Задача 1.62. Знайти суми

1. $1 + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$;
2. $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$;
3. $\cos x + \cos 3x + \ldots + \cos(2n-1)x$;
4. $\sin x + \sin 3x + \ldots + \sin(2n-1)x$;
5. $\sin x - \sin 2x + \ldots + (-1)^{n-1}\sin nx$.

Розв'язок. У кожному пункті цієї задачі використовується визначення sin і cos через exp:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \tag{1.1}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \tag{1.2}$$

а також формула суми геометричної прогресії:

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n = a \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}. \tag{1.3}$$

1.

$$\begin{aligned}
1 + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \\
= 1 + \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} + \frac{e^{i2z} + e^{-i2z}}{2} + \ldots + \frac{e^{inz} + e^{-inz}}{2} = \\
= \left(\frac{1}{2} + \frac{e^{i1z}}{2} + \frac{e^{i2z}}{2} + \ldots + \frac{e^{inz}}{2}\right) + \\
+ \left(\frac{1}{2} + \frac{e^{-i1z}}{2} + \frac{e^{-i2z}}{2} + \ldots + \frac{e^{-inz}}{2}\right) = \\
= \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{i(n+1)z} - 1}{e^{iz} - 1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-i(n+1)z} - 1}{e^{-iz} - 1}.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \\
= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} + \frac{e^{i2z} - e^{-i2z}}{2i} + \ldots + \frac{e^{inz} - e^{-inz}}{2i} = \\
= \left(\frac{e^{i1z}}{2i} + \frac{e^{i2z}}{2i} + \ldots + \frac{e^{inz}}{2i}\right) -
\end{aligned}$$

$$-\left(\frac{e^{-i1z}}{2i}+\frac{e^{-i2z}}{2i}+\ldots+\frac{e^{-inz}}{2i}\right)=$$

$$=\frac{e^{iz}}{2i}\cdot\frac{e^{inz}-1}{e^{iz}-1}-\frac{e^{-iz}}{2i}\cdot\frac{e^{-inz}-1}{e^{-iz}-1}.$$

3.

$$\begin{aligned}&\cos x+\cos 3x+\ldots+\cos(2n-1)x=\\&=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}+\frac{e^{i3z}+e^{-i3z}}{2}+\ldots+\frac{e^{i(2n-1)z}+e^{-i(2n-1)z}}{2}=\\&=\left(\frac{e^{i1z}}{2}+\frac{e^{i3z}}{2}+\ldots+\frac{e^{i(2n-1)z}}{2}\right)+\\&+\left(\frac{e^{-i1z}}{2}+\frac{e^{-i3z}}{2}+\ldots+\frac{e^{-i(2n-1)z}}{2}\right)=\\&=\frac{e^{iz}}{2}\cdot\frac{e^{2inz}-1}{e^{2iz}-1}+\frac{e^{-iz}}{2}\cdot\frac{e^{-2inz}-1}{e^{-2iz}-1}.\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}&\sin x+\sin 3x+\ldots+\sin(2n-1)x=\\&=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}+\frac{e^{i3z}-e^{-i3z}}{2i}+\ldots+\frac{e^{i(2n-1)z}-e^{-i(2n-1)z}}{2i}=\\&=\left(\frac{e^{i1z}}{2i}+\frac{e^{i3z}}{2i}+\ldots+\frac{e^{i(2n-1)z}}{2i}\right)-\\&-\left(\frac{e^{-i1z}}{2i}+\frac{e^{-i3z}}{2i}+\ldots+\frac{e^{-i(2n-1)z}}{2i}\right)=\\&=\frac{e^{iz}}{2i}\cdot\frac{e^{2inz}-1}{e^{2iz}-1}-\frac{e^{-iz}}{2i}\cdot\frac{e^{-2inz}-1}{e^{-2iz}-1}.\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}&\sin x-\sin 2x+\ldots+(-1)^{n-1}\sin nx=\\&=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}-\frac{e^{i2z}-e^{-i2z}}{2i}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{e^{inz}-e^{-inz}}{2i}=\\&=\left(\frac{e^{i1z}}{2i}-\frac{e^{i2z}}{2i}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{e^{inz}}{2i}\right)-\\&-\left(\frac{e^{-i1z}}{2i}-\frac{e^{-i2z}}{2i}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{e^{-inz}}{2i}\right)=\\&=\frac{e^{iz}}{2i}\cdot\frac{(-1)^n\cdot e^{inz}-1}{-e^{iz}-1}-\frac{e^{-iz}}{2i}\cdot\frac{(-1)^n\cdot e^{-inz}-1}{-e^{-iz}-1}.\end{aligned}$$

Задача 1.68. Знайти дійсні та уявні частини наступних значень функцій:

1. $\cos(2+i)$;
2. $\sin 2i$;
3. $\tan(2-i)$;
4. $\cot\left(\frac{\pi}{4} - i\ln 2\right)$;
5. $\coth(2+i)$;
6. $\tanh\left(\ln 3 + \frac{\pi i}{4}\right)$.

Розв'язок. У кожному пункті цієї задачі використовується визначення exp:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y), \tag{1.4}$$

визначення дійсної та уявної частини:

$$z = x + iy = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z, \tag{1.5}$$

а також інших тригонометричних та гіперболічних функцій через exp.

1.

$$\cos(2+i) = \frac{e^{i(2+i)} + e^{-i(2+i)}}{2} = \frac{e^{-1+2i} + e^{1-2i}}{2} = \\ = \frac{e^{-1+2i}}{2} + \frac{e^{1-2i}}{2} = \frac{e^{-1}(\cos 2 + i\sin 2)}{2} + \frac{e(\cos 2 - i\sin 2)}{2} = \\ = \frac{(e^{-1}+e)\cdot\cos 2}{2} + i\cdot\frac{(e^{-1}-e)\cdot\sin 2}{2}.$$

2.

$$\sin 2i = \frac{e^{i(2i)} - e^{-i(2i)}}{2i} = \frac{e^{-2} - e^{2}}{2i} = \frac{e^{-2}}{2i} - \frac{e^{2}}{2i} = i\cdot\frac{e^{2} - e^{-2}}{2}.$$

3.

$$\tan(2-i) = \frac{\sin(2-i)}{\cos(2-i)} = \frac{e^{i(2-i)} - e^{-i(2-i)}}{2i} \Big/ \frac{e^{i(2-i)} + e^{-i(2-i)}}{2} = \\ = \frac{e^{i(2-i)} - e^{-i(2-i)}}{2i} \cdot \frac{2}{e^{i(2-i)} + e^{-i(2-i)}} = \frac{e^{i(2-i)} - e^{-i(2-i)}}{i\cdot\left(e^{i(2-i)} + e^{-i(2-i)}\right)} = \\ = \frac{e^{1+2i} - e^{-1-2i}}{i\cdot(e^{1+2i} + e^{-1-2i})} = \frac{e(\cos 2 + i\sin 2) - e^{-1}(\cos 2 - i\sin 2)}{i\cdot(e(\cos 2 + i\sin 2) + e^{-1}(\cos 2 - i\sin 2))} =$$

$$= \frac{(e - e^{-1}) \cdot \cos 2 + i(e + e^{-1}) \cdot \sin 2}{(e^{-1} - e) \cdot \sin 2 + i \cdot (e + e^{-1}) \cdot \cos 2}.$$

Ми залишаємо подальші обчислення цієї частки як вправу читачеві.

4. Як і наступні пункти.

5.

6.

Задача 1.71. Обчислити:

1. $\operatorname{Ln} 4$, $\operatorname{Ln}(-1)$, $\ln(-1)$;

2. $\operatorname{Ln} i$, $\ln i$;

3. $\operatorname{Ln} \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}$;

4. $\operatorname{Ln}(2 - 3i)$, $\operatorname{Ln}(-2 + 3i)$.

Розв'язок. У кожному пункті цієї задачі використовується визначення $\operatorname{Ln} z$:

$$\operatorname{Ln} z = \ln r + i\varphi + 2\pi i k, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{1.6}$$

де

$$\ln z = \ln r + i\varphi \quad (-\pi < \varphi \leq \varphi) \tag{1.7}$$

називається головним значенням величини $\operatorname{Ln} z$.

1.

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln} 4 &= \ln 4 + 2\pi i k, \\ \operatorname{Ln}(-1) &= \ln 1 + i\pi + 2\pi i k = i\pi + 2\pi i k, \\ \ln(-1) &= \ln 1 + i\pi = i\pi. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln} i &= \ln 1 + i\pi/2 + 2\pi i k = i\pi/2 + 2\pi i k, \\ \ln i &= \ln 1 + i\pi/2 = i\pi/2. \end{aligned}$$

3.

$$\operatorname{Ln} \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}} = \ln 1 \pm i\pi/4 + 2\pi i k = \pm i\pi/4 + 2\pi i k.$$

4.

$$\begin{aligned}\operatorname{Ln}(2-3i) &= \ln\sqrt{13} + i\arctan_2(-3,2) + 2\pi i k,\\ \operatorname{Ln}(-2+3i) &= \ln\sqrt{13} + i\arctan_2(3,-2) + 2\pi i k.\end{aligned}$$

Тут функція $\arctan_2(y,x)$ визначається як `atan2` у мові програмування `C++`.