

学号： 2019302110028

密级： _____

武汉大学本科毕业论文

任意平面多边形切分算法设计与实现

院(系)名 称： 计算机学院

专 业 名 称： 软件工程

学 生 姓 名： 逢博

指 导 教 师： 傅佑铭 讲师

二〇二三年五月

郑 重 声 明

本人呈交的学位论文，是在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果，所有数据、图片资料真实可靠。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含他人享有著作权的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确的方式标明。本学位论文的知识产权归属于培养单位。

本人签名: _____ 日期: _____

摘 要

计算机在渲染一个形状时，需要首先将形状的曲边转化为折线，由此将待渲染的形状转为多边形，再将其切分为三角形并依次渲染。对于其中将多边形分割为三角形的步骤，设计效率更高和兼容性更好的算法可以提高切分的速度、准确性以及普适性。

本文实现了一种算法，可在不添加新顶点的情况下快速将任意形状带孔凹多边形划分成数个互不重合的三角形，能正确处理多种复杂情况，且产生的划分规整，便于后续处理。

关键词：计算几何；平面多边形；三角化

目 录

1	引言	1
1.1	概述	1
1.2	研究现状	1
1.3	理论基础	1
1.4	概念定义	2
1.5	代码结构	2
1.6	预期效果	3
2	对凸多边形进行三角化	4
2.1	概述	4
2.2	朴素的划分方案	4
2.3	改进的朴素划分	4
2.4	完美三角剖分	4
3	分割不含孔洞的多边形	8
3.1	确定多边形方向	8
3.2	确认多边形凹凸性	8
3.3	确定分割方案	8
3.4	对凹多边形进行分割	9
3.5	一些其他的改进思路	10
3.5.1	限制分割线数量	10
3.5.2	禁止单个顶点进行多次切分	11
3.5.3	动态调整启发函数	11
4	消除多边形内部的孔洞	12
4.1	预处理	12
4.2	朴素的合并方式	12

4.3 对上述算法的改良	12
4.4 采用分治法合并孔洞	13
5 将非简单多边形标准化	14
6 另一种算法	15
6.1 生成 Delaunay 三角网	15
6.2 向三角网中加入强制连边	16
6.3 删除多边形外部的多余边	17
参考文献	18
致谢	19

1 引言

1.1 概述

计算机在对一个平面形状进行栅格化时，一般需要首先将形状的曲边近似转化为折线，由此将待渲染的形状转为多边形，再将其切分为三角形并依次渲染。在切分出的三角形中，具有两个极小锐角的细长三角形被称为“sliver triangles”^[1]，不便于栅格化时的计算。因此，在设计多边形栅格化的算法时，常常需要在做到高效的同时避免产生细长三角形。

本文实现了一种近似算法，可在不添加新顶点的情况下快速将任意形状带孔凹多边形划分成数个互不重合的三角形，能正确处理多种复杂情况，且产生的细长三角形数目较少，便于后续处理。

1.2 研究现状

平面多边形三角化作为计算机图形学的基础课题，当下研究较为成熟，有着较多的相关研究。近些年的论文以对已有的三角划分算法应用为主，基于三角划分实现了***，***，***等功能。而对三角划分算法本身的研究则多发表于二十一世纪初甚至更早之前。

在 1987 年间，一篇用于解决带限制平面多边形三角剖分文章^[2]已经可以较好的用于解决本问题，后文将会解释如何基于该文章实现平面任意多边形三角剖分。

1.3 理论基础

三角剖分 (triangulation)：假设在平面有一点集 V ，三角形 s 是由点集中的点作为端点的非退化三角形， S 为 s 的集合。则该点集 V 的一个三角剖分 $T=(V, S)$ 是一个平面图，满足以下条件：

- 平面图中的任意两个三角形交集面积为 0
- 平面图中所有三角形的并集是点集 V 的凸包

Ear Clipping (耳切法)^[3] 是一种较为简易的多边形三角化算法，其思路简单易懂，但缺点是可能会产生较多的细长三角形。原理为不断在多边形内寻找可被

切除^①的连续三个顶点构成的三角形。对于任意多边形，至少存在两个可被切除的三角形。轮流切除所有的三角形后算法结束。朴素情况下该算法的复杂度为 $O(n^2)$ 。

Delaunay triangulation^[4] 算法则会生成一组相对更加优秀的解，其满足形成的三角形中最小角尽可能大。但该算法只适用于凸多边形的划分。虽然计算得出的解在处理后也可用于凹多边形划分，但该划分结果可能会产生新的顶点，导致最终的三角形个数增加。Delaunay 三角划分有数种实现方式，其中较为常用的算法如 Bowyer-Watson 算法，其原理是维护一个合法的 Delaunay 三角划分，每次向点集中加入新点，并修改新增点附近的三角划分规则。其复杂度为 $O(n^2)$ 。或者也可以采用分治法，将点集划分为两部分并合并生成的 Delaunay 三角划分，其时间复杂度为 $O(n * \log_2 n)$ ^[5]。

1.4 概念定义

定义 N_i 为二维平面上的点， N_{ix}, N_{iy} 分别为该点的横纵坐标；

定义有序集合 $S : N_0, N_1, \dots, N_{n-1}$ 表示有 n 个节点的无孔洞简单多边形，对任意 $i \in [0, n-1]$ 满足 $N_i, N_{(i+1) \bmod n}$ 之间存在一条连边。

定义有序集合 $T : S_0, S_1, \dots, S_{n-1}$ 表示有 n 段边界的有孔洞简单多边形，其中 S_0 表示多边形的外边界，其余则表示多边形中的孔洞。

1.5 代码结构

本代码采用 C++ 语言自主实现，使用双向链表存储节点及其连边，每个多边形内记录一个指向链表节点的指针，整个图对象内使用数组记录指向每一个多边形的指针。

为了便于数据处理和计算，每个链表节点同时存储了当前节点的标号，部分代码处理时利用节点的标号辅助确定节点的相对位置。

图对象内同时存储了指向全部初始结点的指针，可根据需求进行排序以便于部分处理。

IO 部分实现了以 svg 图片格式输出中间过程和最终结果，可以直观的展示图片分割结果。

^①当一个三角形内部不包含其他顶点且该三角形属于原多边形一部分时认为其可切除

1.6 预期效果

代码支持从标准输入或文件读取多边形，并将分割结果以图片或多边形集合形式输出。多边形分割完成后由数个三角形构成，且各三角形之间交集为空，并集为原多边形。分割完成后的多边形中细长三角形的数目较少，大部分三角形较为规则。

2 对凸多边形进行三角化

2.1 概述

凸多边形^①是平面多边形中最简单最易处理的一类。定义一个多边形 S 满足对于一个凸多边形 S ，存在多种方案将其分割为 $n-2$ 个三角形。其中 Delaunay 划分可以生成满足最小角最大特性，细长三角形较少的优秀划分方案。

2.2 朴素的划分方案

由于凸多边形的性质，多边形任意两个顶点之间连边均在多边形内部。因此最简单的划分方案即为对于 $i \in [2, n-2]$ ，沿边 S_0, S_i 进行一次分割，即可产生总共 $n-2$ 个三角形。该方案最为简便，且产生的三角形均有一个共同顶点，但产生的三角形形状均为细长型，相对形态较劣。

2.3 改进的朴素划分

由于对凸多边形分割后产生的两个多边形仍为凸多边形，我们可以采用分治法来一定程度的优化上述方案。一种可行的方案如下：

- 若当前多边形为三角形则结束算法；
- 随机选择两个不相邻的顶点连边，将当前多边形分割为两部分；
- 对分割出的两个子多边形调用本算法进行分割，并将分割的结果加入答案。

该方案仍然有较大优化空间，例如选择点对进行分割时可以选择多边形较短的轴进行切割以使两部分更加规整，但实际应用中优化意义不甚显著，且计算复杂度大幅增加。

2.4 完美三角剖分

Delaunay triangulation（简称 DT）是一种三角剖分方式，其结果满足以下性质：

- 对于三角剖分中产生的每一个三角形，其外接圆中不包含点集 V 中的其他点。

^①每个内角均小于 180 的多边形

- 若对点集的三角剖分结果中每一个三角形的最小角升序排列，则 DT 所得到的数值比其他三角剖分的数值大。
- 若点集中任意四点均不共圆，则产生的三角剖分唯一。

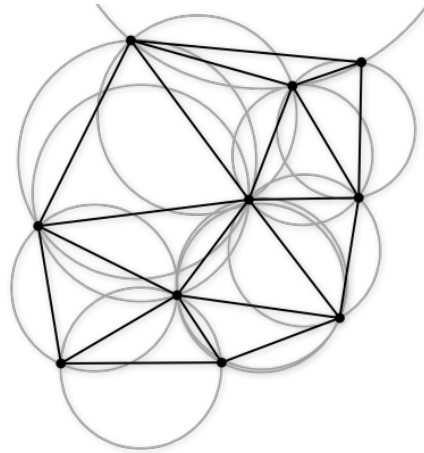


图 2.1 DT 示例

若进行三角剖分的点集中存在四点共圆，虽然计算其 Delaunay triangulation 时得到的结果不唯一，但仍不破坏其余性质。由于最小角最大的特性，DT 可以产生理论最优的划分。而根据三角剖分的性质，对凸多边形顶点点集进行三角剖分所得到的三角形集合即为待求的三角化结果。

一种利用分治思想在 $O(n \log n)$ 复杂度内计算点集的 Delaunay triangulation 方法如下：

首先将给定点集按照 x 坐标升序排列，如图 2.2所示。



图 2.2 排好序的大小为 10 的点集

一旦点集有序，我们就可以不断地将其平分成两个部分，直到子点集大小不超过 3。然后这些子点集可以立刻剖分为一个三角形或线段。

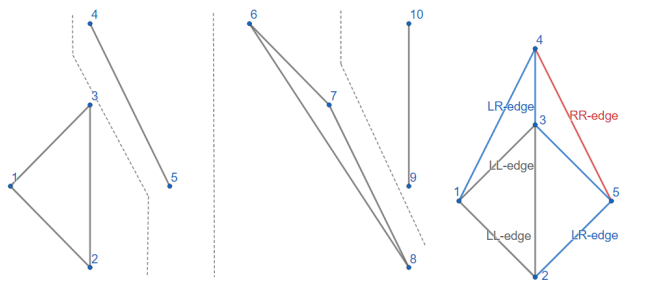


图 2.3 分治为包含 2 或 3 个点的点集

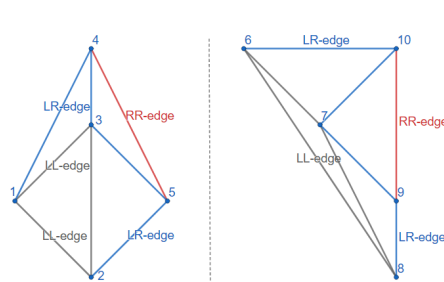


图 2.4 三种不同的边

在分治回溯的过程中，已经剖分好的左右子点集可以依次合并。合并后的剖分包含 LL-edge（左侧子点集的边）。RR-edge（右侧子点集的边），LR-edge（连接左右剖分产生的新的边），如图 2.4 LL-edge（灰色），RR-edge（红色），LR-edge（蓝色）。对于合并后的剖分，为了维持 DT 性质，我们可能需要删除部分 LL-edge 和 RR-edge，但我们在合并时不会增加 LL-edge 和 RR-edge。

合并左右两个剖分的第一步是插入 base LR-edge，base LR-edge 是最底部的不与任何 LL-edge 及 RR-edge 相交的 LR-edge。

然后，我们需要确定下一条紧接在 base LR-edge 之上的 LR-edge。比如对于右侧点集，下一条 LR-edge 的可能端点（右端点）为与 base LR-edge 右端点相连的 RR-edge 的另一端点（6, 7, 9 号点），左端点即为 2 号点。

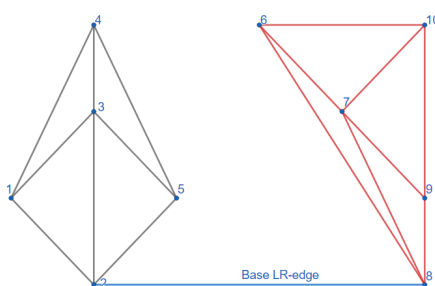


图 2.5 合并左右剖分

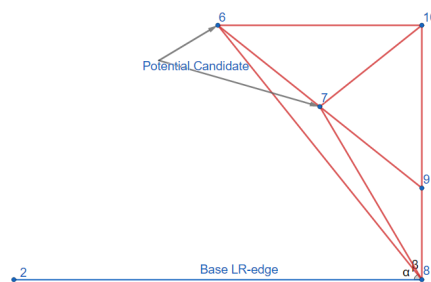


图 2.6 下一条 LR-edge 的可能位置

对于可能的端点，我们需要按以下两个标准检验：

1. 其对应 RR-edge 与 base LR-edge 的夹角小于 180 度。即，新选择的端点在当前 base LR-edge 的“上方”。

2. base LR-edge 两端点和这个可能点三点构成的圆内不包含任何其它可能点。

如图 2.7，6 号可能点所对应的绿色圆包含了 9 号可能点，而 7 号可能点对应的紫色圆则不包含任何其它可能点，故 7 号点为下一条 LR-edge 的右端点。

对于左侧点集，我们做镜像处理即可。

当左右点集都不再含有符合标准的可能点时，合并即完成。当一个可能点符合标准，一条 LR-edge 就需要被添加，对于与需要添加的 LR-edge 相交的 LL-edge 和 RR-edge，将其删除。

当左右点集均存在可能点时，判断左边点所对应圆是否包含右边点，若包含则不符合；对于右边点也是同样的判断。在未出现四点共圆的情况下每次只会有一个可能点符合标准，否则任选其一即可。

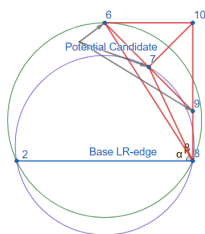


图 2.7 检验可能点

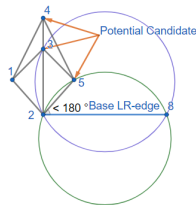


图 2.8 镜像处理另一半点集

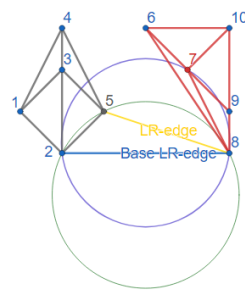


图 2.9 下一条 LR-edge

重复以上步骤即可完成 Delaunay triangulation 的构建。

由此我们完成了对凸多边形的三角化。

3 分割不含孔洞的多边形

3.1 确定多边形方向

为了便于后续计算，我们规定多边形 S 的点依次逆时针排列。在计算时我们需要将初始的多边形端点标准化为按逆时针排序。利用向量叉积的原理，我们可以计算出多边形的方向。对于多边形的每条边，计算坐标原点到起点的向量，与边起点到终点的向量叉乘并除以 2。将结果求和后该向量的模即为多边形面积，而向量 z 轴方向则代表了多边形的旋转方向。

$$\sum_{i=0}^n \frac{N_i \times (N_{(i+1) \bmod n} - N_i)}{2} \quad (3.1)$$

计算出初始多边形旋转方向后，即可根据需求调整端点的顺序以标准化多边形的方向。

3.2 确认多边形凹凸性

首先我们遍历多边形的所有内角，检测其是否为凸多边形。

若多边形为凸多边形，转至第二章，生成其 Delaunay 三角划分；若多边形为凹多边形，则采用下面的算法将其分割为数个凸多边形。

3.3 确定分割方案

在这一步我们采用启发式搜索的方式进行分割。

我们定义合法的切割边 (V_i, V_j) 满足以下条件：

- V_i, V_j 属于同一个多边形
- 以 V_i, V_j 为端点的线段除端点外与多边形无共同点
- V_i, V_j 两个顶点对应的多边形内角至少有一个大于 180°
- $0 \leq i < j \leq n - 1$

对于原多边形 S 中的一条合法的切割边，我们采用如下方式来评估其价值：

- 设按此方式切割后产生的两个多边形为

$$S_1 : \{V_0, V_1, \dots, V_{i-1}, V_i, V_j, V_{j+1}, \dots, V_{n-1}\}$$

$S_2 : \{V_i, V_{i+1}, \dots, V_{j-1}, V_j\}$

定义 $C(S_i)$ 为多边形 S_i 的周长, $L(V_i, V_j)$ 为点 V_i, V_j 之间的距离

- 定义切割边的基础评分为

$$\frac{\min(C(S_1), C(S_2))}{L(V_i, V_j)} \quad (3.2)$$

- 定义切割边的评分修正为

$$\frac{\min(\angle V_j V_i V_{i-1}, \angle V_j V_i V_{i+1}, \angle V_i V_j V_{j-1}, \angle V_i V_j V_{j+1})}{90^\circ} \quad (3.3)$$

若切割边两个端点对应的内角均 $>180^\circ$ 则评分修正额外 $*10$

- 每条边的价值最终评估为基础评分 \times 评分修正。

遍历多边形, 对于每一个内角大于 180° 的顶点, 采用此算法^[6] 快速求出以该点为端点的所有合法切割边, 计算其价值并加入记录。

接下来对于所有合法的切割边, 将其以价值从大到小排序, 依次尝试加入分割列表。

当我们尝试将一条合法切割边加入分割方案时, 在已经选定的分割方案中检查是否存在与当前切割边冲突的方案。若存在冲突则直接跳过该边。具体来说, 若两条切割边在非顶点的位置相交, 则说明两种分割方案互相冲突, 无法同时选用。此时我们选择价值相对较高者。

当我们计算得出了分割方案后, 即可开始进行下一步的实际分割。

3.4 对凹多边形进行分割

确定了全部的可行分割方案后, 我们可以开始划分凹多边形。

具体实现流程如下:

1. 对分割方案 V_i, V_j 排序, 以 i 为第一关键字递增, 以 j 为第二关键字递减。
2. 若栈顶元素 V_{stk} 满足 $stk < j$ 则弹出栈顶元素直至 $stk \geq j$ 。
3. 若栈顶元素 V_{stk} 满足 $stk = j$ 则将当前分割方案中的 V_j 指向的节点变更为 V_{stk} , 并弹出栈顶元素。
4. 选择接下来的分割方案, 将 V_i, V_j 节点复制一份为 V'_i, V'_j 。
5. 在链表中连接 V_{i-1}, V'_i, V_j 与 V_{j-1}, V'_j, V_i 。
6. 将 V_j 加入栈中。

以这种方案实现对多边形的分割时，可以巧妙的准确找到每个分割边所对应的顶点的真实位置。即使顶点被复制多次，初始指向顶点的指针指向了错误的多边形，也可以利用栈找到每个指针的正确位置。

完成上述流程后，原本的一个凹多边形将被分为数个部分，我们只需递归的对每个子多边形使用相同方式进行处理即可。

3.5 一些其他的改进思路

本算法可以较为有效的将凹多边形分割为数个凸多边形，但生成分割边时将会尽可能多的对原多边形进行分割，可能会在单个凹点处进行过多的切割，导致出现较小的锐角。以下是一些改进本算法的思路。

3.5.1 限制分割线数量

在确定可行分割方案的过程中，默认采用了贪心算法，只要存在可行的分割方法就会加入结果中。因此可能会出现从一个凹顶点连线到凸多边形每个顶点进行分割的情况；而理想情况下本章算法的目标为用相对较少的线段将输入的凹多边形分割为数个凸多边形。因此，我们可以对分割线的数量进行限制。

在较为理想的情况下，每一条分割线可以消除 1-2 个凹点。也就是说，将一个凹多边形分割为数个凸多边形时，使用的分割线数目很可能少于凹顶点的数目。因此，我们可以限制每次选择分割方案的数目上限。

我们可以在算法的开始阶段记录当前多边形的凹顶点数目，并将其乘上一个修正量后作为分割线的最大数目。在依次检验分割方案是否与已选中部分冲突时，若已选中的分割线数目已经等于最大数目，则丢弃剩余的所有方案，只使用有限数量的分割线进行分割。由于被分割出的小多边形会用递归的方式再次经过本算法检验凹凸性并进行分割，算法的正确性不会受到影响。

正确的选择修正量可以在精确度与速度之中做出平衡。较大的修正量会产生更多的分割线，生成的小多边形将更不可能是需要重新执行本算法的凹多边形；而较小的修正量则能够获得较为优秀的划分结果，但会增加算法的运行时间。笔者认为，在实际计算中取 0.5 至 1 的修正量较为合适。

3.5.2 禁止单个顶点进行多次切分

在评估时，单个凹顶点可能有相似的数个较优秀候选切割边。这些切割边之间互不冲突，且评估价值相近。在筛选分割方案时，容易出现单个顶点选择数条同质切割边的情况。不仅会产生一些细长三角形，同时还影响算法效率。可以在切分时限制单个顶点最多被切分一次，跳过后续的相似切割边。

3.5.3 动态调整启发函数

在启发式函数中，采用的评估方案通过计算边长与切下的小多边形周长比值作为基础评分，以顶点凹凸性和最小角度数作为修正值。但在完成了一次切割后，后续的待选切割边两端的多边形周长将会发生变化，实际评估值将会改变，需要随时进行更新。考虑到实际评估值在分割过程中仅会下降不会上升，我们可以利用大根堆存储所有的切割方案，并在取新方案时对该方案进行更新并重新放入堆中，直到取出的方案已被更新过。

4 消除多边形内部的孔洞

通过在顶点上添加桥边和辅助节点，我们可以通过一次切割联通两个多边形孔洞，或是将一个多边形孔洞与外界相连。如图所示，在添加额外的两个顶点和两条边后，两个多边形孔洞的边界合并为一个连续的环。通过数次合并后，原有的带孔多边形将变为不含孔洞的凹多边形。

4.1 预处理

为确保多边形孔洞合并后点的顺序正确，边界不产生交叉，需要提前对多边形孔洞的顶点方向进行预处理。

我们令多边形外圈的点以逆时针顺序排列，内圈孔洞则以顺时针顺序排列。如此处理之后，两个多边形孔洞在合并时将保持正确的旋转方向，避免边界出现交叉。

4.2 朴素的合并方式

将多边形上的所有点按照 x 坐标从小到大为第一关键字， y 坐标从大到小为第二关键字排序。按顺序遍历所有顶点，并记录当前已经遍历的所有节点所属的边界。当新遍历到的顶点所属的边界与之前的边界未进行过合并时，选择之前遍历过的顶点之中与当前点距离最近的顶点，向其延伸一条射线，并于第一段相连的多边形边界处相连。以此线段作为切割线，合并相关联的两个边界。

遍历多边形上的所有节点后，多边形的每个孔洞都直接或间接的与多边形外边界相连，因此我们便可以消除多边形内部的孔洞。

4.3 对上述算法的改良

借助最小生成树的思路，我们可以最小化切割边的总长度。

枚举多边形中的每对分属两个不同多边形孔洞的点，并判断其连线是否与其他边冲突，记录所有合法的切割边。

将切割边按长度从小到大排序，按顺序处理边。对于每条切割边，若切割边所连接的两部分多边形未被合并，且该边与已有的切割边之间不产生冲突，则沿此

切割边将两侧的多边形边界合并为一体。当选择的切割边数目恰好与多边形孔洞数目相等时，所有的多边形边界均合并完成，原多边形的孔洞消除完成。

4.4 采用分治法合并孔洞

我们可以采用分治计算 *Delaunay triangulation* 算法中的思想，使用相似的方法完成对孔洞的合并。

首先将多边形孔洞的所有点按照 x 坐标从小到大为第一关键字， y 坐标从大到小为第二关键字排序。接下来每次将待处理的点集分为左右两半，递归合并点集中的不同多边形片段。

当点集中的点不多于两个时，递归终止。若点集中的点分属不同多边形，则添加一条新的切割边连接两个顶点，将其加入候选集合。

接下来我们处理两个点集答案的合并。

从原多边形孔洞的边集中搜索，判断是否存在原有的连接两半点集的边。

若不存在这样的边，则使用分治计算 *Delaunay triangulation* 算法中的计算方式，找出所有合法的 LR-edge，在候选集合中修正与之冲突的切割边，并额外添加一条最短的 LR-edge 至集合中。此处的合法 LR-edge 计算方式与分治计算 *Delaunay triangulation* 算法中的相似，但是寻找可行端点时需要排除连边时会与原多边形中已有的边产生冲突的顶点。

若存在连接两半点集的边，则将其直接加入集合，在候选集合中删除与之冲突的切割边，并寻找一条额外的切割边，连接原切割边所连接的集合。

由此思路，即可完成对所有孔洞的合并。接下来取孔洞中与边界距离最短的点对相连即可将多边形的孔洞消除。

5 将非简单多边形标准化

通常情况下，我们处理的多边形为边界互不相交的简单多边形。对于边界产生了交叉的复杂多边形，需要先进行分割处理，使其变为等价的数个简单多边形。

在判断复杂多边形所覆盖范围时，有着多种可行的定义方法。此处我们采用的定义为：对于一个点，从该点向多边形外无限远处连接任意一条射线，当且仅当该射线与多边形边界相交奇数次时点在多边形内部。

如图所示，该多边形所包含的区域用灰色表示。

由于多边形的边为一条闭合折线，易知对于每个多边形边界上的顶点，与其连接的边为偶数条。因此，射线的位置对相交次数的奇偶性不产生影响。

明确了划分规则后，我们可以采用逐层分离的方法将原多边形分割为简单多边形的组合。具体方法如下：

1. 首先，对于多边形的边界，找出所有未被记录的交叉点，并将对应相交的边分别从交叉点处分割为两部分。
2. 选择当前点集中 x 坐标最小的点，作为新多边形的起始点。
3. 遍历当前点的所有连边，按极角序选择当前点到上一个点连线方向顺时针连接到的第一条边^①，将另一个端点加入当前多边形。
4. 转到 3 直至返回初始点。
5. 记录当前多边形，并删除当前多边形对应的边和连边数小于 2 的顶点。
6. 转到 2 直至点集为空。
7. 对于切割出的每个多边形，计算其内部到多边形外跨越的边数，判断其是否为孔洞。

经过以上处理，我们完成了非简单多边形的标准化。自此，我们可以计算出任意多边形的三角剖分。

^①对于第一个点从 x 轴负方向开始

6 另一种算法

在论文编写期间，受分治 Delaunay triangulation 算法以及一些已有研究^[2] 的启发，我想到了另一种解决本问题的思路。

我们已知，Delaunay triangulation 广泛被认为是三角剖分中的最优结果，其具有多种优良性质，如最小角最大，局部修改只影响小范围区域等。而在三角剖分中，我们能够产生选择的最小单位如图所示，是一个包含四个点的凸多边形。根据内部两条对角线的选择方式，有着两种不同的分割结果。标准的 Delaunay Triangulation 根据三角形外接圆相关的信息用于评估两条边的选择，而两条对角线的选择可以在不影响四边形外部的情况下进行切换。

从另一个角度来看，对于一个完成剖分后的三角网，除去外边界以外的边，所有的边都恰好包含于两个三角形，而这两个三角形可能会组成上述的凸四边形。在这种情况下，我们可以对这条边，以及这条边所对应的四边形的另一条对角线进行一次“交换”，在仅有小范围改动的前提下对三角剖分进行修正。

由此我们可以考虑，在点集的 Delaunay 三角网中，强行加入原多边形已有的边作为限制，并在改动尽量小的情况下维持答案为合法的三角剖分。

此算法要求存在包含全部原多边形边的合法三角网，即原多边形的边不能相交。因此无法用于复杂多边形，但复杂多边形可以通过第五章的预处理后变为可以执行本算法的状态。

6.1 生成 Delaunay 三角网

使用分治算法生成 Delaunay 三角网的步骤不再赘述。不过，为了便于后续计算，我们采用与之前不同的数据结构用于存储信息。

我们采用数组记录整个多边形的点集，并分别对每个顶点按极角序记录其在三角网中的连边。

计算完 Delaunay 三角网后，我们便获得了一份初始的三角剖分结果。这份剖分结果中不包含原多边形连边的信息，是接下来计算答案的基础。

6.2 向三角网中加入强制连边

接下来，我们将原多边形的每一条边强制加入 Delaunay 三角网。在一条边的加入期间，我们最终将会删除所有与之冲突的边，并补充一定数量的次优边以保持三角网的性质。

下面，我们选择一条边，开始将其加入 Delaunay 三角网中。

一种最简单的情况是，当前的边已经被原三角网所包含。在这种情况下，我们不需要对原三角网进行修改，只需要标注当前边属于不可移除的限制边即可。

另一种情况下，当前边的加入仅涉及了两个三角形，也就是上文中图 x.x，在四边形对角线的二选一中需要进行一次“交换”操作，即可完成对三角网的修正。

最后一种情况则是，新增的连边破坏了多个三角网。在这种情况下，我们只需依次处理每条与新增边冲突的旧边即可。我们按冲突点顺序遍历所有的冲突边。对于一条冲突边，我们可以寻找这条边对应的两个三角形，并对其尝试进行一次“交换”操作。

若两个三角形组成的四边形为凸四边形，且四边形有三个点在新增边同侧或为新增边端点，则“交换”操作结束后即可消除一条冲突边。若组成的四边形为凹四边形，无法执行“交换”操作，我们暂时跳过该点，在遍历结束后反向遍历一次即可将其正常消除。

如图所示，我们以新增边的顶点之一为起点，向另一个顶点在新增边的两侧各连接一条最贴近新增边的折线。该折线满足性质，从折线中间某条边向新增边方向搜索，下一条边必为冲突边。两条折线产生了一个包含新增边的多边形，且多边形内部仅存在冲突边，所有冲突边均在多边形内。易证这样的折线在新增边的两侧有且仅有一条。

将可以直接执行“交换”操作的边处理完后，有较小的概率仍存在未被消除的冲突边。如图所示，此种情况下多边形不存在可以进行交换的边。此时我们可以分别对上下两半折线求 delaunay 三角网，或直接通过耳切法生成一种可行划分方案。

由此，我们可以构建一个包含原多边形中全部连边的点集三角剖分结果。

6.3 删除多边形外部的多余边

从之前对点集的三角划分到最终多边形三角划分的结果仍存在一定的距离。完成点集的三角划分结果计算后，划分结果所形成的多边形是包含原多边形所有节点的凸包。我们需要从划分结果中去除不属于原多边形的部分，保留的部分即为三角划分的答案。

我们采用如下方法删除不属于原多边形的三角形。

首先通过预处理判断多边形中每条边界的性质，确认边界包围的区间是否属于多边形；同时标准化多边形的旋转方向，使多边形的外边界为顺时针旋转，而孔洞的边界则为逆时针旋转。

枚举划分结果中的三角形。若三角形中三条边均属于原多边形，则直接根据对应多边形边界的属性判断内部是否为孔洞；否则任选一条不属于原多边形的边，任选该边的一个端点，判断该边是否落在了端点对应的内角上。若边在内角，说明当前三角形属于端点所对应的子多边形边界内部，与子多边形类型相同；否则说明与子多边形类型相反。删除属于孔洞类型的三角，保留属于多边形内部的三角形。由此，我们便可以得到对原多边形的三角划分。

参考文献

- [1] EDELSBRUNNER H, LI X-Y, MILLER G, et al. Smoothing and cleaning up slivers[A]. Proceedings of the thirty-second annual ACM symposium on Theory of computing[C], 2000 : 273 – 277.
- [2] CHEW L P. Constrained delaunay triangulations[A]. Proceedings of the third annual symposium on Computational geometry[C], 1987 : 215 – 222.
- [3] EBERLY D. Triangulation by ear clipping[J]. Geometric Tools, 2008 : 2002 – 2005.
- [4] 闵卫东, 唐泽圣. 二维任意域内点集的 Delaunay 三角划分生成算法 [J]. 计算机学报, 1995, 18(5): 365 – 371.
- [5] LEE D-T, SCHACHTER B J. Two algorithms for constructing a Delaunay triangulation[J]. International Journal of Computer & Information Sciences, 1980, 9(3): 219 – 242.
- [6] 金文华, 何涛, 唐卫清, et al. 简单多边形可见点问题的快速求解算法 [J]. 计算机学报, 1999, 22(3): 275 – 282.

致谢