Лекція 2

Метод послідовних наближень для інтегральних рівнянь з полярним ядром

[1, стор. 280 - 283], [2, стор. 170 - 173], [3, стор. 54 - 56]

Ядро  називаєтьсяполярним, якщо воно представляється у вигляді:

 (1.20),

де  ,, (*n* – розмірність евклідового простору).

Ядро називається слабо полярним , якщо .

Метод послідовних наближень для інтегральних рівнянь з неперервним ядром мав вигляд:

; .

Оцінки, що застосовувались для неперервних ядер не працюють для полярних ядер, тому що максимум полярного ядра рівний нескінченності (ядро необмежене в рівномірній метриці), отже, сформулюємо лему аналогічну лемі 1 для полярних ядер.

**Лема 3** Інтегральний оператор  з полярним ядром переводить  і при цьому має місце оцінка:  (1.21),

де  (1.22)

**Доведення**: Спочатку доведемо, що функція  неперервна в точці . Оцінимо при умові вираз:





винесемо  у вигляді , а інтеграл розіб’ємо на два інтеграли: інтеграл по  - кулі з центром в т. і радіусом ;інтеграл по залишку .

.

Оцінимо тепер кожний з інтегралів:

, де  max функції .

Введемо узагальнені сферичні координати з центром у точці  в просторі :

;

;

…………………………………………….;

;



Якобіан переходу має вигляд: 



Отримаємо , де - площа поверхні одиничної сфери в n-вимірному просторі .

Оскільки , то 

Оскільки  то



Таким чином ми довели, що , тобто функція  неперервна точці 

Доведемо оцінку:, 



, отже 

Покажемо скінченність  Розглянемо 

Для будь-якої точки , існує радіус (рівний максимальному діаметру області  такий, що в кулю з цим радіусом попадає будь – яка точка : 



**Теорема 3** *(про існування розв’язку інтегрального рівняння Фредгольма з полярним ядром для малих значень параметру)* Інтегральне рівняння Фредгольма 2-го роду з полярним ядром  має єдиний розв’язок в класі неперервних функцій для будь – якого неперервного вільного члена  при умові  (1.23),  
 і цей розв’язок може бути представлений рядом Неймана, який збігається абсолютно і рівномірно.

**Доведення:** Сформулюємо умову збіжності ряду Неймана , отже  Останній ряд – геометрична прогресія і збігається при умові 

**Лема 4** Нехай маємо два полярних ядра  , , ,а область  обмежена, тоді ядро  – також полярне, причому має місце співвідношення:

 (1.24) де ,  неперервні функції.

Без доведення

З леми 4 випливає, що всі повторні ядра  полярного ядра  задовольняють оцінкам:



 (1.25)

 (1.26)

 (1.27)

Легко бачити, що для  існує  таке, що починаючи з нього всі повторні ядра є неперервні:

  (1.28)

Звідси маємо, що *резольвента*  полярного ядра  складається з двох частин полярної складової  і неперервної складової :

 (1.29)

Для доведення збіжності резольвенти, потрібно дослідити збіжність ряду . Він сходиться рівномірно при ; , , визначаючи неперервну функцію  при ;  і аналітичну по в крузі . (1.30)

Дійсно .  де . Таким чином ряд  мажорується геометричною прогресією, яка збігається при умові (1.30).

§2. Теореми Фредгольма.

Інтегральні рівняння з виродженим ядром

[1, стор. 286 - 292]

**Означення** Неперервне ядро  називається виродженим , якщо представляється у вигляді  (2.1)   та - лінійно незалежні системи функцій.

Розглянемо інтегральні рівняння Фредгольма з виродженим ядром  (2.2)

Підставимо вигляд ядра з (2.1) отримаємо:

 (2.3)

Де . (2.4)

В (2.4) підставимо значення  з (2.3):



В результаті отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

,  (2.5)

Де ,  (2.6)

Отримаємо систему рівнянь для спряженого ядра:

 (2.1/)

 (2.2/)

 (2.3/)

  (2.4/)

,  (2.5/)

, (2.6/)

 (2.7)

Тобто отримуємо системи лінійних рівнянь які в матричному вигляді запишуться так:

 (2.8) (2.8/)

з матрицями  та  відповідно і визначником 

Дослідимо питання існування та єдиності розв’язку систем ЛАР (2.8) та (2.8’).

Нехай , , тоді СЛР (2.8) і (2.8’) мають єдиний розв’язок для будь-яких векторів  і  відповідно, а тому інтегральні рівняння Фредгольма (2.2), (2.2/) мають єдині розв’язки при будь-яких  та  відповідно, і ці розв’язки записуються за формулами (2.3), (2.3/).

Нехай , , тоді однорідні СЛР

 (2.9)   
та  (2.9/)

мають  лінійно незалежних розв’язків , , , де , , таким чином відповідні однорідні інтегральні рівняння Фредгольма до рівнянням (2.2), (2.2’) мають  лінійно незалежних розв’язків які записуються за такими формулами :

  (2.10)

  (2.10’)

,  - власні функції, а число  - кратність характеристичного числа та . Кожна з систем функцій ,  ,  лінійно незалежна, оскільки лінійно незалежними є системи функцій  та  і лінійно незалежні вектори  .

Нагадаємо одне з формулювань теореми Кронекера - Капеллі. Для існування розв’язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь необхідно і достатньо що би вільний член рівняння був ортогональним всім розв’язкам спряженого однорідного рівняння.

Для нашого випадку цю умову можна записати у вигляді  (2.11)

Покажемо, що для виконання умови  необхідно і достатньо, щоб вільний член інтегрального рівняння Фредгольма (2.2) був ортогональним розв’язкам спряженого однорідного рівняння тобто   
,  (2.12)

Дійсно, з (2.10’) та (2.4) маємо:

 

В цьому випадку розв’язок системи ЛАР не єдиний, і визначається з точністю до довільного розв’язку однорідної системи рівнянь, тобто з точністю до лінійної оболонки натягнутої на систему власних векторів характеристичного числа  :

 (2.13),

де  - довільні константи,  - будь-який розв’язок неоднорідної системи рівнянь , тоді розв’язок інтегрального рівняння можна записати у вигляді:

 (2.14),

 - довільний розв’язок неоднорідного рівняння .

Отже доведені такі теореми:

**Теорема 1** *(Перша теорема Фредгольма для вироджених ядер)* Якщо , то інтегральне рівняння (2.2) та спряжене до нього (2.2’) мають єдині розв’язки для довільних вільних членів  та  з класу неперервних функцій.

**Теорема 2** *(Друга теорема Фредгольма для вироджених ядер)* Якщо , то однорідне рівняння Фредгольма другого роду (2.2) () і спряжене до нього (2.2’) () мають однакову кількість лінійно незалежних розв’язків рівну , де 

**Теорема 3** *(Третя теорема Фредгольма для вироджених ядер)* Якщо , то для існування розв’язків рівняння (2.2) необхідно і достатньо, щоб вільний член  був ортогональним усім розв’язкам однорідного спряженого рівняння (2.12). При виконанні цієї умови розв’язок існує та не єдиний і визначається з точністю до лінійної оболонки натягнутої на систему власних функцій характеристичного числа .

**Наслідок 1** Характеристичні числа виродженого ядра  співпадають з коренями поліному ,а їх кількість не перевищує .

**Приклад 1:** Знайти розв’язок інтегрального рівняння



Розв’язок: 

Позначимо  

. Підставляючи останню рівність в попередні отримаємо систем рівнянь:



Після обчислення інтегралів:

 Визначник цієї системи 

За правилом Крамера маємо   

Таким чином розв’язок має вигляд 