# 1. Топологічні простори

В курсі математичного аналізу [1, с. 26] уже розглядалися поняття околу точки, відкритої і замкненої множин, точки дотику, граничної точки, границі послідовності в просторі $\mathbb{R}$ тощо. Всі ці поняття визначалися за допомогою метрики простору $\mathbb{R}$ і відбивали певні властивості, притаманні множинам, за допомогою яких ми могли описувати основну концепцію цієї теорії — близькість між точками. Адже саме поняття близькості між точками (в розумінні малої відстані) є базовим для таких головних понять математичного аналізу як збіжність послідовностей і неперервність функцій.

Відносним недоліком цього підходу є очевидна залежність від метрики, уведеної в просторі. Тому постало питання, чи не можна побудувати більш абстрактну конструкцію, за допомогою якої можна було б описати ідеї, згадані вище. Серед дослідників цієї проблеми слід відзначити французьких математиків М. Фреше (1906), М.Рісса (1907–1908), німецького математика Ф.Хаусдорфа (1914), польського математика К.Куратовського (1922) і радянського математика П.Александрова (1924). В результаті досліджень цих та багатьох інших математиків виникла нова математична дисципліна — загальна топологія, предметом якої є вивчення ідеї про неперервність на максимально абстрактному рівні.

В цій та наступній лекціях ми введемо в розгляд ряд важливих топологічних понять. Це дозволить нам вийти на більш високий рівень абстракції і опанувати ідеї, що пронизують майже всі розділи математики. Не буде великим перебільшенням сказати, що в певному розумінні топологія разом з алгеброю є скелетом сучасної математики, а *функціональний аналіз* — це розділ математики, головною задачею якого є дослідження нескінченновимірних просторів та їх відображень.

**Озн. 1.1.** *Нехай X — множина елементів, яку ми будемо називати носієм.* ***Топологією*** в *X називається довільна система* $\tau$ *його підмножин, яка задовольняє таким умовам* ***(аксіомам Александрова)****:*

*A1.* $\varnothing, X \in \tau$.

*A2.* $G_\alpha \in \tau,\ \alpha \in A \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \in \tau$, де *A — довільна множина.*

*A3.* $G_\alpha \in \tau,\ \alpha = 1, 2, ..., n \Rightarrow \bigcap_{\alpha=1}^{n} G_\alpha \in \tau$.

Інакше кажучи, топологічною структурою називається система множин, замкнена відносно довільного об'єднання і скінченого перетину.

**Озн. 1.2.** *Пара* $T = (X, \tau)$ *називається* ***топологічним простором****.*

**Приклад 1.1.** Нехай $X$ — довільна множина, $\tau = 2^X$ — множина всіх підмножин *X*. Пара $(X, 2^X)$ називається простором з *дискретною (максимальною) топологією*.

**Приклад 1.2.** Нехай *X* — довільна множина, $\tau = \{\varnothing, X\}$. Пара $(X, \tau)$ називається простором з *тривіальною (мінімальною, або антидискретною) топологією*.

Зрозуміло, що на одній і тій же множині *X* можна ввести різні топології, утворюючи різні топологічні простори. Припустимо, що на носії *X* введено дві топології — $\tau_1$ і $\tau_2$. Вони визначають два топологічні простори: $T_1 = (X, \tau_1)$ і $T_2 = (X, \tau_2)$.

Говорять, що топологія $\tau_1$ є *сильнішою*, або *тонкішою*, ніж топологія $\tau_2$, якщо $\tau_2 \subset \tau_1$. Відповідно, топологія $\tau_2$ є *слабкішою*, або *грубішою*, ніж топологія $\tau_1$. Легко бачити, що найслабкішою є тривіальна топологія, а найсильнішою — дискретна.

**Зауваження 1.1.** Множина **всіх** топологій не є цілком упорядкованою, тобто не всі топології можна порівнювати одну з одною. Наприклад, наступні топології (зв'язні двокрапки) порівнювати не можна: $X = \{a, b\}$, $\tau_1 = \{\varnothing, X, \{a\}\}$, $\tau_2 = \{\varnothing, X, \{b\}\}$.

**Озн. 1.3.** *Множини, що належать топології τ, називаються* ***відкритими****. Множини, які є доповненням до відкритих множин, називаються* ***замкненими****.*

Наприклад, множина всіх цілих чисел Z замкнена в $R^1$.

**Зауваження 1.2.** Топологія включає в себе **всі** відкриті множини. Водночас, треба зауважити, що поняття відкритих і замкнених множин не є взаємовиключними. Одна і та ж множина може бути одночасно і відкритою і замкненою (наприклад, $\varnothing$ або *X*), або ані відкритою, ані замкненою (множини раціональних та ірраціональних чисел в $R^1$). Отже, топологія може містити і замкнені множини, якщо вони одночасно є відкритими.

Як бачимо, поняття відкритої множини в топологічному просторі *постулюється* — для того щоб довести, що деяка множина *M* в топологічному просторі *T* є відкритою, треба довести, що вона належить його топології.

**Озн. 1.4.** Нехай $(X, \tau)$ — топологічний простір, $M \subset X$. Топологія $(M, \tau_M)$, де $\tau_M = \{U_M^{(\alpha)} = U_\alpha \cap M, U_\alpha \in \tau\}$, називається *індукованою*.

**Озн. 1.5.** *Топологічний простір* $(X, \tau)$ *називається* ***зв'язним****, якщо лише множини X і* $\varnothing$ *є замкненими й відкритими одночасно.*

**Озн. 1.6.** *Множина M топологічного простору* $(X, \tau)$ *називається* ***зв'язною****, якщо топологічний простір* $(M, \tau_M)$ *є зв'язним.*

**Приклад 1.4.** Тривіальний (антидискретний) простір і зв'язна двокрапка є зв'язними просторами.

**Озн. 1.7.** *Довільна відкрита множина* $G \subset T$*, що містить точку* $x \in T$*, називається її* ***околом****.*

**Озн. 1.8.** *Точка* $x \in T$ *називається* ***точкою дотику*** *множини* $M \subset T$*, якщо кожний окіл* $O(x)$ *точки x містить хоча б одну точку із M:* $\forall O(x) \in \tau : O(x) \cap M \neq \varnothing$.

**Озн. 1.9.** *Точка* $x \in T$ *називається* ***граничною точкою*** *множини* $M \subset T$*, якщо кожний окіл точки x містить хоча б одну точку із M, що не збігається з x:* $\forall O(x) \in \tau : O(x) \cap \{M \setminus \{x\}\} \neq \varnothing$

**Озн. 1.10.** *Сукупність точок дотику множини* $M \subset T$ *називається* **замиканням** *множини M і позначається* $\overline{M}$.

**Озн. 1.11.** *Сукупність* ***граничних точок*** *множини* $M \subset T$ *називається* ***похідною*** *множини M і позначається* $M'$.

**Теорема 1.1 (про властивості замикання).** *Замикання задовольняє наступним умовам:*

1) $M \subset \overline{M}$;
2) $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$ (ідемпотентність);
3) $M \subset N \Rightarrow \overline{M} \subset \overline{N}$ (монотонність);
4) $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$ (адитивність).
5) $\overline{\varnothing} = \varnothing$.

*Доведення.*

1). $M \subset \overline{M}$.

Нехай $x \in M$. Тоді $x$ — точка дотику множини $M$. Отже, $x \in \overline{M}$.

2). $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$

Внаслідок твердження 1) $\overline{M} \subset \overline{\overline{M}}$. Отже достатньо довести, що $\overline{\overline{M}} \subset \overline{M}$. Нехай $x_0 \in \overline{\overline{M}}$ і $U_0$ — довільний окіл точки $x_0$. Оскільки $U_0 \bigcap \overline{M} \neq \varnothing$ (за означенням точки дотику), то існує точка $y_0 \in U_0 \bigcap \overline{M}$. Отже, множину $U_0$ можна вважати околом точки $y_0$. Оскільки $y_0 \in \overline{M}$, то $U_0 \bigcap M \neq \varnothing$. Значить, точка $x_0$ є точкою дотику множини $M$, тобто $x_0 \in \overline{M}$.

3) $M \subset N \Rightarrow \overline{M} \subset \overline{N}$.

Нехай $x_0 \in \overline{M}$ і $U_0$ — довільний окіл точки $x_0$. Оскільки $U_0 \bigcap M \neq \varnothing$ (за означенням точки дотику) і $M \subset N$ (за умовою), то $U_0 \bigcap N \neq \varnothing$. Отже, $x_0$ — точка дотику множини $N$, тобто $x_0 \in \overline{N}$. Таким чином, $\overline{M} \subset \overline{N}$.

4) $\overline{M \bigcup N} = \overline{M} \bigcup \overline{N}$.

Із очевидних включень $M \subset M \bigcup N$ і $N \subset M \bigcup N$ внаслідок монотонності операції замикання випливає, що $\overline{M} \subset \overline{M \bigcup N}$ і $\overline{N} \subset \overline{M \bigcup N}$. Отже, $\overline{M} \bigcup \overline{N} \subset \overline{M \bigcup N}$. З іншого боку, припустимо, що $x \notin \overline{M} \bigcup \overline{N}$, тоді $x \notin \overline{M}$ і $x \notin \overline{N}$. Отже, існує такий окіл точки $x$, у якому немає точок з множини $M \bigcup N$, тобто $x \notin \overline{M \bigcup N}$. Таким чином, за законом заперечення, $x \in \overline{M \bigcup N} \Rightarrow x \in \overline{M} \bigcup \overline{N}$, тобто $\overline{M \bigcup N} \subset \overline{M} \bigcup \overline{N}$.

5) $\overline{\varnothing} = \varnothing$.

Припустимо, що замикання порожньої множини не є порожньою множиною: $x \in \overline{\varnothing} \Rightarrow \forall O(x): O(x) \cap \varnothing \neq \varnothing$. Але $\forall N \subset X \;\; N \cap \varnothing = \varnothing$. Отже, $\overline{\varnothing} = \varnothing$.■

**Теорема 1.2 (критерій замкненості).** *Множина M топологічного простору X є замкненою тоді і лише тоді, коли* $M = \overline{M}$, *тобто коли вона містить всі свої точки дотику.*

*Доведення. Необхідність.* Припустимо, що $M$ — замкнена множина, тобто $G = X \setminus M$ — відкрита множина. Оскільки, $M \subset \overline{M}$, достатньо довести, що $\overline{M} \subset M$. Дійсно, оскільки $G$ — відкрита множина, вона є околом кожної своєї точки. До того ж $G \cap M = \varnothing$. Звідси випливає, то жодна точка $x \in G$ не може бути точкою дотику для множини $M$, отже всі точки дотику належать множині $M$, тобто $\overline{M} \subset M$.

$G = X \setminus M \in \tau \Rightarrow G \cap M = \varnothing \Rightarrow \overline{M} \subset M$.

*Достатність.* Припустимо, що $\overline{M} = M$. Доведемо, що $G = X \setminus M$ — відкрита множина (звідси випливатиме замкненість множини $M$). Нехай $x_0 \in G$. З цього випливає, що $x_0 \notin M$, а значить $x_0 \notin \overline{M}$. Тоді за означенням точки дотику існує окіл $U_{x_0}$ такий, що $U_{x_0} \cap M = \varnothing$. Значить, $U_{x_0} \subset X \setminus M = G$, тобто $G = \bigcup_{x \in G} U_x \in \tau$.■

**Наслідок 1.1.** *Замикання* $\overline{M}$ *довільної множини M із простору X є замкненою множиною в X.*

**Теорема 1.3.** *Замикання довільної множини M простору* $(X, \tau)$ *збігається із перетином всіх замкнених множин, що містять множину M.*

$$\forall M \in (X, \tau) \;\; \overline{M} = \bigcap_{\alpha} F_\alpha,\; F_\alpha = \overline{F}_\alpha,\; M \subset F_\alpha .$$

*Доведення*. Нехай $M$ — довільна множина із $(X, \tau)$ і $N = \bigcap\limits_{\alpha} F_{\alpha}$, де $F_{\alpha} = \overline{F}_{\alpha}, M \subset F_{\alpha}$.

Покажемо включення $\bigcap\limits_{\alpha} F_{\alpha} \subseteq \overline{M}$.

$$N = \bigcap_{\alpha} F_{\alpha} \Rightarrow N \subseteq F_{\alpha}\ \forall\alpha \Rightarrow N \subseteq \overline{F}_{\alpha}\ \forall\alpha.$$

Оскільки $\{F_{\alpha}\}$ — множина *усіх* замкнених множин, серед них є множина $\overline{M}$: $\exists\alpha_0 : F_{\alpha_0} = \overline{M}$. Отже,

$$N \in \overline{F}_{\alpha}\ \forall\alpha \Rightarrow N \in F_{\alpha_0} = \overline{M} \Rightarrow \bigcap_{\alpha} F_{\alpha} \subset \overline{M}.$$

Тепер покажемо включення $\overline{M} \subseteq \bigcap\limits_{\alpha} F_{\alpha}$. Розглянемо довільну замкнену множину $F$, що містить $M$: $\overline{F} = F, M \subset F$. Внаслідок монотонності замикання маємо:

$$\overline{F} = F, M \subset F \Rightarrow \overline{M} \subset \overline{F} = F \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overline{M} \subset F_{\alpha}, F_{\alpha} = \overline{F}_{\alpha}\ \forall\alpha \Rightarrow \overline{M} \subset \bigcap_{\alpha} F_{\alpha}.$$

Порівнюючи обидва включення, маємо

$$\overline{M} = \bigcap_{\alpha} F_{\alpha}. \blacksquare$$

**Наслідок 1.2.** *Замикання довільної множини M простору X є найменшою замкненою множиною, що містить множину M.*

**Озн. 1.12.** *Нехай A і B — дві множини в топологічному просторі T. Множина A називається* ***щільною в B****, якщо* $\overline{A} \supset B$.

**Зауваження 1.3.** Множина $A$ не обов'язково міститься в $B$: множина раціональних чисел є щільною в множині ірраціональних чисел і навпаки.

**Озн. 1.13.** *Якщо* $\overline{A} = X$, *множина A називається* ***скрізь щільною****.*

**Озн. 1.14.** *Множина A називається* ***ніде не щільною****, якщо вона не є щільною в жодній непорожній відкритій підмножині множини X.*

Множина $A$ є щільною в кожній непорожній відкритій множині, якщо $\forall U \in \tau, U \neq \varnothing \ \overline{A} \supset U$, тобто кожна точка множини $U$ є точкою дотику множини $A$. Отже, $\forall x \in U \ \forall O(x) \in \tau \ \ O(x) \cap A \neq \varnothing.$ Заперечення цього твердження збігається з означенням ніде не щільної множини. Формальний запис означення має такий вигляд.

$$\exists U_0 \in \tau, U_0 \neq \varnothing \ \overline{A} \not\supset U_0 \Rightarrow \exists x_0 \in U_0 \ \exists O(x_0) \in \tau : O(x_0) \cap A = \varnothing.$$

**Озн. 1.15.** *Простір T, що містить скрізь щільну зліченну множину, називається* ***сепарабельним****.*

**Приклад 1.5.** В топології числової прямої множина всіх раціональних чисел $\mathbb{Q}$ є щільною в множині всіх ірраціональних чисел $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, і навпаки.

**Приклад 1.6.** Найпростішими прикладами ніде не щільних множин є цілі числа просторі $\mathbb{R}$ і пряма в просторі $\mathbb{R}^2$.

**Приклад 1.7.** Зліченна множина всіх раціональних чисел $\mathbb{Q}$ є скрізь щільною у просторі $\mathbb{R}$, отже простір $\mathbb{R}$ є сепарабельним.

З того, що $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ і $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, зокрема, випливає, що $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ є ані відкритими, ані замкненими множинами.

**Приклад 1.8.** Зліченна множина всіх поліномів з раціональними коефіцієнтами за теоремою Вєйєрштрасса є скрізь щільною в просторі неперервних функцій $C[a,b]$. Отже, простір $C[a,b]$ є сепарабельним.

**Література**

1. Ляшко И.И., Емельянов В.Ф, Боярчук А.К. Основы классического и современного математического анализа. — К.: Вища школа, 1988 (стр. 26–27).
2. Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А . Общая топология. — М.: Высшая школа, 1979 (стр. 10–20).
3. Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986 (стр. 32–50).

## 2.1 Оператори замикання і взяття внутрішності

Система аксіом, наведена в означенні 1.1 належить радянському математику П.С.Александрову (1925). Проте першу систему аксіом, що визначає топологічну структуру, запропонував польський математик К.Куратовський (1922).

**Озн. 2.1**. *Нехай* $X$ — *довільна множина. Відображення* cl: $2^X \to 2^X$ *називається* ***оператором замикання Куратовського на X****, якщо воно задовольняє наступні умови (**аксіоми Куратовського**):*

*K.1.* $\mathrm{cl}(M \cup N) = \mathrm{cl}(M) \cup \mathrm{cl}(N)$ (аддитивність);
*K.2.* $M \subset \mathrm{cl}(M)$ ;
*K.3.* $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(M)) = \mathrm{cl}(M)$ (ідемпотентність);
*K.4.* $\mathrm{cl}(\varnothing) = \varnothing$.

**Теорема 2.1.** *Якщо в деякій множині X введено топологію в розумінні Александрова, то відображення cl, що задовольняє умові* $cl(M) = \overline{M}$ *є оператором Куратовського на X.*

Доведення. Неважно помітити, що аксіоми К1–К4 просто співпадають із властивостями замикання, доведеними в теоремі 1.1. ■

**Теорема 2.2 (про завдання топології оператором Куратовського).** *Кожний оператор Куратовського cl на довільній множині X задає в X топологію* $\tau = \{U \subset X : cl(X \setminus U) = X \setminus U\}$ *в розумінні Александрова, до того ж замикання* $\overline{M}$ *довільної підмножини M із X в цій топології* $\tau$ *збігається з cl(M), тобто* $cl(M) = \overline{M}$ .

*Доведення*. Побудуємо сімейство

$$\sigma = \{M \subset X : M = X \setminus U, U \in \tau\},$$

що складається із всіх можливих доповнень множин із системи τ, тобто таких множин, для яких cl($M$) = $M$. Інакше кажучи, система σ складається з нерухомих точок оператора замикання Куратовського. За принципом двоїстості де Моргана, для сімейства σ виконуються аксіоми *замкненої топології*

F1. $X, \varnothing \in \sigma$.

F2. $F_\alpha \in \sigma,\ \alpha \in A \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \in \sigma$, де $A$ — *довільна множина.*

F3. $F_\alpha \in \sigma,\ \alpha = 1, 2, \ldots, n \Rightarrow \bigcup_{\alpha=1}^{n} G_\alpha \in \sigma$.

Отже, щоб перевірити аксіоми Александрова для сімейства множин τ, достатньо перевірити виконання аксіом F1–F3 для сімейства множин σ.

1) Перевіримо аксіому F1: X∈σ? ∅∈σ?

Аксіома К2 стверджує, що $M \subset$ cl($M$). Покладемо $M = X$. Отже, $X \subset$ cl($X$) $\subset X \Rightarrow$ cl($X$) = $X \Rightarrow X \in$ σ.

Аксіома К4 стверджує, що cl(∅) = ∅ ⇒ ∅∈σ.

2) Перевіримо виконання аксіоми F2.

Спочатку покажемо, що оператор cl є *монотонним*:

$$\forall A, B \in \sigma : A \subset B \Rightarrow cl(A) \subset cl(B).$$

Нехай $A, B \in \sigma$ і $A \subset B$. Тоді

$$cl(B) = cl(B \cup A) = cl(B) \cup cl(A) \text{ (аксіома К1)},$$

Отже,

$$cl(A) \subset cl(A) \cup cl(B) = cl(B \cup A) = cl(B).$$

Використаємо це допоміжне твердження для перевірки аксіоми F3. З одного боку,

$$\forall F_\alpha \in \sigma \ \bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha \subset F_\alpha \ \forall \alpha \in A \Rightarrow \Rightarrow$$

$$cl\left(\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha\right) \subset cl(F_\alpha) = F_\alpha \quad \forall \alpha \in A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow cl\left(\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha .$$

З іншого боку, за аксіомою К2

$$\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha \subset cl\left(\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha\right).$$

Отже,

$$cl\left(\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha \in \sigma.$$

3) Перевіримо виконання аксіоми F3.

$A, B \in \sigma \Rightarrow \mathrm{cl}(A \cup B) = \mathrm{cl}(A) \cup \mathrm{cl}(B) = A \cup B \Rightarrow A \cup B \in \sigma$.

Таким чином, $\sigma$ — замкнена топологія, а сімейство $\tau$, що складається із доповнень до множин із сімейства $\sigma$ — відкрита топологія.

Залишилося показати, що в просторі $(X, \tau)$, побудованому за допомогою оператора cl, замикання $\bar{M}$ довільної множини $M$ збігається з $\mathrm{cl}(M)$:

$$\mathrm{cl}(M) = \bar{M} .$$

Дійсно, за теоремою 1.2 множина $M$ є замкненою, якщо $\bar{M} = M$. Із аксіом К2 і К3 випливає, що множина $\mathrm{cl}(M)$ є замкненою і містить $M$. Покажемо, що ця множина — найменша замкнена множина, що містить множину $M$, тобто є її замиканням.

Нехай $F$ — довільна замкнена в $(X, \tau)$ множина, що містить $M$:

$$M \subset F,\ \mathrm{cl}(F) = F.$$

Внаслідок монотонності оператора cl отримуємо наступне.

$$M \subset F,\ \mathrm{cl}(F) = F \Rightarrow \mathrm{cl}(M) \subset \mathrm{cl}(F) = F. \blacksquare$$

**Озн. 2.2**. *Нехай* $X$ *— довільна множина. Відображення* $\mathrm{Int}\colon 2^X \to 2^X$ *називається* ***оператором взяття внутрішності множини X****, якщо воно задовольняє наступні умови:*

*К.1.* $\mathrm{Int}(M \cap N) = \mathrm{Int}(M) \cap \mathrm{Int}(N)$ (аддитивність);

*К.2.* $\mathrm{Int}(M) \subset M$;

*К.3.* $\mathrm{Int}(\mathrm{Int}(M)) = \mathrm{Int}(M)$ (ідемпотентність);

*К.4.* $\mathrm{Int}(\varnothing) = \varnothing$.

**Наслідок 2.1.** *Оскільки*

$$Int\ A = X \setminus \overline{X \setminus A},$$

*оператор взяття внутрішності є двоїстим для оператора замикання Куратовського. Отже, система множин* $\tau = \{A \subseteq X : Int\ A = A\}$ *утворює в* $X$ *топологію, а множина* $Int\ A$ *в цій топології є внутрішністю множини* $A$.

## 2.2 Бази

Для завдання в множині $X$ певної топології немає потреби безпосередньо указувати всі відкриті підмножини цієї топології. Існує деяка сукупність відкритих підмножин, яка повністю визначає топологію. Така сукупність називається *базою* цієї топології.

**Озн. 2.3.** *Сукупність* $\beta$ *відкритих множин простору* $(X, \tau)$ *називається* ***базою топології*** $\tau$ *або* ***базою простору*** $(X, \tau)$*, якщо довільна непорожня відкрита множина цього* *простору є об'єднанням деякої сукупності множин, що належать* β.

$$\forall G \in \tau, G \neq \varnothing\ \exists B_\alpha \in \beta, \alpha \in A : G = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha .$$

**Зауваження 2.1.** Будь-який простір $(X,\tau)$ має базу, оскільки система всіх відкритих підмножин цього простору утворює базу його топології.

**Зауваження 2.2.** Якщо в просторі $(X,\tau)$ існують ізольовані точки, вони повинні входити в склад будь-якої бази цього простору.

**Теорема 2.3**. *Для того щоб сукупність* β *множин із топології* τ *була базою цієї топології, необхідно і достатньо, щоб для кожної точки* $x \in X$ *і довільної відкритої множини* $U$*, що містить точку* $x$*, існувала множина* $V \in \beta$*, така щоб* $x \in V \subset U$*.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай β — база простору $(X, \tau)$, $x_0 \in X$, а $U_0 \in \tau$, таке що $x_0 \in U_0$. Тоді за означенням бази $U_0 = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$, де $V_\alpha \in \beta$. З цього випливає, що $x_0 \in V_{\alpha_0} \subset U_0$.

$\beta = \mathcal{B}(\tau)$, $x_0 \in X$, $U_0 \in \tau$, $x_0 \in U_0 \Rightarrow U_0 = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$, $V_\alpha \in \beta \Rightarrow$

$x_0 \in V_{\alpha_0} \subset U_0$

*Достатність*. Нехай для кожної точки $x \in X$ і довільної відкритої множини $U \in \tau$, що містить точку $x$, існує множина $V_x \in \beta$, така що $x \in V_x \subset U$. Легко перевірити, що $U = \bigcup_{x \in U} V_x$.

Дійсно, якщо точка $x \in U$, то за умовою теореми, вона належить множині $V_x \subset U$, а отже і об'єднанню таких множин $\bigcup_{x \in U} V_x$.

$x\in U \Rightarrow \exists\ V_x\subset U\colon x\in V_x \Rightarrow x\in \bigcup\limits_{x\in U} V_x$ .

І навпаки, якщо точка належить об'єднанню $\bigcup\limits_{x\in U} V_x$ , то вона належить принаймні одній із цих множин $V_x\subset U$, а отже — вона належить множині $U$.

$x\in \bigcup\limits_{x\in U} V_x \Rightarrow \exists\ V_x\subset U\colon x\in V_x \Rightarrow x\in U$ .

Таким чином, довільну відкриту множину $U\in\tau$ можна подати у вигляді об'єднання множин із $\beta$. ■

**Приклад 2.1.** Оскільки $\forall x\in \mathrm{R}^1$ і $\forall (a,b)\ni x$ $\exists (a_0,b_0)\subset(a,b)$, то за теоремою 2.3 сукупність всіх відкритих інтервалів утворює базу топології в $\mathrm{R}^1$.

**Приклад 2.2.** Оскільки $\forall x\in \mathrm{R}^1$ і $\forall (a,b)\ni x$ $\exists (r_1,r_2)\subset(a,b)$, $r_1, r_2\in \mathrm{Q}$, то за теоремою 2.3 сукупність всіх відкритих інтервалів із раціональними кінцями також утворює базу топології в $\mathrm{R}^1$.

Із теореми 2.3 випливають два наслідки.

**Властивість 2.1**. *Об'єднання всіх множин, які належать базі $\beta$ топології $\tau$, утворює всю множину $X$.*

Доведення. Оскільки $X\in\tau$, то за означенням бази $X = \bigcup\limits_{\alpha\in A} V_\alpha$ , де $V_\alpha\in\beta$. ■

**Властивість 2.2**. *Для довільних двох множин $U$ і $V$ із бази $\beta$ і для кожної точки $x\in U\cap V$ існує множина $W$ із $\beta$ така, що $x\in W\subset U\cap V$ .*

Доведення. Оскільки $U\cap V\in\tau$, то за теоремою 2.3 в множині $U\cap V$ міститься відкрита множина $W$ із бази, така що $x\in W$.■

**Теорема 2.4 (про завдання топології за допомогою бази).** *Нехай в довільній множині $X$ задана деяка сукупність відкритих множин $\beta$, що має властивості 2.1 і 2.2. Тоді в* *множині X існує єдина топологія* $\tau$, *однією з баз якої є сукупність* $\beta$.

Доведення. Припустимо, що $\tau$ — сімейство, що містить лише порожню множину і всі підмножини множини $X$, кожна з яких є об'єднанням підмножин із сукупності $\beta$ (властивість 2.1).

$$\tau = \left\{ \varnothing,\ G_\alpha \subset X, \alpha \in A : G_\alpha = \bigcup_{i \in I} B_i^\alpha,\ B_i^\alpha \in \beta \right\}.$$

Перевіримо, що це сімейство множин є топологією. Виконання аксіом топології 1 і 2 є очевидним: $\varnothing \in \tau$, $X \in \tau$ і $G_\alpha \in \tau$, $\alpha \in A \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \in \tau$. Аксіома 3 є наслідком властивостей 2.1 і 2.2. Не обмежуючи загальності, можна перевірити її для випадку перетину двох множин.

Нехай $U, U' \in \tau$. За означенням, $U = \bigcup_{i \in I} V_i$, $U' = \bigcup_{j \in J} V_j'$, $V_i, V_i' \in \beta$. Розглянемо перетин

$$U \cap U' = \left( \bigcup_{i \in I} V_i \right) \cap \left( \bigcup_{j \in J} V_j' \right) = \bigcup_{i \in I,\, j \in J} \left( V_i \cap V_j' \right).$$

Доведемо, що $V_i \cap V_j' \in \tau$. Нехай $x \in V_i \cap V_j'$. Тоді, за властивістю 2.2, існує множина $W_x \in \beta$, така що $x \in W_x \subset V_i \cap V_j'$. Оскільки точка $x \in V_i \cap V_j'$ є довільною, то $V_i \cap V_j' = \bigcup_{x \in V_i \cap V_j} W_x \in \tau$. Отже, $U \cap U' \in \tau$.

Таким чином, сімейство $\tau$ дійсно утворює топологію на $X$, а система $\beta$ є її базою. ■

Література

1. Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. Общая топология. — М.: Высшая школа, 1979 (стр. 14–22).
2. Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986 (стр. 46–50).

## 3. Збіжність і неперервність

В основі поняття збіжності послідовностей в топологічних просторах лежать аксіоми зліченності, які в свою чергу використовують поняття локальної бази в точці.

**Озн. 3.1.** *Система* $\beta_{x_0}$ *відкритих околів точки* $x_0$ *називається* ***локальною базою в точці*** $\boldsymbol{x_0}$, *якщо кожний окіл U точки* $x_0$ *містить її деякий окіл V із системи* $\beta_{x_0}$ .

**Озн. 3.2.** *Топологічний простір X називається таким, що* ***задовольняє першій аксіомі зліченності****, якщо в кожній його точці існує локальна база, що складається із не більш ніж зліченої кількості околів цієї точки.*

**Озн. 3.3.** *Топологічний простір X називається таким, що* ***задовольняє другій аксіомі зліченності****, або* ***простором із зліченною базою****, якщо воно має базу, що складається із не більш ніж зліченої кількості відкритих множин.*

**Лема 3.1.** *Якщо простір X задовольняє другій аксіомі зліченності, то він задовольняє і першій аксіомі зліченності.*

Доведення. Нехай $U_1$, $U_2$, ... , $U_n$, ... — зліченна база в просторі *X*, тоді $\beta_{x_0} = \{U_k \in \beta : x_0 \in U_k\}$ — зліченна локальна база в точці $x_0$.

**Лема 3.2.** *Існують простори, що задовольняють першій аксіомі зліченності, але не задовольняють другій аксіомі зліченності.*

Доведення. В якості контрприкладу розглянемо довільну *незліченну* множину *X*, в якій введено дискретну топологію $\tau=\{\varnothing, X, 2^X\}$. ■

**Приклад 3.1.** Простір $R^n$, топологія якого утворена відкритими кулями, задовольняє першій аксіомі зліченності, оскільки в кожній точці $x_0 \in X$ існує зліченна локальна база

$S(x_0, 1/n)$. Очевидно, що цей простір задовольняє і другій аксіомі зліченності, оскільки має зліченну базу, що складається з куль $S(x_n, r)$, де центри куль $x_n$ належать зліченній скрізь щільній множині (наприклад, мають раціональні координати), а $r$ — раціональне число.

Поняття точки дотику і замикання множини відіграють основну роль в топології, оскільки будь-яка топологічна структура повністю описується в цих термінах.

Проте поняття точки дотику занадто абстрактне. Набагато більше змістовних результатів можна отримати, якщо виділити широкий клас просторів, топологічну структуру яких можна описати виключно в термінах границь збіжних послідовностей.

**Озн. 3.4.** *Послідовність точок $\{x_n\}$ топологічного простору $X$ називається збіжною до точки $x_0 \in X$, якщо кожний окіл $U_0$ точки $x_0$ містить всі точки цієї послідовності, починаючи з деякої. Точку $x_0$ називають границею цієї послідовності:* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

**Приклад 3.2.** В довільному тривіальному просторі послідовність збігається до будь-якої точки цього простору.

Довільна гранична точка множини $A$ довільного топологічного простору $X$ є точкою дотику. Проте в загальних топологічних просторах не для всякої точки дотику $x \in \overline{A}$ існує послідовність $\{x_n\} \in A$, що до неї збігається.

**Приклад 3.3.** Нехай $X$ — довільна незліченна множина. Задамо в просторі $X$ топологію, оголосивши відкритими порожню множину і всі підмножини, які утворені із $X$ викиданням не більш ніж зліченної кількості точок.

$$\tau = \{\varnothing, X \setminus \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}\}.$$

Спочатку покажемо, що в цьому просторі збіжними є лише стаціонарні послідовності. Припустимо, що в просторі існує нестаціонарна послідовність $\{x_n\} \to x_0$. Тоді, взявши в якості околу точки $x_0$ множину $U$, яка утворюється викиданням із $X$ всіх членів послідовності $\{x_n\}$, які відрізняються від точки $x_0$, ми дійдемо до протиріччя з тим, що окіл $U$ мусить містити всі точки послідовності $\{x_n\}$, починаючи з деякої.

Тепер розглянемо підмножину $A = X \setminus \{x_0\}$. Точка $x_0$ є точкою дотику множини $A$. Справді, якщо $U$ — довільний відкритий окіл точки $x_0$, то за означенням відкритих в $X$ множин, доповнення $X \setminus U$ є не більш ніж зліченим.

$U \in \tau \Rightarrow U = X \setminus \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} \Rightarrow$

$\Rightarrow X \setminus U = X \setminus X \setminus \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\} \Rightarrow$

$\Rightarrow A \cap U \neq \varnothing$ (оскільки card $A = c$, а доповнення $X \setminus U$ і тому не може містити в собі незліченну множину $A$).

З іншого боку, оскільки в просторі $X$ збіжними є лише стаціонарні послідовності, то із $x_0 \notin A$ випливає, що жодна послідовність точок із множини $A$ не може збігатися до точки дотику $x_0 \notin A$.

**Теорема 3.1.** *Якщо простір $X$ задовольняє першій аксіомі зліченності, то $x_0 \in \bar{A}$ тоді і лише тоді, коли $x_0$ є границею деякої послідовності $\{x_n\}$ точок із $A$.*

Доведення. *Достатність.* Якщо в довільному топологічному просторі $\{x_n\} \in A$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, то $x_0 \in \bar{A}$.

*Необхідність.* Нехай $x_0 \in \bar{A}$. Якщо $x_0 \in A$, достатньо в якості $\{x_n\} \in A$ взяти стаціонарну послідовність.

Припустимо, що $x_0 \in \overline{A} \setminus A$ і $U_1$, $U_2$, ... , $U_n$, ... — зліченна локальна база в точці $x_0$, до того ж $\forall n \in N$ $U_{n+1} \subset U_n$. (Якщо б ця умова не виконувалася, ми взяли б іншу базу $\{V_n\}$, де $V_n = \bigcap_{k=1}^{n} U_k$ ). Оскільки $A \cap U_n \neq \varnothing$, взявши за $x_n$ довільну точку із $A \cap U_n$, ми отримаємо послідовність $\{x_n\} \in A$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Дійсно, нехай $V$ — довільний окіл точки $x_0$. Оскільки $U_1, U_2$, ... , $U_n$, ... база в точці $x_0$, існує такий елемент $U_{n_0}$, який належить цій базі, що $U_{n_0} \subset V$. З іншого боку, для всіх $n \geq n_0$ $U_{n+1} \subset U_n$. Це означає, що $\forall n \geq n_0$ $x_n \in A \cap U_n \subset U_{n_0} \subset U$. Отже, $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$. ■

Поняття неперервного відображення належить до фундаментальних основ топології.

**Озн. 3.5.** *Відображення* $f : X \to Y$ *називається* ***сюр'єктивним****, якщо* $f(X) = Y$, *тобто множина X відображається на весь простір Y.*

**Озн. 3.6.** *Відображення* $f : X \to Y$ *називається* ***ін'єктивним****, якщо з того, що* $x_1 \neq x_2$ випливає, що $f(x_1) \neq f(x_2)$, *тобто відображення є однозначним.*

**Озн. 3.7.** *Відображення* $f : X \to Y$, *яке одночасно є сюр'єктивним та ін'єктивним, називається* ***бієктивним****, або взаємно однозначною відповідністю між X і Y.*

Тепер нагадаємо основні співвідношення для образів та прообразів множин відносно функції $f : X \to Y$.

Якщо $A, B \subset X$, то

1. $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B) \not\Rightarrow A \subset B$;

2. $A \neq \varnothing \Rightarrow f(\varnothing) \neq \varnothing$;
3. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$;
4. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Якщо $A', B' \subset Y$, то

5. $A' \subset B' \Rightarrow f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$;
6. $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$;
7. $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$.

Якщо $B' \subset A' \subset Y$, то

8. $f^{-1}(A' \setminus B') = f^{-1}(A') \setminus f^{-1}(B')$;
9. $f^{-1}(Y \setminus B') = X \setminus f^{-1}(B')$

Для довільних множин $A \subset X$ і $B' \subset Y$

10. $A \subset f^{-1}(f(A))$;
11. $f(f^{-1}(B')) \subset B'$.

Введемо поняття неперервного відображення.

**Озн. 3.8.** *Нехай $X$ і $Y$ — два топологічних простора. Відображення $f : X \to Y$ називається* ***неперервним в точці*** *$x_0$, якщо для довільного околу $V$ точки $y_0 = f(x_0)$ існує такий окіл $U$ точки $x_0$, що $f(U) \subset V$.*

**Озн. 3.9.** *Відображення $f : X \to Y$ називається* ***неперервним****, якщо воно є неперервним в кожній точці $x \in X$.*

Інакше кажучи, неперервне відображення зберігає граничні властивості: якщо точка $x \in X$ є близькою до деякої множини $A \subset X$, то точка $y = f(x) \in Y$ є близькою до образу множини $A$.

**Теорема 3.2.** *Для того щоб відображення $f : X \to Y$ було неперервним, необхідно і достатньо, щоб прообраз*

$f^{-1}(V)$ *будь-якої відкритої множини* $V \subset Y$ *був відкритою множиною в X.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай $f: X \to Y$ — неперервне відображення, а $V$ — довільна відкрита множина в Y. Доведемо, що множина $U = f^{-1}(V)$ є відкритою в $X$. Для цього візьмемо довільну точку $x_0 \in U$ і позначимо $y_0 = f(x_0)$. Оскільки множина $V$ є відкритим околом точки $y_0$ в просторі $Y$, а відображення $f$ є неперервним в точці $x_0$, в просторі $X$ існує відкритий окіл $U_0$ точки $x_0$, такий що $f(U_0) \subset V$. Звідси випливає, що $U_0 \subset U$ (властивість 5). Отже, множина $U$ є відкритою в $X$.

$$f \in C(X,Y) \Rightarrow \exists U_0 \in \tau_X : x_0 \in U_0, f(U_0) \subset V \Rightarrow$$
$$f^{-1}(f(U_0)) \subset f^{-1}(V) = U \Rightarrow U_0 \subset f^{-1}(f(U_0)) \subset U \Rightarrow U \in \tau_X$$

*Достатність.* Нехай прообраз $f^{-1}(V)$ довільної відкритої в $Y$ множини $V$ є відкритим в $X$, а $x_0 \in X$ — довільна точка. Доведемо, що відображення $f$ є неперервним в точці $x_0$. Дійсно, нехай $y_0 = f(x_0)$, а $V$ — її довільний відкритий окіл. Тоді $U = f^{-1}(V)$ за умовою теореми є відкритим околом точки $x_0$, до того ж $f(U) \subset V$ (властивість 11). Отже, відображення $f$ є неперервним в кожній точці $x_0 \in X$. Таким чином, $f$ є неперервним в $X$.

$$V \in \tau_X, U \overset{def}{=} f^{-1}(V) \in \tau_X \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(U) = f(f^{-1}(V)) \subset V \Rightarrow f \in C(X,Y). \qquad \blacksquare$$

**Теорема 3.3.** *Для того щоб відображення* $f: X \to Y$ *було неперервним, необхідно і достатньо, щоб прообраз* $f^{-1}(V)$ *будь-якої замкненої множини* $V \subset Y$ *був замкненою множиною в X.*

Доведення випливає з того, що доповнення відкритих множин є замкненими, а прообрази множин, що взаємно доповнюють одна одну, самі взаємно доповнюють одна одну (властивість 9).

**Теорема 3.4.** *Для того щоб відображення* $f: X \to Y$ *було неперервним, необхідно і достатньо, щоб* $\forall A \subset X \ f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$.

Доведення. *Необхідність*. Нехай відображення $f: X \to Y$ є неперервним, а $x_0 \in \overline{A}$. Покажемо, що $y_0 = f(x_0) \in \overline{f(A)}$. Справді, нехай $V$ — довільний окіл точки $y_0$. Тоді внаслідок неперервності $f$ існує окіл $U$, який містить точку $x_0$ такий, що $f(U) \subset V$. Оскільки $x_0 \in \overline{A}$, то в околі $U$ повинна міститись точка $x' \in A$ (можливо, вона збігається з точкою $x_0$). Разом з тим, очевидно, що $y' = f(x')$ належить одночасно множині $f(A)$ і околу $V$, тобто $y_0 \in \overline{f(A)}$.

$f \in C(X,Y) \Rightarrow \forall V \in \tau_Y : f(x_0) \in V \ \exists U \in \tau_X : x \in U, f(U) \subset V$

$x_0 \in \overline{A} \Rightarrow U \bigcap A \neq \varnothing \Rightarrow \exists x' \in U \bigcap A \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x') \in f(U \cap A) \subset f(U) \cap f(A) \Rightarrow y_0 = f(x_0) \in \overline{f(A)}$.

*Достатність*. Нехай $\forall A \subset X \ f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$ і $B$ — довільна замкнена в $Y$ множина. Покажемо, що множина $A = f^{-1}(B)$ є замкненою в $X$. Нехай $x_0$ — довільна точка із $\overline{A}$. Тоді $f(x_0) \in f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$. Разом з тим

$A = f^{-1}(B) \Rightarrow f(A)=f(f^{-1}(B)) \subset B \Rightarrow \overline{f(A)} \subset \overline{B} = B$.

Тому $f(x_0) \in B$, отже, $x_0 \in A$. Таким чином, $\overline{A} \subset A$, тобто $A$ — замкнена множина. Звідси випливає, що відображення $f$ є неперервним. ■

**Озн. 3.10.** *Бієктивне відображення* $f: X \to Y$ *називається* ***гомеоморфним***, *або* ***гомеоморфізмом***, *якщо і само відображення* $f$ *і обернене відображення* $f^{-1}$ *є неперервними.*

**Озн. 3.11.** *Топологічні простор* $X$ *і* $Y$ *називаються* ***гомеоморфними***, *або* ***топологічно еквівалентними***, *якщо існує хоча б одне гомеоморфне відображення* $f: X \to Y$.

Цей факт записується так: $f: X \cong Y$.

**Приклад 3.3.** Тривіальний приклад гомеоморфізму — тотожнє перетворення.

**Приклад 3.4.** Відображення, що задається строго монотонними неперервними дійсними функціями дійсної змінної є гомеоморфізмами. Гомеоморфним образом довільного інтервалу є інтервал.

**Озн. 3.12.** *Неперервне відображення* $f: X \to Y$ *називається* ***відкритим***, *якщо образ будь-якої відкритої множини простору X є відкритим в Y.*

**Озн. 3.13.** *Неперервне відображення* $f: X \to Y$ *називається* ***замкненим***, *якщо образ будь-якої замкненої множини простору X є замкненим в Y.*

Поняття відкритого і замкненого відображення не є взаємовиключними.

**Приклад 3.5.** Тотожне відображення одночасно є і відкритим, і замкненим.

**Приклад 3.6.** Відображення *вкладення* (ін’єктивне відображення) $i: A \subset X \to X$ є відкритим, якщо підмножина *A* є відкритою, і замкненим, якщо підмножина

$A$ є замкненою.

**Теорема 3.5.** *Відображення $f: X \to Y$ є замкненим тоді і лише тоді, коли* $\forall A \subset X \ f\left(\overline{A}\right) = \overline{f(A)}$.

Доведення. *Необхідність.* Оскільки замкнене відображення є неперервним (за означенням), то внаслідок теореми 3.4 $\forall A \subset X \ f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$. Разом з тим, очевидно, що $f(A) \subset f\left(\overline{A}\right)$ (властивість 1), тому внаслідок монотонності замикання $\overline{f(A)} \subset \overline{f\left(\overline{A}\right)}$. Оскільки відображення $f$ є замкненим, то $\overline{f\left(\overline{A}\right)} = f\left(\overline{A}\right)$. Таким чином, $\overline{f(A)} = f\left(\overline{A}\right)$.

*Достатність.* Функція $f$ є неперервною внаслідок теореми 3.4. З умови $\overline{f(A)} = f\left(\overline{A}\right)$ для замкненої множини $A \subset X$ отримуємо, що $f(A) = \overline{f(A)}$, тобто образ будь-якої замкненої множини є замкненим.■

**Теорема 3.6.** *Відкрите бієктивне відображення $f: X \to Y$ є* ***гомеоморфізмом***.

Доведення. Оскільки $f: X \to Y$ – бієктивне відображення, існує обернене відображення $f^{-1}: Y \to X$. Оскільки $\forall A \subset X \ \left(f^{-1}\right)^{-1}(A) = f(A)$ і, за умовою теореми, $f$ – відкрите відображення, то прообрази відкритих підмножин із $X$ є відкритими. З теореми 3.2 випливає, що відображення $f^{-1}$ є неперервним. Оскільки бієктивне відкрите відображення завжди є неперервним, доходимо висновку, що $f$ – гомеоморфізм. ■

**Теорема 3.7.** *Замкнене бієктивне відображення*

$f: X \to Y$ *є гомеоморфізмом.*

Доведення цілком аналогічне теоремі 3.6. ■

**Теорема 3.8.** *Гомеоморфне відображення* $f: X \cong Y$ *одночасно є і відкритим, і замкненим.*

Доведення. Нехай $f^{-1}: Y \to X$ – обернене відображення. Тоді $\forall A \subset X \ f(A) = \left(f^{-1}\right)^{-1}(A)$. Оскільки відображення *f* є гомеоморфізмом, відображення *f* і $f^{-1}$ є неперервними. Оскільки образ множини *A* при відображенні *f* є прообразом множини *A* при відображенні $\left(f^{-1}\right)^{-1}$ і обидва ці відображення є неперервними, то відображення $f$ є відкритим і замкненим одночасно, тобто відкриті множини переводить у відкриті, а замкнені – у замкнені. ■

**Теорема 3.9.** *Бієктивне відображення* $f: X \to Y$ *є гомеоморфізмом тоді і лише тоді, коли воно зберігає операцію замикання, тобто* $\forall A \subset X \ f\left(\overline{A}\right) = \overline{f(A)}$.

Необхідність випливає з теорем 3.5 і 3.8, а достатність — з теорем 3.5 і 3.7.

## Література

1. Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. Общая топология. — М.: Высшая школа, 1979 (стр. 24–28).
2. Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986. — с.57–68.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. 5-е изд. — М.: Наука, 1981 (с. 89-91, Гл. II, § 5. Топологические пространства).

## 4. Аксіоми віддільності

Аналізуючи властивості різних топологічних просторів ми бачили, що їх структура може бути настільки “неприродною”, що будь-яка послідовність збігається до будь-яких точок (тривіальний простір), існують точки дотику множин, які не є границями послідовностей їх елементів (простір Зариського) тощо. В математичному аналізі ми не зустрічаємо таких “патологій”: там всі послідовності мають лише одну границю, кожна точка дотику є границею тощо. Отже, виникає потреба в інструментах, які дозволили ли б виділити серед топологічних просторів “природні” простори. Такими інструментами є аксіоми віддільності, які разом з аксіомами зліченності дають можливість повністю описати властивості топологічних просторів.

Аксіоми віддільності в топологічному просторі $(X,\tau)$ формулюються наступним чином.

$T_0$ (Колмогоров, 1935). *Для двох довільних різних точок* $x$ *і* $y$, *що належать множині* $X$, *існує множина із топологічної структури* $\tau$, *яка містить рівно одну з цих точок.*

$$\forall x, y \in X : x \neq y \; \exists V_x \in \tau : x \in V_x, y \notin V_x \vee \exists V_y \in \tau : y \in V_y, x \notin V_y.$$

$T_1$ (Рісс, 1907). *Для двох довільних різних точок* $x$ *і* $y$, *що належать множині* $X$, *існують множина* $V_x$ *із топологічної структури* $\tau$, *яка містить точку* $x$ *і не містить точки* $y$, *і множина* $V_y$ *із топологічної структури* $\tau$, *яка містить точку* $y$ *і не містить точки* $x$.

$$\forall x, y \in X : x \neq y \; \exists V_x, V_y \in \tau : x \in V_x, y \in V_y, x \notin V_y, y \notin V_x$$

$T_2$ (Хаусдорф, 1914). *Для двох довільних різних точок $x$ і $y$, що належать множині $X$, існують множина $V_x$ із топологічної структури $\tau$, яка містить точку $x$, і множина $V_y$ із топологічної структури $\tau$, яка містить точку $y$, такі що не перетинаються.*

$$\forall x, y \in X : x \neq y \; \exists V_x, V_y \in \tau : x \in V_x, y \in V_y, V_x \cap V_y = \varnothing$$

$T_3$ (В'єторіс, 1921). *Для довільної точки $x$ і довільної замкненої множини $F$, що не містить цієї точки, існують дві відкриті множини $V_x$ і $V$, що не перетинаються, такі що $x \in V_x$, а $F \subset V$.*

$$\forall x \in X, \bar{F} \subset X : x \notin \bar{F} \; \exists V_x, V \in \tau : x \in V_x, F \subset V, V_x \cap V = \varnothing .$$

$T_{3\frac{1}{2}}$ (Урисон, 1925). *Для довільної точки $x$ і довільної замкненої множини $\bar{F}$, що не містить цієї точки, існує неперервна числова функція $f$, задана на просторі $X$, така що $0 \le f(t) \le 1$, до того ж $f(x) = 0$ і $f(t) = 1$, якщо $x \in \bar{F}$.*

$$\forall x \in X, \bar{F} \subset X : x \notin \bar{F} \; \exists f : X \to R^1 :$$
$$0 \le f(t) \le 1, f(x) = 0, f(t) = 1, \text{ якщо } t \in \bar{F}.$$

$T_4$ (В'єторіс, 1921). *Для двох довільних замкнених множин $\overline{F_1}$ і $\overline{F_2}$, що не перетинаються, існують відкриті множини $G_1$ і $G_2$, що не перетинаються, такі що $\overline{F_1} \subset G_1$, $\overline{F_2} \subset G_2$.*

$$\forall \overline{F_1}, \overline{F_2} \subset X : \overline{F_1} \cap \overline{F_2} = \varnothing \; \exists G_1, G_2 \in \tau :$$
$$\overline{F_1} \subset G_1, \overline{F_2} \subset G_2, G_1 \cap G_2 = \varnothing .$$

**Озн. 4.1** (Колмогоров, 1935). *Топологічні простори, що задовольняють аксіому* $T_0$, *називаються* $T_0$***-просторами***, *або* ***колмогоровськими***.

**Озн. 4.2 (Рісс, 1907).** *Топологічні простори, що задовольняють аксіому* $T_1$, *називаються* $T_1$***-просторами***, *або* ***досяжними***.

**Озн. 4.3 (Хаусдорф, 1914).** *Топологічні простори, що задовольняють аксіому* $T_2$, *називаються* ***хаусдорфовими***, *або* ***віддільними***.

**Озн. 4.4 (В’єторіс, 1921).** *Топологічні простори, що задовольняють аксіоми* $T_1$ *і* $T_3$, *називаються* ***регулярними***.

**Озн. 4.5 (Тихонов, 1930).** *Топологічні простори, що задовольняють аксіоми* $T_1$ *і* $T_{3\frac{1}{2}}$, *називаються* ***цілком регулярними***, *або* ***тихоновськими***.

**Озн. 4.6 (Тітце (1923), Александров і Урисон (1929)).** *Топологічні простори, що задовольняють аксіоми* $T_1$ *і* $T_4$, *називаються* ***нормальними***.

Розглянемо наслідки, які випливають із аксіом віддільності.

**Теорема 4.1 (критерій досяжності).** *Для того щоб топологічний простір* $(X,\tau)$ *був* $T_1$*-простором необхідно і достатньо, щоб будь-яка одноточкова множина* $\{x\}\subset X$ *була замкненою*.

Доведення. *Необхідність*. Припустимо, що виконується перша аксіома віддільності: якщо $x\neq y$, то існує окіл $V_y\in\tau : x\notin V_y$. Тоді $\forall y\neq x\ y\notin\overline{\{x\}}$, тобто $\overline{\{x\}}=\{x\}$.

*Достатність*. Припустимо, що $\overline{\{x\}}=\{x\}$. Тоді $\forall y \neq x\, \exists V_y \in \tau : x \notin V_y$. Отже виконується перша аксіома віддільності. ■

**Наслідок.** *В просторі $T_1$ будь-яка скінченна множина є замкненою.*

**Теорема 4.2.** *Для того щоб точка $x$ була граничною точкою множини $M$ в $T_1$-просторі необхідно і достатньо, щоб довільний окіл $U$ цієї точки містив нескінченну кількість точок множини $M$.*

Доведення. *Необхідність*. Якщо точка $x$ є граничною точкою множини $M$, то

$$\forall O(x)\in \tau \;\; O(x)\cap M \setminus \{x\} \neq \varnothing.$$

Припустимо, що існує такий окіл $U$ точки $x$, що містить лише скінченну кількість точок $x_1, x_2, ..., x_n \in M$. Оскільки простір $(X,\tau)$ є $T_1$-простором, то існує окіл $U_i$ точки $x$, що не містить точку $x_i$. Введемо в розгляд множину $V=\bigcap_{i=1}^{n} U_i$. Ця множина є околом точки $x$, що не містить точок множини $M$, за винятком, можливо, самої точки $x$. Отже, точка $x$ не є граничною точкою множини $M$, що суперечить припущенню.

*Достатність*. Якщо довільний окіл $U$ точки $x$ містить нескінченну кількість точок множини $M$, то вона є граничною за означенням.■

**Приклад 4.1**. Зв’язна двокрапка є колмогоровским, але недосяжним простором.

**Приклад 4.2**. Простір Зариського є досяжним, але не хаусдорфовим.

**Теорема 4.3 (критерій хаусдорфовості).** *Для того щоб простір* $(X,\tau)$ *був хаусдорфовим необхідно і достатньо, щоб для кожної пари різних точок* $x_1$ *і* $x_2$ *в* $X$ *існувало неперервне ін'єктивне відображення* $f$ *простору* $X$ *в хаусдорфів простір* $Y$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай простір $(X,\tau)$ є хаусдорфовим. Тоді можна покласти $Y = X$ і $f = I$ — тотожне відображення.

*Достатність.* Нехай $(X,\tau)$ — топологічний простір і $\forall x_1 \neq x_2 \, \exists f : X \to Y,\ f(x_1) \neq f(x_2)$, де $Y$ — хаусдорфів, а $f$ — неперервне відображення. Оскільки простір $Y$ є хаусдорфовим, то

$$\exists O(f(x_1)) \in \tau_Y, O(f(x_2)) \in \tau_Y : O(f(x_2)) \cap O(f(x_2)) = \varnothing.$$

Оскільки відображення $f$ є неперервним, то

$\exists O(x_1) \in \tau_X, O(x_2) \in \tau_Y : f(O(x_1)) \subset O(f(x_1))$,

$f(O(x_2)) \subset O(f(x_2))$. Тоді околи $V(x_1) = f^{-1} f(O(x_1))$ і $V(x_2) = f^{-1} f(O(x_2))$ не перетинаються. ■

**Озн. 4.7.** *Замкнена множина, що містить точку* $x$ *разом з деяким її околом, називається* ***замкненим околом*** *точки* $x$.

**Теорема 4.4 (критерій регулярності).** *Для того щоб* $T_1$*-простір* $(X,\tau)$ *був регулярним необхідно і достатньо, щоб довільний окіл* $U$ *довільної точки* $x$ *містив її замкнений окіл.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай простір $(X,\tau)$ є регулярним, $x$ — його довільна точка, а $U$ — її довільний окіл. Покладемо $F = X \setminus U$. Тоді внаслідок регулярності простору $(X,\tau)$ існує окіл $V$ точки $x$ і окіл $W$ множини $F$, такі що $V\bigcap W=\varnothing$. Звідси випливає, що $V\subset X\setminus W$, отже, $\bar{V}\subset\overline{X\setminus W}=X\setminus W\subset X\setminus F=U$.

*Достатність*. Нехай довільний окіл довільної точки $x$ містить замкнений окіл цієї точки, а $F$ — довільна замкнена множина, що не містить точку $x$. Покладемо $G=X\setminus F\in\tau$. Нехай $V$ — замкнений окіл точки $x$, що міститься в множині $G$. Тоді $W=X\setminus V$ є околом множини $F$, який не перетинається з множиною $V$. ■

**Приклад 4.4**. Розглянемо множину $X=\mathbb{R}$ і введемо топологію так: замкненими будемо вважати всі множини, що є замкненими у природній топології числової прямої, а також множину $A=\left\{\frac{1}{n}, n=1,2,....\right\}$. Точка нуль їй не належить, але будь-які околи точки нуль і довільні околи множини $A$ перетинаються. Це означає, що побудований простір не є регулярним, але є хаусдорфовим.

**Озн. 4.8.** Система $\gamma=\{A_i, i\in I\}$ замкнених підмножин простору $X$ називається його *замкненою базою*, якщо будь-яку замкнену в $X$ множину можна подати у вигляді перетину множин із системи $\gamma$. Система $\delta=\{B_j\}$ замкнених підмножин $B_j$ називається *замкненою передбазою*, якщо будь-яку замкнену в $X$ множину можна подати у вигляді перетину скінченних об'єднань множин із системи $\delta$.

**Озн. 4.9.** *Підмножини A і B простору X називаються функціонально віддільними, якщо існує дійсна неперервна функція* $f:X\to[0,1]$ *така, що* $f(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\in A,\\ 1, \text{ якщо } x\in B.\end{cases}$

Оскільки замкнені бази і передбази є двоїстими до відкритих, мають місце наступні твердження.

**Лема 4.1.** *Для того щоб система* $\gamma=\{A_i, i\in I\}$ *замкнених множин із* $X$ *була замкненою базою в* $X$, *необхідно і достатньо, щоб для кожної точки* $x_0\in X$ *і для кожної замкненої множини* $F_0$, *що не містить точку* $x_0$, *існувала множина* $A_{j_0}\in\gamma$ *така, що* $x_0\notin A_{j_0}\supset F_0$.

**Лема 4.2.** *Для того щоб система* $\delta=\{B_j, j\in J\}$ *замкнених множин із* $X$ *була замкненою передбазою в* $X$, *необхідно і достатньо, щоб для кожної точки* $x_0\in X$ *і для кожної замкненої множини* $F_0$, *що не містить точку* $x_0$, *існував скінченний набір елементів* $B_{j_1}, B_{j_2}, ..., B_{j_n}$ *такий, що*

$$x_0\notin\bigcup_{k=1}^{n}B_{j_k}\supset F_0.$$

**Теорема 4.5 (критерій цілковитої регулярності).** *Для того щоб* $(X,\tau)$ *був цілком регулярним (тихоновським) необхідно і достатньо, щоб кожна його точка* $x_0$ *була функціонально віддільною від усіх множин із деякої замкненої передбази* $\delta=\{F_i, i\in I\}$, *що її не містять.*

Доведення. *Необхідність.* Якщо простір $(X,\tau)$ є цілком регулярним (тихоновським), то точка $x_0$ є функціонально віддільною від *усіх* замкнених множин, що її не містять, а значить, і від усіх множин із деякої замкненої передбази $\delta=\{F_i, i\in I\}$, що її не містять.

*Достатність.* Нехай $F_0$ — довільна замкнена в $X$ множина, що не містить точку $x_0$, і нехай $F_{i_1},...,F_{i_n}$ —

скінченний набір елементів із $\delta$ такий, що $x_0 \notin \bar{F} = \bigcup_{k=1}^{n} F_{i_k} \supset F_0$ (за лемою 4.2). За припущенням, існує неперервна функція $f_k : X \to [0,1]$, яка здійснює функціональну віддільність точки $x_0$ і замкненої множини $F_{i_k}$. Покладемо $f(x) = \sup_k f_k(x)$ і покажемо, що функція $f$ здійснює функціональну віддільність точки $x_0$ і множини $F$, а тим більше, точки $x_0$ і множини $F_0 \subset F$.

Дійсно, $f(x_0) = \sup_k f_k(x_0) = 0.$ Далі, оскільки $\forall k = 1,...,n$ $f_k(x) \le 1$, із $x \in F$ випливає, що $f(x) = \sup_k f_k(x) = 1.$ Крім того, із того що $x \in F = \bigcup_{k=1}^{n} F_{i_k}$ випливає, що $x \in F_{i_m}$, $1 \le m \le n$, тобто $f_m(x) = 1.$

Залишилося показати неперервність побудованої функції. Для цього треба довести, що $\forall x' \in X$ і $\forall \varepsilon > 0$ $\exists U \in \tau : x' \in U$ : $\forall x \in U$ $|f(x) - f(x')| < \varepsilon.$ Оскільки $f_k$ — неперервна функція, то існує окіл $U_k$ точки $x'$, такий що $\forall x \in U_k$ $|f_k(x) - f_k(x')| < \varepsilon.$ Покладемо $U = \bigcap_{k=1}^{n} U_k$. Тоді для кожного $x \in U$ і $\forall k = 1,...,n$ виконуються нерівності

$$f_k(x') - \varepsilon < f_k(x) \le \sup_k f_k(x) = f(x),$$

$$f_k(x) < f_k(x') + \varepsilon \le \sup_k f_k(x') + \varepsilon = f(x') + \varepsilon.$$

Звідси випливає, що $f(x') - \varepsilon < f(x) < f(x') + \varepsilon.$ ■

**Зауваження**. Побудова регулярних просторів, які не є тихоновськими є нетривіальною задачею.

**Мала лема Урисона (критерій нормальності).** *Досяжний простір $X$ є нормальним тоді і лише тоді, коли для кожної замкненої підмножини $F \subset X$ і відкритої множини $U$, що її містить, існує такий відкритий окіл $V$ множини $F$, що $\bar{V} \subset U$, тобто коли кожна замкнена підмножина має замкнену локальну базу.*

Доведення. *Необхідність*. Нехай простір $X$ є нормальним. Розглянемо замкнену множину $F$ та її окіл $U$. Покладемо $F' = X \setminus U$. Оскільки $F \cap F' = \varnothing$, то існує відкритий окіл $V$ множини $F$ і відкритий окіл $V'$ множини $F'$, такі що $V \cap V' = \varnothing$. Отже, $V \subset X \setminus V'$. З цього випливає, що $\bar{V} \subset \overline{X \setminus V'} = X \setminus V' \subset X \setminus F' = U$.

*Достатність*. Нехай умови леми виконані, а $F$ і $F'$ — довільні диз’юнктні замкнені підмножини простору $X$. Покладемо $U = X \setminus F'$. Тоді, оскільки множина $U$ є відкритим околом множини $F$, то за умовою леми, існує окіл $V$ множини $F$, такий що $\bar{V} \subset U$. Покладаючи $V' = X \setminus \bar{V}$ безпосередньо переконуємося, що множини $V$ і $V'$ не перетинаються і є околами множини $F$ і $F'$. ■

**Велика лема Урисона**. *Будь-які непорожні диз’юнктні замкнені підмножини нормального простору є функціонально віддільними.* (Без доведення.)

Література

1. Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. Общая топология. — М.: Высшая школа, 1979 (стр. 191–206).
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1981 (стр. 94–97).
3. Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986 (стр. 69–85).

## 5. Компактність в топологічних просторах

Велику роль в топології відіграє клас компактних просторів, які мають дуже важливі властивості. Введемо основні поняття.

**Озн. 5.1.** *Система множин* $S = \{A_i \subset X,\ i \in I\}$ *називається* ***покриттям*** *простору* $X$*, якщо* $\bigcup_{i \in I} A_i = X$ .

**Озн. 5.2.** *Покриття* $S$ *називається* ***відкритим*** ***(замкненим)****, якщо кожна із множин* $A_i$ *є* ***відкритою*** ***(замкненою)****.*

**Озн. 5.3.** *Підсистема* $P$ *покриття* $S$ *простору* $X$ *називається* ***підпокриттям*** *покриття* $S$*, якщо сама* $P$ *утворює покриття* $X$*.*

**Теорема 5.1. (Ліндельоф).** *Якщо простір* $X$ *має злічену базу, то із його довільного відкритого покриття можна виділити не більш ніж злічене підпокриття.*

Доведення. Нехай $\beta = \{U_n\}$ — деяка злічена база простору $X$, а $S = \{G_i,\ i \in I\}$ — довільне відкрите покриття простору $X$. Для кожного $x \in X$ позначимо через $G_n(x)$ один із елементів покриття $S$, що містить точку $x$, а через $U_n(x)$ — один із елементів бази $\beta$, що містить точку $x$ і цілком міститься у відкритій множині $G_n$ (теорема 2.3).

$$x \in U_n(x) \subset G_n(x).$$

Відібрані нами множини $U_n(x) \in \beta$ утворюють злічену множину. Крім того, кожна точка $x$ простору $X$ міститься в деякій множині $U_n(x)$, отже

$$\bigcup_{x \in X} U_n(x) = X .$$

Вибираючи для кожного $U_n(x)$ відкриту множину $G_n(x)$, ми отримаємо не більш ніж злічену систему, яка є підпокриттям покриття $S$. ■

**Озн. 5.4.** *Топологічний простір $(X,\tau)$, в якому із довільного відкритого покриття можна виділити не більш ніж злічене підпокриття, називається* ***ліндельофовим****, або* ***фінально компактним****.*

Звузимо клас ліндельофових просторів і введемо наступне поняття.

**Озн. 5.5.** *Топологічний простір $(X,\tau)$ називається* ***компактним (бікомпактним)****, якщо будь-яке його відкрите покриття містить скінченне підпокриття (умова Бореля–Лебега).*

**Приклад 5.1.** Простір з тривіальної топологією є компактним.

**Приклад 5.2.** Простір з дискретною топологією є компактним тоді і лише тоді, коли він складається із скінченної кількості точок.

**Приклад 5.3.** Простір Зариського є компактним.

**Приклад 5.4.** Простір $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ не є компактним.

**Теорема 5.2 (перший критерій компактності).** *Для компактності топологічного простору $(X,\tau)$ необхідно і достатньо, щоб будь-яка сукупність його замкнених підмножин з порожнім перетином містила скінченну підмножину таких множин із порожнім перетином.*

$(X,\tau)$ — компактний $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall \left\{ \overline{F}_\alpha, \alpha \in A : \bigcap_{\alpha \in A} \overline{F}_\alpha = \varnothing \right\} \ \exists \left\{ \overline{F}_{\alpha_1}, \overline{F}_{\alpha_2}, \ldots, \overline{F}_{\alpha_n} \right\} : \bigcap_{i=1}^{n} \overline{F}_{\alpha_i} = \varnothing .$$

Доведення. *Необхідність*. Нехай $(X,\tau)$ — компактний, а $\left\{ \overline{F}_\alpha, \alpha \in A \right\}$ — довільна сукупність замкнених множин, що задовольняє умові $\bigcap_{\alpha \in A} \overline{F}_\alpha = \varnothing$. Розглянемо множини

$U_\alpha = X \setminus \overline{F}_\alpha$. За правилами де Моргана (принцип двоїстості) сукупність множин $\{U_\alpha, \alpha \in A\}$ задовольняє умові $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha = X$, тобто утворює покриття простору $(X, \tau)$. Оскільки, за припущенням, $(X, \tau)$ — компактний простір, то існує скінченна підмножина множин $\{U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, ..., U_{\alpha_n}\}$, які також утворюють покриття: $\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} = X$. Отже, за правилами де Моргана

$$X \setminus \bigcap_{i=1}^{n} \overline{F}_{\alpha_i} = \bigcup_{i=1}^{n}\left(X \setminus \overline{F}_{\alpha_i}\right) = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} = X \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} \overline{F}_{\alpha_i} = \varnothing.$$

*Достатність*. Нехай $\{U_\alpha, \alpha \in A\}$ — довільне відкрите покриття простору $(X, \tau)$. Очевидно, що множини $\overline{F}_\alpha = X \setminus U_\alpha, \alpha \in A$ є замкненими, а їх сукупність має порожній перетин: $\bigcap\limits_{\alpha \in A} \overline{F}_\alpha = \varnothing$. За умовою, ця сукупність містить скінченну підмножину множин $\{\overline{F}_{\alpha_1}, \overline{F}_{\alpha_2}, ..., \overline{F}_{\alpha_n}\}$, таку що $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{F}_{\alpha_i} = \varnothing$. Звідси випливає, що множини $U_{\alpha_n}$, які є доповненнями множин $\overline{F}_{\alpha_n}$, утворюють покриття простору $(X, \tau)$, тобто простір $(X, \tau)$ є компактним. ■

**Озн. 5.6.** *Система підмножин* $\{M_\alpha \subset X, \alpha \in A\}$ *називається* ***центрованою***, *якщо перетин довільної скінченної кількості цих підмножин є непорожнім.*

$$\forall \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\} \in A \bigcap_{i=1}^{n} M_{\alpha_i} \neq \varnothing \Rightarrow$$

$\Rightarrow \{M_\alpha \subset X, \alpha \in A\}$ — центрована система.

**Теорема 5.3 (другий критерій компактності).** *Для компактності топологічного простору* $(X,\tau)$ *необхідно і достатньо, щоб будь-яка центрована система його замкнених підмножин мала непорожній перетин.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай простір $(X,\tau)$ — компактний, а $\{F_\alpha\}$ — довільна центрована система замкнених підмножин. Множини $G_\alpha = X \setminus F_\alpha$ відкриті. Жодна скінченна система цих множин $G_{\alpha_n}, 1 \le n < \infty$ не покриває $X$, оскільки

$$\forall n \in N \bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} \ne \varnothing \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X \setminus \bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \left(X \setminus F_{\alpha_i}\right) = \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i} \ne X \setminus \varnothing = X .$$

Отже, оскільки $(X,\tau)$ — компактний простір, система $\{G_\alpha\}$ не може бути покриттям компактного простору. Інакше ми могли б вибрати із системи $\{G_\alpha\}$ скінченне підпокриття $\{G_{\alpha_1},...,G_{\alpha_n}\}$, а це означало б, що $\bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} = \varnothing$. Але, якщо $\{G_\alpha\}$ — не покриття, то $\bigcap_{\alpha} F_\alpha \ne \varnothing$:

$$\bigcup_{\alpha} G_\alpha \ne X \Rightarrow X \setminus \bigcup_{\alpha} G_\alpha \ne X \setminus X = \varnothing \Rightarrow \bigcap_{\alpha} \left(X \setminus G_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha} F_\alpha \ne \varnothing .$$

*Достатність.* Припустимо, що довільна центрована система замкнених множин із $X$ має непорожній перетин. Нехай $\{G_\alpha\}$ — відкрите покриття $(X,\tau)$. Розглянемо множини $F_\alpha = X \setminus G_\alpha$. Тоді

$$\bigcup_{\alpha} G_{\alpha} = X \Rightarrow X \setminus \bigcup_{\alpha} G_{\alpha} = X \setminus X = \varnothing \Rightarrow \bigcap_{\alpha} \left( X \setminus G_{\alpha} \right) = \bigcap_{\alpha} F_{\alpha} = \varnothing .$$

Це означає, що система $\{F_{\alpha}\}$ не є центрованою, тобто існують множини $F_1, F_2, ..., F_N$, такі що

$$\bigcap_{i=1}^{N} F_i = \varnothing \Rightarrow X \setminus \bigcap_{i=1}^{N} F_i = X \setminus \varnothing = X \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{N} G_i = X .$$

Отже, із покриття $\{G_{\alpha}\}$ ми виділили скінчену підсистему

$$\{G_1, ..., G_N\} = \{X \setminus F_1, ..., X \setminus F_N\},$$

таку що $\bigcup_{\alpha=1}^{N} G_{\alpha} = X$. Це означає, що простір $(X, \tau)$ є компактним. ■

**Озн. 5.7.** *Множина $M \subset X$ називається* ***компактною (бікомпактною)****, якщо топологічний підпростір $(M, \tau_M)$, що породжується індукованою топологією, є компактним.*

**Озн. 5.8.** *Множина $M \subset X$ називається* ***відносно компактною (відносно бікомпактною)****, якщо її замикання $\bar{M}$ є компактною множиною.*

**Озн. 5.9.** *Компактний і хаусдорфів простір називається* ***компактом*** (***бікомпактом***).

**Озн. 5.10.** *Топологічний простір $(X, \tau)$ називається* ***зліченно компактним****, якщо із його довільного зліченного відкритого покриття можна виділити скінченне підпокриття (умова Бореля).*

**Озн. 5.11.** *Топологічний простір $(X, \tau)$ називається* ***секвенційно компактним****, якщо довільна нескінченна послідовність його елементів містить збіжну підпослідовність (умова Больцано-Вейєрштрасса).*

**Теорема 5.4 (перший критерій зліченної компактності).** *Для того щоб простір* $(X,\tau)$ *був зліченно компактним необхідно і достатньо, щоб кожна його нескінченна підмножина мала принаймні одну строгу граничну точку, тобто точку, в довільному околі якої міститься нескінченна кількість точок підмножини.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай $(X,\tau)$ — зліченно компактний простір, а $M$ — довільна нескінченна множина в $X$. Припустимо, усупереч твердженню, що $M$ не має жодної строгої граничної точки. Розглянемо послідовність замкнених множин $\Phi_n \subset M$, таку що $\Phi_n \subset \Phi_{n+1}$. Візьмемо $x_n \in \Phi_n$. За припущенням нескінченна послідовність точок $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ не має строгих граничних точок. Побудуємо скінченну систему підмножин $\{F_n, n \in \mathbb{N}\}$, поклавши $F_n = \{x_n, x_{n+1}, ..., ...\}$. Із структури цих множин випливає, що будь-яка скінченна сукупність точок $F_n$ має непорожній перетин, всі множини $F_n$ є замкненими, але $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \varnothing$. Отже, ми побудували зліченну центровану систему замкнених множин, перетин яких порожній, що суперечить припущенню, що простір $(X,\tau)$ зліченно компактним.

*Достатність.* Нехай в просторі $(X,\tau)$ кожна нескінченна множина $M$ має строгу граничну точку. Доведемо, що простір $(X,\tau)$ є зліченно компактним. Для цього достатньо перевірити, що будь-яка зліченна центрована система $\{F_n\}$ замкнених множин має непорожній перетин. Побудуємо множини $\hat{F}_m = \bigcap_{k=1}^{m} F_k$.

Оскільки система $\{F_n\}$ є центрованою, то замкнені непорожні множини $\hat{F}_m$ утворюють послідовність $\hat{F}_1, \hat{F}_2, ..., \hat{F}_m, ...$, що не зростає. Очевидно, що $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \hat{F}_m$. Можливі два варіанти: серед множин $\hat{F}_m$ є лише скінченна кількість попарно різних множин, або нескінченна кількість таких множин. Розглянемо ці варіанти окремо.

1). Якщо серед множин $\hat{F}_m$ є лише скінченна кількість попарно різних множин, то починаючи з деякого номера $m_0$ виконується умова $F_{m_0} = F_{m_0+1} = \ldots$. Тоді твердження доведено, оскільки $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \hat{F}_m = \hat{F}_{m_0} \neq \varnothing$.

2). Якщо серед множин $\hat{F}_m$ є лише нескінченна кількість попарно різних множин, то можна вважати, що $\hat{F}_m \setminus \hat{F}_{m+1} \neq \varnothing$. Оберемо по одній точці з кожної множини $\hat{F}_m \setminus \hat{F}_{m+1}$. Отже, ми побудували нескінченну множину різних точок, яка, за умовою, має граничну точку $x^*$. Всі точки $x_m, x_{m+1}, ...$ належать множинам $\hat{F}_m$. Отже, $x^* \in \hat{F}'_m \quad \forall m \in \mathbb{N}$, до того ж $\overline{\hat{F}_m} = \hat{F}_m$. З цього випливає, що $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \hat{F}_m \neq \varnothing$. ■

**Зауваження 5.1.** Вимогу наявності строгої граничної точки можна замінити аксіомою $T_1$. Інакше кажучи, в досяжних просторах будь-яка гранична точка є строгою. Припустимо, що $X$ — досяжний простір, а гранична точка $x$ множини $A$ не є строгою, і тому існує деякий окіл $U$, що містить лише скінчену кількість точок множини $A$, що відрізняються від $x$. Розглянемо множину

$V = U \setminus \left( \left( A \cap U \right) \setminus \{x\} \right)$, тобто різницю між множиною $U$ і цим скінченним перетином. Оскільки простір $X$ є досяжним, то в ньому будь-яка скінченна множина є замкненою. Отже, множина $V$ є відкритою ($V = X \cap \left( U \setminus \{ A \cap U \setminus \{x\} \} \right) = U \cap \left( X \setminus \left( U \cap A \setminus \{x\} \right) \right)$, містить точку $x$, а перетин множин дорівнює $A \cap V = \{x\}$ або $\varnothing$. Це суперечить тому, що $x$ — гранична точка множини $A$.

**Зауваження 5.2.** Чому не можна взагалі зняти умову наявності строгої граничної точки? Розглянемо як контрприклад топологію, що складається з натуральних чисел на відрізку $[1, n]$, тобто $\tau = \{ \varnothing, \mathbb{N}, [1, n] \cap \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \}$. Цей простір не є зліченно компактним (порушується другий критерій компактності). Розглянемо нескінченну множину $A \subset \mathbb{N}$ і покладемо $n = \min A$. Тоді будь-який $m \in A \setminus \{n\}$ є граничною точкою множини $A$, тобто $\mathbb{N}$ є слабко зліченно компактним простором.

**Теорема 5.5 (другий критерій зліченної компактності).** *Для того щоб досяжний простір $(X, \tau)$ був зліченно компактним необхідно і достатньо, щоб кожна нескінченна множина точок із $X$ мала принаймні одну граничну точку (такі простори називаються слабко зліченно компактними). Інакше кажучи, в досяжних просторах слабка зліченна компактність еквівалентна зліченній компактності.*

Доведення. *Необхідність.* Припустимо, що $A$ — злічена підмножина $X$, що не має граничних точок (це не обмежує загальності, оскільки в будь-якій нескінченій підмножині ми можемо вибрати злічену підмножину). Множина $A$ є замкненою в $X$ (оскільки будь-яка точка множини $\overline{A} \setminus A$ є граничною точкою множини $A$, яка за припущенням не має граничних точок, тому $\overline{A} = A$). Нехай $A = \{a_1, a_2, ...\}$ і $A_n = \{a_n, a_{n+1}, ...\}$. Із сказаного вище випливає, що $A_n = \overline{A}_n$, інакше $A' \neq \varnothing$. Покладемо $G_n = X \setminus A_n$. Ця множина є доповненням замкненої множини $A_n$, тому вона є відкритою. Розглянемо послідовність множин $G_n$. Вона зростає і покриває $X$, тому що кожна точка $x$ із множини $X \setminus A$ належить $G_1$, а значить, усім множинам $G_n$, а якщо $x \in A$, то вона дорівнює якомусь $a_N$, отже, належить $G_{N+1}$. Таким чином, послідовність множин $G_n$ є покриттям, але вона не може містити скінченне підпокриття $\{G_{i_1}, G_{i_2}, ..., G_{i_m}\}$, оскільки об'єднання елементів цього скінченного підпокриття було б найбільшим серед усіх множин $G_n$ (які утворюють зростаючу послідовність).

$$G_1 \subset G_2 \subset ... \subset \bigcup_{k=1}^{m} G_{i_k} = G_N = X \ .$$

У цьому випадку об'єднання $G_N = \bigcup_{k=1}^{m} G_{i_k}$ не може містити усі елементи $a_i$, номер яких перевищує $N$ (за конструкцією), отже, воно не покриває $X$. У такому випадку простір $X$ не є зліченно компактним. Отримане протиріччя доводить бажане.

*Достатність*. Припустимо, що простір $X$ не є зліченно компактним. Значить, існує зліченне відкрите покриття $\{G_n\}_{n \in \Gamma}$, що не містить скінченного підпокриття. Оскільки жодна сукупність множин $\{G_1, G_2, ..., G_i\}$ не є покриттям, виберемо з множин $X \setminus \bigcup_{k=1}^{i} G_i$ по одній точці $x_i$ і утворимо із них множину $A$.

Розглянемо довільну точку $x \in X$. Оскільки $\{G_n\}_{n\in\Gamma}$ — покриття простору $X$, точка $x$ належить якійсь множині $G_N$, яка в свою чергу може містити лише такі точки $x_i$ із множини $A$, номер яких задовольняє умові $i < N$ (оскільки за означенням точка $x_i$ не належить жодному $G_j$, якщо $j \le i$). Отже, множина $G_N$ є околом точки $x$, перетин якої із множиною $A$ є лише скінченним. В той же час, оскільки простір є досяжним, в околі граничної точки будь-якої множини повинно міститись нескінченна кількість точок цієї множини. Отже, точка $x$ не є граничною точкою множини $A$. Це твердження є слушним для будь-якої точки $x$, отже, множина $A$ не має жодної граничної точки. Отримане протиріччя доводить бажане. ■

**Теорема 5.6 (про еквівалентність компактності і зліченої компактності).** *Для топологічного простору* $(X, \tau)$ *із зліченною базою компактність еквівалентна зліченній компактності.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай $(X, \tau)$ — компактний простір. Тоді із *довільного* відкритого покриття можна виділити скінченне покриття. Значить, скінченне покриття можна виділити із зліченного відкритого покриття.

*Достатність.* Нехай $(X, \tau)$ є зліченно компактним простором, а $S = \{U_\alpha, \alpha \in A\}$ — його довільне відкрите покриття. Оскільки простори із зліченою базою мають властивість Ліндельофа (теорема 5.1), то покриття $S$

містить підпокриття $S'$, яке, внаслідок, зліченної компактності простору $(X,\tau)$ містить скінченне підпокриття $S''$. Отже, простір $(X,\tau)$ є зліченно компактним. ■

**Теорема 5.7 (про еквівалентність компактності, секвенційної компактності і зліченної компактності).** *Для досяжних просторів із зліченою базою компактність, секвенційна компактність і злічення компактність є еквівалентними.*

*Доведення.* З огляду на теорему 5.6, достатньо показати, що злічена компактність в досяжному просторі із зліченною базою еквівалентна секвенційній компактності.

*Необхідність.* Розглянемо зліченно компактний простір $(X,\tau)$. Нехай $A=\{x_n\}_{n\in\Gamma}$ — довільна нескінченна послідовність (тобто послідовність, що містить нескінченну кількість різних точок), а простір є зліченно компактним. Отже, за теоремою 5.5, множина $A$ має граничну точку $x^*$. Розглянувши зліченну локальну базу околів $\{G_k\}_{k\in\Gamma}$ точки $x^*$, так що $G_{k+1}\subset G_k$, можна виділити послідовність $x_{n_k}$, що збігається до $x^*$. Отже, простір $(X,\tau)$ є секвенційно компактним.

*Достатність.* Нехай простір $(X,\tau)$ є секвенційно компактним. Із теореми 5.4 випливає, що будь-яка зліченна нескінченна підмножина простору $X$ має строгу граничну точку. Це означає, що будь-яка нескінченна зліченна послідовність має граничну точку, тобто із неї можна виділити збіжну підпослідовність.

**Література**

1. Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. Общая топология. — М.: Высшая школа, 1979, с. 225–238.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1981, с. 98–105.
3. Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986, с. 195–215.

## 6. Метричні простори

Численні поняття і теореми математичного аналізу використовують поняття відстані між точками простору. Зокрема, це стосується границі і неперервності. В багатьох випадках самі теореми та їх доведення залежать не від способу завдання метрики, а лише від їхніх властивостей: невід’ємності, симетрії і нерівності трикутника.

**Озн. 6.1.** *Нехай* $X$ *— довільна множина. Відображення* $\rho : X \times X \to R^+$ *називається* ***метрикою****, якщо* $\forall x, y, z \in X$ *воно має такі властивості (аксіоми метрики):*

1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (аксіома тотожності);

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксіома симетрії);

3) $\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (нерівність трикутника).

**Озн. 6.2.** *Метричним простором називається пара* $(X, \rho)$*, де* $X$ *— множина-носій, а* $\rho$ *— метрика.*

**Приклад 6.1.** $\left( R^n, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \right)$.

**Приклад 6.2.** $\left( C[a,b], \max_{[a,b]} |x(t) - y(t)| \right)$.

**Озн. 6.3.** ***Відкритою кулею*** *радіуса* $\varepsilon > 0$ *з центром в точці* $x_0 \in X$ *називається множина*

$$S(x_0, \varepsilon) = \{ x \in X : \rho(x, x_0) < \varepsilon \}.$$

**Озн. 6.4.** ***Замкненою кулею*** *радіуса* $\varepsilon > 0$ *з центром в точці* $x_0 \in X$ *називається множина*

$$S^*(x_0, \varepsilon) = \{ x \in X : \rho(x, x_0) \le \varepsilon \}.$$

**Озн. 6.5.** *Множина* $G \subset X$ *називається відкритою в метричному просторі* $(X, \rho)$, *якщо* $\forall x \in G \ \exists S(x, r) \subset G$.

**Озн. 6.6.** *Множина* $G \subset X$ *називається замкненою, якщо її доповнення є відкритою множиною.*

**Озн. 6.7.** *Множина метричного простору є* ***обмеженою за відстанню****, або просто* ***обмеженою****, якщо воно міститься в деякій кулі:* $\exists S(x, r) : M \subset S(x, r)$.

**Озн. 6.8.** *Точка* $x$ *метричного простору* $(X, \rho)$ *називається* ***границею*** *послідовності точок* $x_n \in X$, *якщо* $\rho(x_n, x) \to 0$ *при* $n \to \infty$. *Така збіжність називається збіжністю за відстанню (або за метрикою).*

Цей факт записується так: $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

**Приклад 6.3.** В просторі $\left(R^1, |x - y|\right)$ відкритою кулею $S(x_0, r)$ є інтервал $(x_0 - r, x_0 + r)$, а замкненою кулею — сегмент $[x_0 - r, x_0 + r]$.

**Приклад 6.4.** В просторі $\left(R^2, \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{2} (x_i - y_i)^2}\right)$ відкритою кулею $S(x_0, r)$ є коло радіуса $r$ з центром в точці $x_0$.

**Приклад 6.5.** В просторі $\left(R^2, |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|\right)$ одинична куля є ромбом з вершинами (0,1), (1,0), (0,–1) і (0,-1).

**Приклад 6.6.** В просторі $\left(C[a, b], \max\limits_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|\right)$ околом є смуга, що складається із функцій, які задовольняють умові $\forall t \in [a, b] \ |x(t) - y(t)| < r$.

**Лема 6.1.** *Для довільних точок* $x, x', y, y'$ *метричного простору* $(X, \rho)$ *виконується нерівність*

$$\left|\rho(x', y') - \rho(x, y)\right| \le \rho(x, x') + \rho(y, y').$$

*Доведення.* Із нерівності трикутника випливає:

$$\rho(x', y') \le \rho(x', x) + \rho(x, y') \le \rho(x, x') + \rho(x, y) + \rho(y, y').$$

Отже,

$$\rho(x', y') - \rho(x, y) \le \rho(x, x') + \rho(y, y').$$

Аналогічно,

$$\rho(x, y) \le \rho(x, x') + \rho(x', y) \le \rho(x, x') + \rho(x', y') + \rho(y', y).$$

Звідси випливає, що

$$\rho(x, y) - \rho(x', y') \le \rho(x, x') + \rho(y, y').$$

Таким чином,

$$\left|\rho(x', y') - \rho(x, y)\right| \le \rho(x, x') + \rho(y, y'). \ \blacksquare$$

**Лема 6.2.** *Метрика* $\rho(x, y)$ *є неперервною функцію своїх аргументів, тобто якщо* $x_n \to x, y_n \to y$, *то* $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y)$.

*Доведення.* Із леми 6.1 випливає, що при $x_n \to x_0, y_n \to y_0$

$$\left|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_0, y_0)\right| \le \rho(x_n, x_0) + \rho(y_n, y_0) \to 0. \ \blacksquare$$

**Теорема 6.1.** *Відкрита куля* $S(a,r)$ *в метричному просторі* $(X, \rho)$ *є відкритою множиною в топології метричного простору, що породжена його метрикою.*

*Доведення.* Розглянемо довільну точку $x \in S(a, r)$.

$$x \in S(a, r) \Rightarrow \rho(x, a) < r.$$

Покладемо $\varepsilon = r - \rho(x, a)$. Розглянемо довільну точку $y \in S(x, \varepsilon)$.

$y \in S(x, \varepsilon) \Rightarrow \rho(y, x) < \varepsilon.$

$\rho(y, a) \le \rho(y, x) + \rho(x, a) < r \Rightarrow y \in S(a, r) \Rightarrow S(x, \varepsilon) \subset S(a, r)$

Таким чином, точка $x$ є внутрішньою точкою множини $(a, r)$, тобто $S(a, r)$ — відкрита множина. ■

**Теорема 6.2.** *Точка x належить замиканню $\bar{A}$ множини $A \subset X$ в топології, що індукована на X метрикою $\rho$, тоді і лише тоді, якщо існує послідовність точок множини A, що збігається до точки x.*

Доведення. *Необхідність.*

$$x \in \bar{A} \Rightarrow \forall n \in N \ \exists x_n \in A \cap S\left(x, \frac{1}{n}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho(x, x_i) < \frac{1}{n} \Rightarrow x = \lim_{n \to \infty} x_n .$$

*Достатність.*

$$x \notin \bar{A} \Rightarrow \exists r > 0 : A \cap S(x, r) = \varnothing \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall x' \in A \ \rho(x, x') \ge r \Rightarrow \nexists \{x_n\} : \lim_{n \to \infty} x_n = x . \ ■$$

**Наслідок 1.** *Теорема 6.2 стверджує, що кожна точка дотику множини в метричному просторі є границею деякої послідовності елементів цієї множини. Отже, топологію метричного простору можна описати не лише за допомогою куль, а й за допомогою збіжних послідовностей.*

**Наслідок 2.** *Множина є замкненою, якщо всі послідовності її точок збігаються лише до точок цієї ж множини.*

**Теорема 6.3.** *Замкнена куля $S^*(a, r)$ є замкненою множиною в топології метричного простору, що породжена його метрикою.*

Доведення. Нехай $x_n \in S^*(a, r)$.

$x_n \in S^*(a, r) \Rightarrow \rho(x_n, a) \le r \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n, a) = \rho\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n, a\right) = \rho(x, a) \le r \Rightarrow x \in S^*(a, r)$.

Отже, всі граничні точки множини $S^*(a, r)$, які є точками її дотику, належать кулі $S^*(a, r)$. ■

**Озн. 6.9.** *Послідовність* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *точок метричного простору* $(X, \rho)$ *називається фундаментальною, якщо* $\rho(x_n, x_m) \to 0$ *при* $n \to \infty, m \to \infty$.

**Лема 6.3.** *Будь-яка збіжна послідовність метричного простору є фундаментальною.*

*Доведення.* Нехай $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Тоді

$$\rho(x_n, x_m) \le \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) \to 0 \text{ при } n, m \to \infty.$$

Отже, послідовність є фундаментальною. ■

**Лема 6.4.** *Будь-яка фундаментальна послідовність точок метричного простору є обмеженою.*

*Доведення.* Задамо $\varepsilon > 0$ і підберемо натуральне число $N$ так, щоб $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ при $n, m \ge N$. Зокрема, $\rho(x_n, x_N) < \varepsilon$ при $n \ge N$. Введемо позначення

$$r = \max\{\varepsilon, \rho(x_1, x_N), \rho(x_2, x_N), ..., \rho(x_{N-1}, x_N)\}.$$

Тепер при всіх $n = 1, 2, ...$

$$\rho(x_n, x_N) \le r.$$

Інакше кажучи,

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S^*(x_N, r).$$

Замінюючи число $r$ на будь-яке число $r' > r$, можна заключити послідовність в довільну відкриту кулю:

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S(x_N, r'). ■$$

**Література**

1. Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. Общая топология. — М.: Высшая школа, 1979. — с.47–50.
2. Садовничий В,А. Теория операторов. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. — с. 60–69.

## 7. Повні метричні простори

**Озн. 7.1.** *Метричний простір називається* ***повним****, якщо в ньому будь-яка фундаментальна послідовність має границю.*

**Приклад 7.1.** $\left(R^n, \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}\right)$.

**Приклад 7.2.** $\left(C[a,b], \max_{[a,b]}\left|x(t) - y(t)\right|\right)$.

**Озн. 7.2.** *Бієктивне відображення* $\varphi$ *одного метричного простору* $(E_1, \rho_1)$ *на інший* $(E_2, \rho_2)$ *називається ізометрією, якщо*

$$\forall x_1, x_2 \in E_1 \ \rho_1(x_1, x_2) = \rho_2(\varphi(x_1), \varphi(x_2)).$$

**Озн. 7.3.** *Метричні простори, між якими існує ізометрія, називаються ізометричними.*

**Озн. 7.4.** *Повний метричний простір* $(\tilde{E}, \tilde{\rho})$ *називається* ***поповненням*** *метричного простору* $(E, \rho)$*, якщо*

1) $E \subset \tilde{E}$;
2) $\overline{E} = \tilde{E}$.

**Теорема про поповнення метричного простору (Хаусдорф).** *Будь-який метричний простір має поповнення, єдине з точністю до ізометрії, що залишає точки простору нерухомими.*

**Лема 7.1.** *Якщо фундаментальна послідовність містить збіжну підпослідовність, то сама послідовність збігається до тієї ж границі.*

Доведення. Припустимо, що $\lim_{n_k \to \infty} \rho\left(x_{n_k}, x_0\right) = 0$, тобто

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N_1(\varepsilon) > 0 : \forall n \geq N_1 \;\; \rho\left(x_{n_k}, x_0\right) < \varepsilon$$

За нерівністю трикутника

$$\rho(x_n, x) \leq \rho\left(x_n, x_{n_k}\right) + \rho\left(x_{n_k}, x\right).$$

Оскільки послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною,

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon) > 0 : \forall n, m \geq N \;\; \rho(x_n, x_m) < \varepsilon .$$

Таким чином,

$$\forall \varepsilon > 0\, \forall n, n_k \geq \max(N_1, N_2)$$

$$\rho(x_n, x_0) \leq \rho\left(x_n, x_{n_k}\right) + \rho\left(x_{n_k}, x_0\right) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

■

**Лема 7.2.** *Будь-яка підпослідовність фундаментальної послідовності є фундаментальною.*

Доведення. За нерівністю трикутника

$$\rho\left(x_{n_k}, x_{n_l}\right) \leq \rho\left(x_{n_k}, x_n\right) + \rho\left(x_n, x_{n_l}\right).$$

Оскільки послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною,

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon) > 0 : \forall n, m \geq N \;\; \rho(x_n, x_m) < \varepsilon .$$

Отже,

$$\forall \varepsilon > 0\, \forall n, n_k, n_l \geq N$$

$$\rho\left(x_{n_k}, x_{n_l}\right) \leq \rho\left(x_{n_k}, x_n\right) + \rho\left(x_n, x_{n_l}\right) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

■

**Теорема 7.1 (принцип вкладених куль).** *Для того щоб метричний простір був повним, необхідно і достатньо, щоб у ньому будь-яка послідовність замкнених вкладених одна в одну куль, радіуси яких прямують до нуля, мала непорожній перетин.*

Доведення. Необхідність. Нехай $(X,\rho)$ — повний метричний простір, а $S_1^*(x_1,r_1) \supset S_2^*(x_2,r_2) \supset \ldots$ — вкладені одна в одну замкнені кулі.

Послідовність їх центрів є фундаментальною, оскільки

$$\rho(x_n,x_m) < r_n \text{ при } m > n \text{, а } r_n \to 0 \text{ при } n \to \infty .$$

Оскільки $(X,\rho)$ — повний метричний простір, існує елемент $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $x \in X$ .

Покажемо, що $x$ належить всім кулям $S_n^*(x_n,r_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, тобто $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} S^*(x_n,r_n)$. Дійсно, оскільки $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0 : \forall n \geq N \quad \rho(x_n,x) < \varepsilon .$$

Значить, в довільному околі точки $x$ знайдеться нескінченна кількість точок із послідовності $\{x_n\}$, починаючи з деякого номера $N$. Оскільки кулі вкладені одна в одну, ці точки належать всім попереднім кулям $S_1^*, S_2^*, \ldots, S_{N-1}^*$. Отже, для довільного $n$ точка $x$ є точкою дотику множини $S_n^*$, тобто належить його замиканню. Оскільки кожна куля є замкненою, точка $x$ належить всім $S_n^*$. Це означає, що

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n^* .$$

Достатність. Покажемо, що якщо $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальна послідовність, то вона має границю $x \in X$ .

1. Оскільки послідовність $\{x_n\}$ є фундаментальною, то $\forall \varepsilon > 0\, \exists n_1 > 0 : \forall n \geq n_1 \quad \rho\left(x_n, x_{n_1}\right) < \varepsilon$. Поклавши $\varepsilon = \frac{1}{2}$, ми можемо вибрати точку $x_{n_1}$ так, що $\rho\left(x_n, x_{n_1}\right) < \frac{1}{2}$ для довільного $n > n_1$. Зробимо точку $x_{n_1}$ центром замкненої кулі радіуса 1: $S_1^*\left(x_{n_1}, 1\right)$.
2. Оскільки підпослідовність $\{x_n\}_{n=n_1}^{\infty}$ є фундаментальною (за лемою 7.2), то поклавши $\varepsilon = \frac{1}{2^2}$, можна вибрати точку $x_{n_2}$ таку, що $\rho\left(x_n, x_{n_2}\right) < \frac{1}{2^2}$ для довільного $n > n_2 > n_1$. Зробимо точку $x_{n_2}$ центром замкненої кулі радіуса $\frac{1}{2}$: $S_2^*\left(x_{n_2}, \frac{1}{2}\right)$.

...

k. Нехай $x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_{k-1}}$, де $n_1 < n_2 < ... < n_{k-1}$ уже вибрані. Тоді, оскільки підпослідовність $\{x_n\}_{n=n_{k-1}}^{\infty}$ є фундаментальною, покладемо $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$ і виберемо точку $x_{n_k}$ так, щоб виконувалися умови $\rho\left(x_n, x_{n_k}\right) < \frac{1}{2^k}$ для довільного $n \geq n_k > n_{k-1}$. Як і раніше, будемо вважати точку $x_{n_k}$ центром замкненої кулі радіуса $\frac{1}{2^{k-1}}$: $S_k^*\left(x_{n_k}, \frac{1}{2^{k-1}}\right)$.

Продовжуючи цей процес, ми отримаємо послідовність замкнених куль, радіуси яких прямують до нуля. Покажемо, що ці кулі вкладаються одна в одну, тобто

$$S_{k+1}^{*}\left(x_{n_{k+1}},\frac{1}{2^{k}}\right)\subset S_{k}^{*}\left(x_{n_k},\frac{1}{2^{k-1}}\right).$$

Нехай точка $y\in S_{k+1}^{*}\left(x_{n_{k+1}},\frac{1}{2^{k}}\right)$. Значить, $\rho\left(y,x_{n_{k+1}}\right)\le\frac{1}{2^{k}}$. За нерівністю трикутника

$$\rho\left(y,x_{n_k}\right)\le\rho\left(y,x_{n_{k+1}}\right)+\rho\left(x_{n_{k+1}},x_{n_k}\right).$$

Оскільки $n_{k+1}>n_k$, то $\rho\left(x_{n_{k+1}},x_{n_k}\right)<\frac{1}{2^{k}}$. Значить,

$$\rho\left(y,x_{n_k}\right)\le\frac{1}{2^{k}}+\frac{1}{2^{k}}=\frac{2}{2^{k}}=\frac{1}{2^{k-1}}.$$

Інакше кажучи,

$$y\in S_{k}^{*}\left(x_{n_k},\frac{1}{2^{k-1}}\right).$$

Таким чином, ми побудували послідовність вкладених одна в одну замкнених куль, радіуси яких прямують до нуля. За припущенням, в просторі $(X,\rho)$ існує точка $x$, загальна для всіх таких куль: $x\in\bigcap_{k=1}^{\infty}S_{k}^{*}\left(x_{n_k},\frac{1}{2^{k-1}}\right)$. Крім того, за побудовою, $\rho\left(x_{n_k},x\right)=\frac{1}{2^{k-1}}\to 0$, коли $k\to\infty$. Таким чином, фундаментальна послідовність $\{x_n\}$ містить підпослідовність $\{x_{n_k}\}$, що збігається до деякої точки в просторі $(X,\rho)$. Із леми 7.1 випливає, що і вся послідовність $\{x_n\}$ прямує то тієї ж точки. Таким чином, простір $(X,\rho)$ є повним. ■

**Зауваження**. Покажемо, що умову $r_n \to 0$ зняти не можна. Розглянемо метричний простір $(N,\rho)$, де $N$ — множина натуральних чисел, а

$$\rho(m,n)=\begin{cases}1+\dfrac{1}{n+m}, \text{ якщо } n\neq m,\\ 0, \text{ якщо } n=m.\end{cases}$$

Визначимо послідовність замкнених куль з центрами в точках $n$ і радіусом $1+\dfrac{1}{2n}$.

$$S^*\left(n,1+\frac{1}{2n}\right)=\left\{m:\rho(m,n)\leq 1+\frac{1}{2n}\right\}=\{n,n+1,\ldots\},\ n=1,2,\ldots$$

Ці кулі є вкладеними одна в одну і замкненими, простір є повним, але перетин куль є порожнім (яке б число ми не взяли, знайдеться нескінченна кількість куль, які лежать правіше цієї точки). Отже, необхідні умови в принципі вкладених куль не виконуються. ■

**Озн. 7.5.** *Підмножина $M$ метричного простору $(X,\rho)$ називається* ***множиною першої категорії****, якщо його можна подати у вигляді об'єднання не більш ніж зліченої кількості ніде не щільних множин.*

**Озн. 7.6.** *Підмножина $M$ метричного простору $(X,\rho)$ називається* ***множиною другої категорії****, якщо вона не є множиною першої категорії.*

**Теорема 7.2 (теорема Бера про категорії).** *Нехай* $(X,\rho)$ — *непорожній повний метричний простір, тоді* $X$ *є множиною другої категорії.*

Доведення. Припустимо супротивне, тобто

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n ,$$

і кожна множина $E_n$, $n = 1, 2, \ldots$ є ніде не щільною в $X$. Нехай $S_0$ — деяка замкнена куля радіуса 1.

Оскільки множина $E_1$ є ніде не щільною, існує замкнена куля $S_1$, радіус якої менше $\frac{1}{2}$, така що

$$S_1 \subset S_0 \text{ і } S_1 \cap E_1 = \varnothing .$$

(Якщо існує куля радіуса більше $\frac{1}{2}$, що задовольняє таким умовам, то ми виберемо в ній кулю, радіуса менше $\frac{1}{2}$.)

Оскільки множина $E_2$ є ніде не щільною, існує замкнена куля $S_2$, радіус якої менше $\frac{1}{2^2}$, така що

$$S_2 \subset S_1 \text{ і } S_2 \cap E_2 = \varnothing .$$

Продовжуючи цей процес, ми отримаємо послідовність вкладених одна в одну замкнених куль $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, радіуси яких прямують до нуля. За принципом вкладених куль існує точка $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n \cap X$. Оскільки за побудовою $S_n \cap E_n = \varnothing$, то

$x \notin E_n \ \forall n = 1, 2, \ldots$. Значить, $x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Це суперечить припущенню, що $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. ■

**Озн. 7.7.** *Відображення* $g : (X, \rho) \to (X, \rho)$ *називається* ***стискаючим****, якщо існує таке число* $0 < \alpha < 1$*, що* $\rho(g(x), g(y)) \le \alpha \rho(x, y)$ *для довільних* $x, y \in X$.

**Теорема 7.3.** *Будь-яке стискаюче відображення є неперервним.*

*Розв'язок.* Нехай $x_n \to x$, а $g : X \to X$ є стискаючим відображенням. Тоді

$$0 \le \rho(g(x_n), g(x)) \le \alpha \rho(x_n, x) \to 0, n \to \infty.$$

Отже,

$$g(x_n) \to g(x), \text{ коли } x_n \to x. \ ■$$

**Теорема 7.4 (принцип стискаючих відображень Банаха)**. *Будь-яке стискаюче відображення повного метричного простору* $(X, \rho)$ *в себе має лише одну нерухому точку, тобто* $\exists! x \in X : g(x) = x$.

*Розв'язок.* Нехай $x_0$ — деяка точка із $X$. Визначимо послідовність точок $\{x_n\}$ за таким правилом:

$$x_1 = g(x_0), \ldots, x_n = g(x_{n-1}).$$

Покажемо, що ця послідовність є фундаментальною. Дійсно, якщо $m > n$, то

$$\rho(x_n, x_m) = \rho(g(x_{n-1}), g(x_{m-1})) \le \alpha \rho(x_{n-1}, x_{m-1}) \le \ldots \le$$

$$\le \alpha^n \rho\left(x_0, x_{m-n}\right) \le \alpha^n \left\{\rho\left(x_0, x_1\right) + \rho\left(x_1, x_2\right) + \ldots + \rho\left(x_{m-n-1}, x_{m-n}\right)\right\} \le$$

$$\le \alpha^n \rho\left(x_0, x_1\right)\left\{1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{m-n-1}\right\} \le \alpha^n \rho\left(x_0, x_1\right)\frac{1}{1-\alpha}$$

.

Таким чином, оскільки $0 < \alpha < 1$,

$$\rho\left(x_n, x_m\right) \to 0, n \to \infty, m \to \infty, m > n .$$

Внаслідок повноти простору $\left(X, \rho\right)$ в ньому існує границя послідовності $\left\{x_n\right\}$. Позначимо її через $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Із теореми 7.3 випливає, що

$$g\left(x\right) = \lim_{n\to\infty} g\left(x_n\right) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x .$$

Отже, нерухома точка існує.

Доведемо її єдиність. Якщо $g\left(x\right) = x$ і $g\left(y\right) = y$, то $\rho\left(x, y\right) \le \alpha\rho\left(x, y\right)$, тобто $\rho\left(x, y\right) = 0$. за аксіомою тотожності це означає, що $x = y$. ■

**Наслідок 7.1.** Умову $\alpha \le 1$ не можна замінити на $\alpha < 1$.

*Доведення.* Якщо відображення $g : \left(X, \rho\right) \to \left(X, \rho\right)$ має властивість $\rho\left(g\left(x\right), g\left(y\right)\right) < \rho\left(x, y\right) \quad \forall x, y \in X, x \ne y$, то нерухомої точки може не бути. Дійсно, розглянемо простір $\left(\left[1, \infty\right), \left|x - y\right|\right)$ і визначимо відображення $g\left(x\right) = x + \dfrac{1}{x}$. Тоді $\rho\left(g\left(x\right), g\left(y\right)\right) = \left|x + \dfrac{1}{x} - y - \dfrac{1}{y}\right| < \left|x - y\right|$. Оскільки для жодного $x \in \left[1, \infty\right)$ $g\left(x\right) = x + \dfrac{1}{x} \ne x$, нерухомої точки немає. ■

**Література**

1. Садовничий В,А. Теория операторов. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. — с.41–47.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. (5-е изд.) — М.: Наука, 1981. — с. 66–75.

## 8. Компактні метричні простори

**Озн. 8.1.** *Нехай* $A$ — *деяка множина в метричному просторі* $(X,\rho)$ *і* $\varepsilon$ — *деяке додатне число. Множина* $B$ *із цього простору називається* ***$\varepsilon$-сіткою*** *для множини* $A$, *якщо* $\forall x \in A\ \exists y \in B : \rho(x,y) < \varepsilon$.

**Озн. 8.2.** *Множина* $A$ *називається* ***цілком обмеженою***, *якщо для неї при довільному* $\varepsilon > 0$ *існує скінченна* $\varepsilon$-сітка.

**Теорема 8.1 (Хаусдорф).** *Нехай* $(X,\rho)$ — *метричний простір. Наступні твердження є еквівалентними.*

1) $(X,\rho)$ — *компактний;*
2) $(X,\rho)$ — *повний і цілком обмежений;*
3) *із довільної післідовності точок простору* $(X,\rho)$ *можна вибрати збіжну підпослідовність (**секвенціальна компактність**);*
4) *довільна нескінченна підмножина в* $X$ *має хоча б одну граничну точку (**зліченна компактність**).*

Доведення. $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$.

Покажемо, що $1 \Rightarrow 2$. Нехай $(X,\rho)$ — компактний простір. Покажемо його повноту. Нехай $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ — фундаментальна послідовність в $X$. Покладемо $A_n = \{x_n, x_{n+1}, ...\}$ і $B_n = \overline{A}_n$. Оскільки система $\{B_n\}$ є центрованою системою замкнених підмножин, то $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$ — непорожня множина. Нехай $x_0 = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$. Тоді

$\forall \varepsilon > 0\ \forall N > 0\ \exists n > N : \rho(x_0, x_n) < \varepsilon,$

$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N > 0 \, \forall n, m > N : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon,$

$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N > 0 \, \forall n, m > N :$

$\rho(x_0, x_m) \le \rho(x_0, x_n) + \rho(x_n, x_m) < 2\varepsilon.$

З цього випливає, що

$$x_0 = \lim_{n \to \infty} x_n \in X .$$

Отже, $(X, \rho)$ — повний простір.

Припустимо тепер, що простір $(X, \rho)$ не є цілком обмеженим. Інакше кажучи, припустимо, що існує таке число $\varepsilon_0 > 0$ таке, що в $X$ немає скінченної $\varepsilon_0$-сітки. Візьмемо довільну точку $x_1 \in X$ .

1) $\exists x_2 \in X$ : $\rho(x_1, x_2) > \varepsilon_0$. Інакше точка $x_1$ утворювала б $\varepsilon_0$-сітку в $X$ .
2) $\exists x_3 \in X$ : $\rho(x_1, x_3) > \varepsilon_0$ , $\rho(x_2, x_3) > \varepsilon_0$. Інакше точки $x_1$ і $x_2$ утворювали б $\varepsilon_0$-сітку в $X$ .

...

n) $\exists x_{n+1} \in X$ : $\rho(x_{n+1}, x_i) > \varepsilon_0$, $i = 1, 2, ..., n$. Інакше точки $x_1, x_2, ..., x_n$ утворювали б $\varepsilon_0$-сітку в $X$ .

Таким чином, ми побудували послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, яка не є фундаментальною, а, отже, не має границі. З цього випливає, що кожна із множин $A_n = \{x_n, x_{n+1}, ...\}$, які утворюють центровану систему, є замкненою. Їх перетин є порожнім. Це протирічить компактності простору $(X, \rho)$.

Покажемо, що $2 \Rightarrow 3$. Нехай $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — послідовність точок $X$ .

1) Виберемо в $X$ скінченну 1-сітку і побудуємо навколо кожної з точок, що її утворюють, кулю радіуса 1: $S_i\left(a_i,1\right)$, $i=1,\dots,N_1$. Оскільки $X$ є цілком обмеженою,
$$\bigcup_{i=1}^{N_1} S_i\left(a_i,1\right)=X\ .$$
З цього випливає, що принаймні одна куля, скажімо, $S_1$, містить нескінченну підпослідовність $\left\{x_n^{(1)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ послідовності $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$.

2) Виберемо в $X$ скінченну $\dfrac{1}{2}$-сітку і побудуємо навколо кожної з цих точок, що її утворюють кулю радіуса $\dfrac{1}{2}$: $S_i\left(b_i,\dfrac{1}{2}\right)$, $i=1,2,\dots,N_2$. Оскільки множина $X$ є цілком обмеженою,
$$\bigcup_{i=1}^{N_2} S_i\left(b_i,\frac{1}{2}\right)=X\ .$$
З цього випливає, що принаймні одна куля, скажімо, $S_2$, містить нескінченну підпослідовність $\left\{x_n^{(2)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ послідовності $\left\{x_n^{(1)}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

...

m) Виберемо в $X$ скінченну $\dfrac{1}{m}$-сітку і побудуємо навколо кожної з цих точок, що її утворюють кулю радіуса $\dfrac{1}{m}$: $S_i\left(c_i,\dfrac{1}{m}\right)$, $i=1,2,\dots,N_m$. Оскільки множина $X$ є цілком обмеженою,

$$\bigcup_{i=1}^{N_m} S_i\left(c_i, \frac{1}{m}\right) = X .$$

З цього випливає, що принаймні одна куля, скажімо, $S_m$, містить нескінченну підпослідовність $\left\{x_n^{(m)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ послідовності $\left\{x_n^{(m)}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Продовжимо цей процес до нескінченності.

Розглянемо діагональну послідовність $\left\{x_n^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Вона є підпослідовністю послідовності $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$. Крім того, при $m \ge n_0$ $x_m^{(m)} \in \left\{x_n^{(n_0)}\right\}_{n=1}^{\infty} \in S_{n_0}$. Це означає, що $\left\{x_n^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною і внаслідок повноти $(X, \rho)$ має границю.

Твердження $3 \Rightarrow 4$ є тривіальним, оскільки із довільної нескінченної множини можна виділити зліченну множину $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, яка внаслідок секвенціальної компактності містить збіжну підпослідовність: $\left\{x_{n_k}\right\}_{n_k=1}^{\infty} \to x_0 \in X$ .

Покажемо тепер, що $4 \Rightarrow 1$. Для цього спочатку доведемо, що множина $X$ є цілком обмеженою, тобто в ній для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує $\varepsilon$-сітка. Якщо б це було не так, то застосувавши той же прийом, що і на етапі $1 \Rightarrow 2$, ми побудували б послідовність $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, яка не має граничних точок, оскільки вона не є фундаментальною. Для кожного $n$ побудуємо скінченну $\frac{1}{n}$-сітку і розглянемо об’єднання всіх таких сіток. Воно є щільним і не більше ніж зліченним. Таким чином, простір $(X, \rho)$ є сепарабельним, отже, має зліченну базу.

Для того щоб довести компактність простору, що має зліченну базу, достатньо перевірити, що із будь-якого зліченного (а не довільного нескінченного) відкритого покриття можна виділити скінченне підпокриття. Припустимо, що $\{U_\alpha\}$ — довільне покриття простору $(X,\rho)$, а $\{V_n\}$ — його зліченна база. Кожна точка $x\in X$ міститься в деякому $U_\alpha$. За означенням бази знайдеться деяке $V_i\in\{V_n\}$ таке, що $x\in V_i\subset U_\alpha$. Якщо кожній точці $x\in X$ поставити у відповідність окіл $V_i\in\{V_n\}$, то сукупність цих околів утворить зліченне покриття множини $X$.

Залишилося довести, що із довільного зліченного відкритого покриття множини $X$ можна вибрати скінченне підпокриття. Для цього достатньо довести еквівалентне твердження для замкнених підмножин, що утворюють зліченну центровану систему.

Нехай $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ — центрована система замкнених підмножин $X$. Покажемо, що

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \varnothing .$$

Нехай $\Phi_n=\bigcap_{k=1}^{n} F_k$. Ясно, що множини $\Phi_n$ є замкненими і непорожніми, оскільки система $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ є центрованою, і

$$\Phi_1\supset\Phi_2\supset\ldots,\bigcap_{n=1}^{\infty}\Phi_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n .$$

Можливі два випадки.

1) Починаючи з деякого номера

$$\Phi_{n_0} = \Phi_{n_0+1} = \ldots = \Phi_{n_0+k} = \ldots$$

Тоді

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Phi_n = \Phi_{n_0} \neq \varnothing .$$

2) Серед $\Phi_n$ є нескінченно багато попарно різних. Достатньо розглянути випадок, коли всі вони відрізняються одна від одної. Нехай $x_n \in \Phi_n \setminus \Phi_{n+1}$. Тоді послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ є нескінченною множиною різних точок із $X$ і, внаслідок уже доведеного факту (*злічення компактність*), має хоча б одну граничну точку $x_0$. Оскільки $\Phi_n$ містить всі точки $x_n, x_{n+1}, \ldots$. то $x_0$ — гранична точка для кожної множини $\Phi_n$ і внаслідок замкнености $\Phi_n$

$$\forall n \in N \quad x_0 \in \Phi_n .$$

Отже,

$$x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Phi_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n ,$$

тобто $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ є непорожнім. ■

Література

1. Садовничий В,А. Теория операторов. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. — с.49–51.

## 9. Лінійні простори

Лінійна система є алгебраїчною структурою, яка абстрагує властивості, пов'язані із додаванням та множенням векторів евклідова простору на скаляр.

**Озн. 9.1.** ***Дійсним лінійним (векторним) простором*** називається упорядкована трійка ($E$,+, $\times$), *що складається з множини $E$, елементи якого називаються векторами, операції додавання і операції множення на дійсні числа, якщо для кожних двох її елементів $x$ та $y$ визначено їх суму $x+y \in E$, і для будь-якого $x$ та дійсного числа $\lambda$ визначено добуток $\lambda x \in E$, які задовольняють аксіоми лінійного простору*:

1. $\exists\, \theta \in E$, *що* $x+\theta = x$ *для довільного* $x \in E$;
2. $\exists(-x) \in E: \; x+(-x)=\theta$
3. $(x+y)+z = x+(y+z)$ *(асоціативність додавання);*
4. $x+y = y+x$ *(комутативність додавання);*
5. $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$ *(дистрибутивність);*
6. $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$ *(дистрибутивність);*
7. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$ *(асоціативність множення);*
8. $1 \cdot x = x$.

Властивості 1–4 означають, що лінійний простір є *абелевою* (тобто *комутативною*) *групою*.

**Приклад 9.1.** Сукупність дійсних чисел $R^1$ із звичайними арифметичними операціями додавання та множення є лінійним простором.

**Приклад 9.2.** Евклідів простір $R^n$ — сукупність векторів $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$, що складаються с дійсних чисел, є лінійним.

**Озн. 9.2.** *Лінійні простори $E$ і $F$ називаються* ***ізоморфними****, якщо між їхніми елементами можна установити взаємно-однозначну відповідність, яка узгоджена із операціями в цих просторах, тобто* $x \leftrightarrow x'$, $y \leftrightarrow y'$, $x, y \in E$, $x', y' \in F$ $\Rightarrow x + y \leftrightarrow x' + y'$, $\lambda x \leftrightarrow \lambda x'$.

Ізоморфні простори можна вважати різними реалізаціями **одного** простору.

**Приклад 9.3.** Простір $R^n$ і простір поліномів, степінь яких не перевищує $n$-1 є ізоморфними.

**Озн. 9.3.** *Числова функція $f$, визначена на лінійному просторі $E$, називається* ***функціоналом****.*

**Озн. 9.4.** *Функціонал називається* ***адитивним****, якщо*

$$\forall x, y \in E \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

**Озн. 9.5.** *Функціонал називається* ***однорідним****, якщо*

$$\forall x \in E \quad f(\alpha x) = \alpha f(x).$$

**Озн 9.6.** *Адитивний однорідний функціонал називається* ***лінійним****.*

**Озн 9.7.** *Функціонал називається* ***неперервним у точці*** *$x_0$, якщо з того що довільна послідовність $x_n$ прямує до $x_0$ випливає, що послідовність $f(x_n)$ прямує до $f(x_0)$.*

**Озн. 9.8.** *Сукупність усіх лінійних неперервних функціоналів, заданих на лінійному топологічному просторі $E$, називається простором, спряженим до $E$, і позначається як $E^*$.*

**Приклад 9.4.** $I(x) = \int\limits_a^b x(t)\,dt$ є лінійним функціоналом в $C[a,b]$.

**Озн 9.9.** *Нехай $E$ — лінійний простір. Визначений на просторі $E$ функціонал $p(x)$ називається* ***опуклим****, якщо*

$\forall x, y \in E, 0 \le \alpha \le 1: \ p(\alpha x + (1-\alpha) y) \le \alpha p(x) + (1-\alpha) p(y)$.

**Озн 9.9.** *Функціонал $p(x)$ називається* ***додатно-однорідним****, якщо* $\forall x \in E, \alpha > 0: \ p(\alpha x) = \alpha p(x)$.

**Приклад 9.4.** Будь-який лінійний функціонал є додатно-однорідним.

**Озн 9.11.** *Нехай $E$ — дійсний лінійний простір, а $E_0$ — його підпростір. До того ж на підпросторі $E_0$ заданий деякий лінійний функціонал $f_0$. Лінійний функціонал $f$, визначений на всьому просторі $E$, називається* ***продовженням*** *функціонала $f_0$, якщо* $\forall x \in E_0 \quad f(x) = f_0(x)$.

**Озн 9.12.** *Непорожня підмножина $L'$ лінійного простору $L$ називається* ***лінійним підпростором****, якщо вона сама утворює лінійний простір відносно операцій додавання і множення на число, уведених в просторі $L$.*

**Теорема Хана-Банаха.** *Нехай $p(x)$—додатно-однорідний і опуклий функціонал, визначений на дійсному лінійному просторі $L$, а $L_0$— лінійний підпростір в $L$. Якщо $f_0$ — лінійний функціонал, заданий на $L_0$ і підпорядкований на цьому підпросторі функціоналу $p$, тобто*

$$f_0(x) \le p(x), \tag{1}$$

*то функціонал $f_0$ може бути продовжений до лінійного функціонала $f$, заданого на просторі $L$ і підпорядкованого функціоналу $p$ на всьому просторі $L$:*

$$f(x) \le p(x). \tag{2}$$

Доведення. Покажемо, що якщо $L_0 \ne L$, то $f_0$ можна продовжити на $L' \supset L_0$, зберігаючи умову підпорядкованості. Нехай $z \in L' \setminus L_0$, а $L'$ — елементарне розширення $L_0$:

$$L' = \{x' : x' = tz + x,\ x \in L_0,\ z \in L \setminus L_0,\ t \in R^1\} = \{L_0; z\}.$$

Якщо $f'$ — шукане продовження $f_0$ на $L'$, то

$$f'(tz + x) = tf'(z) + f(x) = tf'(z) + f_0(x).$$

Покладемо $f'(z) = c$. Тоді $f'(tz + x) = tc + f_0(x)$. Виберемо $c$ так, щоб виконувалась умова підпорядкованості:

$$\forall x \in L_0 \quad f_0(x) + tc \le p(x + tz). \tag{3}$$

Якщо $t > 0$, поділимо (3) на $t$ і отримаємо еквівалентну умову

$$\forall x \in L_0 \ f_0\left(\frac{x}{t}\right) + c \le p\left(\frac{x}{t} + z\right) \Rightarrow c \le p\left(\frac{x}{t} + z\right) - f_0\left(\frac{x}{t}\right). \tag{4}$$

Якщо $t < 0$, поділимо (3) на $-t$. Тоді

$$\forall x \in L_0 - f_0\left(\frac{x}{t}\right) - c \le p\left(-\frac{x}{t} - z\right) \Rightarrow c \ge -p\left(-\frac{x}{t} - z\right) - f_0\left(\frac{x}{t}\right) \tag{5}$$

Покажемо, що число $c$, що задовольняє умови (4) і (5) існує. Нехай $y'$ і $y'' \in L_0$, а $z \in L' \setminus L_0$. Тоді

$$f_0(y'' - y') = f_0(y'') - f_0(y') \le p(y'' - y') =$$
$$= p(y'' + z - y' - z) \le p(y'' + z) + p(-y' - z).$$

З цього випливає, що

$$-f_0(y'') + p(y'' + z) \ge -f_0(y') - p(-y' - z).$$

Покладемо

$$c'' = \inf_{y''}\left(-f_0(y'') + p(y'' + z)\right),\ c' = \sup_{y'}\left(-f_0(y') + p(-y' - z)\right).$$

Оскільки $y'$ і $y''$ — довільні, то з умови підпорядкованості випливає, що $c'' > c'$. Отже, $\exists c : c'' \ge c \ge c'$.

Визначимо функціонал $f'$ на $L'$:

$$f'(tz + x) = tc + f_0(x).$$

За побудовою цей функціонал задовольняє умову (1). Отже, якщо $f_0$ задано на $L_0 \subset L$ і задовольняє на $L_0$ умову (1), то його можна продовжити на $L' \supset L_0$ із збереженням цієї умови.

Якщо в просторі $L$ існує злічена система елементів $x_1, x_2, ..., x_n, ...$, така що будь-який елемент простору $L$ можна подати як лінійну комбінацію елементів $x_1, x_2, ..., x_n, ...$, то продовження функціонала $f_0$ на $L$ можна побудувати за індукцією, розглядаючи зростаючий ланцюжок підпросторів

$$L^{(1)} = \{L_0, x_1\},\ L^{(2)} = \{L^{(1)}, x_2\},\ ...,\ L^{(n)} = \{L^{(n-1)}, x_n\},\ ...,$$

де $L^{(k)} = \{L^{(k-1)}, x_{k+1}\}$ — мінімальний лінійний підпростір, що містить $L^{(k)}$ і $x^{(k+1)}$. Тоді кожний елемент $x \in L$ увійде в деякий $L^{(k)}$ і функціонал $f_0$ буде продовжений на весь простір $L$. В загальному випадку використовується схема, яка базується на лемі Цорна. Уведемо в розгляд потрібні означення.

**Озн 9.13.** *Говорять, що на множині $X$ задано* ***відношення часткового порядку ≤****, якщо виділено деяку сукупність пар $P = \{(x, y) \in X \times X\}$, для яких*

1) $x \le x$;
2) $x \le y,\ y \le z \Rightarrow x \le z$.

При цьому не вимагається, щоб усі елементи були порівняними.

**Приклад 9.6.** Площина $R^2$, на якій між точками $x = (x_1, x_2)$ і $y = (y_1, y_2)$ установлено відношення $x \le y$, якщо $x_1 \le x_2$ і $y_1 \le y_2$.

**Озн 9.14.** *Якщо всі елементи $X$ є попарно порівняними, то множина $X$ називається* ***лінійно упорядкованою****.*

**Озн 9.15.** *Лінійно упорядкована підмножина частково упорядкованої множини називається* ***ланцюгом****.*

**Приклад 9.7.** Пряма $R^1$ із покоординатним порядком, що розглядається як підмножина площини $R^2$, є ланцюгом.

**Озн 9.16.** *Якщо $X$ — частково упорядкована множина і $M \subset X$, то елемент $\mu \in X$ називається* ***мажорантою*** *множини $X$, якщо*

$$m \leq \mu \quad \forall m \in M .$$

**Озн 9.17.** *Якщо $m$ — така мажоранта $M \subset X$, що $m \leq \hat{m}$ для будь-якої іншої мажоранти $\hat{m}$ множини $M$, то $m$ називається* ***точною верхньою гранню*** *множини $M$.*

**Озн 9.18.** *Елемент $m \in X$ називається* ***максимальним****, якщо немає такого елемента $m' \in X$, що $m \leq m'$.*

**Лема Цорна.** *Якщо будь-який ланцюг в частково упорядкованій множині $X$ має мажоранту, то в $X$ існує максимальний елемент.*

Позначимо через $\mathfrak{M}$ сукупність усіх можливих продовжень функціоналу $f_0$ на більш широкі підпростори з умовою підпорядкованості $p$. Кожне таке продовження $f'$ має лінійну область визначення $L'$, на якій $f' \leq p$ і $f'\big|_{X_0} = f_0$. Будемо вважати продовження $f'$ підпорядкованим продовженню $f''$, якщо для відповідних областей визначення маємо $L' \subset L''$ і $f''\big|_{L'} = f'$. Таким чином, маємо частковий порядок. Умова щодо ланцюгів виконана: якщо дано ланцюг продовжень $f_\alpha$ з областями визначення $L_\alpha$, то мажоранта $f \in \mathfrak{M}$ будується так. Розглянемо множину $L = \bigcup\limits_{\alpha} L_\alpha$, яка є лінійним простором, оскільки $\forall x, y \in L \quad \exists L_\alpha, L_\beta$, такі що $x \in L_\alpha$ і $y \in L_\beta$. Але за означенням ланцюга або $L_\alpha \subset L_\beta$, або

$L_\beta \subset L_\alpha$, тобто $x+y\in L$. Ясно, що $tx\in L \quad \forall t\in R^1$. З тих же причин функціонал $f(x)=f_\alpha(x_\alpha)$ для $x=x_\alpha$ коректно заданий на $L$, тобто $f_\alpha(x_\alpha)=f_\beta(x_\beta)$, якщо $x_\alpha=x_\beta$. До того ж $f\le p$ на $L$. Отже, $f\in\mathfrak{M}$ — мажоранта для всіх $f_\alpha$. За лемою Цорна в $\mathfrak{M}$ є максимальний елемент $f$. Отже, область визначення функціонала $f$ збігається із $X$, інакше функціонал $f$ можна було б лінійно продовжити на більш широкий простір із умовою підпорядкованості $p$, що суперечить максимальності $p$. ■

## Література

1. Садовничий В,А. Теория операторов. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986, 91-96, 106-109.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. (5-е изд.) — М.: Наука, 1981, с.119-138.
3. Богачев В.И., Смолянов О.Г. Действительный и функциональный анализ. Университетский курс. — М.: - Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2009. с. 14-16, 258-264.

## 10. Нормовані простори і простір лінійних неперервних операторів

**Озн. 10.1.** *Нехай* $E$ *— лінійний простір над полем К. Відображення* $\|\cdot\|: E \to R^{+}$ *називається* ***нормою*** *в просторі Е, якщо* $\forall \left(x \in E,\, y \in E,\, \lambda \in K\right)$ *виконуються аксіоми норми:*

1. $\|x\| = 0$ *тоді і тільки тоді, коли* $x = 0$ *(віддільність);*
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ *(однорідність);*
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(нерівність трикутника).*

**Озн. 10.2.** *Лінійний простір із введеною на ньому нормою називається* ***нормованим****.*

Ясно, що нормований простір є метричним, оскільки в ньому можна ввести метрику $\rho\left(x, y\right) = \|x - y\|$. З цього випливає, що норма елемента в нормованому просторі є відстанню між ним і нульовим елементом: $\|x\| = \rho\left(x, \theta\right)$.

**Приклад 10.1.** Простір

$$l = \left\{ x = \left(x_1, x_2, ..., x_n, ...\right) : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty \right\}$$

є нормованим з нормою $\|x\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$.

**Озн. 10.3.** *Послідовність* $\{x_n\}$ *елементів нормованого простору* $E$ *називається* ***збіжною за нормою****, або* ***сильно збіжною****, або просто* ***збіжною****, до елемента* $x_0 \in E$, *якщо* $\|x_n - x_0\| \to 0$ *при* $n \to \infty$.

*Якщо* $\{x_n\}$ *збігається до елемента* $x_0 \in E$, *то* $\lim\limits_{n \to \infty} \|x_n\| = \|x_0\|$.

**Озн. 10.4.** *Повний нормований простір називається* ***банаховим***.

**Озн. 10.5.** *Функціонал називається* ***обмеженим***, якщо

$$\exists C > 0 : \left| f(x) \right| \le C \|x\|_E . \qquad (1)$$

**Озн. 10.7.** Найменша серед усіх додатних констант, що задовольняють нерівність (1) називається **нормою функціонала**.

$$\|f\| = \sup_{x \ne 0, x \in E} \frac{\left| f(x) \right|}{\|x\|} .$$

**Озн. 10.8.** *Нехай $E_1$ і $E_2$ – нормовані простори. На множині $D \subset E_1$ задано* ***оператор****, або відображення $A$, із значеннями в $E_2$, якщо кожному елементу $x \in D$ поставлено у відповідність елемент $y = Ax \in E_2$.*

**Озн. 10.9.** *Оператор $A$ називається* **лінійним**, *якщо*

1. $\alpha x_1 + \beta x_2 \in D$ *для довільних* $x_1, x_2 \in D$, *де* $\alpha, \beta$ – *дійсні числа;*
2. $A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A(x_1) + \beta A(x_2)$ *для довільних* $x_1, x_2 \in D$, $\alpha, \beta$ – *дійсні числа.*

**Озн. 10.10.** *Якщо $A$ – лінійний оператор з $E_1$ в $E_2$ такий, що $D = E_1$, та з умови $x_n \to x_0$, $x_n, x_0 \in E_1$ випливає, що $A(x_n) \to A(x_0)$ в $E_2$, то $A$ називається* ***лінійним неперервним оператором***.

**Озн. 10.10.** *Оператор $A$ називається* ***обмеженим*** *в просторі E, якщо існує така константа C, якщо $\forall x \in E$*

$$\|Ax\| \le C \|x\| .$$

**Озн. 10.12.** *Найменша константа* $C$, *яка* $\forall x \in E$ *задовольняє нерівність* $\|Ax\| \le C\|x\|$, *називається* ***нормою оператора A***.

**Теорема 10.1.** *Лінійний оператор, заданий на лінійному нормованому просторі, є неперервним тоді і тільки тоді, коли він обмежений.*

Доведення. Необхідність. Припустимо, що $A$ — неперервний, лінійний, але не обмежений оператор. Тоді

$$\forall n \in N \ \exists x_n \in E : \|Ax_n\|_F > n\|x_n\|_E .$$

Покладемо

$$\xi_n = \frac{1}{n}\frac{x_n}{\|x_n\|} .$$

За побудовою

$$\xi_n = \frac{1}{n}\frac{x_n}{\|x_n\|} \to 0, \quad n \to \infty .$$

Оцінимо норму елемента $\|A\xi_n\|_F$:

$$\|A\xi_n\|_F = \left\| A\left(\frac{1}{n}\frac{x_n}{\|x_n\|}\right)\right\|_F = \frac{1}{n\|x_n\|_E}\|Ax_n\|_F > \frac{n\|x_n\|_E}{n\|x_n\|_E} = 1.$$

З цього випливає, що

$$\lim_{n\to\infty}\|A\xi_n\|_F \ne 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} A\xi_n \ne 0 .$$

$A$ — лінійний оператор $\Rightarrow$

$\Rightarrow A0 = A(x-x) = Ax - Ax = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} A\xi_n \ne A0$

$\Rightarrow A$ — не неперервний. Отримане протиріччя доводить, що оператор $A$ є обмеженим.

Достатність. $A$ — обмежений оператор $\Rightarrow$

$$\exists C > 0 \ \forall x \in E \ \|Ax\|_F \le C\|x\|_E .$$

Нехай

$x_n \to x \Rightarrow \|x_n - x\|_E \to 0 \Rightarrow \|Ax_n - Ax\|_F = \|A(x_n - x)\|_F \le$
$\le C\|x - x_n\|_E \to 0 \Rightarrow \|Ax_n - Ax\|_F \to 0 \Rightarrow Ax_n \to Ax$ *при* $n \to \infty$

Це означає, що оператор $A$ — неперервний. ■

**Озн. 10.13.** *Лінійні оператори A, що відображають нормований простір E в нормований простір F, утворюють* ***нормований простір операторів*** $L(E,F)$ *з нормою*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\ne 0,\, x\in E} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|=1,\, x\in E} \|Ax\|_F = \sup_{\|x\|\le 1,\, x\in E} \|Ax\|_F .$$

**Теорема 10.2**. *Нехай A — лінійний обмежений оператор, що діє із нормованого простору E в банахів простір F. Якщо область визначення оператора D(A) щільна в E, то існує такий лінійний обмежений оператор* $\overline{A}: E \to F$ *такий що,* $\overline{A}x = Ax \;\; \forall x \in D(A)$ *і* $\|\overline{A}\| = \|A\|$.

Доведення. Нехай $x \in E \setminus D(A)$. Оскільки $\overline{D(A)} = E$, то

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(A) : \lim_{n\to\infty} x_n = x .$$

Із нерівності

$$\|Ax_n - Ax_m\|_F \le \|A\| \|x_n - x_m\|_E$$

і обмеженості оператора $A$ випливає, що

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N > 0 : \forall n, m \ge N \; \|Ax_n - Ax_m\|_F \le \|A\| \cdot \|x_n - x_m\|_E < \varepsilon .$$

Це означає, що послідовність $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною. Оскільки простір $F$ є повним, ця послідовність є збіжною:

$$\exists \overline{A}x = \lim_{n\to\infty} A_n x .$$

Покажемо, що цей елемент визначений коректно, тобто не залежить від вибору послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(A) : \lim_{n\to\infty} x_n = x$

Припустимо, що існує ще одна послідовність $\{x_n'\}_{n=1}^{\infty} \subset D(A)$, яка збігається до елемента $x$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n' = x.$$

Нехай

$$y = \lim_{n\to\infty} Ax_n, \; y' = \lim_{n\to\infty} Ax_n'.$$

З того що

$$\lim_{n\to\infty} \|Ax_n - Ax_n'\|_F \le \lim_{n\to\infty} \|A\| \|x_n - x_n'\|_E = 0,$$

випливає

$$\|y - y'\|_F = \lim_{n\to\infty} \|y - y'\|_F \le$$
$$\le \lim_{n\to\infty} \|y - Ax_n\|_F + \lim_{n\to\infty} \|Ax_n - Ax_n'\|_F + \lim_{n\to\infty} \|Ax_n' - y'\|_F = 0.$$

Отже, $y = y'$.

Лінійність оператора $\bar{A}$ випливає із лінійності оператора А і властивостей границь.

Оскільки оператор $\bar{A}$ збігається с оператором $A$ в області визначення $D(A)$, але має більш широку область визначення,

$$\|A\| \le \|\bar{A}\|.$$

З іншого боку,

$$\|Ax_n\|_F \le \|A\| \cdot \|x_n\|_E \quad \forall x_n \in E.$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty} \|Ax_n\|_F = \left\| A\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \right\|_F = \|\bar{A}x\|_F \le$$
$$\le \|A\| \cdot \left\| \lim_{n\to\infty} x_n \right\|_E = \|A\| \cdot \|x\|_E \quad \forall x \in E.$$

Це означає, що

$$\|\bar{A}\| \le \|A\|.$$

Порівнюючи оцінки $\|\bar{A}\|$, отримуємо

$$\|\overline{A}\| = \|A\|. \blacksquare$$

**Теорема Хана-Банаха в нормованому просторі.** *Нехай* $E$ *— дійсний нормований простір,* $L$ *— його підпростір,* $f_0$ *— обмежений лінійний функціонал на* $L$*. Цей лінійний функціонал можна продовжити до деякого лінійного функціонала* $f$*, заданого на всьому просторі* $E$ *без збільшення норми:*

$$\|f\| = \|f_0\|.$$

Доведення. Нехай $f_0$ — обмежений лінійний функціонал на $L$. Значить,

$$|f_0(x)| \le \|f_0\| \cdot \|x\|, \; x \in L.$$

За теоремою Хана-Банаха в лінійному просторі

$$\exists\ f \text{ — продовження } f_0 \text{ на } E: \ |f(x)| \le \|f_0\| \cdot \|x\| \quad \forall x \in E$$

З цього випливає, що

$$\|f\| \le \|f_0\|.$$

З іншого боку, $L \subset E \Rightarrow$

$$\|f\| = \sup_{x \ne 0,\, x \in E} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \ge \sup_{x \ne 0,\, x \in L} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \ne 0,\, x \in L} \frac{|f_0(x)|}{\|x\|} = \|f_0\|.$$

Отже, $\|f\| = \|f_0\|$. $\blacksquare$

## Література

1. Садовничий В,А. Теория операторов. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. — с.96–102.

## 11. Спряжений простір

Ввести топологію в лінійному просторі можна не лише за допомогою норми.

**Озн. 11.1.** *Упорядкована четвірка* $(L,+,\times,\tau)$ *називається лінійним топологічним простором, якщо*

1) $(L,+,\times)$ — *дійсний лінійний простір*;

2) $(L,\tau)$ — *топологічний простір;*

3) *операція додавання і множення на числа в* $L$ *є неперервними, тобто*

*а) якщо* $z_0 = x_0 + y_0$, *то для кожного околу* $U$ *точки* $z_0$ *можна указати такі околи* $V$ *і* $W$ *точок* $x_0$ *і* $y_0$ *відповідно, що* $\forall x \in V,\, y \in W \;\; x + y \in U$ *;*

*б) якщо* $\alpha_0 x_0 = y_0$, *то для кожного околу* $U$ *точки* $y_0$ *існує окіл* $V$ *точки* $x_0$ *і таке число* $\varepsilon > 0$, *що* $\forall \alpha \in R^1 : |\alpha - \alpha_0| < \varepsilon$ *і* $\forall x \in V \;\; \alpha x \in U$.

**Зауваження 11.1.** Оскільки будь-який окіл будь-якої точки $x$ в лінійному топологічному просторі можна отримати зсувом околу нуля $U$ шляхом операції $U + x$, топологія в лінійному топологічному просторі повністю визначається локальною базою нуля.

Спочатку доведемо деякі допоміжні факти щодо лінійних функціоналів, заданих на лінійному топологічному просторі $L$.

**Приклад 11.1.** Всі нормовані простори є лінійними топологічними просторами.

**Озн. 11.2.** *Функціонал, визначений на лінійному топологічному просторі* $L$, *називається* ***неперервним****, якщо для будь-якого* $x_0 \in L$ *і будь-якого* $\varepsilon > 0$ *існує такий окіл* $U$ *елемента* $x_0$, *що*

$$\left| f(x) - f(x_0) \right| < \varepsilon \quad \textit{при} \ x \in U .$$

**Лема 11.1.** *Якщо лінійний функціонал* $f$ *є неперервним в якійсь одній точці* $x_0$ *лінійного топологічного простору* $L$, *то він є неперервним на усьому просторі* $L$.

Доведення. Дійсно, нехай $y$ — довільна точка простору $L$ і $\varepsilon > 0$. Необхідно знайти такий окіл $V$ точки $y$, щоб

$$\forall z \in V \ \ \left| f(z) - f(y) \right| < \varepsilon \ .$$

Виберемо окіл $U$ точки $x_0$ так, щоб

$$\forall x \in U \ \ \left| f(x) - f(x_0) \right| < \varepsilon \ .$$

Побудуємо окіл точки $y$ шляхом зсуву околу $U$ на елемент $y - x_0$:

$$V = U + (y - x_0) = \{ z \in L : z = u + y - x_0, u \in U \}$$

Із того, що $z \in V$, випливає, що $z - y + x_0 \in U$, отже,

$$\left| f(z) - f(y) \right| = \left| f(z - y) \right| =$$

$$= \left| f(z - y + x_0 - x_0) \right| = \left| f(z - y + x_0) - f(x_0) \right| < \varepsilon.$$

Що і треба було довести. ■

**Зауваження 11.2.** Для того щоб перевірити неперервність лінійного функціонала в просторі, достатньо перевірити його неперервність в одній точці, наприклад, в точці 0.

**Зауваження 11.3.** У скінчено-вимірному лінійному топологічному просторі будь-який лінійний функціонал є неперервним.

**Теорема 11.1.** *Для того щоб лінійний функціонал $f$ був неперервним на лінійному топологічному просторі $L$, необхідно і достатньо, щоб існував такий окіл нуля в $L$, на якому значення функціонала $f$ є обмеженими в сукупності.*

Доведення. Необхідність. З того що функціонал $f$ є неперервним в точці 0, випливає що

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists U(0) : \left| f(x) \right| < \varepsilon \quad \forall x \in U(0).$$

Отже, його значення є обмеженими в сукупності на $U(0)$.

Достатність. Нехай $U(0)$ — такий окіл нуля, що

$$\left| f(x) \right| < C \quad \forall x \in U(0).$$

Крім того, нехай $\varepsilon > 0$. Тоді в околі нуля $\frac{\varepsilon}{C} U(0) = \left\{ x \in L : x = \frac{\varepsilon}{C} y, \, y \in U(0) \right\}$ виконується нерівність

$$\left| f(x) \right| < \varepsilon.$$

Це означає, що функціонал $f$ є неперервним в околі нуля, а значить в усьому просторі $L$.■

Нехай $E$ — нормований простір. Нагадаємо, що спряженим простором $E^*$ називається сукупність усіх лінійних неперервних функціоналів, заданих на просторі $E$ із нормою

$$\left\| f \right\| = \sup_{x \in E, x \neq \theta} \frac{\left| f(x) \right|}{\left\| x \right\|} = \sup_{x \in E, \left\| x \right\| \le 1} \left| f(x) \right|.$$

**Теорема 11.2.** *Для того щоб лінійний функціонал $f$ був неперервним на нормованому просторі $E$, необхідно і достатньо, щоб значення функціонала $f$ були обмеженими в сукупності на одиничній кулі.*

Доведення. Необхідність. Нормований простір $E$ є лінійним топологічним простором. За теоремою 11.1 будь-яке значення неперервного лінійного функціонала $f$ в деякому околі нуля є обмеженими в сукупності.

$$\forall C > 0\, \exists U(0) : \left| f(x) \right| < C \quad \forall x \in U(0).$$

В нормованому просторі будь-який окіл нуля містить кулю.

$$\exists S(0, r) \subset U(0).$$

Отже, значення функціонала $f$ є обмеженими в сукупності в деякій кулі. Оскільки $f$ — лінійний функціонал, це еквівалентно тому, що значення функціонала $f$ є обмеженими в сукупності в одиничній кулі, оскільки

$$\forall x \in S(0, r) : \left| f(x) \right| < C \Rightarrow \forall y = \frac{1}{r} x \in S(0,1) : \left| f(y) \right| < \frac{C}{r}.$$

Достатність. Оскільки значення функціонала $f$ є обмеженими в сукупності в одиничній кулі, а одинична куля є околом точки 0, то за теоремою 11.1 він є неперервним в точці 0. Отже, лінійний функціонал $f$ є неперервним в нормованому просторі $E$. ■

На спряженому просторі можна ввести різні топології. Найважливішими з них є сильна і слабка топології.

**Озн. 11.3.** ***Сильною топологією*** *в просторі* $E^*$ *називається топологія, визначена нормою в просторі* $E^*$, *тобто локальною базою нуля*

$$\left\{ f \in E^* : \| f \| < \varepsilon \right\},$$

*де функціонали* $f$ *задовольняють умову*

$$\left| f(x) \right| < \varepsilon \quad \forall x \in E : \| x \| \le 1.$$

*а* $\varepsilon$ *— довільне додатне число.*

**Теорема 11.3.** *Спряжений простір* $E^*$ *є повним..*

Доведення. Нехай $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальна послідовність лінійних неперервних функціоналів, тобто

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N\ \|f_n - f_m\| < \varepsilon .$$

Отже,

$$\forall x \in E\ \left|f_n(x) - f_m(x)\right| \leq \|f_n - f_m\|\|x\| < \varepsilon\|x\|. \qquad (1)$$

Покладемо $\forall x \in E$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Покажемо, що $f$ — лінійний неперервний функціонал.

$$f(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty} f_n(\alpha x + \beta y) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\alpha f_n(x) + \beta f_n(y)\right] = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Крім того, з нерівності (1) випливає, що

$$\forall x \in E\ \lim_{m\to\infty}\left|f_n(x) - f_m(x)\right| = \left|f(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon\|x\|. \qquad (2)$$

Це означає, що функціонал $f - f_n$ є обмеженим. Оскільки він є лінійним і обмеженим, значить він є неперервним. Таким чином, функціонал $f = f_n + (f - f_n)$ також є неперервним. Крім того, $\|f - f_n\| \leq \varepsilon\ \ \forall n \geq N$, тобто $f_n \to f$ при $n \to \infty$ за нормою простору $E^*$. ■

**Зауваження 11.4.** Зверніть увагу на те, що простір $E^*$ повний незалежно від того, чи є повним простір $E$.

**Приклад 11.2.** $(c_0)^* = l_1$ .

**Приклад 11.3.** $(l_1)^* = m$ .

**Приклад 11.4.** $(l_p)^* = l_q$ , де $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ p > 1$.

**Озн. 11.4.** ***Другим спряженим простором*** $E^{**}$ називається сукупність усіх лінійних неперервних функціоналів, заданих на просторі $E^*$.

**Лема 11.2.** *Будь-який елемент* $x_0 \in E$ *визначає певний лінійний неперервний функціонал, заданий на* $E^*$.

Доведення. Введемо відображення

$$\pi : E \to E^{**} \tag{3}$$

поклавши

$$\varphi_{x_0}(f) = f(x_0), \tag{4}$$

де $x_0$ — фіксований елемент із $E$, а $f$ — довільний лінійний неперервний функціонал із $E^*$. Оскільки рівність (4) ставить у відповідність кожному функціоналу $f$ із $E^*$ дійсне число $\varphi_{x_0}(f)$, вона визначає функціонал на просторі $E^*$. Покажемо, що $\varphi_{x_0}$ — лінійний неперервний функціонал, тобто він належить $E^{**}$.

Дійсно, функціонал $\varphi_{x_0}$ є лінійним, оскільки

$$\varphi_{x_0}(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha f_1(x_0) + \beta f_2(x_0) = \alpha \varphi_{x_0}(f_1) + \beta \varphi_{x_0}(f_2).$$

Крім того, нехай $\varepsilon > 0$ і $A$ — обмежена множина в $E$, що містить $x_0$. Розглянемо в $E^*$ окіл нуля $U(\varepsilon, A)$:

$$U(\varepsilon, A) = \left\{ f \in E^*, x_0 \in A : \left| f(x_0) \right| \le \varepsilon \right\},$$

тобто

$$U(\varepsilon, A) = \left\{ f \in E^*, x_0 \in A : \left| \varphi_{x_0}(f) \right| \le \varepsilon \right\}$$

З цього випливає, що функціонал $\varphi_{x_0}$ є неперервним в точці 0, а значить і на всьому просторі $E^*$. ■

**Озн. 11.5.** *Відображення* $\pi : E \to E^{**}$, *побудоване в лемі 11.2, називається* ***природним відображенням простору*** $E$ *в другий спряжений простір* $E^{**}$.

**Озн. 11.6.** *Якщо природне відображення* $\pi : E \to E^{**}$ *є бієкцією і* $\pi(E) = E^{**}$, *то простір* $E$ *називається* ***напіврефлексивним***.

**Озн. 11.7.** *Якщо простір* $E$ *є напіврефлексивним і відображення* $\pi : E \to E^{**}$ *є неперервним, то простір* $E$ *називається* ***рефлексивним***.

**Зауваження 11.5.** *Якщо* $E$ *— рефлексивний простір, то природне відображення* $\pi : E \to E^{**}$ *є ізоморфізмом.*

**Теорема 11.4.** *Якщо* $E$ *— нормований простір, то природне відображення* $\pi : E \to E^{**}$ *є ізометрією.*

Доведення. Нехай $x \in E$. Покажемо, що

$$\|x\|_E = \|\pi(x)\|_{E^{**}}.$$

Нехай $f$ — довільний ненульовий елемент простору $E^*$. Тоді

$$|f(x)| \le \|f\| \|x\| \Rightarrow \|x\| \ge \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

Оскільки ліва частина нерівності не залежить від $f$, маємо

$$\|x\| \ge \sup_{f \in E^*, f \ne 0} \frac{|f(x)|}{\|f\|} = \|\pi(x)\|_{E^{**}}.$$

З іншого боку, внаслідок теореми Хана-Банаха, якщо $x$ — ненульовий елемент в нормованому просторі $E$, то існує такий неперервний лінійний функціонал $f$, визначений на $E$, що

$$\|f\| = 1 \ i \ f(x) = \|x\|$$

(визначаємо функціонал на одновимірному підпросторі формулою $f(\alpha x) = \alpha\|x\|$, а потім продовжуємо без збільшення норми на весь простір). Отже, для кожного $x \in E$ знайдеться такий ненульовий лінійний функціонал $f$, що

$$|f(x)| = \|f\|\|x\|,$$

тому

$$\|\pi(x)\|_{E^{**}} = \sup_{f \in E^*, f \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \geq \|x\|.$$

Отже, $\|x\|_E = \|\pi(x)\|_{E^{**}}$. ■

**Зауваження 11.6.** Оскільки природне відображення нормованих просторів $\pi : E \to E^{**}$ є ізометричним, *поняття напіврефлексивних і рефлексивних просторів для нормованих просторів є еквівалентними.*

**Зауваження 11.7.** Оскільки простір, спряжений до нормованого, є повним (теорема 11.3), *будь-який рефлексивний нормований простір є повним*.

**Зауваження 11.8.** Обернене твердження є невірним.

**Приклад 11.5.** Простір $c_0$ є повним, але нерефлексивним, тому що спряженим до нього є простір $l_1$, а спряженим до простору $l_1$ є простір $m$.

**Приклад 11.6.** Простір неперервних функцій $C[a,b]$ є повним, але нерефлексивним (більше того, немає жодного нормованого простору, для якого простір $C[a,b]$ був би спряженим).

**Приклад 11.7.** Приклад рефлексивного простору, що не збігається із своїм спряженим:

$$l_p^{**} = l_q^* = l_p, \ p > 1, \ p \neq 2, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

**Приклад 11.8.** Приклад рефлексивного простору, що збігається із своїм спряженим:

$$l_2^{**} = l_2^{*} = l_2 .$$

## Література

1. Садовничий В,А. Теория операторов. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. — с. 112–123.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. (5-е изд.) — М.: Наука, 1981. — с. 175–178, 182-192.

## 12. Слабка топологія і слабка збіжність

Ми розглянули поняття сильної топології і сильної збіжності в нормованому просторі $E$, а також сильної топології і сильної збіжності в спряженому просторі $E^*$. Ці топології та поняття збіжності спиралися на поняття норми. Розглянемо відповідні поняття слабкої топології і слабкої збіжності в нормованих просторах $E$ і $E^*$.

**Озн. 12.1.** ***Слабкою топологією*** *в просторі $E^*$ називається топологія, визначена локальною базою нуля, тобто сукупністю множин*

$$U_{f_1,\ldots,f_n,\varepsilon} = \left\{ x \in L : \left| f_i\left(x\right) \right| < \varepsilon, i = 1, 2, \ldots, n \right\},$$

*де $f_1, f_2, \ldots, f_n$ — скінченна сукупність неперервних функціоналів, а $\varepsilon$ — довільне додатне число.*

**Лема 12.1.** *Слабка топологія слабкіша за вихідну топологію простору $L$.*

Доведення. Розглянемо скінчену сукупність неперервних функціоналів $f_1, f_2, \ldots, f_n$ і довільне додатне число $\varepsilon$.Тоді внаслідок неперервності функціоналів $f_1, f_2, \ldots, f_n$ множина $U_{f_1,\ldots,f_n,\varepsilon}$ є відкритою в вихідній топології простору $L$, оскільки прообразом відкритої множини при неперервному відображенні є відкрита множина, і містить нуль, тобто є околом нуля, оскільки ці функціонали є лінійними. Перетин двох таких околів сам містить множину точок, в яких скінченна кількість функціоналів за модулем менше $\varepsilon$, отже, виконується критерій локальної бази. Оскільки нова топологія є лише частиною локальною бази нуля в вихідній топології, вона є слабкішою. ■

**Зауваження 12.1.** Слабка топологія є найменшою з усіх топологій, в яких є неперервними всі лінійні функціонали, неперервні у природній топології простору.

**Зауваження 12.2.** У нормованому просторі слабка топологія задовольняє аксіому $T_2$, але може не задовольняти першу аксіому зліченності, отже, вона не описується за допомогою збіжних послідовностей.

**Озн. 12.2.** *Послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ називається* ***слабко збіжною****, якщо вона є збіжною в слабкій топології.*

**Лема 12.2.** *Послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ елементів лінійного топологічного простору $L$ є слабко збіжною до $x_0 \in L$ тоді і лише тоді, коли для будь-якого неперервного лінійного функціонала $f$ на $L$ числова послідовність $f(x_n)$ збігається до $f(x_0)$.*

Доведення. Необхідність. Не обмежуючи загальності, розглянемо випадок, коли $x_0 = 0$. Якщо для будь-якого околу $U_{f_1,\dots,f_k,\varepsilon}$ в слабкій топології існує таке число $N$, що $x_n \in U_{f_1,\dots,f_k,\varepsilon}$ для всіх $n \ge N$, то ця умова виконується і для околу $U_{f,\varepsilon}$, де $f \in L^*$ — довільний фіксований функціонал, а це означає, що $f(x_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Достатність. Припустимо, що $f(x_n) \to 0$ для будь-якого $f \in L^*$. Тоді ця умова виконується і для всіх функціоналів $f_i \in L^*, i = 1, 2, \dots, k$, що визначають довільний окіл в слабкій топології:

$$U_{f_1,f_2,\dots,f_k,\varepsilon} = \left\{ x \in L : \left| f_i(x) \right| < \varepsilon,\ i = 1, 2, \dots, k \right\}.$$

Виберемо числа $N_i$ так, щоб $\left|f_i\left(x_n\right)\right| < \varepsilon$ при $n \geq N_i$ і покладемо $N = \max\limits_{i=1,\dots,k} N_i$. Отже, при всіх $n \geq N$ виконується умова $x_n \in U$. Це означає, що послідовність $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ збігається в слабкій топології. ■

**Лема 12.3.** *Будь-яка сильно збіжна послідовність є слабко збіжною, але не навпаки.*

Доведення. Відповідно до леми 12.1, слабка топологія слабкіша за вихідну топологію лінійного топологічного простору, тому будь-яка послідовність, що збігається в сильній топології, буде збігатися і в слабкій.

Обернене твердження є невірним, тому що, наприклад, в просторі $l_2$ послідовність ортів $e_n = \left(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots\right)$ слабко збігається до нуля, але не збігається до нуля сильно. ■

Розглянемо поняття слабкої збіжності в нормованому просторі $E$.

**Теорема 12.1.** *Якщо послідовність $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ слабко збігається в нормованому просторі $E$, то існує така константа $C$, що*

$$\left\|x_n\right\| \leq C,$$

*тобто будь-яка слабко збіжна послідовність в нормованому просторі є обмеженою.*

Доведення. Розглянемо в просторі $E^*$ множини

$$A_{kn} = \left\{f \in E^* : \left|f\left(x_n\right)\right| \leq k\right\}, \ k, n = 1, 2, \dots .$$

Оскільки при фіксованому $x_n$ функціонали $\varphi_{x_n}\left(f\right) = f\left(x_n\right)$ є неперервними (лема 11.2), множини $A_{kn}$ є замкненими.

Дійсно,

$$f_m \to f, \ f_m \in A_{kn} \Rightarrow \varphi_{x_n}\left(f_m\right) = f_m\left(x_n\right) \leq k \Rightarrow f\left(x_n\right) \leq k .$$

Отже, множина

$$A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{kn}$$

є замкненою. Оскільки послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається слабко, послідовність $\varphi_{x_n}(f)$ є обмеженою для кожного $f \in E^*$. Дійсно,

$$x_n \xrightarrow{w} x \Rightarrow \varphi_{x_n}(f) = f(x_n) \to f(x) \Rightarrow \exists k > 0 : |f(x_n)| \le k .$$

Отже, будь-який функціонал $f \in E^*$ належить деякій множині $A_k$, тобто

$$E^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k .$$

Оскільки простір $E^*$ є повним (теорема 11.3), то за теоремою Бера хоча б одна з множин $A_k$, наприклад, $A_{k_0}$ повинна буди щільною в деякій кулі $S(f_0, \varepsilon)$. Оскільки множина $A_{k_0}$ є замкненою, це означає, що

$$S(f_0, \varepsilon) \subset \overline{A}_{k_0} = A_{k_0} .$$

Звідси випливає, що послідовність $\left\{\varphi_{x_n}(f)\right\}_{n=1}^{\infty}$ є обмеженою на кулі $S(f_0, \varepsilon)$, а значить, на будь-якій кулі в просторі $E^*$, оскільки $E^*$ є лінійним топологічним простором. Зокрема, це стосується одиничної кулі. Таким чином, послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ є обмеженою як послідовність елементів з $E^{**}$. Оскільки природне відображення $\pi : E \to E^{**}$ є ізометричним, це означає обмеженість послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в просторі $E$. ■

**Теорема 12.2.** *Послідовність* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *елементів* нормованого *простору* $E$ *слабко збігається до* $x \in E$, *якщо*

1) *значення* $\|x_n\|$ *є обмеженими в сукупності деякою константою* $M$ *;*

2) $f(x_n) \to f(x)$ *для будь-яких функціоналів* $f$, *що належать множині, лінійні комбінації елементів якого скрізь щільними в* $E^*$.

Доведення. Із умови 2) і властивостей операцій над лінійними функціоналами випливає, що якщо $\varphi$ — лінійна комбінація функціоналів $f$, то

$$\varphi(x_n) \to \varphi(x).$$

Нехай $\varphi$ — довільний елемент з $E^*$ і $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — сильно збіжна до $\varphi$ послідовність лінійних комбінацій із функціоналів $f$, тобто $\|\varphi_k - \varphi\| \to 0$ (вона завжди існує внаслідок щільності). Покажемо, що $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$.

Нехай $M$ задовольняє умову

$$\|x_n\| \le M, \quad n = 1, 2, \ldots \quad \text{і} \quad \|x\| \le M.$$

Оскільки $\varphi_k \to \varphi$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists K \in \mathbb{N} : \forall k \ge K \ \ \|\varphi - \varphi_k\| < \varepsilon.$$

З цього випливає, що

$$\begin{aligned}
\left|\varphi(x_n) - \varphi(x)\right| &\le \left|\varphi(x_n) - \varphi_k(x_n)\right| + \left|\varphi_k(x) - \varphi(x)\right| + \left|\varphi_k(x_n) - \varphi_k(x)\right| \le \\
&\le \|\varphi - \varphi_k\| M + \|\varphi - \varphi_k\| M + \left|\varphi_k(x_n) - \varphi_k(x)\right| \le \\
&\le \varepsilon M + \varepsilon M + \left|\varphi_k(x_n) - \varphi_k(x)\right|.
\end{aligned}$$

За умовою теореми, $\varphi_k(x_n) \to \varphi_k(x)$ при $n \to \infty$. Отже,

$$\varphi(x_n)-\varphi(x)\to 0 \text{ при } n\to\infty \quad \forall\varphi\in E^*. \blacksquare$$

Розглянемо поняття слабкої топології в спряженому просторі $E^*$. Спочатку згадаємо, що із означення 11.3 сильної топології в спряженому просторі випливає, що цю топологію можна задати за допомогою локальної бази нуля. Наведемо її еквівалентне формулювання.

**Озн. 12.4.** ***Сильною топологією*** *в спряженому просторі $E^*$ називається топологія, визначена локальною базою нуля, тобто сукупністю множин*

$$B_{\varepsilon,A}=\left\{f\in E^*:\left|f(x)\right|<\varepsilon,\, x\in A\subset E\right\},$$

*де $A$ — довільна обмежена множина в $E$, а $\varepsilon$ — довільне додатне число.*

**Зауваження 12.3.** Оскільки будь-яка скінченна множина є обмеженою, то слабка топологія в $E^*$ є слабкішою, ніж сильна топологія цього простору.

**Озн. 12.5.** *Послідовність $\left\{f_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ називається* ***слабко збіжною****, якщо вона є збіжною в слабкій топології $E^*$, інакше кажучи, $f_n(x)\to f(x)$ для кожного $x\in E$.*

**Зауваження 12.4.** В спряженому просторі сильно збіжна послідовність є одночасно слабко збіжною, але не навпаки.

В спряженому просторі мають місце теореми, аналогічні теоремам 12.1 і 12.2.

**Теорема 12.3.** *Якщо послідовність лінійних функціоналів $\left\{f_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ слабко збігається на банаховому просторі $E$, то існує така константа $C$, що*

$$\left\|f_n\right\|\le C,$$

*тобто будь-яка слабко збіжна послідовність простору, спряженого до банахова простору, є обмеженою.*

**Теорема 12.4.** *Послідовність лінійних функціоналів* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *елементів спряженого простору* $E^*$ *слабко збігається до* $f \in E$, *якщо*

1) *послідовність* $\|f_n\|$ *є обмеженою, тобто*

$$\exists C \in R^1 : \|f_n\| \le C,\ n = 1, 2, \ldots;$$

2) $\varphi_x(f_n) \to \varphi_x(f)$ *для будь-яких елементів* $x$, *що належать множині, лінійні комбінації елементів якого скрізь щільними в* $E$.

Простір $E^*$ лінійних неперервних функціоналів, заданих на просторі $E$, можна тлумачити і як простір, спряжений до простору $E$, і як основний простір, спряженим до якого є простір $E^{**}$. Відповідно, слабку топологію в просторі $E^*$ можна ввести або за означенням 12.4 (через скінченні множини елементів простору $E$), або як в основному просторі відповідно до означення 12.1 (через функціонали із простору $E^{**}$). Для рефлексивних просторів це одне й теж, а для нерефлексивних просторів ми таким чином отримуємо різні слабкі топології.

**Озн. 12.6.** *Топологія в спряженому просторі* $E^*$, *що вводиться за допомогою простору* $E^{**}$ *(як в означенні 12.1), називається* ***слабкою*** *і позначається як* $\sigma\left(E^*, E^{**}\right)$.

**Озн. 12.7.** *Топологія в спряженому просторі* $E^*$, *що вводиться за допомогою простору* $E$ *(як в означенні 12.4), називається *-**слабкою** і позначається як* $\sigma\left(E^*, E\right)$

**Зауваження 12.5.** Очевидно, що *-слабка топологія в $E^*$ є більш слабкою, ніж слабка топологія простору $E$, тобто в слабкій топології не менше відкритих множин, ніж в *-слабкій топології.

**Література**

1. Садовничий В.А. Теория операторов. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. — с. 114–117.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. (5-е изд.) — М.: Наука, 1981. — с. 192–202.

## 13. Принцип рівномірної обмеженості

В цій лекції ми розглянемо види збіжності послідовностей лінійних неперервних операторів і з’ясуємо, коли простір $\mathcal{L}(E,F)$ є банаховим в розумінні тої чи іншої збіжності.

**Озн. 13.1.** *Послідовність операторів* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *, що діють із нормованого простору* $E$ *в нормований простір* $F$, *збігається до оператора* $A$ ***поточково*** *в просторі* $\mathcal{L}(E,F)$ *при* $n \to \infty$, *якщо* $\forall x \in E \ \lim\limits_{n\to\infty} A_n x = Ax$.

**Озн. 13.2.** *Послідовність операторів* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *, що діють із нормованого простору* $E$ *в нормований простір* $F$, *збігається до оператора* $A$ ***рівномірно*** *в просторі* $\mathcal{L}(E,F)$ *при* $n \to \infty$, *якщо* $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0$

**Зауваження 13.1.** Якщо $F = \mathbb{R}$, то простір $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ є спряженим простором, поточкова збіжність є аналогом слабкої збіжності в спряженому просторі, а рівномірна збіжність є аналогом сильної збіжності в спряженому просторі.

**Лема 13.1.** *Якщо послідовність лінійних обмежених операторів* $A_n : E \to F$ *, де* $E, F$ *— нормовані простори, є такою, що послідовність* $\{\|A_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ *є необмеженою, то послідовність* $\{\|A_n x\|\}_{n=1}^{\infty}$ *є необмеженою в будь-якій замкненій кулі.*

Доведення. Припустимо супротивне: послідовність $\left\{\|A_n x\|\right\}_{n=1}^{\infty}$ є обмеженою в деякій замкненій кулі $\overline{S}\left(x_0,\varepsilon\right)$:

$$\exists\left(\overline{S}\left(x_0,\varepsilon\right), C>0\right): \forall n\in N\ \forall x\in \overline{S}\left(x_0,\varepsilon\right)\quad \|A_n x\|_F \le C .$$

Кожному елементу $\xi\in E$ поставимо у відповідність елемент $x=\frac{\varepsilon}{\|\xi\|_E}\xi+x_0$, якщо $\xi\ne 0$. Елементу $\xi=0$ поставимо у відповідність елемент $x=x_0$.

$$\xi\ne 0\Rightarrow \|x-x_0\|_E=\left\|\frac{\varepsilon}{\|\xi\|_E}\xi+x_0-x_0\right\|_E=\left\|\frac{\varepsilon}{\|\xi\|_E}\xi\right\|_E=\varepsilon .$$

Це означає, що для довільних $\xi\in E$ всі елементи $x\in\overline{S}\left(x_0,\varepsilon\right)$.

Оцінимо наступну величину (використовуючи допоміжну нерівність $\left|\|x\|-\|y\|\right|\le\|x+y\|$.

$$\left|\frac{\varepsilon}{\|\xi\|_E}\|A_n\xi\|_F-\|A_n x_0\|_F\right|\le\left\|\frac{\varepsilon}{\|\xi\|_E}A_n\xi+A_n x_0\right\|_F=$$

$$=\left\|A_n\left(\frac{\varepsilon}{\|\xi\|_E}\xi+x_0\right)\right\|_F\le C$$

Отже,

$$\frac{\varepsilon}{\|\xi\|_E}\|A_n\xi\|_F-\|A_n x_0\|_F\le C .$$

Звідси випливає, що

$$\|A_n\xi\|_F \le \frac{C+\|A_n x_0\|_F}{\varepsilon}\|\xi\|_E \le \frac{2C}{\varepsilon}\|\xi\|_E .$$

Отже,

$$\exists C_1 = \frac{2C}{\varepsilon} > 0 : \forall \xi \in E \ \ \|A_n\xi\|_E \le C_1\|\xi\|_E \Rightarrow \|A_n\| \le C_1 .$$

Отримане протиріччя доводить лему. ■

**Теорема 13.1 (Банаха-Штейнгауза).** *Нехай послідовність лінійних обмежених операторів* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, *що відображають банахів простір* $E$ *в нормований простір* $F$, *поточково збігається до оператора* $A$ *при* $n \to \infty$. *Тоді послідовність* $\{\|A_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ *є обмеженою, оператор* $A$ *є лінійним і неперервним, а* $A_n x \to Ax$ *рівномірно по* n *на кожному компакті* $K \subset E$ *(тобто* n *не залежить від* x*).*

Доведення. Припустимо, що послідовність $\{\|A_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ є необмеженою. Тоді за лемою 13.1 послідовність $\{\|A_n x\|\}_{n=1}^{\infty}$ є необмеженою на довільній замкненій кулі $\overline{S}(x_0,\varepsilon_0)$.

Отже, $\exists (n_1 \in N,\ x_1 \in \overline{S}(x_0,\varepsilon_0) : \|A_{n_1} x_1\|_F > 1.$

Оскільки $A_{n_1}$ — неперервний оператор,

$$\exists \overline{S}(x_1,\varepsilon_1) \subset \overline{S}(x_0,\varepsilon_0) : \ \|A_{n_1} x\|_F > 1 \ \ \forall x \in \overline{S}(x_1,\varepsilon_1).$$

На кулі $\overline{S}(x_1,\varepsilon_1)$ послідовність $\{\|A_n x\|_F\}_{n=1}^{\infty}$ також є необмеженою. Отже,

$$\exists \overline{S}(x_2,\varepsilon_2) \subset \overline{S}(x_1,\varepsilon_1) : \ \|A_{n_2} x\|_F > 2 \ \ \forall x \in \overline{S}(x_2,\varepsilon_2)$$

Нехай $A_{n_1}, A_{n_2}, \ldots, A_{n_k}$ і $x_1, x_2, \ldots, x_k$ :

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k \text{ і } \bar{S}(x_0, \varepsilon_0) \supset \bar{S}(x_1, \varepsilon_1) \supset \ldots \supset \bar{S}(x_k, \varepsilon_k).$$

Продовжуючи цей процес при $k \to \infty$, отримуємо послідовність вкладених замкнених куль, таких що

$$\left\| A_{n_k} x \right\|_F > k \quad \forall x \in \bar{S}(x_k, \varepsilon_k),\ \varepsilon_k \to 0.$$

Оскільки $E$ — повний простір, за принципом вкладених куль

$$\exists x^* \in \bigcap_{k=1}^{\infty} S(x_k, \varepsilon_k) : \left\| A_{n_k} x^* \right\|_F \ge k \quad \forall k \in N.$$

Звідси випливає, що $\exists x^* \in E$ така, що послідовність $\{A_n x^*\}$ не збігається. Це суперечить умові теореми, згідно якої послідовність операторів $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ поточково збігається в кожній точці простору $E$.

Покажемо, що оператор $A$ — лінійний. Оскільки

$$A_n(x+y) = A_n(x) + A_n(y),\ A_n(\lambda x) = \lambda A_n(x),$$

маємо

$$A(x+y) = \lim_{n\to\infty} A_n(x+y) = \lim_{n\to\infty} A_n(x) + \lim_{n\to\infty} A_n(y) = Ax + Ay,$$

$$A(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} A_n(\lambda x) = \lambda \lim_{n\to\infty} A_n(x) = \lambda Ax.$$

Крім того,

$$\left\| A_n x \right\|_F \le C \|x\|_E \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left\| A_n x \right\|_F = \left\| \lim_{n\to\infty} A_n x \right\|_F = \|Ax\|_E \le C \|x\|_E.$$

Отже, $A$ — лінійний і обмежений, а значить, неперервний.

Нехай $K \subset E$ — компакт, $\varepsilon > 0$. За теоремою Хаусдорфа існує скінчена $\frac{\varepsilon}{3C}$-сітка $M$ :

$$\forall x \in K\ \exists x_\alpha \in M : \left\| x - x_\alpha \right\|_E < \frac{\varepsilon}{3C},\ \alpha \in \mathfrak{A},$$

де $\mathfrak{A}$ — скінчена множина.

Оскільки послідовність $\left\{ A_n x \right\}_{n=1}^{\infty}$ поточково збігається в кожній точці простору $E$, то вона збігається і в кожній точці сітки $M$ :

$$\forall x_\alpha \in M\ \exists n_\alpha \in N\ \forall n \geq n_\alpha\ \ \left\| A_n x_\alpha - A x_\alpha \right\|_F < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Нехай $n_0 = \max\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} n_\alpha$. Тоді $\forall \left( n \geq n_0,\ x \in S\left( x_\alpha, \frac{\varepsilon}{3C} \right) \right)$ (сітка $M$ є скінченою, тому максимум існує)

$$\left\| A_n x - Ax \right\|_F \leq \left\| A_n x - A_n x_\alpha + A_n x_\alpha - A x_\alpha + A x_\alpha - Ax \right\|_F \leq$$

$$\leq \left\| A_n \left( x - x_\alpha \right) \right\|_F + \left\| A_n x_\alpha - A x_\alpha \right\|_F + \left\| A\left( x_\alpha - x \right) \right\|_F <$$

$$< C \left\| x - x_\alpha \right\|_F + \frac{\varepsilon}{3} + C \left\| x - x_\alpha \right\|_F = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Отже, $\forall \left( n \geq n_0,\ x \in K \right)\ \left\| A_n x - Ax \right\|_F < \varepsilon$,

до того ж номер $n_0$ не залежить від точки $x$. Це означає, що $A_n x \to Ax$ рівномірно по $n$ на кожному компакті $K \subset E$. ■

З’ясуємо, коли простір $\mathcal{L}\left( E, F \right)$ є повним у розумінні рівномірної або точкової збіжності.

**Теорема 13.2.** *Якщо нормований простір $F$ — банахів, то $\mathcal{L}(E,F)$ — банахів у розумінні рівномірної збіжності.*

Доведення. Нехай $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальна послідовність операторів, тобто

$$\|A_n - A_m\| \to 0, \; n,m \to \infty.$$

Тоді $\forall x \in E$

$$\|A_n x - A_m x\| \le \|A_n - A_m\| \cdot \|x\| \to 0, n,m \to \infty.$$

Для кожного фіксованого $x \in E$ послідовність $\{A_n x\}$ є фундаментальною в $F$. Оскільки простір $F$ є повним за умовою теореми, то послідовність $\{A_n x\}$ збігається до певного елемента $y \in F$. Позначимо $y = \lim\limits_{n\to\infty} A_n x$. Отже, ми визначили відображення $A: E \to F$. Його лінійність випливає із властивостей границі. Прокажемо його обмеженість.

$\|A_n - A_m\| \to 0$, $n,m \to \infty$ $\Rightarrow$ $\big|\|A_n\| - \|A_m\|\big| \to 0, n,m \to \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\|A_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальна в $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\{\|A_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ — обмежена в $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\exists C > 0 \; \|A_n\| \le C \;\; \forall n \in \mathbb{N}$.

Отже,

$$\|A_n x\| \le \|A_n\| \cdot \|x\| \le C\|x\|.$$

Внаслідок неперервності норми, маємо

$$\|Ax\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n x\| \le C\|x\|.$$

Покажемо, що $A_n$ рівномірно збігається до $A$ в просторі $\mathcal{L}(E,F)$. Задамо $\varepsilon > 0$ і виберемо $n_0$ так, щоб

$\|A_{n+p}x - A_n x\| < \varepsilon$ для $n \geq n_0$, $p > 0$ і для будь-якого

$$x : \|x\| \leq 1.$$

Нехай $p \to \infty$. Тоді

$$\forall n \geq n_0,\ x : \|x\| \leq 1\ \ \|Ax - A_n x\| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|A_n - A\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|(A_n - A)x\| \leq \varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$ в розумінні рівномірної збіжності.

Отже, $\mathcal{L}(E,F)$ є банаховим. ■

**Теорема 13.3.** *Якщо нормовані простори* $E$ *і* $F$ *— банахові, то* $\mathcal{L}(E,F)$ *— банахів у розумінні точкової збіжності.*

Доведення. Розглянемо точку $x \in E$ і фундаментальну у розумінні поточкової збіжності послідовність $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$. Оскільки $F$ — банахів простір, то існує елемент $y = \lim\limits_{n\to\infty} A_n x$. Таким чином, визначений оператор $A : E \to F$, такий що $y = Ax$. Лінійність цього оператора випливає із лінійності границі, а обмеженість — із теореми Банаха-Штейнгауза.

$$\|Ax\| = \left\|\lim_{n\to\infty} A_n x\right\| \leq \lim_{n\to\infty} \|A_n\| \cdot \|x\| = C\|x\|. \quad ■$$

**Література**

1. Садовничий В,А. Теория операторов. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. — с.96–102.
2. Ляшко И.И., Емельянов В.Ф., Боярчук А.К. Основы классического и современного математического анализа. — М.: Выща школа, 1988. — с. 576-578.

## 14. Принцип відкритості відображення

**Лема 14.1.** *Нехай* $E$ *і* $F$ — *банахові простори,* $A\in \mathcal{L}(E,F)$, $E_n$ — *множина тих точок* $x\in E$, *для яких*

$$\|Ax\|_F \le n\|x\|_E \quad n=1,2,\dots.$$

*Тоді* $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ *і принаймні одна із множин* $E_n$ *є всюди щільною в* $E$.

Доведення. Спочатку пересвідчимось в тому, що

$$\forall x\in E\ \exists n\in N: x\in E_n.$$

Очевидно, що $E_n\neq\varnothing$, оскільки $\forall n\in N\ \ 0\in E$. Якщо $x\neq 0$, позначимо через $n$ найменше натуральне число, що задовольняє нерівність

$$n\ge\frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E}.$$

Тоді

$$\forall x\in E\ \exists n\in\mathbb{N}: \|Ax\|_F\le n\|x\|_E.$$

Звідси випливає, що

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n.$$

Згідно теореми Бера, банахів простір $E$ не може бути поданий у вигляді не більш ніж зліченного об’єднання ніде не щільних множин. Значить, одна із множин $E_{n_0}$ не є ніде не щільною. Отже, існує відкрита куля $S(x_0,r)$, така що $S(x_0,r)\subset\overline{E}_{n_0}$.

Розглянемо замкнену кулю $\overline{S}(x_1, r_1)$ з центром $x_1 \in E_{n_0}$, таку що

$$\overline{S}(x_1, r_1) \subset S(x_0, r).$$

Візьмемо довільний елемент $x$ з нормою $\|x\| = r_1$. Оскільки

$$\|x_1 + x - x_1\|_E = \|x\|_E = r_1,$$

отримаємо, що $x_1 + x \in \overline{S}(x_1, r_1)$. Отже,

$$\overline{S}(x_1, r_1) \subset \overline{E}_{n_0} \Rightarrow$$

$$\exists \{y_k\}_{k=1}^{\infty} \in S(x_1, r_1) \cap E_{n_0} : y_k \to x_1 + x, k \to \infty.$$

Якщо $x_1 + x \in E_{n_0}$, ця послідовність може бути стаціонарною. Таким чином, $\exists \{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{y_k - x_1\}_{k=1}^{\infty}$, така що

$$\lim_{k \to \infty} x_k = \lim_{k \to \infty} y_k - x_1 = x.$$

Оскільки

$$\|x\|_E = r_1 \text{ і } \|x_k\|_E \le r_1,$$

можна вважати, що

$$\|x_k\|_E \ge \frac{r_1}{2} \quad \forall k \in N. \tag{1}$$

Із умов $y_k \in E_{n_0}$, $x_1 \in E_{n_0}$, $y_k = x_k + x_1$ маємо наступні оцінки

$$\|Ax_k\|_F = \|Ay_k - Ax_1\|_F \le \|Ay_k\|_F + \|Ax_1\|_F \le n_0 \left(\|y_k\|_E + \|x_1\|_E\right) \tag{2}$$

$$\|y_k\|_E = \|x_k + x_1\|_E \le \|x_k\|_E + \|x_1\|_E \le r_1 + \|x_1\|_E. \tag{3}$$

Беручи до уваги умову (1) і оцінки (2), (3), маємо

$$\|Ax_k\|_F \le n_0\left(r_1 + 2\|x_1\|_E\right) \le \frac{2n_0}{r_1}\left(r_1 + 2\|x_1\|_E\right)\|x_k\|_E.$$

Нехай $n$ — найменше натуральне число, що задовольняє нерівність

$$n \ge \frac{2n_0}{r_1}\left(r_1 + 2\|x_1\|_E\right).$$

Тоді

$$\|Ax_k\|_F \le n\|x_k\|_E \Rightarrow x_k \in E_n.$$

Таким чином, довільний елемент $x$, норма якого дорівнює $r_1$ можна апроксимувати елементами множини $E_n$.

Нехай $x \in E$ — довільний ненульовий елемент. Розглянемо точку

$$\xi = r_1 \frac{x}{\|x\|_E}.$$

Вище ми довели, що існує послідовність

$$\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} : \xi_k \in E_n, \lim_{k\to\infty} \xi_k = \xi.$$

Тоді

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} \xi_k \frac{\|x\|_E}{r_1} = x,$$

$$\|Ax_k\|_F = \frac{\|x\|_E}{r_1}\|A\xi_k\|_F \le \frac{\|x\|_E}{r_1} n\|\xi_k\|_E = n\|x_k\|_E$$

Отже, $x_k \in E_n$ і $\lim_{k\to\infty} x_k = x \ \forall x \in E$. Таким чином, множина $E_n$ скрізь щільна в $E$. ■

**Теорема 14.1 (теорема Банаха про обернений оператор).** *Нехай* $E$ *і* $F$ — *банахові простори,* $A$ —

*лінійний обмежений взаємно-однозначний оператор, що діє із $E$ в $F$. Тоді існує лінійний обмежений обернений оператор $A^{-1}: F \to E$.*

Доведення. Покажемо лінійність оберненого оператора. Покладемо $\forall\left(x_1 \in E, x_2 \in E\right) \quad Ax_1 = y_1, Ax_2 = y_2$. Внаслідок лінійності оператора $A$

$$\forall\left(\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\right) \quad A\left(\alpha x_1 + \beta x_2\right) = \alpha y_1 + \beta y_2. \qquad (4)$$

Оскільки $A^{-1}y_1 = x_1$, $A^{-1}y_2 = x_2$, помножимо ці рівності на $\alpha$ і $\beta$ відповідно і складемо результати:

$$\alpha A^{-1}y_1 + \beta A^{-1}y_2 = \alpha x_1 + \beta x_2. \qquad (5)$$

Із рівності (4) і означення оберненого оператора випливає, що

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = A^{-1}\left(\alpha y_1 + \beta y_2\right).$$

Беручи до уваги рівність (5), отримуємо

$$A^{-1}\left(\alpha y_1 + \beta y_2\right) = \alpha A^{-1}y_1 + \beta A^{-1}y_2.$$

Отже, оператор $A^{-1}$ є лінійним. Тепер доведемо його обмеженість.

За лемою 14.1 банахів простір $F$ можна подати у вигляді

$$F = \bigcup_k F_k,$$

де $F_k$ — множина таких елементів $y \in F$, для яких

$$\left\|A^{-1}y\right\|_F \le k\|y\|_E \quad \forall k \in N,$$

до того ж одна із множин $F_k$ скрізь щільна в $F$. Позначимо цю множину через $F_n$. Візьмемо довільну точку $y \in F$, а її норму позначимо як $\|y\|_E = a$. Знайдемо таку точку $y_1 \in F_n$, щоб виконувались нерівності

$$\|y - y_1\|_E \le \frac{a}{2},\ \|y_1\|_E \le a.$$

Такий вибір можливий, оскільки множина $\overline{S}(0,a) \cap F_n$ є щільною в замкненій кулі $\overline{S}(0,a)$ і $y \in \overline{S}(0,a)$. Знайдемо такий елемент $y_2 \in F_n$, щоб виконувались умови

$$\|y - y_1 - y_2\|_F \le \frac{a}{2^2},\ \|y_2\|_E \le \frac{a}{2}.$$

Продовжуючи вибір, побудуємо елементи $y_k \in F_n$, такі що

$$\forall k \in N\ \ \|y - (y_1 + y_2 + ... + y_k)\|_F \le \frac{a}{2^k},\ \|y_k\|_F \le \frac{a}{2^{k-1}}.$$

Внаслідок вибору елементів $y_k$ маємо

$$\lim_{m\to\infty}\left\|y - \sum_{k=1}^{m} y_k\right\|_F = 0.$$

Це означає, що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$ збігається до елемента $y$.

Покладемо $x_k = A^{-1}y_k$. Тоді отримуємо оцінку

$$\|x_k\|_E \le n\|y_k\|_F \le \frac{na}{2^{k-1}}.$$

Оскільки

$$\left\|v_{k+p}-v_k\right\|_E=\left\|\sum_{i=k+1}^{k+p}x_i\right\|_E\le\sum_{i=k+1}^{k+p}\left\|x_i\right\|_E\le$$

$$\le\sum_{i=k+1}^{\infty}\left\|x_i\right\|_E=\sum_{i=k+1}^{\infty}\left\|x_i\right\|_E\le\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{na}{2^{i-1}}= \qquad ,$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{na}{2^{i+k-1}}=\frac{na}{2^k}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^{i-1}}=\frac{na}{2^k}\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{na}{2^{k-1}}.$$

а простір $E$ — повний, послідовність $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$, де $v_k=\sum_{i=1}^{k}x_i$ збігається до деякої границі $x\in E$. Отже,

$$x=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}x_i=\sum_{i=1}^{\infty}x_i .$$

Внаслідок лінійності і неперервності оператора $A$, маємо

$$Ax=A\left(\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}x_i\right)=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}Ax_i=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}y_i=y .$$

Звідси отримуємо, що

$$\left\|A^{-1}y\right\|_E=\left\|x\right\|_E=\lim_{k\to\infty}\left\|\sum_{i=1}^{k}x_i\right\|_E\le$$

$$\le\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\left\|x_i\right\|_E\le\sum_{i=1}^{\infty}\frac{na}{2^{i-1}}=2na=2n\left\|y\right\|_E .$$

Оскільки $y$ — довільний елемент із простору $F$, обмеженість оператора $A^{-1}$ доведено. ■

**Наслідок 14.1.** *Якщо* $E$ *і* $F$ *— банахові простори,* $A \in \mathcal{L}(E,F)$, *то образ будь-якого околу нуля простору* $E$ *містить деякий окіл нуля простору* $F$.

**Теорема 14.2 (принцип відкритості відображення).** *Лінійне сюр'єктивне і неперервне відображення банахова простору* $E$ *на банахів простір* $F$ *є відкритим відображенням.*

Доведення. Покажемо, що образ будь-якої відкритої множини простору $E$ є відкритою множиною простору $F$. Нехай $G \subset E$ — непорожня відкрита множина, $x \in G$, а $G_0$ — окіл нуля в $E$, такий що $x + G_0 \subset G$. Розглянемо окіл нуля $G_1$ в просторі $F$, такий що $G_1 \subset AG_0$, який існує завдяки наслідку 14.1. Мають місце включення

$$Ax + G_1 \subset Ax + AG_0 = A(x + G_0) \subset AG.$$

Оскільки $Ax + G_1$ є околом точки $Ax$, а $x$ — довільна точка із множини $G$ і $Ax \in AG$, то множина $AG$ разом із кожною своєю точкою містить її деякий окіл $\Omega$. Отже, множина $AG$ є відкритою і відображення $A$ є відкритим. ■

Нехай $E, F$ — банахові простори. Відокремимо в банаховому просторі $\mathcal{L}(E,F)$ множину операторів $\mathfrak{M}(E,F)$, що мають обернений оператор.

**Теорема 14.3.** *Нехай* $A_0 \in \mathfrak{M}(E,F)$, $\Delta \in \mathcal{L}(E,F)$ і $\|\Delta\| < \dfrac{1}{\|A_0^{-1}\|}$. *Тоді* $A = A_0 + \Delta \in \mathfrak{M}(E,F)$.

Доведення. Зафіксуємо довільний $y \in F$ і розглянемо відображення $B : E \to E$, таке що $Bx = A_0^{-1}y - A_0^{-1}\Delta x$.

Оскільки $\|\Delta\| < \dfrac{1}{\|A_0^{-1}\|}$, відображення $B$ є стискаючим. Простір $E$ — банахів, тому існує єдина нерухома точка відображення $B$

$$x = Bx = A_0^{-1}y - A_0^{-1}\Delta x,$$

Отже,

$$Ax = A_0 x + \Delta x = y.$$

Якщо існує ще одна точка $x'$, така що $Ax' = y$, то $x'$ також є нерухомою точкою відображення $B$. Оскільки це відображення має єдину нерухому точку, це означає,що $x' = x$. Отже, для будь-якого $y \in F$ рівняння $Ax = y$ має єдиний розв'язок в просторі $E$. Значить, оператор $A$ має обернений оператор $A^{-1}$. За теоремою Банаха про обернений оператор $A^{-1}$ є обмеженим. ■

**Теорема 14.4.** *Нехай* $E$ *— банахів простір,* $I$ *— тотожній оператор, що діє в* $E$, $A \in \mathcal{L}(E,E)$ і $\|A\| < 1$. *Тоді оператор* $(I - A)^{-1}$ *існує, обмежений и може бути поданий у вигляді*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

Доведення. Спочатку зауважимо, що

$$\|A\| < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \|A^k\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k < \infty.$$

Простір $E$ — банахів, тому із збіжності ряду $\sum_{k=0}^{\infty}\left\|A^k\right\|$ випливає, що $\sum_{k=0}^{\infty} A^k \in \mathcal{L}(E,E)$. Для довільного $n \in \mathbb{N}$

$$(I-A)\sum_{k=0}^{n} A^k = \sum_{k=0}^{n} A^k (I-A) = I - A^{n+1}.$$

Перейдемо до границі при $n \to \infty$ і зважимо на те, що $\left\|A^{n+1}\right\| \le \|A\|^{n+1} \to 0$. Отже,

$$(I-A)\sum_{k=0}^{\infty} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} A^k (I-A) = I.$$

Звідси випливає, що

$$(I-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k. \blacksquare$$

## Література


1. Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функциональный анализ. — К.: Выща школа, 1990. — с. 254–255.
2. Ляшко И.И., Емельянов В.Ф., Боярчук А.К. Основы классического и современного математического анализа. — К.: Выща школа, 1988. — с. 578-581.
3. Садовничий В.А. Теория операторов. — М.: Изд-во МГУ, 1986. — с. 102–106.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1981. — с.224– 233.

## 15. Спряжені оператори, спектр і компактні оператори

Нехай $E$ і $F$ — лінійні топологічні простори. Розглянемо неперервний лінійний оператор $A: E \to F$ і функціонал $g \in F^*$. Застосуємо функціонал $g$ до елемента $y = Ax$. Це визначає функціонал $f \in E^*$, який визначається формулою $f(x) = g(Ax)$.

**Озн. 15.1.** *Оператор* $A^*: F^* \to E^*$, *що визначається формулою* $f(x) = g(Ax)$ *і ставить кожному функціоналу* $g$ *із простору* $F^*$ *функціонал* $f$ *із простору* $E^*$, *називається* ***спряженим*** *до оператора* $A$.

**Приклад 15.1.** Розглянемо оператор

$$A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

і функціонал

$$y = Ax,$$

який визначається як

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Тоді

$$f(x) = g(Ax) = \sum_{i=1}^{m} g_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} g_i a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} g_i a_{ij}.$$

Отже,

$$f_i = \sum_{i=1}^{m} g_i a_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

З цього випливає, що

$$f = A^* g \Rightarrow A^* = A^T.$$

Це означає, що спряжений оператор визначається транспонованою матрицею. ■

Позначивши значення функціонала $f$ на елементі $x$ символом $(f,x)$, отримаємо, що

$$(g,Ax)=(f,x)=\left(A^*g,x\right).$$

**Теорема 15.1.** *Якщо* $A\in\mathcal{L}(E,F)$, *де* $E,F$ *— банахові простори, то* $\|A\|=\left\|A^*\right\|$.

Доведення. З одного боку

$$\left|\left(A^*g,x\right)\right|=\left|(g,Ax)\right|\le\|g\|\|A\|\|x\|\Rightarrow\left\|A^*g\right\|\le\|A\|\|g\|$$
$$\Rightarrow\left\|A^*\right\|\le\|A\|.$$

З іншого боку, для $x\in E$ і $Ax\ne 0$ існує елемент

$$y_0\overset{def}{=}\frac{Ax}{\|Ax\|}\in F\Rightarrow\|y_0\|=1.$$

Отже, за теоремою Хана-Банаха існує функціонал $g$, такий що $\|g\|=1$, $(g,y_0)=1$. З цього випливає, що

$$(g,y_0)=\left(g,\frac{Ax}{\|Ax\|}\right)=\frac{1}{\|Ax\|}(g,Ax)=1.$$

Тоді

$$(g,Ax)=\|Ax\|.$$

Таким чином,

$$(g,Ax)=\|Ax\|=\left|\left(A^*g,x\right)\right|\le\left\|A^*\right\|\|g\|\|x\|=\left\|A^*\right\|\|x\| \quad\Rightarrow$$
$$\|A\|\le\left\|A^*\right\|.$$

З цього випливає, що $\|A\| = \|A^*\|$. ■

**Озн. 15.2.** *Нехай* $A: E \to E$, *де* $E$ *— комплексний банахів простір. Число* $\lambda$ *називається* ***регулярним*** *для оператора* $A$, *якщо оператор* $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$ *визначений на всьому просторі* $E$.

**Озн. 15.3.** *Оператор* $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$ *називається* ***резольвентою***.

**Озн. 15.4.** *Сукупність всіх чисел* $\lambda$, *які не є регулярними для оператора* $A$, *називається його* ***спектром***.

**Озн. 15.5.** *Число* $\lambda$, *таке що рівняння*

$$Ax = \lambda x$$

*має ненульові розв'язки, називається* ***власним числом*** *оператора* $A$.

**Озн. 15.6.** *Всі власні числа оператора* $A$ *належать його спектру і утворюють* ***точковий спектр***.

**Озн. 15.7.** *Доповнення до точкового спектру називається* ***неперервним спектром***.

**Приклад 15.2.** Розглянемо простір $C[a,b]$ і оператор

$$Ax(t) = tx(t).$$

Тоді

$$(A - \lambda I)x(t) = (t - \lambda)x(t).$$

Із умови

$$(t - \lambda)x(t) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

випливає, що неперервна функція $x(t)$ тотожно дорівнює нулю, тому оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ існує для довільного $\lambda$.

Проте при $\lambda \in [a,b]$ обернений оператор, що діє за формулою

$$(A-\lambda I)^{-1} x(t) = \frac{1}{t-\lambda} x(t)$$

визначений не на всьому просторі $C[a,b]$ і не є обмеженим. Таким чином, спектром є весь відрізок $[a,b]$, власних чисел немає, тобто оператор $A$ має лише неперервний спектр.

**Зауваження 15.1.** *У скінченновимірних просторах неперервний спектр оператора є порожньою множиною, спектр збігається із точковим спектром і складається лише із власних чисел. У нескінченновимірних просторах кожне число відносно оператора є регулярним значенням, власним значенням або елементом точкового спектру.*

**Теорема 15.2.** *Якщо* $A \in \mathcal{L}(E,E)$, *де* $E$ *— банахів простір і* $|\lambda| > \|A\|$, *то* $\lambda$ *— регулярне значення для оператора* $A$.

Доведення. Оскільки

$$A - \lambda I = -\lambda \left( I - \frac{1}{\lambda} A \right),$$

то

$$R_\lambda = (A-\lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\left( I - \frac{A}{\lambda} \right)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^k}.$$

За умови $|\lambda| > \|A\|$ цей ряд збігається і визначає на $E$ обмежений оператор (теорема 14.4). ■

**Зауваження 15.2.** З теореми 15.2 випливає, що спектр оператора $A$ міститься в колі радіусу $\|A\|$ з центром в нулі.

**Озн. 15.8.** *Оператор $A$, що діє із банахового простору $E$ в банахів простір $F$ називається* ***компактним****, або* ***цілком неперервним****, якщо кожну обмежену множину він переводить у відносно компактну множину.*

**Приклад 15.2.** Лінійний неперервний оператор $A$, що переводить банахів простір $E$ в його скінченновимірний підпростір, є компактним.

**Теорема 15.3.** *Якщо послідовність компактних операторів $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ в банаховому просторі $E$ збігається до оператора $A$ рівномірно, то оператор $A$ теж є компактним.*

Доведення. Для доведення компактності оператора $A$ доведемо, що для будь-якої обмеженої послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ із послідовності $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ можна виділити збіжну підпослідовність.

Оператор $A_1$ — компактний, тому із послідовності $\{A_1 x_n\}_{n=1}^{\infty}$ можна виділити збіжну підпослідовність. Нехай $\{x_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ — послідовність, на якій збігається послідовність, яку ми виділили із $\{A_1 x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Оператор $A_2$ — компактний, тому із послідовності $\{A_2 x_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}$ можна виділити збіжну підпослідовність. Нехай $\{x_n^{(2)}\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ — послідовність, на якій збігається послідовність, яку ми виділили із $\{A_2 x_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}$.

Продовжимо цей процес і виділимо діагональну послідовність

$$x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(n)}, \ldots$$

Оператори $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ переводять її у збіжну послідовність. Покажемо, що оператор $A$ теж переводить її в збіжну послідовність. Простір $E$ — повний, тому достатньо показати, що $\left\{Ax_n^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною послідовністю.

$$\left\|Ax_n^{(n)} - Ax_m^{(m)}\right\| \le$$

$$\le \left\|Ax_n^{(n)} - A_k x_n^{(n)} + A_k x_n^{(n)} - A_k x_m^{(m)} + A_k x_m^{(m)} - Ax_m^{(m)}\right\| \le$$

$$\le \left\|Ax_n^{(n)} - A_k x_n^{(n)}\right\| + \left\|A_k x_n^{(n)} - A_k x_m^{(m)}\right\| + \left\|A_k x_m^{(m)} - Ax_m^{(m)}\right\|$$

Нехай $\|x_n\| \le C$. Оскільки $\|A_n - A\| \to 0$ при $n \to \infty$,

$$\exists K \in \mathbb{N} : \forall k \ge K \quad \|A - A_k\| < \frac{\varepsilon}{3C}.$$

Крім того, оскільки послідовність $\left\{A_k x_n^{(n)}\right\}$ є збіжною,

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \ge N \ \left\|A_k x_n^{(n)} - A_k x_m^{(m)}\right\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Вибравши $M = \max(K, N)$, отримуємо

$$\forall n, m \ge M \ \left\|Ax_n^{(n)} - Ax_m^{(m)}\right\| < \varepsilon. \blacksquare$$

**Теорема 15.4.** *Якщо $A$ — лінійний компактний оператор, оператор $B$ — лінійний обмежений, то оператори $AB$ і $BA$ є компактними.*

Доведення. Якщо множина $M \subset E$ є обмеженою, то $BM$ — обмежена множина, оскільки обмежений оператор переводить будь-яку обмежену множину в обмежену множину. Отже, множина $ABM$ є відносно компактною. Це означає, що оператор $AB$ є компактним. Аналогічно, якщо множина $M \subset E$ є обмеженою, то $AM$ — відносно компактна множина, оскільки компактний оператор переводить будь-яку обмежену множину у відносно компактну множину. Оператор $B$ — неперервний, тому множина $BAM$ є відносно компактною. Це означає, що оператор $BA$ є компактним. ■

**Наслідок 15.1.** В нескінченновимірному просторі $E$ компактний оператор не може мати обмеженого оберненого оператору.

**Теорема 15.4.** *Оператор, спряжений до компактного, є компактним.* (Без доведення).

Спряжені, самоспряжені і компактні оператори відіграють особливо важливу роль у гільбертових просторах. Саме на цих поняттях побудована теорія розв'язності операторних рівнянь в гільбертових просторах.

## Література

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1981. — с. 230–250.

## 16. Гільбертові простори

**Озн. 16.1.** *Дійсна лінійна система H називається* **дійсним передгільбертовим простором** (або **евклідовим**, або **унітарним**), *якщо кожній парі елементів* $x, y$ *поставлено у відповідність дійсне число* $(x, y)$, *що задовольняє умови (аксіоми скалярного добутку):*

1. $(x, x) \geq 0$, *до того ж* $(x, x) = 0$ *тільки при* $x = 0$*;*
2. $(x, y) = (y, x)$;
3. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;
4. $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$.

**Лема 16.1.** *В дійсному передгільбертовому просторі має місце нерівність Коші-Буняковського*

$$|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)},$$

*для довільних* $x, y \in H$.

Доведення. Розглянемо вираз

$$(x + \lambda x, x + \lambda x) = (x, x) + 2\lambda (x, y) + \lambda^2 (y, y) \geq 0$$

Це означає, що дискримінант цього квадратного трьохчлена є недодатним:

$$(x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leq 0.$$

Отже,

$$|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}. \blacksquare$$

За скалярним добутком в $H$ можна ввести норму $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

**Лема 16.2.** *Відображення* $\|\cdot\|: x \to \sqrt{(x,x)}$ *є нормою.*

Доведення. Перевіримо аксіоми норми.

1. $\forall x \in H\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

$$\sqrt{(x,x)} = 0 \Leftrightarrow (x,x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta.$$

2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|\ \ \forall x \in H, \lambda \in R^1$.

$$\sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda(x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2(x,x)} = |\lambda| \cdot \sqrt{(x,x)} = |\lambda| \cdot \|x\|$$

.

3. $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|\ \ \forall x, y \in H$

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) =$$

$$\le \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \Rightarrow \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|.$$

■

**Лема 16.3.** *Скалярний добуток є неперервним відображенням, тобто*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x,\ \lim_{n\to\infty} y_n = y\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x,y).$$

Доведення.

$$|(x,y) - (x_n, y_n)| = |(x,y) - (x, y_n) + (x, y_n) - (x_n, y_n)| =$$

$$= |(x, y - y_n) + (x - x_n, y_n)| \le |(x, y - y_n)| + |(x - x_n, y_n)| \le$$

$$\le \|x\| \cdot \|y - y_n\| + \|x - x_n\| \cdot \|y_n\|$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y \Rightarrow \exists C > 0 : \forall n \ \|y_n\| \le C.$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|(x,y)-(x_n,y_n)\right| \le 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(x_n,y_n) = (x,y). \blacksquare$$

**Характеристична властивість передгільбертових просторів.** *Для того щоб нормований простір E був передгильбертовим необхідно і достатньо, щоб для довільних елементів x і y виконувалась рівність*

$$\forall x, y \in H \ \ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right). \qquad (1)$$

Доведення. Необхідність.

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = (x+y, x+y) + (x-y, x-y) =$$

$$= (x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)+(x,x)-(x,y)-(y,x)+(y,y) =$$

$$= 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Достатність. Нехай рівність (1) виконується. Покладемо

$$(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right). \qquad (2)$$

Покажемо, що рівність (2) виконується, то функція (2) задовольняє всім аксіомам скалярного добутку.

Оскільки при $x = y$ маємо

$$(x,x) = \frac{1}{4}\left(\|x+x\|^2 + \|x-x\|^2\right) = \|x\|^2,$$

за допомогою такого скалярного добутку можна задати норму в просторі $E$.

*Властивість 1* (невід'ємність). Оскільки

$$(x,x) = \frac{1}{4}\left(\|x+x\|^2 + \|x-x\|^2\right) = \|x\|^2 \ge 0.$$

*Властивість 2* (симетричність). Ця аксіома виконана, оскільки

$$(x, y) = (y, x).$$

*Властивість 3* (адитивність). Для перевірки цієї аксіоми розглянемо функцію, що залежить від трьох векторів.

$$\Phi(x, y, z) = 4\left[(x + y, z) - (x, z) - (y, z)\right].$$

Покажемо, що ця функція тотожно дорівнює нулю.

$$\Phi(x, y, z) = \|x + y + z\|^2 - \|x + y - z\|^2 - \\ - \|x + z\|^2 + \|x - z\|^2 - \|y + z\|^2 + \|y - z\|^2. \quad (3)$$

Із рівності (1) випливає, що

$$\|x + y \pm z\|^2 = 2\|x \pm z\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x \pm z - y\|^2.$$

Підставляючи цю рівність в (3), маємо

$$\Phi(x, y, z) = -\|x + y - z\|^2 + \|x - y - z\|^2 + \\ + \|x + z\|^2 - \|x - z\|^2 - \|y + z\|^2 + \|y - z\|^2. \quad (4)$$

Обчислимо напівсуму виразів (3) і (4).

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{2}\|y + z + x\|^2 + \|y + z - x\|^2 + \\ - \frac{1}{2}\|y - z + x\|^2 + \|y - z - x\|^2 - \|y + z\|^2 + \|y - z\|^2.$$

Внаслідок (1) перший член дорівнює

$$\|y + z\|^2 + \|x\|,$$

а другий —

$$-\|y - z\|^2 - \|x\|.$$

Отже,

$$\Phi(x, y, z) \equiv 0.$$

*Властивість 4* (однорідність). Розглянемо функцію

$$\varphi(c) = (cx, y) - c(x, y).$$

Із рівності (2) випливає, що

$$\varphi(0) = \frac{1}{4}\left(\|g\|^2 - \|g\|^2\right) = 0,$$

а, оскільки $(-x, y) = -(x, y)$, то

$$\varphi(-1) = 0.$$

Отже, для довільного цілого числа *n*

$$(nx, y) = (\operatorname{sgn} n(x + x + \ldots + x), y) =$$
$$= \operatorname{sgn} n\left[(x, y) + (x, y) + \ldots + (x, y)\right] =$$
$$= |n| \operatorname{sgn} n(x, y) = n(x, y).$$

Таким чином,

$$\varphi(n) = 0.$$

При цілих *p*, *q* і $q \neq 0$ маємо

$$\left(\frac{p}{q}x, y\right) = p\left(\frac{1}{q}x, y\right) = \frac{p}{q}q\left(\frac{1}{q}x, y\right) = \frac{p}{q}(x, y).$$

Отже, $\varphi(c) = 0$ при всіх раціональних числах *c*. Оскільки функція φ є неперервною, з цього випливає, що

$$\varphi(c) \equiv 0.$$

**Озн. 16.2.** *Повний передгільбертів простір* $H$ *називається* ***гільбертовим***.

**Приклад 16.1.** Простір $l_2$ із скалярним добутком $(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}x_iy_i$ і нормою $\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2}$ є гільбертовим.

**Приклад 16.2.** Простір $C_2[a,b]$ із скалярним добутком $(x,y)=\int_a^b x(t)y(t)dt$ і нормою $\|x\|=\sqrt{\int_a^b x(t)y(t)dt}$ є гільбертовим.

**Приклад 16.3.** Простір $C\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ з нормою $\|x\|=\max_{t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}|x(t)|$ не є передгільбертовим — в ньому не виконується основна характеристична властивість. Нехай $x(t)=\sin t$ і $y(t)=\cos t$. Оскільки $\|x\|=\|y\|=1$, $\|x+y\|=\sqrt{2}$, $\|x-y\|=1$, то

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=1+2\neq 2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)=2(1+1)=4$$

.

Гільбертів простір є банаховим. Отже, на нього переносяться всі попередні означення і факти.

**Озн. 16.1.** *Елементи x і y гільбертова простору називаються **ортогональними**, якщо* $(x,y)=0$. *Цей факт записується як* $x\perp y$.

**Озн. 16.2.** *Якщо фіксований елемент* $x\in H$ *є ортогональним до кожного елемента деякої множини* $E\subset H$, *говорять, що елемент x є **ортогональним множині** E. Цей факт позначається як* $x\perp E$.

**Озн. 16.3.** *Сукупність усіх елементів, ортогональних до даної множини* $E \subset H$ *є підпростором простору H. Цей підпростір називається* ***ортогональним доповненням*** *множини E.*

**Теорема Релліха.** *Нехай* $H_1$*— підпростір гільбертова простору* $H$ *і* $H_2$ *— його ортогональне доповнення. Будь-який елемент* $x \in H$ *можна єдиним способом подати у вигляді*

$$x = x' + x'',\ x' \in H_1,\ x'' \in H_2. \quad (1)$$

*До того ж елемент* $x'$ *реалізує відстань від x до* $H_1$, *тобто*

$$\|x - x'\| = \rho(x, H_1) = \inf_{y \in H_1} \rho(x, y). \quad (2)$$

Доведення. Позначимо $d = \rho(x, H_1)$. За означенням точної нижньої грані $\inf\limits_{y \in H_1} \rho(x, y)$ існують елементи $x_n \in H_1$ такі, що

$$\|x - x_n\|^2 < d^2 + \frac{1}{n^2},\ n = 1, 2, \ldots \quad (3)$$

Застосуємо лему 16.4 до елементів $x - x_n$ і $x - x_m$:

$$\|(x - x_n) + (x - x_m)\|^2 + \|x_n - x_m\|^2 = 2\left(\|x - x_n\|^2 + \|x - x_m\|^2\right). \quad (4)$$

Оскільки $\frac{1}{2}(x_n + x_m) \in H_1$,

$$\|(x - x_n) + (x - x_m)\|^2 = 4\left\|x - \frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2 \geq 4d^2. \quad (5)$$

Отже,

$$\left\| x_n - x_m \right\|^2 \le 2\left( d^2 + \frac{1}{n^2} + d^2 + \frac{1}{m^2} \right) - 4d^2 = \frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2}.$$

Таким чином, послідовність $\left\{ x_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною. Оскільки $H$ — повний простір, $\exists x' = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. В гільбертовому просторі будь-який підпростір є замкненою лінійною множиною, отже $x' \in H_1$.

Перейдемо до границі в нерівності (3). Отримаємо, що

$$\left\| x - x' \right\| \le d. \tag{6}$$

З іншого боку,

$$\forall y \in H_1 \ \left\| x - y \right\| \ge d \Rightarrow \left\| x - x' \right\| \ge d. \tag{7}$$

Порівнюючи нерівності (6) і (7), доходимо висновку, що

$$\left\| x - x' \right\| = d.$$

Доведемо твердження:

$$x'' = x - x' \perp H_1 \Rightarrow x'' \in H_2.$$

Візьмемо $y \in H_1,\ y \ne 0$. Тоді

$$\forall \lambda \in R^1 \ \ x' + \lambda y \in H_1 \Rightarrow \left\| x'' - \lambda y \right\|^2 = \left\| x - \left( x' + \lambda y \right) \right\|^2 \ge d^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left( x'' - \lambda y, x'' - \lambda y \right) = \left( x'', x'' \right) - \lambda\left( x'', y \right) - \lambda\left( y, x'' \right) + \lambda^2\left( y, y \right) =$$

$$= d^2 - \lambda\left( x'', y \right) - \lambda\left( y, x'' \right) + \lambda^2\left( y, y \right) \ge d^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\lambda\left( x'', y \right) - \lambda\left( y, x'' \right) + \lambda^2\left( y, y \right) \ge 0.$$

Покладемо $\lambda = \dfrac{\left( x'', y \right)}{\left( y, y \right)}$. Тоді

$$-\frac{\left(x'',y\right)^2}{\left(y,y\right)}-\frac{\left(x'',y\right)^2}{\left(y,y\right)}+\frac{\left(x'',y\right)^2}{\left(y,y\right)}\ge 0 \Rightarrow \left(x'',y\right)^2 \le 0.$$

Це можливо лише тоді, коли

$$\left(x'',y\right)=0 \Rightarrow x'' \perp y.$$

Доведемо тепер єдиність подання (1). Припустимо, що існують два подання:

$x = x' + x'', x' \in H_1, x'' \in H_2$ і

$x = x_1' + x_1'', x_1' \in H_1, x_1'' \in H_2$.

З цього випливає, що

$$x' - x_1' = x_1'' - x'',\ x' - x_1' \in H_1, x_1'' - x'' \in H_2$$

$$\Rightarrow x' - x_1' \perp x_1'' - x'' \Rightarrow$$

$\Rightarrow x' - x_1' = x_1'' - x'' = 0$. ■

**Озн. 16.4.** *Елементи* $x'$ *і* $x''$, *які однозначно визначаються елементом* $x = x' + x''$, *називаються* ***проекціями*** *елемента* $x$ *на підпростори* $H_1$ *і* $H_2$ *відповідно.*

**Теорема Рісса.** *Якщо* $f \in H^*$, *то існує єдиний елемент* $y(f) \in H$, *такий що* $f(x) = (x,y)$ *для довільного* $x \in H$, *та* $\|f\|_{H^*} = \|y\|_H$.

Доведення. Спочатку доведемо існування елемента $y$. Позначимо через $H_0 = Ker\ f$ множину тих елементів $x \in H$, які функціонал $f$ відображає в нуль:

$$\forall x \in H_0\ f(x) = 0.$$

Оскільки $f \in H^*$, він є лінійним і неперервним, отже, $H_0 = Ker\ f$ — підпростір, тобто замкнена лінійна множина. Якщо $H_0 = H$, покладемо $y = 0$.

Розглянемо випадок, коли $H_0 \neq H$. Нехай $y_0 \in H \setminus H_0$. За теоремою Релліха подамо його у вигляді

$$y_0 = y' + y'',\ y' \in H_0, y'' \perp H_0.$$

Якщо $y'' \neq 0$, то $f(y'') \neq 0$. Значить, можна покласти

$$f(y'') = 1$$

(інакше ми могли б взяти замість $y''$ елемент $\dfrac{y''}{f(y'')}$).

Виберемо довільний елемент $x \in H$ і позначимо $f(x) = \alpha$. Розглянемо елемент $x' = x - \alpha y''$. Тоді

$$f(x') = f(x) - \alpha f(y'') = \alpha - \alpha = 0.$$

Отже,

$$x' \in H_0 \Rightarrow (x, y'') = (x' + \alpha y'', y'') = \alpha (y'', y'') \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \alpha = \left( x, \frac{y''}{(y'', y'')} \right) \Rightarrow y = \frac{y''}{(y'', y'')}.$$

Доведемо єдиність цього елемента. Дійсно, якщо

$$\forall x \in H\ \exists y, y_1 \in H\ (x, y) = (x, y_1),$$

то

$$(x, y - y_1) = 0 \Rightarrow y - y_1 \perp H \Rightarrow y = y_1.$$

Оцінимо норму функціонала.

$$|f(y)| \leq \|f\| \|y\| \Rightarrow \|f\| \geq f\left( \frac{y}{\|y\|} \right) = \frac{(y, y)}{\|y\|} = \|y\|.$$

З іншого боку,

$$\left|f(x)\right| = \left|(x, y)\right| \le \|x\| \cdot \|y\| \Rightarrow \|f\| \le \|y\|. \blacksquare$$

**Зауваження.** З теореми Рісса випливає, що між гільбертовим простором $H$ і спряженим простором $H^*$ існує ізоморфізм, і скалярні добутки вичерпують весь запас функціоналів, які можна задати на просторі $H$.

### Література


1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1981. — с. 143–147.
2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. — М.: 1977. — с. 160–167, 197–198.

## 17. Теорема про ізоморфізм

Обравши в $n$-вимірному евклідовому просторі ортогональний нормований базис $e_1, e_2, ..., e_n$, можна кожний вектор $x \in R^n$ записати у вигляді

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k , \qquad (1)$$

де

$$c_k = (x, e_k).$$

Постає питання, як узагальнити цей розклад на випадок нескінченновимірного евклідова простору. Введемо наступні поняття.

**Озн. 17.1.** *Система ненульових векторів* $\{e_k\} \subset E$ *називається* ***ортогональною****, якщо*

$$(e_k, e_l) = 0 \text{ при } k \neq l.$$

**Озн. 17.2.** *Система* $\{e_k\} \subset E$, *елементи якої задовольняють умову*

$$(e_k, e_l) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } k \neq l, \\ 1, \text{ якщо } k = l \end{cases}$$

*називається* ***ортонормованою***.

Нагадаємо означення із теорії лінійних просторів.

**Озн. 17.3.** *Найменший лінійний підпростір, що містить множину* $A$ *у лінійному просторі* $X$, *називається* ***лінійною оболонкою*** *множини* $A$, *або* ***лінійним підпростором, що породжений множиною*** $A$. *Цей підпростір позначається як* $\mathrm{span}\, A$.

**Зауваження 17.1.** Лінійна оболонка *лінійної* множини $A$ є замкненою, але якщо множина $A$ є довільною, це не обов'язково так. В той же час у *нормованих* просторах підпростори є замкненими за означенням, тому лінійна оболонка множини в нормованому просторі є замкненою.

**Озн. 17.4.** *Система* $\{e_k\} \subset E$ *називається* ***повною***, *якщо її лінійна оболонка є скрізь щільною в E, тобто* $\overline{span\{e_k\}} = E$.

**Озн. 17.5.** *Повна ортонормована система* $\{e_k\} \subset E$ *називається* ***ортонормованим базисом***.

**Приклад 17.1.** В просторі $l_2$ ортонормований базис утворюють послідовності $e_i = \left( 0,\ldots,0,\underbrace{1}_{i-\text{тий}},0,\ldots,0,\ldots \right)$.

Скалярний добуток: $(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$.

**Приклад 17.2.** В просторі $C_2(a,b)$ ортонормований базис утворюють вектори

$$\frac{1}{2}, \cos\frac{2\pi t}{b-a}, \sin\frac{2\pi t}{b-a}, \ldots, \cos n\frac{2\pi t}{b-a}, \sin n\frac{2\pi t}{b-a}, \ldots .$$

Скалярний добуток: $(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$.

**Лема 17.1**. *В сепарабельному евклідовому просторі будь-яка ортогональна система є не більш ніж зліченною.*

Доведення. Не обмежуючи загальності, розглянемо ортонормовану систему $\{\varphi_k\} \subset E$. Тоді

$$\|\varphi_k-\varphi_l\|=\sqrt{(\varphi_k-\varphi_l,\varphi_k-\varphi_l)}=$$
$$=\sqrt{(\varphi_k,\varphi_k)-2(\varphi_k,\varphi_l)+(\varphi_l,\varphi_l)}=$$
$$=\sqrt{(\varphi_k,\varphi_k)+(\varphi_l,\varphi_l)}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}.$$

Розглянемо сукупність куль $S\left(\varphi_k,\frac{1}{2}\right)$. Ці кулі не перетинаються. Якщо зліченна множина $\{\psi_k\}$ є скрізь щільною в $E$, то в кожну кулю потрапить принаймні один елемент $\psi_k$. Отже, потужність множини таких куль не може перевищувати потужність зліченої множини. ■

**Озн. 17.6.** *Ортонормована система* $\{\varphi_k\}\subset E$ *називається **замкненою**, якщо для довільного* $f\in E$ *виконується рівність Парсеваля*

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2=\|f\|^2. \tag{2}$$

**Озн. 17.6.** *Нехай* $\{\varphi_k\}\subset E$ *— ортонормована система в евклідовому просторі, а* $f$ *— довільний елемент із E. Поставимо у відповідність елементу* $f\in E$ *послідовність чисел*

$$c_k=(f,\varphi_k),\ k=1,2,\ldots$$

*Числа* $c_k$ *називаються **координатами**, або **коефіцієнтами Фур'є** елемента* $f$ *по системі* $\{\varphi_k\}\in E$*, а ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k\varphi_k$$

*називається* ***рядом Фур'є*** *елемента* $f$ *по системі* $\{\varphi_k\} \in E$.

**Теорема 17.1**. *Ряд Фур'є збігається тоді і лише тоді, коли система* $\{\varphi_k\} \in E$ *є замкненою.*

Доведення. Розглянемо суму

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$$

і для заданого числа $n$ відшукаємо коефіцієнти $\alpha_k$, що мінімізують $\| f - S_n \|^2$.

$$\| f - S_n \|^2 = \left( f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k, \, f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right) =$$

$$= ( f, f ) - 2 \left( f, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right) + \left( \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right) =$$

$$= \| f \|^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} \alpha_k c_k + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 =$$

$$= \| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \sum_{k=1}^{n} ( \alpha_k - c_k )^2 .$$

Мінімум цього виразу досягається тоді, коли останній член дорівнює нулю, тобто, коли

$$\alpha_k = c_k, \; k = 1, 2, ..., n.$$

В цьому випадку

$$\| f - S_n \|^2 = \| f \|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2. \qquad (3)$$

Оскільки $\| f - S_n \|^2 \geq 0$, то

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leq \| f \|^2 .$$

Переходячи до границі при $n \to \infty$, отримуємо нерівністю Бесселя:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \| f \|^2 . \qquad (4)$$

Із тотожності (3) випливає, що рід Фур'є збігається тоді і лише тоді, коли виконується рівність Парсеваля, тобто система є замкненою. ■

**Теорема 17.2.** *В сепарабельному евклідовому просторі E будь-яка повна ортонормована система є замкненою, і навпаки.*

Доведення. Необхідність. Нехай система $\{\varphi_k\} \subset E$ є замкненою. Тоді за теоремою 17.1 для довільного елемента $f \in E$ послідовність часткових сум його ряду Фур'є збігається до $f$. Це означає, що $\overline{span\{\varphi_k\}} = E$, тобто система $\{\varphi_k\}$ є повною.

Достатність. Нехай система $\{\varphi_k\}$ є повною, тобто довільний елемент $f \in E$ можна скільки завгодно точно апроксимувати лінійною комбінацією $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$ елементів системи $\{\varphi_k\}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k : \left\| f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right\| < \varepsilon .$$

За теоремою 17.1 елементом найкращого наближення серед усіх сум вигляду $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k$ є ряд Фур'є. Отже, цей ряд збігається, а, значить, виконується рівність Парсеваля, тобто система $\{\varphi_k\}$ є замкненою.■

**Теорема Рісса–Фішера.** *Нехай* $\{\varphi_k\}\subset E$ *— довільна ортонормована система в гільбертовому просторі E, а числа* $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ *є такими, що ряд* $\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2$ *є збіжним. Тоді існує такий елемент* $f\in E$*, такий що* $c_k=(f,\varphi_k)$ *і* $\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2=(f,f)=\|f\|^2$.

Доведення. Розглянемо суму

$$f_n=\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k .$$

Тоді,

$$\|f_{n+p}-f_n\|^2=\|c_{n+1}\varphi_{n+1}+\ldots+c_{n+p}\varphi_{n+p}\|^2=\sum_{k=n+1}^{n+p}c_k^2.$$

Оскільки ряд $\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2$ є збіжним, а простір $E$ — повним, послідовність $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до деякого елемента $f\in E$. Оцінимо наступний скалярний добуток.

$$(f,\varphi_i)=(f_n,\varphi_i)+(f-f_n,\varphi_i).$$

При $n\geq i$ перший доданок дорівнює $c_i$, а другий доданок при $n\to\infty$ прямує до нуля, оскільки

$$\left|\left(f-f_n,\varphi_i\right)\right|\le\left\|f-f_n\right\|\left\|\varphi_i\right\|.$$

Ліва частина рівності від $n$ не залежить. Переходячи до границі при $n\to\infty$, доходимо висновку, що

$$\left(f,\varphi_i\right)=c_i.$$

Оскільки за означенням елемента $f$

$$\lim_{n\to\infty}\left\|f-f_n\right\|=0,$$

то

$$\left(f-\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k,\,f-\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k\right)=\left(f,f\right)-\sum_{k=1}^{n}c_k^2\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Отже,

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2=\left(f,f\right).$$

**Теорема про ізоморфізм.** *Довільні два сепарабельних гільбертових простора є ізоморфними один до одного.*

Доведення. Покажемо, що кожний гільбертів паростір $H$ є ізоморфним простору $l_2$. Це доведе теорему про ізоморфізм.

Виберемо в $H$ довільну повну ортонормовану систему $\left\{\varphi_k\right\}\subset H$ і поставимо у відповідність елементу $f\in H$ сукупність його коефіцієнтів Фур'є за цією системою $c_1,c_2,\ldots,c_n,\ldots$. Оскільки $\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2<\infty$, то послідовність $\left\{c_1,c_2,\ldots,c_n,\ldots\right\}$ належить $l_2$. І навпаки, за теоремою Рісса–Фішера довільному елементу $\left\{c_1,c_2,\ldots,c_n,\ldots\right\}\in l_2$ відповідає деякий елемент $f\in H$, у якого числа

$c_1, c_2, ..., c_n, ...$ є коефіцієнтами Фур'є за системою $\{\varphi_k\} \subset E$. Ця відповідність є взаємно-однозначною. Крім того, якщо

$$f \leftrightarrow \{c_1, c_2, ..., c_n, ...\},$$

і

$$g \leftrightarrow \{d_1, d_2, ..., d_n, ...\},$$

то

$$f + g \leftrightarrow \{c_1 + d_1, c_2 + d_2, ..., c_n + d_n, ...\}$$

і

$$\alpha f \leftrightarrow \{\alpha c_1, \alpha c_2, ..., \alpha c_n, ...\}.$$

Крім того, із рівності Парсеваля випливає, що

$$(f, f) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2, \quad (g, g) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2,$$

$$(f + g, f + g) = (f, f) + 2(f, g) + (g, g) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (c_k + d_k)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} c_k d_k + \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2.$$

Отже,

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k d_k .$$

Таким чином, установлена відповідність між елементами просторів $H$ і $l_2$ є ізоморфізмом. ■

## Література

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1981. — с. 149–157.