2 Функції комплексної змінної

У цьому пункті ми введемо найбільш фундаментальні поняття теорії функції комплексної змінної: поняття функції комплексної змінної, її границі, похідної і, нарешті, поняття аналітичної функції.

Центральне місце посідає теорема, що встановлює умови диференційовності функції комплексної змінної. Ці умови зазвичай називають *умовами Коші-Рімана*.

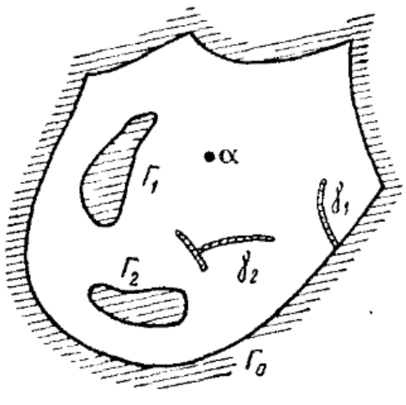
2.1 Геометричні поняття

ε-околом точки a називається відкритий круг радіусу ε з центром в a, тобто сукупність точок z які задовольняють нерівності $|z-a|<\varepsilon$.

Множина *відкрита* якщо разом з кожною своєю точкою вона містить якийсь ε-окіл цієї точки. Множина називається *зв'язною* якщо для довільних двох точок цієї множини існує ламана яка їх з'єднує і повністю належить множині. *Областю* на комплексній площині називають відкриту і зв'язну множину.

Граничною точкою області D називається точка яка сама не належить D, але у довільному околі якої є точки з D. Сукупність граничних точок області називається *границею* цієї області. Область D із приєднаною до неї границею називають *замкнутою областю* і позначають символом $\overline{D}$.

Надалі будемо вважати, що границя області складається зі скінченної кількості замкнутих ліній, розрізів, і точок:

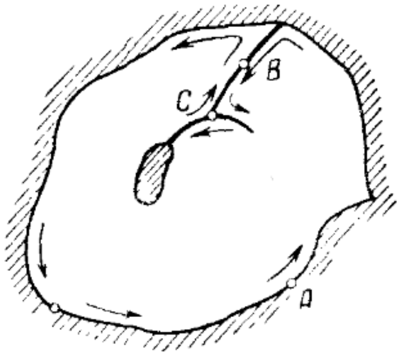


Лінії і розрізи що входять до складу границі будемо вважати *кусково-*

гладкими, тобто такими, дотична до яких змінюється неперервно.

Область D називається *обмеженою* якщо вона належить якомусь кругу $|z| < R$. Якщо область D обмежена, то кількість зв'язних частин у границі називається *порядком зв'язності* цієї області. Зокрема, якщо границя області D зв'язна, то область D називається *однозв'язною.*

Додатним напрямком обходу області D вздовж її границі Γ називається той, при якому область весь час залишається *ліворуч.* При цьому різні точки границі Γ ми відвідаємо різну кількість разів:



Наприклад, точку A ми відвідаємо один раз, такі точки називаються *простими*, точку B – двічі, а точку C – тричі, їх назвемо *кратними* точками, а кількість разів які точка проходиться – її *кратністю.*

Поняття граничної точки *розповсюджується* і на багатозв'язні області.

2.2 Функції комплексної змінної

Кажуть, що на множині M точок площини z задана *функція*

$$w = f(z), \tag{2.2.1}$$

якщо вказано закон, за яким кожній точці z множини M ставиться у відповідність певна точка або сукупність точок w. У першому випадку функція $f(z)$ називається *однозначною*, у другому – *багатозначною.*

Множина M називається *множиною визначення* функції $f(z)$, а сукупність N всіх значень w яких $f(z)$ набуває на M – множиною її значень. Надалі вважатимемо, що M і N – області.

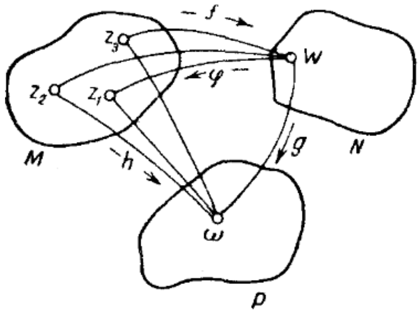
Якщо покласти $z = x + iy$ і $w = u + iv$, то задання функції комплексної змінної $w = f(z)$ буде рівносильним заданню двох функцій від двох дійсних змінних:

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y). \tag{2.2.2}$$

Будемо позначати значення z на одній комплексній площині, а значення w – на іншій. Тоді функція комплексно змінної геометрично представляється як *відображення* множини M площини z на множину N площини w.

Якщо функція $w = f(z)$ однозначна на множині M і довільним двом різним точкам M відповідають різні точки N, то відображення називається *взаємно однозначним* або *однолистим.*

Нехай задана функція $w = f(z)$ яка відображає множину M на множину N. Функція $z = \varphi(w)$ яка ставить у відповідність кожній точці w з N сукупність всіх точок z які функцією $w = f(z)$ відображаються у точку w називається *оберненою* до функції $w = f(z)$:



Зрозуміло, що відображення $w = f(z)$ буде взаємно однозначним тоді і лише тоді, коли обидві функції f і φ однозначні.

Нехай функція $w = f(z)$ відображає множину M на N, а $\omega = g(w)$ – множину N на P. Функція

$$\omega = h(z) = g(f(z)), \tag{2.2.3}$$

що відображає M на P називається *складеною функцією*, складеною із f і g, а відповідне відображення h – *суперпозицією* відображень f і g.

Якщо, зокрема, відображення $w = f(z)$ взаємно однозначне і функція $z = \varphi(w)$ – обернена до f, то

$$\varphi(f(z)) = z. \tag{2.2.4}$$

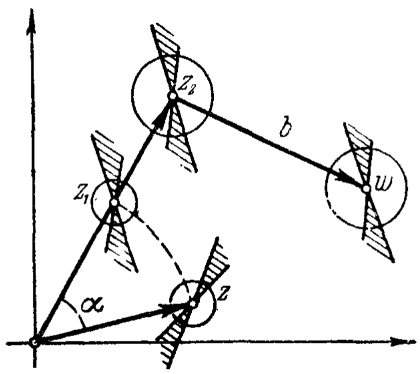
Приклад. *Лінійна функція* визначається у всій площині z співвідношенням

$$w = az + b, \tag{2.2.5}$$

де $a \neq 0$ і b – довільні комплексні сталі. Покладемо $k = |a|$, $\alpha = \operatorname{Arg} a$, тобто $a = k(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, і подамо функцію (2.2.5) як складену функцію, складену з функцій:

$$z_1 = (\cos\alpha + i\sin\alpha)z; \quad z_2 = kz_1; \quad w = z_2 + b. \tag{2.2.6}$$

Згадуючи геометричний зміст множення, ми бачимо, що перші два відображення зводяться до повороту площини z на кут α і гомотетії площини z_1 з центром 0 і коефіцієнтом k. Останнє ж відображення є паралельним переносом площини z_2 на вектор b:



З того, що лінійне відображення (2.2.5) є композицією однолистих відображень випливає, що воно і само є однолистим.

Зауважимо також, що воно перетворює прямі у прямі (зберігаючи кути між ними), а кола – у кола. Інші відображення з такими властивостями будуть детальніше розглянуті пізніше.

2.3 Диференційовність та аналітичність

Нехай функція $f(z)$ визначена та однозначна у деякому околі точки $z_0 = x_0 + iy_0$, окрім, можливо, самої точки z_0.

Будемо казати, що існує *границя функції* $f(z)$ *при* $z \to z_0$ (позначається $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$) якщо існують границі $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y) = u_0$ і $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y) = v_0$.

Зрозуміло, що

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = u_0 + iv_0 = w_0. \tag{2.3.1}$$

Оскільки наше визначення зводиться до звичайного визначення границі дійсної функції, то основні властивості граничного переходу *зберігаютьcя*. Зокрема,

$$\lim(f \pm g) = \lim f \pm \lim g, \tag{2.3.2}$$

$$\lim(f \cdot g) = \lim f \cdot \lim g, \tag{2.3.3}$$

$$\lim \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g} \quad (\lim g \neq 0). \tag{2.3.4}$$

Визначення границі можна також сформулювати за допомогою поняття околу: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0$ тоді й тільки тоді, коли для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$ таке, що для всіх точок із δ-околу точки z_0 (окрім, можливо, самої точки z_0) відповідні точки w лежать в ε-околі точки w_0.

Іншими словами, $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0$ якщо з нерівностей

$$0 < |z - z_0| < \delta \tag{2.3.5}$$

випливає

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon. \tag{2.3.6}$$

Функція $f(z)$ прямує до своєї границі *незалежно* від способу прямування точки z до z_0.

Функція $f(z)$ називається *неперервною в точці* z_0 якщо вона визначена у деякому околі точки z_0 (включаючи саму точку z_0) і

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0). \tag{2.3.7}$$

Для неперервності $f(z)$ у точці z_0 *необхідно і достатньо* неперервності $u(z, y)$ і $v(x, y)$ в (x_0, y_0).

Функція $f(z)$ називається *неперервною в області* D якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

Визначення неперервності також поширюється на довільну множину A, з тією лише поправкою, що тепер $z \to z_0$ по точках A.

Формально, функція $f(z)$ називається *неперервною на множині* A якщо у кожній точці скупчення $z_0 \in A$ існує границя по множині

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A}} f(z) = f(z_0). \tag{2.3.8}$$

Компактною називається обмежена і замкнута множина.

Багато властивостей неперервної на інтервалі функції переносяться на неперервну на компакті функцію. А саме, довільна функція $f(z)$ неперервна на компактній множині $\overline{A}$:

1. *обмежена на ньому*, тобто існує така стала M, що для всіх z із $\overline{A}$ справедливо
$$|f(z) \leq M; \tag{2.3.9}$$

2. *досягає (за модулем) екстремумів*, тобто в $\overline{A}$ існують такі точки z' і z'', що для всіх z із $\overline{A}$:
$$|f(z') \geq |f(z)|, \quad |f(z'')| \leq |f(z)|; \tag{2.3.10}$$

3. *рівномірно неперервна*, тобто для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$ таке, що для довільної пари точок z_1 і z_2 із $\overline{A}$ яка задовольняє нерівності $|z_1 - z_2| < \delta$, справедлива нерівність
$$|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon. \tag{2.3.11}$$

Також сформулюємо (без доведення) одне твердження, яким неодноразово будемо користуватися надалі:

Теорема 2.3.1. *Якщо $w = f(z)$ – неперервна бієкція з області D у множину Δ, то Δ також область і обернена функція $z = \varphi(w)$ неперервна в Δ.*

Будемо казати, що функція $f(z)$ *диференційовна* в точці z якщо вона визначена в деякому околі точки z і існує границя

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z). \tag{2.3.12}$$

Цю границю будемо називати *похідною* функції $f(z)$ в точці z.

2.3.1 Умови Коші-Рімана

Теорема 2.3.2 (Умови диференційовності $f(z)$ у термінах дійсних функцій $u(x,y)$ і $v(x,y)$)**.** *Нехай $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ визначена в деякому околі точки z, причому в цій точці функції $u(x,y)$ і $v(x,y)$ диференційовні, тоді для диференційовності функції комплексної змінної $f(z)$ в точці z необхідно і достатньо, аби в цій точці виконувалися співвідношення*

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \tag{2.3.13}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2.3.14}$$

Ці умови заведено називати умовами Коші-Рімана.

Доведення. Необхідність. Нехай існує

$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}. \tag{2.3.15}$$

Скористаємося зауваження про незалежність границі від способу наближення до точки z. Припустимо спершу, що точка $z+h$ наближається до z по прямій, яка паралельна дійсній вісі, тобто $h=s$, $s\to 0$, $s\in\mathbb{R}$. Тоді отримаємо:

$$f'(z)=\lim_{s\to 0}\frac{u(x+s,y)-u(x,y)}{s}+i\cdot\lim_{s\to 0}\frac{v(x+s,y)-v(x,y)}{s}=\\
=\frac{\partial u}{\partial x}+i\cdot\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2.3.16}$$

Знайдемо тепер ту ж границю у припущенні, що точка $z+h$ наближається до z по прямій, яка паралельна уявній вісі, тобто $h=it$, $t\to 0$, $t\in\mathbb{R}$. Отримаємо

$$f'(z)=\lim_{t\to 0}\frac{u(x,y+t)-u(x,y)}{it}+i\cdot\lim_{s\to 0}\frac{v(x,y+t)-v(x,y)}{it}=\\
=-i\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{2.3.17}$$

Прирівнюючи вирази (2.3.16) і (2.3.17) для (2.3.15) отримаємо

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\cdot\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{2.3.18}$$

Звідси випливаються рівності (2.3.13) і (2.3.14) дійсних та уявних частин відповідно.

Достатність. За визначенням диференціалу функції двох дійсних змінних справедливі рівності

$$u(x+s,y+t)-u(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot s+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot t+\alpha\cdot|h|, \tag{2.3.19}$$

$$v(x+s,y+t)-u(x,y)=\frac{\partial v}{\partial x}\cdot s+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot t+\beta\cdot|h|, \tag{2.3.20}$$

де $\alpha,\beta\to 0$ разом з $h=s+it$. Тоді приріст функції $f(z)$ набуває вигляд:

$$f(z+h)-f(z)=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot s+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot t+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cdot s+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot t\right)+\eta\cdot|h|, \tag{2.3.21}$$

де $\eta=\alpha+i\beta$. Використовуючи умови (2.3.13) та (2.3.14), цей приріст можна переписати у вигляді

$$f(z+h)-f(z)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cdot(s+it)+\eta\cdot|h|=Ah+\eta\cdot|h|, \tag{2.3.22}$$

де $A=\frac{\partial u}{\partial x}+i\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$ – цілком конкретне число, що не залежить від h, а $\eta\to 0$ при $h\to 0$.

Розділивши співвідношення (2.3.22) на h побачимо, що

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} \tag{2.3.23}$$

існує і дорівнює A. □

З використанням умов Коші-Рімана похідну функції $f(z)$ можна представити у наступних рівносильних формах:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\cdot\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2.3.24}$$

Оскільки звичайні властивості алгебраїчних дій і граничного переходу зберігаються, то зберігаються і звичайні правила диференціювання, тобто:

$$(f\pm g)'=f'\pm g', \tag{2.3.25}$$

$$(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g', \tag{2.3.26}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}, \tag{2.3.27}$$

$$f(g(z))' = f'(g(z)) \cdot g'(z), \tag{2.3.28}$$

$$f'(z) \cdot \varphi'(w) = 1. \tag{2.3.29}$$

Функція $f(z)$ диференційовна у кожній точці області D називається *аналітичною* (*регулярною* або *голоморфною*) у цій області.

Зауважимо також, що умови Коші-Рімана виконуються якщо замість x і y взяти довільні два перпендикулярні ($n = is$) напрямки n і s, тобто

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial n}, \tag{2.3.30}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial v}{\partial s}. \tag{2.3.31}$$

Умови Коші-Рімана також мають запис у полярних координатах:

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -r \cdot \frac{\partial v}{\partial r}, \tag{2.3.32}$$

$$r \cdot \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \varphi}. \tag{2.3.33}$$