(\xi,\eta\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\rho\left(x_n,y_n\right)$ не залежить від вибору представників $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ і $\left\{y_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ із класів ξ і η.

$$\forall\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty},\left\{x_n'\right\}_{n=1}^{\infty}\in\xi,\left\{y_n\right\}_{n=1}^{\infty},\left\{y_n'\right\}_{n=1}^{\infty}\in\eta\ \forall\varepsilon>0\ \exists N\left(\varepsilon\right)>0:\forall n\ge N$$

$$\left|\rho\left(x_n,y_n\right)-\rho\left(x_n',y_n'\right)\right|\le\rho\left(x_n,x_n'\right)+\rho\left(y_n,y_n'\right)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Отже,

$$\lim\limits_{n\to\infty}\rho\left(x_n,y_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\rho\left(x_n',y_n'\right)=\tilde{\rho}\left(\xi,\eta\right).$$

Доведемо, що класи еквівалентних послідовностей з указаною відстанню утворюють метричний простір $\left(\tilde{X},\tilde{\rho}\right)$, тобто виконуються аксіоми метрики.

а) $\tilde{\rho}\left(\xi,\eta\right)\ge 0$?

$$\rho\left(x_n,y_n\right)\ge 0\Rightarrow\tilde{\rho}\left(\xi,\eta\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\rho\left(x_n,y_n\right)\ge 0.$$

б) $\tilde{\rho}\left(\xi,\eta\right)=0\Leftrightarrow\xi=\eta.$?

$$\tilde{\rho}\left(\xi,\eta\right)=0\Leftrightarrow\forall\left\{x_n\right\}\in\xi,\left\{y_n\right\}\in\eta$$

$$\lim\limits_{n\to\infty}\rho\left(x_n,y_n\right)=\tilde{\rho}\left(\xi,\eta\right)=0\Leftrightarrow\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}\sim\left\{y_n\right\}_{n=1}^{\infty}\Leftrightarrow\xi=\eta..$$

в) $\tilde{\rho}\left(\xi,\eta\right)\le\tilde{\rho}\left(\xi,\varsigma\right)+\tilde{\rho}\left(\varsigma,\eta\right)$?

$$\forall\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}\in\xi,\left\{y_n\right\}\in\eta,\left\{z_n\right\}\in\varsigma$$

$$\tilde{\rho}\left(\xi,\eta\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\rho\left(x_n,y_n\right)\le\lim\limits_{n\to\infty}\rho\left(x_n,z_n\right)+\lim\limits_{n\to\infty}\rho\left(z_n,y_n\right)=$$

$$=\tilde{\rho}\left(\xi,\varsigma\right)+\tilde{\rho}\left(\varsigma,\eta\right).$$

■

Задача 8.4. Доведіть, що $\left(\tilde{X},\tilde{\rho}\right)$ — повний метричний простір.

Розв'язок. Нехай $\left\{x_n\right\}$ — представник класу ξ. Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{\rho}\left(x_n,\xi\right)=0.$$

Дійсно, $\forall\varepsilon>0\,\exists N\left(\varepsilon\right)>0:\forall n,m\geq N$

$$\rho\left(x_n,x_m\right)<\varepsilon.$$

З цього випливає, що $\forall\varepsilon>0\,\exists N\left(\varepsilon\right)>0:\forall n,m\geq N$

$$\tilde{\rho}\left(x_n,\xi\right)=\lim_{m\to\infty}\rho\left(x_n,x_m\right)<\varepsilon$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\xi \text{ в } \tilde{E}.$$

Таким чином, $\forall\xi\in\tilde{X}\;\exists x\in X$

$$\tilde{\rho}\left(x,\xi\right)<\varepsilon.$$

Нехай $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\ldots$— фундаментальна послідовність класів. Візьмемо послідовність $\varepsilon_n\to\infty$. Відповідно до сказаного вище, $\forall n\,\exists x_n\in E$:

$$\tilde{\rho}\left(x_n,\xi\right)<\varepsilon_n.$$

Утворимо із таких точок послідовність $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$. Доведемо, що ця послідовність є фундаментальною:

$$\tilde{\rho}\left(x_n,x_m\right)\leq\tilde{\rho}\left(x_n,\xi_n\right)+\tilde{\rho}\left(\xi_n,\xi_m\right)+\tilde{\rho}\left(\xi_m,x_m\right)<\varepsilon_n+\varepsilon_m+\rho\left(\xi_n,\xi_m\right).$$

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0,\ \lim_{n\to\infty}\varepsilon_m=0,\ \lim_{n\to\infty}\tilde{\rho}\left(\xi_n,\xi_m\right)=0\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\tilde{\rho}\left(x_n,x_m\right)=0.$$

З цього випливає, що

$$\exists\xi\in\tilde{X}:\lim_{n\to\infty}\tilde{\rho}\left(x_n,\xi\right)=0.$$

Отже,

$\tilde{\rho}\left(\xi_n,\xi\right)\leq\tilde{\rho}\left(\xi_n,x_n\right)+\tilde{\rho}\left(x_n,\xi\right)<\varepsilon_n+\tilde{\rho}\left(x_n,\xi\right)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\xi_n=\xi\in\tilde{X}$. З цього випливає, що простір $\tilde{X}$ — повний.

■

Задача 8.5. Кожному $x\in X$ поставимо у відповідність клас $\varphi\left(x\right)\in\tilde{X}$, що містить стаціонарну послідовність $\left(x,x,\ldots\right)$. Доведіть, що відображення φ — це ізометрія X і $\tilde{X}$ (тобто простір X можна ототожнити з $\varphi\left(X\right)$ і, таким чином, вкласти X в повний метричний простір $\tilde{X}$).

Розв'язок. Доведемо єдиність поповнення. Припустимо, що $\left(\tilde{X}_1,\rho_1\right)$ і $\left(\tilde{X}_2,\rho_2\right)$ — два різних поповнення простору E. Побудуємо взаємно-однозначне відображення

$$\varphi:\tilde{E}_1\to\tilde{E}_2$$

так, щоб виконувалися умови

1) $\varphi(x) = x \ \ \forall x \in X,\ X \subset \tilde{X}_1,\ E \subset \tilde{X}_2$;

2) $\xi \leftrightarrow \xi^*, \eta \leftrightarrow \eta^* \Rightarrow \tilde{\rho}_1(\xi,\eta) = \tilde{\rho}_2(\xi^*,\eta^*)$, де $\tilde{\rho}_1$— відстань в $(\tilde{X}_1, \rho_1)$, в $\tilde{\rho}_2$— відстань в $(\tilde{X}_2, \rho_2)$.

Нехай $\xi \in \tilde{X}_1$. Тоді за означенням поповнення $\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$.

Крім того, $E \subset \tilde{X}_2 \Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \tilde{X}_2$. Отже, $\exists \xi^* \in \tilde{X}_2$ (оскільки $\tilde{X}_2$ — повний простір) такий , що $\xi^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Покладемо

$$\varphi(\xi) \overset{def}{=} \xi^*.$$

Покажемо, що φ задовольняє умови 1) и 2). Для цього розглянемо послідовності

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to \xi \text{ в } \tilde{X}_1,\ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to \xi^* \text{ в } \tilde{X}_2,$$
$$\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \to \eta \text{ в } \tilde{X}_1,\ \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \to \eta^* \text{ в } \tilde{X}_2.$$

Внаслідок ізометричності поповнення,

$$\tilde{\rho}_1(\xi,\eta) = \lim_{n\to\infty} \rho_1(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n),$$
$$\tilde{\rho}_2(\xi,\eta) = \lim_{n\to\infty} \rho_2(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n).$$

З цього випливає, що

$$\tilde{\rho}_1(\xi,\eta) = \tilde{\rho}_2(\xi,\eta).$$

Таким чином, простори $(\tilde{X}_1, \tilde{\rho}_1)$ і $(\tilde{X}_2, \tilde{\rho}_2)$ співпадають з точністю до ізометрії. ■

Задача 8.6. Доведіть, що множина $\varphi(X)$ скрізь щільна в $\tilde{X}$ і $\varphi(X) = \tilde{X}$, якщо простір $\tilde{X}$ — повний.

Розв’язок. Нехай $\{x_n\}$— представник класу ξ. Тоді, як показано в задачі 8.4,

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{\rho}(x_n, \xi) = 0.$$

Дійсно, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) > 0 : \forall n, m \ge N$

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

З цього випливає, що $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) > 0 : \forall n, m \ge N$

$$\tilde{\rho}(x_n, \xi) = \lim_{m\to\infty} \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi \text{ в } \tilde{E}.$$

Таким чином, $\forall \xi \in \tilde{X}\ \exists x \in X$

$$\tilde{\rho}(x, \xi) < \varepsilon.$$

Як точку x можна взяти довільну точку x_n, $n \geq N(\varepsilon)$, тобто довільний окіл класу ξ містить деяку точку x із E. Це означає, що

$$\bar{X} = \tilde{X}.$$

■

Озн. 8.1. *Відображення* $g:(X,\rho) \to (X,\rho)$ *називається* ***стискаючим***, *якщо існує таке число* $0 < \alpha < 1$, *що* $\rho(g(x), g(y)) \leq \alpha\rho(x,y)$ *для довільних* $x, y \in X$.

Задача 8.8. *Будь-яке стискаюче відображення є неперервним.*

Розв'язок. Нехай $x_n \to x$, а $g: X \to X$ є стискаючим відображенням. Тоді

$$0 \leq \rho(g(x_n), g(x)) \leq \alpha\rho(x_n, x) \to 0, n \to \infty.$$

Отже,

$$g(x_n) \to g(x), \text{ коли } x_n \to x. \ ■$$

Задача 8.9 (принцип стискаючих відображень). *Будь-яке стискаюче відображення повного метричного простору* (X,ρ) *в себе має лише одну нерухому точку, тобто* $\exists! x \in X : g(x) = x$.

Розв'язок. Нехай x_0 — деяка точка із X. Визначимо послідовність точок $\{x_n\}$ за таким правилом:

$$x_1 = g(x_0), \ldots, x_n = g(x_{n-1}).$$

Покажемо, що ця послідовність є фундаментальною. Дійсно, якщо $m > n$, то

$$\rho(x_n, x_m) = \rho(g(x_{n-1}), g(x_{m-1})) \leq \alpha\rho(x_{n-1}, x_{m-1}) \leq \ldots \leq$$
$$\leq \alpha^n \rho(x_0, x_{m-n}) \leq \alpha^n \{\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \ldots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})\} \leq$$
$$\leq \alpha^n \rho(x_0, x_1)\{1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{m-n-1}\} \leq \alpha^n \rho(x_0, x_1)\frac{1}{1-\alpha}.$$

Таким чином, оскільки $0 < \alpha < 1$,

$$\rho(x_n, x_m) \to 0, n \to \infty, m \to \infty, m > n.$$

Внаслідок повноти простору (X,ρ) в ньому існує границя послідовності $\{x_n\}$. Позначимо її через $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Із задачі 8.3 випливає, що

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

Отже, нерухома точка існує.

Доведемо її єдиність. Якщо $g(x) = x$ і $g(y) = y$, то $\rho(x,y) \leq \alpha\rho(x,y)$, тобто $\rho(x,y) = 0$. за аксіомою тотожності це означає, що $x = y$. ■

Задача 8.10. Доведіть, що умову $\alpha \leq 1$ не можна замінити на $\alpha < 1$.

Розв'язок. Якщо відображення $g:(X,\rho)\to(X,\rho)$ має властивість $\rho(g(x),g(y))<\rho(x,y)\quad\forall x,y\in X,\ x\neq y$, то нерухомої точки може не бути. Дійсно, розглянемо простір $([1,\infty),|x-y|)$ і визначимо відображення $g(x)=x+\dfrac{1}{x}$. Тоді $\rho(g(x),g(y))=\left|x+\dfrac{1}{x}-y-\dfrac{1}{y}\right|<|x-y|$. Оскільки для жодного $x\in[1,\infty)$ $g(x)=x+\dfrac{1}{x}\neq x$, нерухомої точки немає. ■

Задача 8.11. Доведіть, що простір l_p, що складається з послідовностей $x_n=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\ldots)$, які задовольняють умову $\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\infty$, є повним.

Розв'язок. Нехай $x_n=\left(\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},\ldots,\xi_k^{(n)},\ldots\right)$ — фундаментальна послідовність в l_p. Інакше кажучи,

$$\forall\varepsilon>0\,\exists N(\varepsilon)>0:\forall n,m\geq N(\varepsilon)\ \rho(x_n,x_m)<\varepsilon.$$

З іншого боку,

$$\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(m)}\right|^p\leq\sum_{k=1}^{\infty}\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(m)}\right|^p\ \Rightarrow\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(m)}\right|\leq\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(m)}\right|^p\right)^{1/p}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{n,m\to\infty}\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(m)}\right|\leq\lim_{n,m\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(m)}\right|^p\right)^{1/p}=0\Rightarrow$$

$\Rightarrow\left\{\xi_k^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальна в $\mathbb{R}$ $\Rightarrow\exists x_k=(\xi_1,\xi_2,\ldots\xi_k,\ldots)$, де $\xi_k=\lim_{n\to\infty}\xi_k^{(n)}$.

Отже, мають місце такі твердження.

$$\forall M>0\,\forall\varepsilon>0\,\exists N(\varepsilon)>0:\forall n,m\geq N(\varepsilon)\ \sum_{k=1}^{M}\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(m)}\right|<\varepsilon^p\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\forall\varepsilon>0\,\exists N(\varepsilon)>0\,\forall n,m\geq N(\varepsilon)\ \sum_{k=1}^{\infty}\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k^{(m)}\right|^p<\varepsilon^p\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\forall\varepsilon>0\,\exists N(\varepsilon)>0\,\forall n\geq N(\varepsilon)\ \sum_{k=1}^{\infty}\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k\right|^p<\varepsilon^p\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \forall\varepsilon>0\,\exists N(\varepsilon)>0\,\forall n\geq N(\varepsilon)\ \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\xi_k^{(n)}-\xi_k\right|^p\right)^{1/p}<\varepsilon\ \Rightarrow\ l_p$$ — повний простір. ■

Задача 8.12. Доведіть, що простори всіх алгебраїчних поліномів з наступними метриками не є повними.

1). $\rho(P,Q)=\max_{t\in[0,1]}|P(t)-Q(t)|$;

2). $\rho(P,Q)=\int_0^1 |P(t)-Q(t)|\,dt;$

3). $\rho(P,Q)=\sum_n |c_n|$, де $P(t)-Q(t)=\sum_n c_n t^n$.

Побудуйте поповнення цих просторів.

Розв'язок. Розглянемо послідовність поліномів $P_n(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}$. Покажемо, що ця послідовність є фундаментальному в розгляданому метричному просторі алгебраїчних поліномів в кожній із метрик, але збігається не до алгебраїчного полінома, а до неперервної функції e^t. Нагадаємо формулу Маклорена для функції e^t.

$$e^t=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+...+\frac{t^n}{n!}+R_{n+1}(t),$$

де $R_{n+1}(t)=\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta t}$, $0<\theta<1$ — залишковий член в формі Лагранжа.

1). Припустимо, що *n* > *m*.

$$\rho(P_m(t),P_n(t))=\max_{t\in[0,1]}|P_m(t)-P_n(t)|=\max_{t\in[0,1]}\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k!}t^k$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k!}t^k=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k=\lim_{n\to\infty}R_{m+1}(t)<\lim_{m\to\infty}\frac{t^{m+1}}{(m+1)!}e^{\theta t}\le\lim_{m\to\infty}\frac{1}{(m+1)!}e=0.$$

Тепер доведемо, що послідовність $\{P_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ не може збігатися до жодного алгебраїчного полінома. Нехай $Q(t)$— деякий алгебраїчний поліном. За нерівністю трикутника

$$\rho\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!},Q(t)\right)\le\rho\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!},P_n(t)\right)+\rho(P_n(t),Q(t))$$

Величина в правій частині не дорівнює нулю. З іншого боку,

$$\rho\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!},P_n(t)\right)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k=\lim_{n\to\infty}R_{n+1}(t)<\lim_{n\to\infty}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta t}\le\lim_{n\to\infty}\frac{e}{(n+1)!}=0.$$

Отже, величина $\rho(P_n(t),Q(t))$ не може прямувати до нуля, а, значить, послідовність $\{P_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ не може прямувати до жодного алгебраїчного полінома.

2). Припустимо, що *n* > *m*.

$$\rho(P_m(t),P_n(t))=\int_0^1|P_m(t)-P_n(t)|\,dt=\int_0^1\left|\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k!}t^k\right|dt\le\int_0^1\left|\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k\right|dt.$$

Отже,

$$\lim_{n,m\to\infty}\rho\left(P_m(t),P_n(t)\right)=\lim_{n,m\to\infty}\int_0^1\left|P_m(t)-P_n(t)\right|dt=\int_0^1\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k!}t^k dt=\lim_{m\to\infty}\int_0^1\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k dt$$

=

$$=\lim_{m\to\infty}\int_0^1 R_{m+1}(t)dt<\lim_{m\to\infty}\int_0^1\frac{t^{m+1}}{(m+1)!}e^{\theta t}dt\le\lim_{m\to\infty}\frac{e}{(m+1)!}=0.$$

Тепер доведемо, що послідовність $\left\{P_n(t)\right\}_{n=1}^{\infty}$ не може збігатися до жодного алгебраїчного полінома. Нехай $Q(t)$ — деякий алгебраїчний поліном. За нерівністю трикутника

$$\rho\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!},Q(t)\right)\le\rho\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!},P_n(t)\right)+\rho\left(P_n(t),Q(t)\right)$$

Величина в правій частині не дорівнює нулю. З іншого боку,

$$\lim_{n\to\infty}\rho\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!},P_n(t)\right)=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 R_{n+1}(t)dt\le\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta t}dt\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)!}e=0.$$

Отже, величина $\rho\left(P_n(t),Q(t)\right)$ не може прямувати до нуля, а, значить, послідовність $\left\{P_n(t)\right\}_{n=1}^{\infty}$ не може прямувати до жодного алгебраїчного полінома.

3). Припустимо, що $n > m$.

$$\rho\left(P_m(t),P_n(t)\right)=\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k!}.$$

Отже,

$$\lim_{m,n\to\infty}\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k!}=\lim_{m\to\infty}\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{k!}=0.$$

Тепер доведемо, що послідовність $\left\{P_n(t)\right\}_{n=1}^{\infty}$ не може збігатися до жодного алгебраїчного полінома. Нехай $Q(t)$ — деякий алгебраїчний поліном. За нерівністю трикутника

$$\rho\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!},Q(t)\right)\le\rho\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!},P_n(t)\right)+\rho\left(P_n(t),Q(t)\right)$$

Величина в правій частині не дорівнює нулю. З іншого боку,

$$\lim_{n\to\infty}\rho\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!},P_n(t)\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}=0.$$

Отже, величина $\rho\left(P_n(t),Q(t)\right)$ не може прямувати до нуля, а, значить, послідовність $\left\{P_n(t)\right\}_{n=1}^{\infty}$ не може прямувати до жодного алгебраїчного полінома.

Поповнення всіх трьох просторів є простір $C[0,1]$. ■

Задача 8.13. Доведіть наступні твердження.

1) Простір C_{L_2} усіх неперервних на $[a,b]$ функцій з метрикою

$$\rho_{L_2}(f,g)=\left(\int_a^b (f(t)-g(t))^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$$ не є повним.

2) Простір $C_0(-\infty,\infty)$, що складається із неперервних функцій, які визначені на R^1 і задовольняють умову $\lim\limits_{|t|\to\infty} f(t)=0$, з метрикою $\rho(f,g)=\sup\limits_{t\in R^1}|f(t)-g(t)|$ є повним.

3) Простір $C^{(n)}[a,b]$ n разів неперервно диференційовних на $[a,b]$ функцій з метрикою $\rho(f,g)=\max\limits_{0\le k\le n}\sup\limits_{t\in[a,b]}\left|f^{(k)}(t)-g^{(k)}(t)\right|$ є повним.

4) Простір $C^{(n)}[a,b]$ n разів неперервно диференційовних на $[a,b]$ функцій з метрикою $\rho(f,g)=\left(\int_a^b\sum_{k=0}^{n}\left|f^{(k)}(t)-g^{(k)}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$, $p\ge 1$ не є повним.

Розв’язок.

1). Розглянемо послідовність неперервних функцій

$$\varphi_n(t)=\begin{cases}-1, & \text{якщо } a\le t\le \dfrac{a+b}{2}-\dfrac{1}{n},\\ nt, & \text{якщо } \dfrac{a+b}{2}-\dfrac{1}{n}\le t\le \dfrac{a+b}{2}+\dfrac{1}{n},\\ 1, & \text{якщо } \dfrac{a+b}{2}+\dfrac{1}{n}\le t\le 1.\end{cases}$$

Ця послідовність є фундаментальною в $C_{L_2}[a,b]$, оскільки

$$\int_a^b(\varphi_n(t)-\varphi_m(t))^2\,dt\le\frac{b-a}{min(n,m)}.$$

Покажемо, що ця послідовність не збігається до жодної функції з простору $C_{L_2}[a,b]$. Дійсно, нехай f — деяка функція із $C_{L_2}[a,b]$ і

$$\psi(t)=\begin{cases}-1, & \text{якщо } t<0,\\ 1, & \text{якщо } t\ge 0.\end{cases}$$

Внаслідок нерівності Мінковського

$$\left(\int_a^b(f(t)-\psi(t))^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\left(\int_a^b(f(t)-\varphi_n(t))^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_a^b(\varphi_n(t)-\psi(t))^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Оскільки функція f є неперервною, то інтеграл в лівій частині не дорівнює нулю. З іншого боку,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \left(\varphi_n(t)-\psi(t)\right)^2 dt = 0.$$

Отже, $\left(\int_a^b \left(f(t)-\varphi_n(t)\right)^2\right)$ не може прямувати до нуля при $n\to\infty$.

2). Для доведення повноти простору $C_0(-\infty,\infty)$ розглянемо фундаментальну послідовність $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ і покажемо, що вона прямує до неперервної функції, яка задовольняє умову $\lim_{|t|\to\infty} f(t)=0$. Для цього розглянемо сегмент $[-T,T]$. Оскільки в повному просторі $C[-T,T]$ з метрикою $\rho(f,g)=\sup_{t\in[-T,T]}\left|f(t)-g(t)\right|$ послідовність $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ прямує до неперервної функції $f(t)$, залишається довести, що функція $f(t)$ задовольнятиме умові $\lim_{|t|\to\infty} f(t)=0$. Дійсно,

$$\lim_{|t|\to\infty} f(t)=\lim_{|t|\to\infty}\lim_{n\to\infty} f_n(t)=\lim_{n\to\infty}\lim_{|t|\to\infty} f_n(t)=0.$$

3). Розв’язання цієї задачі базується на тому факті, що простір $C^{(n)}[-T,T]$ є повним. Решта міркувань збігаються с попередніми.

4). Задача розв’язується аналогічно задачі 8.12.1.

Урок 9. Компактність в метричних просторах

Задача 9.1. Компактна підмножина метричного простору є обмеженою.

Розв'язок. Розглянемо множину A в метричному просторі (X,ρ). Припустимо, що множина A не є обмеженою. Візьмемо її довільну точку і позначимо її як x_1. Побудуємо кулю $S(x_1,r_1)$, поклавши $r_1=1$. Оскільки множина не є обмеженою, існує хоча б одна точка множини A, що лежить за межами кулі $S(x_1,r_1)$. Позначимо її як x_2. Тоді має місце наступне твердження.

$$x_2 \notin S(x_1,r_1) \Rightarrow \rho(x_1,x_2) \ge r_1.$$

Побудуємо кулю $S(x_1,r_2)$, поклавши $r_2=\rho(x_1,x_2)+1$. Оскільки множина не є обмеженою, існує хоча б одна точка множини A, що лежить за межами кулі $S(x_2,r_2)$. Позначимо її як x_3. Тоді має місце наступне твердження.

$$x_3 \notin S(x_1,r_2) \Rightarrow \rho(x_1,x_3) \ge r_2.$$

Продовжуючи цей процес до нескінченості, отримаємо послідовність точок $x_n \in A$ і числову послідовність $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, що зростає. До того ж для всіх n = 2, 3, ...

$$\rho(x_1,x_n) = r_n - 1 \ge r_{n-1}.$$

Отже, для всіх $n > m \ge 2$

$$\rho(x_1,x_n) = r_n - 1 \ge r_{n-1} \ge r_m;\ \rho(x_1,x_m) = r_m - 1.$$

Застосуємо нерівність трикутника

$$\rho(x_1,x_n) \le \rho(x_1,x_m) + \rho(x_m,x_n).$$

Звідси випливає, що

$$r_m \le (r_m - 1) + \rho(x_m,x_n).$$

Таким чином,

$$\rho(x_m,x_n) \ge 1.$$

Таким чином, жодна часткова підпослідовність, що виділена із $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не є фундаментальною, отже, не є збіжною. З цього випливає, що множина A не є компактною. Застосовуючи закон заперечення, отримуємо бажане. ■

Задача 9.2. Покажіть, що обмежена множина в метричному просторі не обов'язково є компактною.

Розв'язок. Наведемо контрприклад. Розглянемо метричний простір $\left(l_2, \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2}\right)$. Розглянемо множину координатних ортів $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$, де $e_n = \{e_n^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$, $e_n^{(i)} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } i = n, \\ 0, \text{ якщо } i \ne n. \end{cases}$ Відстань будь-якого орта від нуля дорівнює 1, оскільки

$$\rho\left(e_n,0\right)=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\left(e_n^{(i)}-0\right)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\left(e_n^{(i)}\right)^2}=\sqrt{0+\ldots+0+1+0+\ldots}=1.$$

Отже, множина ортів лежить в кулі з центром в нулі і радіусом, до дорівнює одиниці, тобто вона є обмеженою множиною. З іншого боку, якщо $m\neq n$

$$\rho\left(e_m,e_n\right)=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\left(e_m^{(i)}-e_n^{(i)}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{(0-0)^2+\ldots+\underbrace{(1-0)^2}_{m-те\ місце}+\ldots\underbrace{(0-1)^2}_{n-те\ місце}+\ldots(0-0)^2}=\sqrt{2}.$$

Таким чином, послідовність $\left\{e_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ не є фундаментальною. З цього випливає, що жодна підпослідовність цієї послідовності не є фундаментальною, а, значить, не є збіжною. Отже, із послідовності $\left\{e_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ не можна виділити жодну збіжну підпослідовність. Це значить, що множина $\left\{e_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ хоча і є обмеженою, але не є компактною. ■

Задача 9.3. Нехай $\mathbb{Q}$ — метричний простір всіх раціональних чисел з метрикою $\rho\left(p,q\right)=\left|p-q\right|$. Доведіть, що множина $M=\left\{p\in\mathbb{Q}:0\leq p\leq 1\right\}$ є цілком обмеженою, але не є компактною.

Розв'язок. Ця задача ілюструє важливість умови повноти метричного простору в критерії компактності, адже простір $\mathbb{Q}$ не є повним. Отже, критерії Хаусдорфа порушується, тобто множина M компактною.

Приклад: 0, 0.4, 0.41, 0.414, 0.4142, ... $\to\sqrt{2}-1\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. ■

Зауваження. В множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ поняття цілком обмеженої множини еквівалентне поняттям обмеженої множини. Оскільки $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$, це стосується і простору $\mathbb{Q}$. Дійсно, якщо множина дійсних чисел A є цілком обмеженою, то для довільного $\varepsilon>0$ існує скінчена ε-сітка B. Взявши інтервал, кінці якого утворені мінімальним і максимальним елементами цієї ε-сітки, ми в будь-якому випадку зможемо занурити множину A в множину B. І навпаки, якщо множина дійсних чисел A є обмеженою, вона лежить в деякому інтервалі B. Цей інтервал при довільному $\varepsilon>0$ можна розбити на відрізки довжини ε, які утворюють скінчену ε-сітку.

Задача 9.4. Доведіть, що “гільбертова цегла” $A=\left\{x=\left\{\xi_n\right\}\in l_2:\left|\xi_n\right|\leq\dfrac{1}{2^{n-1}}\right\}$ є відносно компактною множиною.

Розв'язок. Ця множина є прикладом нескінченновимірної і цілком обмеженої множини. Оскільки l_2 — повний простір, то, щоб довести компактність “гільбертової цегли”, достатньо довести її цілковиту обмеженість.

Нехай задано довільне $\varepsilon>0$. Виберемо число n так, щоб

$$\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Кожній точці $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...) \in A$ поставимо у відповідність точку $x^* = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, 0, ...)$. Оцінимо відстань $\rho(x, x^*)$.

$$\rho(x, x^*) = \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k^2} \le \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{4^k}} < \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$ [1]

Утворимо множину $A^* = \{x^* \in A\}$, що складається із “усічених послідовностей”. Вона є обмеженою в R^n, оскільки її можна заключити в куб, довжина ребра якого дорівнює одиниці. Згідно з наведеним вище зауваженням, вона є цілком обмеженою. Виберемо для множини A^* скінчену $\frac{\varepsilon}{2}$-сітку B для множини A. Тоді $\forall \varepsilon > 0\ \forall x \in A\ \exists x^{**} \in B$:

$$\rho(x, x^{**}) \le \rho(x, x^*) + \rho(x^*, x^{**}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отже, множина B є ε-сіткою “гільбертової цегли” A. Таким чином, множина A є відносно компактною. ■

Задача 9.5. Доведіть, що компактний метричний простір є сепарабельним.

Розв’язок. Нехай E — компактний метричний простір. Покладемо $\varepsilon_n = \frac{1}{n}, n = 1, 2, ...$ і знайдемо в E скінченні ε_n-сітки B_n. Множина $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ є не більш ніж зліченною (скінченою або зліченною). Покажемо, що множина B є скрізь щільною в просторі E. Дійсно, для довільного $x \in E$ і довільного число $\varepsilon > 0$ виберемо натуральне число n так, що $\frac{1}{n} \le \varepsilon$, а також точку $y \in B_n$, так що $\rho(x, y) < \varepsilon_n = \frac{1}{n}$. Оскільки $y \in B_n$, то $y \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Отже, $\rho(x, y) < \varepsilon_n = \frac{1}{n} < \varepsilon.$ Таким чином, $\overline{B} = E$. ■

Задача 9.6. Нехай A — множина неперервних на $[0,1]$ функцій, таких що $|x(t)| \le 1, t \in [0,1]$. Доведіть, що множина A не є відносно компактною в $C[0,1]$

Розв’язок. Виберемо в множині A послідовність функцій

---

[1] Нагадаємо, що $a + aq + aq^2 + ... = \frac{a}{1-q}$.

Отже, $\frac{1}{4^n} + \frac{1}{4^{n+1}} + \frac{1}{4^{n+2}} + ... = \frac{1}{4^n} + \frac{1}{4^n 4} + \frac{1}{4^n 4^2} + ... = \frac{1}{4^n\left(1 - \frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{4^{n-1} 3} < \frac{1}{2^{n-1}}$.

$$x_n(t) = \sin 2^n \pi t, \; n = 1, 2, \ldots$$

Оцінимо відстань $\rho(x_m, x_n)$ і покажемо, що послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не є фундаментальною, тобто із неї не можна виділити жодну збіжну підпослідовність. Маємо

$$\rho(x_m, x_n) = \sup_{t\in[0,1]} |x_m(t) - x_n(t)| \geq \left| x_m\left(\frac{1}{2^{m+1}}\right) - x_n\left(\frac{1}{2^{m+1}}\right) \right| = 1,$$

оскільки

$$\sin 2^m \pi t \Big|_{t=\frac{1}{2^{m+1}}} = \sin 2^m \pi \frac{1}{2^{m+1}} = \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

$$\sin 2^n \pi t \Big|_{t=\frac{1}{2^{m+1}}} = \sin 2^{n-m-1}\pi = \sin 2l\pi = 0, \, l = 2^{k-n-2}, \; k > n.$$

Задача 9.7. Доведіть, що в метричному просторі l_3 множина A послідовностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, таких що $x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, \ldots\right)$ є відносно компактною.

Розв'язок. Послідовність $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ належить l_3, якщо $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^3 < \infty$.

$$\rho^3(x_n, x_{n+p}) = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^3} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \to 0, n \to \infty \;\; \forall p \in \mathbb{N}.$$

Отже, послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною. З огляду на те, що простір l_3 є повним, послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ є збіжною, а, значить, із неї можна виділити збіжну підпослідовність. Таким чином, множина A є відносно компактною. ■

Задача 9.8. Доведіть, що куля $S = \{x \in C[0, 2\pi] : |x(t)| \leq 1\}$ не є відносно компактною множиною в метричному просторі $\left(C[0,2\pi], \, \sup_{t\in[0,2\pi]} |x(t) - y(t)|\right)$.

Розв'язок. З огляду на те, що простір $\left(C[0,2\pi], \, \sup_{t\in[0,2\pi]} |x(t) - y(t)|\right)$ є повним, достатньо показати, що куля S не є цілком обмеженою множиною. Покладемо $x_n = \sin nt$. Ця послідовність належить кулі S. Оцінимо відстань $\rho(x_n, x_m)$.

$$\rho(x_n, x_m) = \sup_{t\in[0,2\pi]} |x_n(t) - x_m(t)| = \sup_{t\in[0,2\pi]} |\sin nt - \sin mt| \geq 1.$$

Отже, послідовність $\{\sin nt\}_{n=1}^{\infty}$ не є фундаментальною, із неї неможливо виділити збіжну підпослідовність. Таким чином, куля S не є відносно компактною в метричному просторі $\left(C[0,2\pi], \, \sup_{t\in[0,2\pi]} |x(t) - y(t)|\right)$. ■

Задача 9.9. Доведіть, що метричний простір s всіх числових послідовностей з метрикою $\rho(x,y)=\sup\limits_{n}\dfrac{|\xi_n-\eta_n|}{1+|\xi_n-\eta_n|}$ не є компактом.

Розв'язок. Метричний простір X є компактом, якщо будь-яка нескінченна підмножина цього простору містить послідовність, що збігається до деякого елемента із X. Розглянемо множину $E_{0,1}=\left\{x=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,...):\xi_i\in\{0,1\}\right\}$ і утворимо із її елементів послідовність

$$x_n=\left(\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},...,\xi_n^{(n)},...\right).$$

Оцінимо відстань $\rho(x_n,x_m)$.

$$\rho(x_n,x_m)=\sup_i\frac{\left|\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(m)}\right|}{1+\left|\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(m)}\right|}=\frac{1}{2},\ n\neq m.$$

З цього випливає, що послідовність $x_n=\left(\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},...,\xi_n^{(n)},...\right)$ не є фундаментальною. Отже, з неї не можна виділити жодну збіжну послідовність. Таким чином, множина $E_{0,1}$ не є компактною. З цього випливає, що простір s не є компактом. ■

Задача 9.10. Доведіть, що секвенційно компактна множина $A\subset E$ була компактом в метричному просторі E тоді і лише тоді, коли вона є замкненою в E.

Розв'язок. Необхідність.

A — компакт $\Rightarrow\forall\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset A\,\exists\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}:x_{n_k}\to x\in A,\ n\to\infty\Rightarrow$

$\Rightarrow x_n\to x\in A\ \Rightarrow A$ - замкнена.

Достатність.

A — секвенційно компактна і замкнена $\Rightarrow$

$\Rightarrow\forall\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset A\,\exists\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}:x_{n_k}\to x\in A,\ n\to\infty\Rightarrow A$ — компакт. ■

Урок 10. Сепарабельні і несепарабельні метричні простори

Щоб довести, що простір є сепарабельним достатньо указати його зліченну скрізь щільну підмножину. Щоб довести, що простір не є сепарабельним достатньо показати, що якби в ньому існувала скрізь щільна підмножина, вона не могла б бути зліченною. Для цього необхідно побудувати сімейство куль, центри яких утворюють незліченну множину (континуум), потім вибрати радіуси цих куль, так щоб вони не перетиналися. Оскільки гіпотетична множина є скрізь щільною, в кожній з цих куль повинна була б містись хоча б одна точка цієї множини. Інакше кажучи, потужність цієї множини збігається з потужність множини куль — континуум. Це суперечить припущенню, що вона є зліченною.

Задача 10.1. Доведіть, що простір $\left(s, \sup\limits_n \frac{|\xi_n - \eta_n|}{1+|\xi_n - \eta_n|}\right)$ не є сепарабельним.

Розв'язок. Припустимо, що простір $\left(s, \sup\limits_n \frac{|\xi_n - \eta_n|}{1+|\xi_n - \eta_n|}\right)$ є сепарабельним, тобто містить скрізь щільну зліченну множину M. Розглянемо множину усіх послідовностей, що складаються лише з нулів і одиниць $E_{0,1}$. З одного боку, $E_{0,1} \subset s$. З іншого боку, кожну послідовність, що складається з нулів і одиниць, можна вважати бінарним розкладом дробової частини дійсного числа із $[0,1]$, тобто $card\ E_{0,1} = c$.

$$x \in E_{0,1},\ y \in E_{0,1},\ x \neq y \Rightarrow \rho(x,y) = \frac{1}{2} \Rightarrow S(x,r) \cap S(y,r) = \varnothing,\ r < \frac{1}{4}.$$

Отже, в кожну кулю $S(x,r),\ x \in E_{0,1},\ r < \frac{1}{4}$ повинна потрапити хоча б одна точка із M. Отже, $card\ M = card\ E_{0,1} = c$. Ця суперечність означає, що простір $\left(s, \sup\limits_n \frac{|\xi_n - \eta_n|}{1+|\xi_n - \eta_n|}\right)$ є несепарабельним. ■

Задача 10.2. Доведіть, що простір $\left(s, \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1+|\xi_k - \eta_k|}\right)$ є сепарабельним.

Розв'язок. Нехай $M = (r_1, r_2, \ldots, r_n, 0, \ldots),\ r_n \in \mathbb{Q},\ n \in \mathbb{N}$. Очевидно, що множина M є зліченою: $card\ M = \aleph_0$. Доведемо, що вона є скрізь щільною в просторі $\left(s, \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1+|\xi_k - \eta_k|}\right)$. Оскільки ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\xi_k}{1+\xi_k}$ є збіжним, то

$$\forall x \in s,\ \varepsilon > 0\ \exists n > 0 : \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\xi_k}{1+\xi_k} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

З іншого боку,

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \Rightarrow \forall x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)\ \exists x_0 = (r_1, r_2, \ldots, r_n, 0, \ldots) : \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k - r_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\rho(x,x_0)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|}\le\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-r_k|+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{M}=s$. ■

Задача 10.3. Доведіть, що простір l_p, $p\ge 1$ є сепарабельним.

Розв'язок. Нехай $x\in l_p$, $x=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,...)$, $x_n=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,0,...)$. Тоді

$$\rho(x,x_n)=\sum_{k=n+1}^{\infty}|\xi_k|^p \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\rho(x,x_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}|\xi_k|^p=0.$$

Розглянемо послідовності $x'_n=(r_1,r_2,...,r_n,0,...)$, де $r_n\in\mathbb{Q}$. Позначимо множину таких послідовностей як D_n.

$$\bar{\mathbb{Q}}=\mathbb{R} \Rightarrow \forall\xi_i\in\mathbb{R}\ \exists r_i\in\mathbb{Q}\ \ |\xi_i-r_i|<\frac{1}{n^{\frac{p+1}{p}}},\ i=1,2,...,n.$$

Покажемо, що в довільному околі точки $x_n=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,0,...)$ можна знайти точку $x'_n=(r_1,r_2,...,r_n,0,...)$.

$$\rho(x'_n,x_n)=\left(\sum_{i=1}^{n}|r_i-\xi_i|^p\right)^{1/p}<\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^{p+1}}\right)^{1/p}=\left(\frac{1}{n^p}\right)^{1/p}=\frac{1}{n}\Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x'_n,x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

За нерівністю трикутника

$$\rho(x'_n,x)\le\rho(x'_n,x_n)+\rho(x_n,x)<\frac{1}{n}+\rho(x_n,x)\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Отже, $x'_n\to x$ при $n\to\infty$, значить, $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}D_n}=l_p$.

$$card\ D_n=\aleph_0 \Rightarrow card\bigcup_{n=1}^{\infty}D_n=\aleph_0 \Rightarrow l_p$$ — сепарабельний простір. ■

Задача 10.4. Доведіть, що простір $L_\infty(0,1)$, де $\rho(x,y)=\sup_{t\in(0,1)}|x(t)-y(t)|$ не є сепарабельним.

Розв'язок. Припустимо, що $L_\infty(0,1)$ є сепарабельним, тобто містить зліченну скрізь щільну множину A. Розглянемо множину $M_0\subset l_\infty(0,1)$ всіх характеристичних функцій, тобто функцій, що набувають лише два значення — нуль і одиниця.

$$x_t(u)=\begin{cases}0,\ \text{якщо}\ 0<u\le t,\\ 1,\ \text{якщо}\ u>t.\end{cases}$$

Кількість функцій $x_t(u)$ співпадає з кількістю точок в інтервалі $(0,1)$, тобто $card\, M_0 = c$. Неважко перевірити, що $t \neq s \Rightarrow \rho(x_t, x_s) = 1$. Отже, якщо побудувати кулі з центрами в точках x_t і радіусами $r < \frac{1}{2}$, то $\forall x_t \neq x_s\ S(x_t, r) \bigcap S(x_s, r) = \varnothing$. Значить, в кожну кулю $S(x_t, r)$ повинна потрапити б хоча одна точка із A, тобто $card\, A = card\, M_0 = c$. Це суперечить припущенню, що множина A є зліченною. ■

Задача 10.5. *Для того щоб метричний простір (X, ρ) був сепарабельним, необхідно і достатньо, щоб він мав злічену базу (тобто задовольняв другу аксіому зліченності).*

Розв'язок. Необхідність. Нехай (X, ρ) — сепарабельний простір і $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — злічена всюди щільна підмножина носія X. Тоді кулі $S(a_n, r_m)$, де $n, m \in N$, $r_m \in Q$ утворюють злічену базу простору (X, ρ).

Дійсно, нехай x_0 — довільна точка із множини X, а G — довільна відкрита множина, що містить точку x_0. За означенням відкритої множини існує $\varepsilon > 0$ таке, що $S(x_0, \varepsilon) \subset G$. Оскільки A — всюди щільна множина, то для кожного $r_0 > 0$ в кулі $S(x_0, r_0)$ знайдеться точка $a_{n_0} \in A$. Виберемо $r_0 < \frac{\varepsilon}{2}$. Тоді куля $S\left(a_{n_0}, r_0\right)$ буде містити точку x_0 і одночасно цілком міститись всередині кулі $S(x_0, \varepsilon)$:

$$\rho(x_0, x) \leq \rho\left(x_0, a_{n_0}\right) + \rho\left(a_{n_0}, x\right) < r_0 + r_0 < \varepsilon.$$

Отже, для довільної відкритої множини G в системі множин $\{S(a_n, r_m)\}_{n,m \in N}$ знайшлася куля $S\left(a_{n_0}, r_0\right)$, що містить точку x_0 і належить множині G. Це означає, що $\{S(a_n, r_m)\}_{n,m \in N}$ — база.

Достатність. Нехай в просторі (X, ρ) є злічена база $\beta = \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$. Вибравши з кожної множини β_n по точці $a_n \in \beta_n$, ми отримаємо множину $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Доведемо, що ця множина є всюди щільною. Дійсно, припустимо супротивне. Нехай $\overline{A} \neq X$, то відкрита множина $G = X \setminus \overline{A}$ була б непорожньою і не містила б жодної точки із множини $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Але це неможливо, оскільки G — відкрита множина, і значить, вона є об'єднанням деяких множин із бази $\beta = \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$, які містять точки a_n.
■

Задача 10.6. *Наведіть приклад топологічного простору, в якому властивість сепарабельності не є спадковою.*

Розв'язок. Розглянемо топологічний простір

$$X=(a,b),\tau=\left\{\varnothing,X,\mathbb{R}_{(a,b)}=\{x\}\cup(a,b)\setminus(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\right\}$$

топологія якого утворена об’єднаннями одноточкових множин, що містять дійсні числа із інтервалу (a,b), та множиною раціональних чисел із цього інтервалу. Побудуємо підпростір із індукованою топологією.

$$M=\mathbb{R}_{(a,b)}\setminus\mathbb{Q},\ \tau_M=\left\{\tau_\alpha\cap M=\{x\},\ \tau_\alpha\in\tau,\ x\in(a,b)\setminus\mathbb{Q}\right\}.$$

Підпростір (M,τ_M) складається із ізольованих точок, тобто є дискретним. Він не є сепарабельним, оскільки його топологія є незліченою множиною одноелементних множин і не може мати всюди щільну злічену множину. ■

Для метричних просторів ситуація є більш простою.

Задача 10.7. *Довільна підмножина X_0 сепарабельного метричного простору X сама є сепарабельним простором, тобто сепарабельність є спадковою властивістю.*

Розв’язок. Нехай $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$— злічена всюди щільна в *X* множина його точок. Візьмемо два натуральних числа *n* і *k*. Якщо існують кілька точок $x\in X_0\subset X$, для яких

$$\rho(x,x_n)<\frac{1}{k},$$

виберемо хоча б одну із них і позначимо як $x_n^{(k)}$ (внаслідок щільності існує хоча б одна така точка). Позначимо множину таких точок через $A=\left\{x_{n_k}\right\}$.Ця множина є скінченною або зліченною.

Покажемо, що $\overline{A}=X_0$. Нехай $x\in X_0$. Візьмемо $\varepsilon>0$ і підберемо натуральне число k, так щоб $\frac{1}{k}\le\frac{\varepsilon}{2}$. Оскільки $\overline{\{x_n\}_{k=1}^{\infty}}=X$, то існує число n_0, таке що $\rho\left(x_{n_0},x\right)<\frac{1}{k}$. Отже, існує $x_{n_0}^{(k)}\in A$, така що $\rho\left(x_{n_0}^{(k)},x_{n_0}\right)<\frac{1}{k}$. Таким чином,

$$\rho\left(x_{n_0}^{(k)},x\right)\le\rho\left(x_{n_0}^{(k)},x_{n_0}\right)+\rho\left(x_{n_0},x\right)<\frac{2}{k}\le\varepsilon.$$

Оскільки число ε є довільним, множина *A* є всюди щільною в X_0. Отже, простір X_0 є сепарабельним. ■

Урок 11. Нормовані простори

Перевірка, чи є відображення нормою, здійснюється шляхом перевірки чотирьох властивостей норм.

Задача 11.1. Чи є нормою відображення $f : R \to R$, де
$$f(x) = |arctg\ x| ?$$

Розв'язок.

1). Відображення є невід'ємним, оскільки $f(x) \geq 0 \ \ \forall x \in C[a,b]$.

2). Перевіримо першу аксіому норми: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \equiv 0$? Відображення $f(x)$ її задовольняє, оскільки з того, що $f(x) = |arctg\ x| = 0$, випливає, що $x = 0$. І навпаки, якщо $x = 0$, то $f(x) = |arctg\ x| = 0$.

3). Перевіримо другу аксіому норми. Знайдемо параметри λ і точку x, для яких аксіома не виконується. Покладемо $x = \sqrt{3}$, $\lambda = \frac{1}{3}$. Тоді $\|\lambda x\| = arctg\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$. З іншого боку, $|\lambda|\|x\| = \frac{1}{3} arctg\ \sqrt{3} = \frac{1}{3}\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{9}$. Отже, $\exists x, \lambda \in R : \|\lambda x\| \neq |\lambda|\|x\|$. Отже, відображення f не є нормою. ■

Задача 11.2. Чи є нормою відображення $f : R^2 \to R$, де
$$f(x) = |\xi_1| + |\xi_2|, \text{ де } x = (\xi_1, \xi_2) ?$$

Розв'язок.

1). Відображення є невід'ємним, оскільки $f(x) \geq 0 \ \ \forall x \in R^2$.

2). Перевіримо першу аксіому норми: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \equiv 0$? Відображення $f(x)$ її задовольняє, оскільки з того, що $f(x) = |\xi_1| + |\xi_2| = 0$, випливає, що $|\xi_1| = 0$ і $|\xi_2| = 0$, тобто $\xi_1 = \xi_2 = 0$ і $x = (0,0) = 0$. І навпаки, якщо $x = 0$, то $\xi_1 = \xi_2 = 0$, тобто $|\xi_1| = 0$ і $|\xi_2| = 0$, отже, $f(x) = |\xi_1| + |\xi_2| = 0$. Перша аксіома виконується.

3). Перевіримо другу аксіому. Вона виконується, оскільки
$$f(\lambda x) = |\lambda \xi_1| + |\lambda \xi_2| = |\lambda|(|\xi_1| + |\xi_2|) = |\lambda| f(x).$$

4). Перевіримо третю аксіому. Нехай $x = (\xi_1, \xi_2)$ і $y = (\eta_1, \eta_2)$. Аксіома виконується, оскільки
$$f(x+y) = |\xi_1 + \eta_1| + |\xi_2 + \eta_2| \leq |\xi_1| + |\eta_1| + |\xi_2| + |\eta_2| = f(x) + f(y). \ ■$$

Задача 11.3. Чи є нормою відображення $f : R^n \to R$, де
$$f(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \ x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n), \text{ якщо } 0 < p < 1 \text{ і } n \geq 2.$$

Розв'язок.

1). Відображення є невід'ємним, оскільки $f(x) \geq 0 \ \ \forall x \in R^2$.

2). Перевіримо першу аксіому норми: $f(x)=0 \Leftrightarrow x\equiv 0$? Відображення $f(x)$ її задовольняє, оскільки з того, що $f(x)=\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, випливає, що $|\xi_k|=0,\ k=1,2,...,n$, тобто $x=(0,0,...,0)=0$. І навпаки, якщо $x=0$, то $|\xi_k|=0,\ k=1,2,...,n$, отже, $f(x)=0$. Перша аксіома виконується.

3). Перевіримо другу аксіому. Вона виконується, оскільки

$$f(\lambda x)=\left(\sum_{k=1}^{n}|\lambda\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(|\lambda|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}=|\lambda|f(x).$$

4). Третя аксіома не виконується. Виберемо вектори $x=\left(\frac{1}{2},0,...,0\right)$ і $y=\left(0,\frac{1}{2},0,...,0\right)$. З одного боку, якщо $0<p<1$ і $n\ge 2$, то

$$f(x)=\left(\left(\frac{1}{2}\right)^p+0+...\right)^{\frac{1}{p}}=\frac{1}{2} \text{ і } f(y)=\left(0+\left(\frac{1}{2}\right)^p+...\right)^{\frac{1}{p}}=\frac{1}{2}.$$

З іншого боку,

$$f(x+y)=\left(\left(\frac{1}{2}\right)^p+\left(\frac{1}{2}\right)^p+0+...\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\frac{2}{2^p}\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}}=2^{\frac{1-p}{p}}=2^{\frac{1}{p}-1}.$$

Якщо $0<p<1$, то $\frac{1}{p}-1>0$, тобто $2^{\frac{1}{p}-1}>1$. Отже,

$$f(x+y)\ge f(x)+f(y).$$

Це означає, що відображення f не є нормою. ■

Задача 11.4. Чи є нормою відображення $f: C[a,b]\to R$, де

$$f(x)=\max_{a\le t\le\frac{a+b}{2}}|x(t)|,\ \ x(t)\in C[a,b]?$$

Розв’язок.

1). Відображення є невід’ємним, оскільки $f(x)\ge 0\ \ \forall x\in C[a,b]$.

2). Перевіримо першу аксіому норми: $f(x)=0 \Leftrightarrow x\equiv 0$? Відображення $f(x)$ її не задовольняє, оскільки з того, що $f(x)=\max_{a\le t\le\frac{a+b}{2}}|x(t)|=0$, випливає, що $|x(t)|=0\ \ \forall t\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$, проте це не означає, що $x(t)\equiv 0\ \ \forall t\in[a,b]$. Отже, перша аксіома не виконується, тобто $f(x)$ не є нормою. ■

Задача 11.5. Чи є нормою відображення $f: C[a,b]\to R$, де

$$f(x)=|x(a)|+\max_{a\le t\le b}|x'(t)|,\ \ x(t)\in C^{(1)}[a,b]?$$

Розв’язок.

1). Відображення є невід’ємним, оскільки $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in C^{(1)}[a,b]$.

2). Перевіримо першу аксіому норми: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \equiv 0$?

Якщо $f(x) = |x(a)| + \max\limits_{a \leq t \leq b} |x'(t)| = 0$, то одночасно виконуються дві умови

$$\begin{cases} |x(a)| = 0, \\ \max\limits_{a \leq t \leq b} |x'(t)| = 0. \end{cases}$$

Із другої рівності випливає, що $x(t) \equiv C$, а з першої, — що $C = 0$. Отже, $x(t) \equiv 0$.

З іншого боку, якщо $x(t) \equiv 0$, то $f(x) = 0$. Отже, перша аксіома виконується.

3). Друга і третя аксіоми (однорідність і нерівність трикутника) є очевидними наслідками властивостей модуля.

Отже, відображення $f(x) = |x(a)| + \max\limits_{a \leq t \leq b} |x'(t)|$, $x(t) \in C^{(1)}[a,b]$ є нормою. ■

Задача 11.6. Чи є нормою відображення $f : C[a,b] \to R$, де

$$f(x) = |x(b) - x(a)| + \max_{a \leq t \leq b} |x'(t)|, \quad x(t) \in C^{(1)}[a,b]?$$

Розв’язок.

1). Відображення є невід’ємним, оскільки $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in C^{(1)}[a,b]$.

2). Перевіримо першу аксіому норми: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \equiv 0$?

Якщо $f(x) = |x(b) - x(a)| + \max\limits_{a \leq t \leq b} |x'(t)| = 0$, то одночасно виконуються дві умови

$$\begin{cases} |x(b) - x(a)| = 0, \\ \max\limits_{a \leq t \leq b} |x'(t)| = 0. \end{cases}$$

Із другої рівності випливає, що $x(t) = C \quad \forall t \in [a,b]$, а з першої, — що $C = x(b) = x(a)$. Якщо $x(a) \neq 0$, то $x(t) \not\equiv 0$. Отже, перша аксіома не виконується, тобто $f(x)$ не є нормою. ■

Перевірка збіжності послідовності в повному просторі зводиться до перевірки її фундаментальності. Якщо послідовність не є фундаментальною, то вона не є збіжною в жодному просторі.

Задача 11.7. Чи збігається в нормованому просторі l_2 послідовність

$$x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n}, 0, \ldots, 0}_{n}, 1, 0, 0, \ldots \right)?$$

Розв’язок. Оскільки

$$\|x_n - x_{n+1}\|^2 = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)^2 + 2 > 2,$$

послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не є збіжною. ■

Задача 11.9. Чи збігається в нормованому просторі l_1 послідовність

$$x_n = \left(\underbrace{0,0,...,0}_{n-1}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{(n+1)^2}, ... \right)?$$

Розв'язок. Оскільки простір l_1 є повним за нормою $\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|$, то для збіжності послідовності достатньо показати, що вона є фундаментальною.

$$\|x_n - x_{n+p}\| = \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{k^2} \le \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \to 0 \text{ при } n \to \infty .$$

Отже, послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ є збіжною. ■

Означення. В нормованому просторі E дві норми $\|x\|$ і $\|x\|_*$ називаються еквівалентними, якщо такі додатні константи C_1 і C_2, що

$$C_1 \|x\| \le \|x\|_* \le C_2 \|x\| .$$

Задача 11.10. Доведіть, що в скінченновимірних нормованих просторах всі норми є еквівалентними.

Розв'язок. Нехай E — n-вимірний дійсний нормований простір з нормою $\|x\|$. Виберемо в E деякий базис $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ і покажемо, що норма $\|x\|$ є еквівалентною евклідовій нормі

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} ,$$

де $x_1, x_2, ..., x_n$ — координати вектора x по базису $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$.

Перш за все зауважимо, що

$$\|x\| = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \|e_k\| \le \|x\|_2 \sum_{k=1}^{n} \|e_k\| = C_2 \|x\|_2 ,$$

де $c_2 = \sum_{k=1}^{n} \|e_k\|$.

Для оцінки норми $\|x\|$ зверху введемо функцію $f(x) = \|x\|$, що залежить від n змінних $x_1, x_2, ..., x_n$ простору R^n. Оскільки це норма, вона є неперервною функцією на R^n. Отже, вона є неперервною, зокрема, на одиничній сфері $S_1 = \{x \in R^n : \|x\|_2 = 1\}$. Норма є невід'ємною функцією, яка обертається в нуль лише на нульовому елементі. Це означає, що на одиничній сфері $f(x) > 0$. Оскільки сфера S_1 — компакт, то за теоремою Вейєрштрасса вона досягає на ній свій мінімум, тобто

$$\exists x_0 \in S_1 : f(x_0) = \min_{x \in S_1} f(x) > 0 .$$

Таким чином,

$$\forall x \in S_1 \ \|x\| \ge C_1 ,$$

де $C_1 = f(x_0)$. Тоді, з цього випливає, що $\left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\| \ge C_1$. З цього випливає, що

$$\forall x \neq 0 \quad \|x\| = \left\| \|x\|_2 \frac{\|x\|}{\|x\|_2} \right\| = \|x\|_2 \left\| \frac{\|x\|}{\|x\|_2} \right\| \geq C_1 \|x\|_2 .$$

Для $x = 0$ нерівність $\|x\| \geq c_1 \|x_2\|$ є очевидною. Таким чином, норми $\|x\|$ і $\|x\|_*$ є еквівалентними нормі $\|x\|_2$. Отже вони є еквівалентними і одна одній:

$$C_3 \|x\| \leq C_1 \|x\|_2 \leq \|x\|_* \leq C_2 \|x\|_2 \leq C_4 \|x\|. \ \blacksquare$$

Означення. В нормованому просторі E норма $\|x\|$ називається підпорядкованою нормі $\|x\|_*$, якщо $\|x\| \leq \|x\|_*$.

Задача 11.11. Доведіть, що дві норми є еквівалентними тоді і лише тоді, коли із збіжності послідовності за однією із норм випливає збіжність за іншою нормою.

Розв'язок. Необхідність. Нехай послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається за нормою $\|x\|_1$, яка еквівалентною нормі $\|x\|_2$, тобто $\exists C_1, C_2 > 0 : C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1 \ \ \forall x \in E$. Тоді, як легко бачити, вона збігається і за нормою $\|x\|_2$ за теоремою про мажоруючу послідовність..

Достатність. Нехай послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається за нормами $\|x\|_1$ і $\|x\|_2$. Позначимо через I тотожній оператор, що діє із $\left(E, \|x\|_1\right)$ і $\left(E, \|x\|_2\right)$, тобто $x = Ix$. Цей оператор є лінійним і неперервним, отже він є обмеженим. Таким чином, існує константа $C_2 > 0$, така що $\|Ix\|_2 = \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1 \ \ \forall x \in \left(E, \|x\|_1\right)$.

Аналогічно, розглядаючи тотожне відображення простору $\left(E, \|x\|_2\right)$ на простір $\left(E, \|x\|_1\right)$, отримуємо оцінку

$$\|Ix\|_1 = \|x\|_1 \leq C \|x\|_2 \ \ \forall x \in \left(E, \|x\|_2\right).$$

Поклавши $C_1 = \dfrac{1}{C}$, приходимо до нерівності

$$C_1 \|x\|_2 \leq \|x\|_1 .$$

Отже,

$$C_1 \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C_2 \|x\|_2 ,$$

тобто норми є еквівалентними. ■

Задача 11.12. Нехай на лінійному просторі E задано дві норми $\|x\|_1$ і $\|x\|_2$, відносно яких простір E є банаховим. Доведіть, що якщо одна із цих норм є підпорядкованою іншій, то вони є еквівалентними.

Розв'язок. Якщо норма $\|x\|_1$ підпорядкована $\|x\|_2$, то із збіжності послідовності за нормою $\|x\|_2$ випливає її збіжність за нормою $\|x\|_1$. Будь-яка збіжна послідовність є фундаментальною, до того ж простір E є повним за обома нормами, тобто всі фундаментальні послідовності є збіжними за обома нормами. Це означає, що класи збіжних послідовностей за обома нормами в просторі E збігаються, тобто норми є еквівалентними. ■

Задача 11.13. Чи є простір l_1 повним відносно норми
$$\|x\|_1 = \sup_k |\xi_k|, \quad x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in l_1 \,?$$

Розв'язок. Простір l_1 є повним відносно норми $\|x\|_2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|$, яка є підпорядкована нормі $\|x\|_1$: $\|x\|_1 \le \|x\|_2$. Отже, якщо б простір l_1 був повним відносно норми $\|x\|_1$, то ці норми були б еквівалентними. Якщо деяка послідовність збігається за однією з норм, то вона збігається і за еквівалентною нормою.

Розглянемо послідовність $x_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}, 0, ...0, ... \right)$, що є збіжною за нормою $\|x\|_1$, оскільки
$$\|x_n\| = \sup_k |\xi_k| = \frac{1}{n} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Виявляється, що за нормою $\|x\|_2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|$ вона не є збіжною, оскільки вона не є фундаментальною.
$$\|x - x_{2n}\|_2 = \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} \right| + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = 1.$$

Отже, простір l_1 не є повним відносно норми
$$\|x\|_1 = \sup_k |\xi_k|, \quad x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in l_1. \blacksquare$$

Задача 11.14. Чи еквівалентні в просторі $C[a,b]$ норми $\|f\| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$ і $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$?

Розв'язок. Не обмежуючі загальності, покладемо $a = 0, b = \pi$. Розглянемо послідовність функцій $f_n(x) = \begin{cases} \sin nx, \textit{ якщо } 0 \le nx \le \pi \\ 0, \textit{ в супротивному випадку}. \end{cases}$

Маємо, що $\max_{x \in [a,b]} |f_n(x)| = 1$, $\int_0^{\pi} |f_n(x)| dx = \frac{2}{n}$. Отже, ці норми не можуть бути еквівалентними. ■

Задача 11.15. Доведіть, що будь-який скінченновимірний нормований простір E є повним.

Розв'язок. Нехай послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною. Тоді вона є обмеженою. За теоремою Больцано–Вейерштраса із неї можна виділити підпослідовність, збіжну до деякого елемента $x_0 \in E$. В такому випадку фундаментальна послідовність також збігається до $x_0 \in E$. ■

Урок 11. Простори лінійних неперервних функціоналів і операторів

Задача 11.1. Довести неперервність функціонала f, заданого на просторі $C[-2,2]$ за допомогою формули

$$f(x)=x(2)+\int_{-2}^{2}tx(t)\,dt,$$

Розв'язок. Лінійність випливає із властивостей інтеграла. Перевіримо неперервність в точці $x=0$. Для цього виберемо послідовність $x_n\to 0$, тобто $\|x_n\|\to 0$, $n\to\infty$. Оскільки функціонал f лінійний, то $f(0)=0$ і треба довести, що $f(x_n)\to 0$.

$$\left|f(x_n)\right|\le\left|x_n(2)\right|+\left|\int_{-2}^{2}tx_n(t)\,dt\right|\le\left|x_n(2)\right|+\int_{-2}^{2}|t|\left|x_n(t)\right|dt\le$$

$$\le\max_{t\in[-2,2]}\left|x_n(t)\right|+\max_{t\in[-2,2]}\left|x_n(t)\right|\int_{-2}^{2}|t|\,dt=\|x_n\|_{C[-2,2]}+\|x_n\|_{C[-2,2]}\int_{-2}^{2}|t|\,dt\le$$

$$\le\|x_n\|_{C[-2,2]}+4\|x_n\|_{C[-2,2]}=5\|x_n\|_{C[-2,2]}\to 0,n\to\infty.$$

Отже, функціонал f є неперервним. Можна також послатися на те, що функціонал обмежений. ■

Задача 11.2. Довести неперервність функціонала f, заданого на просторі l_3 за допомогою формули

$$f(x)=x_1-4x_2.$$

Розв'язок. Лінійність очевидна. Доведемо обмеженість функціонала. Для цього застосуємо нерівність Гьольдера.

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty}a_ib_i\right|\le\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|^q\right)^{1/q},\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ \ p,q\ge 1.$$

За умовами задачі $p=3,\ q=\dfrac{3}{2},\ a_1=x_1,\ a_2=x_2,\ b_1=1,\ b_2=-4,\ a_i=b_i=0,\ i\ge 3$.

Отже,

$$\left|f(x)\right|=\left|x_1-4x_2\right|\le\left(|1|^{\frac{3}{2}}+|-4|^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}\left(|x_1|^3+|x_2|^3\right)\le 9^{\frac{2}{3}}\|x\|_{l_3}.\ ■$$

Задача 11.3. Обчислити норму функціонала $f(x)=x(1)-2x(2)$, заданого на просторі $C[0,2]$.

Розв'язок. Доведемо дві протилежні нерівності.

З одного боку,

$$\left|f(x)\right|\le\left|x(1)\right|+2\left|x(1)\right|\le 3\|x\|_{C[0,2]}\Rightarrow\|f\|\le 3.$$

З іншого боку,

$$\|f\|=\sup_{\substack{x\in C[0,2],\\ x\ne 0}}\frac{\left|f(x)\right|}{\|x\|_{C[0,2]}}\ge\frac{\left|f(x)\right|}{\|x\|_{C[0,2]}}=\frac{\left|x(1)-2x(2)\right|}{\max\limits_{t\in[0,2]}\left|x(t)\right|}.$$

Якщо ми знайдемо таку функцію, на якій права частина нерівності дорівнює 3, задача буде розв'язана. Виберемо функцію, таку щоб $\max\limits_{t\in[0,2]}\left|x(t)\right|=1$, $x(1)=1$ і

$x(2)=-1$. Очевидно, що треба взяти функцію, що обмежена смугою $-1\le\left|x(t)\right|\le 1$ і проходить через точки $(1,1)$ і $(2,-1)$. ■

Задача 11.4. Обчислити норму функціонала $f(x)=2x_1-3x_3$, заданого на просторі l_4.

Розв'язок. Доведемо дві протилежні нерівності.

Застосувавши нерівність Гьольдера при $p=4, q=\frac{4}{3}$, $a_1=2, a_2=-3$, $b_1=x_1, b_2=x_3$, $a_i=x_i, b_i=0, i=3,...$ отримуємо

$$\left|f(x)\right|\le\left(2^{\frac{4}{3}}+3^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}\left(\left|x_1\right|^4+\left|x_2\right|^4\right)\le\left(2^{\frac{4}{3}}+3^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}\|x\|_{l_4}.$$

Отже,

$$\|f\|\le\left(2^{\frac{4}{3}}+3^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}.$$

З іншого боку, маємо нерівність

$$\|f\|=\sup_{x\in l_4,x\ne 0}\frac{\left|f(x)\right|}{\|x\|_{l_4}}\ge\frac{\left|f(x)\right|}{\|x\|_{l_4}}.$$

Знайдемо послідовність, на якій

$$\frac{\left|f(x)\right|}{\|x\|_{l_4}}=\left(2^{\frac{4}{3}}+3^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}.$$

Для цього врахуємо, що нерівність Гьольдера обертається на рівність, якщо $b_i=\left|a_i\right|^{p-1}\operatorname{sgn}a_i$. Власне, на цьому можна було б закінчити, тому що достатньо показати. що така послідовність існує, отже виконується нерівність

$$\|f\|\ge\left(2^{\frac{4}{3}}+3^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}},$$

але з дидактичних міркувань спробуємо все ж таки явно знайти таку послідовність.

Покладемо $p=\frac{4}{3}, q=4, a_1=2, a_3=-3, a_i=0, i\ne 1,3$ і $x_1^*=2^{\frac{1}{3}}$, $x_3^*=-3^{\frac{1}{3}}$, $x_i^*=0, i\ne 1,3$. Тоді $f(x^*)=2^{\frac{4}{3}}+3^{\frac{4}{3}}$ і $\|x^*\|_{l_4}=\left(2^{\frac{4}{3}}+3^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}$. Отже,

$$\|f\|\ge\frac{\left|f(x)\right|}{\|x\|_{l_4}}=\left(2^{\frac{4}{3}}+3^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}.$$

Таким чином,

$$\|x\|_{l_4}=\left(2^{\frac{4}{3}}+3^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}.$$ ■

Задача 11.5. Обчислити норму функціонала $f(x)=\int_{-1}^{1} tx(t)\,dt$, заданого на просторі $L_3[-1,1]$.

Розв'язок. Використаємо інтегральну нерівність Гьольдера.

$$\left|\int_a^b f(t)\,g(t)dt\right| \le \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(t)|^q dt\right)^{1/q}.$$

Покладемо $p=\frac{3}{2},\ q=3,\ f(t)=t,\ g(t)=x(t)$.

$$|f(x)| \le \left(\int_{-1}^{1} |t|^{\frac{3}{2}}\,dt\right)^{\frac{2}{3}} \left(\int_{-1}^{1} |x(t)|^3\,dt\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Перший інтеграл дорівнює $\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$. Отже,

$$\|f\| \le \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Нерівність Гьольдера перетворюється на рівність, якщо

$$x(t)=|y(t)|^{p-1}\operatorname{sgn} y(t).$$

Отже, виберемо функцію

$$x^*(t)=|t|^{\frac{1}{2}}\operatorname{sgn} t.$$

Тоді

$$f(x^*)=\int_{-1}^{1} |t|^{\frac{3}{2}}\,dt=\frac{4}{5},$$

$$\|x^*\|_{L_3[-1,1]}=\left(\int_{-1}^{1} |t|^{\frac{3}{2}}\,dt\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Оскільки,

$$\|f\| \ge \frac{|f(x^*)|}{\|x^*\|}=\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Отже,

$$\|f\|=\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}. \blacksquare$$

Задача 11.6. Обчислити норму функціонала $f(x)=\int_{-1}^{1} tx(t)\,dt$, заданого на просторі $C[-1,1]$.

Розв'язок. З одного боку,

$$\|f\| \le \|x\|_{C[-1,1]} \text{ (див. задачу 11.1).}$$

Тоді $\|f\| \ge 1$. Для доведення протилежної оцінки треба підібрати неперервну функцію x^*, так щоб

$$\frac{\left|f\left(x^*\right)\right|}{\left\|x^*\right\|_{C[-1,1]}}=1.$$

Серед неперервний функцій такої функції не існує, але можна взяти обмежену розривну функцію $x^*\left(t\right)=\operatorname{sgn}\left(t\right)$ в просторі обмежених функцій $M\left[-1,1\right]$. Тоді

$$\frac{\left|f\left(x^*\right)\right|}{\left\|x^*\right\|_{M[-1,1]}}=1$$

Для того щоб розв’язати задачу, знайдемо послідовність неперервних функцій $x_n\left(t\right)\to x^*\left(t\right)\ \forall t\in\left[-1,1\right]$. Цю послідовність можна задати формулою

$$x_n\left(t\right)=\begin{cases}1, & \textit{якщо}\ \frac{1}{n}\le t\le 1,\\ nt, & \textit{якщо}\ -\frac{1}{n}\le t\le\frac{1}{n},\\ -1, & \textit{якщо}\ -1\le t\le -\frac{1}{n}\textit{ю}\end{cases}$$

$$f\left(x_n\right)=2\left(\int_0^{1/n} nt^2dt+\int_{1/n}^1 tdt\right)=1-\frac{1}{3n^2}.$$

$$\left\|x_n\right\|_{C[-1,1]}=1\Rightarrow\left\|f\right\|\ge\frac{\left|f\left(x_n\right)\right|}{\left\|x_n\right\|_{C[-1,1]}}=1-\frac{1}{3n^2}\to 1,\ n\to\infty\Rightarrow\left\|f\right\|\ge 1.$$

Отже,

$$\left\|f\right\|=1.\ ■$$

Задача 11.7. Обчислити норму функціонала $f\left(x\right)=3x_1-4x_2$, заданого на просторі l_∞^2 з нормою $\left\|x\right\|_{l_\infty^2}=\max\left(\left|x_1\right|,\left|x_2\right|\right)$.

Розв’язок. Застосуємо геометричну інтерпретацію функціонала:

$$\left\|f\right\|=\frac{1}{\inf\limits_{x\in L_f}\left\|x\right\|},\ L_f=\left\{x\in L:\ f\left(x\right)=1\right\}.$$

Значить, щоб знайти норму функціонала, треба побудувати гіперплощину L_f і знайти відстань d від нуля до цієї гіперплощини. Тоді $\left\|f\right\|=\frac{1}{d}$.

Побудуємо на площині пряму $3x_1-4x_2=1$ (гіперплощина L_f). для того щоб знайти відстань від нуля до цієї прямої, треба побудувати кулю з центром в нулі радіуса r, таку щоб вона торкалася прямої. Кулею $S\left(0,r\right)$ в просторі l_∞^2 є квадрат із стороною $2r$. Точкою дотику є точка $\left(r,-r\right)$. Отже,

$$3r+4r=1\Rightarrow d=\frac{1}{7}\Rightarrow\left\|f\right\|=7.\ ■$$

Задача 11.8. Чи є функціонал $f\left(x\right)=\int_0^1 x\left(t\right)\sin^2 tdt$ в просторі $L_2\left[0,1\right]$?

Розв’язок. Перевіримо лінійність функціонала.

$$\forall\alpha_1,\alpha_2\in R,\ \ x_1,x_2\in L_2[0,1]$$

$$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)=\int_0^1(\alpha_1x_1(t)+\alpha_2x_2(t))\sin^2 tdt=$$

$$=\alpha_1\int_0^1 x_1(t)\sin^2 tdt+\alpha_2\int_0^1 x_2(t)\sin^2 tdt=\alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_2).$$

Отже, функціонал є лінійним в просторі $L_2[0,1]$. Тепер перевіримо його обмеженість. За нерівністю Коші–Буняковського $\left|(x,y)\right|\le\|x\|\|y\|=\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}$. Отже,

$$\left|(x,\sin^2 t)\right|=\left|\int_0^1 x(t)\sin^2 tdt\right|\le\sqrt{\int_0^1 x^2(t)\,dt}\sqrt{\int_0^1\sin^4 tdt}\le\|x\|.$$

Оскільки $\|f\|=\inf\limits_{C>0}\left\{C:|f|\le C\|x\|\ \ \forall x\in E\right\}$, звідси випливає, що $\|f\|\le 1$. Для того щоб лінійний неперервний функціонал був неперервним, необхідно і достатньо. щоб він був обмеженим. Отже, функціонал $f(x)=\int_0^1 x(t)\sin^2 tdt$ є неперервним. ■

Задача 11.9. Обчисліть норму оператора $A: R^n\to l_2$, де

$$A(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)=\left(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,\frac{\xi_1}{2},\frac{\xi_2}{2},...,\frac{\xi_n}{2},...,\frac{\xi_1}{k},\frac{\xi_2}{k},...,\frac{\xi_n}{k},...\right),\ x=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n).$$

Розв'язок. Обчислимо норму $\|Ax\|_{l_2}$.

$$\|Ax\|_{l_2}=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\right)}=\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\right)}=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}}\|x\|_{R^n}\Rightarrow\|A\|=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}}.\ ■$$

Задача 11.10. Нехай m — простір обмежених числових послідовностей, а оператор A: $m\to m$ задано рівностями

$$y_i=\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}x_j,\quad i=1,2,...,$$

де a_{ij} — елементи нескінченновимірної матриці, що задовольняє умову

$$\gamma=\sup_i\sum_{j=1}^{\infty}\left|a_{ij}\right|<+\infty.$$

Обчисліть норму оператора A.

Розв'язок. Із рівності $y_i=\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_{ij}x_j,\quad i=1,2,...$ випливає, що

$$\forall i\ \ |y_i|=\sum_{j=1}^{\infty}\left|a_{ij}\right|\|x\|_m\le\gamma\|x\|_m,\quad i=1,2,...$$

Отже,

$$\|Ax\|_m\le\gamma\|x\|_m,\ \text{тобто}\ \|A\|\le\gamma.$$

Не обмежуючи загальності, будемо вважати. що супремум досягається при i = 1. Тоді для вектора x з координатами $x_j=\operatorname{sgn}a_{ij}$ виконується рівність

$$\|y\|_m = y_1 = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Таким чином,

$$\|A\| = \sup_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|. \ ■$$

Задача 11.11. Дослідіть рівномірну і поточкову збіжність послідовності операторів $\{A_n\} \subset L(E,E)$, де $A_n x(t) = n \int_t^{t+\frac{1}{n}} x(\tau)\,d\tau$, $t \in [0,1]$, $E = C[0,1]$.

Розв'язок. Нехай $F(t)$ — первісна функції $x(t)$. Тоді при $n \to \infty$

$$A_n x = n \int_t^{t+\frac{1}{n}} x(\tau)\,d\tau = n\left(F\left(t+\frac{1}{n}\right) - F(t)\right) = \frac{F\left(t+\frac{1}{n}\right) - F(t)}{\frac{1}{n}} \to F'(t) = x(t).$$

Таким чином, послідовність $\{A_n\} \subset L(E,E)$ поточково збігається до тотожного оператора *I*. Покажемо тепер, що ця послідовність не збігається рівномірно до цього оператора. Розглянемо функції $x_n(t) = t^{n-1}$, $n \ge 2$.

$$\|x_n\| = \max_{t\in[0,1]} \left|t^{n-1}\right| = 1.$$

Оцінимо наступну норму.

$$\|A_n x_n - x_n\| = \max_{t\in[0,1]} \left| n \int_t^{t+\frac{1}{n}} \tau^{n-1} d\tau - t^{n-1} \right| =$$

$$= \max_{t\in[0,1]} \left| \tau^{n-1} \Big\|_{\tau=t}^{\tau=t+\frac{1}{n}} - t^{n-1} \right| = \max_{t\in[0,1]} \left| \left(t + \frac{1}{n}\right)^n - t^n - t^{n-1} \right| =$$

$$= \max_{t\in[0,1]} \left| t^n + t^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2n^2} t^{n-2} + \ldots + \frac{1}{n^n} - t^n - t^{n-1} \right| \ge$$

$$\ge \frac{n(n-1)}{2n^2} \max_{t\in[0,1]} t^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2n^2} \ge \frac{1}{4}, \ n \ge 2.$$

Отже,

$$\|A_n - I\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax - x\| \ge \|Ax_n - x_n\| \ge \frac{1}{4} \text{ при } n \to \infty.$$

Таким чином, послідовність не збігається рівномірно до тотожного оператора. ■

Задача 11.12. Дослідіть рівномірну і поточкову збіжність послідовності операторів $\{A_n\} \subset L(E,E)$, де $A_n x(t) = t^n x(t)$, $t \in [0,1]$, $E = C[0,1]$.

Розв'язок. При $n \to \infty$

$$t^n x(t) \to \begin{cases} 0, \ \textit{якщо}\ 0 \le t \le 1, \\ x(1), \ \textit{якщо}\ t = 1. \end{cases}$$

Отже, послідовність $\{A_n\}$ не збігається поточково до жодного неперервного оператора. З цього випливає, що вона не збігається і рівномірно. ■

Урок 12. Обернені оператори

Задача 12.1. Нехай оператор $A:C[0,2]\to C[0,2]$ задається формулою

$$Ax(t)=\int_0^t x(\tau)\,d\tau.$$

Довести, що A неперервний оператор, а обернений оператор A^{-1} не є неперервним.

Доведення. Доведемо, що A — неперервний оператор. Для цього покажемо, що він є обмеженим.

$$\|Ax\|_{C[0,2]}\le \max_{t\in[0,2]}\int_0^t |x(\tau)|\,d\tau \le 2\|x\|_{C[0,2]}.$$

Отже, $\|A\|\le 2$.

Знайдемо обернений оператор. Область значень оператора A є простором неперервно диференційованих функцій, які в нулі обертаються в нуль. Визначимо на області $\operatorname{Im} A$ оператор

$$A^{-1}y(t)=\frac{dy}{dt}.$$

Дійсно,

$$\frac{d}{dt}Ax(t)=\frac{d}{dt}\int_0^t x(\tau)\,d\tau=x(t).$$

Для того щоб довести, що оператор A^{-1} не є неперервним, розглянемо послідовність

$$y_n(t)=\frac{\sin nt}{n}$$

За означенням оператора A^{-1} послідовність y_n належить його області визначення, до того ж

$$A^{-1}y_n(t)=\cos nt.$$

Оскільки

$$\|y_n\|_{C[0,2]}\le\frac{1}{n},$$

послідовність y_n збігається до функції $y^*=0$. Отже, якщо б оператор A^{-1} був неперервним, послідовність $A^{-1}y_n$ мала б прямувати до $A^{-1}y^*=0$. Проте

$$\left\|A^{-1}y_n-A^{-1}y^*\right\|_{C[0,2]}=\|\cos nt\|_{C[0,2]}.$$

і не збігається до нуля. Таким чином, оператор A^{-1} не є неперервним. ■

Задача 12.2. Нехай оператор $A:C[0,1]\to C[0,1]$ задається формулою

$$Ax(t)=x(t)+\int_0^1 e^{s+t}x(s)\,ds.$$

Довести, що обернений оператор A^{-1} існує і є неперервним.

Доведення. Оператор A визначений на просторі $C[0,1]$ і

$$\|A\|\le 1+\max_{t\in[0,1]}\int_0^t e^{s+t}ds=1+(e-1)e.$$

Оскільки простір $C[0,1]$ є банаховим простором, отже за теоремою Банаха про неперервний оператор, тому при кожному $y \in C[0,1]$ рівняння

$$Ax(t) = x(t) + e^t \int_0^1 e^s x(s)\,ds = y(t)$$

має єдиний розв'язок.

Позначимо $c = \int_0^1 e^s x(s)\,ds$, тоді

$$x(t) = y(t) - ce^t.$$

Помножимо цей вираз на e^t і проінтегруємо по відрізку $[0,1]$

$$\int_0^1 e^t x(t)\,dt = \int_0^1 e^t y(t)\,dt - c\frac{e^2-1}{2}.$$

Оскільки $c = \int_0^1 e^t x(t)\,dt$, то

$$c\frac{e^2+1}{2} = \int_0^1 e^t y(t)\,dt.$$

Виразимо значення c, підставимо в рівняння і отримаємо

$$x(t) = y(t) - \frac{2}{e^2+1}\int_0^1 e^{t+s} y(s)\,ds \equiv A^{-1}y(t).$$

Значить, $x(t)$ є розв'язком вихідного рівняння і

$$\left\|A^{-1}\right\| \le 1 + \frac{2}{e^2+1} e(e-1). \blacksquare$$

Задача 12.3. Нехай оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$ задається формулою

$$Ax(t) = x(t) + \int_0^t x(s)\,ds.$$

Довести, що обернений оператор A^{-1} існує і є неперервним.

Доведення. Розглянемо рівняння

$$Ax(t) = x(t) + \int_0^t x(s)\,ds = y(t),$$

де $y \in C[0,1]$.

Позначимо $g(t) = \int_0^t x(s)\,ds$. Зауважимо, що $g(0) = 0$ і g — неперервно диференційована функція, для якої $g'(t) = x(t)$.

Оскільки $x(t) = y(t) - g(t)$, отримуємо диференційне рівняння

$$g'(t) = y(t) - g(t).$$

Розв'яжемо однорідне рівняння $g'(t) + g(t) = 0$. Його розв'язком є функція $g(t) = ce^{-t}$. Використовуючи метод варіації довільної сталої і покладаючи $g(t) = c(t)e^{-t}$, отримуємо

$$c'(t) = e^t y(t).$$

Звідси випливає, що

$$c(t) = \int_0^t e^s y(s)\,ds + \gamma.$$

Оскільки $g(0) = 0$, маємо $c(0) = \gamma = 0$. Отже,

$$g(t) = \int_0^t e^{s-t} y(s)\,ds$$

і

$$x(t) = A^{-1}y(t) = y(t) - \int_0^t e^{s-t} y(s)\,ds.$$

Оцінимо норму оператора A^{-1}.

$$\left\|A^{-1}y\right\|_{C[0,1]} \le \left(1 + \max_{t\in[0,1]} \int_0^t e^{s-t}ds\right)\|y\|_{C[0,1]} = \left(2 - e^{-1}\right)\|y\|_{C[0,1]}.$$

Отже,

$$\left\|A^{-1}\right\| \le 2 - e^{-1}. \blacksquare$$

Задача 12.4. Нехай оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$ задається формулою

$$Ax(t) = x''(t) + x(t),$$

де $D(A) = \left\{x(t) \in C^{(2)}[0,1] : x(0) = 0,\ x'(0) = 0\right\}$.Довести, що обернений оператор A^{-1} існує і є неперервним.

Доведення. Розглянемо рівняння

$$x''(t) + x(t) = y(t)$$

з початковими умовами $x(0) = x'(0) = 0$ і довільною функцією $y \in C[0,1]$. Знайдемо розв'язок цієї задачі Коші. Для цього розглянемо однорідне рівняння

$$x''(t) + x(t) = 0.$$

Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$x(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t.$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння знайдемо методом варіації довільної сталої:

$$x(t) = c_1(t)\sin t + c_2(t)\cos t.$$

Функції $c_1(t)$ і $c_2(t)$ визначаються із системи

$$\begin{cases} c_1'(t)\sin t + c_2'(t)\cos t = 0, \\ c_1'(t)\cos t - c_2'(t)\sin t = y(t). \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, знайдемо $c_1'(t) = y(t)\cos t$, $c_2'(t) = -y(t)\sin t$. Тоді

$$c_1(t) = \int_0^t y(s)\cos s\,ds + \gamma_1,$$

$$c_2(t) = -\int_0^t y(s)\sin s\,ds + \gamma_2.$$

Оскільки $x(0)=c_2(0)=0$, то $\gamma_2=0$. Крім того, $x'(0)=c_1(0)=0$, тому $\gamma_1=0$. Отже,

$$x(t)=\int_0^t \sin(t-s)y(s)\,ds = A^{-1}y(t).$$

Таким чином, рівняння $Ax=y$ має єдиний розв'язок для будь-якого елемента $y\in C[0,1]$. Крім того,

$$\left\|A^{-1}\right\| \le \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 \left|\sin(t-s)\right| ds \le 1. \blacksquare$$

Задача 12.5. Довести, що оператор $A: l_2 \to l_2$, який задається формулою

$$Ax=(x_1+x_2, x_1-x_2, x_3, x_4, \ldots),$$

має неперервний обернений оператор A^{-1} і обчислити його норму.

Доведення. Оскільки $\|A\|_{l_2} \le \sqrt{2}\|x\|_{l_2}$, то $A\in \mathcal{L}(l_2,l_2)$. Враховуючи те, що l_2 — банаховий простір, то для доведення того, що оператор A має неперервний обернений оператор завдяки теоремі Банаха про обернений оператор достатньо довести, що рівняння $Ax=y$ має єдиний розв'язок для довільного елемента $y\in l_2$.

$$Ax=(x_1+x_2, x_1-x_2, x_3, x_4, \ldots)=(y_1, y_2, \ldots)$$

Звідси випливає, що

$$x_1+x_2=y_1,$$
$$x_1-x_2=y_2,$$
$$x_i=y_i,\ i=3,4,\ldots.$$

Отже, рівняння $Ax=y$ має єдиний розв'язок

$$x=A^{-1}y=\left(\frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_1-y_2}{2}, y_3, y_4, \ldots\right).$$

Обчислимо норму оператора A^{-1}. Із означення норми в просторі l_2 випливає, що

$$\left\|A^{-1}y\right\|_{l_2}^2=\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2+\left(\frac{y_1-y_2}{2}\right)^2+y_3+\ldots \le \frac{y_1^2}{2}+\frac{y_2^2}{2}+y_3^2+\ldots \le \|y\|_{l_2}^2.$$

Звідси випливає, що

$$\left\|A^{-1}\right\| \le 1.$$

Крім того, якщо взяти $e_3=(0,0,1,0,0,\ldots)$, то $A^{-1}e_3=e_3$ і

$$\left\|A^{-1}\right\| \ge \frac{\left\|A^{-1}e_3\right\|_{l_2}}{\|e_3\|_{l_2}}=1.$$

Отже,

$$\left\|A^{-1}\right\|=1. \blacksquare$$

Задача 12.6. Довести, що оператор $A: l_2 \to l_2$, який задається формулою

$$Ax=\left(x_1, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_n}{n}, \ldots\right)$$

має неперервний обернений оператор A^{-1} і обчислити його норму.

Доведення. Легко бачити, що оператор A є лінійним і обмеженим, оскільки

$$\|Ax\|_{l_2} \le \|x\|_{l_2}.$$

Його образ — лінійний підпростір простору l_2. Отже, це лінійний нормований простір з нормою із l_2. Доведемо, що від є взаємно однозначним.

Ясно, що оператор A є сюр'єктивним. Крім того, якщо $Ax = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \ldots \right) = (0, 0, \ldots)$, то $x_1 = x_2 = \ldots = 0$.

Покажемо, що обернений оператор є необмеженим. Дійсно, $A^{-1}(y_1, y_2, \ldots) = (y_1, 2y_2, \ldots, ny_n, \ldots)$. Якщо $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, то $A^{-1}e_n = ne_n$, отже, $\left\| A^{-1}e_n \right\|_{l_2} = n$. Таким чином,

$$\left\| A^{-1} \right\| = \sup_{\|x\|_{l_2} \le 1} \left\| Ax \right\|_{l_2} \ge n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \blacksquare$$

Урок 13. Спряжені оператори

В задачах про спряжені оператори використовуються факти про загальний вигляд функціонала в певних просторах.

Задача 13.1. Нехай $1 < p < \infty$ і $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тоді для будь-якої функції $\varphi \in L_p[a,b]$ визначений лінійний неперервний функціонал f, заданий на $L_p[a,b]$, який можна подати у вигляді

$$f(x) = \int_a^b \varphi(t) f(t) dt, \tag{13.1}$$

і

$$\|f\| = \|\varphi\|_{L_q[a,b]}.$$

І навпаки, для кожного функціонала $f \in L_p^*$ існує функція $\varphi \in L_p[a,b]$, для якої виконується рівність (13.1), тобто між просторами L_p^* і L_q існує ізометрія, а значить, L_q є спряженим простором до L_p (Без доведення.)

Задача 13.2. Нехай f — лінійний неперервний функціонал, заданий на l_p, $1 \le p < \infty$. Тоді для довільної послідовності $a = \{a_n\}_{n=1}^\infty \in l_q$ співвідношення

$$f(x) = \sum_{i=1}^\infty a_i x_i, \tag{13.2}$$

визначає лінійний неперервний функціонал на l_p і

$$\|f\| = \|a\|_{l_q},$$

де $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. І навпаки, для кожного $f \in l_p^*$ існує послідовність $a = \{a_n\}_{n=1}^\infty \in l_q$, для якої виконується рівність (13.2), тобто між просторами l_p^* і l_q існує ізометрія, а значить, l_q є спряженим простором до l_p.

Доведення. Нехай $a = \{a_n\}_{n=1}^\infty \in l_q$, а функціонал f задається співвідношенням

$$f(x) = \sum_{i=1}^\infty a_i x_i.$$

З нерівності Гьольдера випливає, що

$$|f(x)| = \left|\sum_{n=1}^\infty a_n x_n\right| \le \|a\|_{l_q} \|x\|_{l_p}, \text{ де } x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in l_p.$$

Отже,

$$\|f\| \le \|a\|_{l_q}.$$

Оскільки функціонал f є лінійним, достатньо довести протилежну нерівність

$$\|f\| \ge \|a\|_{l_q}.$$

Для кожного $m \in Ґ$ визначимо послідовність

$$x_n^{(m)} = \begin{cases} \operatorname{sgn} a_n |a_k|^{q-1}, & \textit{якщо } n \le m, \\ 0, & \textit{якщо } n > m. \end{cases}$$

Внаслідок рівності $p(q-1) = q$, маємо

$$\left\|x^{(m)}\right\|_{l_p}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n^{(m)}\right|^p\right)^{1/p}=\left(\sum_{n=1}^{m}\left|a_n\right|^q\right)^{1/p}$$

і

$$f\left(x^{(m)}\right)=\sum_{n=1}^{m}\operatorname{sgn}a_n\left|a_n\right|^{q-1}a_n=\sum_{n=1}^{m}\left|a_n\right|^q .$$

За означенням норми функціонала

$$\left|f\left(x^{(m)}\right)\right|\le\|f\|_{l_p^*}\left\|x^{(m)}\right\|_{l_p},$$

маємо

$$\sum_{n=1}^{m}\left|a_n\right|^q\le\|f\|_{l_p^*}\left(\sum_{n=1}^{m}\left|a_n\right|^q\right)^{1/p}.$$

Звідси випливає, що

$$\left(\sum_{n=1}^{m}\left|a_n\right|^q\right)^{1/q}\le\|f\|_{l_p^*} .$$

Переходячи до границі при $m\to\infty$, маємо, що $a\in l_q$.

Для того щоб довести ізометрію між просторами l_q і l_q^*, покажемо,що кожний функціонал $f\in l_p^*$ можна подати у вигляді

$$f\left(x\right)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i x_i .$$

Виберемо послідовності $e_n=\left(0,0,\dots 0,\underbrace{1}_{n},0,\dots\right)$, $n=1,2,\dots$.

Покажемо, що якщо $x=\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}\in l_p$, то

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}x_n e_n .$$

Дійсно, якщо

$$S_m=\sum_{n=1}^{m}x_n e_n ,$$

то

$$\left\|x^{(m)}-S_m\right\|_{l_p}^p=\sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n\right|^p .$$

Оскільки $x\in l_p$, то $\sum_{n=m+1}^{\infty}\left|x_n\right|^p\to 0$ при $m\to\infty$. Отже, $S_m\to x$ при $m\to\infty$. Таким чином,

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}x_n e_n .$$

Оскільки f — лінійний неперервний функціонал, маємо

$$f\left(S_m\right)\to f\left(x\right) \text{ при } m\to\infty$$

і

$$f\left(S_m\right)=\sum_{n=1}^{m}a_n x_n .$$

Отже,

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i x_i$$

і ізометрію установлено. ■

Задача 13.3. Знайдіть оператор, спряжений до оператора $A: L_2[0,1]\to L_2[0,1]$, задається формулою

$$Ax(t)=\int_0^t x(s)\,ds.$$

Доведення. За теоремою 13.1. будь-який функціонал g, заданий на $L_2[0,1]$, можна записати у вигляді

$$g(x)=\int_0^1 g(s)x(s)ds\,.$$

Тоді

$$g(Ax)=\int_0^1 g(s)\left(\int_0^s x(\tau)d\tau\right)ds\,.$$

Поміняємо порядок інтегрування:

$$g(Ax)=\int_0^1\left(\int_\tau^1 g(s)\,ds\right)x(\tau)\,d\tau\,.$$

Оскільки

$$f(x)=\int_0^1 f(\tau)x(\tau)\,d\tau\,,$$

і

$$f(x)=g(Ax)\,,$$

маємо

$$f(t)=\int_0^1 g(s)\,ds\,,$$

З іншого боку,

$$f=A^*g$$

Таким чином,

$$A^*y(t)=\int_t^1 y(\tau)\,d\tau\,.$$ ■

Задача 13.4. Знайдіть оператор, спряжений до оператора $A: L_2[0,1]\to L_2[0,1]$, що задається формулою

$$Ax(t)=\int_0^1 \sin\left(t^2 s\right)x(s)\,ds.$$

Доведення. Із задачі 13.1 випливає, що лінійний неперервний функціонал у просторі $L_2[0,1]$ можна подати у вигляді

$$g(Ax)=(y,Ax)=\int_0^1 Ax(t)\,y(t)\,dt=\int_0^1\left(\int_0^1 \sin\left(t^2 s\right)x(s)\,ds\right)y(t)\,dt\,,$$

де $\|g\|=\|y\|_{L_2[a,b]}$.

Поміняємо порядок інтегрування.

$$(y, Ax) = \int_0^1 \left(\int_0^1 \sin\left(t^2 s\right) y(t)\, dt \right) x(s)\, ds = \left(x, A^* y\right)$$

Отже,

$$A^* y(s) = \int_0^1 \sin\left(t^2 s\right) y(t)\, dt\,.$$

Оператор A^* діє з $L_2[0,1]$ (це самоспряжений простір) в $L_2[0,1]$ і є обмеженим. ■

Задача 13.5. Знайдіть оператор, спряжений до оператора $A: l_1 \to l_1$, задається формулою

$$Ax = (x_1 - x_2, x_1 + x_2, x_3, x_4, \ldots).$$

Доведення. Із задачі 13.2 випливає, що будь-який функціонал $g \in l_1^*$ можна записати у вигляді

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i x_i\,.$$

Тоді

$$g(Ax) = g_1(x_1 - x_2) + g_2(x_1 + x_2) + g_3 x_3 + \ldots = (g_1 + g_2)x_1 + (-g_1 + g_2)x_2 + g_3 x_3 + \ldots$$

Із рівності

$$f(x) = g(Ax)$$

отримуємо

$$f_1 = g_1 + g_2,$$
$$f_2 = -g_1 + g_2,$$
$$f_i = g_i,\ i = 3, 4, \ldots$$

Оскільки

$$f = A^* g\,,$$

оператор $A^*: l_\infty \to l_\infty$ задається формулою

$$A^* y = (y_1 + y_2, -y_1 + y_2, y_3, \ldots)\,.$$ ■

Урок 14. Евклідови простори

Задача 14.1. Доведіть, що в евклідовому просторі для довільних елементів a,b,c виконується *тотожність Аполонія*

$$\|c-a\|^2+\|c-b\|^2=\frac{1}{2}\|a-b\|^2+2\left\|c-\frac{a+b}{2}\right\|^2.$$

Доведення.

Скористаємося рівністю паралелограма

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$$

Покладемо

$$x=c-a,\ \ y=c-b$$

Тоді

$$2\left(\|c-a\|^2+\|c-b\|^2\right)=\|c-a+c-b\|^2+\|c-b-c+a\|^2=$$

$$=\|2c-a-b\|^2+\|a-b\|^2.$$

Отже,

$$\|c-a\|^2+\|c-b\|^2=\frac{1}{2}\|a-b\|^2+2\left\|c-\frac{a+b}{2}\right\|^2.$$

Задача 14.2. Доведіть, що в евклідовому просторі для довільних елементів x,y,z,t виконується *нерівність Птолемея*.

$$\|x-z\|\|y-t\|\le\|x-y\|\|z-t\|+\|y-z\|\|x-t\|.$$

Доведення.

Спроектуємо нерівність на площину *S*, яка є паралельною векторам $x-z$ і $y-t$.

У цьому випадку нерівність Птолемея буде еквівалентною нерівності щодо комплексних чисел в площині *S*.

$$|(x-z)(y-t)|\le|(x-y)(z-t)|+|(x-t)(y-z)|.$$

Покладемо $a=(x-y)(z-t)$ і $b=(x-t)(y-z)$.

Оскільки

$$a+b=(x-y)(z-t)+(x-t)(y-z)=$$

$$=xz-xt-yz+yt+xy-xz-yt+zt=$$

$$=x(y-t)-z(y-t)=$$

$$=(x-z)(y-t).$$

За нерівністю трикутника

$$|a+b|\le|a|+|b|.$$

Отже, виконуєься нерівність

$$|(x-z)(y-t)|\le|(x-y)(z-t)|+|(x-t)(y-z)|.$$

Задача 14.3. Доведіть, що простір $C(0,1)$ не є евклідовим.

Перший спосіб. Простір $C\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ з нормою $\|x\|=\max\limits_{t\in[0,\pi/2]}|x(t)|$ не є передгільбертовим — в ньому не виконується основна характеристична властивість. Нехай $x(t)=\sin t$ і $y(t)=\cos t$. Оскільки $\|x\|=\|y\|=1$, $\|x+y\|=\sqrt{2}$, $\|x-y\|=1$, то

$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=1+2\neq 2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)=2(1+1)=4$.

Для того щоб довести, що простір $C(0,1)$ є неевклідовим, застосуємо лінійне перетворення

$$x(t)=\sin\frac{\pi t}{2},\ y(t)=\cos\frac{\pi t}{2}.$$

Другий спосіб.

Покладемо

$$x(t)=\frac{1}{2},\ y(t)=\frac{1}{2}t.$$

Тоді

$$\|x\|=\frac{1}{2},\ \|y\|=\frac{1}{2}t,\ \|x+y\|=1,\ \|x-y\|=\frac{1}{2}.$$

Легко бачити, що рівність паралелограма не виконується.

Задача 14.4. Доведіть, що простір l_p $(p>1)$ не є евклідовим.

Доведення. Норма в просторі l_p задається формулою

$$\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Нехай $x=(1,1,0,\ldots,0,0)$, $y=(1,-1,0,\ldots,0,0)$. Тоді $\|x\|=2^{\frac{1}{p}}$, $\|y\|=2^{\frac{1}{p}}$, $p\neq 1/$ $\|x+y\|=2$, $\|x-y\|=2$. Підставимо отримане в рівність при

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=4+4=8\neq 2\left(2^{\frac{1}{p}}+2^{\frac{1}{p}}\right)=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$$

Задача 14.5. Доведіть, що простір c_0 не є евклідовим.

Доведення. Норма в просторі збіжних до нуля послідовностей задається так:

$$\|x\|=\max_n|x_n|.$$

Нехай $x=(1,1,0,\ldots,0,0)$, $y=(1,-1,0,\ldots,0,0)$. Тоді

$$\|x\|=\|y\|=1,\ \|x+y\|=2,\ \|x-y\|=2$$

Отже,

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=4+4=8\neq 2(1+1)=4.$$

Задача 14.6. Доведіть, що простір m не є евклідовим.

Норма в просторі обмежених послідовностей задається так:

$$\|x\|=\sup_n|x_n|.$$

Нехай $x=(1,1,0,\ldots,0,0)$, $y=(1,-1,0,\ldots,0,0)$. Тоді

$$\|x\|=\|y\|=1,\ \|x+y\|=2,\ \|x-y\|=2$$

Отже, $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=4+4=8\neq 2(1+1)=4$.

Урок 15. Гільбертові простори і компактні оператори

Задача 15.1. Оператор $A \in \mathcal{L}(H,H)$ називається оператором скінченного рангу, якщо його область значень $\operatorname{Im} A$ є скінченновимірною. Доведіть, що оператор скінченного рангу, заданий на гільбертовому просторі H, є компактним.

Доведення. Нехай $\{\varphi_k\}_{k=1}^N$ — ортонормований базис для $\operatorname{Im} A$, а $\{x_n\}$ — послідовність в просторі H, така що $\|x_n\| \le 1$. Тоді для кожного n

$$Ax_n = \sum_{k=1}^{N} (Ax_n, \varphi_k)\varphi_k .$$

Позначимо $a_n^{(k)} = (Ax_n, \varphi_k)$. Тоді для кожного k послідовність $\left\{a_n^{(k)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ є обмеженою, тому що

$$\left|a_n^{(k)}\right| = \left|(Ax_n, \varphi_k)\right| \le \|Ax_n\|\|\varphi_k\| \le \|A\|\|x_n\|\|\varphi_k\| \le \|A\| .$$

Оскільки кожна обмежена числова послідовність містить збіжну підпослідовність, знайдемо підпослідовність $\left\{x_k^{(1)}\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_m\}_{m=1}^{\infty}$, що задовольняє умові $\lim\limits_{m\to\infty} a_m^{(1)} = a^{(1)}$. Потім виберемо підпослідовність $\left\{x_k^{(2)}\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \left\{x_k^{(1)}\right\}_{m=1}^{\infty}$, що задовольняє умові $\lim\limits_{m\to\infty} a_m^{(2)} = a^{(2)}$. Продовжуючи, отримаємо підпослідовність $\left\{x_k^{(N)}\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \left\{x_k^{(N-1)}\right\}_{m=1}^{\infty}$, що задовольняє умові $\lim\limits_{m\to\infty} a_m^{(N)} = a^{(N)}$ для всіх $1 \le k \le N$.

Покладемо $y = \sum\limits_{k=1}^{N} a^{(k)}\varphi_k$. Тоді

$$\left\|Ax_m^{(m)} - y\right\|^2 = \sum_{k=1}^{N} \left|a_m^{(k)} - a^k\right|^2 \to 0 \text{ при } m \to \infty .$$

Таким чином, послідовність $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ містить збіжну підпослідовність, тобто оператор A є компактним. ■

Задача 15.2. Доведіть, що тотожній оператор I в нескінченновимірному гільбертовому просторі H не є компактним.

Доведення. Нехай $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормований базис в гільбертовому просторі H. Тоді якщо $n \ne m$, то $\|\varphi_n - \varphi_m\| = \sqrt{2}$. Отже, послідовність $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ не є фундаментальною, а значить, не збігається. Крім того, ортонормований базис є обмеженою множиною і власним образом при тотожному відображенні. Таким чином, обмежена множина $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ відображається тотожним оператором у послідовність $\{I\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, яка не є збіжною, тому оператор I не є компактним. ■

Задача 15.3. Доведіть, що оператор $A : l_2 \to l_2$, визначений формулою $A(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \left(x_1, \dfrac{1}{2}x_2, \dfrac{1}{4}x_3, \ldots, 2^{-n+1}x_n, \ldots\right)$ є компактним.

Доведення. Покажемо, що оператор A можна записати як границю рівномірно збіжної послідовності операторів скінченного рангу.

Для кожного N визначимо оператор $A_N : l_2 \to l_2$

$$A_N\left(x_1, x_2, x_3, \ldots\right) = \left(x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{4}x_3, \ldots, 2^{-N+1}x_N, 0, 0, \ldots\right).$$

Оператор A має скінченний ранг і для кожної послідовності $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_2$

$$\left\|\left(A - A_N\right)x\right\|^2 = \left\|\left(0, \ldots 0, 2^{-N}x_{N+1}, 2^{-N-1}x_{N+2}, \ldots\right)\right\|^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-2n+2}x_n^2 \le 2^{-2N}\sum_{n=N+1}^{\infty} x_n^2 \le 2^{-2N}\|x\|^2.$$

Отже,

$$\left\|A - A_N\right\| \le 2^{-2N},$$

тому

$$\lim_{N\to\infty}\left\|A - A_N\right\| = 0. \blacksquare$$

Задача 15.4. Якщо A — лінійний компактний оператор, оператор B — лінійний обмежений, то оператори AB і BA є компактними.

Доведення. Якщо множина $M \subset E$ є обмеженою, то BM — обмежена множина, оскільки обмежений оператор переводить будь-яку обмежену множину в обмежену множину. Отже, множина ABM є відносно компактною. Це означає, що оператор AB є компактним. Аналогічно, якщо множина $M \subset E$ є обмеженою, то AM — відносно компактна множина, оскільки компактний оператор переводить будь-яку обмежену множину у відносно компактну множину. Оператор B — неперервний, тому множина BAM є відносно компактною. Це означає, що оператор BA є компактним. $\blacksquare$

Задача 15.5. Нехай P — ортогональний проектор на замкнений підпростір M гільбертового простору H. Доведіть, що 1) $P^2 = P$; 2) $I - P$ є ортогональним проектором на $M^{\perp}$, 3) P — обмежене лінійне відображення на H, таке що $\|Px\| \le \|x\|$ і $\|P\| = 1$.

Доведення. В гільбертовому просторі H будь-який елемент $x \in H$ можна записати як суму $x = u + v$, де $u \in M$ і $v \in M^{\perp}$. Ортогональний проектор визначається формулою $Px = u$.

1) $P^2x = Pu = u = Px$

2) $v = x - u = x - Px = \left(I - P\right)x \Rightarrow I - P$ є ортогональним проектором на $M^{\perp}$.

3) $u \perp v \Rightarrow \|x\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \Rightarrow \|Px\|^2 = \|v\|^2 \le \|x\|^2 \Rightarrow \|P\| \le 1$.

$Px = x \ \forall x \in M \Rightarrow \|Px\| = \|x\|$ для $\|x\| \ne 0 \Rightarrow \|P\| = 1$. $\blacksquare$