(Не)рівноскладеність многогранників

Дві фігури будемо називати ***рівновеликими***, якщо вони мають однакову площу/об'єм. Дві фігури будемо називати ***рівноскладеними***, якщо їх можна розрізати на однаковий набір многокутників/многогранників.

1 (**Теорема Бойяі - Гервіна, 1833**)**.** На площині будь-які два рівновеликі многокутники є рівноскладеними.

2 (**Третя проблема Гільберта, 1900**)**.** Чи правда, що у просторі будь-які два рівновеликих многогранники є рівноскладеними?

Функційне рівняння Коші

Функцію $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ будемо називати адитивною, якщо вона задовільняє функційному рівнянню Коші: $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.
Очевидно, що будь-яка лінійна функція $\varphi(x) = ax$ є адитивною.

3 (*Твердження*)**.** Для будь-якої адитивної функції справджується:
1) $\varphi(x_1 + ... + x_n) = \varphi(x_1) + ... + \varphi(x_n)$;
2) $\varphi(qx) = q\varphi(x)\ \forall x \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{Q}$.

4 (*Визначення*)**.** Базисом Гамеля будемо називати довільний базис лінійного простору $\mathbb{R}$ над полем $\mathbb{Q}$. Іншими словами, базисом Гамеля будемо називати таку множину $\{r_\nu\} \subset \mathbb{R}$, $\nu \subset V$ що:
1) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists \nu_1, \nu_2, ..., \nu_n \in V, q_1, q_2, ..., q_n \in \mathbb{Q} : x = \sum_{i=1}^n q_i r_{\nu_i}$ (тобто кожне дійсне число можна представити у вигляді лінійної комбінації **скінченної** кількості чисел з $\{r_\nu\}$ з раціональними коефіцієнтами);
2) для кожного дійсного числа таке представлення єдине.

За будь-яким базисом Гамеля $\{r_\nu\}$, $\nu \subset V$ можна побудувати адитивну функцію наступним чином. На базисних елементах функцію визначаємо як завгодно:
$\varphi(r_\nu) = a_\nu$, a_ν - довільні;
тоді значення функції для будь-якого дійсного числа x визначається однозначно за його розкладом за базисом:
$x = \sum_{i=1}^n q_i r_{\nu_i} \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(\sum_{i=1}^n q_i r_{\nu_i}) = \sum_{i=1}^n q_i \varphi(r_{\nu_i}) = \sum_{i=1}^n q_i a_{\nu_i}$.
Очевидно, ця функція буде задовольняти функційному рівнянню Коші та майже ніколи не буде лінійною.

Інваріант Дена

Далі будемо розглядати адитивні функції $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для яких $\varphi(\pi) = 0$. Таких функцій нескінченно багато, бо умова $\varphi(\pi) = 0$ - це лише одне лінійне обмеження на незліченну кількість чисел a_ν, які ми могли вибирати як завгодно.
Розглянемо довільний многогранник P. Нехай e - його ребро. Через $l(e)$ будемо позначати довжину ребра e, а через $\alpha(e)$ - двогранний кут при цьому ребрі.

5 (*Визначення*)**.** Нехай $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - адитивна, $\varphi(\pi) = 0$.
Інваріантом Дена многогранника P будемо називати число $\Delta_\varphi(P) = \sum_e l(e) \cdot \varphi(\alpha(e))$.

Тобто інваріант Дена залежить від вибору многогранника P та функції φ.

6 (**Теорема Дена**)**.** Якщо многогранники P_1 і P_2 є рівноскладеними, то $\forall$ адитивної φ: $\varphi(\pi) = 0$ виконується $\Delta_\varphi(P_1) = \Delta_\varphi(P_2)$.

Доведення
Достатньо довести таке твердження: якщо многогранник P розбитий на многогранники $P_1, ..., P_n$, то $\Delta_\varphi(P) = \Delta_\varphi(P_1) + ... + \Delta_\varphi(P_n)$.
Доведемо цю формулу. Розглянемо об'єднання усіх ребер многогранників $P_1, ..., P_n$. Ці ребра можуть розбиватися вершинами многогранників на менші відрізочки розбиття. Достатньо перевірити, що кожен такий відрізок дає однаковий вклад у ліву та праву частину рівності, яку ми доводимо. Розглянемо відрізочок розбиття e', який лежить на деякому ребрі e многогранника P. Сума двогранних кутів при ребрі e' многогранників P_i, що містять e' як ребро або частину ребра, рівна двогранному куту многогранника P при ребрі e. Тому такий відрізок розбиття в обидві частини рівності дає вклад $l(e') \cdot \varphi(\alpha(e))$. Будь-який інший відрізок розбиття e'' лежить всередині деякої грані P або всередині P і дає вклад 0 в ліву частину рівності. Сума двогранних кутів при такому відрізочку e'' по усім многогранникам P_i, що його містять, дорівнює π або 2π. Оскільки $\varphi(\pi) = \varphi(2\pi)) = 0$, відрізочок e'' в обидві частини рівності дає вклад 0.

7 (**Приклад**)**.** Доведемо, що куб (C) та правильний тетраедр (T) рівного об'єму не є рівноскладеними.
Нехай ребро куба дорівнює a, ребро правильного тетраедра - b, двогранний кут при ребрі куба рівний $\pi/2$, двогранний кут при ребрі тетраедра позначимо за α.
Тоді $\Delta_\varphi(C) = 12a\varphi(\pi/2) = 0$.
$\Delta_\varphi(T) = 6b\varphi(\alpha)$.

8 (*Твердження*)**.** α/π - ірраціональне (можна переконатись, що $\alpha = arccos\frac{1}{3}$, далі доведення є у Айгнер Циглер "Доказательства из Книги").

Оскільки α/π - ірраціональне, тобто α і π є лінійно незалежними над полем Q, множину $\{\alpha, \pi\}$ можна доповнити до базису Гамеля. Будуючи функцію φ по цьому базису, значення $\varphi(\alpha)$ можна задавати як завгодно (значення функції на інших базисних елементах нас не цікавить). Тому $\Delta_\varphi(T)$ в залежності від вибору φ може приймати будь-які значення. Тому за теоремою Дена куб та правильний тетраедр рівного об'єму не є рівноскладеними.

9 (**Жан-П'єр Сидлер, критерій рівноскладеності многогранників, 1965**)**.** P_1 і P_2 - рівноскладені $\Leftrightarrow V(P_1) = V(P_2)$ і $\forall\varphi$ - адитивна: $\varphi(\pi) = 0$ справджується рівність $\Delta_\varphi(P_1) = \Delta_\varphi(P_2)$.

Задачі

1. Доведіть, що будь-який трикутник можна розрізати на декілька частин, з яких можна скласти прямокутник.
2. Знайдіть двогранний кут при ребрі правильного тетраедра.
3. Доведіть, що правильний тетраедр зі стороною na не рівноскладений з n^3 правильними тетраедрами зі стороною a.
4. Доведіть, що у базисі Гамеля векторного простору $\mathbb{R}$ над полем $\mathbb{Q}$ незліченна кількість елементів.