·目 录·

第一章　考情分析

按照教育部的统一部署，2021 年下半年全国中小学教师资格考试预计 10 月 30 日进行笔试，中公教育教师考试研究院预计数学学科知识与教学能力《初级中学》以及《高级中学》考题将延续以往的命题思路，作答时间依旧为 120 分钟，试卷满分 150 分；考题题型为单项选择题、简答题、解答题、论述题、案例分析题、教学设计题六个题型；考试内容包含数学分析、高等代数、空间解析几何、统计与概率、课标及教学论、高中知识、初中知识，共七个模块.

现就近 4 次全国教师资格考试基本考情进行总结如下：

《数学学科知识与教学能力》（初级中学）

1．试卷结构分析：

笔试时间	总分值	考试题型	题量和分值	试卷分值占比
120 分钟	150 分	单项选择题	共 8 题，每题 5 分，共 40 分	26.7%
		简答题	共 5 题，每题 7 分，共 35 分	23.3%
		解答题	共 1 题，每题 10 分，共 10 分	6.7%
		论述题	共 1 题，每题 15 分，共 15 分	10%
		案例分析题	共 1 题，每题 20 分，共 20 分	13.3%
		教学设计题	共 1 题，每题 30 分，共 30 分	20%

小结：

笔试时间、总分值、题型、题量和分值以及分值占比一直稳定不变.

2．各知识模块题型题量分值占比

- **教师资格证初级数学**
  - 数学分析
    - 2019上半年占比10%
    - 2019下半年占比18%
    - 2020年占比18%
    - 2021上半年占比11.3%
  - 高等代数
    - 2019上半年占比6.7%
    - 2019下半年占比11.3%
    - 2020年占比9.3%
    - 2021上半年占比18%
  - 空间解析几何
    - 2019上半年占比11.3%
    - 2019下半年占比11.3%
    - 2020年占比6.7%
    - 2021上半年占比3.3%
  - 统计与概率
    - 2019上半年占比4.7%
    - 2019下半年占比0%
    - 2020年占比3.3%
    - 2021上半年占比4.7%
  - 课标及教学论
    - 2019上半年占比59.3%
    - 2019下半年占比56%
    - 2020年占比59.3%
    - 2021上半年占比56%
  - 高中知识
    - 2019上半年占比0%
    - 2019下半年占比0%
    - 2020年占比3.3%
    - 2021上半年占比3.3%
  - 初中知识
    - 2019上半年占比8%
    - 2019下半年占比3.4%
    - 2020年占比0%
    - 2021上半年占比3.3%

小结：

1. 数学分析知识模块分值占比 2020 年与 2019 年下半年保持一致，比 2019 年上半年有所提升，2021 年上半年又比 2020 年有所下降，常考查的知识点为两个重要极限、极限求解（洛必达法则）、级数的敛散性、定积分的性质计算、变限积分、连续、一致连续、微分概念、微分中值定理. 考查方式多以单项选择题、简答题为主. 其中单项选择题难度不高，简答题难度较高.

2. 高等代数知识模块分值占比从 4 次的考题中可以发现，2021 年上半年所占分值比例比 2019 年、2020 年提升明显. 常考查的知识点为多项式的整数解、矩阵乘法、行列式、矩阵的特征值与特征向量、齐次、非齐次线性方程组基础解系、通解、向量组的秩、线性空间、线性变换、考查方式多以单项选择题、简答题、解答题为主. 其中单项选择题难度不高，简答题、解答题难度较高.

3. 空间解析几何知识模块分值占比 2019 年上、下半年较高，2020 年有所降低，2021 年上半年占比进一步下降. 常考查的知识点为空间的平面与直线的位置关系、向量的内积外积混合积、平面方程、旋转曲面方程、曲面切平面方程、曲线的参数方程、曲面的参数方程，考查方式多以单项选择题、简答题为主. 整体难度中等.

4. 统计概率知识模块分值占比相对较低，其中 2019 年下半年分值占比为 0%，2021 年上半年与 2019 年上半年持平，2020 年略低. 常考查的知识点为条件概率、正态分布，概率计算、期望、分布函数、分布律，考查方式多以单项选择题、简答题、解答题为主. 整体难度不高.

5. 课标及教学论知识模块分值占比较高，多年来占比均超过 50%. 该知识模块主要考查考生的基本素养，如何将数学知识在课堂中展现，考查方式多以单项选择题、简答题、论述题、案例分析题以及教学设计题为主. 整体难度很高，尤其是案例分析和教学设计需各位考生高度注意.

6. 高中知识模块是从 2017 年开始新增加数学知识考点，往年该模块考查知识内容更多为在课标及教学论中涉及，现逐步扩展到独立考查，2019 年上、下半年未涉及，2020 年考查了一道选择题，2021 年也考了一道选择题，在往年考题中涉及知识点每年各有不同，目前涉及到的知识点主要有集合、简易逻辑、导数、概率、空间向量等. 考查方式多以单项选择题为主，整体难度较低.

7. 初中知识模块是从 2019 年上半年开始新增加数学知识考点，2019 年下半年与上半年相比占比有所下降，2020 年没有考查，2021 年上半年考查了一道选择题。往年该模块考查知识内容更多为在课标及教学论中涉及，现逐步扩展到独立考查，目前涉及到的知识点主要有理数与无理数、方程的实数解、图形的变换、位似图形等. 考查方式多以单项选择题为主，整体难度较低.

《数学学科知识与教学能力》（高级中学）

1．试卷结构分析：

笔试时间	总分值	考试题型	题量和分值	试卷分值占比
120 分钟	150 分	单项选择题	共 8 题，每题 5 分，共 40 分	26.7%
		简答题	共 5 题，每题 7 分，共 35 分	23.3%
		解答题	共 1 题，每题 10 分，共 10 分	6.7%
		论述题	共 1 题，每题 15 分，共 15 分	10%
		案例分析题	共 1 题，每题 20 分，共 20 分	13.3%
		教学设计题	共 1 题，每题 30 分，共 30 分	20%

小结：

笔试时间、总分值、题型、题量和分值以及分值占比一直稳定不变.

2．各知识模块题型题量分值占比

小结：

1．数学分析知识模块分值占比 2020 年比 2019 年下半年略有降低，2021 年上半年比 2020 年又进一步减低，常考查的知识点为两个重要极限、等价无穷小替换求极限、级数的敛散性、变限积分、可导、连续、一致连续、微分概念、微分中值定理．考查方式多以单项选择题、简答题为主．其中单项选择题难度不高，简答题难度较高．

2．高等代数知识模块分值占比 2019 年上、下半年保持一致，2020 年占比略有降低，2021 年上半年占比提高．常考查的知识点为多项式中的整数解、向量组的极大无关组、矩阵的秩、矩阵的特征值与特征向量、线性空间、线性变换，齐次非齐次线性方程组的通解，考查方式多以单项选择题、简答题、解答题为主．其中单项选择题难度不高，简答题、解答题难度较高．

3．空间解析几何知识模块分值占比，2020 年比 2019 年上、下半年占比略有回落，2021 年上半年占比进一步回落．常考查的知识点为空间曲面与平面的交线、空间的平面与直线的位置关系、向量外积、平面方程、平面夹角、曲面切线、曲面切平面方程、曲线的参数方程、曲面的参数方程，考查方式多以单项选择题、简答题为主．整体难度逐年增高．

4．统计概率知识模块分值占比相对较低，其中 2019 年下半年分值占比为 0%，其余三次占比完全一致．常考查的知识点为条件概率、概率计算、正态分布、数据的特征值、泊松分布、期望、分布函数、分布律，考查方式多以单项选择题、简答题、解答题为主．整体难度不高．

5．课标及教学论知识模块分值占比较高，多年来占比均超过 50%．该知识模块主要考查考生的基本素养，如何将数学知识在课堂中展现，考查方式多以单项选择题、简答题、论述题、案例分析题以及教学设计题为主．整体难度很高，尤其案例分析和教学设计需各位考生高度注意．

6．高中知识模块是从 2017 年开始新增加数学知识考点，往年该模块考查知识内容更多为在课标及教学论中涉及，现逐步扩展到独立考查，2019 年上、下半年未涉及，2020 年考查一道简答题，2021 年上半年两道选择题，占比略有提升，在往年考题中涉及知识点每年各有不同，目前涉及到的知识点主要有集合、简易逻辑、函数、导数、概率等．考查方式多以单项选择题为主，整体难度较低．

7．初中知识模块是从 2019 年上半年开始新增加数学知识考点，2020 年没有考查，2021 年上半年也没有考查，目前涉及到的知识点主要有理数与无理数．考查方式多以单项选择题为主，整体难度较低．

第二章　考点梳理

考点·极限★★★★★

1．洛必达法则

（1）概念：在分子与分母导数都存在的情况下，分别对分子分母进行求导运算，直到该极限的类型为可以直接代入求解即可.

（2）适用类型：通常情况下适用于 $\frac{0}{0}$ 型或者是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限.

2．求 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限的方法

（1）通过恒等变形约去分子、分母中极限为零或无穷的因子，然后利用四则运算法则.

（2）利用洛必达法则.

（3）变量替换与重要极限.

（4）等价无穷小因子替换.

3．求 $0\cdot\infty$ 型极限的方法

求 $0\cdot\infty$ 型的方法和上述方法基本相同，必须注意的是：为使用洛必达法则需根据函数的特点先将 $0\cdot\infty$ 型化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型．注意，一般将较复杂的因子取作分子，特别地含有对数因子时，将该因子取作分子．

4．求 $\infty-\infty$ 型极限的方法

求 $\infty-\infty$ 型，一般通过适当的方法将其化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型．若是两个分式函数之差，则通分转化，若是与根式函数之和、差有关的，则需用分子有理化方法转化.

5．利用两个重要极限

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$（或 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$）.

考点·导数★★★

1．导数的几何意义

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 的几何意义是在曲线 $y=f(x)$ 上点（x_0，$f(x_0)$）处的切线的斜率．相应地，切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$．

2．基本初等函数的导数公式

原函数	导函数
$f(x)=c$（c 为常数）	$f'(x)=0$
$f(x)=x^{\alpha}$（α 为实数）	$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$
$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$
$f(x)=a^{x}$（$a>0$，$a\neq 1$）	$f'(x)=a^{x}\ln a$
$f(x)=e^{x}$	$f'(x)=e^{x}$
$f(x)=\log_{a}x$（$a>0$，$a\neq 1$）	$f'(x)=\dfrac{1}{x\ln a}$
$f(x)=\ln x$	$f'(x)=\dfrac{1}{x}$
$f(x)=\tan x$	$f'(x)=\dfrac{1}{\cos^{2}x}$
$f(x)=\cot x$	$f'(x)=-\dfrac{1}{\sin^{2}x}$

3．导数的运算法则

（1）$\left[f(x)\pm g(x)\right]'=f'(x)\pm g'(x)$.

（2）$\left[f(x)\cdot g(x)\right]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.

（3）$\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^{2}(x)}\left(g(x)\neq 0\right)$.

4．复合函数的导数

复合函数 $y=f(g(x))$ 的导数和函数 $y=f(u),u=g(x)$ 的导数间的关系为 $y_{x}'=y_{u}'\cdot u_{x}'$，即 y 对 x 的导数等于 y 对 u 的导数与 u 对 x 的导数的乘积.

5．导数与函数的单调性

在某个区间 (a,b) 内，如果 $f'(x)>0$，那么函数 $y=f(x)$ 在这个区间内是单调增加的；如果 $f'(x)<0$，那么函数 $y=f(x)$ 在这个区间内是单调减少的.

考点·微分中值定理★★★

（1）罗尔中值定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且 $f(a)=f(b)$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$.

（2）Lagrange 中值定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，则存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$；

（3）柯西中值定理：若函数 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且 $g'(x)\neq 0$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

考点·不定积分★★★

1．第二类换元法

（1）三角换元 $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$.

（2）$\int\dfrac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$，设 $x=t^6$；$f(x)$ 中含有 $x^{\frac{q_1}{p_1}},x^{\frac{q_2}{p_2}},\cdots$，设 $x=t^m$，m 为 p_1，p_2 的最小公倍数.

（3）倒代换 $\int\dfrac{dx}{x^4(x^2+1)}$，设 $x=\dfrac{1}{t}$.

（4）分子或分数整体中有根号，如 $\int\dfrac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}dx$ 可设 $t=\sqrt{x^2+1}$.

2．分部积分法：$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$（$\int uv'\mathrm{d}x=uv-\int u'v\mathrm{d}x$）

使用原则：

（1）由 v' 易求出 v；

（2）$\int v\mathrm{d}u$（$\int u'v\mathrm{d}x$）比 $\int u\mathrm{d}v$（$\int uv'\mathrm{d}x$）好求.

一般经验：按“反，对，幂，指，三”的顺序，排前者取为 u，排后者取为 v'.

考点·定积分的性质★★

1．$\int_a^a f(x)dx=0$.

2．$\int_a^b dx=b-a$.

3．$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$.

4．$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$.

5. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

6. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

7. 在区间 $[a,b]$ 恒有 $f(x) \ge 0$，则 $\int_a^b f(x)dx \ge 0$.

8. 如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x) \le g(x)$，则 $\int_a^b f(x) \le \int_a^b g(x)$.

9. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$ （$a<b$）.

10. 若 $m \le f(x) \le M, x \in [a,b]$，则 $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

11. 定积分中值定理：如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，至少存在一个 $\xi \in [a,b]$，使 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

12. $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$；$f(x)$ 为偶函数，则 $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

考点·定积分应用★★★

1. 旋转体体积

将区间 $[a,b]$ 的连续曲线 $y=f(x)$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积 $V = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx$

将区间 $[c,d]$ 的连续曲线 $x=g(y)$ 绕 y 轴旋转一周所得旋转体体积 $V = \pi\int_c^d [g(y)]^2 dy$

2. 旋转体侧面积

$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$

考点·变限积分求导★★

$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt$，$F'(x) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x)$.

考点·级数的敛散性★★

1. 定义

若数项级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 的极限存在，即 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$，则称级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛，否则就称级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 发散．当级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛时，称极限值 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ 为此级数和，称 $r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$ 为级数的余项或余和.

2．几个重要级数

（1）几何级数（等比级数）

$\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ 当$|q|<1$时收敛，当$|q|\geq 1$时发散.

（2）p 级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 当 $p>1$时收敛，当 $p\leq 1$时发散.

考点·函数展开成幂级数★★

1．$f(x)$ 的泰勒级数

如果函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处存在任意阶导数，则称

$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$ 为函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的泰勒级数.

记作 $f(x)\sim\sum_{n\to 0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$，其中“$\sim$”叫作可展开为.

特别的当 $x_0=0$，则称 $f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$ 为函数 $f(x)$ 的麦克劳林级数，记作

$f(x)\sim\sum_{n\to 0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

2．$f(x)$ 的泰勒级数收敛于函数 $f(x)$ 本身的充要条件

对于一切满足不等式$|x-x_0|<R$ 的 x，有 $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=0$，其中 ξ 介于 x 与 x_0 之间，$R_n(x)$ 是 $f(x)$ 在 x_0 处的泰勒公式余项.

3．幂级数展开成麦克劳林级数方法

解法一：直接法

验证 $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$，逐个计算 $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ 并代入

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

解法二：间接法

常用代换展开公式有

$$\mathrm{e}^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},-\infty<x<+\infty$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},-\infty<x<+\infty$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},-\infty<x<+\infty$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n},-1<x\le 1$$

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots,-1<x<1$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,-1<x<1$$

考点·行列式的基本性质★★★

1．行列式的值等于其转置行列式的值，即 $D=D^T$.

2．行列式中任意两行（列）位置互换，行列式的值反号.

3．若行列式中两行（列）对应元素相同，行列式值为零.

4．若行列式中某一行（列）有公因子 k，则公因子 k 可提取到行列式符号外，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{s1} & ka_{s2} & \cdots & ka_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

5．行列式中若一行（列）均为零元素，则此行列式值为零.

6．行列式中若两行（列）元素对应成比例，则行列式值为零.

考点·向量组的极大线性无关组及矩阵的秩★★★

1．基本概念

（1）极大线性无关组

一向量组的一个部分组称为一个极大线性无关组，如果这个部分组本身是线性无关的，并且从这向量组中任意添一个向量（如果还有的话），所得的部分向量组都线性相关.

注：任意一个极大线性无关组都与向量组本身等价.

（2）向量组的秩

向量组的极大线性无关组所含向量的个数称为这个向量组的秩.

注：考虑到线性无关的向量组就是它自身的极大线性无关组，因此一向量组线性无关的充要条件是它的秩与它所含向量的个数相同.

（3）矩阵的秩

矩阵的行向量组的秩与列向量组的秩相等，称为矩阵的秩.

2. 基本性质

（1）任意一个极大线性无关组都与向量组本身等价.

（2）等价的向量组必有相同的秩.（秩相同的向量组未必等价）

（3）矩阵 A 的秩是 r 的充分必要条件为 A 中有一个 r 阶子式不为零，同时所有 $r+1$ 阶子式全为零.

考点・逆矩阵★★

1. 定义：设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，若存在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵或非奇异矩阵，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，记做 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$.

2. 性质

（1）若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则逆矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是唯一的，记为 $\boldsymbol{A}^{-1}$. 当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也可逆且 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$；

（2）若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则矩阵 $\boldsymbol{A}^{T}$ 也可逆且 $(\boldsymbol{A}^{T})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{T}$；

（3）若 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶可逆矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 也可逆且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$；

（4）若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，k 为任意非零的数，则 $k\boldsymbol{A}$ 可逆且 $(k\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$.

（5）若 $|A|=d\neq 0$，则有 $|A^{-1}|=d^{-1}=\dfrac{1}{|A|}$.

（6）矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $|A|=d\neq 0$，而 $A^{-1}=\dfrac{1}{d}A^{*}(d=|A|\neq 0)$.

3. 可逆矩阵的判定

（1）n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}|\neq \boldsymbol{0}$；

（2）n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A})=n$；

（3）n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 可以通过初等变换（特别是只通过初等行（列）变换）化为 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{E}$；

（4）n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 的行（列）向量线性无关，即 A 是行（列）满秩阵.（线性无关将在线性方程组与向量一节学习）

4. 求逆矩阵的方法

方法一：用公式，若 $|A|=d\neq 0$，而 $A^{-1}=\dfrac{1}{d}A^{*}(d=|A|\neq 0)$.

方法二：初等变换法 $\left(A\vdots E\right)\xrightarrow{\text{初等行变换}}\left(E\vdots A^{-1}\right)$.

方法三：用定义求 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$.

考点·矩阵的特征值和特征向量★★

1．定义

（1）设 $\boldsymbol{A}$ 为数域 F 上的 n 阶方阵，如果存在数域 F 上的数 λ_0 和非零向量 ξ，使得 $\boldsymbol{A}\xi=\lambda_0\xi$，则称 λ_0 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值（特征根），而 ξ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_0 的一个特征向量.

（2）设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 n 阶方阵，则矩阵 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的特征矩阵，其行列式称为 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式，记为 $f(\lambda)$，

即 $f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$，

称 $f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程.

2．性质

（1）若 λ_i 是 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值，非零向量 ξ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_i 的特征向量，即满足 $\boldsymbol{A}\xi=\lambda_i\xi$，则必有 λ_i^k 一定是 $\boldsymbol{A}^k$ 的特征值（k 为正整数）.

（2）若 λ_i 是 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值，非零向量 ξ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_i 的特征向量，若 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 为任一多项式，则有 $f(\lambda_i)$ 是 $f(\boldsymbol{A})$ 的特征值.

（3）若 λ_i 是 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值，非零向量 ξ 为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_i 的特征向量，则

$\boldsymbol{A}$	$f(\boldsymbol{A})$	A^T	A^{-1}	A^*	$P^{-1}AP$
λ	$f(\lambda)$	λ	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\lvert\boldsymbol{A}\rvert}{\lambda}$	λ

（4）如果 ξ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_0 的一个特征向量，那么 ξ 的任何一个非零倍数 $k\xi$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_0 的特征向量．即特征向量不是被特征值所唯一决定的．相反，特征值却是被特征向量所唯一决定的．一个特征向量只能属于一个特征值.

注：属于不同特征值的特征向量是线性无关的.

3．矩阵特征值和特征向量的求法

（1）根据定义，构造 $\boldsymbol{A}\xi=\lambda_0\xi$，求得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_0，及 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 λ_0 的一个特征向量 ξ.

（2）设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_n$ 为 n 阶方阵，则由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 可以求出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值 λ_i，再根据齐次线性方程组 $(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})X=0$，求出 $\boldsymbol{A}$ 属于 λ_i 的特征向量．其中，基础解系即为 $\boldsymbol{A}$ 属于 λ_i 的线性无关特征向量，通解即为 $\boldsymbol{A}$ 属于 λ_i 的全体特征向量（不包含 0 向量）.

考点·线面位置关系★★★★

1. 两个平面间的关系

$\Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，则

$\Pi_1 \parallel \Pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$；

$\Pi_1 \perp \Pi_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$；

Π_1 与 Π_2 夹角 θ（法向量间的夹角，不大于 90 度）满足

$$\cos\theta=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

2. 两条直线间的关系

设 $L_1: \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$，$L_2: \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$，则

$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}$，且（$x_1,y_1,z_1$）不满足 L_2 的方程；

$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$；

L_1 与 L_2 夹角 θ（方向向量间的夹角，不大于 90 度）满足 $\cos\theta=\frac{|l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$.

3. 直线与平面的位置关系

直线和它在平面投影直线所夹锐角 θ 称为直线与平面的夹角．当直线与平面垂直时，规定夹角为 $\frac{\pi}{2}$．

$L: \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$，$\Pi: Ax+By+Cz+D=0$，$\vec{s}=\{l,m,n\},\vec{n}=\{A,B,C\}$，

则 $L \parallel \Pi \Leftrightarrow \vec{s}\perp\vec{n}$，$Al+Bm+Cn=0$ 且 $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$；

$L \perp \Pi \Leftrightarrow \vec{s}\parallel\vec{n}$，即 $\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$；

L 与 Π 的夹角 $\theta=\frac{\pi}{2}-\langle\vec{s},\vec{n}\rangle$，$\sin\theta=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$.

考点·曲面方程★★

1. 球面方程

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

2. 旋转曲面

以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为旋转曲面．这条直线叫做旋转曲面的轴．

yoz 平面上的曲线 $f(y,z)=0$ 绕 z 轴旋转一周的曲面方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$；

yoz 平面上的曲线 $f(y,z)=0$ 绕 y 轴旋转一周的曲面方程为 $f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$.

3．柱面

平行于定直线，并沿定曲线 C 移动的直线 L 所形成的曲面称为柱面．这条定曲线 C 叫做柱面的准线，动直线 L 叫做柱面的母线．

4．二次曲面

（1）椭球面

方程：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

①椭球面与三个坐标平面的交线：$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$，$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases}$，$\begin{cases}\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases}$.

②椭球面的几种特殊情况

若 $a=b$，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 为旋转椭球面．此椭球面是由椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 绕 z 轴旋转而成．

③ $a=b=c$，为球面．方程可写为 $x^2+y^2+z^2=a^2$.

（2）抛物面

① $\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$（$p$，$q>0$）为椭圆抛物面．

② $\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2p}=z$ 为旋转抛物面（由 xoz 平面上的抛物线 $x^2=2pz$ 绕它的轴旋转而成）．

③ $-\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$ 为双曲抛物面．

（3）双曲面

①单叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

②双叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

考点·曲面的切平面与法线方程★★★★

1．设曲面的方程为 $F(x,y,z)=0$，在曲面上任取一条通过点 M 的曲线：Γ：$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$，曲线在 M 处的切向量为 $\vec{T}=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$.

切平面方程为$F_x(M)(x-x_0)+F_y(M)(y-y_0)+F_z(M)(z-z_0)=0$，

法线方程为$\dfrac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$.

2．空间曲面方程形为$z=f(x,y)$，令 $F(x，y，z)=f(x，y)-z$，曲面在 M 处的切平面的法向量为：$\vec{n}=\{f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0),-1\}$.

曲线在 M 处的切平面的方程为$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)=z-z_0$.

曲线在 M 处的法线方程为$\dfrac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$.

考点·随机事件及其概率★★

1．频率与概率

（1）在相同的条件 S 下重复 n 次试验，观察某一事件 A 是否出现，称 n 次试验中事件 A 出现的次数 n_A 为事件 A 出现的频数，称事件 A 出现的比例$f_n(A)=\dfrac{n_A}{n}$为事件 A 出现的频率.

（2）对于给定的随机事件 A，如果随着试验次数的增加，事件 A 发生的频率稳定在某个常数上，把这个常数记作 $P(A)$，称为事件 A 的概率，简称为 A 的概率.

2．概率的几个基本性质

（1）概率的取值范围：$0\le P(A)\le 1$.

（2）必然事件的概率 $P(E)=1$.

（3）不可能事件的概率 $P(E)=0$.

（4）互斥事件概率的加法公式.

①如果事件 A 与事件 B 互斥，则 $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

②若事件 B 与事件 A 互为对立事件，则 $P(A)=1-P(B)$.

3．条件概率及其性质

（1）对于任何两个事件 A 和 B，在已知事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的概率叫做条件概率，用符号$P(B|A)$来表示，其公式为$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}(P(A)>0)$.

（2）条件概率具有的性质：

①$0\le P(B|A)\le 1$；

②如果 B 和 C 是两个互斥事件，则 $P(B\cup C|A)=P(B|A)+P(C|A)$.

4．相互独立事件

（1）对于事件 A、B，若 A 的发生与 B 的发生互不影响，则称 A、B 是相互独立事件.

（2）若 A 与 B 相互独立，则 $P(B|A)=P(B)$，$P(AB)=P(B|A)P(A)=P(A)P(B)$.

（3）若 A 与 B 相互独立，则 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也都相互独立.

（4）若 $P(AB)=P(A)P(B)$，则 A 与 B 相互独立.

考点·古典概型与几何概型★★

1．基本事件的特点

（1）任何两个基本事件是互斥的.

（2）任何事件（除不可能事件）都可以表示成基本事件的和.

2．古典概型

（1）具有以下两个特点的概率模型称为古典概率模型，简称古典概型.

①试验的所有可能结果只有有限个，每次试验只出现其中的一个结果.

②每一个试验结果出现的可能性相等.

（2）如果一次试验中可能出现的结果有 n 个，而且所有结果出现的可能性都相等，那么每一个基本事件的概率都是$\frac{1}{n}$；如果某个事件 A 包括的结果有 m 个，那么事件 A 的概率 $P(A)=\frac{m}{n}$.

3．几何概型

如果每个事件发生的概率只与构成该事件区域的长度（面积或体积）成比例，则称这样的概率模型为几何概率模型，简称为几何概型.

（1）要切实理解并掌握几何概型试验的两个基本特点

①无限性：在一次试验中，可能出现的结果有无限多个.

②等可能性：每个结果的发生具有等可能性.

（2）几何概型中，事件 A 的概率计算公式

$$P(A)=\frac{\text{构成事件 }A\text{ 的区域测度（长度、面积、体积等）}}{\text{试验全部结果构成的区域测度（长度、面积、体积等）}}.$$

考点·十大核心概念★★★★

在数学课程中，应当注重发展学生的数感、符号意识、空间观念、几何直观、数据分析观念、运算能力、推理能力和模型思想．为了适应时代发展对人才培养的需要，数学课程还要特别注重发展学生的应用意识和创新意识.

口诀：双数符空几，算模推两意

双数（数感、数据分析观念），符（符号意识），空（空间观念），几（几何直观），算（运算能力），模（模型思想），推（推理能力），两意（应用意识、创新意识）.

1．数感

【内容解释】指关于数与数量、数量关系、运算结果估计等方面的感悟．建立数感有助于学生理解现实生活中数的意义，理解或表述具体情境中的数量关系．

2．符号意识

【内容解释】指能够理解并且运用符号表示数、数量关系和变化规律；知道使用符号可以进行运算和推理，得到的结论具有一般性．建立符号意识有助于学生理解符号的使用是数学表达和进行数学思考的重要形式．

3．空间观念

【内容解释】根据物体特征抽象出几何图形，根据几何图形想象出所描述的实际物体；想象出物体的方位和相互之间的位置关系；描述图形的运动和变化；依据语言的描述画出图形等．

4．几何直观

【内容解释】指利用图形描述和分析问题．借助几何直观可以把复杂的数学问题变得简明、形象，有助于探索解决问题的思路，预测结果．几何直观可以帮助学生直观地理解数学，在整个数学学习过程中都发挥着重要作用．

5．数据分析观念

【内容解释】了解在现实生活中有许多问题应当先做调查研究，收集数据，通过分析做出判断，体会数据中蕴涵着信息；了解对于同样的数据可以有多种分析的方法，需要根据问题的背景选择合适的方法；通过数据分析体验随机性，一方面对于同样的事情每次收集到的数据可能不同，另一方面只要有足够的数据就可能从中发现规律．

6．运算能力

【内容解释】指能够根据法则和运算律正确地进行运算的能力．培养运算能力有助于学生理解运算的算理，寻求合理简洁的运算途径解决问题．

7．推理能力

【内容解释】应贯穿在整个数学学习过程中．推理是数学的基本思维方式，也是人们学习和生活中经常使用的思维方式．推理一般包括合情推理和演绎推理，合情推理是从已有的事实出发，凭借经验和直觉，通过归纳和类比等推断某些结果；演绎推理是从已有的事实（包括定义、公理、定理等）和确定的规则（包括运算的定义、法则、顺序等）出发，按照逻辑推理的法则证明和计算．在解决问题的过程中，合情推理用于探索思路，发现结论；演绎推理用于证明结论．

8．模型思想

【内容解释】是学生体会和理解数学与外部世界联系的基本途径．建立和求解模型的过程包括：从现实生活或具体情境中抽象出数学问题，用数学符号建立方程、不等式、函数等表示数学问题中的数量关系和变化规律，求出结果、并讨论结果的意义．这些内容的学习有助于学生初步形成模型思想，提高学习数学的兴趣和应用意识．

9．应用意识

【内容解释】一方面有意识利用数学的概念、原理和方法解释现实世界中的现象，解决现实世界中的问题；另一方面，认识到现实生活中蕴涵着大量与数量和图形有关的问题，这些问题可以抽象成数学问题，用数学的方法予以解决．在整个数学教育的过程中都应该培养学生的应用意识，综合实践活动是培养应用意识很好的载体．

10．创新意识

【内容解释】是现代数学教育的基本任务，应体现在数学教与学的过程之中．学生自己发现和提出问题是创新的基础；独立思考、学会思考是创新的核心；归纳概括得到猜想和规律，并加以验证，是创新的重要方法．创新意识的培养应该从义务教育阶段做起，贯穿数学教育的始终．

考点·数学课程标准要点★★★

（1）课程性质

数学的课程性质决定了数学在教育中的地位．在案例分析中要综合的评析是否体现数学的性质．课程的目标和内容是不是围绕“必备的基础知识和基本技能”；有没有体现基础性、普及型和发展性的特点；能不能培养学生的创新意识和实践能力；促进学生在情感、态度与价值观等方面的发展；能不能很好的做好为学生未来生活、工作和学习奠定重要的基础．基础教育应体现出特定的方向性和目标性，而高中教育强调的是促进学生认识数学的应用价值，增强应用意识，形成解决简单实际问题的能力．

（2）课程理念

新课程理念对教学具有一定的指导作用，案例分析中需要分析教师是否将新课程的理念落实到课程教学的行为中，行为中体现的教育思想是否符合数学课程理念．

考点·教学过程注意要点★★★★

（1）教学目标

评析教学目标与确定教学目标一样，要遵循三条基本原则：

①是否体现数学课程的基本理念的精神；

②是否实现三维目标的整合又有所侧重；

③是否具体明确，可操作，可考核.

（2）课堂导入

评析课堂导入可从以下几个方面考虑：

①评析课堂导入的方法．先指明所采用的导入方法，如，情境导入、复习导入、直接导入在评析所用方法与教学内容是否适切；

②评析课堂导入的效果．评析课堂导入是否起到激发兴趣、引发思考、提示学习要点或集中学生注意力等效果；

③评析课堂导入的成本．如果低成本高产出，当然最佳；达不到则求其次，成本与产出相当；坚决摒弃高成本低产出．评析课堂导入的成本，可以从所花的时间和精力以及采用的手段等方面分析.

（3）教学行为（教学片段）

评析教学行为．评析教学片段要善于抓住主要信息，提炼优缺点，提出改进意见．一般可以从以下几个方面考虑：

①从宏观方面说，是否以人为本，培养学生自主学习、独立思考、合作探究的精神，促进学生健康和谐发展；

②从中观方面说，是否反映数学课程性质、课程基本理念，把握数学课程的基本特点，培养学生分析问题并解决问题的能力，提升数学素养；

③从微观方面说，教学方法是否恰当；教学程序是否循序渐进；练习设计是否有效；教学效果、教学氛围如何，等等.

（4）教学问题

教学问题是课堂组织的重要因素，对于教学问题的评析可以从以下几点进行：

①围绕教学目标，突出重难点

教师要以整体的、联系的、全面的观点作为指导思想，充分把握教材中的知识点、例题、练习题之间的联系，抓住教材的内在思路，从目标的整体效应出发设计精而少、具有多方面功能的提问，不可单一浅层、表面孤立地提问．弄清楚每堂课的教学目的，把握住教学重点、难点，抓住教学重点设计问题，进而组织训练.

②针对实际，难易适度

提问设计要切合学生实际，难易适度，过难过易都不会收到好的效果；但也要注意设计些稍难及较易的问题，分别让优生和后进生来回答，这种差异性提问，将能更好地调动全体学生的积极性．通常设问，问题宜大一些，要有一定的内涵；如担心回答有困难，可设计一两个辅助问题，必要时拿出来作为铺垫式的提问．

③顺序得当，发展思维能力

课堂提问本身就是思维能力训练，但浅表化的“是不是”“好不好”一类的提问是不能达到思维训练目的的．提问是训练思维的重要教学手段之一．一般说来，提问可归为“是什么”“为什么”“怎么样”几类，这三类都含有思维的因素，但要求和层次不同，效果也就不一样．“是什么”一般是以判断的形式作答，是思维的结果；而后两者须把前因后果讲清楚，不但要判断，而且要把思维的过程说出来，层次高，难度大．因此，要认真设计好后两者的提问．

④结构恰当，层次分明

提问应根据不同的教学要求，不同的教学阶段，按照一定的顺序，提出不同层次水平的问题，清晰地展开教学过程．一般说来，问题的设计应由浅入深，由表及里，层层深入．这样的提问设计，从思维角度讲，是从综合——分析——综合的思维过程来设计的；从思维内容、表现形式来讲，又是从知识点表面到理解内容再到领会深刻含义的顺序来设计的，层次分明，由浅入深，环环紧扣．不同的教学环节、不同的教学时间，应设计不同类型和不同层次的提问．

（5）教学效果

应该说，教学效果是衡量课堂教学最终目标，不管教学目标如何确定、教学过程如何开展，最终都要看教学效果如何．在评析教学效果时，一定要具体情况具体分析，要具备专业的眼光，不被表面现象蒙蔽，也不要被看似“有效”冲昏头脑．

如何看待教学效果的问题，比如，教学过程就是教学效果的有机组成部分，既重结果又重过程；教学效果有长效和短效、高效和低效之别，例如，靠机械训练所得的结果，当时可能很有效，但是从长远看，未必真有效；学生自动的质疑问难和合作讨论，花了比较多的时间，一时看不出什么效果，但是对学生的学习品质产生积极而深远的影响．从长远看，真有效，是长效、高效．

（6）评析作业

一般而言，评析课后作业，主要考虑量和质两个方面：从量方面看，主要是适量，其标准是符合国家或地方行政规定，如，一二年级不留书面家庭作业，三四年级不超过半小时，五六年级不超过一小时；从质方面看，包括课后作业的形式和内容．课后作业的形式要灵活多样，适应课后广阔的时间和空间；课后作业的内容要有针对性、选择性．针对性，即针对课内教学内容、针对学生实际；选择性，即提供多种作业，让学生根据自己的实际需要选择．

考点·教学设计要点★★★★★

（1）教学目标．要求确定并表述该课题结束时应达到的预期结果标准．

（2）重点难点．根据学生发展水平和教学目标，分析确定该课题的教学重点和教学难点．

（3）设计课程导入，并说明设计意图．

（4）教学过程．这是教案设计、编写中最为重要的项目，也是教案的主体部分．要求表述清晰、重点突出、内容得当、步骤合理、结构完整，并说明设计意图．

（5）练习专业知识设计巩固练习题或者说明此部分内容在课程体系中的地位、作用．

第三章 主观题答题技巧

（一）简答题、解答题

例 1．（2018 年下半年，高级）设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的可导函数，且 $f'(x)$ 有界，证明：存在 $M>0$，使得对于任意 x_1，$x_2\in[0,1]$，有 $|f(x_1)-f(x_2)|\le M|x_1-x_2|$．

【答案】见解析．

分析：本题考查函数的证明问题和拉格朗日中值定理在证明中的使用．首先需要讨论任意给定的 x_1 与 x_2 的取值情况，即分为 $x_1=x_2$ 与 $x_1\neq x_2$ 两种情况．

在 $x_1\neq x_2$ 时，把 $|f(x_1)-f(x_2)|\le M|x_1-x_2|$ 变形为 $\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right|\le M$，结合拉格朗日中值定理，

可知：$\exists\xi\in(x_1,x_2)$，使得 $f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$，进行变形得 $|f(x_2)-f(x_1)|=|f'(\xi)||x_2-x_1|$，

再根据 $f'(x)$ 有界，可以知道 $\exists M>0$，使得 $|f'(x)|\le M$，即可得证 $|f(x_1)-f(x_2)|\le M|x_1-x_2|$．

解析：当 $x_1=x_2$ 时，对于 $|f(x_1)-f(x_2)|\le M|x_1-x_2|$ 有 $0\leqslant 0$，显然成立；

当 $x_1\neq x_2$ 时，不妨设 $x_1<x_2$，由拉格朗日中值定理有：$\exists\xi\in(x_1,x_2)$，

使得 $f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$，即 $\exists\xi\in(x_1,x_2)$，

使得 $|f(x_2)-f(x_1)|=|f'(\xi)||x_2-x_1|$，又因为 $f'(x)$ 有界，故 $\exists M>0$，使得 $|f'(x)|\le M$，

故 $|f(x_1)-f(x_2)|\le M|x_1-x_2|$．

技巧总结：根据题目中条件，对照微分中值定理，构造适当函数，利用定理内容进行证明．

例 2．（2017 年下半年，初级）将平面曲线 $y=x^2$ 分别绕 y 轴和 x 轴旋转一周，所得旋转曲面分别记作 S_1 和 S_2．

（1）在空间直角坐标系中，分别写出曲面 S_1 和 S_2 的方程；（4 分）

（2）求平面 $y=4$ 与曲面 S_1 所围成的立体的体积．（3 分）

【答案】（1）$S_1:x^2=\sqrt{y^2+z^2},S_2:y=x^2+z^2$；（2）$8\pi$.

分析：（1）本题考查平面的旋转知识，关于平面，绕 x 轴旋转，则 x 不变，将 y 换成 $\pm\sqrt{y^2+z^2}$；绕绕 y 轴旋转，y 不变，将 x 换成 $\pm\sqrt{x^2+z^2}$ 即可求出旋转后的曲面方程．

（2）由旋转面绕 y 轴旋转的体积公式 $V=\pi\int_a^b\left[f(y)\right]^2dy$ 可得.

解析：（1）在空间直角坐标系中，$y=x^2$ 绕 x 轴旋转，x 不变，将 y 换成 $\pm\sqrt{y^2+z^2}$，将其代入 $y=x^2$，可得 S_1：$x^2=\sqrt{y^2+z^2}$．$y=x^2$ 绕 y 轴旋转，y 不变，将 x 换成 $\pm\sqrt{x^2+z^2}$，将其代入 $y=x^2$ 可得 $S_2: y=x^2+z^2$.

（2）由旋转体的体积公式有：$V=\pi\int_0^4(\sqrt{y})^2dy=\pi\int_0^4ydy=\pi\bullet\frac{1}{2}y^2\Big|_0^4=8\pi$.

技巧总结：熟记旋转体的曲面方程公式和旋转体体积公式，根据条件代入公式即可.

例 3．（2018 年上半年，初级）若 $ad-bc\neq0$，求 $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

【答案】$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$.

分析：本题考查求方阵的逆矩阵．要求方阵的 A 逆矩阵，可以先求出 $|A|$，再求出 A 的伴随矩阵 A^*，则 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$.

解析：$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，$|A|=\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc$，又 $\because ad-bc\neq0$，

$\therefore A$ 可逆，$A^*=\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$，$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$.

技巧总结：如果矩阵为 2 阶，则利用求逆矩阵的第一种方法进行求解；如果为 3 阶及其以上具体矩阵则用初等变换法求解；如果为抽象矩阵求逆矩阵，则用定义法求解.

例 4．（2016 年下半年，高级）已知二次曲线 L：$9x^2+4y^2+18x+16y-11=0$，矩阵 $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$．求二次曲线 L 在变换 $TX=AX+B$ 下所得二次曲线 L_1 的方程.

【答案】$x^2+y^2=1$.

分析：本题考查矩阵变换下的曲线方程，只要找到变换后相对应的的关系式，再代入到已知曲线方程中即可.

解析：设曲线 L 上的点（x,y）在变换下得到的对应点为 (x',y')，

已知 $TX=AX+B$，所以 $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}\end{pmatrix}$，

所以$x'=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2},y'=\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}$， $x=2x'-1,y=3y'-2$，

即代入$9x^2+4y^2+18x+16y-11=0$，化简得$x^2+y^2=1$，

所以所得二次曲线L_1的方程$x^2+y^2=1$.

技巧总结：根据线性变换前后坐标变换公式代入化简即可.

例 5．（2014 年下半年，高级）在空间直角坐标系下，试判断直线$l:\begin{cases}2x+y+z-1=0\\x+2y-z-2=0\end{cases}$与平面$\pi:3x-y+2z-1=0$的位置关系，并求出直线$l$与平面$\pi$的夹角正弦值.

【答案】相交；$\frac{\sqrt{42}}{21}$.

分析：本题考查空间中向量的应用，判断直线$l:\begin{cases}2x+y+z-1=0\\x+2y-z-2=0\end{cases}$与平面$\pi:3x-y+2z-1=0$的位置关系，可利用直线的方向向量与平面的法向量来判断；求直线l与平面π的夹角正弦值即求直线的方向向量与平面法向量夹角的余弦值的绝对值，因此此题的关键在于直线的方向向量与平面的法向量.

解析：平面π的法向量为$\vec{n}$ =（3，−1，2）；

平面 $2x+y+z-1=0$ 的法向量为$\overrightarrow{n_1}$ =（2，1，1），平面 $x+2y-z-2=0$ 的法向量为$\overrightarrow{n_2}$ =（1，2，−1），

则直线l的方向向量为$\vec{m}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&1&1\\1&2&-1\end{vmatrix}=-3\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}$ =（−3，3，3），$\vec{m}\cdot\vec{n}$ =−9−3+6=−6，

可知直线l与平面π相交.

设直线l平面π的夹角为θ，则$\sin\theta=\left|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle\right|=\left|\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}\right|=\left|\frac{-6}{\sqrt{14}\times\sqrt{27}}\right|=\frac{\sqrt{42}}{21}$.

技巧总结：利用直线的方向向量和平面的法向量之间的关系来判定和求解.

例 6．（2018 年上半年，初级）求二次曲面$3x^2-2y^2+z^2=20$过点$(1,2,5)$的切平面的法向量.

【答案】$(6,-8,10)$.

分析：本题考查求曲面在某点的切平面的法向量．曲面$F(x,y,z)=0$在点（a，b，c）处的切平面的法向量为（$F_x'(a,b,c)$，$F_y'(a,b,c)$，$F_z'(a,b,c)$）.

解析：令$F(x,y,z)=3x^2-2y^2+z^2-20$，可以得到$F_x'(x,y,z)=6x$，$F_y'(x,y,z)=-4y$，$F_z'(x,y,z)=2z$，所以切平面的法向量为$(6x,-4y,2z)$，

将点$(1,2,5)$代入可以得到切平面的法向量为$(6,-8,10)$.

技巧总结：根据曲面切平面和法线的求解公式，先求偏导再代入计算即可.

例 7．（2014 年下半年，高级）袋子中有 70 个红球，30 个黑球，从袋子中连续摸球两次，每次摸一个球，而且是不放回的摸球：

（1）求两次摸球均为红球的概率．

（2）若第一次摸到红球，求第二次摸到黑球的概率．

【答案】（1）$\frac{161}{330}$（2）$\frac{10}{33}$．

分析：本题考查随机事件的概率，（1）利用概率近似等于频率，根据相互独立性，可求解两次摸球都是红球的概率；（2）若第一次摸到红球，再从剩余的 99 个球中去摸黑球，则有 30 种可能．

解析：（1）第一次摸到红球的概率为 $P_1=\frac{70}{100}=\frac{7}{10}$，由于是不放回的摸球，所以第二次摸到红球的概率为 $P_2=\frac{69}{99}=\frac{23}{33}$，两次摸球相互独立，所以两次摸到均为红球的概率为 $P=P_1\times P_2=\frac{7}{10}\times\frac{23}{33}=\frac{161}{330}$．

（2）设第一次摸到红球为事件 A，第二次摸到黑球为事件 B，则第一次摸到红球，第二次摸到黑球的概率为 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{70}{100}\times\frac{30}{99}}{\frac{70}{100}}=\frac{10}{33}$．

技巧总结：根据条件概率公式，计算出积事件和作为分母的某事件概率，代入公式计算即可．

例 8．（2012 年下半年，初级）《义务教育数学课程标准（2011 年版）》中“数据分析观念”的含义是什么？

【参考答案】见解析．

解析：在新课程标准中，将数据分析观念包括：了解在现实生活中有许多问题应当先做调查研究，收集数据，通过分析作出判断，体会数据中蕴涵着信息；了解对于同样的数据可以有多种分析的方法，需要根据问题的背景选择合适的方法；通过数据分析体验随机性，一方面对于同样的事情每次收集到的数据可能不同，另一方面只要有足够的数据就可能从中发现规律．数据分析是统计的核心．

技巧总结：熟记十大核心概念及其解释，能够结合中学知识，清楚如何在具体课程中落实十大核心概念．

例 9．（2018 年上半年，高级）简述确定中学数学教学方法的依据．

【参考答案】见解析．

解析：教学方法是为了完成教学任务，达到教学目标，所采取的教与学的方式和手段，它包括教师教的方法和学生学的方法，是教师引导学生掌握知识技能，获得身心发展而共同活动的方法．一方面是

教学客观的需要与实现，为目的而创造方法，另一方面是主观的选择和创造. 选择中学数学教学方法的依据有：

（1）符合教学规律和教学原则；

（2）符合教学目标和任务；

（3）符合教学内容的特点；

（4）符合学生的发展水平；

（5）符合教师的特长；

（6）符合教学的经验性.

另外选择教学方法应考虑：

（1）教学内容及相应的教学目标；

（2）各种不同层次的学生；

（3）各种教学方法的特点.

技巧总结：熟记教学方法选择的依据等知识即可.

（二）案例分析

1. 审题思路

（1）审题干，明考点

审清题干，划出题干中的关键词，如“数学课程理念”“教学目标”“教学过程”“导入设计”“教学重难点”“某内容的教学”等字样，明确题目的考点.

（2）读材料，划句子

根据题干明确的考点，完整的读材料. 在读材料的过程中，划出体现数学课程理念的句子、体现教学方法的句子、教学目标设计合理或不合理的句子、导入方式恰当或不当的句子、能突破教学重难点的文句、教学某内容时师生关键行为的句子等. 材料中的重要语句可以是教师的话语、行为，也可以是学生反馈或活动. 如果是两则材料进行对比分析，则需要划出两则材料的异同点.

（3）析句子，找理论

就材料中的重点文句进行分析，概括主要内容，回想与之相关的理论知识，对应到教师行为和学生行为.

2. 答题步骤

（1）破题，就题答题

所谓“就题答题”，是指从正面回答题干问题，题干怎么问，就怎么答，题干问什么，就答什么.

（2）分析，有理有据

“理”指的是理论知识，“据”指的是材料信息．在具体分析环节，一方面要点明材料关键点，另一方面，要结合相关的理论知识．

（3）评价，收束总结

对案例进行综合评价，总结教师行为，阐明是否应该提倡，有何影响，我会怎么做等．

例 1．（2014 年上半年，初级）案例：

下面是某位同学用开方法解方程的过程

求方程中 x 的值 $(3x+1)^2-4=0$

解：$(3x+1)^2-4=0$

移项 $(3x+1)^2=4$

开平方 $3x+1=2$

移项 $3x=1$

所以 $x=\frac{1}{3}$

问题：

（1）该同学的解题过程哪步错了？分析其原因；（8 分）

（2）针对该生情况，请你设计一个辅导教学片段（可以为师生问答形式），并说明设计意图；（8 分）

（3）除了开方法外，本题还可以用哪些方法解答（至少列举两种）？（4 分）

【参考答案】见解析．

解析：（1）该同学的解题过程错在：在开平方 $3x+1=2$，错误原因：直接开平方应得到两个根，一个正跟，一个负根，而该同学遗漏了负根的情况．

（2）辅导教学片段：

教师提问：$(-3)^2=$？，$3^2=$？；$(-2)^2=$？，$2^2=$？．

老师引导学生来回答；

学生答：$(-3)^2=3^2=9$；$(-2)^2=2^2=4$．

用开平方法解方程的关键是一个正数的平方根有两个，一个正根和负数根，因此在做题的过程中不要遗漏了负数根．

师：$(2x+3)^2-16=0$ 这个题目写出完整的步骤

生：解：

$(2x+3)^2-16=0$

移项 $(2x+3)^2=16$

开平方 $2x+3=4$ 或 $2x+3=-4$

移项 $2x=1$ 或 $2x=-7$

所以 $x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=-\frac{7}{2}$

师：非常好．步骤也很完整，以后注意细节，继续努力（由易到难，由浅入深，让学生能运用开方法解方程）．

【设计意图】在整个辅导教学片段中，通过师生问答形式，根据学生已有的知识提出问题，启发学生反思自己做题中的错误以及错误的原因所在，帮助学生真正领悟开方法解方程的正确解题方法，并通过巩固练习的方式，一步一步，由易到难，由具体到抽象促进能力的提高．

（3）①公式法：

解：$(3x+1)^2-4=0$

$3x^2+2x-1=0$

$a=3$，$b=2$，$c=-1$

$\triangle=b^2-4ac=16>0$

方程有两个不相等的实数根

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2\pm4}{6}$$

即：$x_1=-1$，$x_2=\frac{1}{3}$

②因式分解法：

解：$(3x+1)^2-4=0$

因式分解得：$(3x+3)(3x-1)=0$

于是得：$3x+3=0$ 或 $3x-1=0$

解得：$x_1=-1$，$x_2=\frac{1}{3}$

例 2．（2015 年上半年，高级）方式 1. 实数有加法运算，那么下列集合的关系呢？

方式 2. 班里有会弹钢琴的，会打拳击的会……（给出集合的并集的定义）

方式 3. 前面学习了集合，集合的表示、基本关系，接下来呢……

（1）分析三种引入方式的特点（6 分）

（2）对于方式 3，教师可以引导学生进一步提出哪些问题（6 分）

（3）数学概念引入的关键点是什么？（4 分）如何使数学概念的引入更加自然？（4 分）

【参考答案】

（1）方式一的引入，从学生熟悉的实数加法运算入手，降低了认知难度. 集合间的交、并、补运算与实数的加法运算虽然有一定的联系，但是也存在一些差别，在教学过程中要注意引导学生思考探究避免出现运算误区.

方式二的引入，利用学生身边的人创设问题情景，降低对新知识的陌生感，引发学生思维的共鸣.

方式三的引入，复习以前学过的的知识内容，进行新旧知识的衔接过渡，降低学生对新知识的认知难度.但是缺乏具体内容的回顾，只是简单的提及，不能够全面的顾及到班上的所有学生对已有知识的复现达到降低对新知识认知难度的目的.

（2）问题 1. 集合之间是否也具备一些运算规律呢?

问题 2. 集合的并集运算与实数的加法运算有什么异同点?

问题 3. 集合的补集运算与实数的减法运算有什么异同点?

问题 4. 集合的交集运算需要注意的问题有什么?

（3）数学概念的引入的关键点为①注意运用新、旧知识之间的内在联系；②调动学生认知结构中已有感性经验和知识，去感知理解材料，创设具体情境，从具体事例抽象出数学概念.

在利用新旧知识之间的联系引入概念时，注意创设类比发现的问题情境，关注新旧知识的链接，尝试引入新的概念，这样引入容易使学生在原有的认知结构中得到同化和建构.

通过创设情境，从具体事例抽象出数学概念时要求充分调动学生认知结构中已有感性经验和知识，去感知理解材料，经过思维加工产生认识飞跃，继而组织成完整的概念图式.在具体引入概念的过程中可以通过实例、绘图或是多媒体辅助引导学生分析数学概念的特点，使学生思维由感性认识自然过渡到理性认识.

（三）教学设计

根据知识内容确定相应的教学目标、重难点、导入和教学过程，目标制定要全面合理，符合学情，重难点把握要准确，导入要发挥导入的相关作用，教学设计要体现出课程理念，完成教学目标，突出重点突破难点，而设计意图的回答角度为如何实现课程基本理念，如何落实十大核心概念、提升学生的四基、四能、提升学生的数学素养角度入手.

例 1. （2016 年下半年，初级）“多边形的内角和”是八年级上册的内容，如何引导学生发现和推导出多边形内角和公式是该节课的重点.

（1）如果将让学生体验“数学思考”作为该节课的一项教学目标，那么请列举出该节课涉及的“数学思考”的方法；（10 分）

（2）请给出两种引导学生猜想四边形内角和的学生活动设计；（6分）

（3）请给出两种证明四边形内角和的学生活动设计；（6分）

（4）某教师在“多边形的内角和”一节的教学中，设计了如下两个问题：你能说出我们为什么要研究四边形的内角和吗？你能基于四边形内角和的证法，得到五边形、六边形，……，n边形内角和计算公式和证明方法吗？请分析该教师设计这两个问题的意图.（8分）

【参考答案】见解析.

解析：（1）数学课程标准对“数学思考”定义如下：建立数感、符号意识和空间观念，初步形成几何直观和运算能力，发展形象思维与抽象思维；体会统计方法的意义，发展数据分析观念，感受随机现象；在参与观察、实验、猜想、证明、综合实践等数学活动中，发展合情推理和演绎推理能力，清晰地表达自己的想法；学会独立思考，体会数学的基本思想和思维方式.

本节课所涉及的“数学思考”的方法为：学生在参与四边形、五边形、六边形的内角和的探究过程中，猜想多边形的内角和是 $(n-2)\times180°$，通过添加辅助线（对角线）等方法证明上述猜想过程，并让学生说出自己的探究过程，最后用数学语言表示出多边形的内角和定理：n 边形的内角和等于 $(n-2)\times180°$.

（2）第一种：教师提问：我们接触得比较多的四边形有哪些？它们的内角和分别是多少？

学生活动：通过对平行四边形、梯形、正方形等常见四边形进行研究，发现这些四边形的内角和为 $360°$.

第二种：教师提问：我们将手中的硬纸板剪出一个不规则的四边形，再把它的四个角剪掉，拼一拼，看拼出来的是什么？拼出来的图形的内角和又是多少？

学生活动：动手操作，将不规则四边形的四个角拼在一起，发现可以拼成一圈，猜想四边形的内角和为 $360°$.

（3）第一种：教师提问：我们能否利用三角形的内角和来证明四边形的内角和？如何将四边形分割为三角形？能分割为几个三角形？

学生活动：学生思考、讨论，发现连接对角线，可以将四边形分割为两个三角形，所以其内角和为 $180°\times2=360°$.

第二种：你还有其他的方法将四边形分割成三角形吗？

学生活动：学生思考，小组讨论交流，从而讨论出在四边形内部取一点，将四边形分割为 4 个三角形，其内角和为 $180°\times4-360°=360°$.

（4）问题一的设计意图：采用简单的四边形引导，使学生迅速掌握知识和掌握研究问题的方法，即通过连接辅助线把多边形的内角和灵活地转化成三角形的内角和，体会化归的数学思想，并为下面五边形、六边形以及 n 边形的内角和的探究做铺垫.

问题二的设计意图：引导学生动手操作、动脑思考、小组讨论，从四边形到五边形再到 n 边形，以知识迁移的方式进一步体会将多边形分割成几个三角形的化归思想. 进一步明确了 n 边形的边数、对角线条数对 n 边形内角和的影响，为从具体的多边形抽象到一般的 n 边形的内角和的研究奠定基础.

例 2. （2014 年上半年，高级）向量是近代数学中重要和基本的数学概念之一，下面是高中必修课程数学 4“平面向量”第二章第一节“平面向量的实际背景及基本概念”是部分教材内容.

2.1.1 向量的物理背景与概念

从本章引言中，我们知道，位移是既有大小，又有方向的量. 你还能举出一些这样的量吗?

力既有大小，又有方向. 例如，物体受到的重力是竖直向下的（图 2.1-1），物体的质量越大，它受到的重力越大；物体在液体中受到的浮力是竖直向上的（图 2.1-2），物体浸在液体中的体积越大，它受到的浮力越大；被拉长的弹簧的弹力是向左的（图 2.1-3），被压缩的弹簧的弹力是向右的（图 2.1-4），并且在弹性限度内，弹簧拉长或压缩的长度越大，弹力越大.

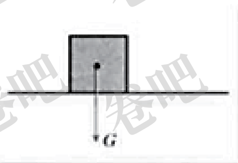


图 2.1-1

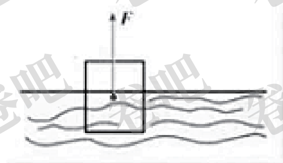
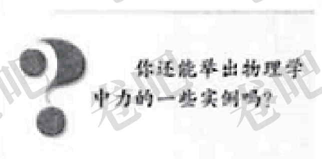


图 2.1-2



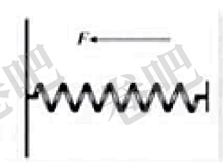


图 2.1-3

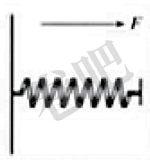


图 2.1-4

回顾学习数的概念，我们可以从一枝笔、一棵树、一本书……中抽象出只有大小的数量“1”. 类似地，我们可以对力、位移……这些既有大小又有方向的量进行抽象，形成一种新的量.

（1）谈谈向量在高中数学课程中的作用；

（2）分析上面教材的设计思路；

（3）确定“平面向量概念”的教学目标和教学重难点；

（4）根据教材，设计一个“平面向量概念”引入的教学片断要求：引导学生经历从实际背景抽象概念的过程.

【参考答案】见解析.

解析：（1）向量是近代数学中重要和基本的数学概念之一，它是沟通代数与几何的桥梁，为研究几何问题提供了新的工具和方法，同时对更新和完善中学数学知识结构起着重要的作用. 向量集数、形于一身，有着极其丰富的实际背景，能用向量语言和方法表述和解决数学和物理中的一些问题，发展运算能力和解决实际问题的能力.

（2）教材按照从抽象到具体的认知过程，通过实际模型（或物理模型），形成概念，使学生在材料的基础上获得对向量概念的直观感知，并上升到对向量概念及实际背景的理解.

（3）教学目标：

①知识与技能：通过实例分析，形成平面向量的概念，了解向量的实际背景，理解平面向量的几何表示，理解向量相等与共线的含义.

②过程与方法：联系物理知识体会向量的概念，通过观察图形中的向量，学会判断向量相等、平行、共线等内容.

③情感、态度与价值观：激发学生学习数学的热情，通过实际的生活例子体会无处不在的向量.

重点：向量的概念、向量的几何表示以及向量相等与共线的含义.

难点：向量、向量共线与相等概念的形成过程.

（4）教学片段：

多媒体手段引入实例：物体所受的力，分析受力的大小和方向；

小组讨论，并引导学生共同归纳：力是有大小有方向的量；

引导提问学生：是否还有其他具有这样特征的物理量（位移、速度、加速度）；

教师总结：这些物理量都是既有大小又有方向.

新课题引入：教师提出问题，像这样既有大小又有方向的量叫做什么？.

师：在物理中，我们把这些既有大小又有方向的量叫做矢量. 在数学中，我们把这种既有大小，又有方向的量叫做向量，而把那些只有大小没有方向的量叫做标量.

第四章　巩固练习

（一）单选题

1．极限 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=$（　）．

A．0　　B．1

C．2　　D．-1

2．已知数列 $\{a_n\}$ 与数列 $\{b_n\}$，n=1,2,3⋯则下列结论不正确的是（　）．

A．若对任意的正整数 n，有 $a_n\le b_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，且 $b<0$，则 $a<0$

B．若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，且 $a<b$，则对任意的正整数 n，$a_n<b_n$

C．若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，且存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，$a_n\ge b_n$ 则 $a\ge b$

D．若对任意的整数 n，有 $a_n\ge b_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，且 $b>0$，则 $a>0$

3．当 $x\to x_0$ 时，与 $x-x_0$ 是等价无穷小的为（　）．

A．$\sin(x-x_0)$　　B．e^{x-x_0}

C．$(x-x_0)^2$　　D．$\ln|x-x_0|$

4．$\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2-n}-n)=$（　）．

A．∞　　B．0

C．1　　D．$-\dfrac{1}{2}$

5．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)}{\sin 2x}=$（　）．

A．$\dfrac{3}{2}$　　B．$-\dfrac{3}{2}$

C．1　　D．0

6．设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数，则下列命题不正确的是（　）．

A．$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值

B．$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续

C．$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积

D．$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导

7．下列各命题中哪一个是正确的（　）．

A．$f(x)$ 在 (a,b) 内的极值点，必定是 $f'(x)=0$ 的根

B．$f'(x)=0$ 的根必定是 $f(x)$ 的极值点

C．$f(x)$ 在 (a,b) 取得极值的点处，其导数 $f'(x)$ 必不存在

D．使 $f'(x)=0$ 的点是 $f(x)$ 可能取得极值的点

8．若 $f(x)$ 为 $(-1,1)$ 内的可导奇函数，则 $f'(x)$（　）．

A．是 $(-1,1)$ 内的偶函数

B．是 $(-1,1)$ 内的奇函数

C．是 $(-1,1)$ 内的非奇非偶函数

D．可能是奇函数，也可能是偶函数

9．已知 $f(x)=\int_0^{2x}(2t+2)e^t dt$，则 $f(x)$ 有（　）．

A．极小值 $f(-1)$　　B．极小值 $f\left(-\frac{1}{2}\right)$

C．极大值 $f\left(-\frac{1}{2}\right)$　　D．极大值 $f(-1)$

10．下列四个级数中条件收敛的是（　）．

A．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$　　B．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$　　C．$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$　　D．$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$

11．设 $x=\alpha$ 是 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的二重根，则下列结论不正确的是（　）．

A．$x-\alpha$ 是 $f(x)$ 的二重因式　　B．$(x-\alpha)^2$ 整除 $f(x)$

C．$f''(\alpha)=0$　　D．$(f(x), f'(x))=x-a$

12．n 阶行列式 D_n 为零的充分条件是（　）．

A．零元素的个数大于 n　　B．D_n 中各行元素之和为零

C．主对角线上元素全为零　　D．副对角线上元素全为零

13．已知 A 为 n 阶矩阵，$|A|=k\neq 0$，则 $|kA^{-1}|$ 的值为（　）．

A．k^{n-1}　　B．k^2　　C．k^{n+1}　　D．1

14．向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(m\geqslant 2)$ 线性相关的充要条件是（　）．

A．$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中至少有两个向量成比例

B．$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中至少有一个零向量

C．$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中至少有一个向量可由其余向量线性表示

D．$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 任一部分组线性相关

15．矩阵 $A_{m\times n}$，B 满足矩阵运算要求，关于秩，下列式子正确的是（　）．

A．$r(A+B)\le r(A)$　　B．$r(AB)>(A)$

C．$r(A)+r(B)\le n$　　D．$r(AB)\ge r(A)+r(B)-n$

16．下面关于初等变换和初等矩阵的关系正确的是（　）．

A．矩阵的行初等变换相当于左乘对应的初等矩阵

B．矩阵的列初等变换相当于左乘对应的初等矩阵

C．矩阵的行初等变换相当于右乘对应的初等矩阵

D．矩阵的初等变换和初等矩阵没有对应关系

17．设 A 是 $m\times n$ 阶矩阵，则齐次线性方程组 $AX=0$ 只有零解的充要条件是（　）．

A．$m=n$，且 $r(A)=n$　　B．$m>n$

C．$r(A)=n$　　D．方程组 $AX=b$ 有唯一解

18．方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+\lambda x_3=0 \end{cases}$ 有非零解则 λ 等于（　）．

A．-1　　B．± 1

C．0　　D．1

19．设 A 是秩为 m 的 $m\times n$ 矩阵，且 $m<n$，则非齐次线性方程组 $AX=b$（　）．

A．有惟一解　　B．无解

C．有无穷多解　　D．不能确定是否有解

20．设向量集合 $V=\{\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|\,x_1,x_2,\cdots,x_n\in R \text{ 且 } x_3=x_1+x_2\}$，则 V（　）向量空间．

A．是 n 维　　B．是 $n-1$ 维

C．是 $n-2$ 维　　D．不是

21．已知三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$，其特征向量 $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 所对应的特征值为（　）．

A．-2　　B．2

C．$1-\sqrt{3}$　　D．$1+\sqrt{3}$

22．直线 $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{-3}$ 与平面 $\pi:x+y+z=2$ 的位置关系是（　）．

A. 平行　　B. 相交但不垂直

C. 垂直　　D. 直线 M 在平面 π 上

（二）简答题

1．对 $f(x)=\ln(1+x)$ 应用 Lagrange 中值定理，试证：对 $x\geq 0$ 有 $0<\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}<1$．

2．求函数 $f(x)=(x-4)\sqrt[3]{(x+1)^2}$ 的极值．

3．求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围成图形的面积．

4．A 是 3×4 矩阵，其秩为 3，并且 η_1，η_2 是非齐次方程组 $AX=b$ 的两个不同的解，其中

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}.$$

（1）用 η_1，η_2 构造 $AX=0$ 的一个解，并写出 $AX=0$ 的通解；

（2）求 $AX=b$ 的通解．

5．试求通过点 $M_0(-1,0,4)$，垂直于平面 $\pi:3x-4y+z-10=0$，且与直线 $l:\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$ 平行的平面方程．

6．甲、乙两位同学进行篮球三分球投篮比赛，甲每次投中的概率为$\frac{1}{3}$，乙每次投中的概率为$\frac{1}{2}$，每人分别进行三次投篮.

（1）求乙至多投中 2 次的概率；

（2）求乙恰好比甲多投进 2 次的概率.

7．什么是几何直观？并简述如何培养几何直观？

8．数学课堂教学过程中，为了鼓励学生独立思考、深入理解问题，教师常常在呈现任务后，不是立刻讲解，而是留给学生足够的思考时间，这种教学方式可称之为“课堂留白”，请谈谈课堂留白的必要性及其意义.

（三）案例分析

1. （初级）案例：在“平方根”的习题课上，有这样一道题：例：$\sqrt{25}$ 的平方根为（　　）．很多学生得到答案为 ± 5．

问题：

（1）请指出该生解题中的错误，并分析产生错误的原因；

（2）为纠正此类错误，请你再设计 3 道题形成一个题组训练，并说明设计每道题的针对性；

（3）针对平方根的运算，主要提高学生的什么能力？并说一说你对这个能力的理解．

2. （高级）若等边三角形 ABC 的边长为 $2\sqrt{3}$，平面内一点 M 满足 $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{6}\overrightarrow{CB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$，求 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ 的值．

（1）用“直角坐标系”方法、“非直角坐标系”方法分别求解；

（2）以这题为例，说说“一题多解”的意义和作用；

（3）说说你在实际教学过程中，如何渗透向量思想方法．

（四）教学设计

1．（初级）课题：因式分解．在因式分解这一章节主要阐述了两个方面：一是因式分解的概念，二是与整式乘法的相互关系．

（1）为因式分解的十字相乘法设计一个新授环节的教学片断，并阐述设计意图；

（2）总结因式分解常见的几种方法（至少三种）；

（3）尝试写出的几何表示．

2．（高级）课题：平面向量数量积

情境 1：平面向量数量积概念的引入.

情境 2：①定义向量的数量积．弄清定义中涉及哪些量？它们有怎样的关系？运算结果是向量还是数量？②如何确定两个非零向量的数量积的符号，什么情况下值为零？

情境 3：类比实数运算中的运算律，探究平面向量数量积的运算律.

（1）结合以上情境写出本节课教学目标；

（2）简述平面向量数量积的几何意义；

（3）为本节内容的学习设计一个导入，并阐述设计意图；

（4）简要分校本节课的教学内容在教材中的地位与作用.

第五章 备考指导

工欲善其事，必先利其器. 教师资格考试有着知识内容多、难度大、流程复杂等特点，教资考试的特点决定其是长期阶段性的考试. 为此，我们需要进行详细的规划，分成若干阶段进行精确、全面的复习，使自己形成一把锋利的“备考利器”. 只有这样，我们才能轻松拿下教资考试.

根据近几年的考试时间和发布公告时间分析来看，一般公告出示与考试时间的间隔大约为 2 个月左右，而 2 个月的时间来应对数学教资考试时间是非常紧迫的，所以在公告之前我们就需要抓紧时间备考，以数学的考试要求来看，备考时间不宜低于 3 个月，对于教师资格考试中数学的备考一定要有大量的大学数学专业知识的储备，并且对于教材教法内容及考试题型很了解，才能轻松在考试中脱颖而出，那么如何在 3 个月中备考呢？下面我们就来看我们的备考建议：

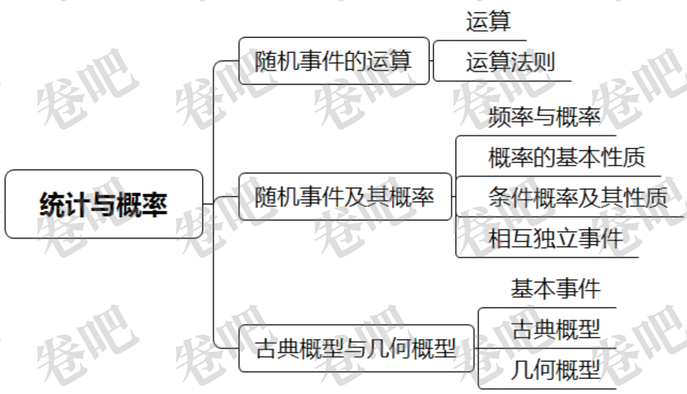
第一阶段：夯实基础

备考时间建议：30 天

以梳理基础考点为主，并构建思维导图，以做练习为辅.

在每天学习新知识之前复习前一天学过的知识，并利用遗忘规律多进行回顾，学完新知识后，马上构建思维导图，不断进行强化，晚上睡觉前花十来分钟运用思维导图的方式回忆一遍当天所学知识；每学完一章的内容，就对知识体系进行一次梳理.

比如，复习完统计与概率就可以构建出下面的思维导图：



这是一份可以帮助自己快速掌握知识框架，快速记忆，快速自检的图表．由于版面问题只能放上一小部分，更多相关内容可以向我们工作人员及老师询问．

在此阶段重在基础，但是切记不要陷入极端，市面上的辅导类书籍很多，但是请大家不要乱买．很多题目都是偏题，超纲题，甚至有争议的题目．在这个阶段的复习中，我们不建议做过多难题，碰到有争议的题目请不要过分纠结，真要是有强迫症，请来问老师，保证几分钟解决！

在此阶段专业的基础知识需要强化和夯实，如果大家有充分的时间，可以参考中公上课的模式．

第二阶段：刷题阶段

备考时间建议：30 天

以做分题型练题为主，看书为辅．

通过做分模块练题，达到查漏补缺的作用，没有掌握好的，赶紧再看书强化，建立错题本．

这个阶段，一定要注意主观题的训练，一定要按照考试的标准来写主观题（光背不写是没有用的），并且去摸索试题的解题技巧．

习题强化阶段是整合知识、提高分析能力和问题解决能力的时候，也是巩固知识的最佳阶段．这个阶段是通过习题来进行知识点的巩固阶段．

这个阶段可以把教材再快速的过一遍．

第三阶段：强化提升

备考时间建议：20 天

以错题总结为主，知识梳理为辅.

通过对错题的分析、对比，找到相应的知识点，进行分析归纳，找到知识短板，并就此知识点做相应的专项训练.

这个阶段，要注意对错题的分析，对知识的梳理，然后分专项进行训练，对遗忘或不清晰知识做深刻记忆和掌握，并结合常考考点进行专题复习，逐块攻克，并在思维导图中标出重要考点，常考知识点，加强练习.

强化提升阶段是查漏补缺的过程，对不理解和理解偏差的知识点进行梳理和强化．这个阶段是通过错题本来进行知识查漏补缺的提升阶段.

第四阶段：冲刺阶段

备考时间建议：10 天

模拟考试，训练解题速度，检测学习成果.

建议考生在备考的最后阶段对自已进行模拟考试，严格把握考试时间及题型题量，训练解题速度，检测学习成果．并在考前对知识进行最终梳理，从容应考.

这一阶段，一定是做全真的模拟卷阶段．通过做全真模拟卷，快速提高应试能力，把握应试技巧.

给前一阶段的习题强化来一个漂亮的收尾.