Лекція 3

Теореми Фредгольма для інтегральних рівнянь з неперервним ядром.

[1, стор. 293 - 297]

Будемо розглядати рівняння:

 (2.2)

 (2.2/)

Ядро , отже його можна наблизити поліномом (Теорема Вєйєрштраса).

Тобто, для будь-якого  існує  (2.14)

де , , такий що , 

тобто  (2.15),

де  - вироджене ядро (поліном), , .

Виходячи з (2.15), інтегральне рівняння Фредгольма приймає вигляд

 (2.16),

де  та  інтегральні оператори з ядрами  та  відповідно, ().

Для спряженого рівняння маємо:

 (2.15/),

 (2.16/).

Покажемо, що в класі  рівняння (2.16), (2.16’) еквівалентні рівнянням з виродженим ядром:

Введемо нову функцію  (2.17)

З (2.16) випливає що  з (1.19) випливає що  такого що  , де  - резольвента для . Отже .

Таким чином, рівняння (2.2) перетворюється на

 (2.18).

Для спряженого рівняння (2.2/) маємо:

 Позначимо 

Маємо:  (2.18/).

Оскільки  то рівняння (2.18) та (2.18’) спряжені.

Позначимо  (2.19),

 (2.19/). Тоді рівняння Фредгольма з неперервним ядром можна записати у вигляді:

 (2.20).

 , де (2.20/).

 – вироджене, оскільки є сумою двох вироджених, поліному  та інтегрального доданку. Покажемо що другий доданок в  - вироджений дійсно:



Альтернатива Фредгольма

Сукупність теорем Фредгольма для інтегральних рівнянь з неперервним ядром називається *альтернативою Фредгольма.*

**Теорема 1** *(Перша теорема Фредгольма для неперервних ядер)* Якщо інтегральне рівняння (2.2) з неперервним ядром  має розв’язок  то і спряжене рівняння (2.2/) має розв’язок для  і ці розв’язки єдині.

**Теорема 2** *(Друга теорема Фредгольма для непевних ядер)* Якщо інтегральне рівняння (2.2) має розв’язки не для будь – якого вільного члена  то однорідні рівняння  (\*) та  (\*\*) мають однакову скінчену кількість лінійно незалежних розв’язків.

**Теорема 3** *(Третя теорема Фредгольма для неперервних ядер)* Якщо інтегральне рівняння (2.2) має розв’язок не для  вільного члена , то для існування розв’язку інтегрального рівняння (2.2) в  необхідно і достатньо, щоб вільний член  був ортогональним всім розв’язкам спряженого однорідного рівняння (\*\*). Розв’язок не єдиний і визначається з точністю до лінійної оболонки, натягнутої на систему власних функцій оператора .

**Доведення теорем:**

Для будь – якого фіксованого значення  виберемо , таке щоби .

**Теорема 1.** Нехай (2.2) має розв’язок в  для ∀ вільного члена  тоді еквівалентне йому рівняння (2.20):  має такі ж властивості і згідно з першою теоремою Фредгольма для вироджених ядер , а спряжене до нього рівняння (2.20’):  теж має єдиний розв’язок ∀ вільного члена , еквівалентне до нього рівняння (2.2/) має розв’язок . Таким чином перша теорема доведена.

**Теорема 2**. Нехай (2.2) має розв’язок не  вільного члена , тоді, рівняння з виродженим ядром (2.20) має таку ж властивість. Згідно з теоремами Фредгольма для вироджених ядер  (для виродженого ядра ). Однорідні рівняння які відповідають (2.20) і (2.20’) мають однакову скінчену кількість лінійно незалежних розв’язків, еквівалентні до них однорідні рівняння (\*), (\*\*) теж мають однакову скінчену кількість лінійно незалежних розв’язків. Таким чином друга теорема Фредгольма доведена.

**Теорема 3**. Нехай неоднорідне рівняння (2.2) має розв’язок не для будь-якого вільного члена , тоді еквівалентне рівняння з виродженим ядром (2.20) має таку ж властивість, і за третьою теоремою Фредгольма для вироджених ядер  (для виродженого ядра ). Розв’язок (2.20) існує тоді і тільки тоді коли ортогональний до розв’язків спряженого однорідного рівняння до (2.20’). Але легко бачити, що вільний член (2.2) і (2.20) співпадають, так само співпадають розв’язки однорідного рівняння (2.2/) і (2.20/). Таким чином доведена третя теорема Фредгольма.

**Теорема 4** (*Четверта теорема Фредгольма*) Для будь-якого як завгодно великого числа  в крузі  лежить лише скінчена кількість характеристичних чисел неперервного ядра .

Наслідки з теорем Фредгольма

**Наслідок 1** З четвертої теореми Фредгольма випливає, що множина характеристичних чисел неперервного ядра не має скінчених граничних точок і не більш ніж злічена .

**Наслідок 2** З другої теореми Фредгольма випливає, що кратність кожного характеристичного числа скінчена, їх можна занумерувати у порядку зростання модулів , кожне число зустрічається стільки разів, яка його кратність. Також можна занумерувати послідовність власних функцій ядра  і спряженого ядра  .

**Наслідок 3** Власні функції неперервного ядра  неперервні в області .

**Наслідок 4** Якщо   .

Наслідок 4 довести самостійно.

Теореми Фредгольма для інтегральних рівнянь з полярним ядром.

[1, стор. 299 - 301]

Розповсюдимо Теореми Фредгольма для інтегральних рівнянь з полярним ядром:

,  (2.21).

Покажемо що  існує таке вироджене ядро  що,  (2.22) .

 (2.22/).

Розглянемо неперервне ядро

 (2.23).   
Покажемо, що при достатньо великому  має місце оцінка .

Дійсно: 

, де - площа поверхні одиничної сфери.

Завжди можна підібрати вироджене ядро  таке, що , де - об’єм області . 

Використавши попередню техніку (для неперервного ядра) інтегральне рівняння з полярним ядром зводиться до еквівалентного рівняння з виродженим ядром. Тобто теореми Фредгольма залишаються вірними для інтегральних рівнянь з полярним ядром з тим же самим формулюванням.

Теореми Фредгольма залишаються вірними для інтегральних рівнянь з полярним ядром на обмеженій кусково-гладкій поверхні S та контурі С:  , 

§3. Інтегральні рівняння з ермітовим ядром

[1, стор. 301 - 304]

Розглядатимемо ядро таке що .

Неперервне ядро – будемо називати *ермітовим*, якщо виконується  (3.1)

Ермітовому ядру відповідає *ермітовий оператор,* тобто .

**Лема 1** Для того, щоб лінійний оператор був ермітовим, необхідно і достатньо, щоб для довільної комплексно значної функції  білінійна форма  приймала лише дійсні значення.

**Лема 2** Характеристичні числа ермітового оператора дійсні.

**Означення 1** Множина функцій - компактна в рівномірній метриці, якщо з будь-якої нескінченної множини функцій з М можна виділити рівномірно збіжну підпослідовність.

**Означення 2** Нескінченна множина - рівномірно обмежена, якщо для будь-якого елемента  має місце , де  єдина константа для .

**Означення 3** Множина - одностайно неперервна якщо , : , ,  як тільки .

**Теорема 1** (Арчела – Асколі) (*критерій компактності в рівномірній метриці*). Для того, щоб множина  була компактною, необхідно і достатньо, щоб вона складалась з рівномірно-обмеженої і одностайно-неперервної множини функцій.

**Означення 4** Назвемо оператор – цілком неперервним з , якщо він переводить обмежену множину в  у компактну множину в  (в рівномірній метриці).

**Лема 3** Інтегральний оператор  з неперервним ядром  є цілком неперервний з.

**Доведення:** Нехай  та , . Але , тобто множина функцій є рівномірно обмеженою.

Покажемо що множина  - одностайно неперервна.

Ядро  а отже є рівномірно неперервним, бо неперервне на компакті, тобто , : :   . Дійсно : 

**Приклад 1** Знайти характеристичні числа та власні функції інтегрального оператора 

**Розв’язок** 

Позначимо  

 

 

  

З системи однорідних рівнянь при  маємо 

Тоді маємо власну функцію 

при  маємо  Маємо другу власну функцію 

**Приклад 2** Знайти розв’язок інтегрального рівняння при всіх значеннях параметрів 



**Розв’язок:** Запишемо рівняння у вигляді: 

Введемо позначення:  та запишемо розв’язок у вигляді : 

Для визначення констант отримаємо систему ЛАР:

 Визначник системи дорівнює 

Характеристичні числа ядра .

Нехай . Тоді розв’язок існує та єдиний для будь – якого вільного члена і має вигляд



Нехай  Тоді система рівнянь має вигляд:

 Друге рівняння було помножено на 

Ранги розширеної і основної матриці співпадатимуть якщо має місце рівність  (\*)

При виконанні цієї умови розв’язок існує , 

Таким чином розв’язок можна записати



Якщо , а умова (\*) не виконується, то розв’язків не існує.

Нехай . Після підстановки цього значення отримаємо систему ЛАР

 Друге рівняння було помножено на 

Остання система має розв’язок при умові,  (\*\*)

При виконанні ї умови (\*\*) розв’язок існує , 

Розв’язок інтегрального рівняння можна записати:

