Зміст

1 Комплексні числа

Для зручності для читача ми викладемо тут основні визначення і факти, що стосуються до поняття комплексного числа, дій з ними, та їх геометричної ілюстрації.

1.1 Комплексні числа

Комплексним числом називається вираз вигляду $x + iy$, де x і y – дійсні числа, а i – символ, який називається уявною одиницею. Числа x і y називаються *дійсною* і *уявною* частинами комплексного числа $x + iy$ і позначаються символами

$$x = \mathrm{Re}(x + iy), \quad y = \mathrm{Im}(x + iy). \tag{1.1.1}$$

Якщо, зокрема, $y = 0$, то $x + i0$ *ототожнюється* з дійсним числом x. Якщо ж $x = 0$, то $0 + iy$ позначається просто iy і називається *чисто уявним.*

Будемо казати, що комплексні числа $x_1 + iy_1$ і $x_2 + iy_2$ *рівні*,

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2, \tag{1.1.2}$$

тоді і тільки тоді, коли $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Відзначимо також, що якщо $x_2 = x_1$, а $y_2 = -y_1$, то комплексне число $x_2 + iy_2$ називається *спряженим* до $x_1 + iy_1$ і позначається символом $\overline{x_1 + iy_1}$. Таким чином,

$$\overline{x + iy} = x - iy. \tag{1.1.3}$$

Перейдемо до операцій над комплексними числами.

1.1.1 Операції над комплексними числами

Сумою $z_1 + z_2$ комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ називається комплексне число

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \tag{1.1.4}$$

Додавання *комутативне*:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \tag{1.1.5}$$

та *асоціативне*:

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3. \tag{1.1.6}$$

Додавання має *обернену* операцію: для довільних двох комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ існує таке z, що $z_2 + z = z_1$. z називається *різницею* чисел z_1 і z_2 і позначається $z_1 - z_2$. Очевидно,

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \tag{1.1.7}$$

Добутком $z_1 \cdot z_2$ комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ називається комплексне число

$$z = z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i(x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2). \tag{1.1.8}$$

Множення *комутативне*:

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1, \tag{1.1.9}$$

асоціативне:

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3, \tag{1.1.10}$$

і *дистрибутивне* відносно додавання:

$$(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3. \tag{1.1.11}$$

При $z_1 = z_2 = i$ з визначення множення випливає, що

$$i \cdot i = -1. \tag{1.1.12}$$

Якщо z_1 і z_2 – дійсні числа, то визначення (1.1.8) збігається зі звичайним.

Легко помітити, що формула (1.1.8) отримується при множенні $x_1 + iy_1$ та $x_2 + iy_2$ за звичайними правилами алгебри та заміною добутку $i \cdot i$ на -1.

Відзначимо також, що добуток комплексного числа $z = x + iy$ на спряжене завжди невід'ємний. Справді, з рівності (1.1.8) маємо:

$$z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 \geq 0. \tag{1.1.13}$$

Множення має *обернену* операцію якщо тільки заданий множник не дорівнює нулю. Нехай $z_2 \neq 0$, то можна знайти таке число z, що $z_2 \cdot z = z_1$. Для цього, згідно до (1.1.8), потрібно розв'язати систему

$$\begin{cases} x_2 \cdot x - y_2 \cdot y = x_1, \\ y_2 \cdot x + x_2 \cdot y = y_1, \end{cases} \tag{1.1.14}$$

яка при $z_2 \neq 0$ завжди має єдиний розв'язок, адже її *визначник* $x_2^2 + y_2^2 > 0$. Це число z називається *часткою* двох чисел z_1 і z_2 і позначається символом z_1/z_2. Розв'язуючи систему (1.1.14), отримуємо

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{x_1^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{y_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \tag{1.1.15}$$

Добуток n рівних чисел z називається *n-им степенем* числа z і позначається символом z^n:

$$z^n = \underbrace{z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ разів}}. \tag{1.1.16}$$

Обернена операція – *знаходження кореня* – визначається наступним чином: число w називається *коренем n-го степеня* з z, якщо $w^n = z$ (позначається $\sqrt[n]{z}$, причому для $n = 2$ пишуть просто $\sqrt{z}$).

Нижче ми побачимо, що для довільного $z \neq 0$ корінь $\sqrt[n]{z}$ має n *різних* значень.

Рівність (1.1.12) ми можемо тепер записати у вигляді $i^2 = -1$, і для уявної одиниці i маємо

$$i = \sqrt{-1} \tag{1.1.17}$$

(тут $\sqrt{-1}$ позначає одне з двох його можливих значень).

1.2 Геометрична ілюстрація

Розглянемо площину декартових координат xOy і домовимося зображати комплексне число $z = x + iy$ *точкою* з координатами (x, y).

При цьому дійсні числа будуть зображені точками осі x (яку будемо називати *дійсною віссю*), а чисто уявні числа – точками осі y (яку будемо називати *уявною віссю*).

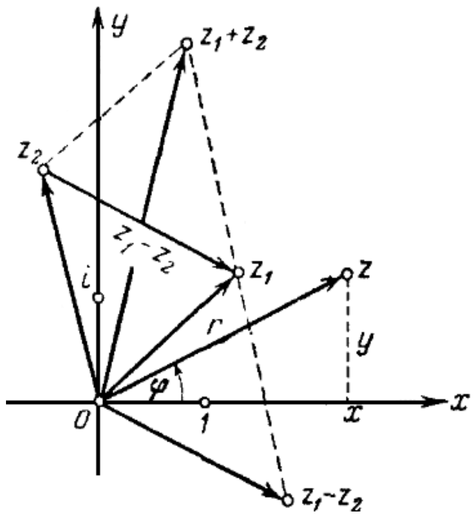
Зокрема, *зображенням* числа i слугуватиме точка $(0, 1)$ уявної вісі.

Легко бачити, що існує і *обернена* відповідність: кожній точці площини xOy з координатами (x, y) відповідатиме цілком конкретне комплексне число $x + iy$.

Це дозволяє нам надалі *не розрізняти* поняття комплексного числа та точки площини і використовувати обороти "точка $1 + i$", "трикутник

$z_1z_2z_3$" та подібні.

Далі, кожній точці (x, y) відповідає цілком конкретний *вектор* – радіус-вектор цієї точки, а кожному радіус-вектору, що лежить у площині – цілком конкретна точка – його кінець:



З цього малюнку зрозумілий *геометричний зміст* додавання і віднімання комплексних чисел.

Надалі наряду з представленням комплексних чисел у декартових координатах, корисно буде мати їх представлення у *полярних* координатах. Для цього, як зазвичай, суміщаємо полярну вісь з додатною піввіссю x, а полюс – з початком координат.

Тоді, якщо позначити через r полярний *радіус*, а через φ – полярний *кут* точки z, то будемо мати

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{1.2.1}$$

Полярний радіус r називається *модулем* комплексного числа z і позначається символом $|z|$, кут φ – його *аргументом* і позначається символом $\operatorname{Arg} z$.

Модуль комплексного числа визначається *однозначно*:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0, \tag{1.2.2}$$

а його аргумент визначається *з точністю до* $2k\pi$:

$$\varphi = \operatorname{Arg} z = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) + 2k\pi, & \text{(I та IV квадранти)}, \\ \\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) + (2k+1)\pi, & \text{(II і III квадранти)}, \end{cases} \tag{1.2.3}$$

де $\arctan$ позначає головне значення Arctan, тобто таке, що належить $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, k – довільне ціле число.

Надалі, наряду з $\operatorname{Arg} z$ ми будемо використовувати символ $\arg z$ який буде позначати *одне* зі значень $\operatorname{Arg} z$, здебільшого головне.

Виконуються наступні нерівності:

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|; \quad |z_1 - z_2| \ge ||z_1| - |z_2||. \tag{1.2.4}$$

Причому рівність *досягається* лише коли $\operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2$, або одне з чисел нуль.

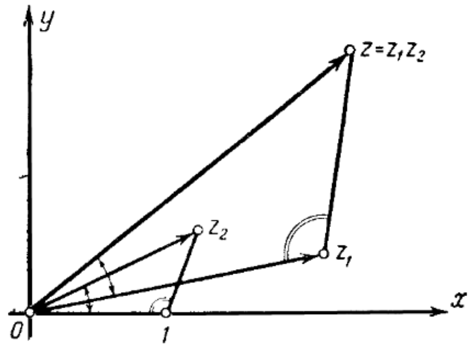
З визначення (1.1.8) попереднього пункту випливає, що при множенні комплексних чисел їх модулі *множаться*, а їх аргументи *додаються*. Справді,

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2((\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) + \\ + i(\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \sin\varphi_2 \cdot \cos\varphi_1)) = \\ = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

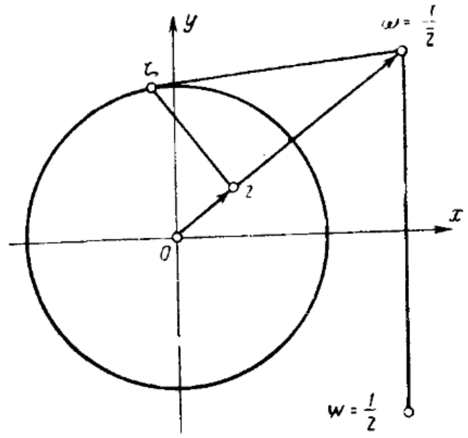
Звідси випливає, що при множенні комплексного числа z_1 на z_2 вектор z_1 *розтягується* в $|z_2|$ разів і повертається (проти годинникової стрілки) на кут $\arg z_2$.

Зокрема, множення комплексного числа z на i зводиться до повороту (без розтягнення) вектору z на *прямий* кут проти годинникової стрілки.

Для побудови добутку $z = z_1 \cdot z_2$ достатньо на відрізку Oz_1 як на основі побудувати трикутник Oz_1z який *подібний* трикутнику Oz_1z_2.



Ділення комплексного числа z_1 на z_2 зводиться до множення z_1 на $1/z_2$, тому достатньо з'ясувати геометричний зміст операції $w = 1/z$. Нехай спершу $|z| < 1$:



Опустимо із точки z перпендикуляр на промінь Oz і через точку ζ перетину перпендикуляра із колом $|z| = 1$ проведемо *дотичну* до цього кола.

Для точки ω перетину побудованої дотичної із променем Oz маємо

$$\operatorname{Arg} \omega = \operatorname{Arg} z, \tag{1.2.6}$$

а з подібності прямокутних трикутників $Oz\zeta$ і $O\zeta\omega$ маємо

$$|\omega|/|\zeta| = |\zeta|/|z|, \tag{1.2.7}$$

звідки $|\omega| = 1/|z|$, адже $|\zeta| = 1$.

Таким чином, число ω є спряженим до числа $1/z$, $\omega = 1/\overline{z}$, і для отримання точки $w = 1/z$ достатньо побудувати точку, *симетричну* до точки

ω відносно дійсної вісі.

Перехід від точки z до точки $\omega = 1/\overline{z}$ називається *інверсією*, або *симетрією відносно* одиничного *кола* $|z| = 1$.

Таким чином, операція $w = 1/z$ геометрично зводиться до *двох послідовних симетрій* – інверсії і симетрії відносно дійсної вісі.

Якщо ж $|z| > 1$ то описані побудови варто проводити у *зворотному* порядку, а якщо $|z| = 1$, то точка $\omega = 1/\overline{z}$ збігається з точкою z і побудова $w = 1/z$ зводиться до симетрії відносно дійсної вісі.

Геометричний сенс піднесення до степеня зрозумілий з геометричного сенсу множення.

Для побудови коренів степеню n із z помітимо, що із визначення кореня і формули (1.2.5) для $w = \sqrt[n]{z}$ маємо

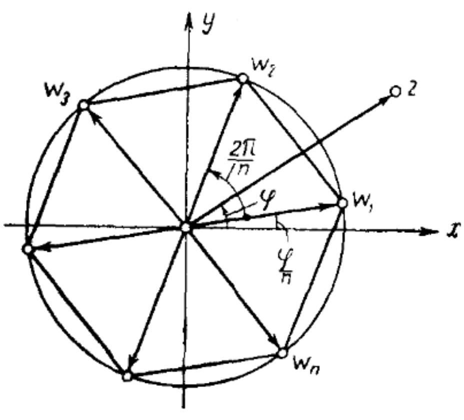
$$|w|^n = |z|, \quad n \arg w = \arg z, \tag{1.2.8}$$

тому

$$|w| = \sqrt[n]{z}, \quad \arg w = \frac{\arg z}{n}. \tag{1.2.9}$$

Перше зі співвідношень (1.2.9) показує, що модулі всіх коренів рівні, а друге – що їх аргументи відрізняються на кратне $2\pi/n$, бо до значення $\arg z$ можна додавати кратне 2π.

Звідси випливає, що корінь степеню n із довільного комплексного числа $z \neq 0$ має n *різних* значень, і що це значення розташовані у вершинах правильного n-кутника вписаного у коло $|w| = \sqrt[n]{|z|}$:



2 Функції комплексної змінної

У цьому пункті ми введемо найбільш фундаментальні поняття теорії функції комплексної змінної: поняття функції комплексної змінної, її границі, похідної і, нарешті, поняття аналітичної функції.

Центральне місце посідає теорема, що встановлює умови диференційовності функції комплексної змінної. Ці умови зазвичай називають *умовами Коші-Рімана.*

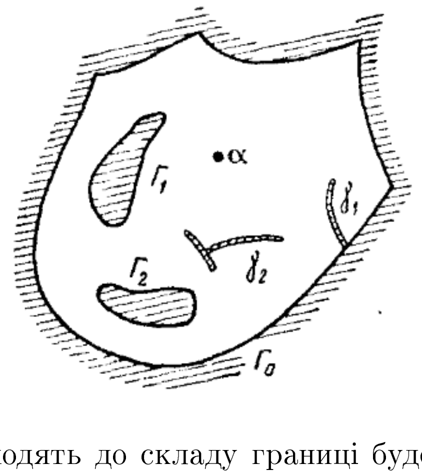
2.1 Геометричні поняття

ε-околом точки a називається відкритий круг радіусу ε з центром в a, тобто сукупність точок z які задовольняють нерівності $|z - a| < \varepsilon$.

Множина *відкрита* якщо разом з кожною своєю точкою вона містить якийсь ε-окіл цієї точки. Множина називається *зв'язною* якщо для довільних двох точок цієї множини існує ламана яка їх з'єднує і повністю належить множині. *Областю* на комплексній площині називають відкриту і зв'язну множину.

Граничною точкою області D називається точка яка сама не належить D, але у довільному околі якої є точки з D. Сукупність граничних точок області називається *границею* цієї області. Область D із приєднаною до неї границею називають *замкнутою областю* і позначають символом $\overline{D}$.

Надалі будемо вважати, що границя області складається зі скінченної кількості замкнутих ліній, розрізів, і точок:

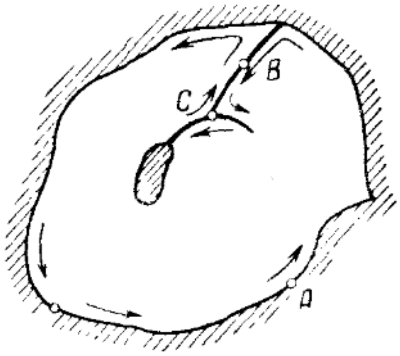


Лінії і розрізи що входять до складу границі будемо вважати *кусково-*

гладкими, тобто такими, дотична до яких змінюється неперервно.

Область D називається *обмеженою* якщо вона належить якомусь кругу $|z| < R$. Якщо область D обмежена, то кількість зв'язних частин у границі називається *порядком зв'язності* цієї області. Зокрема, якщо границя області D зв'язна, то область D називається *однозв'язною.*

Додатним напрямком обходу області D вздовж її границі Γ називається той, при якому область весь час залишається *ліворуч.* При цьому різні точки границі Γ ми відвідаємо різну кількість разів:



Наприклад, точку A ми відвідаємо один раз, такі точки називаються *простими*, точку B – двічі, а точку C – тричі, їх назвемо *кратними* точками, а кількість разів які точка проходиться – її *кратністю.*

Поняття граничної точки *розповсюджується* і на багатозв'язні області.

2.2 Функції комплексної змінної

Кажуть, що на множині M точок площини z задана *функція*

$$w = f(z), \tag{2.2.1}$$

якщо вказано закон, за яким кожній точці z множини M ставиться у відповідність певна точка або сукупність точок w. У першому випадку функція $f(z)$ називається *однозначною*, у другому – *багатозначною.*

Множина M називається *множиною визначення* функції $f(z)$, а сукупність N всіх значень w яких $f(z)$ набуває на M – множиною її значень. Надалі вважатимемо, що M і N – області.

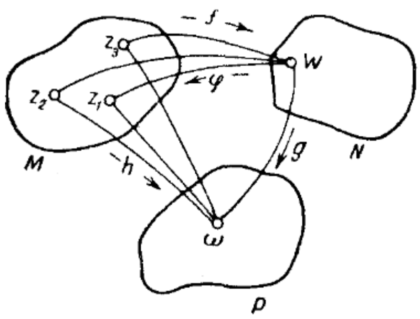
Якщо покласти $z = x + iy$ і $w = u + iv$, то задання функції комплексної змінної $w = f(z)$ буде рівносильним заданню двох функцій від двох дійсних змінних:

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y). \tag{2.2.2}$$

Будемо позначати значення z на одній комплексній площині, а значення w – на іншій. Тоді функція комплексно змінної геометрично представляється як *відображення* множини M площини z на множину N площини w.

Якщо функція $w = f(z)$ однозначна на множині M і довільним двом різним точкам M відповідають різні точки N, то відображення називається *взаємно однозначним* або *однолистим*.

Нехай задана функція $w = f(z)$ яка відображає множину M на множину N. Функція $z = \varphi(w)$ яка ставить у відповідність кожній точці w з N сукупність всіх точок z які функцією $w = f(z)$ відображаються у точку w називається *оберненою* до функції $w = f(z)$:



Зрозуміло, що відображення $w = f(z)$ буде взаємно однозначним тоді і лише тоді, коли обидві функції f і φ однозначні.

Нехай функція $w = f(z)$ відображає множину M на N, а $\omega = g(w)$ – множину N на P. Функція

$$\omega = h(z) = g(f(z)), \tag{2.2.3}$$

що відображає M на P називається *складеною функцією*, складеною із f і g, а відповідне відображення h – *суперпозицією* відображень f і g.

Якщо, зокрема, відображення $w = f(z)$ взаємно однозначне і функція $z = \varphi(w)$ – обернена до f, то

$$\varphi(f(z)) = z. \tag{2.2.4}$$

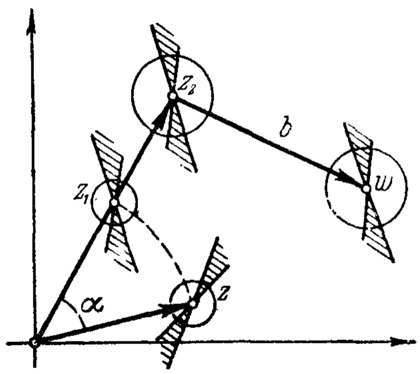
Приклад. *Лінійна функція* визначається у всій площині z співвідношенням

$$w = az + b, \tag{2.2.5}$$

де $a \neq 0$ і b – довільні комплексні сталі. Покладемо $k = |a|$, $\alpha = \operatorname{Arg} a$, тобто $a = k(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, і подамо функцію (2.2.5) як складену функцію, складену з функцій:

$$z_1 = (\cos\alpha + i\sin\alpha)z; \quad z_2 = kz_1; \quad w = z_2 + b. \tag{2.2.6}$$

Згадуючи геометричний зміст множення, ми бачимо, що перші два відображення зводяться до повороту площини z на кут α і гомотетії площини z_1 з центром 0 і коефіцієнтом k. Останнє ж відображення є паралельним переносом площини z_2 на вектор b:



З того, що лінійне відображення (2.2.5) є композицією однолистих відображень випливає, що воно і само є однолистим.

Зауважимо також, що воно перетворює прямі у прямі (зберігаючи кути між ними), а кола – у кола. Інші відображення з такими властивостями будуть детальніше розглянуті пізніше.

2.3 Диференційовність та аналітичність

Нехай функція $f(z)$ визначена та однозначна у деякому околі точки $z_0 = x_0 + iy_0$, окрім, можливо, самої точки z_0.

Будемо казати, що існує *границя функції* $f(z)$ *при* $z \to z_0$ (позначається $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$) якщо існують границі $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y) = u_0$ і $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y) = v_0$.

Зрозуміло, що
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = u_0 + iv_0 = w_0. \qquad (2.3.1)$$

Оскільки наше визначення зводиться до звичайного визначення границі дійсної функції, то основні властивості граничного переходу *зберігаютъся.* Зокрема,

$$\lim(f \pm g) = \lim f \pm \lim g, \qquad (2.3.2)$$
$$\lim(f \cdot g) = \lim f \cdot \lim g, \qquad (2.3.3)$$
$$\lim \frac{f}{g} = \frac{\lim f}{\lim g} \quad (\lim g \neq 0). \qquad (2.3.4)$$

Визначення границі можна також сформулювати за допомогою поняття околу: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$ тоді й тільки тоді, коли для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$ таке, що для всіх точок із δ-околу точки z_0 (окрім, можливо, самої точки z_0) відповідні точки w лежать в ε-околі точки w_0.

Іншими словами, $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$ якщо з нерівностей

$$0 < |z - z_0| < \delta \qquad (2.3.5)$$

випливає
$$|f(z) - w_0| < \varepsilon. \qquad (2.3.6)$$

Функція $f(z)$ прямує до своєї границі *незалежно* від способу прямування точки z до z_0.

Функція $f(z)$ називається *неперервною в точці* z_0 якщо вона визначена у деякому околі точки z_0 (включаючи саму точку z_0) і

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0). \qquad (2.3.7)$$

Для неперервності $f(z)$ у точці z_0 *необхідно і достатньо* неперервності $u(z, y)$ і $v(x, y)$ в (x_0, y_0).

Функція $f(z)$ називається *неперервною в області* D якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

Визначення неперервності також поширюється на довільну множину A, з тією лише поправкою, що тепер $z \to z_0$ по точках A.

Формально, функція $f(z)$ називається *неперервною на множині* A якщо у кожній точці скупчення $z_0 \in A$ існує границя по множині

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in A}} f(z) = f(z_0). \tag{2.3.8}$$

Компактною називається обмежена і замкнута множина.

Багато властивостей неперервної на інтервалі функції переносяться на неперервну на компакті функцію. А саме, довільна функція $f(z)$ неперервна на компактній множині $\overline{A}$:

1. *обмежена на ньому*, тобто існує така стала M, що для всіх z із $\overline{A}$ справедливо
$$|f(z) \leq M; \tag{2.3.9}$$

2. *досягає (за модулем) екстремумів*, тобто в $\overline{A}$ існують такі точки z' і z'', що для всіх z із $\overline{A}$:
$$|f(z') \geq |f(z)|, \quad |f(z'')| \leq |f(z)|; \tag{2.3.10}$$

3. *рівномірно неперервна*, тобто для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$ таке, що для довільної пари точок z_1 і z_2 із $\overline{A}$ яка задовольняє нерівності $|z_1 - z_2| < \delta$, справедлива нерівність
$$|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon. \tag{2.3.11}$$

Також сформулюємо (без доведення) одне твердження, яким неодноразово будемо користуватися надалі:

Теорема 2.3.1. *Якщо $w = f(z)$ – неперервна бієкція з області D у множину Δ, то Δ також область і обернена функція $z = \varphi(w)$ неперервна в Δ.*

Будемо казати, що функція $f(z)$ *диференційовна* в точці z якщо вона визначена в деякому околі точки z і існує границя

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z). \tag{2.3.12}$$

Цю границю будемо називати *похідною* функції $f(z)$ в точці z.

2.3.1 Умови Коші-Рімана

Теорема 2.3.2 (Умови диференційовності $f(z)$ у термінах дійсних функцій $u(x, y)$ і $v(x, y)$)**.** *Нехай $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ визначена в деякому околі точки z, причому в цій точці функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ диференційовні, тоді для диференційовності функції комплексної змінної $f(z)$ в точці z необхідно і достатньо, аби в цій точці виконувалися співвідношення*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \tag{2.3.13}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2.3.14}$$

Ці умови заведено називати умовами Коші-Рімана.

Доведення. Необхідність. Нехай існує

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}. \tag{2.3.15}$$

Скористаємося зауваження про незалежність границі від способу наближення до точки z. Припустимо спершу, що точка $z + h$ наближається до z по прямій, яка паралельна дійсній вісі, тобто $h = s$, $s \to 0$, $s \in \mathbb{R}$. Тоді отримаємо:

$$f'(z) = \lim_{s\to 0} \frac{u(x+s, y) - u(x, y)}{s} + i \cdot \lim_{s\to 0} \frac{v(x+s, y) - v(x, y)}{s} = \\ = \frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2.3.16}$$

Знайдемо тепер ту ж границю у припущенні, що точка $z + h$ наближається до z по прямій, яка паралельна уявній вісі, тобто $h = it$, $t \to 0$, $t \in \mathbb{R}$. Отримаємо

$$f'(z) = \lim_{t\to 0} \frac{u(x, y+t) - u(x, y)}{it} + i \cdot \lim_{s\to 0} \frac{v(x, y+t) - v(x, y)}{it} = \\ = -i \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \tag{2.3.17}$$

Прирівнюючи вирази (2.3.16) і (2.3.17) для (2.3.15) отримаємо

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \cdot \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{2.3.18}$$

Звідси випливаються рівності (2.3.13) і (2.3.14) дійсних та уявних частин відповідно.

Достатність. За визначенням диференціалу функції двох дійсних змінних справедливі рівності

$$u(x+s, y+t) - u(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot s + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot t + \alpha \cdot |h|, \tag{2.3.19}$$

$$v(x+s, y+t) - u(x,y) = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot s + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot t + \beta \cdot |h|, \tag{2.3.20}$$

де $\alpha, \beta \to 0$ разом з $h = s + it$. Тоді приріст функції $f(z)$ набуває вигляд:

$$f(z+h) - f(z) = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot s + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot t + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} \cdot s + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot t\right) + \eta \cdot |h|, \tag{2.3.21}$$

де $\eta = \alpha + i\beta$. Використовуючи умови (2.3.13) та (2.3.14), цей приріст можна переписати у вигляді

$$f(z+h) - f(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right) \cdot (s+it) + \eta \cdot |h| = Ah + \eta \cdot |h|, \tag{2.3.22}$$

де $A = \frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$ – цілком конкретне число, що не залежить від h, а $\eta \to 0$ при $h \to 0$.

Розділивши співвідношення (2.3.22) на h побачимо, що

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \tag{2.3.23}$$

існує і дорівнює A. □

З використанням умов Коші-Рімана похідну функції $f(z)$ можна представити у наступних рівносильних формах:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2.3.24}$$

Оскільки звичайні властивості алгебраїчних дій і граничного переходу зберігаються, то зберігаються і звичайні правила диференціювання, тобто:

$$(f \pm g)' = f' \pm g', \tag{2.3.25}$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g', \tag{2.3.26}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}, \tag{2.3.27}$$

$$f(g(z))' = f'(g(z)) \cdot g'(z), \tag{2.3.28}$$

$$f'(z) \cdot \varphi'(w) = 1. \tag{2.3.29}$$

Функція $f(z)$ диференційовна у кожній точці області D називається *аналітичною* (*регулярною* або *голоморфною*) у цій області.

Зауважимо також, що умови Коші-Рімана виконуються якщо замість x і y взяти довільні два перпендикулярні ($n = is$) напрямки n і s, тобто

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial n}, \tag{2.3.30}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial v}{\partial s}. \tag{2.3.31}$$

Умови Коші-Рімана також мають запис у полярних координатах:

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -r \cdot \frac{\partial v}{\partial r}, \tag{2.3.32}$$

$$r \cdot \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \varphi}. \tag{2.3.33}$$

3 Елементарні функції

Цей параграф присвячений елементарним функціям комплексної змінної та їхнім геометричним ілюстраціям – відображенням, які вони здійснюють. Ці функції є природнім розповсюдженням функцій дійсної змінної у комплексну площину.

Одначе, при такому розповсюдженні функції інколи набувають нових, дивних властивостей. Так, функція e^z виявляється періодичною, а $\sin z$ і $\cos z$ – необмеженими. Ба більше, вдається визначити логарифм від'ємних (і взагалі довільних нерівних нулеві комплексних чисел).

В другому пункті ми особливо виділяємо просту дробово-раціональну функцію $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ у зв'язку з її важливістю для практичних задач.

3.1 Функції $w = z^n$ і $w = \sqrt[n]{z}$

Вже визначені в розділі 1 для всіх комплексних z. Перша з цих функцій

$$w = z^n \tag{3.1.1}$$

однозначна.

Якщо в площинах z і w ввести полярні координати

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta), \tag{3.1.2}$$

то співвідношення (3.1.1) можна представити у вигляді двох рівностей

$$\rho = r^n, \quad \theta = n\varphi, \tag{3.1.3}$$

які пов'язують дійсні величини.

З (3.1.3) видно, що відображення, яке здійснює функція $w = z^N$ зводиться до повороту кожного вектора $z \neq 0$ на кут $(n-1)\arg z$ і розтягнення його у $|z|^{n-1}$ разів.

Далі зрозуміло, що точки z_1 і z_2 з рівними модулями та аргументами які відрізняються на кратне $2\pi/n$ переходять при відображенні (3.1.1) в одну точку.

Як наслідок, для однолистості відображення $w = z^n$ у деякій області D необхідно і достатньо, аби D не містила жодних двох точок z_1 і z_2 пов'язаних співвідношеннями

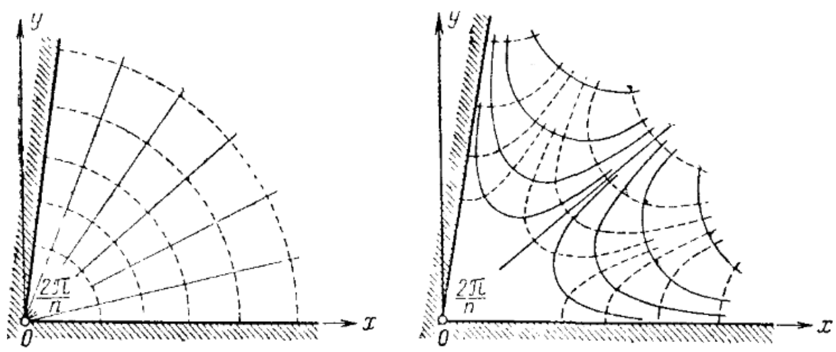
$$|z_1| = |z_2|; \quad \arg z_1 = \arg z_2 + \frac{2k\pi}{n} \quad (k \in \mathbb{Z}, k \neq 0). \tag{3.1.4}$$

Цій умові задовольняють, наприклад, сектори

$$\frac{2\pi k}{n} < \varphi < \frac{2\pi(k+1)}{n}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{3.1.5}$$

кожен з яких при відображенні (3.1.1) перетворюється у площину w з виключеною додатною піввіссю.

При цьому промені з вершиною у точці $z = 0$ переходять у промені з вершиною у точці w (тобто лише повертаються на деякий кут); дуги кіл з центром $z = 0$ – у дуги кіл з центром w (тільки, взагалі кажучи, іншого радіуса). На наступому малюнку зображений прообраз в одному з таких секторів площини z сітки полярних і декартових координат у площині w відповідно:



Справді, з рівносильної до (3.1.1) формули

$$w = u + iv = r^n \cdot (\cos n\varphi + i \sin \varphi) \tag{3.1.6}$$

випливає, що прямим $u = u_0$ і $v = v_0$ у площині z відповідають криві з полярними рівнянням

$$r = \sqrt[n]{\frac{u_0}{\cos n\varphi}}; \quad r = \sqrt[n]{\frac{v_0}{\sin n\varphi}}. \tag{3.1.7}$$

Зауважимо нарешті, що функція $w = z^n$ аналітична у всій площині, адже для довільного z існує

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{(z+h)^n - z^n}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{n \cdot z^{n-1} \cdot h + h^2 \cdot (\cdots)}{h}\right) = n \cdot z^{n-1}. \tag{3.1.8}$$

Функція

$$w = \sqrt[n]{z}, \tag{3.1.9}$$

обернена до функції $z = w^n$, n-значна при $z \neq 0$. Як випливає з розділу 2, значення кореня $\sqrt[n]{z}$ визначається значенням аргументу, вибраним для точки z.

Позначимо через $\arg z_0$ одне зі значень аргументу в точці $z_0 \neq 0$ і припустимо, що точка z описує, починаючи з z_0, деяку неперервну лінію C, яка не проходить через початок координат.

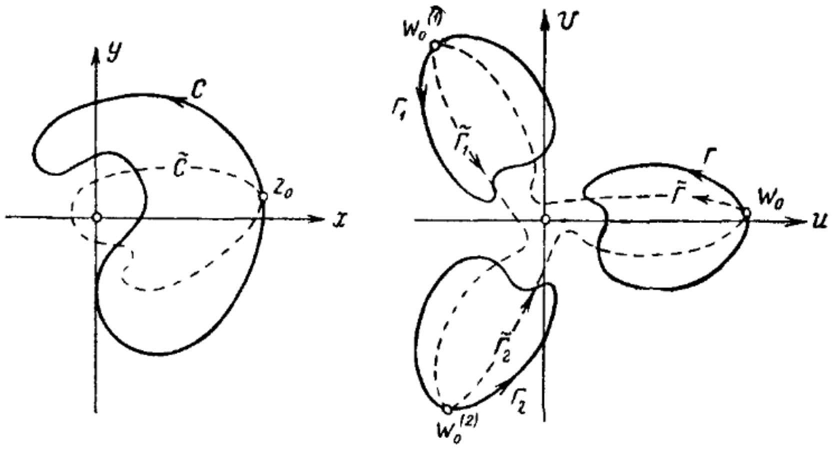
Через $\arg z$ ми будемо позначати те значення аргументу, яке змінюється при цьому неперервно.

В силу неперервності $\arg z$ і $|z|$ значення $w = \sqrt[n]{z}$, яке цілком визначається зробленим вибором аргументу також буде змінюватися неперервно.

Припустимо, що крива C замкнута і не містить всередині себе точку $z = 0$.

Тоді, при повному обході точкою z кривої C, точка $w = \sqrt[n]{z}$, де $\sqrt[n]{z}$ – вибране нами значення кореня, описує деяку замкнуту криву Γ, повертаючись до свого початкового положення, бо при цьому $\arg z$ повертається до початкового значення $\arg z_0$.

Значення кореня, які визначаються іншим вибором початкового значення $\arg z_0$ при повному обході C також описують замкнуті криві Γ_k, які відрізняються від кривої Γ тільки поворотами на ціле кратне кута $2\pi/n$:



Нехай тепер $\tilde{C}$ – замкнута крива без точок самоперетину, яка містить точку $z = 0$ всередині себе, і z_0 – деяка точка кривої $\tilde{C}$.

Тоді, при повному обході $\tilde{C}$, починаючи з z_0 у додатному напрямку, відповідна точка $w = \sqrt[n]{z}$ не повертається у своє початкове положення, а займає нове положення

$$w_0^{(1)} = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right) w_0 \tag{3.1.10}$$

– значення $\sqrt[n]{z_0}$ відмінне від w_0.

Це пояснюється тим, що $\arg z$ при обході кривої $\tilde{C}$ збільшується на 2π.

Звідси випливає, що у довільній області D яка не містить жодної замкнутої кривої, що обходить точку $z = 0$ можна виділити n неперервних і однозначних функцій, кожна з яких набуває одного зі значень $\sqrt[n]{z}$.

Ці n функцій називаються гілками багатозначної функції $w = \sqrt[n]{z}$, їх значення в кожній фіксованій точці відрізняються один від одного множником

$$\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right). \tag{3.1.11}$$

Кожна така гілка буде реалізувати однолисте відображення області D, тому в кожній точці цієї області застосовна теорема про прохідну оберненої функції (п. 5), згідно з якою існує цілком конкретне значення похідної

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)' = \frac{1}{(w^n)'} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sqrt[n]{z}}{z}, \tag{3.1.12}$$

або, якщо домовимося писати $\sqrt[n]{z} = z^{1/n}$,

$$\left(z^{1/n}\right)' = \frac{z^{1/n-1}}{n}. \tag{3.1.13}$$

Таким чином, довільна із побудованих гілок є аналітичною функцією в області D.

В області D розглядуваного типу і нескінченнозначна функція $\operatorname{Arg} z$ розпадається на нескінченну кількість неперервних і однозначних гілок.

Кожну таку гілку ми будемо позначати символом $\arg z$ і кожного разу будемо вказувати, яка ця гілка визначається.

Якщо область D містить хоча б одну замкнуту криву, яка обходить точку $z = 0$, то у такій області гілки функції $\sqrt[n]{z}$ неможливо відділити одну від одної.

Якщо в околі деякої точки $z \neq 0$ з області D ми і виділимо якусь гілку, то, рухаючись по кривій, яка обходить $z = 0$, ми прийдемо до іншої гілки.

Відповідно, в такій області D ми не можемо розглядати функцію $\sqrt[n]{z}$ як сукупність окремих однозначних аналітичних функцій.

Точка $z = 0$, в довільному околі якої неможливо відділити n окремих гілок функції $\sqrt[n]{z}$ називаються *точкою гілкування* цієї функції.

У якості прикладу області D першого типу можна розглядати площину z з вирізаною лінією L яка йде від точки $z = 0$ до нескінченності.

Якщо L збігається з додатною піввіссю, то гілки функції $w = \sqrt[n]{z}$ відображає область D на сектори

$$\frac{2k\pi}{n} < \arg w < \frac{2(k+1)\pi}{n}. \tag{3.1.14}$$

Ці відображення обернені до розглянутого вище відображення за допомогою функції $w = z^n$.

Область D напевне є областю другого типу якщо вона містить точку $z = 0$ всередині.

3.2 Функція Жуковського $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

Визначена, однозначна та аналітична для всіх $z \neq 0$.

Знайдемо область однолистості відображення

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right). \tag{3.2.1}$$

Для цього припустимо, що $z_1 \neq z_2$ переходять в одну і ту ж точку w.

Тоді маємо

$$z_1 + \frac{1}{z_1} = z_2 + \frac{1}{z_2}, \tag{3.2.2}$$

звідки
$$(z_1 - z_2) \cdot \left(1 - \frac{1}{z_1 \cdot z_2}\right) = 0 \tag{3.2.3}$$
і, як наслідок,
$$z_1 \cdot z_2 = 1. \tag{3.2.4}$$
Таким чином, для однолистості відображення (3.2.1) у деякій області D необхідно і достатньо, щоб D не містила жодних двох точок z_1 і z_2, пов'язаних співвідношенням $z_1 \cdot z_2 = 1$.

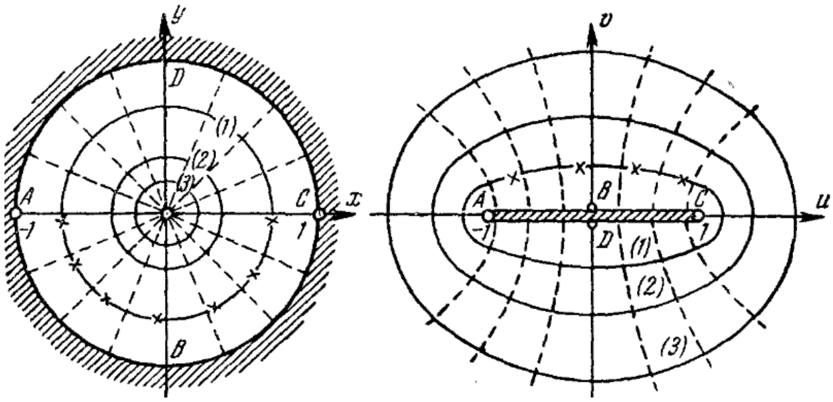
Цій умові задовольняє, наприклад, внутрішність одиничного круга $|z| < 1$ або його зовнішність $|z| > 1$.

Для того, зоб вивчити картину відображення (3.2.1), покладемо
$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right), \quad w = u + iv \tag{3.2.5}$$
і виділимо дійсну та уявну частини.

Тоді відображення (3.2.1) перепишеться у вигляді
$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi, \quad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi, \tag{3.2.6}$$
і ми побачимо, що кожне коло $|z| = r_0 < 1$ переходить з його допомогою у криву
$$u = \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{1}{r_0}\right)\cos\varphi, \quad v = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_0} - r_0\right)\sin\varphi, \tag{3.2.7}$$
тобто в еліпс з півосями
$$a = \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{1}{r_0}\right), \quad b = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_0} - r_0\right), \tag{3.2.8}$$
який проходиться у від'ємному напрямку.

При $r_0 \to 1$ цей еліпс стискається у відрізок $[-1, 1]$ осі u, а при $r_0 \to 0$ розходиться на нескінченність.

Відповідно, функція (3.2.1) відображає внутрішність круга $|z| < 1$ на зовнішність відрізка $[-1, +1]$:



Всі внутрішні точки цього відрізка – подвійні, він немовби складається із двох берегів, причому верхнє півколо переходить у нижній берег, а нижнє півколо у верхній берег.

Помітимо ще, що радіуси $\arg z = \varphi_0$, $0 < r < 1$ переходять при відображенні (3.2.1) у гілки гіпербол

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi_0} - \frac{v^2}{\sin^2\varphi_0} = 1 \tag{3.2.9}$$

Фокуси цих гіпербол, так само як і еліпсів (3.2.7) розташовані у кінцях відрізка $[-1, +1]$.

Зі співвідношень (3.2.6) випливає також, що кола $|z| = r_0 > 1$ переходять в еліпси із півосями

$$a = \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{1}{r_0}\right), \quad b = \frac{1}{2}\left(r_0 - \frac{1}{r_0}\right) \tag{3.2.10}$$

Ці еліпси збігаються з тими, у які переходять кола $|z| = r_0 < 1$, тільки обходяться вони у додатному напрямку.

Відповідно, функція (3.2.1) відображає і зовнішність круга $|z| > 1$ також на зовнішність відрізка $[-1, +1]$ осі u, причому верхнє півколо переходить у верхній берег відрізка, а нижня – в нижній.

Обернена до функції (3.2.1) функція

$$z = w + \sqrt{w^2 - 1} \tag{3.2.11}$$

двозначна – кожній точці w вона ставить у відповідність дві точки z_1 і z_2, пов'язані умовою $z_1 \cdot z_2 = 1$.

Якщо покласти $z_1 = w + \sqrt{w^2 - 1}$, то другим значенням z, яке відповідає w буде $z_2 = w - \sqrt{w^2 - 1}$ і безпосередньо видно, що $z_1 \cdot z_2 = 1$.

Позначимо через ρ_1, θ_1 і ρ_2, θ_2 модулі і аргументи комплексних чисел $w - 1$ і $w + 1$ відповідно.

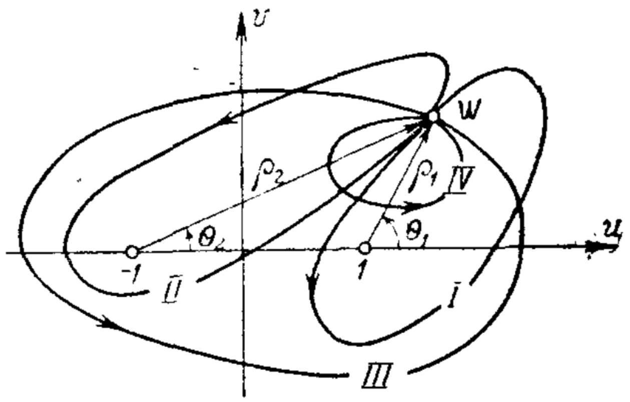
Тоді модуль і аргумент кореня у формулі (3.2.11) будуть дорівнювати $\sqrt{\rho_1 \cdot \rho_2}$ і $(\theta_1 + \theta_2)/2$.

Звідси випливає, що при обході точкою w замкнутої лінії першого або другого типу, який охоплює лише одну із точок $+1$ і -1, значення кореня змінює знак.

Справді, при такому обході θ_1 (або θ_2) змінюється на 2π, а θ_2 (або θ_1) не змінюється.

Відповідно, аргумент кореня змінюється на π, а модуль кореня при обході довільного замкнутого контуру повертається до початкового значення.

Якщо тепер точка w обходить замкнуту лінію третього типу яка охоплює обидві точки ± 1, то значення кореня не змінюється, бо при цьому і θ_1 і θ_2 змінюються на 2π і, відповідно, аргумент кореня $(\theta_1 + \theta_2)/2$ також змінюється на 2π.



Значення кореня не змінюється якщо замкнута лінія має четвертий тип, тобто не містить всередині себе жодної з точок ± 1, адже при цьому ані θ_1 ані θ_2 не змінюються.

Таким чином, в довільній області Δ у якій не можна провести замкнуту лінію яка обходить тільки одну з точок ± 1 функція (3.2.11) допускає виділення двох однозначних гілок.

Ці гілки у кожній фіксованій точці w відрізняються знаком кореня у формулі (3.2.11) і призводять до двох значень z зв'язаних умовою $z_1 \cdot z_2 = 1$.

Кожна з цих гілок реалізує однолисте відображення і, за теоремою про похідну оберненої функції, аналітична.

Якщо ж в області Δ можна обійти точку $+1$ (не обійшовши при цьому точку -1) або -1 (не обійшовши $+1$), наприклад, якщо Δ містить всередині хоча б одну з цих точок, то у такій області гілки функції (3.2.11) неможливо відрізнити одну від одної.

Точки $w = \pm 1$, у яких гілки функції (3.2.11) немовби з'єднуються між собою, називаються точками гілкування цієї функції.

У якості прикладу області Δ першого типу можна розглянути площину w із вирізаною лінією Λ яка з'єднує точки -1 і $+1$.

Якщо ж Λ є відрізком $[-1, +1]$ дійсної вісі, то дві гілки функції (3.2.11) відображають Δ, відповідно на зовнішність та внутрішність одиничного кола.

Ці відображення обернені до розглянутих вище.

3.3 Експонента і логарифм

Експоненту e^z визначимо для довільного комплексного $z = x + iy$ наступною рівністю:

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y). \tag{3.3.1}$$

Для дійсних $z = x$ це визначення збігається зі звичайним.

Експонента всюди аналітична. Справді, у довільній точці виконуються умови Коші-Рімана:

$$\frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y) = \frac{\partial}{\partial y}(e^x \sin y); \tag{3.3.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(e^x \cos y) = -\frac{\partial}{\partial x}(e^x \sin y). \tag{3.3.3}$$

Зберігається звичайна формула диференціювання

$$(e^z)' = e^z. \tag{3.3.4}$$

Справді, похідна не залежить від напрямку, тому маємо

$$(e^z)' = \frac{\partial}{\partial x}(e^x(\cos y + i\sin y)) = e^x(\cos y + i\sin y) = e^z. \tag{3.3.5}$$

Зберігається основна властивість експоненти:

$$\begin{aligned} e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{x_1} \cdot (\cos y_1 + i\sin y_1) \cdot e^{x_2} \cdot (\cos y_2 + i\sin y_2) = \\ = e^{x_1+x_2} \cdot (\cos(y_1+y_2) + i \cdot \sin(y_1+y_2)) = e^{z_1+z_2}. \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Зауважимо, що експонента жодного комплексного числа не дорівнює нулю адже $|e^z| = e^x > 0$.

Покладаючи в (3.3.1) $x = 0$, $y = \varphi$ отримаємо класичну формулу Ейлера:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{3.3.7}$$

За допомогою формули Ейлера довільне комплексне число z з модулем r і аргументом φ може бути записане у степеневій формі:

$$z = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi) = r \cdot e^{i\varphi}. \tag{3.3.8}$$

Експонента періодична з чисто уявним періодом $2\pi i$. Справді, для довільного цілого k маємо

$$e^{z+2\pi ki} = e^z \cdot e^{2\pi ki} = e^z, \tag{3.3.9}$$

адже, згідно з формулою Ейлера, $e^{2\pi ki} = 1$.

Проте, якщо $e^{z_1} = e^{z_2}$, то $e^{x_1} = e^{x_2}$, $\cos y_1 = \cos y_2$, $\sin y_1 = \sin y_2$, тому $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1 + 2k\pi$, або

$$z_2 - z_1 = 2k\pi i, \tag{3.3.10}$$

де k – ціле число.

Завдяки періодичності, вивчення функції e^z на площині зводиться до вивчення її на смузі $0 \le y < 2\pi$.

Зокрема, відображення (3.3.10) однолисте на цій смузі, адже ця смуга не містить жодних двох точок, пов'язаних співвідношенням $e^{z_1} = e^{z_2}$.

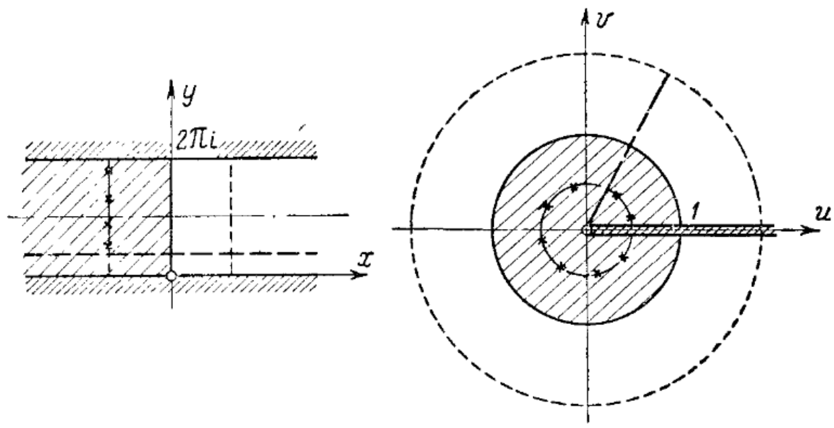
Введемо у площині w полярні координати, поклавши $w = \rho \cdot e^{i\theta}$, тоді (3.3.1) запишеться у вигляді двох рівностей:

$$\rho = e^x, \quad \theta = y. \tag{3.3.11}$$

Як наслідок, відображення (3.3.1) перетворює прямі $y = y_0$ у промені $\theta = y_0$, а відрізки $x = x_0$, $0 \le y < 2\pi$ – в кола $\rho = e^{x_0}$.

При цьому смуга $0 < y < 2\pi$ перетворюється у площину w із розрізом вздовж додатної півосі, а половина $0 < y < \pi$ цієї смуги – у верхню півплощину.

У загальному випадку, смуга $0 < \operatorname{Im} z < h$ експонента переводить в кути $0 < \arg w < h$:



Логарифм визначається як *обернена* до експоненти функція: число w називається логарифмом числа z якщо $e^w = z$, позначається

$$w = \ln z. \tag{3.3.12}$$

З визначення випливає *основна властивість логарифмів*: якщо $w_1 = \ln z_1$ і $w_2 = \ln z_2$, то $w = w_1 + w_2$ є логарифмом числа $z = z_1 \cdot z_2$:

$$\ln z_1 + \ln z_2 = \ln(z_1 \cdot z_2). \tag{3.3.13}$$

Справді, $z_1 = e^{w_1}$, $z_2 = e^{w_2}$, тому $z_1 \cdot z_2 = e^{w_1 + w_2}$.

Зокрема, покладаючи в (3.3.13) $z_1 = |z|$, $z_2 = e^{i\arg z}$, отримаємо

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z, \tag{3.3.14}$$

де символ $\arg z$ позначає *довільне* значення аргументу z, тому кожне комплексне число $z \neq 0$ має нескінченну кількість логарифмів.

Для ясності будемо позначати *багатозначну* функцію символом $\operatorname{Ln} z$:

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi). \tag{3.3.15}$$

Символом $\ln z$ будемо позначати *одне* зі значень $\operatorname{Ln} z$, вказуючи за потреби яке саме.

Як і раніше, значення $\operatorname{Ln} z$ визначається значенням аргументу, приписаного точці z.

Як і раніше, нас здебільшого цікавитиме значення логарифму *не в одній точці, а на кривій*, C яка починається у точці $z_0 \neq 0$, і по якій неперервно рухається точка z.

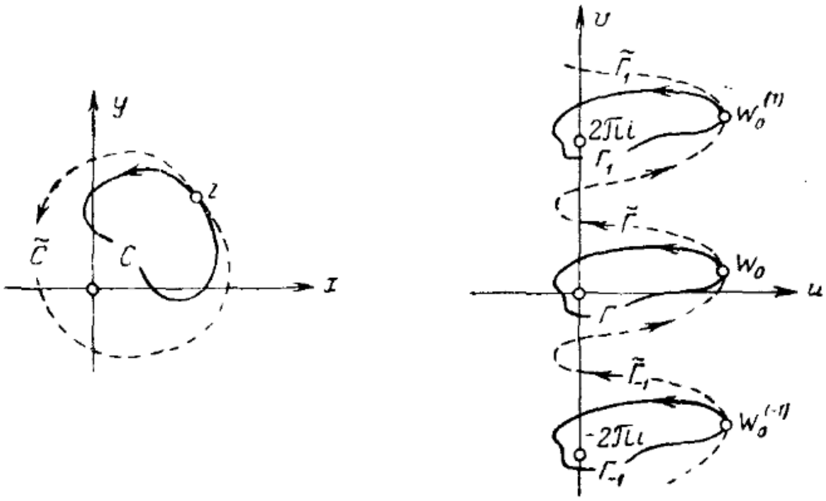
Зрозуміло що початковим значенням можна вибрати довільне, а далі будемо обирати таке значення $\operatorname{Ln} z$ яке змінюється неперервно.

Припустимо, що крива C замкнута і *не містить* всередині точку $z = 0$.

Коли z описує криву C, точка $w = \ln z$ *пробігає* деяку замкнуту криву Γ.

Інші значення логарифму, що відрізняються лише початковим значенням $\arg z_0$, опишуть криві Γ_k які *відрізняються* від Γ *лише зсувом* на вектор $2k\pi i$.

Якщо $\tilde{C}$ – замкнута крива, що *містить* точку $z = 0$ всередині, то при обході її точкою z у додатному напрямку точка $w = \ln z$ не повернеться до свого початкового положення, а займе *нове* положення $w_0^{(1)} = w_0 + 2\pi i$.



Звідси випливає, що у довільній області D яка не містить замкнутих кривих які обходять точку $z = 0$ можна виділити *нескінченну множину неперервних і однозначних гілок* багатозначної функції $w = \operatorname{Ln} z$, значення яких у кожній фіксованій точці відрізняються на доданок $2k\pi i$.

Кожна така гілка $\ln z$ буде реалізувати взаємно-однозначне відображення області D і, відповідно, за теоремою про прохідну оберненої функції буде мати *похідну*

$$(\ln z)' = \frac{1}{(e^w)'} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}. \tag{3.3.16}$$

Зауважимо, що похідна *одна* для усіх гілок.

Таким чином, всі гілки $\operatorname{Ln} z$ будуть *аналітичними* функціями.

Якщо ж область D містить хоча б одну замкнуту криву що охоплює точку $z = 0$, то у такій області гілки функції $\operatorname{Ln} z$ розрізнити *неможливо.*

Точка $z = 0$ у якій немовби з'єднуються всі гілки функції $\operatorname{Ln} z$ називається точкою *гілкування.*

3.4 Тригонометричні та гіперболічні функції

3.4.1 Тригонометричні функції

У комплексній області просто виражаються через експоненту.

Для дійсної змінної x формула Ейлера дає

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x, \tag{3.4.1}$$

звідки

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}; \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}. \tag{3.4.2}$$

Використаємо це як визначення, тобто нехай для довільного комплексного z:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \tag{3.4.3}$$

Таким чином визначені функції для дійсних $z = x$ збігаються зі звичайними синусом і косинусом.

Також, обидві визначені функції всюди аналітичні, причому виконуються звичайні формули диференціювання:

$$(\sin z)' = \cos z; \quad (\cos z)' = -\sin z. \tag{3.4.4}$$

Обидві функції періодичні з дійсним періодом 2π.

$\sin z$ – непарна функція, $\cos z$ – парна.

Виконуються звичайні тригонометричні рівності:

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad \sin 2z = 2 \sin z \cos z, \quad \dots \tag{3.4.5}$$

Дослідимо відображення яке реалізує перша з цих функцій. Покладаючи

$$iz = z_1, \quad e^{z_1} = z_2, \quad z_3 = -iz_2 = \frac{e^{iz}}{i}, \tag{3.4.6}$$

отримаємо

$$w = \frac{1}{2}\left(z_3 + \frac{1}{z_3}\right) = \sin z. \tag{3.4.7}$$

Таким чином, наше відображення можна розглядати як композицію вже досліджених.

Знайдемо перш за все умови його однолистості: нехай D при відображеннях (3.4.6) переходить послідовно в D_1, D_2 і D_3.

Перше і третє із відображень (3.4.6) однолисті всюди, а для однолистості другого необхідно і достатньо аби D_1 не містила жодної пари точок z_1' і

z_1'' пов'язаних співвідношенням $z_1' - z_1'' = 2k\pi i$, де k – ціле число.

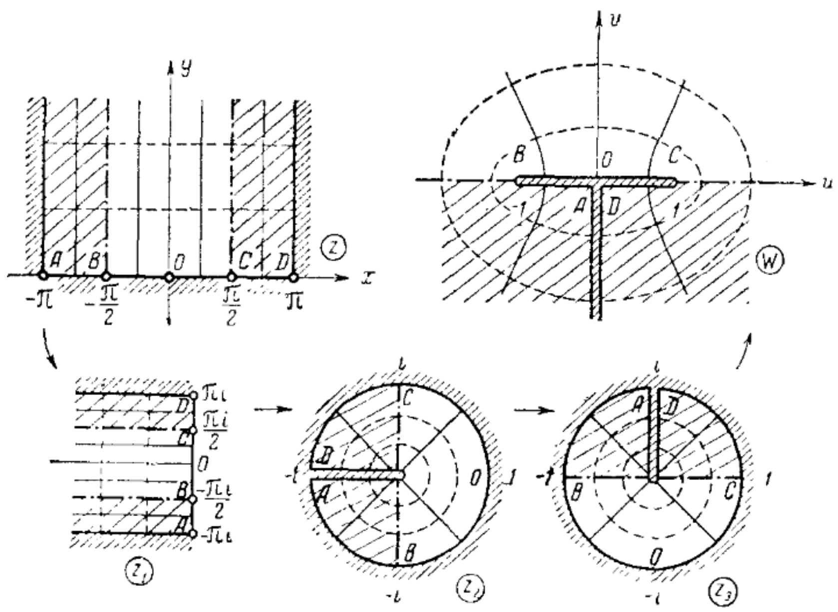
Для однолистості відображення (3.4.7) необхідно і достатньо аби область D_3 не містила жодної пари точок z_3' і z_3'' пов'язаних співвідношенням $z_3' \cdot z_3'' = 1$.
Переходячи за допомогою формул (3.4.6) до площини z отримаємо, що для однолистості відображення $w = \sin z$ в області D необхідно і достатньо, аби D не містила жодної пари точок z' і z'' пов'язаних, по-перше

$$z' - z'' = 2k\pi \quad (k \neq 0 \text{ – ціле}), \tag{3.4.8}$$

і, по-друге, співвідношенням $e^{i(z'+z'')=-1}$, або, що те саме,

$$z' + z'' = (2k+1) \cdot \pi \quad (k \text{ – ціле}), \tag{3.4.9}$$

Цим умовам задовольняє, наприклад, півсмуга $-\pi < x < \pi$, $y > 0$:



Сім'ї променів $x = x_0$ і відрізків $y = y_0$ переходять в сім'ї гіпербол та еліпсів відповідно, зі спільними фокусами.

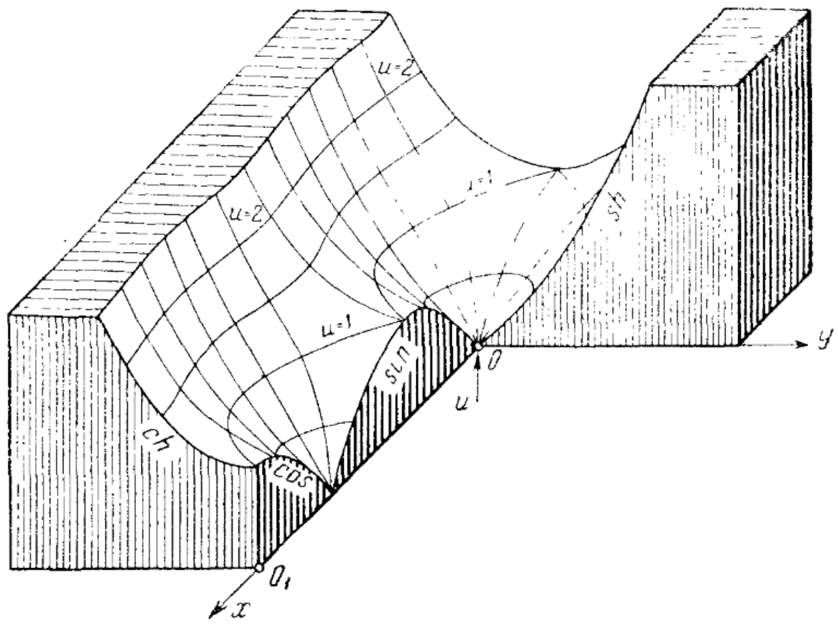
При цьому вдвічі вужча півсмуга $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$, $y > 0$ переходить у верхню півплощину.

Як бачимо, $\sin z$ в комплексній площині не є обмеженим, наприклад на променях $x = \pm\pi/2$, $y > 0$ він набуває дійсних значень за модулем більших за одиницю, і взагалі як завгодно великих.

Помітимо також, що у (замкнутій) півсмузі $-\pi \le x \le \pi$, $y \ge 0$ функція $\sin z$ набуває значення 0 лише у точках $z = 0$ і $z = \pm\pi$.

Враховуючи непарність і періодичність цієї функції, можна зробити висновок що вона обертається на нуль лише на дійсній вісі у точках $z = k\pi$.

Для повноти приводимо *поверхню модуля*, або "рельєф" функції $\sin z$, тобто поверхню у просторі (x, y, u) з рівнянням $u = |\sin z|$:



Ця поверхня періодична з дійсним періодом π.

На ній нанесені дві системи ліній – це лінії рівня $|\sin z|$ і $\arg \sin z$.

Зріз поверхні вертикальною площиною, що проходить через вісь Ox дає графік функції $|\sin x|$.

По мірі віддалення від цієї осі поверхня згладжується, а аплікати (u-координати) її точок швидко зростають.

За формою поверхня наближається до циліндра $u = e^{|y|}/2$.

Відображення яке реалізує функція $\cos z$, у силу співвідношення

$$\cos z = \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) \tag{3.4.10}$$

відрізняється від розглянутого виключно зсувом.

Функції $\tan z$ і $\cot z$ визначаються формулами

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = -i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}; \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = i\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}. \qquad (3.4.11)$$

Функція $\tan z$ аналітична всюди за виключенням точок де $\cos z$ обертається на нуль, тобто всюди окрім точок $z_k = \pi/2 + k\pi$, адже при наближенні до цих точок $\tan z$ необмежено зростає.

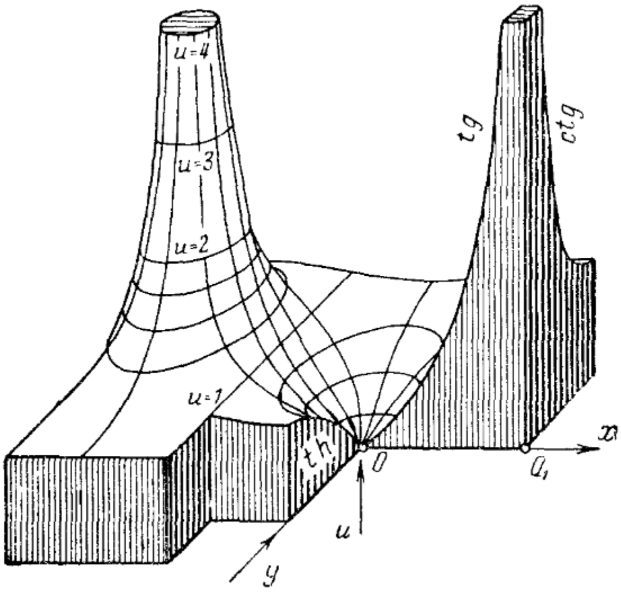
Те ж саме можна сказати про функцію $\cot z$ і точки $z_k = k\pi$.

З формул (3.4.11) випливає, що ці функції періодичні з періодом π. Справді,

$$\tan(z + \pi) = -i\frac{e^{i(z+\pi} - e^{-i(z+\pi)}}{e^{i(z+\pi} + e^{-i(z+\pi)}} = -i\frac{-e^{iz} + e^{-iz}}{-e^{iz} - e^{-iz}} = \tan z. \qquad (3.4.12)$$

Відображення яке реалізує функція $w = \tan z$ ми розглянемо пізніше.

Тут ми наведедемо лише рельєф тангенсу, тобто поверхню $u = |\tan z|$:



Ця поверхня періодична з дійсним періодом $\pi/2$.

Вона має яскраво виражені піки над точками $z = \pi/2 + k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Її зріз вертикальною площиною, що проходить через вісь Ox, дає графік $|\tan x|$.

По мірі віддалення від цієї вісі поверхня стає все більш плоською і наближається до площини $u = 1$.

На поверхні нанесені лінії рівня $|\tan z|$ і $\arg \tan z$.

3.4.2 Гіперболічні функції

Гіперболічні функції у комплексній області визначається рівностями

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \tag{3.4.13}$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \tag{3.4.14}$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}, \tag{3.4.15}$$

$$\coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}. \tag{3.4.16}$$

Вони цілком просто виражаються через тригонометричні функції:

$$\sinh z = -i \sin iz, \tag{3.4.17}$$

$$\cosh z = \cos iz, \tag{3.4.18}$$

$$\tanh z = -i \tan iz, \tag{3.4.19}$$

$$\coth z = i \cot iz, \tag{3.4.20}$$

і тому несуттєво від них відрізняються.

3.4.3 Обернені тригонометричні та гіперболічні функції

Тригонометричні та гіперболічні функції виражаються через експоненту, тому обернені тригонометричні і обернені гіперболічні функції виражаються через логарифми.

Отримаємо такий вираз для $w = \arccos z$: за визначенням

$$z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}, \tag{3.4.21}$$

звідки

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0. \tag{3.4.22}$$

Розв'язуючи це квадратне відносно e^{iw} рівняння, знаходимо

$$e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1} \tag{3.4.23}$$

і

$$w = \arccos z = -i \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) \tag{3.4.24}$$

(знаки $\pm$ у формулі коренів квадратного рівняння можна опустити якщо розуміти корінь як двозначну функцію).

У силу співвідношення

$$(z + \sqrt{z^2 - 1}) \cdot (z - \sqrt{z^2 - 1}) = 1 \tag{3.4.25}$$

зміна знаку перед коренем зводиться до зміни знаку перед логарифмом, тому знак "$-$" в останній формулі також можна не писати:

$$w = \arccos z = i \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) \tag{3.4.26}$$

Аналогічні формули можна отримати й для інших функцій:

$$\arcsin z = \frac{\pi}{2} - \arccos z = \frac{\pi}{2} - i \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}), \tag{3.4.27}$$

$$\arctan z = \frac{\pi}{2} - \arctan z = \frac{1}{2i} \cdot \ln\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right), \tag{3.4.28}$$

$$\operatorname{arcsinh} z = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1}), \tag{3.4.29}$$

$$\operatorname{arccosh} z = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}), \tag{3.4.30}$$

$$\operatorname{arctanh} z = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right), \tag{3.4.31}$$

$$\operatorname{arccoth} z = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{z + 1}{z - 1}\right). \tag{3.4.32}$$

Всі ці функції багатозначні, адже ln у правій частині формул (3.4.26)-(3.4.32) може позначати довільне значення логарифму.

Способи виділення їх однозначних гілок аналогічні розглянутим вище.

Всі такі гілки будуть аналітичними функціями.

3.5 Загальна степенева функція $w = z^a$

Визначається співвідношенням

$$z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}, \tag{3.5.1}$$

де $a = \alpha + i\beta$.

Покладаючи $z = r \cdot e^{i\varphi}$, отримаємо

$$\operatorname{Ln} z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi) \tag{3.5.2}$$

і, як наслідок,

$$z^a = e^{\alpha \ln r - \beta(\varphi + 2k\pi)} \cdot e^{i(\alpha(\varphi + 2k\pi) + \beta \ln r)}, \tag{3.5.3}$$

де k – ціле число.

Звідси видно, що при $\beta \neq 0$ функція z^a завжди має нескінченно багато значень які лежать (при фіксованих z і a) на колах $|w| = \rho_k$ з радіусами

$$\rho_k = e^{\alpha \ln r - \beta\varphi} \cdot e^{-2k\pi\beta} \tag{3.5.4}$$

які утворюють геометричну нескінченну в обидві сторони прогресію зі знаменником $e^{-2\pi\beta}$.

Аргументи цих значень

$$\theta_k = \alpha\varphi + \beta \ln r + 2k\pi\alpha \tag{3.5.5}$$

утворюють також нескінченну в обидві сторони арифметичну прогресію з різницею $2\pi\alpha$.

При $\beta = 0$, тобто при дійсних a, значення z^a розташовані на колі $|w| = e^{a \ln r} = r^a$, і їх аргументи є

$$\theta_k = a\varphi + 2k\pi a. \tag{3.5.6}$$

Якщо $a = p/q$ – раціональне число, то всі значення θ_k будуть відрізнятися від q із цих значень на ціле кратне 2π.

Як наслідок, у цьому випадку функція $w = z^a$ скінченно-значна і збігається із функцією $\sqrt[q]{z^p}$:

$$z^{p/q} = \sqrt[q]{z^p}. \tag{3.5.7}$$

Якщо ж a – ірраціональне дійсне число, то серед значень θ_k у формулі (3.5.6) немає таких, які відрізняються на ціле кратне 2π і, як наслідок, функція $z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}$ нескінченнозначна.

Багатозначність загальної степеневої функції, як і тих елементарних функцій, які ми розглядали вище, обумовлена багатозначністю аргументу.

Способи виділення її однозначних гілок попереднє, точкою гілкування є $z = 0$.

Наряду із загальною степеневою функцією (3.5.1) можна розглядати загальну експоненту

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a} = e^{z \ln |a|} \cdot e^{zi \operatorname{Arg} a}. \tag{3.5.8}$$

На відміну від функції (3.5.1) функція (3.5.8) являє собою сукупність окремих, не зв'язаних між собою однозначних функцій, які відрізняються множниками $e^{2k\pi iz}$, де k – ціле число.

4 Інтегрування функцій комплексної змінної

У цьому параграфі ми розглянемо поняття інтегралу від функції комплексної змінної та найважливіші властивості аналітичних функції, пов'язані з поняттям інтегралу або такі, що спираються на нього.

Зокрема, буде встановлена рівносильність понять про аналітичну функцію як про функцію диференційовну в кожній точці області визначення, і як про функцію, інтеграл від якої не залежить від шляху.

Це надає нову концепцію у побудові теорії аналітичних функцій. Застосування поняття інтегралу і теорем, що базуються на ньому, ми розглянемо у наступних главах.

4.1 Інтеграл від функції комплексної змінної

Нехай задана деяка орієнтована крива C, і визначена на ній функція комплексної змінної $f(z)$. За визначенням, *інтегралом* від $f(z)$ вздовж C називають

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\cdot(z_{k+1}-z_k)=\int\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z, \tag{4.1.1}$$

де $z_0 = a, z_1, \ldots, z_{n+1} = b$ – послідовні точки, що розбивають C на n ділянок, через a і b позначені кінці C, ζ_k – довільна точка що лежить на ділянці $[z_k, z_{k+1}]$ кривої C, і границя береться у припущенні що $\max_k |z_{k+1} - z_k| \to 0$.

Якщо C – кусково-гладка крива, а $f(z)$ – кусково-неперервна та обмежена функція, то інтеграл (4.1.1) завжди існує. Доведення зводиться до відомої з аналізу теореми про існування криволінійного інтеграла від функції дійсної змінної. Справді, поклавши

$$\begin{cases} f(z)=u(x,y)+iv(x,y), \\ z_k=x_k+iy_k, \quad x_{k+1}-x_k=\Delta x_k, \quad y_{k+1}-y_k=\Delta y_k, \\ \zeta_k=\xi_k+i\eta_k, \quad u(\xi_k,\eta_k)=u_k, \quad v(\xi_k,\eta_k)=v_k, \end{cases} \tag{4.1.2}$$

отримаємо

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\cdot(z_{k+1}-z_k)=\sum_{k=0}^{n-1}(u_k\Delta x_k-v_k\Delta y_k)+i\sum_{k=0}^{n-1}(u_k\Delta y_k+v_k\Delta x_k). \tag{4.1.3}$$

Суми у правій частині (4.1.3) є інтегральними сумами для відповідних криволінійних інтегралів. У наших умовах ці інтеграли існують і, як наслідок, існує

$$\int\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_C (u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) + i\int\limits_C (u\,\mathrm{d}y + v\,\mathrm{d}x). \tag{4.1.4}$$

За допомогою формули (4.1.4) обчислення інтегралу від функції комплексної змінної зводиться до обчислення дійсних інтегралів.

Застосовуючи введені визначення, легко бачити, що похідні та інтеграл комплексної функції дійсної змінної $w(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$ представляються наступними лінійними комбінаціями:

$$w'(t) = \varphi'(t) + i\psi'(t), \tag{4.1.5}$$

$$\int\limits_\alpha^\beta w(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_\alpha^\beta \varphi(t)\,\mathrm{d}t + i\int\limits_\alpha^\beta \psi(t)\,\mathrm{d}t. \tag{4.1.6}$$

Нехай $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ дає параметричне представлення кривої C, причому $z(\alpha) = a$, $z(\beta) = b$. Тоді, користуючись формулою (4.1.4), ми зведемо обчислення інтегралу від $f(z)$ вздовж C до обчислення інтегралу від комплексної функції дійсної змінної:

$$\int\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_\alpha^\beta f(z(t)) \cdot z'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{4.1.7}$$

З формули (4.1.4) також випливає, що на інтеграли від функцій комплексної змінної розповсюджуються звичайні властивості криволінійних інтегралів:

$$\int\limits_C (a \cdot f(z) + b \cdot g(z))\,\mathrm{d}z = a\int\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z + b\int\limits_C g(z)\,\mathrm{d}z, \tag{4.1.8}$$

$$\int\limits_{C_1+C_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z, \tag{4.1.9}$$

$$\int\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z = -\int\limits_{C^-} f(z)\,\mathrm{d}z, \tag{4.1.10}$$

де a і b – комплексні числа, через $C_1 + C_2$ позначена крива що складається з C_1 і C_2, а через C^- – крива, що збігається з C, але проходиться у зворотному напрямку.

Доведемо ще одну властивість інтегралу: нехай $M = \max_C |f(z)|$, l – довжина C, тоді

$$\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \int_C |f(z)|\cdot|\,\mathrm{d}z| \le Ml. \tag{4.1.11}$$

Доведення випливає безпосередньо з визначення інтегралу. Справді, маємо:

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)\cdot\Delta z_k\right| \le \sum_{k=0}^{n-1}|f(\zeta_k)|\cdot|\Delta z_k| \le M\sum_{k=0}^{n-1}|\Delta z_k|, \tag{4.1.12}$$

де $\sum_{k=0}^{n-1}|\Delta z_k|$ – довжина ламаної $z_0 z_1 \dots z_n$ що вписана у криву C.

Перейшовши до границі при $|\Delta z_k| \to 0$ отримаємо (4.1.11).

4.2 Теорема Коші

У загальному випадку $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ залежить як від підінтегральної функції $f(z)$ так і від кривої C. Однак, якщо функція $f(z)$ аналітична у деякій однозв'язній області, що містить криву C, то інтеграл цілком визначається положенням кінців C і не залежить від вигляду цієї лінії. Іншими словами, справджується

Теорема 4.2.1 (О. Коші, 1825 р.)**.** *Якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D, то для всіх кривих C, що лежать у цій області та мають спільні кінці, інтеграл $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ набуває одного і того ж значення.*

Ми доведемо цю теорему у додатковому припущенні неперервності похідної $f'(z)$.

Доведення. Нехай, як завжди, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Завдяки співвідношенню

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C (u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) + i\int_C (u\,\mathrm{d}y + v\,\mathrm{d}x). \tag{4.2.1}$$

(див. також (4.1.4), питання про незалежність інтегралу $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ від шляху зводиться до питання про незалежність від шляху криволінійних інтегралів

$$\int\limits_C (u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y), \quad \int\limits_C (u\,\mathrm{d}y + v\,\mathrm{d}x). \tag{4.2.2}$$

Але, як відомо з аналізу, в однозв'язній області для незалежності від шляху криволінійного інтеграла $\int_C (P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y)$, де P і Q – функції, що мають неперервні частинні похідні, необхідно і достатньо, аби підінтегральний вираз був повним диференціалом, тобто аби у кожній точці області D виконувалося $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Для інтегралів (4.2.2) ці співвідношення набувають вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{4.2.3}$$

а неперервність частинних похідних випливає з припущення про неперервність $f'(z)$. Рівняння (4.2.3) збігаються з умовами Коші-Рімана і задовольняються, оскільки $f(z)$ функція аналітична. □

Завдяки цій теоремі для аналітичних в однозв'язних областях функції, замість $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ можемо писати $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$, де через z_0 і z позначені кінці кривої C.

Використовуючи теорему 4.2.1 можна довести ряд тверджень аналогічних до звичайних тверджень інтегрального числення. Перш за все, виконується

Теорема 4.2.2. *Якщо функція аналітична в однозв'язній області, то інтеграл*

$$\int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = F(z), \tag{4.2.4}$$

що розглядається в залежності від своєї верхньої межі, також є аналітичною функцією, причому

$$F'(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = f(z). \tag{4.2.5}$$

Доведення. Справді, за визначенням похідної і властивостями інтегралу (4.1.9) і (4.1.10) маємо

$$F'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\int\limits_{z_0}^{z+h} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta - \int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \right) =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int\limits_{z}^{z+h} d(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta. \quad (4.2.6)$$

Завдяки неперервності $f(z)$ в точці z можемо записати:

$$f(\zeta) = f(z) + \eta(\zeta),$$

де $\eta(\zeta) \to 0$ при $\zeta \to z$. Підставляючи це у (4.2.6), отримаємо

$$F'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int\limits_{z}^{z+h} f(z)\,\mathrm{d}\zeta + \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int\limits_{z}^{z+h} \eta(z)\,\mathrm{d}\zeta. \quad (4.2.7)$$

Оскільки $f(z)$ – величина стала при інтегруванні за ζ, то

$$\int\limits_{z}^{z+h} f(z)\,\mathrm{d}\zeta = f(z) \int\limits_{z}^{z+h} \mathrm{d}\zeta = h \cdot f(z), \quad (4.2.8)$$

адже з визначення безпосередньо випливає, що $\int_z^{z+h} \mathrm{d}\zeta = h$.

Далі, з нерівності (4.1.11) маємо

$$\left| \int\limits_{z}^{z+h} \eta(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \right| \leq |h| \cdot \max |\eta(\zeta)| \quad (4.2.9)$$

(шлях інтегрування від точки z до точки $z+h$ за теоремою 4.2.1 можна вважати прямолінійним, тому його довжина дорівнює $|h|$). Таким чином, в (4.2.7) перша границя дорівнює $f(z)$, а друга – нулю, тобто $F'(z) = f(z)$, що і потрібно було довести. □

Функція, чия похідна дорівнює заданій функції $f(z)$ називається *первісною* цієї функції. Щойно доведена теорема стверджує, що інтеграл від $f(z)$ який розглядається фу функція своєї верхньої межі, є однією з первісних функції $f(z)$.

Теорема 4.2.3. *Довільні дві первісні однієї й тієї ж функції відрізняються одна від одної не більш ніж на сталий доданок.*

Доведення. Нехай $F_1(z)$ і $F_2(z)$ – ці первісні, і

$$\Phi(z) = F_1(z) - F_2(z) = u(x, y) + iv(x, y). \tag{4.2.10}$$

Для доведення теореми достатньо показати, що функція $\Phi(z)$ стала.

За формулою для похідної, маємо:

$$\Phi'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0, \tag{4.2.11}$$

адже за нашою умовою $\Phi'(z) = F_1'(z) - F_2'(z) = f(z) - f(z) = 0$.

Звідси випливає, що $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0$, $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0$, тому $u(x, y)$ і $v(x, y)$ сталі. □

Наступна теорема дозволяє обчислювати інтеграл за допомогою первісних.

Теорема 4.2.4. *Якщо $F(z)$ – довільна первісна аналітичної функції $f(z)$, то*

$$\int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = F(z) - F(z_0). \tag{4.2.12}$$

Доведення. Справді, за теоремою 4.2.2, функція $F_1(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$ є однією з первісних для $f(z)$, а функція $F(z)$ також первісна, тому, за теоремою 4.2.3,

$$\int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = F(z) + C, \tag{4.2.13}$$

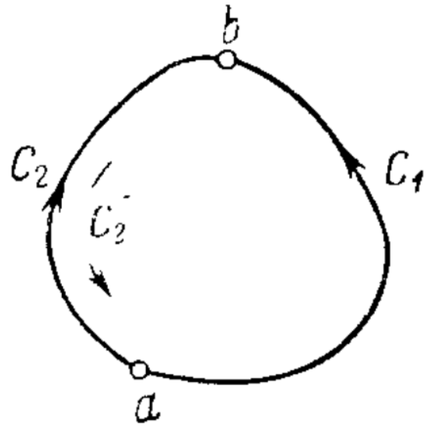
де C – деяка стала. Покладаючи у цій рівності $z = z_0$, знаходимо $F(z_0) + C = 0$, звідки $C = -F(z_0)$, що і дає шукану формулу (4.2.12). □

Зауважимо також, що теоремі Коші, доведеній на початку цього пункту можна надати наступного вигляду:

Теорема. *Якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D, то її інтеграл вздовж довільного замкнутого контура C, що лежить в D дорівнює нулеві:*

$$\int\limits_{C} f(z)\,\mathrm{d}z = 0. \tag{4.2.14}$$

Доведення спирається на те, що замкнутий контур C можна розкласти на два шляхи, C_1 і C_2 зі спільними початком і кінцем:



За властивостями інтегралів,

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_2^-} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z. \qquad (4.2.15)$$

Як наслідок, рівність нулю інтегралу вздовж C рівносильне рівності між собою інтегралів вздовж C_1 та C_2.

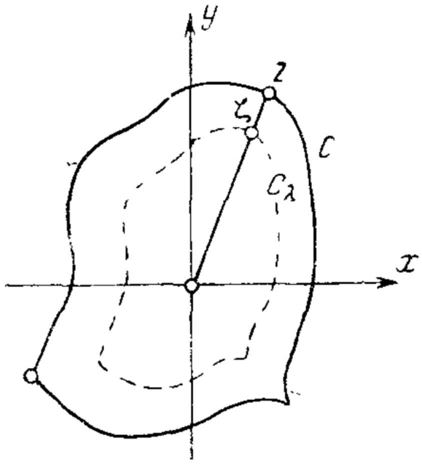
На завершення доведемо ще одне корисну для подальшого застосування узагальнення теореми Коші. А саме, в теоремі Коші (в останньому формулюванні) мова йде про інтегра по контуру, який цілком лежить всередині області аналітичності функції, хоча інколи доводиться розглядати інтеграли вздовж кривих, на яких функція, залишаючись неперервною, перестає бути аналітичною. Виявляється, теорема Коші залишається в силі і для цього випадку:

Теорема 4.2.5. *Якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D і неперервна в замкнутій області $\overline{D}$, то інтеграл від $f(z)$ взятий вздовж границі C цієї області дорівнює нулю:*

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0. \qquad (4.2.16)$$

Доведення. Припустимо для початку, що C є "зоряний" контур, тобто існує точка z_0 така, що довільний промінь з вершиною в цій точці перетинає C в одній і тільки в одній точці. Без обмеження загальності можна вважати, що $z_0 = 0$, тоді криву C можна задати рівнянням $z = r(\varphi) \cdot e^{i\varphi}$, де $r(\varphi)$ – однозначна функція.

Позначимо контур, що визначається рівнянням $\zeta = \lambda z = \lambda \cdot r(\varphi) \cdot e^{i\varphi}$, $0 < \lambda < 1$, як C_λ:



Оскільки C_λ лежить всередині D, то, за теоремою Коші,

$$\int\limits_{C_\lambda} f(\zeta) \cdot \mathrm{d}\zeta = 0. \tag{4.2.17}$$

Але коли точка ζ описує C_λ, точка $z = \zeta/\lambda$ описує C, тому рівність (4.2.17) можна переписати у вигляді

$$\int\limits_{C} f(\lambda z) \cdot \mathrm{d}(\lambda z) = \lambda \int\limits_{C} f(\lambda z) \cdot \mathrm{d}z = 0, \tag{4.2.18}$$

і, як наслідок,

$$\int\limits_{C} f(z) \cdot \mathrm{d}z = \int\limits_{C} (f(z) - f(\lambda z)) \cdot \mathrm{d}z. \tag{4.2.19}$$

Оскільки функція $f(z)$ рівномірно неперервна на $\bar{D}$, то для довільного $\varepsilon > 0$ можна знайти $\delta > 0$ таке, що для довільної пари точок z, ζ, які задовольняють нерівності $|z - \zeta| < \delta$ буде виконуватися нерівність

$$|f(z) - f(\zeta)| < \varepsilon. \tag{4.2.20}$$

Нехай ℓ – довжина контура C і $R = \max r(\varphi)$. Візьмемо $\lambda > 1 - \delta/R$, тоді для довільної пари точок z і $\zeta = \lambda z$ будемо мати $|z - \zeta| = (1 - \lambda) \cdot |z| \leq$

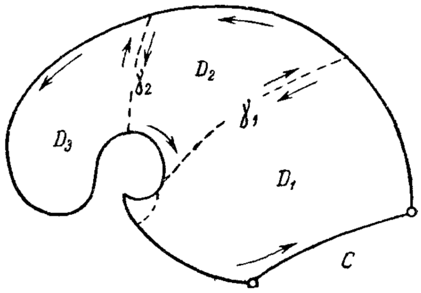
$\delta/R \cdot |z| \leq \delta$, і, як наслідок, буде виконуватися (4.2.20).

Тоді з (4.2.19) отримаємо

$$\left| \int\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z \right| < \ell\varepsilon. \tag{4.2.21}$$

Оскільки тут ε як завгодно мале і інтеграл не залежить від ε, то цей інтеграл дорівнює нулю. Для "зоряних" контурів теорема доведена.

Нехай тепер C – довільна кусково-гладка крива. Якщо C має точки повернення, то ми викинемо з області D круги малого радіусу ε з центро у цих точках так, щоб границя отриманої області D_ε вже не мала таких точок:



Проводячи всередині D_ε скінченну кількість ліній γ_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ цю область можна розбити на частини D_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, що обмежені "зоряними" контурами C_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Тоді, за щойно доведеним

$$\int\limits_{C_k} f(z)\,\mathrm{d}z = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.2.22}$$

Припускаючи, що всі лінії C_k проходяться в одному і тому ж напрямку (наприклад у додатному), додамо всі рівності (4.2.22), тоді інтеграли вздовж γ_k скоротяться (бо кожна така лінія проходиться двічі, у різних напрямках), і отримаємо

$$\int\limits_{C_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = 0. \tag{4.2.23}$$

Залишається довести, що інтеграл вздовж границі початкової області також дорівнює нулю, але це безпосередньо випливає з того, що C і C_ε відрізняються лише на скінченну кількість нескінченно малих дуг, а функція f обмежена, тому $\int_{C_\varepsilon} \to \int_C$ при $\varepsilon \to 0$. □

4.3 Розповсюдження на багатозв'язні області

Для багатозв'язних областей теорема Коші, взагалі кажучи, не виконується. Справді, функція $f(z) = 1/z$ аналітична всюди у кільці $\frac{1}{2} < |z| < 2$, одначе інтеграли від -1 до 1 вздовж верхньої та нижньої половин кола $|z| = 1$ відрізняються.

Справді, вздовж верхнього півкола C_1, де $z = e^{i\varphi}$, $0 < \varphi < \pi$, ми маємо:

$$\int\limits_{C_1} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int\limits_{\pi}^{0} \frac{ie^{i\varphi}\,\mathrm{d}\varphi}{e^{i\varphi}} = -i\pi, \tag{4.3.1}$$

а вздовж нижнього півкола C_2, де $z = e^{i\varphi}$, $-\pi < \varphi < 0$, ми маємо:

$$\int\limits_{C_2} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int\limits_{-\pi}^{0} \frac{ie^{i\varphi}\,\mathrm{d}\varphi}{e^{i\varphi}} = i\pi. \tag{4.3.2}$$

Через це ми будемо інколи використовувати символ

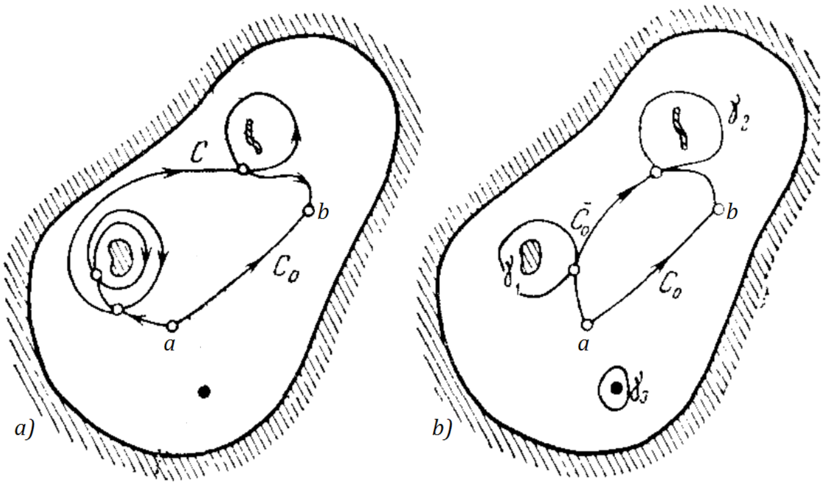
$$\int\limits_{a^C}^{b} f(z)\,\mathrm{d}z. \tag{4.3.3}$$

для позначення інтегралу від a до b вздовж шляху C у багатозв'язній області.

Нехай в багатозв'язній області D задані точки a і b і проста крива C_0 що їх з'єднує. Нехай C – довільна інша крива, що з'єднує ці точки (див. мал. нижче). Згідно тільки-но зробленого зауваження, можна, не змінюючи величини інтегралу, деформувати криву C в іншу криву $\widetilde{C}$, що лежить в області D, яка складається з:

1. кривої $\widetilde{C}_0$, яка разом з C_0 обмежує однозв'язну область що належить D;

2. сукупності простих замкнутих кривих γ_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$, кожна з яких містить всередині себе одну зв'язну частину границі D:



При цьому криві γ_k можуть проходитися декілька разів і у різних напрямках.

Для зручності, домовимося позначати через γ_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ криві, що проходяться проти годинникової стрілки. Окрім цього, введемо ще криві γ_k $(k = m+1, \ldots, n)$, що обмежують зв'язні частини границі області D і не входять у склад $\widetilde{C}$ (як γ_3 на мал. вище).

Введемо позначення

$$\Gamma_k = \int\limits_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.3.4}$$

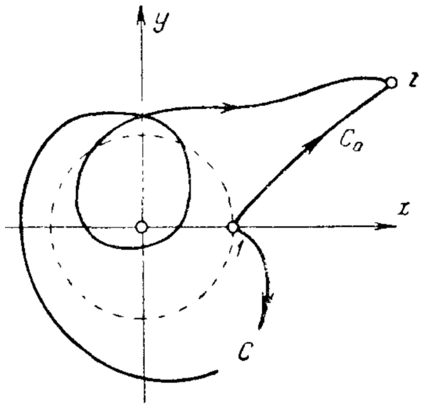
За неперервної деформації γ_k за якої ці криві залишаються всередині D, інтеграли (4.3.4) не змінюються. Як наслідок, величини Γ_k визначають лише функцією $f(z)$ і областю D.

Нехай N_k – цілі числа, які вказують, скільки разів і в якому напрямку проходиться γ_k у складі кривої $\widetilde{C}$. За попереднім спостереженням і властивостями інтегралів (4.1.9) і (4.1.10), маємо:

$$\int\limits_{a^C}^{b} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{a^{\widetilde{C}}}^{b} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{a^{C_0}}^{b} f(z)\,\mathrm{d}z + N_1\Gamma_1 + N_2\Gamma_2 + \ldots + N_n\Gamma_n. \tag{4.3.5}$$

Величини Γ_k називаються *періодами інтегралу* від функції $f(z)$ у багатозв'язній області D або *циклічними сталими*.

Приклад. Нехай $f(z) = 1/z$ і D – "кільце" $0 < |z| < R$, де R – як завгодно велике число. Довільний шлях C, що з'єднує точки 1 і z, можна, як описано вище, двеформувати у шлях $\tilde{C}$, який складається з одиничного кола $|z| = 1$ (яке, взагалі кажучи, проходиться кілька разів) і простої лінії C_0, яка з'єднує точки 1 і z:



Інтеграл вздовж кола, яке проходиться проти годинникової стрілки, тобто коли $z = e^{i\varphi}$ і φ збільшується від 0 да 2π дорівнює

$$\Gamma = \int\limits_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}}{z} = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{e^{i\varphi} i \, \mathrm{d}\varphi}{e^{i\varphi}} = 2\pi i. \tag{4.3.6}$$

Тоді за формулою (4.3.5),

$$\int\limits_{1^C}^{z} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int\limits_{1^{C_0}}^{z} \frac{\mathrm{d}z}{z} + 2k\pi i, \tag{4.3.7}$$

де k – ціле число, яке показує, скільки разів (і в якому напрямку) проходиться коло $|z| = 1$ у складі $\tilde{C}$ (на малюнку вище $k = -2$).

За теоремою 4.2.4,

$$\int\limits_{1^{C_0}}^{z} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \ln \zeta|_{\zeta=1}^{\zeta=z} = \ln z, \tag{4.3.8}$$

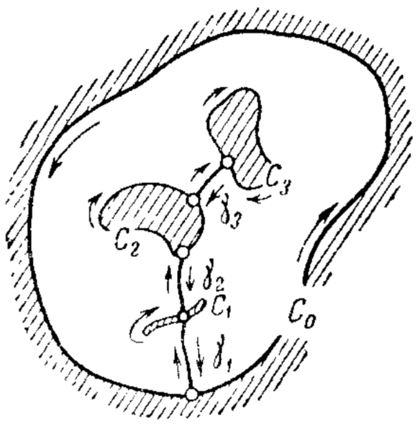
де ln позначає те значення логарифму, яке дорівнює 0 в точці $\zeta = 1$ і непрервно змінюється вздовж C_0.

Враховуючи, що C – довільний шлях, і позначаючи значення інтегралу від $1/z$ вздовж нього через $\operatorname{Ln} z$, ми отримаємо з (4.3.8):

$$\operatorname{Ln} z = \int\limits_{1\,C}^{z} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \ln z + 2k\pi i. \tag{4.3.9}$$

Таким чином, ми знову прийшли до багатозначної функції $\operatorname{Ln} z$ і з'ясували природу її багатозначності з нової точки зору.

Зазначимо також, що теоремі Коші минулого пункту можна надати трохи інший сенс так, щоб вона залишилася справедливою і для багатозв'язних областей. Нехай функція $f(z)$ аналітична в багатозв'язній області D, обмеженій кривими $C_0, C_1, \ldots, C_n$ і неперервна в $\overline{D}$. Проведемо розрізи $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, що перетворюють D в однозв'язну область D^*, і позначимо через C^* границю цієї області – криву, що складається з частин кривих C_k і кривих γ_k, причому останні проходяться двічі у протилежних напрямках:



Функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D^* і неперервна в $\overline{D^*}$. Як наслідок, за теоремою 4.2.5, і властивостями інтегралів (4.1.9) і (4.1.10):

$$\int\limits_{C^*} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{C_0} f(z)\,\mathrm{d}z + \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{C_k} f(z)\,\mathrm{d}z = 0, \tag{4.3.10}$$

де інтеграли вздовж γ_k скорочуються, а інша частина C^* збігається з $\sum_{k=0}^{n} C_k$.

При цьому ми маємо вважати, що криві C_0 і $C_1, C_2, \ldots, C_n$ обходяться так, аби область D увесь час залишалася з одного боку. Таким чином, для областей довільної зв'язності, теорема Коші виконується у наступному вигляді:

Теорема 4.3.1. *Якщо функція $f(z)$ аналітична в області D і неперервна в $\overline{D}$, то її інтеграл вздовж границі цієї області, яка проходиться так, щоб область D увесь час залишалася з одного боку, дорівнює нулю.*

4.4 Формула Коші та теорема про середнє

Нехай функція $f(z)$ аналітична у n-зв'язній області D і неперервна в $\overline{D}$. Покажемо, що для довільної внутрішньої точки z цієї області справджується так звана *формула Коші* (1831 р.):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}, \tag{4.4.1}$$

де C – межа області D що проходиться так, аби область D увесь час залишалася ліворуч.

Відзначимо, що у праву частину формули Коші входять лише значення $f(z)$ на границі C області D. Таким чином, за зазначених умов значення функції всередині області цілком визначається її значенням на границі: формула Коші дозволяє обчислити значення функції в довільній точці області, якщо відомі межеві значення цієї функції.

Для виведення формули Коші ми викинемо з області D круг радіусу r з центром в точці z і помітимо, що в отриманій $(n+1)$-зв'язній області D^* чисельник і знаменник підінтегральної функції аналітичні відносно змінної ζ, причому знаменник не обертається на нуль. Як наслідок, підінтегральна функція аналітична відносно ζ в D^*. Оскільки вона неперервна в $\overline{D^*}$, то за теоремою Коші попереднього пункту:

$$\int\limits_C \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} + \int\limits_{\gamma_r^-} \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} = 0, \tag{4.4.2}$$

де коло γ_r^- проходиться за годинниковою стрілкою. Звідси випливає, що

$$\int\limits_C \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} = \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}, \tag{4.4.3}$$

де γ_r проходиться проти годинникової стрілки. На колі γ_r маємо $\zeta - z = re^{i\varphi}$, тому, виносячи за знак інтегралу сталий відносно ζ множини $f(z)$, знаходимо

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r}\frac{f(z)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} = \frac{f(z)}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi}\frac{rie^{i\varphi}\,\mathrm{d}\varphi}{re^{i\varphi}} = f(z). \tag{4.4.4}$$

З формул (4.4.3) і (4.4.4) маємо:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} - f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r}\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta. \tag{4.4.5}$$

Оцінимо цю різницю. Згідно з нерівністю (4.1.11):

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r}\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta\right| \le \frac{1}{2\pi}\max_{\gamma_r}|f(\zeta) - f(z)|\frac{2\pi r}{r} =$$
$$= \max_{\gamma_r}|f(\zeta) - f(z)| \xrightarrow[r\to 0]{} 0. \tag{4.4.6}$$

З іншого боку, як видно з лівої частини (4.4.5), ця різниця не залежить від r, отже вона має дорівнювати нулю, і формула Коші доведена.

Якщо, зокрема, крива C являє собою коло $|\zeta - z| = R$, то, покладаючи $\zeta - z = Re^{i\varphi}$ ми отримаємо з формули Коші

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z + Re^{i\varphi})\,\mathrm{d}\varphi. \tag{4.4.7}$$

Остання формула виражає *теорему про середнє* для аналітичних функцій:

Теорема 4.4.1. *Якщо функція $f(z)$ неперервна в замкнутому крузі і аналітична всередині цього круга, то її значення у центрі круга дорівнює середньому арифметичному її значень на колі.*

4.5 Принцип максимуму і лема Шварца

Спершу доведемо одну просту лему.

Лема 4.5.1. *Якщо в деякій області D:*

1. *стала дійсна частина аналітичної функції $f(z)$ або*

2. сталий її модуль

то і сама ця функція стала.

Доведення. За першої умови твердження випливає безпосередньо з рівнянь Коші-Рімана: у нас

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0, \tag{4.5.1}$$

як наслідок, в силу цих рівнянь і

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0. \tag{4.5.2}$$

Звідси робимо висновок, що v, а отже і функція $f(z)$, стала в області D.

Перейдемо до доведення леми за другої умови. Нехай $|f(z)| \equiv M$, де M – стала. Для $M = 0$ твердження леми очевидне. Якщо ж $M \neq 0$, то ми розглянемо функцію

$$\ln f(z) = \ln|f(z)| + i \arg f(z), \tag{4.5.3}$$

яка у цьому випадку аналітична. Її дійсна частина стала ($= \ln M$). Як наслідок, за вже доведеною частиною леми, стала сама функція $\ln f(z)$, а отже і $f(z)$. □

Доведемо тепер *принцип максимуму модуля* для аналітичних функцій.

Теорема 4.5.1. *Якщо функція $f(z)$, не дорівнює тотожно сталій, аналітична в області D і неперервна в $\overline{D}$, то її модуль не може досягати найбільшого значення у внутрішній точці області D.*

Доведення. В силу властивостей неперервних функцій, $|f(z)|$ досягає свого максимуму M всередині або на границі D. Припустимо від супротивного, що $|f(z)|$ досягає значення M всередині D, і позначимо через $\mathcal{E}$ множину всіх точок D для яких $|f(z)| = M$. Якщо $\mathcal{E} = \overline{D}$, то всюди в D маємо $|f(z)| = M$, тобто $|f(z)|$ сталий. Звідси за лемою випливає, що і $f(z)$ стала в D, а це суперечить умовам теореми.

Якщо ж $\mathcal{E}$ не збігається з D, то існує гранична точка z_0 цієї множини яка є внутрішньою точкою D. В силу неперервності $f(z)$ маємо $|f(z_0)| = M$, адже в довільному околі z_0 є точки $\mathcal{E}$. Побудуємо коло $C : |z - z_0| = r$, що належить області D, так, щоб на ній була хоча б одна точка z_1 що не належить множині $\mathcal{E}$. (Це завжди можна зробити, адже z_0 – гранична точка $\mathcal{E}$). Тоді $|f(z_1)| < M$ і для довільного достатньо малого $\varepsilon > 0$, в силу неперервності $f(z)$, завжди можна знайти таку частину C_1 кола C яка містить точку z_1 на якій

$$|f(z)| < M - \varepsilon. \tag{4.5.4}$$

Позначимо через C_2 решту кола. На ній, очевидно,

$$|f(z)| \leq M. \tag{4.5.5}$$

За теоремою про середнє, маємо:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z)\, \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi r} \left(\int\limits_{C_1} f(z)\, \mathrm{d}s + \int\limits_{C_2} f(z)\, \mathrm{d}s \right), \tag{4.5.6}$$

де $\mathrm{d}s = r\,\mathrm{d}\varphi$ – елемент довжини кола C.

Переходячи у співвідношенні (4.5.6) до абсолютних величин і враховуючи нерівності (4.5.4) і (4.5.5), отримаємо

$$M = |f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi r}((M - \varepsilon)l_1 + Ml_2) = M - \frac{\varepsilon l_1}{2\pi r}, \tag{4.5.7}$$

де l_1 і l_2 – довжини C_1 і C_2 відповідно ($l_1 + l_2 = 2\pi r$). Але остання нерівність неможлива, чим і доводиться наш принцип. □

Зауваження. *Якщо функція $f(z)$ не стала, аналітична в D і неперервна в $\overline{D}$ і, окрім цього, не обертається на 0, то і мінімум $|f(z)|$ не може досягатися всередині D.*

Для доведення достатньо застосувати принцип максимуму до функції $g(z) = 1/f(z)$.

З принципу максимуму модуля випливає корисна для подальших застосувань

Лема 4.5.2 (Г. Шварц)**.** *Якщо функція $f(z)$ аналітична в крузі $|z| < 1$ і неперервна в замкнутому крузі, причому $f(0) = 0$, і якщо всюди в крузі $|f(z)| \leq 1$, то у цьому ж крузі*

$$|f(z)| \leq |z|. \tag{4.5.8}$$

При цьому, якщо хоча б в одній внутрішній точці круга $|f(z) = |z|$, то остання рівність виконується у всьому крузі, і

$$f(z) = e^{i\alpha} z, \tag{4.5.9}$$

де α – дійсна стала.

Доведення. Для доведення розглянемо функцію

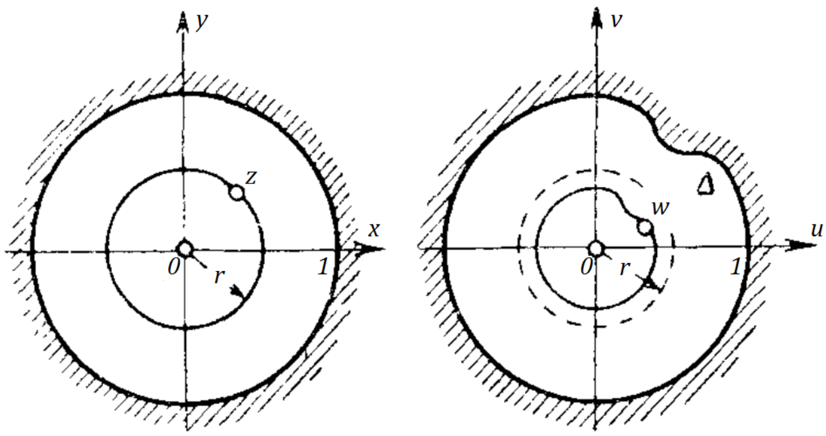
$$\varphi(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z} & z \neq 0, \\ f'(0) & z = 0. \end{cases} \tag{4.5.10}$$

З умов леми випливає, що $\varphi(z)$ аналітична у кільці $0 < |z| < 1$ і неперервна в замкнутому крузі $|z| \leq 1$.

В пункті 22 буде доведено, що звідси випливає аналітичність $\varphi(z)$ в точці $z = 0$. Таким чином, до $\varphi(z)$ можна застосовувати принцип максимуму модуля. Оскільки на колі $|z| = 1$ маємо $|\varphi(z)| = \left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq 1$, то за цим принципом і всюди в крузі $\varphi(z) \leq 1$, тобто $|f(z)| \leq |z|$. Перша частина леми доведена.

Якщо ж тепер у довільній внутрішній точці $|f(z_0)| = |z_0|$, то в цій точці $|\varphi(z_0) = 1$, але тоді за принципом максимуму $|\varphi(z)| \equiv 1$ у всіх точках круга, і за лемою з початку пункту $\varphi(z)$ стала. Оскільки $|\varphi(z)| \equiv 1$, то цю сталу можна представити у вигляді $e^{i\alpha}$, де α – дійсне число. Як наслідок, $f(z) = e^{i\alpha} z$. $\square$

Геометрично, лема Шварца означає, що при довільному відображенні одиничного круга на область Δ що лежить всередині одиничного круга за допомогою аналітичної функції $w = f(z)$ для якої $f(0) = 0$, образ довільної точки z лежить ближче до початку координат ніж сама точка z. А якщо образ хоча б однієї точки z лежить на тій же відстані від початку координат що і сама точка, то Δ збігається з одиничним кругом, а перетворення є поворотом:



4.6 Рівномірна збіжність

Цей пункт має допоміжний характер. У ньому ми розглянемо важливі питання, пов'язані з рівномірною збіжністю послідовностей і рядів аналітичних функцій.

Послідовність функцій $f_1(z)$, $f_2(z)$, … називається *рівномірно збіжною* до функції $f(z)$ в області D (або на кривій C), якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться число n_0, яке залежить тільки від ε таке, що для всіх $n > n_0$ і всіх z із D (або на C) виконується нерівність

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon. \tag{4.6.1}$$

Доведемо дві теореми, аналогічні відповідним теоремам аналізу.

Теорема 4.6.1. *Границя $f(z)$ послідовності неперервних функцій $f_1(z)$, $f_2(z)$, …, яка рівномірно сходиться в деякій області D (або на кривій C) також є неперервною функцією.*

Доведення. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і довільну точку z_0 області D (або кривої C). Завдяки рівномірній збіжності знайдеться n таке, що для всіх z із D (на C):

$$|f(z) - f_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.6.2}$$

Завдяки неперервності $f_n(z)$ в точці z_0 знайдеться те число $\delta > 0$, що для всіх z із D (на C), що задовольняють нерівність $|z - z_0| < \delta$ виконується нерівність

$$|f_n(z) - f_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.6.3}$$

Для таких z і вибраного вище n з нерівностей (4.6.2) і (4.6.3) маємо:

$$\begin{multline} |f(z) - f(z_0)| \le |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + \\ + |f_n(z_0) - f(z_0)| \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{multline} \tag{4.6.4}$$

а це й означає неперервність $f(z)$. □

Теорема 4.6.2. *Якщо послідовність неперервних функцій $f_1(z)$, $f_2(z)$, … на кривій C рівномірно сходиться до $f(z)$, то виконується граничне співвідношення*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_C f_n(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_C \lim_{n\to\infty} f_n(z)\,\mathrm{d}z. \tag{4.6.5}$$

Доведення. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Завдяки рівномірній збіжності знайдеться таке n_0 що для всіх $n > n_0$ і для всіх z на C:

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \frac{\varepsilon}{l}, \tag{4.6.6}$$

де l – довжина C. Для таких n:

$$\left| \int\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z - \int\limits_C f_n(z)\,\mathrm{d}z \right| = \left| \int\limits_C (f(z) - f_n(z))\,\mathrm{d}z \right| < \frac{\varepsilon}{l} l = \varepsilon, \tag{4.6.7}$$

а це і означає справедливість співвідношення (4.6.5). □

Доведена теорема надає можливість переходити до границі під знаком інтегралу у випадку рівномірної збіжності послідовності функцій.

З поняттям рівномірної збіжності послідовності тісно пов'язане поняття рівномірно збіжного ряду. Функціональний ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ називається *рівномірно збіжним* в області D (на кривій C) якщо послідовність його частинних сум рівномірно збіжна в цій області (на цій кривій).

Так само як і в аналізі, доводиться зручна для застосування достатня ознака рівномірної збіжності функціональних рядів.

Теорема 4.6.3. *Якщо функціональний ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ в області D мажорується збіжним числовим рядом $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, тобто для довільної точки z із D*

$$|f_n(z)| \leq a_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{4.6.8}$$

то цей функціональний ряд рівномірно збіжний в D.

Доведення. Справді, за відомою теоремою порівняння цей ряд збіжний в довільній точці z із D. Позначимо його суму через $s(z)$. Для довільного n залишок $r_n(z) = s(z) - s_n(z)$ цього ряду завдяки співвідношенню (4.6.8) задовольняє нерівності

$$|r_n(z)| \leq |f_{n+1}(z)| + |f_{n+2}(z)| + \ldots \leq a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots \tag{4.6.9}$$

Права сторона цієї нерівності є залишком r_n збіжного числового ряду, тобто прямує до 0 при $n \to \infty$. Як наслідок, для довільного $\varepsilon > 0$ можна знайти n_0 яке залежить лише від ε починаючи з якого $r_n < \varepsilon$. Тоді, завдяки (4.6.9) для довільного z із D і $n > n_0$ буде виконуватися нерівність

$$|s(z) - s_n(z)| < \varepsilon, \tag{4.6.10}$$

а це й означає рівномірну збіжність ряду. □

З теорем **??** і **??** випливає, що сума рівномірно збіжного ряду, що складається з неперервних функцій неперервна, і що такий ряд можна почленно інтегрувати, тобто що справджується співвідношення

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_C f_n(z)\,\mathrm{d}z = \int_C \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\,\mathrm{d}z. \tag{4.6.11}$$

Питання про можливість почленного диференціювання функціональних рядів буде розглянуто у пункті 5.2 (теорема Веєрштрасса).

Розглянемо тепер сім'ю функцій $f(z,\alpha)$ що залежать від параметра (дійсного чи комплексного) α. Кажуть, що $f(z,\alpha)$ прямує при $\alpha \to \alpha_0$ до функції $f(z)$ *рівномірно відносно* z в області D (або на кривій C), якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta = \delta(\varepsilon)$ таке, що при $|\alpha - \alpha_0| < \delta$ для всіх z з D (або на C) виконується нерівність

$$|f(z,\alpha) - f(z)| < \varepsilon. \tag{4.6.12}$$

Точно так само як і для послідовностей, можна показати, що границя рівномірно збіжної сім'ї неперервних функцій є неперервною функцією, і що для такої сім'ї справджується граничне співвідношення

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \int_C f(z,\alpha)\,\mathrm{d}z = \int_C \lim_{\alpha\to\alpha_0} f(z,\alpha)\,\mathrm{d}z. \tag{4.6.13}$$

Надалі нам доведеться мати справу з інтегралами вздовж необмежених кривих – *невласними інтегралами.* При цьому ми завжди будемо розглядати лише такі криві C, відрізки який, що належать довільному кругу, є кусково-гладкими. Функції $f(z)$ задані на C будемо вважати кусково-неперервними і обмеженими.

Визначимо тепер інтеграл від функції $f(z)$ вздовж необмеженої кривої C. Нехай спершу C не обмежена лише в одну сторону і a – її кінець. Тоді ми позначимо через C_l частину C з кінцем a і довжиною l і покладемо за визначенням

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{l\to\infty} \int_{C_l} f(z)\,\mathrm{d}z, \tag{4.6.14}$$

причому, якщо ця границя існує, то будемо казати, що (невласний) інтеграл (4.6.14) *збіжний.* Якщо ж C не обмежена в обидва боки, то визначимо інтеграл як суму інтегралів вздовж двох частин на які C ділиться довільною точкою a.

Нехай функція $f(z, \zeta)$ визначена для всіх z з області D і для всіх ζ на лінії C. Будемо казати, що інтеграл

$$F(z) = \int\limits_C f(z, \zeta)\,\mathrm{d}\zeta \tag{4.6.15}$$

рівномірно збіжний в області D, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться l_0 таке, що для всіх z із D при довільному $l > l_0$:

$$\left| \int\limits_C f(z, \zeta)\,\mathrm{d}\zeta - \int\limits_{C_l} f(z, \zeta)\,\mathrm{d}\zeta \right| < \varepsilon \tag{4.6.16}$$

Зауваження. *Визначення у припущенні необмеженості C в одну сторону, розповсюджується на необмежені в обидві сторони криві аналогічно попередньому.*

Теорема 4.6.4. *Якщо функція $f(z, \zeta)$ аналітична по z і кусково неперервна по ζ для всіх z з однозв'язної області D і для всіх ζ на лінії C, і інтеграл*

$$F(z) = \int\limits_C f(z, \zeta)\,\mathrm{d}\zeta \tag{4.6.17}$$

збігається рівномірно в області D, то він є аналітичною в цій області функцією.

Доведення. Для доведення скористаємося теоремою, оберненою до теореми Коші, згідно з якою функція $F(z)$ аналітична в однозв'язній області D якщо вона неперервна в цій області, а її інтеграл вздовж довільної замкнутої кривої, що належить області, дорівнює нулю (доведення цієї теореми див. у наступному пункті).

В умовах теореми яку ми зараз доводимо неперервність функції $F(z)$ встановлюється звичним чином (як теорема 4.6.2 або співвідношення (4.6.13)). Залишається показати, що інтеграл від $F(z)$ вздовж довільного замкнутого контуру Γ, що належить області D, дорівнює нулю. Маємо:

$$\int\limits_\Gamma F(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_\Gamma \left(\int\limits_C f(z, \zeta)\,\mathrm{d}\zeta \right) \mathrm{d}z. \tag{4.6.18}$$

Завдяки рівномірній збіжності інтегралу (4.6.17) за відомою з аналізу теоремою, у правій частині можна змінити порядок інтегрування, і ми отримаємо:

$$\int_{\Gamma} F(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C} \left(\int_{\Gamma} f(z,\zeta)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}\zeta = 0, \tag{4.6.19}$$

адже внутрішній інтеграл дорівнює нулю за теоремою Коші. □

Зауважимо, що у випадку обмеженої кривої C для аналітичності функції $F(z)$ не потрібно жодних додаткових припущень щодо збіжності інтегралу (4.6.17), адже це випливає з можливості зміни порядку інтегрування у співвідношенні (4.6.18) без додаткових припущень.

4.7 Вищі похідні

За визначенням, аналітична функція – це функція комплексної змінної, яка має похідну в кожній точці деякої області D. Покажемо, що з аналітичності функції автоматично випливає існування і аналітичність всіх її послідовних похідних.

Теорема 4.7.1 (О. Коші, 1842 р.). *Якщо функція $f(z)$ аналітична в області D і неперервна в $\overline{D}$, то вона має в кожній точці D похідні всіх порядків, причому n-а похідна може бути представлена формулою*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C} \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}, \tag{4.7.1}$$

де C – межа області D.

Доведення. Нехай z – довільна внутрішня точка області D. За визначенням похідної та формулою Коші з пункту 14, яку ми застосовуємо до точок z і $z+h$ маємо:

$$\begin{aligned} f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \\ = \frac{1}{2\pi i} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{C} f(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z - h} - \frac{1}{\zeta - z} \right) &= \\ = \frac{1}{2\pi i} \lim_{h\to 0} \int_{C} \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)}&. \end{aligned} \tag{4.7.2}$$

Але, очевидно, що при $h \to 0$ функція $\frac{1}{\zeta - z - h}$ рівномірно для віх ζ на C прямує до $\frac{1}{\zeta - z}$, і, як наслідок, за теоремою 4.6.2, границя існує, причому

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z)^2}. \tag{4.7.3}$$

Для $n = 1$ теорема доведена. Далі теорема доводиться методом математичної індукції. □

Зауваження. *Як видно з доведення, теорему можна сформулювати ще наступним чином: якщо функція $\varphi(\zeta)$ неперервна на межі C області D, то функція*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}, \tag{4.7.4}$$

що задається формулою Коші, аналітична в цій області.

Зауваження. *Формули (4.7.1) для похідних можна отримати формальним диференціюванням формули Коші по z. Доведена теорема стверджує законність цього диференціювання.*

З формули (4.7.1) випливають важливі *нерівності Коші*. Позначимо через M максимум модуля функції $f(z)$ в області D, через R – відстань від точки z до межі області D і через l – довжину цієї межі. З (4.7.1) маємо:

$$|f^{(n)}(z)| \le \frac{n!}{2\pi} \left| \int_C \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}} \right| \le \frac{n!Ml}{2\pi R^{n+1}}. \tag{4.7.5}$$

Якщо, зокрема, $f(z)$ аналітична в крузі $|z - z_0| < R$, то, взявши в ролі D цей круг, отримаємо

$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{Mn!}{R^n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.7.6}$$

Це і є нерівності Коші, які ми хотіли довести.

Скористаємося отриманими результатами для доведення двох важливих теорем теорії аналітичних функцій.

Теорема 4.7.2 (Ж. Ліувіль)**.** *Якщо функція $f(z)$ аналітична у всій площині та обмежена то вона стала.*

Доведення. Нехай всюди $|f(z)| \leq M$. Для довільної точки z площини та для довільного R нерівність (4.7.6) при $n = 1$ дає:

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{R} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0. \tag{4.7.7}$$

Але ліва частина не залежить від R, ому вона просто дорівнює нулю, тобто $|f'(z)| = 0$, або $f'(z) \equiv 0$ у всій площині. Звідси, за теоремою 4.2.4 робимо висновок, що

$$f(z) - f(z_0) = \int\limits_{z_0}^{z} f'(z)\,\mathrm{d}z \equiv 0, \tag{4.7.8}$$

тобто що функція $f(z)$ стала. □

Зауваження. *Теорема 4.7.2 може бути узагальнена наступним чином:*

Нехай функція $f(z)$ аналітична у всі площині, і її модуль зростає не швидше ніж $M \cdot |z|^n$, де n – ціле число, а M – стала, то ця функція є поліномом степені не вище n.

Доведення аналогічне попередньому: нехай z_0 – довільна точка площини; з нерівності (4.7.6) маємо

$$\left|f^{(n+1)}(z_0)\right| \leq \frac{M \cdot |z|^n}{R^{n+1}} \cdot (n+1)! \tag{4.7.9}$$

і, помічаючи, що у нас $|z| \leq |z_0| + R$, після переходу до границі при $R \to \infty$ отримуємо, що $f^{(n+1)}(z_0) = 0$. Оскільки z_0 – довільна точка площини, то $f^{(n+1)}(z) \equiv 0$, а звідси тим же методом, що і вище, нескладно прийти до бажаного результату.

Наступна теорема обернена до основної теореми Коші з пункту 12.

Теорема 4.7.3 (Г. Морера, 1886 р.)**.** *Якщо функція $f(z)$ неперервна в однозв'язній області D і інтеграл $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ по довільному замкнутому контуру, що лежить в D, дорівнює 0, то $f(z)$ аналітична в цій області.*

Доведення. З умов теореми випливає, що в області D інтеграл $\int_{z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}z$ не залежить від шляху інтегрування, тобто для фіксованого z_0 він визначає деяку функцію z:

$$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}z. \tag{4.7.10}$$

Повторюючи доведення теореми 4.2.2, ми побачимо, що ця функція має похідну $F'(z) = f(z)$, тобто аналітична. Але тоді за теоремою 4.7.1, $f(z)$ є аналітичною функцією як похідна аналітичної функції. $\square$

5 Подання аналітичних функцій рядами

У цьому параграфі ми розглянемо питання подання аналітичних функцій за допомогою степеневих рядів та їх узагальнення – рядів з додатними і від'ємними степенями $z-a$. Розклад функцій у ряди є питанням не лише теоретичного але й практичного інтересу. Зокрема, якщо за допомогою рядів обчислювати значення функцій то у цілому ряді задач (зокрема у диференціальних рівняннях) розв'язок також отримується у вигляді ряду.

Тут ми обмежимося основноми теортичними питаннями, що пов'язані з розкладом функцій у ряди. Більшість з них гратиме доволі вагому роль у подальшому викладі теорії функцій комплексної змінної. Зокрема, буде встановлена рівносильність поняття про аналітичну функцію як про всюди диференційовну функцій, і як про функцію, що може бути представлена рядом в околі довільної точки (теорема Тейлора). Це надає ще одну концепцію для побудови теорії аналітичних функцій.

У пункті 9 ми також узагальнимо поняття аналітичності, розповсюдивши його на багатозначні функції.

5.1 Ряди Тейлора

Почнемо з узагальнення на функції комплексної змінної відомої з аналізу формули Тейлора і на її основі доведемо, що довільна аналітична в точці функція подається в околі цієї точки у вигляді степеневого ряду.

Скористаємося формулою для суми геометричної прогресії

$$\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n,$$

попередньо переписавши її у вигляді

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \frac{q^{n+1}}{1-q} \tag{5.1.1}$$

(зрозуміло, що ця формула виконується і для комплексних q). Зафіксуємо деяку точку a з області D аналітичності функції $f(z)$ і, скориставшись формулою (5.1.1) , запишемо:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta - a}} =$$

$$= \frac{1}{\zeta - a} \cdot \left(1 + \left(\frac{z-a}{\zeta - a} \right) + \ldots + \left(\frac{z-a}{\zeta - a} \right)^n + \frac{\left(\frac{z-a}{\zeta-a} \right)^{n+1}}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} \right)$$

Помножимо тепер обидві частини цієї рівності на $\frac{f(\zeta)}{2\pi i}$ і проінтегруємо його по ζ вздовж деякого замкнутого контура C, що лежить в D і містить точки z і a. Використовуючи формулу Коші і формули для вищих похідних, отримаємо класичну *формулу Тейлора*

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (z-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (z-a)^n + R_n, \qquad (5.1.2)$$

де залишковий член має вигляд

$$R_n = \frac{(z-a)^{n+1}}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z) \cdot (\zeta - a)^{n+1}}. \qquad (5.1.3)$$

Постає питання, за яких умов $R_n \to 0$ при $n \to \infty$, або, що те саме, за яких умов функція $f(z)$ може бути представленою своїм *рядом Тейлора* з центром в точці a, тобто

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (z-a)^n. \qquad (5.1.4)$$

Відповідь на це запитання надає наступна

Теорема 5.1.1 (О. Коші, 1831 р.)**.** *Функція $f(z)$ може бути представленою своїм рядом Тейлора* (5.1.4) *у довільному відкритому крузі з центром у точці a, у якому вона є аналітичною. У довільній замкнутій області що належить цьому кругу, ряд Тейлора збігається рівномірно.*

Доведення. Позначимо через R радіус круга аналітичності функції $f(z)$ (з центром в точці a), і розглянемо довільне число R', $0 < R' < R$ і круг $|z-a| \leq kR'$, де $k < 1$ – довільне додатне число. Нехай z – довільна точка останнього круга і C – коло $|\zeta - a| = R'$. Маємо $|z-a| \leq kR'$, $|\zeta - a| = R'$. Як наслідок,

$$|\zeta - z| \geq |\zeta - a| - |z - a| \geq R' - kR' = (1-k)R',$$

і формула (5.1.3) дає

$$|R_n| = \left| \frac{(z-a)^{n+1}}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z) \cdot (\zeta - a)^{n+1}} \right| \leq$$

$$\leq \frac{k^{n+1}(R')^{n+1}}{2\pi} \cdot \frac{M \cdot 2\pi R'}{(1-k)\cdot(R')^{n+2}} = \frac{Mk^{n+1}}{1-k},$$

де M – максимум модуля $f(z)$ в крузі $|z-a| \leq R'$ (функція $f(z)$ аналітична в цьому крузі, а тому обмежена). Оскільки $k < 1$, то звідси випливає, що $R_n \to 0$ при $n \to \infty$, причому оцінка R_n не залежить від z, тобто у довільному крузі $|z-a| < kR'$, де $0 < k < 1$, ряд Тейлора збігається рівномірно.

А довільну замкнуту область, що лежить в крузі аналітичності функції $f(z)$ можна цілком помістити у деякий круз $|z-a| < kR'$, де $0 < k < 1$, $0 < R' < R$, тому і у такій області ряд збігається рівномірно. □

Таким чином, довільна аналітична в крузі функція може бути представленою степеневим рядом у цьому крузі. Виникає питання, чи буде виконуватися зворотнє, тобто чи буде сума довільного збіжного степеневого ряду аналітичною функцією? Щоб відповісти на це запитання, доведеться розглянути деякі властивості степеневих рядів. Це ми зробимо у наступному пункті, а зараз наведемо розклад кількох елементарних функцій у ряди Тейлора:

$$\begin{cases} e^z = 1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^3}{3!} + \ldots; \\ \sin z = z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \ldots; \\ \cos z = 1 - \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} - \ldots; \\ \sinh z = z + \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} + \ldots; \\ \cosh z = 1 + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} + \ldots \end{cases} \tag{5.1.5}$$

(ця ряди збігаються для довільного z),

$$\begin{cases} \ln(1+z) = z - \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^3}{3} - \ldots; \\ (1+z)^a = 1 + a \cdot z + \dfrac{a(a-1)}{2} \cdot z^2 + \dfrac{a(a-1)(a-2)}{3!} \cdot z^3 + \ldots \end{cases} \tag{5.1.6}$$

(а ці тільки для $|z| < 1$; а ще вони записані для тих однозначних гілок, які дорівнюють 0 і 1 відповідно при $z = 0$). Способи виведення цих рокладів такі ж як і у класичному аналізі, тому ми не будемо на них зупинятися.

5.2 Степеневі ряди

Розпочнемо з двох загальних теоерм що стосуються рівномірно збіжних рядів аналітичних функцій. Ці теореми вперше були доведені К. Вейерштрасом у 1859 р. Перша з них показує, що рівномірний перехід до границі зберігає властивість аналітичності:

Теорема 5.2.1. *Якщо ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \tag{5.2.1}$$

що складається з аналітичних в однозв'язній області D функцій збігається у цій області, то його сума також є аналітичною в D.

Доведення. Справді, сума $s(z)$ ряду (5.2.1) неперервна в D згідно пункту 16. Нехай тепер C – довільний замкнутий контур, що лежить в D. Тоді, завдяки рівномірній збіжності ряду (5.2.1), його можна почленно проінтегрувати вздовж C, і отримаємо

$$\int_C s(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} \int_C f_n(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

адже, за теоремою Коші пункту 12, інтеграл від аналітичної функції $f_n(z)$ по замкнутому контуру а однозв'язні області дорівнює нулю. Тепер, за теоремою Морери пункту 17, функція $s(z)$ є аналітичною в D. □

Теорема 5.2.2. *Довільний ряд* (5.2.1) *аналітичних в області D і неперервних в $\bar{D}$ функцій, який рівномірно збігається в $\bar{D}$, можна почленно диференціювати в D довільну кількість разів.*

Доведення. Нехай ζ буде довільною точкою границі C області D, а z – довільною внутрішньою точною цієї області. Оскільки різниця $\zeta - z$ при фіксованому z обмежена знизу по модулю додатним числом, то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}},$$

де k – довільне натуральне число, збігається рівномірно відносно ζ на C. Як наслідок, його можна почленно проінтегрувати вздовж C, а тому збігається і ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{f_n(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z) \tag{5.2.2}$$

(для кожного члену ряду ми скористалися формулою Коші для похідних з пункту 17). Залишається довести, що сума ряду (5.2.2) є k-ою похідною суми $s(z)$ ряду (5.2.1). Завдяки рівномірній збіжності ліву частину формули (5.2.2) можна записати у вигляді

$$\frac{k!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}} = \frac{k!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{s(z)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}} = s^{(k)}(z)$$

(ми знову скористалися тією ж формулою Коші).

□

Зауваження. *Для рівномірної збіжності ряду анілтичких в замкнутій області $\bar{D}$ функцій достатньо вимагати його рівномірної збіжності на границі цієї області. Це безпосередньо випливає з принципу максимуму пункту 15, згідно якого*

$$\max_{\bar{D}} |f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \ldots| = \max_{C} |f_{n+1}(\zeta) + f_{n+2}(\zeta) + \ldots|.$$

Зауваження. *Прости приклад показує, що у теоремі 5.2.2 можна стверджувати збіжність ряду з похідних лише в D а не в $\bar{D}$. Справді, ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2},$$

очевидно, рівномірно збігається у замкнутому крузі $|z| \leq 1$, адже він мажорується числовим рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

але ряд похідних

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$$

(який збігається за теоремою 5.2.2 при $|z| < 1$) розбіжний у точці $z = 1$ границі круга.

Надалі основну ролі гратимуть степеневі ряди. Характер їхньої збіжності встановлює наступна

Теорема 5.2.3 (Н. Абель, 1826 р.)**.** *Якщо степеневий ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z-a)^n \tag{5.2.3}$$

збагається у точці z_0*, то він збігається і у довільній точці* z*, що розташована ближче до центру* a *ніж* z_0*, причому у довільному крузі* $|z-a| \le k \cdot |z_0 - a|$*, де* $0 < k < 1$*, збіжність ряду рівномірна*

Доведення. Припустимо, що z – довільна точка останнього круга і подамо n-ий член ряду у вигляді

$$c_n \cdot (z-a)^n = c_n \cdot (z_0 - a)^n \cdot \left(\frac{z-a}{z_0-a}\right)^n.$$

Завдяки збіжності ряду у точці z_0 його загальний член прямує до нуля, а тому обмежений у цій точці, тобто $|c_n \cdot (z_0-a)^n| \le M$ для всіх n. Окрім того, у на за умовою $\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right| \le k$. Як наслідок, для всіх n:

$$|c_n \cdot (z-a)^n| \le M \cdot k^n, \quad 0 < k < 1. \tag{5.2.4}$$

Звідси випливає рівномірна збіжність ряду в крузі $|z-a| \le k \cdot |z_0 - a|$. Оскільки число k може бути як завгодно близьким до 1, то тим самим доведена збіжність ряду у довільній точці круга $|z-a| < |z_0-a|$. □

З теореми Абеля випливає, що областю збіжності степеневого ряду (5.2.3) є відкритий круг з центром у точці a (який може також вироджатися у точку або заповнювати всю площину) і ще, можливо, деякі точки на границі круга. Радіус цього круга називається *радіусом збіжності* степеневого ряду.

Наведемо формулу для визначення радіусу збіжності R:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}, \tag{5.2.5}$$

де $\overline{\lim}$ позначає верхню границю. Ця формула була отримати О. Коші у 1821-ому році, і суттєво використовувалася Ж. Адамаром. Вона називається *формулою Коші-Адамара.*

Для її виведення необхідно показати, що для довільного z, для якого $|z-a| \le k \cdot R$, $0 < k < 1$, степеневий ряд збігається, а для довільного

z, для якого $|z-a|>R$, цей ряд розбігається. За визначенням верхньої границі, для довільного $\varepsilon>0$ знайдеться таке n_0, починаючи з якого

$$\sqrt[n]{|c_n|}<\frac{1}{R}+\varepsilon.$$

Виберемо ε так, щоб виконувалося

$$\frac{1}{R}+\varepsilon<\frac{1}{R\cdot\frac{k+1}{2}},$$

тоді при $n\geq n_0$ і $|z-a|\leq k\cdot R$ будемо мати:

$$|c_n\cdot(z-a)^n|<\frac{k^n\cdot R^n}{R^n\cdot\left(\frac{k+1}{2}\right)^n}=\left(\frac{2k}{k+1}\right)^n.$$

Оскільки $\frac{2k}{k+1}<1$, то, за відомою теоремою порівняння, ряд із членів лівої частини збігається.

Далі, з визначення верхньої границі маємо, що для довільного $\varepsilon>0$ знайдеться нескінченна послідовність $n=n_k$, для яких $\sqrt[n_k]{|c_{n_k}|}>\frac{1}{R}-\varepsilon$, тобто

$$|c_{n_k}\cdot(z-a)^{n_k}|>\left(\left(\frac{1}{R}-\varepsilon\right)\cdot|z-a|\right)^{n_k}.$$

але при $|z-a|>R$ завжди можна підібрати ε так, щоб виконувалося $\left(\frac{1}{R}-\varepsilon\right)\cdot|z-a|>1$, тоді для нашої послідовності $n=n_k$ член $c_{n_k}\cdot(z-a)^{n_k}$ буде необмежено зростати, і, як налсідок, степеневий ряд буде розбіжним (його загальний член не прямує до нуля).

Теореми Вейерштраса і Абеля дають ствердну відповідь на питання, поставлене у попередньому пункті:

Теорема 5.2.4. *Сума довільного степеневого ряду у крузі його збіжності є аналітичною функцією.*

Доведення. Справді, нехай $|z-a|<R$ буде кругом збіжності нашого степеневого ряду. У довільному крузі $|z-a|\leq k\cdot R$, де $0<k<1$, за теоремою Абеля, збіжність рівномірна, а оскільки члени ряду $c_n\cdot(z-a)^n$ – аналітичні функції, то, за теоремою Вейерштраса, його сума аналітична у цьому ж крузі. Але оскільки довільна внутрішня точка z круга збіжності може бути розміщена у деякому крузі $|z-z|<k\cdot R$, де $0<k<1$, то тим самим доведена аналітичність суми ряду у всьому крузі його збіжності. □

Доведемо, нарешті, що виконується

Теорема 5.2.5. *Довільний степеневий ряд є рядом Тейлора своєї суми.*

Доведення. Справді, нехай у деякому крузі

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z-a)^n. \tag{5.2.6}$$

Покладаючи тут $z = a$, отримаємо $f(a) = c_0$. Диференціюючи ряд (5.2.6) почленно і потім покладаючи $z = a$, знайдемо $f'(a) = c_1$. Послідовно диференціюючи ряд (5.2.6) і покладаючи потім $z = a$, знайдемо

$$f''(a) = 2 \cdot c_2, \quad f'''(a) = 3! \cdot c_3, \quad \ldots, \quad f^{(n)}(a) = n! \cdot c_n.$$

Таким чином,

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \tag{5.2.7}$$

і ряд (5.2.6) дійсно є рядом Тейлора функції $f(z)$. □

Теорему 5.2.5 називають *теоремою єдиності* розкладу в ряд Тейлора, адже з неї випливає, що знайдений довільним чином розклад аналітичної функції $f(z)$ у степеневий ряд є тейлорівським розкладом цієї функції.

Окрім того, з цієї теореми і теореми пункту 18 можна зробити висновок, що радіус збіжності степеневого ряду (5.2.6) збігається з відстанню від центру a до найближчої точки, у якій порушується аналітичність суми $f(z)$ цього ряду. Наприклад, радіус збіжності рядів (5.1.6) дорівнює 1, адже при $z = -1$ їхні суми втрачають аналітичність.

5.3 Теорема єдиності

У пункті 14 ми бачили, що аналітична функція цілком визначається своїми значеннями на границі області аналітичності. Тут, на додачу до цього, ми покажемо, що аналітична функція цілком визначається своїми значеннями на послідовності точок, що збігається до якоїсь внутрішньої точки області аналітичності.

Почнемо з однієї теореми стосовно нулів аналітичної функції. *Нулем* аналітичної функції $f(z)$ називають довільну точку $z = a$ у якій $f(z)$ набуває значення 0: $f(a) = 0$. Якщо аналітична функція не дорівнює тотожньо нулю в околі свого нуля a, то у її тейлорівському ряді з центром в a

всі коефіцієнти не можуть дорівнювати нулю (інакше сума була б тотожньо рівна нулю). Номер наймолодшого відмінного від нуля коефіцієнта називається *порядком* нуля a. Таким чином, в околі нуля порядку n тейлорівський розклад функції має вигляд

$$f(z) = c_n \cdot (z-a)^n + c_{n+1} \cdot (z-a)^{n+1} + \ldots, \tag{5.3.1}$$

де $c_n \neq 0$ і $n \geq 1$.

Очевидно, порядок нуля a можна також визначити як порядок найменшої відмінної від нуля похідної $f^{(n)}(a)$.

Очевидно також, що в околі нуля порядку n аналітична функція $f(z)$ може бути подана у вигляді

$$f(z) = (z-a)^n \cdot \varphi(z), \tag{5.3.2}$$

де функція

$$\varphi(z) = c_n + c_{n+1} \cdot (z-a) + \ldots; \quad \varphi(a) = c_n \neq 0 \tag{5.3.3}$$

також аналітична в околі точка a (оскільки вона подається у вигляді збіжного степеневого ряду).

Завдяки неперервності $\varphi(z)$ ця функція відмінна від нуля у деякому околі точки a. Звідси випливає

Теорема 5.3.1. *Нехай функція $f(z)$ аналітична в околі свого нуля a і не дорівнює тотожньо нулю в жодному його околі. Тоді існує оклі точки a у якому $f(z)$ не має інших нулів, окрім a.*

З доведеної теореми виплива *теорема єдиності* теорії аналітичних функцій, про яку ми говорили на початку пункта:

Теорема 5.3.2. *Якщо функції $f_1(z)$ і $f_2(z)$ аналітичні в області D і їхні значення збігаються на деякій послідовності точок a_n, яка сходиться до внутрішньої точки a області D, то всюди в D:*

$$f_1(z) \equiv f_2(z)$$

Доведення. Для доведення ми розглянемо функцію

$$f(z) = f_1(z) - f_2(z).$$

Вона аналітична в D і має своїми нулями точки a_n. Завдяки неперервності a – також нуль f, адже $f(a) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0$. Звідси випилває, що $f(z)$ тотожньо дорівнює нулю в деякому околі a, адже інакше б порушувалася б теорема 5.3.1. Таким чином, множина всіх нулів функції $f(z)$ має хоча б одну внутрішню точку.

Позначимо через $\mathcal{E}$ сукупність усіх внутрішніх точок множини нулів $f(z)$. Якщо $\mathcal{E} = D$, то теорема доведена. Інакше ж знайдеться гранична точка b множини $\mathcal{E}$ яка є внутрішньою точкою множини D. існує послідовність точок b_n множини $\mathcal{E}$ яка збігається до b. Тому, завдяки неперервності, b є нулем f. З іншого боку, $f(z)$ не дорівнює тотожньо нулеві в жодному околі точки b, бо інакше b була б внутрішньою а не граничною точкою $\mathcal{E}$. За теоремоб 5.3.1 звідси випливає, що у деякому околі b немає жодного нуля $f(z)$, протиріччя з тим, що b – гранична точка $\mathcal{E}$. □

З теореми єдиності випливає, що аналітична в деякій області і не рівна тотожньо нулю функція $f(z)$ не може бути тотожньо рівною нулю в жодній підобласті D, і навіть на довільній збіжній до внутрішньої точки D послідовності точок D.

Легко, щоправда, навести приклад, коли нескінченна послідовність нулів функції сходиться до граничної точко області її аналітичності: функція $f(z) = \sin\frac{1}{z}$ має своїми нулями послідовність точок $x_n = \frac{1}{n\pi}$ $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, що збігається до точки $z = 0$.

5.4 Ряди Лорана

Ряди Тейлора – апарат, зручний для представлення функцій, що є аналітичними в кругових областях. Доволі важливо, щоправда, мати апарат для представлення функцій в областях іншого вигляду. Наприклад, для вивчення функцій, аналітичних у дкякому околі точки a всюди, окрім власне точки a, доводиться розглядати кільцеві області $0 < |z - a| < R$. Виявляється, що для функцій, що є аналітичними в кільцевих областях $r < |z - a| < R$, де $r \geq 0$, $R \leq \infty$, можна побудувати розклади за додатними і від'ємними степенями числа $(z - a)$, тобто виразом вигляду

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot (z - a)^n, \tag{5.4.1}$$

що є узагальненим тейлорівським розкладом. Такі розклади ми розглядаємо у цьому пункті.

Отже, нехай функція $f(z)$ аналітична в деякому кільці K: $r < |z-a| < R$, де $r \geq 0$, $R \leq \infty$. Виберемо довільні числа r' і R' такі, що $r < r' < R' < R$, а також число k, $0 < k < 1$ і розглянемо кільце $r'/k < |z-a| < k \cdot R'$. У довільній внутрішній точці z цього кільця ми можемо представити $f(z)$ за формулою Коші (пункт 14), яка для нашого випадку набуває вигляд:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}, \tag{5.4.2}$$

де обидва кола C: $|\zeta - a| = R'$ і c:$|\zeta - a| = r'$ які проходяться проти годинникової стрілки.

Для першого інтегралу маємо $\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right| < \frac{kR'}{R'} = k < 1$, як наслідок, дріб, що до нього входить можна розкласти у збіжну на C рівномірно відносно ζ геометричну прогресію:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} =$$
$$= \frac{1}{\zeta - a} + \frac{z-a}{(\zeta-a)^2} + \ldots + \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} + \ldots$$

Множачи цей розклад на $\frac{f(\zeta)}{2\pi i}$ і інтегруючи його почленно по ζ (це можливо завдяки рівномірній збіжності) отримаємо розклад першого члену формули (5.4.2) у степеневий ряд:

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z-a)^n, \tag{5.4.3}$$

де

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{5.4.4}$$

Помітимо, що вираз (5.4.4) не можна подати, як у пункті 18, у вигляді $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, оскільки $f(z)$, взагалі кажучи, не аналітична в точці a.

Для другого інтегралу маємо

$$\left|\frac{\zeta - a}{z - a}\right| < \frac{kr'}{r'} = k < 1,$$

як наслідок, рівномірно на c збігається прогресія

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{\zeta - a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{z-a}} =$$
$$= -\frac{1}{z-a} + -\frac{\zeta - a}{(z-a)^2} - \frac{(\zeta-a)^2}{(z-a)^3} - \ldots - \frac{(\zeta-a)^{n-1}}{(z-a)^n} - \ldots$$

Як і вище, отримаємо розклад другого члену формули (5.4.2) в ряд, але тепер за від'ємними степенями $(z-a)$:

$$f_2(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\cdot(z-a)^{-n}, \tag{5.4.5}$$

де

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(\zeta)\cdot(\zeta-a)^{n-1}\,\mathrm{d}\zeta \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{5.4.6}$$

Замінимо у формулах (5.4.5) і (5.4.6) індекс $-n$ який пробігає значення $1, 2, \ldots$ на індекс n який пробігає значення $-1, -2, \ldots$. Тоді, об'єднуючи два розклади (5.4.3) і (5.4.5) в одне, отримаємо

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\cdot(z-a)^n. \tag{5.4.7}$$

Далі, згідно пункту 13 у формулах (5.4.4) і (5.4.6) кола C і c можна замінити довільним колом γ: $|z-a| = \rho$, де $r' < \rho < R'$. Завдяки цьому можна ці дві формули об'єднати в одну:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} \quad (n = 0, \pm1, \pm2, \ldots). \tag{5.4.8}$$

Отриманий тут розклад (5.4.7) функції $f(z)$ за додатними і від'ємними степенями $(z-a)$ з коефіцієнтима які визначаються за формулами (5.4.8) називається *лоранівським розкладом* функції $f(z)$ з центром в точці a. Ряд (5.4.3) називається *правильною*, а ряд (5.4.5) – *головною частинами* цього розкладу.

Оскільки r' і R' у нашому розгляді можуть бути взяті як завгодно мало відрізнятися від 1, то розклад (5.4.7) можна вважати встановленим для всіх точок z кільця аналітичності функції $f(z)$.

Правильна частина ряду Лорана за теоремою Абеля сходиться всюди в кругі $|z-a| < R$, причому в довільному крузі $|z-a| < kR$, $(0 < k < 1)$

його збіжність рівномірна. Головна частина являє собою степеневий ряд відносно змінної $Z = 1/(z-a)$, як наслідок, за тією ж теоремою він збігається при $|Z| < 1/r$, тобто всюди поза кругом $|z-a| > r$, причому при $|z-a| > r/k$, $0 < k < 1$ його збіжність всюди рівномірна.

Таким чином доведена

Теорема 5.4.1 (П. Лоран, 1843 р.)**.** *У довільному кільці K: $r < |z-a| < R$ у якому функція $f(z)$ аналітична вона може бути подана своїм рядом Лорана* (5.4.7)*, що рівномірно збігається у довільній замкнутій області, що належить кільцю K.*

З формул (5.4.8) для коефіцієнтів ряду Лорана точно так же як і у пункті 17 отримуємо наступні *нерівності Коші*: якщо функція $f(z)$ обмежена на колі $|z-a| = \rho$ (а саме $|f(z)| \le M$), то

$$|c_n| < \frac{M}{\rho^n} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{5.4.9}$$

Зауважимо, нарешті, що областю збіжності довільного ряду вигляду

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot (z-a)^N$$

завжди єдеяке кругове кільце $r < |z-a| < R$, де $0 \le r \le \infty$, $0 \le R \le \infty$.

У цьому дуже лагко переконатися за допомогою теореми Абеля, розбиваючи ряд на правильну і голову частини. Для випадку $r < R$ виконується

Теорема 5.4.2. *Якщо ряд*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot (z-a)^n \tag{5.4.10}$$

збігається в цьому кільці і розклад (5.4.10) *є рядом Лорана для функції $f(z)$.*

Доведення. Справді, аналітичність $f(z)$ доводиться на основі теорем Абеля і Веєрштраса так же, як і у теоремі 4 попереднього пункту. Далі, на довільному колі γ: $|z-a| = \rho$, де $r < \rho < R$, ряд (5.4.10) збігається рівномірно і залишається таким після множення на $(z-a)^{1-n}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Якщо проінтегрувати розклад

$$\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot (z-a)^{k-n-1}$$

по колу γ і скористатися співвідношеннями

$$\int_{\gamma} (z-a)^n \, \mathrm{d}z = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i, & n = -1, \end{cases} \tag{5.4.11}$$

які легко довести для довільного цілого n (див. виведення формули (4) пункту 13), то ми отримаємо вираз коефіцієнтів ряду (5.4.10):

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)\, \mathrm{d}z}{(z-a)^{n+1}},$$

що збігається з виразами (5.4.8). Як наслідок, ряд (5.4.10) є рядом Лорана функції $f(z)$ і теорема доведена. □

Ця теорема називається теоремою єдиності розкладу в ряд Лорана, бо з неї випливає, що знайдене довільним чином подання аналітичної функції рядом за додатними і від'ємними степенями $(z-a)$ є лоранівським розкладом цієї функції.

5.5 Особливі точки

Розвинутий у попередньому пункті апарат розкладів Лорана дозволить нам повністю вивчити поведінку аналітичних функцій в околі найпростішого типу точок, у який порушужться аналітичність цих функцій – так званих ізольованих особливих точок. Точка a називається *ізольованою особливою точкою* функції $f(z)$, якщо існує окіл $0 < |z-a| < R$ цієї точки (з виключеною точкою a), у якому $f(z)$ аналітична. Підкреслимо, що тут мова йде про точки, в околі яких функції однозначна (умова однозначності включається у визначення аналітичності, див. пункт 5). Про особливі точки багатозначного характеру ми будемо говорити у пункті 25.

Розрізняють три типи ізольованих особливих точок в залежності від поведінки $f(z)$ у їхніх околах:

1. точка a називається *особливою точкою яку можна прибрати*, якщо існує скінченна $\lim\limits_{z\to a} f(z)$,

2. точка a називається *полюсом*, якщо $f(z)$ є нескінченною великою при наближенні до a, тобто якщо існує $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$ (це означає, що $|f(z)| \to \infty$ при $z \to a$).

3. точка a називається *суттєво особливою точкою*, якщо $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ не існує.

Викладемо основні властивості функцій, що стосуються їхніх особливих точок. Якщо a є ізольованою особливою точкою функції $f(z)$, то, за теоремою 1 попереднього пункту, цю функцію можна подати її рядом Лорана у кільці її аналітичності:

$$f(z) = \ldots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + \\ + c_1 \cdot (z-a) + \ldots + c_n \cdot (z-a)^n + \ldots \quad (5.5.1)$$

Цей розклад має різний ви гляд в залежності від характеру особливої точки. Наведемо три теореми щодо цього:

Теорема 5.5.1. *Для того щоб a була особливою точкою функції $f(z)$ яку можна прибрати неохідно і достатньо, щоб лоранівський розклад $f(z)$ в околі точки a не мав головної частини.*

Доведення. Зрозуміло, що якщо лоранівський розклад $f(z)$ не має головної частнии, тобто якщо $f(z)$ подається степеневим рядом

$$f(z) = c_0 + c_1 \cdot (z-a) + \ldots + c_n \cdot (z-a)^n + \ldots, \quad (5.5.2)$$

то існує скінченна границя $\lim\limits_{z\to a} f(z) = c_0$, і a є особливою точкою яку можна прибрати.

Якщо ж навпаки, a є особливою точкою яку можна прибрати, то завдяки існуванню і скінченності $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ функція $f(z)$ є обмеженою в околі a. Нехай $|f(z)| \le M$.

Скористаємося нерівностями Коші з пункту 21:

$$|c_n| \le M \cdot \rho^{-n}.$$

Оскільки у них число ρ можна вибрати як завгодно малим то зрозуміло, що всі коефіцієнти c_n з від'ємними індексами дорівнюють нулю і лоранівський розклад $f(z)$ не має головної частини. □

Зауваження. *Насправді ми довели більш сильне твердження, а саме: якщо $f(z)$ обмежена в околі ізольованої особливої точки a, то a є особливою точкою яку можна прибрати.*

Назва “особлива точка яку можна прибрати”, як тепер стало очевидно, передбачає що таку особливу точку можна прибрати поклавши $f(a) = \lim_{z\to a} f(z) = c_0$. Після цього функція $f(z)$ буде аналітичною і у точці a, адже у всьому крузі $|z-a| < R$ вона матиме подання збіжним сепеневим рядом (5.5.2) (див. теорему 4 пункту 19).

Перейдемо до випадку полюса. З визначення полюсу a випливає, що $f(z)$ відмінна від нуля у деякому околі цього полюсу $0 < |z-a| < R'<$ де $R' \leq R$. У такому околі аналітична функція $g(z) = 1/f(z)$, для якої, очевидно $\lim_{z\to a} g(z) = 0$. Як наслідок,за минулою теоермою, a є особливою точкою функції $g(z)$ zяку модна прибрати. Поклавши $g(a) = 0$, ми отримаємо, що a є нулем функції $g(z)$.Навпаки, якщо $g(z)$ має нуль в точці a (і не дорівнюж тотодньо нулеві), то, за теоремою 1 пункту 20 аналітична у деякому околі $0 < |z-a| < R$ точки a. Очевидно, що $f(z)$ має в точці a полюс.

Таким чином, нулі і полюси аналітичних функцій доволі просто пов’язані один з одним. Домовимося ще називати *порядком полюса a* функції $f(z)$ порядок нуля a функції $g(z) = 1/f(z)$.

Теорема 5.5.2. *Для того, щоб точка a була полюсом функції $f(z)$ необхідно і достатньо, аби головна частина лоранівського розкладу $f(z)$ в околі точки a містила лише скінченну кількість членів:*

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot (z-a)^k. \tag{5.5.3}$$

При цьому номер старшого від’ємного члену розкладу збігається з порядком полюса.

Доведення. Нехай a є полюсом порядку n функції $f(z)$. Тоді функція $g(z) = 1/f(z)$, $g(a) = 0$ має в точці a нуль порядку n і згідно пункту 20 в околі точки a подається у вигляді

$$g(z) = (z-a)^n \cdot \varphi(z),$$

де $\varphi(z)$ аналітична і $\varphi(a) \neq 0$. У цьому околі:

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z-a)^n} \cdot \frac{1}{\varphi(z)}. \tag{5.5.4}$$

Але функція $1/\varphi(z)$ аналітична в деякому околі $|z-a| < R$ точки a, як наслідок, вона подається там у вигляді ряду Тейлора

$$\frac{1}{\varphi(z)} = c_{-n} + c_{-n+1} \cdot (z-a) + \ldots + c_0 \cdot (z-a)^n + \ldots,$$

де $c_{-n} = \frac{1}{\varphi(a)} \neq 0$. Підставляючи це розвинення у формулу (5.5.4) отримуємо шукане розвинення (5.5.3), яке виконується у околі $0 < |z-a| < R$.

Нехай тепер навпаки, у деякому околі $0 < |z-a| < R$ точки a має місце розвинення (5.5.3), причому $c_{-n} \neq 0$.

Тоді функція $\varphi(z) = (z-a)^n \cdot f(z)$, $\varphi(a) = c_{-n}$, в крузі $|z-a| < R$ подається рядом Тейлора

$$\varphi(z) = c_{-n} + c_{-n+1} \cdot (z-a) + \dots, \tag{5.5.5}$$

тобто аналітична. Оскільки $\lim\limits_{z \to a} \varphi(z) = c_{-n} \neq 0$, то

$$\lim_{z \to a} f(z) = \lim_{z \to a} \frac{\varphi(z)}{(z-a)^n} = \infty$$

і точка a є полюсом функції $f(z)$. Функція $g(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{(z-a)^n}{\varphi(z)}$ має, очевидно, в точці a нуль порядку n, тому і порядок полюса a дорівнює n. □

З доведених теорем безпосередньо випливає

Теорема 5.5.3. *Точка a оді і тільки тоді є суттєвою особливою точкою для функції $f(z)$, коли головна частина лоранівського розвинення останньої в околі точки a міє нескінченно багато членів.*

Поведінка функції в околі суттєвої особливої точки з'ясовує настуна

Теорема 5.5.4 (Ю. В. Сохоцький, 1868 р.)**.** *Якщо a – суттєва особлива точка функції $f(z)$, тоді для довільного комплексного числа A існує послідовність точок $z_k \to a$ така, що $\lim\limits_{k \to \infty} f(z_k) = A$.*

Доведення. Перш за все, існує послідовність $x_k \to a$, для якої $\lim f(z_k) = \infty$, адже інакше $f(z)$ була б обмеженою в околі точки a і точку a можна було б прибрати. Нехай тепер задано довільне комплексне число A. Є два випадки:

1. у довільному околі точки a знайдеться точка z у якій $f(z) = A$, тоді теорема Сохоцького доведена, адже з таких точок можна побудувати послідовність $z_k \to a$, таку що $f(z_k) = A$, а тому і $\lim\limits_{k \to \infty} f(z_k) = A$;

2. у деякому околі точки a функція $f(z)$ не набуває значення A.

   У цьому випадку у вищезгаданому околі аналітична функція $g(z) = \frac{1}{f(z)-A}$. Точка a не може бути для неї ані полюсом ані особливою точкою яку можна прибрати, адже у цих випадках існувала б скінченна чи нескінченна границя $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \lim\limits_{z\to a}\left(A + \dfrac{1}{g(z)}\right)$. Як наслідок, a є суттвою особливою точкою функції $g(z)$, а тому існує послідовність $z_k \to a$, для якої $\lim\limits_{k\to\infty} g(z_k) = \infty$. Для цієї послідовності, очевидно

$$\lim_{k\to\infty} f(z_k) = \lim_{k\to\infty}\left(A + \frac{1}{g(z_k)}\right) = A.$$

$\square$

Теорема Сохоцького і попередні теореми цього пункту дозволяють стверджувати, що в околі ізольованої особливої точка аналітична функція або пряму до конкретного (скінченного або нескінченного) значення, або зовсім невизначена у тому сені що (за різними послідовностями) прямує до довільної наперед заданої границі. Жожних проміжних випадків бути не може.

Наведемо ряд прикладів елементарних функцій з особливими точками різних типів:

1. Функції
$$\frac{\sin z}{z}, \quad \frac{1-e^z}{z}, \quad \frac{1-\cos z}{z^2}$$
   мають у початку координат особливу точку яку можна прибратию У цьому напростіше переконатися використовуючи відомі тейлорівські розклади (5) з пункту 18 і теорему 1 цього пункту. Наприклад, для довільного $z \neq 0$ маємо
$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots$$

2. Функція
$$f(z) = \frac{1}{e^{z^2}+1}$$
   має нескінченну множину полюсів у точках $z = \pm\sqrt{\pi\cdot(2k+1)\cdot i}$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ у яких знаменнких обертається на нуль (ці точки

розташовані на двох бісектрисах координатних кутів). Всі полюси – першого порядку, оскільки функція $\frac{1}{f(z)} = e^{z^2} + 1$ має в них нулі першого порядку (її похідна $2z \cdot e^{z^2}$ відмінна від нуля у цих точках).

3. Функції
$$e^{1/z}, \quad \sin\left(\frac{1}{z}\right), \quad \cos\left(\frac{1}{z}\right)$$
мають у початку координат суттєво особливу точку. У цьому простіше за все переконатися підставляючи $\frac{1}{z}$ замість z у тейлорівські розклади (5) з пункту 18 і використовуючи теорему 3 цього пункту (наприклад, для довільного $z \neq 0$ маємо $e^z = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{z^2} + \ldots$).

   Перевіримо справедливість теореми Сохоцького для першої з цих функцій. Для $A = \infty$ послідовністю z_k може слугувати $z_k = \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, адже, очевидно, $\lim\limits_{k\to\infty} f(z_k) = \lim\limits_{k\to\infty} e^k = \infty$; для $A = 0$ можна прийняти $z_k = -\frac{1}{k}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, адже тоді $\lim\limits_{k\to\infty} f(z_k) = Lim_{k\to\infty} e^{-k} = 0$; нарешті для скінченного $A \neq 0$ беремо $z_k = \frac{1}{\ln A + 2k\pi i}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, тоді $\lim\limits_{k\to\infty} f(z_k) = \lim\limits_{k\to\infty} e^{\ln A + 2k\pi i} = A$ (тут ln позначає якесь значення логарифму).

4. Функція
$$f(z) = \frac{1}{e^{1/z^n} + 1}$$
має у початку координат неізольовану особливу точку, адже її полюси $z_k = \pm \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot (2k+1) \cdot i}}$ накопичуються біля початку координат.

За характером особливих точок виділяють наступні два найпростіших класи однозначних аналітичних функцій:

1. Цілі функці. Функція $f(z)$ називається *цілою* (або *голоморфною*), якщо вона взагалі не має особливих точок. За теоремою пункту 18 можна стверджувати, що довілньа ціла функція подається рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, який збігається у всій площині (і навпаки, довільна функція яка подається всюди збіжним степеневим рядом є цілою функцією). Прикладами цілих функцій є всі многочлени, експонента, $\sin z$, $\cos z$ та ін. Очевидно, що сума, різниця і добуток цілих функцій також є цілою функцією.

2. Дробові функції. Функція $f(z)$ називається *дробовою* (або *мероморфною*) якщо вона не має особливих точок типу не полюс. З цього визначення випливає, що у довільній обмеженій області мероморфна функція може мати лише скінченну кількість полюсів. Справді, якби у такій області існувало б нескінченно багато полюсів, то існувала б послідовність полюсів (а отже і особливих точок) збіжна до якоїсь точки a, яка була б не ізольованою особливою точкою, тобто не полюсом. У всій площині полюсів може бути і нескінченно багато. Прикладами мереморфних функцій є всі цілі функції, дробово-раціональні функції, тригонометричні функцій та ін. Очевидно, що сума, різниця, добуток, частка, і взагалі довільна дробово-раціональна функція $R(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ від мероморфних функцій знову є мероморфною функцією.

Детальніше про цілі і мероморфні функції див. главу 5.

© М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, 1972
Українською переклав Нікіта Скибицький, 2018