Лекція 4

Характеристичні числа ермітового неперервного ядра

[1, стор. 304 - 306]

**Теорема 1** (*Про існування характеристичного числа у ермітового неперервного ядра*). Для будь-якого ермітового неперервного ядра, що не дорівнює тотожно нулю існує принаймні одне характеристичне число і найменше з них за модулем  задовольняє варіаційному принципу  (3.2).

Доведення:

Серед усіх  оберемо такі, що . Позначимо . Оскільки , то .

Згідно до визначення точної верхньої межі, , .

Оцінимо . Покажемо, що  в середньому квадратичному. Тобто .

Дійсно:

 Розглянемо послідовність , яка є компактною в рівномірній метриці. Звідси підпослідовність  збіжна в , тобто , така що .

Покажемо, що  в кожній точці, тобто .



Таким чином має місце рівність  (3.3).

Отже маємо: . Ця рівність може мати місце у двох випадках:

**1)**. Тоді , а отже  - власна функція,  - характеристичне число оператора .

**2)** . Тоді . Тоді , а отже  - власна функція,  - характеристичне число оператора .

Залишилось довести, що це характеристичне число є мінімальним за модулем.

Припустимо супротивне:

Нехай , тоді =>  .

Зауваження

Доведена теорема є вірною і для ермітових полярних ядер [1, стор. 307 - 308].

Звідси безпосередньо випливають такі властивості характеристичних чисел та власних функцій ермітового ядра:

1. Множина характеристичних чисел ермітового неперервного ядра не порожня, є підмножиною множини дійсних чисел і не має скінчених граничних точок.

2. Кратність будь-якого характеристичного числа скінчена.

3. Власні функції можна вибрати так, що вони утворять ортонормовану систему. Тобто  такі що .

(Зокрема достатньо провести процес ортогоналізації Гілберта - Шмідта для будь-якої системи лінійно незалежних власних функцій, і пронормувати отриману систему).

§4. Теорема Гілберта - Шмідта та її наслідки

Білінійне розвинення ермітового неперервного ядра

[1, стор. 308 - 310]

Нехай  ермітове неперервне ядро, його характеристичні числа і  ортонормована система власних функцій, що відповідають власним числам.

Розглянемо послідовність ермітових неперервних ядер:

, (4.1).



Дослідимо властивості операторів (4.1).

Покажемо, що будь-яке характеристичне число  та відповідна йому власна функція  є характеристичним числом і власною функцією ядра .

 (4.2).

Нехай ,  - характеристичне число та відповідна власна функція , тобто  Покажемо що, :  для . , .

Отже ,  відповідно характеристичне число і власна функція ядра .

Таким чином  - ортогональна до усіх власних функцій , таким чином,  співпадає з одним із характеристичних чисел  тобто  для деякого .

Отже у ядра  множина власних функцій і характеристичних чисел вичерпується множиною власних функцій і характеристичних чисел ядра  починаючи з номера .

Враховуючи, що  найменше за модулем характерне число ядра , має місце нерівність  .

Для ядра, що має скінчену кількість характеристичних чисел, очевидно, має місце рівність .

Тобто будь-яке ермітове ядро зі скінченою кількістю характеристичних чисел є виродженим і представляється у вигляді .

Враховуючи теорему про існування характеристичних чисел у ермітового оператора можемо записати:

 (4.3).

Тобто можна вважати, що ермітове ядро в розумінні (4.3) наближається наступним білінійним рядом:

 (4.4) .

Для виродженого ядра маємо його представлення у вигляді  (4.5).

Ряд Фур’є функції із *L*2(*G*)

Розглянемо довільну функцію  і деяку ортонормовану систему функцій , .

*Рядом Фур`є* функції  із  називається ряд

 (4.6),

 - називається *коефіцієнтом Фур`є*.

 виконується *нерівність Бесселя* :

(4.7).

Нерівність Бесселя гарантує збіжність ряду Фур’є в середньоквадратичному, але не обов’язково до функції .

**Означення** Ортонормована система функцій  з  називається повною (замкненою), якщо ряд Фур’є для будь – якої функції  по цій системі функцій збігається до цієї функції в просторі .

**Теорема 2** (*Критерій замкненості ортонормованої системи функцій*)Для того щоб система функцій  була повною в  необхідно і достатньо, щоб для будь-якої функції ** виконувалось *рівність* Парсеваля – Стеклова  (4.8).

Теорема Гілберта – Шмідта

[1, стор. 310 - 312]

Функція **** називається*джерелувато - зображуваною*через ермітове неперервне ядро , , якщо існує функція  така, що  (4.9).

**Теорема 3** *(Гільберта – Шмідта*) Довільна джерелувато - зображувана функція  розкладається в абсолютно і рівномірно збіжний ряд Фур`є за системою власних функцій ермітового неперервного ядра .

**Доведення:** Обчислимо коефіцієнти Фур`є . Отже ряд Фур’є функції  має вигляд  (4.10).

Якщо власних чисел скінчена кількість, то з (4.5) випливає, що , якщо ж власних чисел злічена кількість, то з (4.3) випливає співвідношення:

, .

Покажемо, що формулу (4.4) можна розглядати як розвинення ядра  в ряд Фур’є по системі власних функцій . Перевіримо це обчислюючи коефіцієнт Фур’є . Доведемо рівномірну збіжність ряду Фур’є (4.10) за критерієм Коші і покажемо, що при , відрізок ряду прямує до нуля. За нерівністю Коші - Буняківського маємо:

.

, тобто ряд збігається, а вказана сума прямує до 0 при .

, тобто ряд збігається.

Отже 

а отже  збігається абсолютно і рівномірно.

**Наслідок 1** Довільне повторне ядро для ермітового неперервного ядра  розкладається в білінійний ряд по системі власних функцій ермітового неперервного ядра, який збігається абсолютно і рівномірно. ,  де коефіцієнти Фур’є  .

Повторне ядро  є джерелувато-зображувана функція і таким чином для цього має місце теорема Гільберта – Шмідта.

Доведемо деякі важливі нерівності:

 (4.11).

Рівність (4.11) випливає з наслідку 1. Проінтегруємо (4.11), отримаємо  (4.12).

**Теорема** 4 *(Про збіжність білінійного ряду для ермітового неперервного ядра )* Ермітове неперервне ядро  розкладається в білінійний ряд  по своїх власних функціях, і цей ряд збігаються в нормі  по аргументу  рівномірно для кожного , тобто .

**Доведення:**  Додатково інтегруючи по аргументу  отримаємо збіжність білінійного ряду(4.4) в середньоквадратичному.

 (4.13) **.**

Формула Шмідта для розв’язання інтегральних рівнянь з ермітовим неперервним ядром

[1, стор. 315 - 317]

Розглянемо інтегральне рівняння Фредгольма 2 роду , з ермітовим неперервним ядром  (4.14)

 - множина характеристичних чисел та - ортонормована система власних функцій ядра.

Розкладемо розв’язок рівняння  по системі власних функцій ядра .   
, обчислимо коефіцієнти Фур’є 

Отже, , тому , 

Таким чином має місце формулу Шмідта:

(4.15).

Розглянемо усі можливі значення :

1. Якщо ,тоді існує єдиний розв’язок для довільного вільного члена  і цей розв’язок представляється за формулою (4.15).

2. Якщо  - співпадає з одним з характеристичних чисел кратності , та при цьому виконанні умови ортогональності  тоді розв’язок існує (не єдиний), і представляється у вигляді,  (4.16),  - довільні константи.

Якщо ,  тоді розв’язків не існує.

**Приклад**: Знайти ті значення параметрів для яких інтегральне рівняння

 має розв’язок для будь – якого значення .

**Розв’язок:** Знайдемо характеристичні числа та власні функції спряженого рівняння (ядро ермітове).



 .

 .

Умови ортогональності:

 

*Словник термінів*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | характеристичне число | characteristic number |
|  | неперервне ядро | continuous kernel |
|  | компактна послідовність | compact sequence |
|  | кратність | multiplicity |
|  | білінійний ряд | bilinear series |
|  | джерелувато – зображувана функція | sourcewise- representation function |
|  | Рівномірно збіжний ряд | uniformly convergent series |