Глава 7 Три раза о $\pi^2/6$

1	$=$	1.000000
$1+\frac{1}{4}$	$=$	1.250000
$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}$	$=$	1.361111
$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{6}$	$=$	1.423611
$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{6}+\frac{1}{25}$	$=$	1.463611
$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{6}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}$	$=$	1.491388
$\pi^2/6$	$=$	$1.644934.$

Мы знаем, что бесконечный ряд $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ расходится. Более того, в главе 1 мы убедились в том, что даже ряд $\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p}$ расходится.

Однако ряд из чисел, обратных квадратам, сходится (хотя, как мы увидим, очень медленно) к весьма примечательному значению.

Ряд Эйлера.

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} \;=\; \frac{\pi^2}{6}.$$

Этот классический, знаменитый и важный результат был получен Леонардом Эйлером в 1734 году. Одна из его важнейших интерпретаций состоит в том, что он дает первое нетривиальное значение $\zeta(2)$ дзета-функции Римана (см. приложение на с. 50). Как мы видели в главе 6, это значение иррационально.

Но не только само это утверждение занимает важное место в истории математики; для него найдено много чрезвычайно изящных и глубоких доказательств, имеющих свои собственные истории и доставившие радость открытия и переоткрытия многим математикам. В этой главе мы приводим три таких доказательства.

■ **Доказательство.** Наше первое доказательство содержится в виде упражнения в учебнике Вильяма ЛеВекью по теории чисел, изданном в 1956 году. Однако он пишет: «У меня нет ни малейшего представления о том, где возникла эта задача, но я совершенно уверен в том, что не имею к ней отношения».

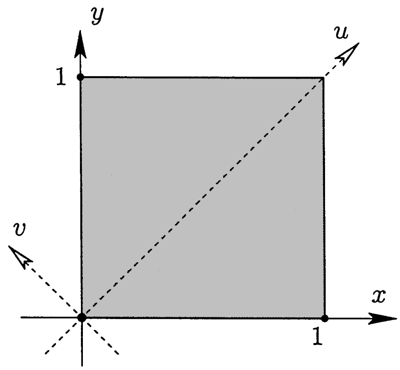
Доказательство состоит в сопоставлении двух различных способов вычисления двойного интеграла

$$I \;:=\; \int_0^1\!\!\int_0^1 \frac{1}{1-xy}\,dx\,dy.$$

Первый способ состоит в разложении $\frac{1}{1-xy}$ в геометрический ряд и представлении слагаемых в виде легко интегрируемых произведений:

$$\begin{aligned}
I \;&=\; \int_0^1\!\!\int_0^1 \sum_{n\geq 0}(xy)^n\,dx\,dy \;=\; \sum_{n\geq 0}\int_0^1\!\!\int_0^1 x^n y^n\,dx\,dy \\
&=\; \sum_{n\geq 0}\left(\int_0^1 x^n dx\right)\left(\int_0^1 y^n dy\right) \;=\; \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n+1}\,\frac{1}{n+1} \\
&=\; \sum_{n\geq 0}\frac{1}{(n+1)^2} \;=\; \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} \;=\; \zeta(2).
\end{aligned}$$

Это вычисление показывает также, что двойной интеграл I (от положительной функции с полюсом в точке $x = y = 1$) конечен. Заметим, что преобразования легко провести и в обратном направлении, сводя вычисление $\zeta(2)$ к двойному интегралу I.

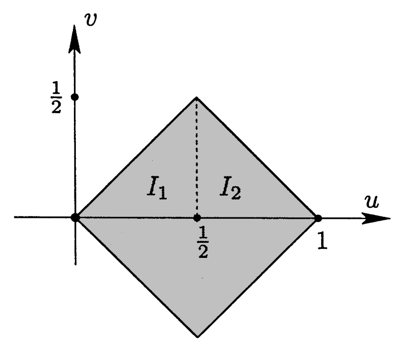


Второй способ вычисления I основан на замене переменных

$$u := \frac{y+x}{2} \quad \text{и} \quad v := \frac{y-x}{2},$$

переводящей область интегрирования в квадрат со стороной длины $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ с помощью поворота старой области на 45° и сжатия в $\sqrt{2}$ раз. С помощью подстановки $x = u - v$ и $y = u + v$ получаем

$$\frac{1}{1-xy} = \frac{1}{1-u^2+v^2}.$$



Поскольку наша линейная замена переменных уменьшает площадь в два раза (что равно значению определителя Якоби преобразования, см. вставку), при преобразовании интеграла мы должны заменить $dx\,dy$ на $2\,du\,dv$. Новая область интегрирования и подынтегральная функция симметричны относительно оси u, так что остается вычислить лишь удвоенный (здесь появляется еще один множитель 2!) интеграл по верхней половине области. Мы разбиваем ее на две части самым естественным образом:

$$I = 4\int_0^{1/2}\left(\int_0^u \frac{dv}{1-u^2+v^2}\right)du + 4\int_{1/2}^1\left(\int_0^{1-u}\frac{dv}{1-u^2+v^2}\right)du.$$

Используя формулу $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$, отсюда получаем

$$\begin{aligned} I = {} & 4\int_0^{1/2}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)du \\ & + 4\int_{1/2}^1\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right)du. \end{aligned}$$

Эти интегралы можно упростить и вычислить в явном виде с помощью замен $u = \sin\theta$ и $u = \cos\theta$ соответственно. Но мы поступим проще: заметим, что производная функции $g(u) := \operatorname{arctg}\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)$ есть $g'(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$, а производная функции $h(u) := \operatorname{arctg}\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}\right)$ равна $h'(u) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$. Поэтому, используя равенство $\int_a^b f'(x)f(x)dx = \left[\frac{1}{2}f(x)^2\right]_a^b = \frac{1}{2}f(b)^2 - \frac{1}{2}f(a)^2$, находим:

$$\begin{aligned} I &= 4\int_0^{1/2} g'(u)g(u)\,du + 4\int_{1/2}^1 -2h'(u)h(u)\,du \\ &= 2\Big[g(u)^2\Big]_0^{1/2} - 4\Big[h(u)^2\Big]_{1/2}^1 \\ &= 2g(\tfrac{1}{2})^2 - 2g(0)^2 - 4h(1)^2 + 4h(\tfrac{1}{2})^2 \\ &= 2\left(\tfrac{\pi}{6}\right)^2 - 0 - 0 + 4\left(\tfrac{\pi}{6}\right)^2 = \tfrac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

□

Формула замены

Для вычисления двойного интеграла

$$I = \int_S f(x,y)\,dx\,dy$$

можно применить замену переменных

$$x = x(u,v) \quad y = y(u,v),$$

если отображение $(u,v) \in T$ в $(x,y) \in S$ биективно и непрерывно дифференцируемо. Тогда I равен

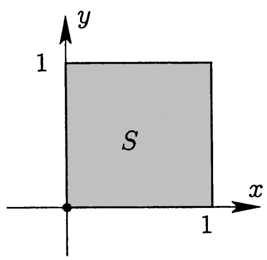
$$\int_T f(x(u,v), y(u,v))\left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right|du\,dv,$$

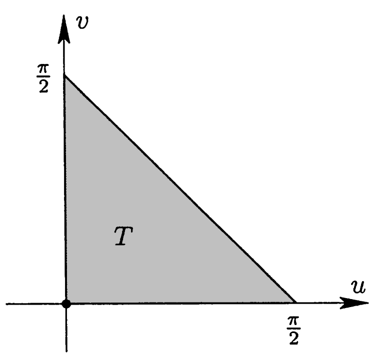
где $\frac{d(x,y)}{d(u,v)}$ — определитель Якоби (якобиан):

$$\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \det\begin{pmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} \end{pmatrix}.$$

В приведенном доказательстве значение ряда Эйлера получилось из интеграла посредством довольно простой замены переменных. Позднее Бейкерс, Калаби и Колк [2] нашли остроумный вариант этого доказательства с совершенно нетривиальной заменой переменных. Они начинают с разбиения суммы $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \zeta(2)$ на две суммы по четным и нечетным значениям n. Ясно, что сумма по четным числам $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\ldots = \sum_{k\geq 1}\frac{1}{(2k)^2}$ равна $\frac{1}{4}\zeta(2)$, так что сумма по нечетным числам $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots = \sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^2}$ равна $\frac{3}{4}\zeta(2)$. Следовательно, теорема о ряде Эйлера эквивалентна следующему утверждению.

$$\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^2} \;=\; \frac{\pi^2}{8}.$$





■ **Доказательство.** Как и выше, мы можем представить рассматриваемую сумму в виде двойного интеграла, а именно,

$$J \;=\; \int_0^1\!\!\int_0^1 \frac{1}{1-x^2y^2}\,dx\,dy \;=\; \sum_{k\geq 0}\frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Поэтому нам нужно вычислить интеграл J. И для этого Бейкерс, Калаби и Колк предложили новую замену переменных:

$$u \;:=\; \arccos\sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2y^2}}, \qquad v \;:=\; \arccos\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2y^2}}.$$

При вычислении двойного интеграла можно пренебречь границей области и рассматривать x, y изменяющимися в пределах $0 < x < 1$ и $0 < y < 1$. Тогда точки (u, v) будут принадлежать треугольнику $u > 0$, $v > 0$, $u + v < \pi/2$. Замену переменных можно обратить:

$$x \;=\; \frac{\sin u}{\cos v} \qquad \text{и} \qquad y \;=\; \frac{\sin v}{\cos u}.$$

Легко проверить, что эти формулы определяют биективное преобразование координат между внутренностью единичного квадрата $S = \{(x,y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$ и внутренностью треугольника $T = \{(u,v) : u, v \geq 0,\ u + v \leq \pi/2\}$.

Теперь вычислим якобиан замены переменных; при этом волшебным образом оказывается, что он равен

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\cos u}{\cos v} & \frac{\sin u \sin v}{\cos^2 v} \\ \frac{\sin u \sin v}{\cos^2 u} & \frac{\cos v}{\cos u} \end{pmatrix} \;=\; 1 - \frac{\sin^2 u \sin^2 v}{\cos^2 u \cos^2 v} \;=\; 1 - x^2y^2.$$

Но тогда интеграл, который мы хотим вычислить, преобразуется в

$$J \;=\; \int_0^{\pi/2}\!\!\int_0^{\pi/2-u} 1\,du\,dv,$$

что есть как раз площадь $\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})^2 = \frac{\pi^2}{8}$ треугольника T. □

Этот метод доказательства не только красив, но и применим к вычислению $2k$-мерных интегралов для всех $k \geq 1$. Мы отсылаем читателя к оригинальной статье Вейкера, Калаби и Колка [2] и к гл. 20, в которой тот же результат получается другим способом с помощью приема Герглотца и первоначального подхода Эйлера.

После двух доказательств с заменами переменных мы не можем устоять перед искушением рассказать о совершенно другом и абсолютно элементарном доказательстве формулы $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Оно появилось в виде цепочки упражнений в сборнике задач [7] близнецов Акивы и Исаака Ягломов, изданном в 1954 году. Варианты этого замечательного доказательства переоткрывали Холм, Пападимитриу и Рэнсфорд, который приписывает его Джону Скоулсу.

■ **Доказательство.** Сначала установим замечательное соотношение для суммы квадратов значений котангенса: при любом целом $m \geq 1$

$$\operatorname{ctg}^2\left(\tfrac{\pi}{2m+1}\right) + \operatorname{ctg}^2\left(\tfrac{2\pi}{2m+1}\right) + \ldots + \operatorname{ctg}^2\left(\tfrac{m\pi}{2m+1}\right) = \frac{2m(2m-1)}{6}. \qquad (1)$$

Для $m = 1,2,3$ из формулы (1) получаем: $\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{3} = \frac{1}{3}$, $\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{5} + \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{5} = 2$, $\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{7} + \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{7} + \operatorname{ctg}^2 \frac{3\pi}{7} = 5$.

Чтобы доказать его, воспользуемся равенством

$$\cos nx + i \sin nx = (\cos x + i \sin x)^n$$

и приравняем в нем мнимые части:

$$\sin nx = \binom{n}{1} \sin x \cos^{n-1} x - \binom{n}{3} \sin^3 x \cos^{n-3} x \pm \ldots \qquad (2)$$

Теперь положим $n = 2m+1$, а для x рассмотрим m различных значений $x = \frac{r\pi}{2m+1}$, $r = 1, 2, \ldots, m$. Для каждого из них $nx = r\pi$ и, следовательно, $\sin nx = 0$, в то время как из неравенств $0 < x < \frac{\pi}{2}$ вытекает, что $\sin x$ принимает m различных положительных значений.

Поэтому, разделив обе части (2) для каждого из выбранных значений x на $\sin^n x$, мы получим равенства

$$0 = \binom{n}{1} \operatorname{ctg}^{n-1} x - \binom{n}{3} \operatorname{ctg}^{n-3} x \pm \ldots,$$

или

$$0 = \binom{2m+1}{1} \operatorname{ctg}^{2m} x - \binom{2m+1}{3} \operatorname{ctg}^{2m-2} x \pm \ldots$$

Таким образом, для многочлена степени m

$$p(t) := \binom{2m+1}{1} t^m - \binom{2m+1}{3} t^{m-1} \pm \ldots + (-1)^m \binom{2m+1}{2m+1}$$

нам известны m различных корней

$$a_r = \operatorname{ctg}^2\left(\tfrac{r\pi}{2m+1}\right), \quad r = 1, 2, \ldots, m.$$

Следовательно, многочлен $p(t)$ совпадает с произведением

$$p(t) = \binom{2m+1}{1} \left(t - \operatorname{ctg}^2\left(\tfrac{\pi}{2m+1}\right)\right) \cdot \ldots \cdot \left(t - \operatorname{ctg}^2\left(\tfrac{m\pi}{2m+1}\right)\right).$$

Сравнение коэффициентов при t^{m-1} в обеих частях этого равенства показывает, что сумма корней многочлена $p(t)$ есть

Сравнение коэффициентов: если $p(t) = c(t-a_1)\cdots(t-a_m)$, то коэффициент при t^{m-1} равен $-c(a_1+\ldots+a_m)$.

$$a_1+\ldots+a_r = \frac{\binom{2m+1}{3}}{\binom{2m+1}{1}} = \frac{2m(2m-1)}{6},$$

что совпадает с (1).

Нам потребуется также другое тождество того же типа для косеканса $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$:

$$\operatorname{cosec}^2\left(\tfrac{\pi}{2m+1}\right) + \operatorname{cosec}^2\left(\tfrac{2\pi}{2m+1}\right) + \ldots + \operatorname{cosec}^2\left(\tfrac{m\pi}{2m+1}\right) = \frac{2m(2m+2)}{6}. \quad (3)$$

Но

$$\operatorname{cosec}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x} = \operatorname{ctg}^2 x + 1,$$

так что (3) можно вывести из (1), прибавив m к обеим частям этого равенства.

Теперь подготовка полностью закончена. Воспользуемся тем, что в интервале $0 < y < \frac{\pi}{2}$ выполняются неравенства

Из $0<a<b<c$ следует, что $0 < \frac{1}{c} < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

$$0 < \sin y < y < \operatorname{tg} y,$$

и, следовательно,

$$0 < \operatorname{ctg} y < \frac{1}{y} < \operatorname{cosec} y,$$

откуда вытекает, что

$$\operatorname{ctg}^2 y < \frac{1}{y^2} < \operatorname{cosec}^2 y.$$

Запишем это двойное неравенство для каждого из m выбранных значений x и сложим результаты. Используя (1) для выражения в левой части и (3) для суммы в правой части, получаем

$$\frac{2m(2m-1)}{6} < \left(\tfrac{2m+1}{\pi}\right)^2 + \left(\tfrac{2m+1}{2\pi}\right)^2 + \ldots + \left(\tfrac{2m+1}{m\pi}\right)^2 < \frac{2m(2m+2)}{6},$$

т. е.

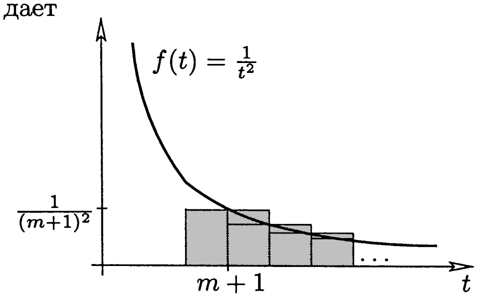
$$\frac{\pi^2}{6}\frac{2m}{2m+1}\frac{2m-1}{2m+1} < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{m^2} < \frac{\pi^2}{6}\frac{2m}{2m+1}\frac{2m+2}{2m+1}.$$

При $m \to \infty$ выражения в левой и правой частях сходятся к $\frac{\pi^2}{6}$. Доказательство закончено. □

Как быстро ряд $\sum \frac{1}{n^2}$ сходится к $\pi^2/6$? Для ответа на этот вопрос мы должны оценить разность

$$\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Это очень просто сделать методом «сравнения с интегралом», который мы уже использовали в приложении к гл. 2 (с. 19). Он дает неравенства



$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad < \quad \int_m^{\infty} \frac{1}{t^2} dt \quad = \quad \frac{1}{m}$$

для верхней оценки и

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad > \quad \int_{m+1}^{\infty} \frac{1}{t^2} dt \quad = \quad \frac{1}{m+1}$$

для нижней оценки «хвоста ряда» — или даже

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad > \quad \int_{m+\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1}{t^2} dt \quad = \quad \frac{1}{m+\frac{1}{2}},$$

если вы хотите немного уточнить оценку с помощью выпуклости функции $f(t) = \frac{1}{t^2}$.

Это показывает, что наш ряд сходится не очень быстро: если сложить первую тысячу слагаемых, то погрешность будет в третьем десятичном знаке после запятой, если сложить первый миллион слагаемых, $m = 1000000$, то погрешность будет в шестом десятичном знаке, и т. д. Однако здесь нас ожидает большой сюрприз: с точностью до 45 знаков

$$\begin{aligned} \pi^2/6 \quad &= \quad 1.644934066848226436472415166646025189218949901, \\ \sum_{n=1}^{10^6} \frac{1}{n^2} \quad &= \quad 1.644933066848726436305748499979391855885616544. \end{aligned}$$

Таким образом, шестой знак после запятой неверен (меньше на 1), но *следующие шесть знаков правильные*! Далее один знак неверен (больше на 5), а следующие пять знаков опять правильные. Это удивительное открытие сделал Рой Норт из Колорадо Спрингс в 1988 году. (В 1982 году Мартину Повеллу, школьному учителю в Эмершэме, Бакингемшир, Англия, не удалось обнаружить описанный эффект в полной мере из-за того, что компьютеры тогда были маломощными.) Совпадения слишком странные, чтобы быть случайными... Погрешность, выписанная опять с 45 знаками после запятой:

$$\sum_{n=10^6+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ = \ 0.000000999999500000166666666666633333333333357,$$

показывает, что здесь действительно имеет место закономерность. Вы можете переписать это последнее число в виде

$$+\,10^{-6} \;-\; \tfrac{1}{2}10^{-12} \;+\; \tfrac{1}{6}10^{-18} \;-\; \tfrac{1}{30}10^{-30} \;+\; \tfrac{1}{42}10^{-42} \;+\; \ldots,$$

где коэффициенты $(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{1}{42})$ при 10^{-6k} образуют начало последовательности *чисел Бернулли*, которые еще появятся в гл. 20. Мы отсылаем наших читателей к статье Борвейна, Борвейна и Дилчера [3], содержащей другие удивительные «совпадения» — и доказательства.

Приложение: Дзета-функция Римана

Дзета-функция Римана $\zeta(s)$ для действительных $s > 1$ определяется равенством

$$\zeta(s) \;:=\; \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

Из оценок чисел H_n (см. с. 19) следует, что ряд для $\zeta(1)$ расходится, но для любого действительного $s > 1$ он сходится. Дзета-функция имеет каноническое продолжение на всю комплексную плоскость (с одним простым полюсом в точке $s = 1$), которое можно построить с помощью разложений в степенные ряды. Получающаяся функция комплексной переменной имеет крайне важное значение для теории простых чисел. Упомянем три разных связи $\zeta(s)$ с этой теорией.

(1) Замечательное тождество

$$\zeta(s) \;=\; \prod_{p} \frac{1}{1-p^{-s}},$$

принадлежащее Эйлеру, эквивалентно тому, что каждое натуральное число единственным (!) образом разлагается на простые множители. Последний факт позволяет вывести тождество Эйлера как простое следствие разложения в геометрический ряд

$$\frac{1}{1-p^{-s}} \;=\; 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \ldots$$

(2) Локализация (описание расположения) комплексных нулей дзета-функции составляет содержание «гипотезы Римана» — одной из наиболее известных и важных нерешенных задач математики. Она утверждает, что все нетривиальные нули $s \in \mathbb{C}$ дзета-функции удовлетворяют условию $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$. (Дзета-функция обращается в нуль также во всех отрицательных четных целых числах, которые называются «тривиальными нулями».)

Совсем недавно Джеф Лагариас доказал неожиданную теорему о том, что гипотеза Римана эквивалентна следующему элементарному утверждению: для всех $n \geq 1$

$$\sum_{d\,|\,n} d \;\leq\; H_n \;+\; \exp(H_n)\log(H_n),$$

где, как и раньше, H_n есть n-е гармоническое число, и равенство выполняется только для $n = 1$.

(3) Очень давно известно, что если s — четное целое число, $s \geq 2$, то $\zeta(s)$ — рациональное кратное π^s и, следовательно, иррационально (см. гл.20). Однако иррациональность $\zeta(3)$ была доказана Роджером Апери лишь в 1979 году.

Несмотря на значительные усилия, картина относительно $\zeta(s)$ для других нечетных целых s, $s = 2t+1$, $t \geq 5$, остается весьма неполной. Недавно Кейт Болл и Тангуй Ривол [1] доказали, что бесконечно много значений $\zeta(2t+1)$ являются иррациональными. Более того, хотя иррациональность $\zeta(s)$ не доказана ни для одного нечетного значения $s \geq 5$, Вадим Зудилин [8] доказал, что по меньшей мере одно из четырех значений $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9)$ или $\zeta(11)$ иррационально. Мы отсылаем читателя к замечательному обзору Фишлера [4].

Литература

[1] Ball K., Rivoal T. *Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs.* Inventiones math., **146** (2001), 193–207.

[2] Beukers F., Kolk J. A. C., Calabi E. *Sums of generalized harmonic series and volumes.* Nieuw Archief voor Wiskunde (4), **11** (1993), 217–224.

[3] Borwein J. M., Borwein P. B., Dilcher K. *Pi, Euler numbers, and asymptotic expansions.* Amer. Math. Monthly, **96** (1989), 681–687.

[4] Fischler S. *Irrationalité de valeurs de zêta (d'après Apéry, Rivoal, ...),* Bourbaki Seminar, No. 910, November 2002; Astérisque, **294** (2004), 27–62.

[5] Lagarias J. C. *An elementary problem equivalent to the Riemann hypothesis.* Amer. Math. Monthly, **109** (2002), 534–543.

[6] LeVeque W. J. *Topics in Number Theory, Vol. I.* Addison-Wesley, Reading MA, 1956.

[7] Яглом А.М., Яглом И.М. *Неэлементарные задачи в элементарном изложении.* ГИТТЛ, М., 1954.

[8] W. Zudilin: *Arithmetic of linear forms involving odd zeta values.* Preprint, August 2001, 42 pp.; `arXiv:math.NT/0206176`.