Aula Prática 10

ASA 2024/2025

Q1 (CLRS Ex. 21.3-1) Mostre a estrutura de dados resultante e os valores devolvidos pelas operações de FIND-SET no programa. Use a estrutura de dados de florestas de conjuntos disjuntos com união por categoria e compressão de caminhos.

for $i \leftarrow 1$ **to** 16 **do**
  MAKE-SET(x_i)
end for
for $i \leftarrow 1$ **to** 15 **by** 2 **do**
  UNION(x_i, x_{i+1})
end for
for $i \leftarrow 1$ **to** 13 **by** 4 **do**
  UNION(x_i, x_{i+2})
end for
UNION(x_1, x_5)
UNION(x_{11}, x_{13})
UNION(x_1, x_{10})
FIND-SET(x_2)
FIND-SET(x_9)

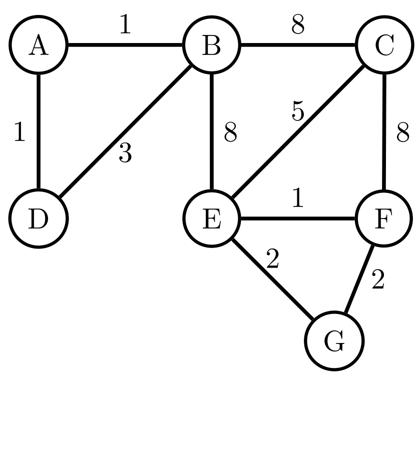
Assuma que se os conjuntos contendo x_i e x_j têm a mesma categoria, então a operação UNION(x_i, x_j) considera x_j como a raíz.

Solução:

FIND-SET(x_2): x_{16}
FIND-SET(x_9): x_{16}

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}
$r[]$	0	1	0	2	0	1	0	3	0	1	0	2	0	1	0	4
$\pi[]$	x_8	x_{16}	x_4	x_{16}	x_8	x_8	x_8	x_{16}	x_{16}	x_{16}	x_{12}	x_{16}	x_{16}	x_{16}	x_{16}	x_{16}

Q2 (T1 06/07 I.3) Considere o seguinte grafo não dirigido.



Indique o peso total de uma árvore abrangente de menor custo, pelo algoritmo de Prim e pelo algoritmo de Kruskal.

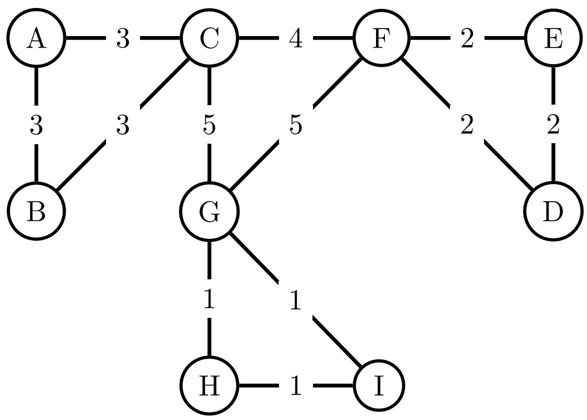
Solução:
Prim

	A	B	C	D	E	F	G
$key[]$	0	1	8	1	5	1	2
$\pi[]$	Nil	A	B	A	C	E	E

Peso total da MST: $1 + 1 + 8 + 5 + 1 + 2 = 18$

Kruskal
Ordem dos arcos: $(A, B), (A, D), (E, F), (E, G), (F, G), (B, D), (C, E), (B, C), (B, E), (C, F)$
Arcos considerados: $(A, B), (A, D), (E, F), (E, G), (C, E), (B, C)$
Peso total da MST: $1 + 1 + 1 + 2 + 5 + 8 = 18$

Q3 (EE 20/21 I.b) Considere a execução do algoritmo de Kruskal no grafo não dirigido e pesado da figura. Durante a aplicação do algoritmo, arcos com o mesmo peso devem ser considerados por ordem lexicográfica.



Utilize a estrutura em árvore para representação de conjuntos disjuntos com a aplicação das heuristicas de união por categoria e compressão de caminhos. Para cada vértice indique os valores de categoria ($rank[v]$) e o valor do seu pai na árvore que representa os conjuntos ($p[v]$).

Nota: Na operação *Make-Set*(v), o valor da categoria de v é inicializado a 0. Na operação de *Union*(u, v), em caso de empate, considere que o representante de v é que fica na raíz.

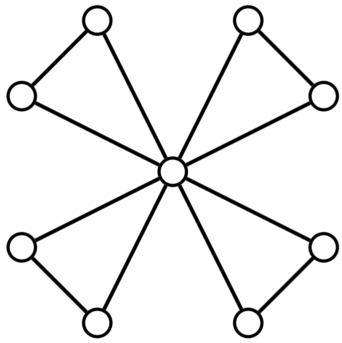
Solução:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
$rank[v]$	0	1	0	0	2	0	0	1	0
$p[v]$	B	E	E	E	E	E	E	E	H

Indique ainda o peso da árvore abrangente, bem como o número de total de árvores abrangentes.

Pesos da MST:	21
Número de MSTs:	$3 \times 3 \times 3 \times 2 = 54$

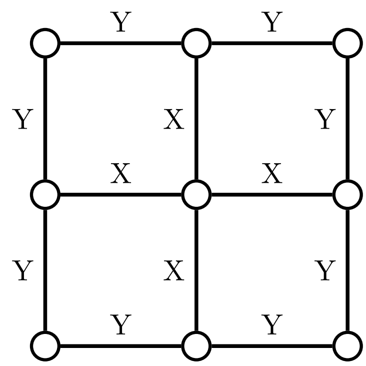
Q4 (T1 08/09 II.1) Considere o grafo não-dirigido e pesado da figura abaixo, para o qual os pesos dos arcos são desconhecidos. Qual o número máximo de árvores abrangentes de menor custo (MST) que podem existir neste grafo ?



Solução:

Número de MSTs é máximo quanto todos os arcos têm o mesmo peso.
Logo, $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

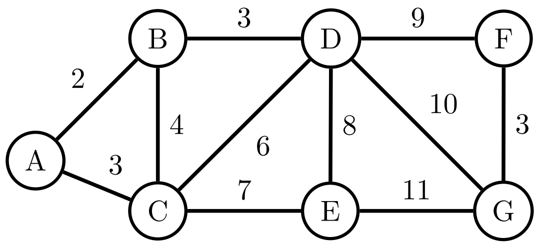
Q5 (R1 08/09 II.1) Considere o grafo não-dirigido e pesado da figura abaixo, para o qual os pesos dos arcos podem assumir o valor X ou Y, conforme indicado. Assumindo que $X > Y$, qual o número máximo de MST que é possível obter, para uma determinada atribuição de valores para X e Y ?



Solução:

Dado que $X > Y$, os arcos exteriores são considerados antes dos interiores.
De forma a que os 8 arcos com peso Y não sejam todos seleccionados (deixando de ser uma MST), existem 8 MSTs possíveis ($C^8_7 = 8$).
Existem depois 4 arcos interiores com peso X onde apenas um pode ser considerado em combinação com cada uma das 8 MSTs anteriores.
Logo, é possível obter $8 \times 4 = 32$ MSTs.

Q6 (T1 07/08 II.1) Considere o seguinte grafo não-dirigido e pesado. Indique o peso de uma árvore abrangente de menor custo (MST) do grafo. Quantas árvores abrangentes de menor custo diferentes existem para este grafo?



Solução:

Peso da MST: $2+3+3+9+7+3=27$
Não existe nenhum vértice com mais de 1 arco de saída com o mesmo peso.
Logo, existe apenas 1 MST possível.

Q7 (CLRS Ex. 21.3-4) Suponha que desejamos adicionar a operação $\textsc{Print-Set}(x)$ que dado um vértice x mostra todos os elementos do conjunto a que x pertence. Indique como podemos adicionar um único atributo a cada vértice numa floresta de conjuntos disjuntos de forma a que $\textsc{Print-Set}(x)$ seja executável em tempo linear no número de elementos do conjunto a que x pertence. O tempo assimptótico das outras operações não é alterado. Assuma que podemos mostrar cada elemento do conjunto em tempo $O(1)$.

Q8 (CLRS Ex. 23.2-2) Suponha que representamos o grafo $G=(V,E)$ usando uma matriz de adjacência. Indique uma implementação simples do algoritmo de Prim que execute em tempo $O(V^2)$.

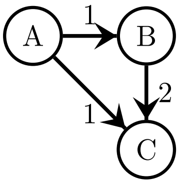
Q9 (CLRS Ex. 23.1-6) Mostre que um grafo tem apenas uma árvore abrangente de menor custo se, para cada corte no grafo, existe apenas um arco leve que cruza o corte. Mostre através de um contra-exemplo que o inverso não é verdade, isto é, mostre que se existe mais do que um arco leve que cruza o corte, não é necessariamente verdade que temos mais do que uma árvore abrangente de menor custo.

Solução:
a) Provar a implicação:
para qualquer corte, existe um único arco leve que cruza o corte
$\Rightarrow$ o grafo admite uma MST única
. Sejam T_1 e T_2 duas quaisquer MSTs do grafo, temos de provar que $T_1=T_2$ dado um corte.
. Provar que $T_1=T_2$ corresponde a provar que:
$\forall u,v \in V, \quad (u,v)\in T_1 \Leftrightarrow (u,v)\in T2$
(prova não incluída)

b) Contra-exemplo:
O grafo G admite uma única MST. Mas existe um corte de G que é cruzado por mais

do que um arco leve.

Grafo G:



MST: