Глава 23 Три знаменитых теоремы о конечных множествах

Эмануэль Шпернер

В этой главе мы затрагиваем основную тему комбинаторики — свойства и размеры специальных семейств $\mathcal{F}$ подмножеств конечного множества $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Начнем с двух классических утверждений в этой области: теорем Шпернера и Эрдёша – Ко – Радо. Оба эти результата много раз передоказывались, и каждый из них положил начало новому направлению комбинаторной теории множеств. Кажется, что обе теоремы естественно доказывать индукцией, однако приводимые ниже рассуждения имеют совершенно другой характер и являются в полном смысле слова вдохновляющими.

В 1928 году Эмануэль Шпернер поставил и решил следующую задачу [8]. Пусть задано множество $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Назовем семейство $\mathcal{F}$ подмножеств множества N *антицепью*, если никакое множество из $\mathcal{F}$ не содержит другие множества этого семейства. Каков размер наибольшей антицепи? Ясно, что семейство $\mathcal{F}_k$ всех k-подмножеств множества N является антицепью, и $|\mathcal{F}_k| = \binom{n}{k}$. Выбирая максимальный биномиальный коэффициент (см. с. 20), находим, что существует антицепь размера $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \max_k \binom{n}{k}$. *Теорема Шпернера* утверждает, что антицепей бо́льшего размера нет.

Теорема 1. *Размер наибольшей антицепи в n-множестве равен* $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

■ **Доказательство.** Из многих доказательств следующее (принадлежащее Дэвиду Лабеллу [7]) является, вероятно, самым коротким и изящным. Пусть $\mathcal{F}$ — произвольная антицепь. Мы должны показать, что $|\mathcal{F}| \le \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. Ключ к доказательству состоит в рассмотрении *цепи* подмножеств $\varnothing = C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset \ldots \subset C_n = N$, в которой $|C_i| = i$ при $i = 0, \ldots, n$. Сколько существует цепей? Ясно, что мы получим цепь, добавляя к пустому множеству последовательно элементы из N по одному, так что число цепей равно числу перестановок элементов множества N, а именно, $n!$ Далее, пусть множество $A \in \mathcal{F}$. Сколько существует цепей, проходящих через A? Ответ снова прост. Чтобы получить часть цепи от $\varnothing$ до A, мы должны добавлять к пустому множеству элементы множества A по одному, а затем, чтобы продолжить цепь от A до N, мы должны добавлять оставшиеся элементы из $N \setminus A$. Значит, если A содержит k элементов, то, рассматривая все пары таких отрезков цепи, мы находим, что число цепей, проходящих через A, равно $k!(n-k)!$ Заметим, что если $\mathcal{F}$ — антицепь, то не существует цепей, проходящих через два различных множества A и B из $\mathcal{F}$.

Чтобы завершить доказательство, обозначим через m_k число k-множеств в $\mathcal{F}$, так что $|\mathcal{F}| = \sum_{k=0}^{n} m_k$. Тогда из наших рассуждений следует, что число цепей, пересекающихся с антицепью $\mathcal{F}$, равно

$$\sum_{k=0}^{n} m_k\, k!\,(n-k)!,$$

и это выражение не может быть больше числа $n!$ *всех* цепей. Значит,

$$\sum_{k=0}^{n} m_k \frac{k!(n-k)!}{n!} \leq 1, \qquad \text{или} \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{m_k}{\binom{n}{k}} \leq 1.$$

Заменяя в последней сумме все знаменатели наибольшим биномиальным коэффициентом, получаем

$$\frac{1}{\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}} \sum_{k=0}^{n} m_k \leq 1, \qquad \text{т. е.} \qquad |\mathcal{F}| = \sum_{k=0}^{n} m_k \leq \binom{n}{\lfloor n/2\rfloor},$$

и доказательство закончено. □

Проверьте, что при четных n семейство всех $\frac{n}{2}$-множеств, а при нечетных n два семейства всех $\frac{n-1}{2}$- и $\frac{n+1}{2}$-множеств, на самом деле суть *единственные* антицепи, на которых достигается максимальный размер!

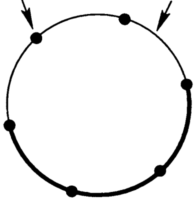
Наше второе утверждение имеет совершенно другую природу. Снова рассмотрим множество $N = \{1, \ldots, n\}$. Назовем семейство $\mathcal{F}$ подмножеств множества N *пересекающимся* , если любые два множества из $\mathcal{F}$ имеют по крайней мере один общий элемент. Несложно убедиться в том, что размер наибольшего пересекающегося семейства равен 2^{n-1}. Действительно, если $A \in \mathcal{F}$, то дополнение $A^c = N \backslash A$ имеет пустое пересечение с A и поэтому не может принадлежать $\mathcal{F}$. Отсюда вытекает, что пересекающее семейство содержит не более половины числа 2^n всех подмножеств, т. е. $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$. С другой стороны, семейство всех подмножеств, содержащих некоторый фиксированный элемент, например, семейство $\mathcal{F}_1$ всех подмножеств, содержащих 1, имеет объем $|\mathcal{F}_1| = 2^{n-1}$, и задача решена.

Но теперь поставим следующий вопрос. Как велико может быть пересекающееся семейство $\mathcal{F}$, если все множества в $\mathcal{F}$ имеют один и тот же размер, например, k? Назовем таким семейства *пересекающимися k-семействами.* Чтобы избежать тривиальных затруднений, предположим, что $n \geq 2k$, так как в противном случае любые два k-множества пересекаются и, следовательно, доказывать нечего! Используя предыдущую идею, мы, конечно, получим такое множество $\mathcal{F}_1$, рассматривая все k-множества, содержащие некоторый фиксированный элемент множества N, например, 1. Ясно, что мы получим все множества, входящие в $\mathcal{F}_1$, добавляя к 1 все $(k-1)$-подмножества множества $\{2, 3, \ldots, n\}$, в силу чего $|\mathcal{F}_1| = \binom{n-1}{k-1}$. Можно ли найти большее пересекающееся семейство? Нет, и в этом состоит утверждение теоремы Эрдёша – Ко – Радо.

Теорема 2. *Наибольший размер пересекающегося k-семейства в n-множестве равен $\binom{n-1}{k-1}$, если $n \geq 2k$.*

Пауль Эрдёш, Чао Ко и Рихард Радо получили этот результат в 1938 году, но не публиковали его в течение последующих 23 лет [2]. Затем появилось много доказательств и вариантов теоремы 2, но следующее рассуждение, принадлежащее Дьюле Катона [5], особенно изящно.

■ **Доказательство.** Ключ к доказательству — следующая простая лемма, которая на первый взгляд кажется совершенно не связанной с нашей задачей. Рассмотрим окружность C, разделенную n точками на n дужек. *Дуга* длины k окружности C состоит из $k+1$ последовательных точек и k дужек между ними.



Окружность C для $n = 6$. «Жирные» дужки изображают дугу длины 3.

Лемма. *Пусть $n \geq 2k$ и t различных дуг $A_1, \dots, A_t$ длины k таковы, что любые две дуги имеют общую дужку. Тогда $t \leq k$.*

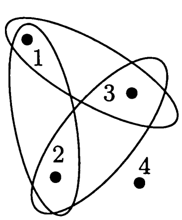
Для доказательства леммы заметим вначале, что любая из выделенных точек на окружности C является концом не более чем одной дуги. Действительно, пусть дуги A_i и A_j, $i \neq j$, имеют общую концевую точку v. Тогда эти дуги должны идти в разные стороны от v, так как они различны и имеют одинаковую длину. Но тогда A_i и A_j не могут иметь общих дужек, поскольку $n \geq 2k$.

Зафиксируем дугу A_1. Так как любая дуга A_i $(i \geq 2)$ имеет с A_1 общую дужку, то один из концов A_i является внутренней точкой A_1. Как уже показано, все эти концевые точки должны быть разными. Поскольку A_1 имеет $k-1$ внутренних точек, число дуг, отличных от A_1, не больше $k-1$. Значит, общее число дуг не превосходит k. □

Теперь продолжим доказательство теоремы Эрдёша – Ко – Радо. Пусть $\mathcal{F}$ — пересекающееся k-семейство. Рассмотрим, как и выше, окружность C с n точками и n дужками. Зададим произвольную циклическую перестановку $\pi = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ чисел $1, \dots, n$ и, двигаясь по часовой стрелке, припишем числа a_i дужкам C. Найдем число множеств $A \in \mathcal{F}$, элементы которых приписаны k *последовательным* дужкам C. Так как $\mathcal{F}$ — пересекающееся семейство, то согласно лемме существует не более k таких множеств. Это справедливо для любой циклической перестановки. Поэтому общее (по всем $(n-1)!$ циклическим перестановкам n-множества) число появлений множеств семейства $\mathcal{F}$ не превзойдет $k(n-1)!$

Сколько раз при этом появится фиксированное множество $A \in \mathcal{F}$? Понятно, что k-множество A появляется в π, если его элементы в цикловой записи π стоят подряд. Объединяя такую последовательность элементов множества A в новый элемент $*$, получим из π циклическую перестановку $(n-k+1)$-множества $N_A = \{*\} \cup N \backslash A$. Существует $(n-k)!$ циклических перестановок множества N_A и $k!$ возможных способов замены $*$ последовательностью элементов множества A. Отсюда вытекает, что фиксированное k-множество A входит ровно в $k!(n-k)!$ циклических перестановок, так что

$$|\mathcal{F}| \leq \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = \binom{n-1}{k-1}. \qquad \square$$



Пересекающееся семейство для $n = 4$, $k = 2$

Обязательно ли в максимальных пересекающихся k-семействах каждое множество содержит один и тот же элемент? Это заведомо не так для $n = 2k$. Например, при $n = 4$ и $k = 2$ семейство, состоящее из множеств $\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$, тоже имеет размер $\binom{3}{1} = 3$. Вообще, при $n = 2k$ мы получим максимальное пересекающееся k-семейство размера $\frac{1}{2}\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$, произвольно включая в него по одному из каждой пары множеств, состоящей из k-множества A и его дополнения $N \backslash A$. Но для $n > 2k$ совокупность максимальных пересекающихся k-семейств состоит только из семейств множеств, содержащих фиксированный элемент. Читателю предлагается доказать это своими силами.

Наконец, обратимся к третьему утверждению, которое можно считать наиболее важной теоремой в теории конечных множеств: к теореме о выборе Филипа Холла, доказанной в 1935 году [3]. Из нее выросла современная теория паросочетаний. Эта теория имеет различные применения, часть из которых будет описана позднее.

Пусть X — конечное множество и $A_1, \ldots, A_n$ — совокупность подмножеств множества X (не обязательно различных). Назовем последовательность $x_1, \ldots, x_n$ *системой различных представителей* $\{A_1, \ldots, A_n\}$, если $x_1, \ldots, x_n$ — различные элементы из X и $x_i \in A_i$ для всех i. Разумеется, такая система (сокращенно СРП) может и не существовать (например, если одно из множеств A_i пусто). Теорема Холла дает точные условия, при которых СРП существует.

Прежде чем формулировать теорему, приведем интерпретацию, объясняющую ее фольклорное название *теорема о свадьбах.* Рассмотрим множество девушек $\{1, \ldots, n\}$ и множество X парней. Включение $x \in A_i$ означает, что девушка i и парень x не прочь пожениться, так что A_i есть множество всех возможных женихов девушки i. Тогда СРП соответствует коллективной свадьбе, когда каждая девушка выходит замуж за парня, который ей нравится.

Теперь сформулируем утверждение в терминах множеств.

«Коллективная свадьба»

Теорема 3. *Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — совокупность подмножеств конечного множества X. Система различных представителей существует тогда и только тогда, когда объединение любых m множеств A_i содержит не менее m элементов при любом $m \in \{1, \ldots, n\}$.*

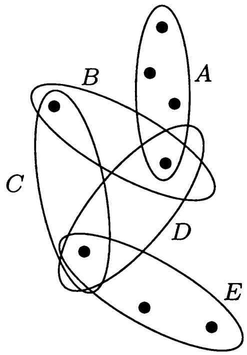
Ясно, что условие теоремы необходимо: если объединение каких-нибудь m множеств A_i содержит меньше m элементов, то эти множества нельзя представить различными элементами. Удивительно, что это очевидное условие является также достаточным.

Первоначальное доказательство Холла довольно сложное; позднее было предложено много других доказательств. Приведенное ниже доказательство (которое принадлежит Истерфилду [1] и переоткрыто Халмошем и Воханом [4]) кажется наиболее естественным.

■ **Доказательство.** Используем индукцию по n. Для $n = 1$ доказывать нечего. Пусть $n > 1$; предположим, что система множеств $\{A_1, \ldots, A_n\}$ удовлетворяет условию теоремы, которое мы для краткости обозначим (H). При $1 \leq \ell < n$ назовем совокупность ℓ множеств A_i *критическим семейством*, если их объединение имеет мощность ℓ. Будем различать два случая.

Случай 1: Критические семейства отсутствуют.

Выберем произвольный элемент $x \in A_n$. Удалим x из X и рассмотрим совокупность $A'_1, \ldots, A'_{n-1}$, где $A'_i = A_i \backslash \{x\}$. Так как критических семейств не существует, то объединение любых m множеств A'_i содержит не менее m элементов. Тогда по предположению индукции существует СРП $x_1, \ldots, x_{n-1}$ совокупности $\{A'_1, \ldots, A'_{n-1}\}$, которая вместе с $x_n = x$ образует СРП для исходной совокупности.



$\{B, C, D\}$ — критическое семейство

Случай 2: Критические семейства существуют.

Без ограничения общности предположим, что $\{A_1, \ldots, A_\ell\}$ — критическое семейство. Тогда $\bigcup_{i=1}^{\ell} A_i = \widetilde{X}$ и $|\widetilde{X}| = \ell$. Так как $\ell < n$, то по предположению индукции для совокупности $A_1, \ldots, A_\ell$ существует СРП. Перенумеруем элементы множества $\widetilde{X}$ так, что $x_i \in A_i$ для всех $i \leq \ell$.

Рассмотрим теперь оставшиеся множества $A_{\ell+1}, \ldots, A_n$ исходной совокупности и возьмем любые m из них. Согласно условию (H) объединение $A_1, \ldots, A_l$ и этих m множеств содержит не менее $l + m$ элементов. Поэтому выбранные m множеств содержат не менее m элементов из $X \backslash \widetilde{X}$. Другими словами, для семейства

$$A_{\ell+1} \backslash \widetilde{X}, \ \ldots \ , A_n \backslash \widetilde{X}$$

выполняется условие (H). Тогда по предположению индукции найдется СРП для $A_{\ell+1}, \ldots, A_n$, не содержащая элементов из $\widetilde{X}$. Вместе с $x_1, \ldots, x_\ell$ это дает СРП для всех множеств A_i.

Доказательство закончено. □

Как мы упоминали, теорема Холла положила начало обширной теории паросочетаний [6]. Из многих вариантов и ответвлений приведем особенно привлекательное утверждение, которое читатель может попытаться доказать самостоятельно.

Пусть все множества $A_1, \ldots, A_n$ имеют размер $k \geq 1$. Далее, пусть любой элемент содержится не более чем в k множествах. Тогда существуют такие k СРП, что для любого i все k представителей множества A_i различны и, следовательно, вместе образуют A_i.

Прекрасный результат, который может открыть новые горизонты свадебных возможностей.

Литература

[1] Easterfield T. E. *A combinatorial algorithm.* J. London Math. Soc., **21** (1946), 219–226.

[2] Erdős P., Ko C., Rado R. Intersection theorems for systems of finite sets. Quart. J. Math. (Oxford), Ser. (2), **12** (1961), 313–320.

[3] Hall P. *On representatives of subsets.* J. London Math. Soc., **10** (1935), 26–30.

[4] Halmos P. R., Vaughan H. E. *The marriage problem.* Amer. J. Math., **72** (1950), 214–215.

[5] Katona G. *A simple proof of the Erdős-Ko-Rado theorem.* J. Combinatorial Theory, Ser. B, **13** (1972), 183–184.

[6] Lovász L., Plummer M. D. *Matching Theory.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1986; русский перевод: Ловас Л., Пламмер М. *Прикладные задачи теории графов. Теория паросочетаний в математике, физике, химии.* М., Мир, 1998.

[7] Lubell D. *A short proof of Sperner's theorem.* J. Combinatorial Theory, **1** (1966), 299.

[8] Sperner E. *Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge.* Math. Zeitschrift, **27** (1928), 544–548.