INTEGRAL TERTENTU DAN PENERAPANNYA

KALKULUS 2

REVIEW - INTEGRAL TAK TENTU

- Pengertian Integral Tak Tentu

  Integral Tak Tentu (*undefinite integral*) adalah bentuk integral yang variabel integrasinya tidak memiliki batas sehingga integrasi dari sebuah fungsi akan menghasilkan banyak kemungkinan dan hanya dinyatakan sebagai penyelesaian umum. Istilah tak tentu berarti bentuk fungsi *F(x)* memuat konstanta real sembarang.

- Rumus Integral Tak Tentu

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c, di\ mana\ n \neq -1$$

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

INTEGRAL TERTENTU

- Pengertian Integral Tentu (Tertentu)

  Integral tentu (*definite integral*) adalah bentuk integral yang variabel integrasinya memiliki batasan (batas atas dan batas bawah) yang ditulis di bagian atas dan bawah notasi integral.

- Notasi Integral Tentu

  $$\int_a^b f(x)dx$$

  Di mana *a* = batas bawah, dan *b* = batas atas

  Penyelesaian dari integrasi tersebut adalah:

  $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

CONTOH

- Diberikan fungsi *f(x) = x*^{2}. Tentukanlah integral dari *f(x)* untuk batas atas *3* dan batas bawah *2*.
- Penyelesaian:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_2^3 x^2\,dx = \frac{1}{2+1}x^{2+1}\Big|_2^3$$

$$= \frac{1}{3}x^3\Big|_2^3 = \frac{1}{3}3^3 - \frac{1}{3}2^3 = 9 - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}$$

SIFAT-SIFAT INTEGRAL TENTU

1. $\int_a^b f(x)dx = F(x)\mid_a^b = F(a) - F(b)$, jika *a*> *b.*
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
3. $\int_a^a f(x)dx = 0$
4. $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$
5. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$, *jika c bilangan riil*
6. $\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
7. $\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

LATIHAN SOAL

1. **Tentukanlah integral tertentu berikut!**

a. $\int_{-1}^{-2} \left(4t-6t^2\right)dt$

b. $\int_{1}^{8} (x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{4}{3}})\,dx$

c. $\int_{0}^{4} (2x+1)\sqrt{x+x^2}\,dx$

d. $\int_{-1}^{3} \frac{1}{(t+2)^2}\,dt$

e. $\int_{-1}^{0} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$

f. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\sin^3 2x\cos 2x)\,dx$

g. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{1-\cos x}\,dx$

h. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x\,dx$

LATIHAN SOAL

2. Jika $\int_0^1 f(x)\,dx = 4$ dan $\int_0^1 g(x)\,dx = -2$, hitunglah integral-integral berikut!

a. $\int_0^1 3f(x)\,dx$

b. $\int_0^1 (f(x) - g(x))\,dx$

c. $\int_0^1 (3f(x) + 2g(x) + 2)\,dx$

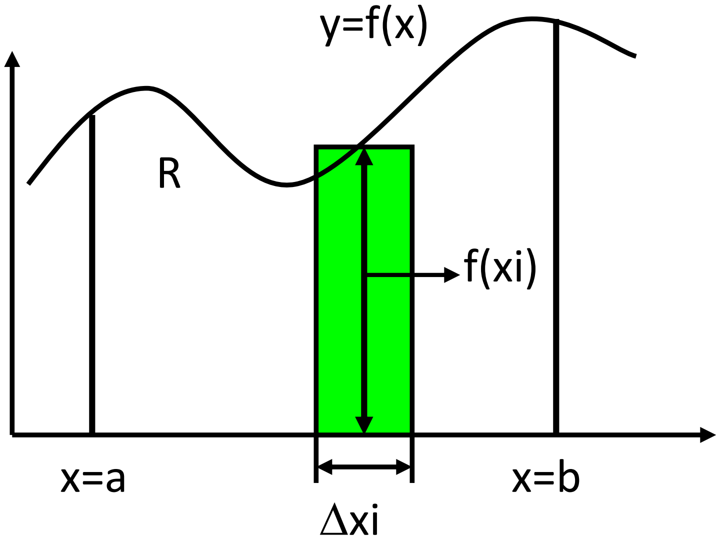
d. $\int_0^1 (2g(x) - 3f(x))\,dx$

e. $\int_1^0 (2f(x) - 3x^2)\,dx$

PENERAPAN INTEGRAL TENTU

Luas Bidang Datar

Misalkan daerah R dibatasi oleh kurva y=f(x), sumbu x pada [a,b] seperti pada gambar



Luas empat persegi panjang

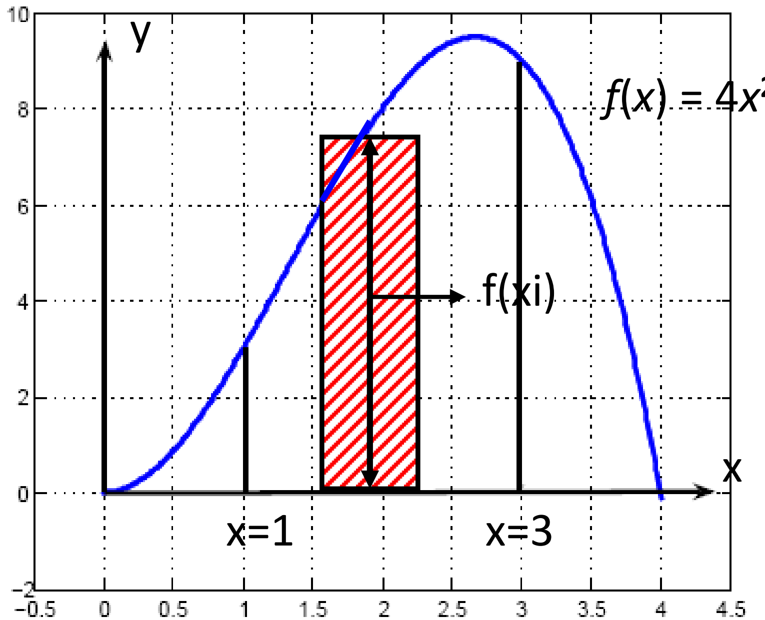
$\Delta A_i = f(x_i)\,\Delta x_i,\ a \le x_i \le b$

$$\boxed{A(R) = \int_a^b f(x)\,dx}$$

Contoh 1

Hitunglah luas daerah *R*, yang terletak dibawah kurva $f(x) = 4x^2 - x^3$, sumbu x, garis $x = 1$ dan garis $x = 3$.

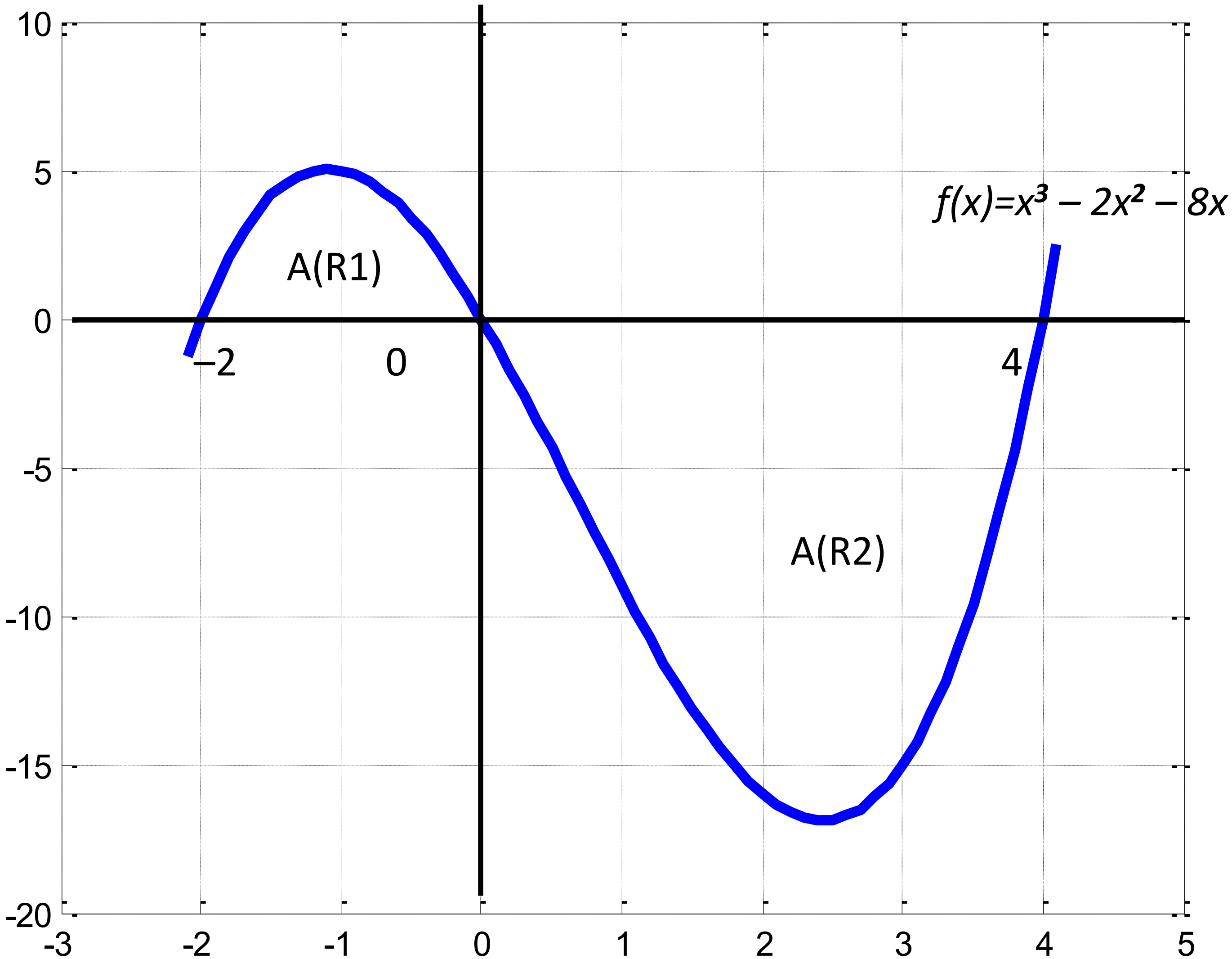
Jawab



$\Delta A_i = (4x_i^2 - x_i^3)\Delta x_i,\ 1 \le x_i \le 3$

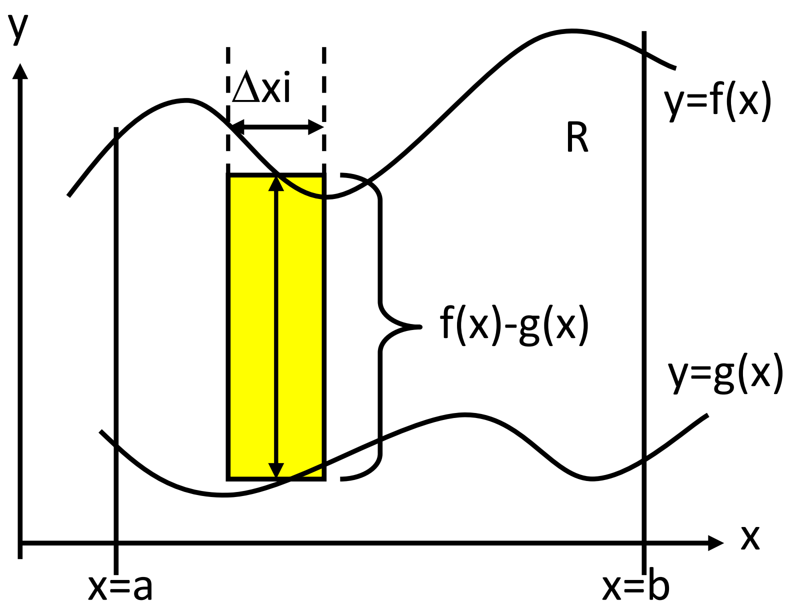
$$A(R) = \int_1^3 (4x^2 - x^3)\,dx = \frac{44}{3}$$

Hitung Luas daerah yang dibatasi oleh sumbu x dan fungsi $f(x)=x^3 - 2x^2 - 8x$



LUAS ANTARA DUA KURVA

Misalkan daerah R dibatasi oleh dua kurva y=f(x), y=g(x) pada [a,b] seperti pada gambar



Luas empat persegi panjang :

$\Delta Ai = [f(xi) - g(xi)]\ \Delta xi,\ a \leq xi \leq b$

$$\boxed{A(R) = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx}$$

Prosedur Menghitung Luas Daerah

Langkah-langkah untuk menghitung luas daerah dengan integral tertentu

(1) Buatlah gambar daerah *R* yang bersangkutan, beserta batas-batasnya.

(2) Pada daerah *R* buatlah suatu jalur tertentu.

(3) Hampiri luas suatu jalur tertentu langkah 2 dengan luas empat persegi panjang.

(4) Jumlahkan luas aproksimasi dari langkah 3.

(5) Ambil limitnya sehingga diperoleh suatu integral tertentu.

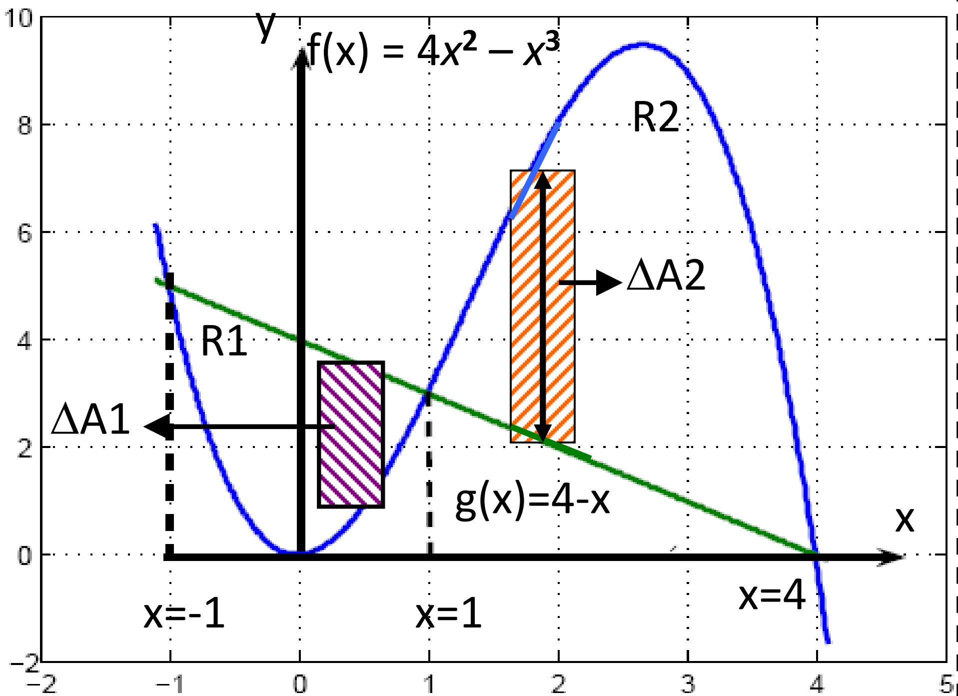
Contoh 2

Hitunglah luas daerah *R*, terletak

$y = 4x^2 - x^3$, dan $x+y = 4$.

Jawab :

Sketsa grafik R lihat gambar berikut



Titik potong kedua kurva diperoleh :

$$4 - x = 4x^2 - x^3$$

$X^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$, $x1=-1, x2=1, x3=4$

Menghitung A(R)

$$\Delta A_1 = [g(xi) - f(xi)]\Delta x_i$$

$$= [(4 - x_i) - (4x_i^2 - x_i^3)]\Delta xi, \ -1 \le xi \le 1$$

$$A(R_1) = \int_{-1}^{1} [(4 - x) - (4x^2 - x^3)]dx$$

$$= \left[4x - \frac{x^2}{2} - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{16}{3}$$

$$\Delta A_2 = [f(xi) - g(xi)]\Delta x_i$$

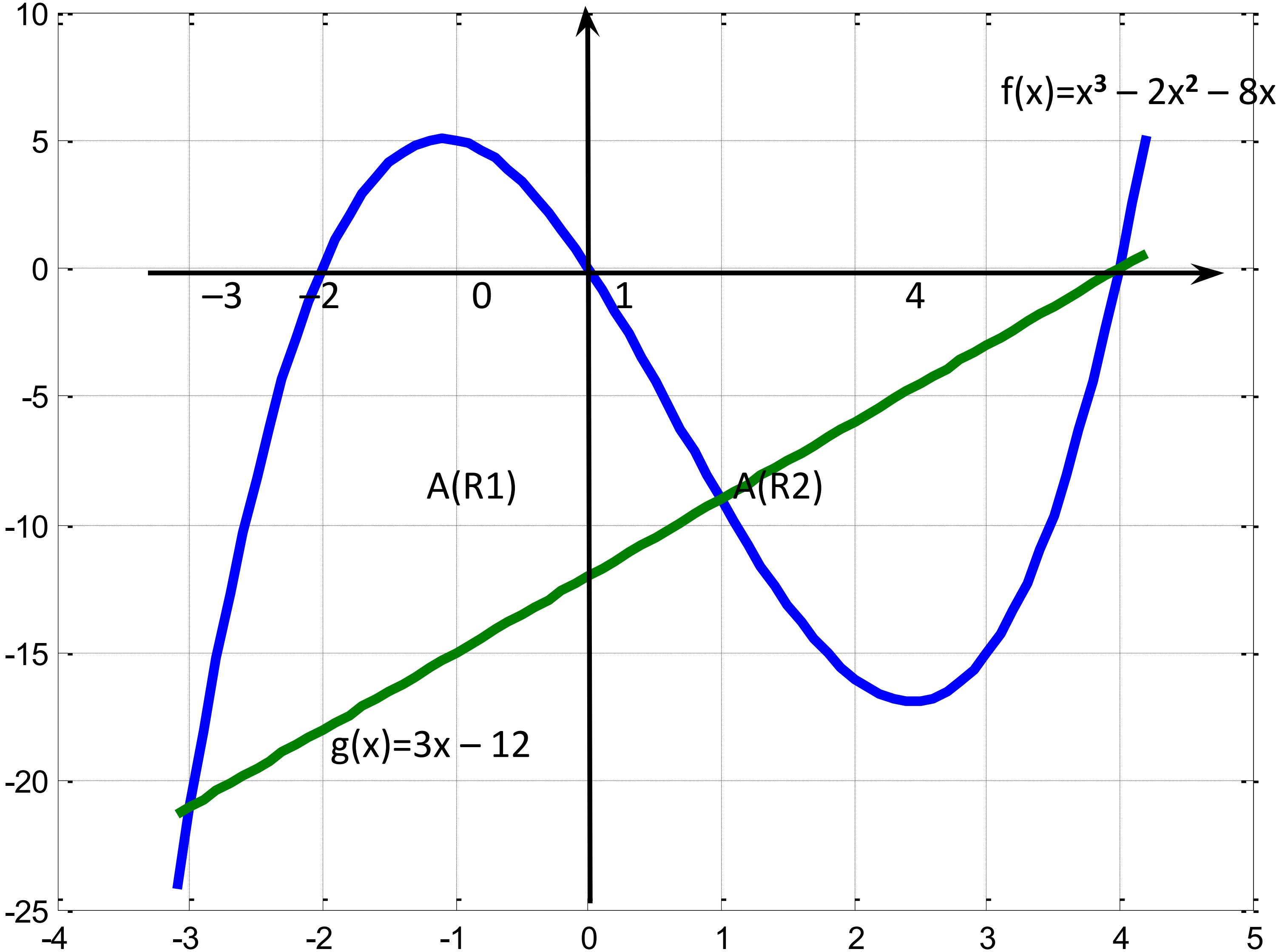
$$= [(4x_i^2 - x_i^3) - (4 - x_i)]\Delta xi, \ 1 \le xi \le 4$$

$$A(R_2) = \int_{1}^{4} [(4x^2 - x^3) - (4 - x)]dx$$

$$= \left[-4x + \frac{x^2}{2} + \frac{4x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{1}^{4} = \frac{63}{4}$$

$$A(R) = \frac{16}{3} + \frac{63}{4} = \frac{253}{12}$$

Contoh :



FUNGSI DENSITAS

Fungsi f(x) dikatakan sebagai fungsi densitas (probabilitas), jika hanya jika f(x) memenuhi sifat-sifat berikut ini :

$$(1)\ f(x) \geq 0$$

$$(2) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$(3)\ P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Mean dan variannya diberikan oleh :

$$\mu = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$$

$$\sigma^2 = E(x-\mu)^2 = E(x^2) - [E(x)]^2$$

SOAL-SOAL LATIHAN

Soal 1.
Suatu fungsi densitas (kepadatan) didefinisikan oleh

- $f(x) = k\,x\,(2 - x)^4$, $0 \leq x \leq 2$
- $f(x) = kx^a\,(8 - x^3)$ $0 \leq x \leq 2$
- $f(x) = kx^b\,(4 - x^2)$, $0 \leq x \leq 2$

(a) Hitunglah nilai k
(b) Berapa, $P(x>1)$
(c) Hitunglah $E(x)$ dan varian

Soal 2.
Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh kurva, berikut dengan sumbu x
(a) $f(x)=(x+a)(x - 1)(x - a - 1)$
(b) $f(x) = (x^2 - 1)(x - a - 1)$

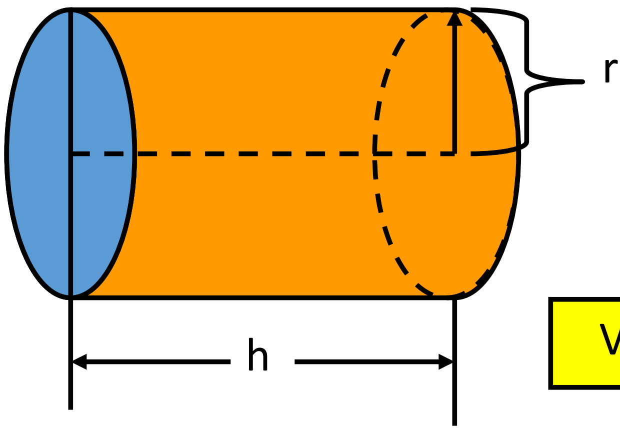
Soal 3.
Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh kurva berikut ini:
(a). $y = a - (x - 4)^2$, dan $x + y = (a + 2)$,
(b). $y = x^2$, $x + y = 2$, dan $x=y^3$.
(c). $y = x^2$, $y = 8 - x^2$, dan $4x-y+12 = 0$.

Soal 4.
Hitunglah luas segitiga di mana titik-titik sudutnya adalah:
(a). (1,2), (7,4), dan (-1,8)
(b). (2,1), (6,5), dan (0,8)

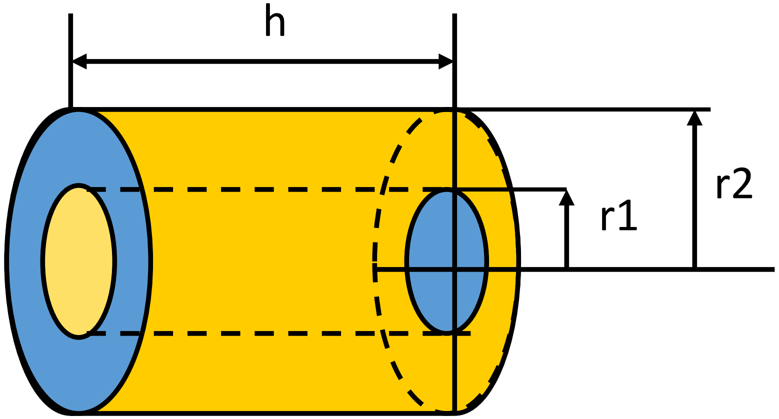
Soal 5.
Hitunglah luas segiempat dimana koordinat titiktitik sudutnya adalah:
(a). (1,1), (4,2), (–2, 6) dan (2,7)
(b). (2,1), (5,3), (–2,7) dan (1,9)

VOLUME BENDA PEJAL, METODE SILINDER

Perhatikanlah sketsa silinder berikut ini

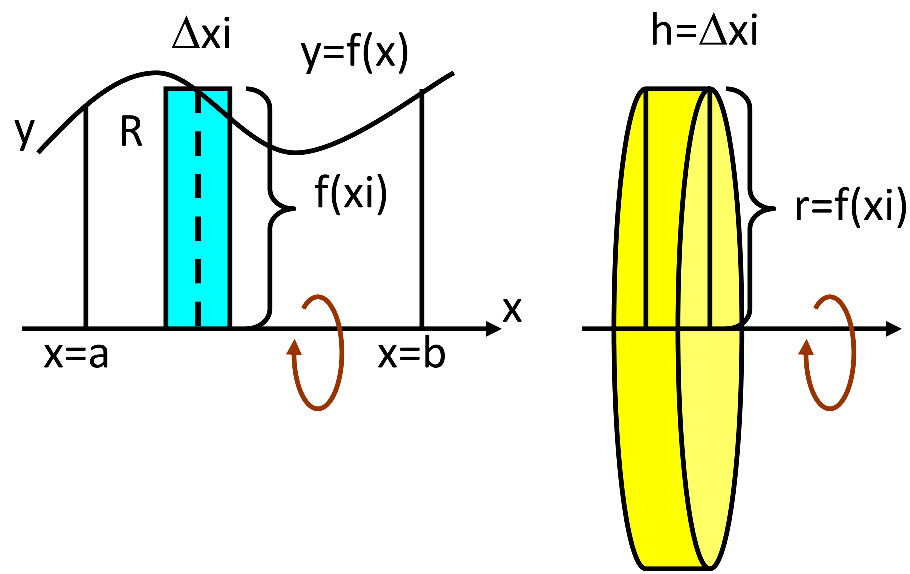


$V = \pi r^2 h$



$$V = \pi \left[r_2^2 - r_1^2 \right] h$$

Andaikan daerah R dibatasi oleh $f(x)$, sumbu x, garis $x = a$ dan garis $x = b$.



Jika R diputar terhadap sumbu x dihasilkan benda pejal. Elemen volume

$$\Delta V = \pi r^2 h$$
$$= \pi [f(x_i)]^2 \Delta x_i,\ a \le x_i \le b$$

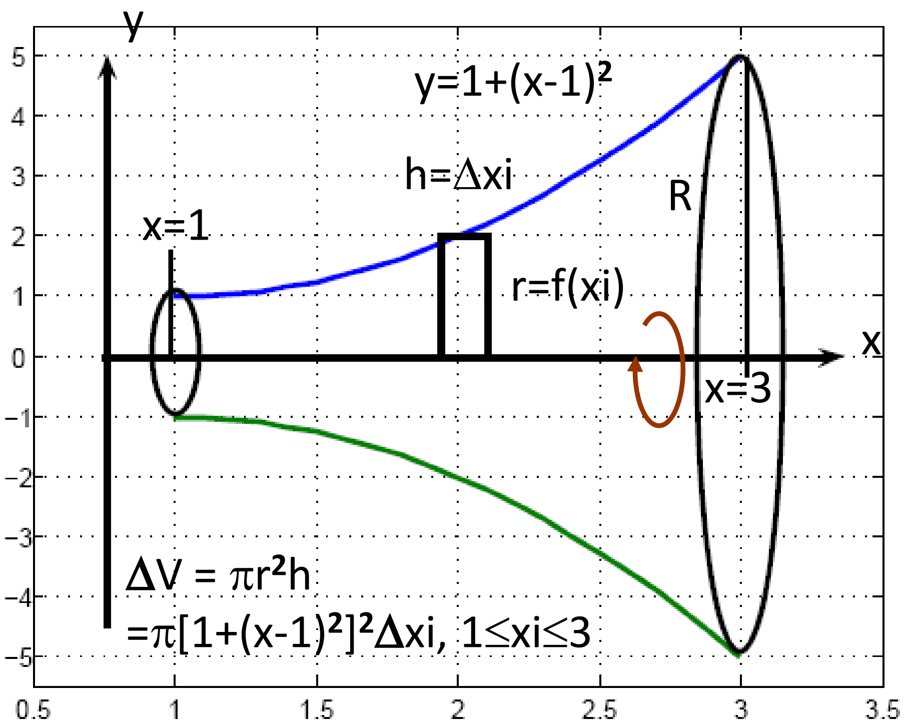
Jadi :

$$\boxed{V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx}$$

Contoh 3:

Hitung volume benda pejal daerah R yang dibatasi oleh $y=1+(x-1)^2$, sumbu x, dari x=1 sd x=3, jika diputar tehadap sb x

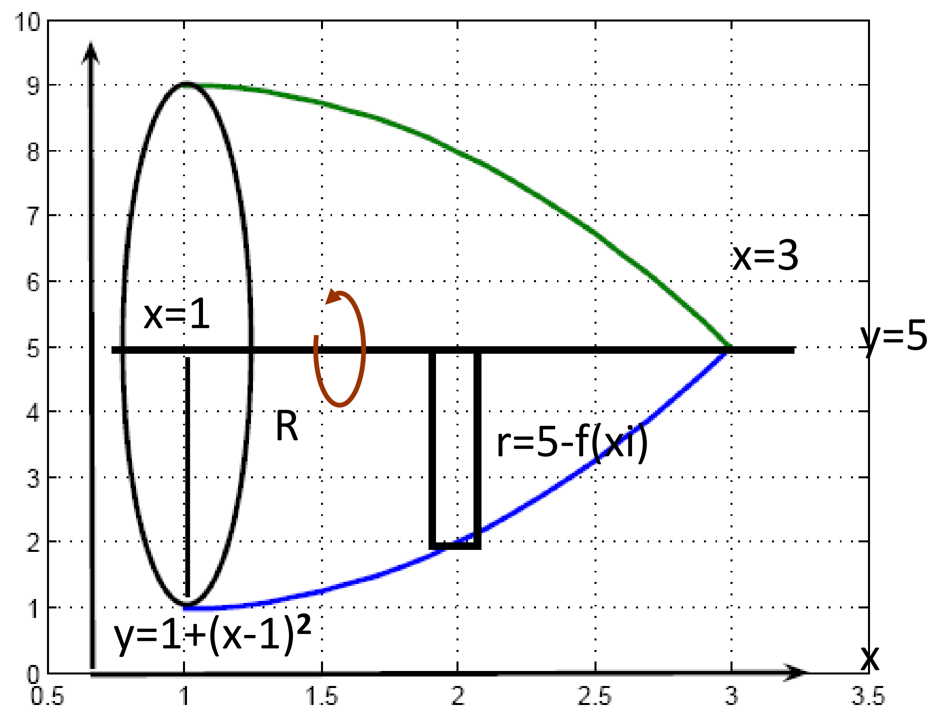
Jawab



$$V=\pi\int_1^3[1+(x-1)^2]^2\,dx=\frac{206}{15}\pi$$

Hitung volume benda pejal daerah R yang dibatasi oleh $y=1+(x-1)^2$, garis y=5, dari x=1 sd x=3, jika diputar terhadap garis y=5

Jawab

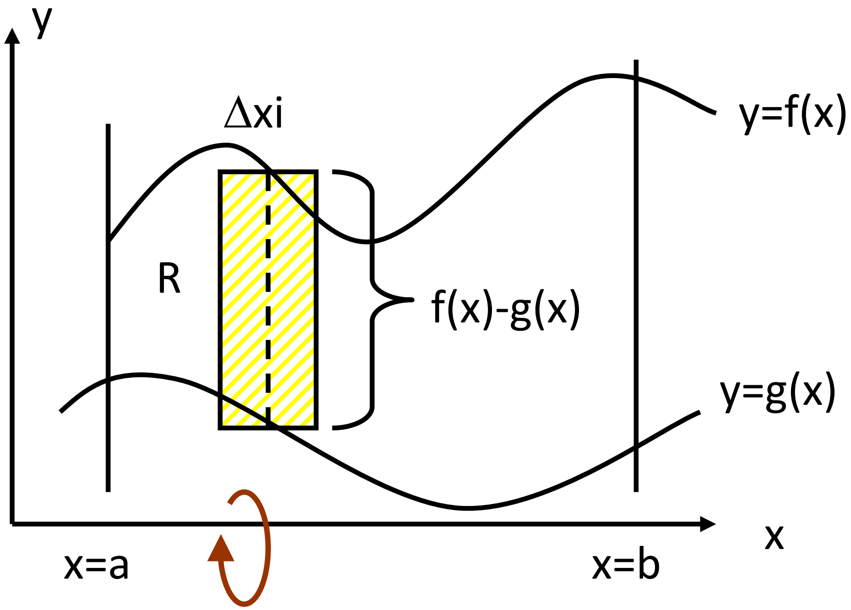


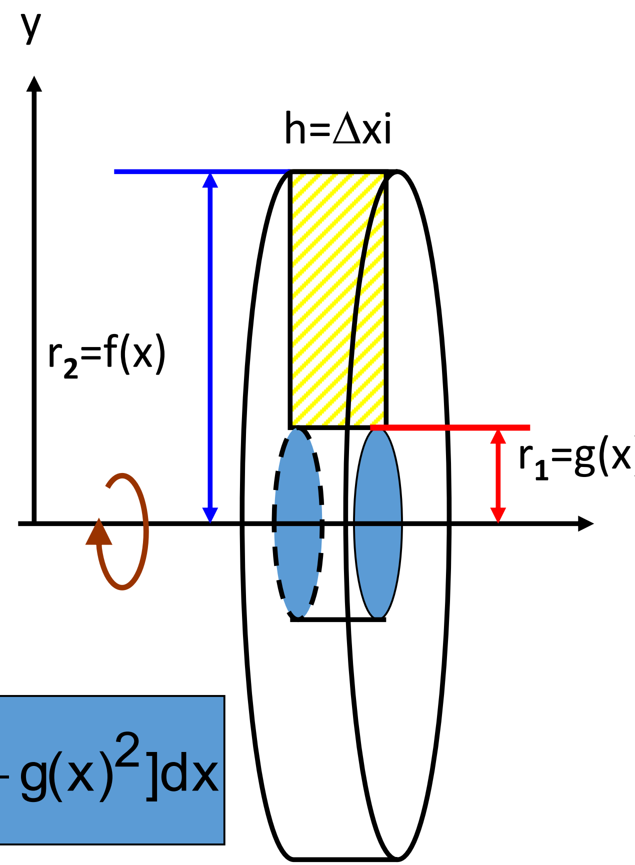
$\Delta V = \pi r^2 h = \pi[4-(x-1)^2]^2\Delta x_i,\ 1\le x_i\le 3$

$$V=\pi\int_1^3[4-(x-1)^2]^2\,dx=\frac{256}{15}\pi$$

METODE CINCIN, SILINDER

Misalkan daerah *R* dibatasi oleh kurva-kurva $y = f(x)$ dan $y = g(x)$, garis $x = a$ dan garis $x = b$, dengan $f(x) \geq g(x)$. Andaikan daerah *R* diputar dengan sumbu putar sumbu x, maka akan dihasilkan suatu benda pejal, dimana bagian tengahnya lubang. Metode demikian disebut metode cincin





Dengan metode silinder :

$\Delta V = \pi[r_2^2 - r_1^2]h$

$= \pi[f(x_i)^2 - g(x_i)^2]\Delta xi, a \leq xi \leq b$

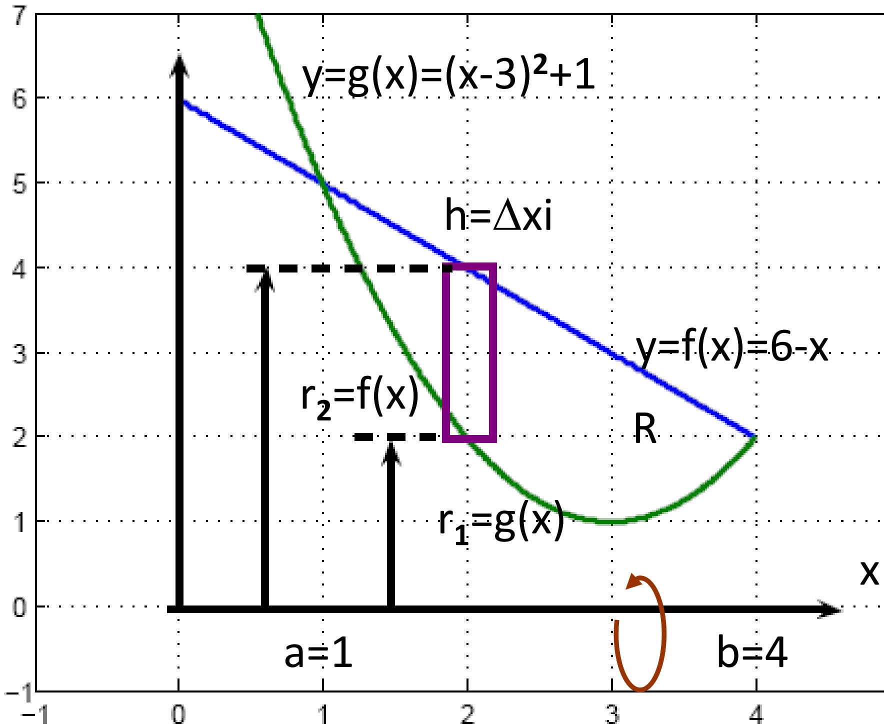
$$V = \pi \int_a^b [f(x)^2 - g(x)^2]dx$$

Contoh 4

Daerah R dibatasi oleh, $y=6-x$ dan $y=(x-3)^2+1$. Hitung volume bendanya, jika R diputar terhadap sumbu x, garis $y=6$, $y=1$

Jawab :

Kasus 1. Sumbu putar sumbu x



Karena, $\Delta A \perp SP$. dengan metode silinder :

$$\Delta V=\pi[r_2^2 - r_1^2]h$$

$$= \pi[f(x)^2 - g(x)^2]\Delta x, 1 \le x \le 4$$

$$= \pi[(6-x)^2 - (1+(x-3)^2)^2]\Delta x, 1 \le x \le 4$$

Jadi,

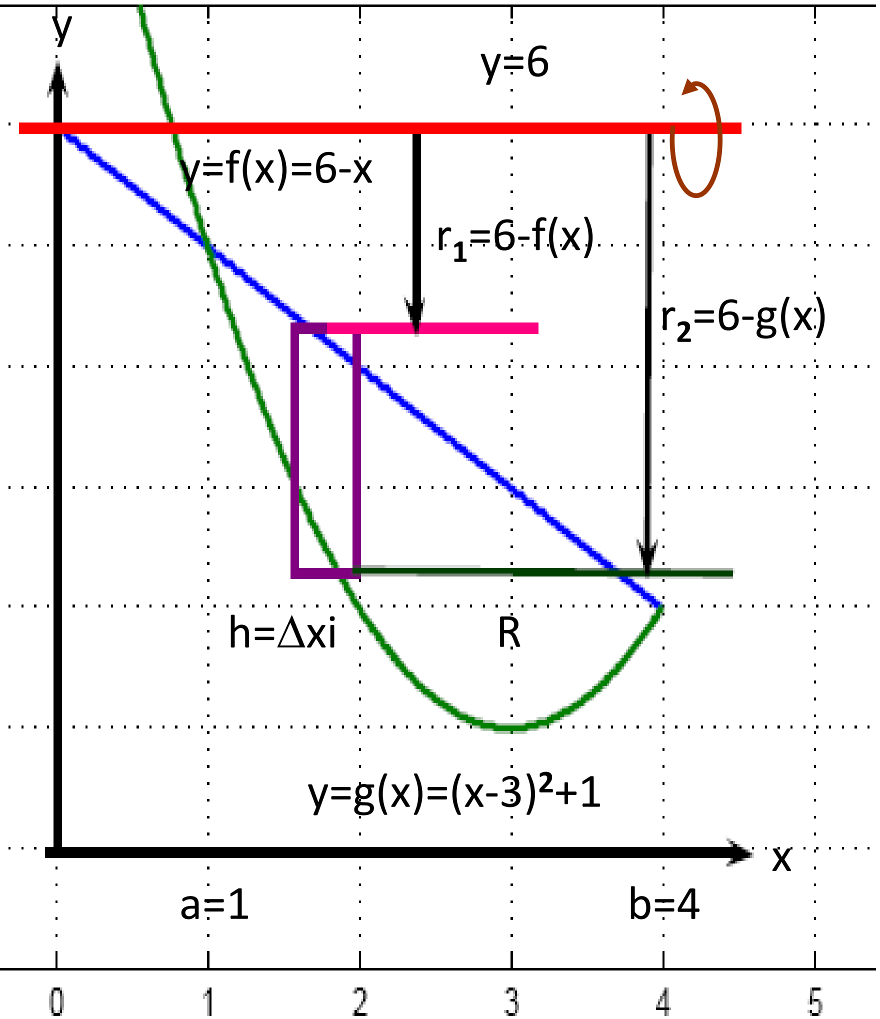
$$V = \pi \int_1^4 \{(6-x)^2 - [1+(x-3)^2]^2\}\, dx$$

$$= \pi \int_1^4 \{(6-x)^2 - 1 - 2(x-3)^2 - (x-3)^4\} dx$$

$$= \pi \left[-\frac{(6-x)^3}{3} - x - \frac{2(x-3)^3}{3} - \frac{(x-3)^5}{5} \right]_1^4$$

$$V = \frac{117}{5}\pi$$

Kasus 2 : Sumbu putar garis y = 6



Karena, $\Delta A \perp SP$, Dengan metode silinder :

$\Delta V = \pi[r_2^2 - r_1^2]h$

$= \pi\{[6-g(x)]^2 - [6-f(x)]^2\}\Delta x, 1 \le xi \le 4$

$= \pi\{[6-(1+(x-3)^2)]^2 - [6-(6-x)]^2\}\Delta x,$

$= \pi\{[5-(x-3)^2]^2 - x^2\}\Delta x,\ 1 \le x \le 4$

Jadi,

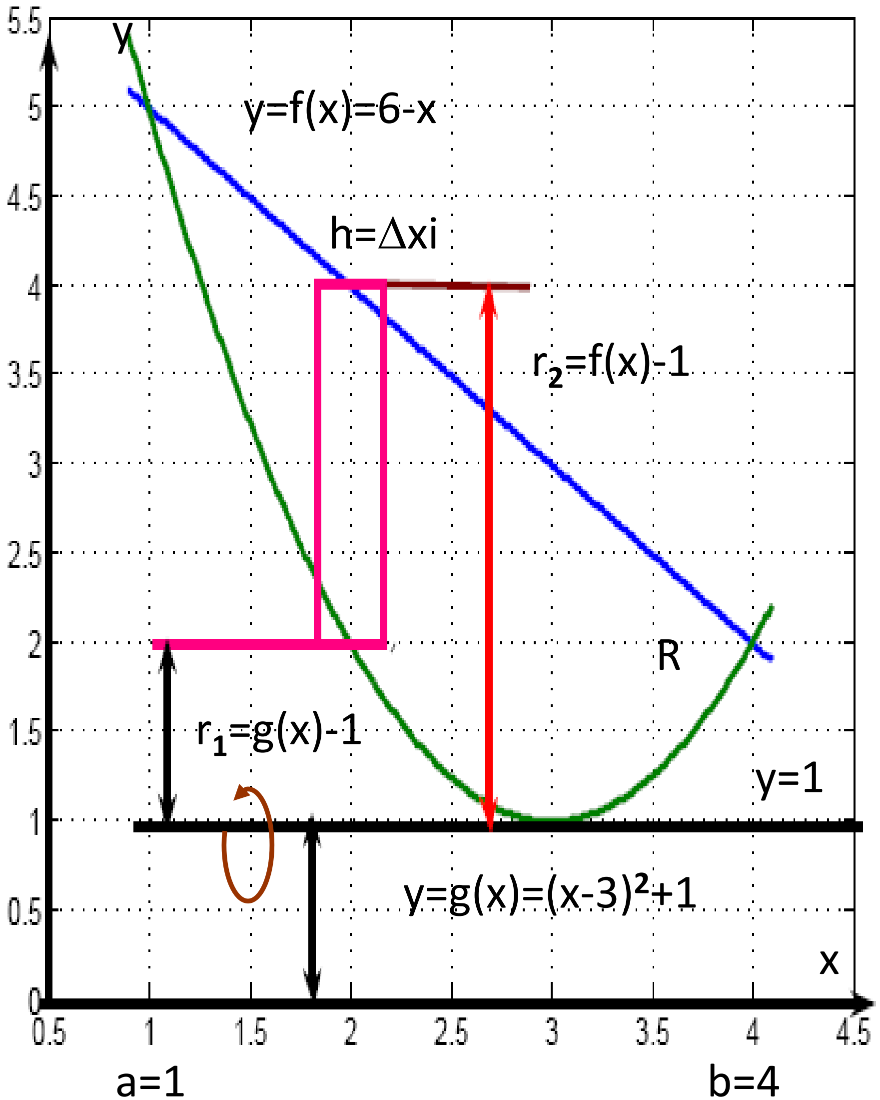
$$V = \pi\int_1^4 \{[5-(x-3)^2]^2 - x^2\}dx$$

$$= \pi\int_1^4 \{25 - 10(x-3)^2 + (x-3)^4 - x^2\}dx$$

$$= \pi\left[25x - \frac{10(x-3)^3}{3} + \frac{(x-3)^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right]_1^4$$

$$= \frac{153}{5}\pi$$

Kasus 3 : Sumbu putar garis y = 1



Karena, $\Delta A \perp SP$, maka dengan metode silinder :

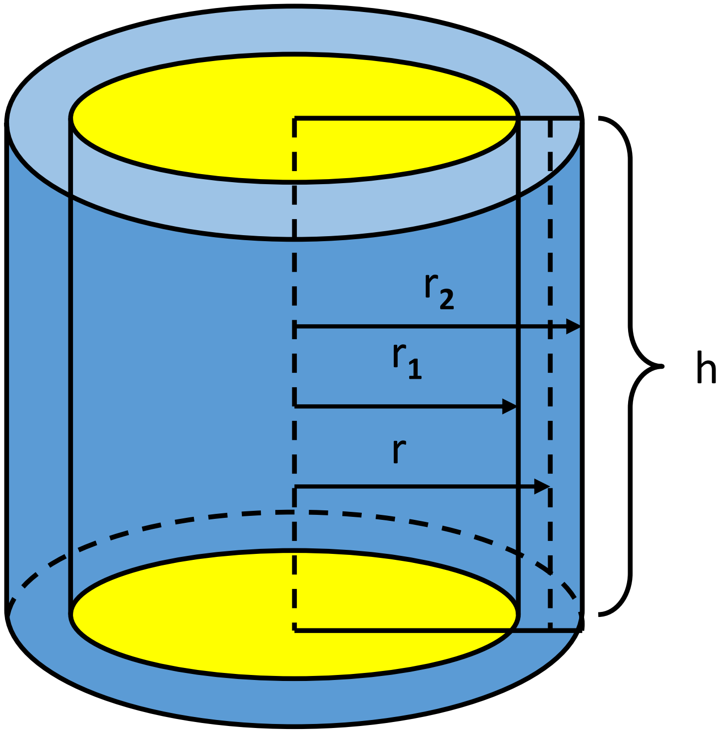
$$\Delta V=\pi[r_2^2 - r_1^2]h$$
$$= \pi\{[f(x)-1]^2 - [g(x)-1]^2\}\Delta x, 1 \le x \le 4$$
$$= \pi\{[(6-x)-1]^2 - [(1+(x-3)^2)-1]^2\}\Delta x,$$
$$= \pi\{[5-x]^2 - (x-3)^4\}\Delta x,\ 1 \le x \le 4$$

Jadi,

$$V = \pi\int_1^4 \{(5-x)^2 - (x-3)^4\}dx$$
$$= \pi\left[-\frac{(5-x)^3}{3} - \frac{(x-3)^5}{5}\right]_1^4$$
$$= \frac{72}{5}\pi$$

METODE SEL SILINDER

Perhatikanlah sel silinder berikut ini



r1 : jari-jari dalam
r2 : jari-jari luar
r : jari-jari rata-rata
h : tinggi silinder

Volume sel silinder adalah :

$$\Delta V = \pi r_2^2 h - r_1^2 \pi h$$

$$= \pi [r_2^2 - r_1^2] h$$

$$= \pi (r_2 + r_1)(r_2 - r_1) h$$

$$= 2\pi \left(\frac{r_2 + r_1}{2}\right)(r_2 - r_1) h$$

Jika diambil $r = \dfrac{r_2 + r_1}{2}$

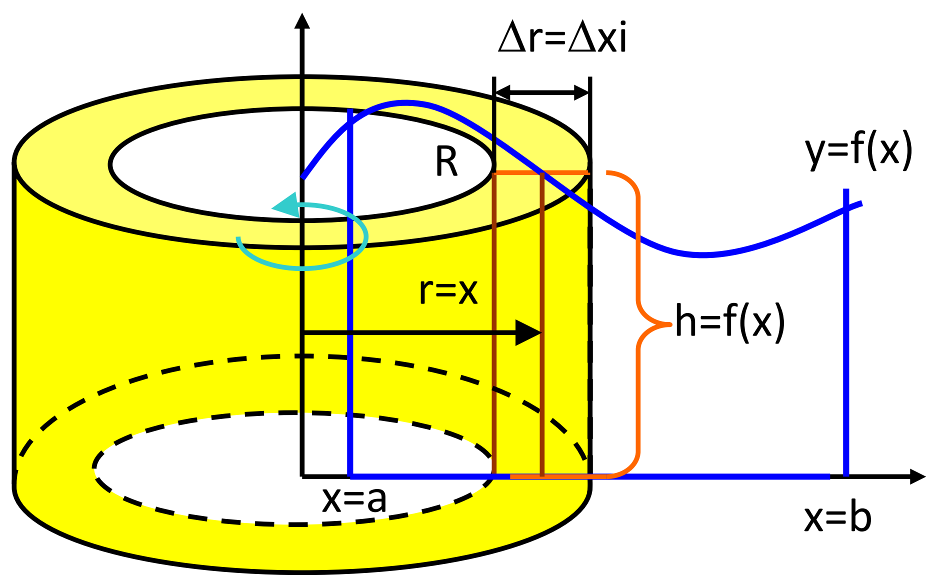
$\Delta r = r_2 - r_1$

Dihasilkan rumus

$\Delta V = 2\,\pi\, r\, h\, \Delta r$

VOLUME BENDA PEJAL, METODE SEL SILINDER

Andaikan daerah R dibatasi oleh $f(x)$, sumbu x, garis $x = a$ dan garis $x = b$.



Jika R diputar terhadap sumbu y dihasilkan benda pejal. Elemen volume

$$\Delta V = 2\pi r h \Delta r$$
$$= 2\pi x\, f(x)\Delta x,\ a \le x \le b$$

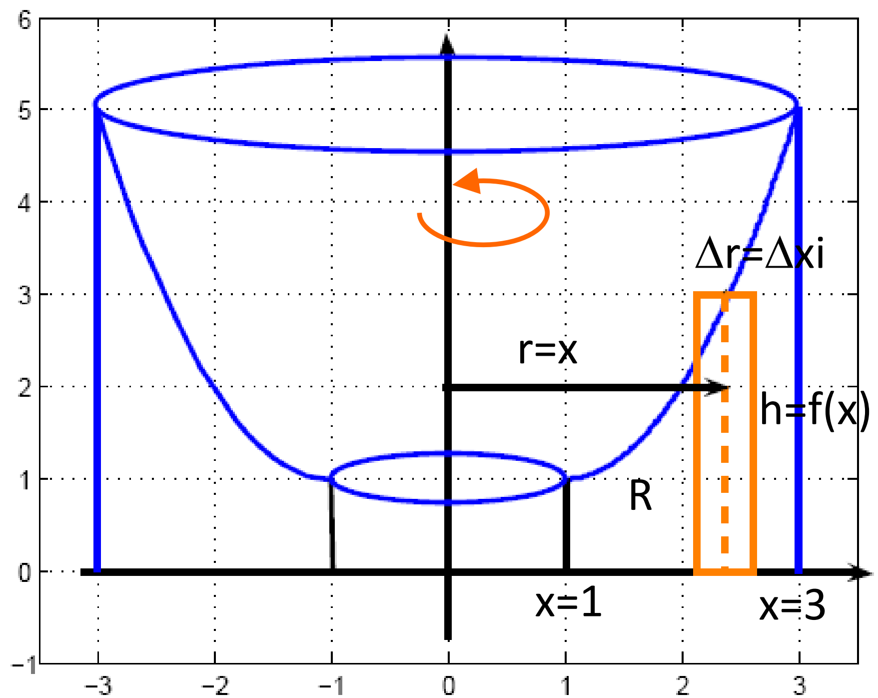
Jadi :

$$\boxed{V = 2\pi\int_a^b x f(x)\,dx}$$

Contoh 5 :

Hitung volume benda pejal jika R dibatasi oleh $y=1+(x-1)^2$, sumbu x, dari x=1 sd x=3, diputar terhadap y

Jawab

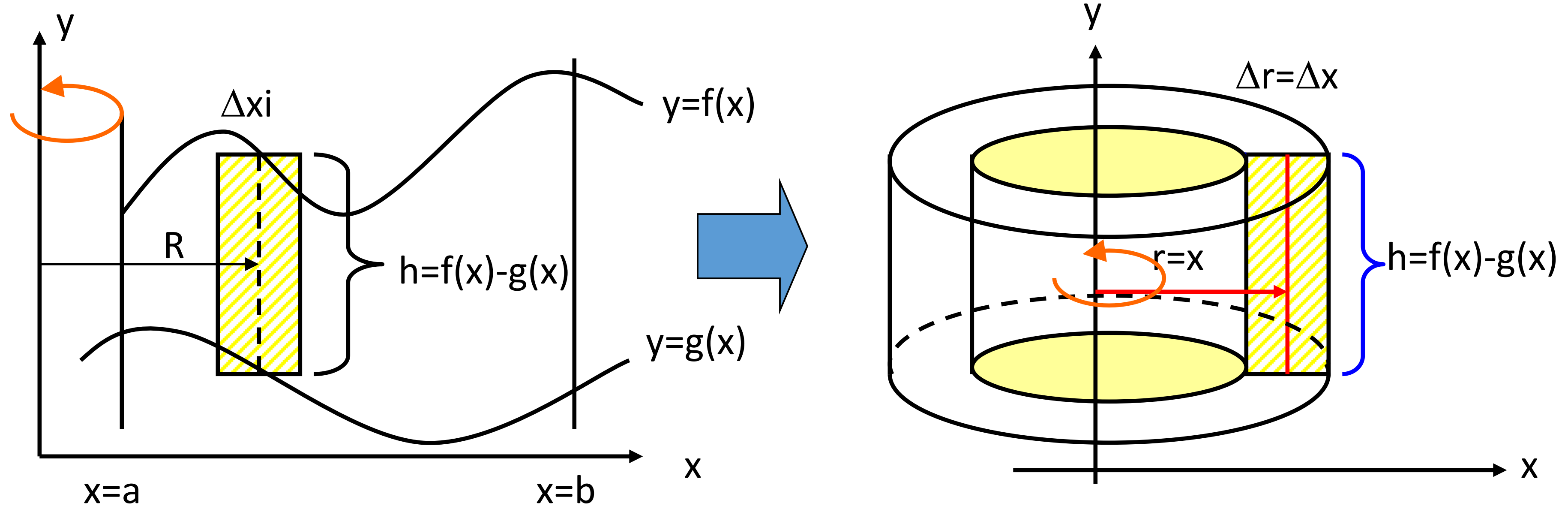


$$\Delta V = 2\pi r h \Delta r = 2\pi\, x\, f(x)\, \Delta x$$
$$=2\pi\, x[1+(x-1)^2]\Delta x,\ 1 \le x \le 3$$

Jadi, $V = 2\pi\int_1^3 x(1+(x-1)^2)dx = \frac{64}{3}\pi$

METODE SEL SILINDER LANJUTAN

Misalkan daerah *R* dibatasi oleh kurva-kurva *y* = *f*(*x*) dan *y* = *g*(*x*), garis *x* = *a* dan garis *x* = *b*, dengan *f*(*x*) ≥ *g*(*x*). Andaikan daerah *R* diputar dengan sumbu putar sumbu y, maka akan dihasilkan suatu benda pejal, berbentuk sel silinder. Metode demikian disebut metode sel silinder



Dengan metode sel silinder :

$\Delta V = 2\pi\ r\ h\ \Delta r$

$\quad = 2\pi\ x[f(x)-g(x)]\Delta x,\ a \le x \le b$

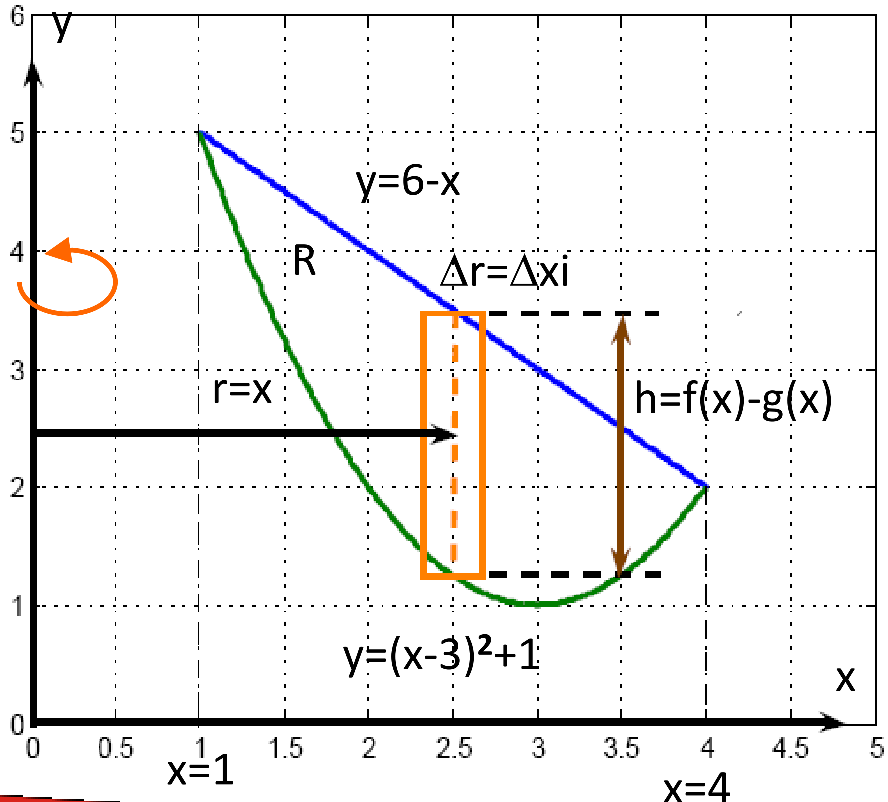
$$\boxed{V = 2\pi \int_a^b x[f(x)-g(x)]dx}$$

Contoh 4

Daerah R dibatasi oleh, $y=6-x$ dan $y=(x-3)^2+1$. Hitung volume bendanya, jika R diputar terhadap sumbu y, garis $x=1$, dan $x=4$

Jawab :

Kasus 1. Sumbu putar sumbu y



Karena ΔA // SP, maka dengan metode sel silinder :

$\Delta V = 2\pi\, r\, h\, \Delta r$

$= 2\pi\, x\, [f(x)-g(x)]\Delta x, 1 \le x \le 4$

$= 2\pi\, x\, [(6-x)-(1+(x-3)^2)]\Delta x, 1 \le x \le 4$

Jadi,

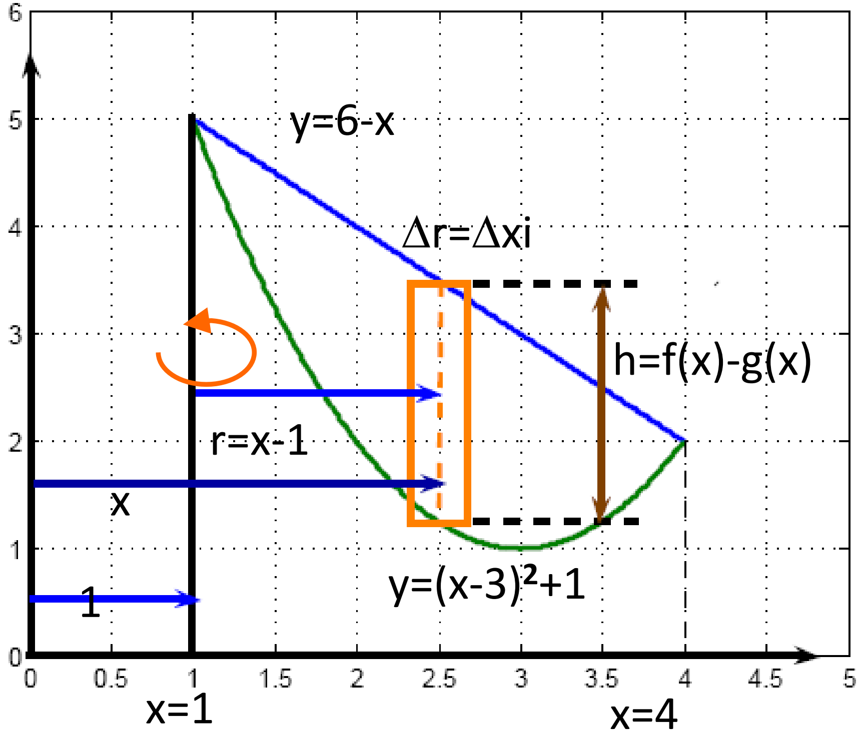
$$V = 2\pi \int_1^4 x\{(5-x)-(x-3)^2\}\, dx$$

$$= 2\pi \int_1^4 \{5x - x^2 - 3(x-3)^2 - (x-3)^3\} dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{3(x-3)^3}{3} - \frac{(x-3)^4}{4} \right]_1^4$$

$$V = \frac{45}{2}\pi$$

Kasus 2 : Sumbu putar garis x=1



Dengan metode sel silinder

$\Delta V = 2\pi\ r\ h\Delta r$

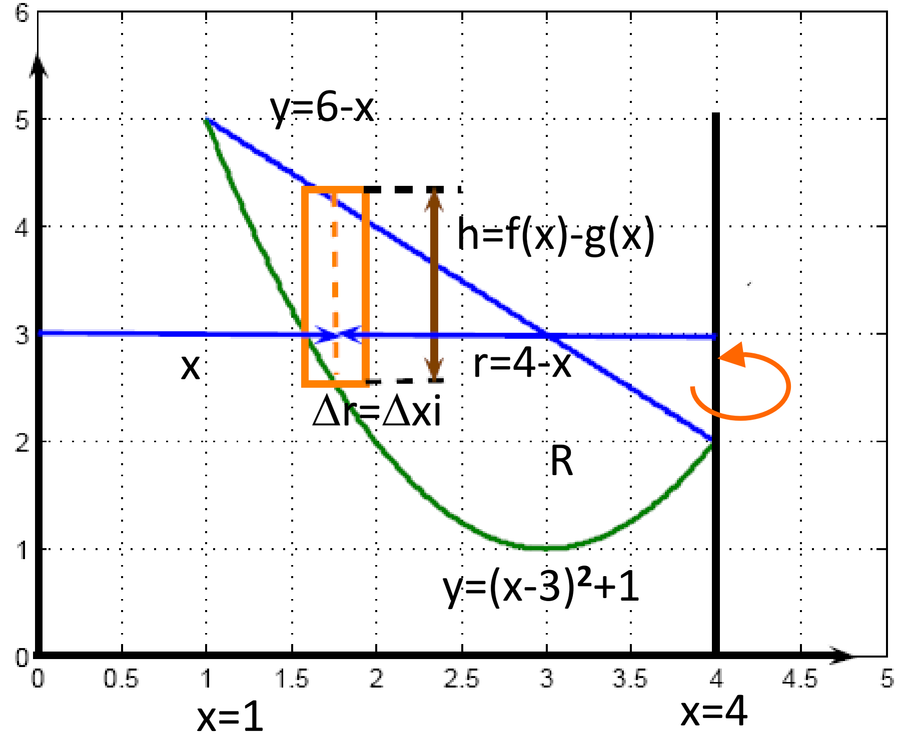
$= 2\pi\ (x-1)[(6-x) - (1+(x-3)^2]\Delta x,$

Jadi,

$$V = 2\pi \int_1^4 (x-1)\{5 - x - (x-3)^2\}\, dx$$

$$= (27/2)\pi$$

Kasus 3 : Sumbu putar garis x=4



Dengan metode sel silinder

$\Delta V = 2\pi\ r\ h\Delta r$

$= 2\pi\ (4 - x)[(6-x) - (1+(x-3)^2]\ \Delta x$

Jadi,

$$V = 2\pi \int_1^4 (4-x)\{5 - x - (x-3)^2\}\, dx$$

$$= (27/2)\pi$$

PROSEDUR MENGHITUNG VOLUME BENDA PEJAL

Langkah-langkah untuk menghitung volume benda pejal dengan integral tertentu adalah sebagai berikut :

(1) Buatlah gambar daerah *R* yang bersangkutan, tentukan fungsi f(x) dan g(x) beserta batas-batasnya (batas integral).

(2) Pada daerah *R* buatlah suatu jalur tertentu (luas empat persegi panjang), dan buatlah sumbu putarnya yang tidak memotong daerah R.

(3) Hampiri volume benda pejalnya dengan pendekatan :

(a) Volume silinder, $\Delta V = \pi r^2 h$ jika ΔA tegak lurus dengan sumbu putar

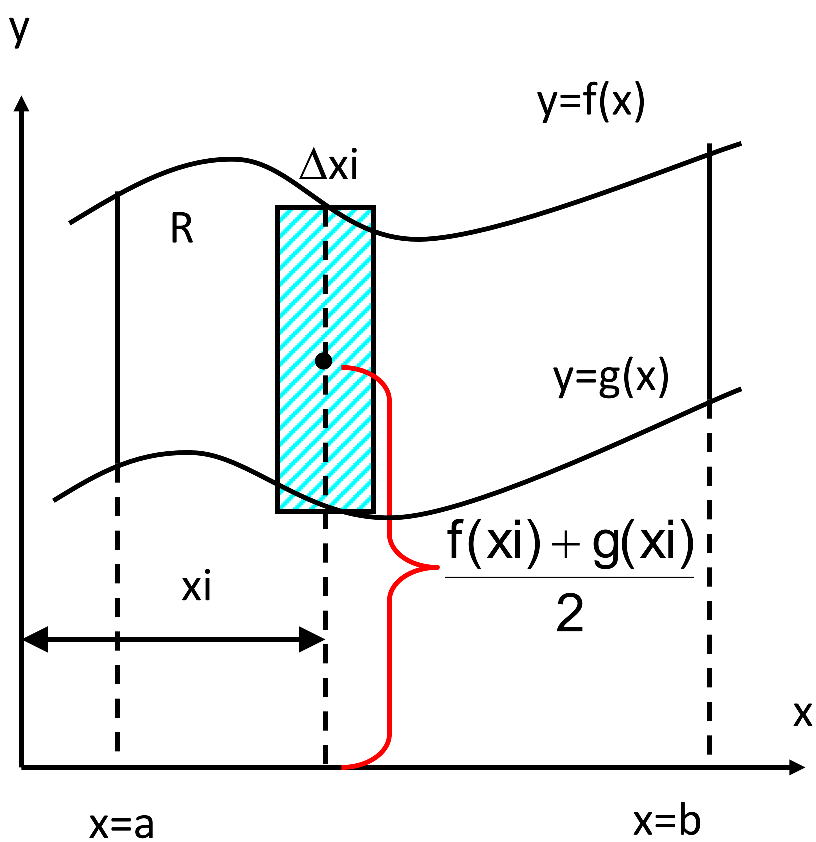
(b) Volume sel slilinder, $\Delta V = 2\pi rh\ \Delta r$, jika ΔA sejajar dengan sumbu putar.

(4) Jumlahkan volume silinder aproksimasi dari langkah 3.

(5) Ambil limitnya sehingga diperoleh suatu integral tertentu, atau hitunglah volume benda pejalnya dengan integral tentu.

MOMEN DAN PUSAT MASSA

Misalkan sepotong lamina homogen dibatasi oleh kurva $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ dengan $f(x) \leq g(x)$ garis $x = a$, dan garis $x = b$. Andaikan bahwa kerapatan lamina adalah δ,



Andaikanlah, $(\bar{x}, \bar{y})$ pusat masaa lamina

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}, \text{ dan } \bar{y} = \frac{M_x}{m}$$

dimana,

$$m = \int_a^b \delta[f(x) - g(x)]dx$$

$$M_y = \int_a^b \delta x[f(x) - g(x)]dx$$

$$M_x = \int_a^b \frac{\delta}{2}[f(x)^2 - g(x)^2]dx$$

My : moment terhadap sumbu y

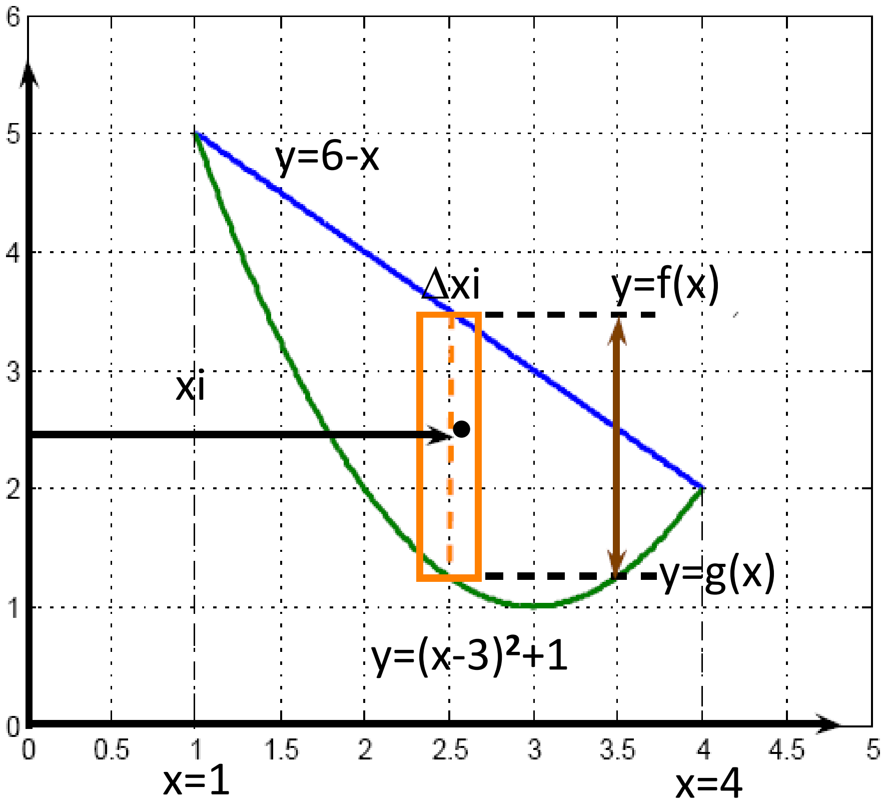
Mx : moment terhadap sumbu x

m : massa lamina

Contoh 5

Hitung pusat massa daerah R dibatasi oleh, y=6-x dan y=(x-3)²+1. Jika kerapatannya adalah konstan k

Jawab :



$$m = k\int_1^4 [(6-x)-(1+(x-3)^2)]dx$$

$$= k\left[-\frac{(5-x)^2}{2} - \frac{(x-3)^3}{3}\right]_1^4 = \frac{9}{2}k$$

$$M_y = k\int_1^4 x[(6-x)-(1+(x-3)^2)]dx$$

$$= \frac{45}{4}k$$

$$M_x = \frac{k}{2}\int_1^4 [(6-x)^2-(1+(x-3)^2)^2]dx$$

$$= \frac{117}{10}k$$

Jadi, $\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{(45/4)k}{(9/2)k} = \frac{5}{2}$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{(117/10)k}{(9/2)k} = \frac{13}{5}$$

TEOREMA PAPPUS

Jika sebuah daerah *R* yang terletak pada sebuah bidang diputar terhadap sebuah garis pada bidang tersebut yang tidak memotong daerah *R*, maka volume benda putar yang dibentuk oleh *R* sama dengan luas daerah *R* dikalikan dengan keliling yang ditempuh oleh titik pusat *R* itu

Bilamana daerah diputar terhadap sebuah sumbu putar yang tidak terletak pada daerah *R*, maka volume benda putarnya diberikan oleh,

$$V = 2\pi\, r\, A$$

dimana *r* adalah jari-jari lingkaran yakni panjang jarak tegak lurus dari titik pusat massa ke sumbu putar, dan *A* adalah luas daerah *R,* lamina.

LATIHAN SOAL VOLUME BENDA PUTAR

Soal 1.

Perhatikanlah daerah R dibatasi oleh, $y = (b - 5) + (x - a + 4)^2$ dan garis lurus yang menghubungkan titik $(a-5, b-4)$ dan $(a-2, b-1)$. Hitunglah volume benda putarnya, jika daerah R diputar terhadap :

(a). Garis $y = b - 6$, $y=b+5$

(b). Garis $x = a + 1$, $x=a - 6$

Soal 2.

Suatu daerah R dibatasi oleh kurva, $y = a - (x - b)^2$, dan $x + y = (a + b - 2)$, hitunglah volume benda putarnya, jika daerah R diputar terhadap :

a. garis $y = a+1$, $y=a - 5$

b. garis $x = b + 3$, $x=b - 3$

Soal 3.

Daerah R adalah sebuah segitiga dimana titik-titik ujungnya adalah (a,b), (2a,2b), dan (a,2a+2b). Dengan integral tentu hitunglah,

a. Volume benda putarnya jika R diputar terhadap garis $y = b$

b. Volume benda putarnya jika R diputar terdadap garis $x = a$

Soal 4

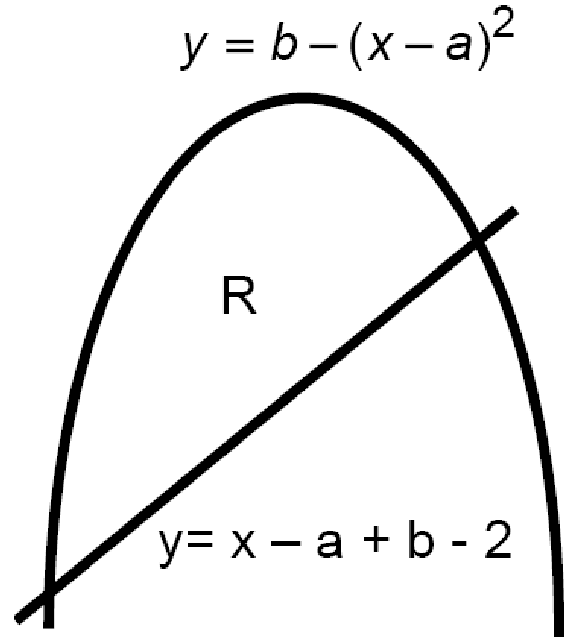
Perhatikanlah gambar daerah berikut ini Hitunglah volume benda putarnya jika daerah R diputar terhadap :

(a). Garis, y=b-5,

(b). Garis, y= b+1

(c). Garis, x=a – 3

(d). Garis, x = a + 2



Gambar Soal No. 4

Soal 5.

Massa dan Pusat Massa

a. Untuk soal nomor 1,2 dan 4 hitunglah pusat massa dengan asumsi kerapatan konstan
b. Hitunglah volume yang ditanyakan dengan metode teorema pappus.