Análise e Síntese de Algoritmos
Programação Linear (cont.).
Algoritmo Simplex. Dualidade Fraca&Forte.

Prof. Pedro T. Monteiro

IST - Universidade de Lisboa

2024/2025

Contexto

- Revisão [CLRS, Cap.1-13]
  - Fundamentos; notação; exemplos
- Técnicas de Síntese de Algoritmos [CLRS, Cap.15-16]
  - Programação dinâmica [CLRS, Cap.15]
  - Algoritmos greedy [CLRS, Cap.16]
- Algoritmos em Grafos [CLRS, Cap.21-26]
  - Algoritmos elementares
  - Caminhos mais curtos [CLRS, Cap.22,24-25]
  - Árvores abrangentes [CLRS, Cap.23]
  - Fluxos máximos [CLRS, Cap.26]
- Programação Linear [CLRS, Cap.29]
  - Algoritmos e modelação de problemas com restrições lineares
- Tópicos Adicionais
  - Complexidade Computacional [CLRS, Cap.34]

Resumo

Algoritmo Simplex

Resultados Formais

Dualidade

Algoritmos

Algoritmos

- Algoritmo Simplex (Dantzig)
  - Exponencial no pior caso; eficiente na prática e muito utilizado
- Algoritmo da Elipsóide (Shor, Yudin, Nemirovsky)
  - Polinomial; ineficiente na prática
- Métodos de Ponto Interior (Karmarkar)
  - Polinomial

Algoritmo Simplex

Operação Pivot: Operação central do algoritmo Simplex

- Escolher variável não básica x_e (entrada) para passar a básica
  - Heurística: escolher x_e que pode aumentar Z o máximo possível
- Escolher variável básica x_l (saída) para passar a não básica
  - Heurística: escolher x_l que mais restringe
- Calcular nova forma slack do problema
  - $N' = N \setminus \{x_e\} \cup \{x_l\}$
  - $B' = B \setminus \{x_l\} \cup \{x_e\}$
  - (N', B', A, b, c, v)

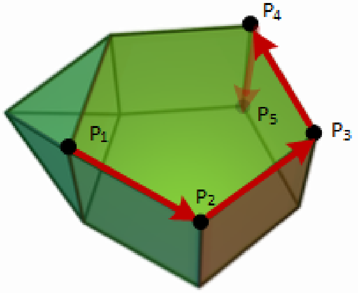
Algoritmo Simplex

Algoritmo Simplex

- Calcular forma slack inicial
  - Para a qual solução básica inicial é exequível
  - Caso contrário reporta problema não exequível (*unfeasible*) e termina
- Enquanto existir $c_e > 0$ (i.e. valor de z pode aumentar)
  - x_e define variável de entrada (i.e. nova variável básica)
  - Seleccionar x_l
    - x_l corresponde a linha i que minimiza $\frac{b_i}{-a_{ie}}$ (valores > 0)
    - Se $\frac{b_i}{a_{ie}} < 0$ para todo o i, retornar "unbounded"
- Aplicar pivoting com (N, B, A, b, c, v, l, e)
- No final, retornar solução básica
  - $\overline{x}_i \leftarrow b_i$, se $i \in B$ (variáveis básicas - linhas matriz)
  - $\overline{x}_e \leftarrow 0$, se $e \in N$ (variáveis não-básicas - colunas da matriz)

Algoritmo Simplex

Intuição:
Alternar entre formas slack



Nota: O algoritmo Simplex é dado aqui para transmitir a intuição.
Não são feitos (nem avaliados) exercícios de pivotagem.
Tudo o que está a cinzento é matéria não avaliada este ano !

Algoritmo Simplex

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{maximizar} & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & \\
\text{sujeito a} & & & & & & & \\
 & x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & \leq & 30 \\
 & 2x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & \leq & 24 \\
 & 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 36 \\
 & & & x_1, x_2, x_3 & & & \geq & 0
\end{array}
$$

Forma Slack

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
z & = & & & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 \\
x_4 & = & 30 & - & x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 \\
x_5 & = & 24 & - & 2x_1 & - & 2x_2 & - & 5x_3 \\
x_6 & = & 36 & - & 4x_1 & - & x_2 & - & 2x_3
\end{array}
$$

Nota: Ilustrado com sistema de equações. Formas matricial e Tableau não abordadas.

Algoritmo Simplex

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} z & = & & & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 \\ x_4 & = & 30 & - & x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 \\ x_5 & = & 24 & - & 2x_1 & - & 2x_2 & - & 5x_3 \\ x_6 & = & 36 & - & 4x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 \end{array}$$

Operação pivot entre x_1 e x_6

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} z & = & 27 & + & \frac{x_2}{4} & + & \frac{x_3}{2} & - & \frac{3x_6}{4} \\ x_1 & = & 9 & - & \frac{x_2}{4} & - & \frac{x_3}{2} & - & \frac{x_6}{4} \\ x_4 & = & 21 & - & \frac{3x_2}{4} & - & \frac{5x_3}{2} & + & \frac{x_6}{4} \\ x_5 & = & 6 & - & \frac{3x_2}{2} & - & 4x_3 & + & \frac{x_6}{2} \end{array}$$

Nota: Ilustrado com sistema de equações. Formas matricial e Tableau não abordadas.

Algoritmo Simplex

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} z & = & 27 & + & \frac{x_2}{4} & + & \frac{x_3}{2} & - & \frac{3x_6}{4} \\ x_1 & = & 9 & - & \frac{x_2}{4} & - & \frac{x_3}{2} & - & \frac{x_6}{4} \\ x_4 & = & 21 & - & \frac{3x_2}{4} & - & \frac{5x_3}{2} & + & \frac{x_6}{4} \\ x_5 & = & 6 & - & \frac{3x_2}{2} & - & 4x_3 & + & \frac{x_6}{2} \end{array}$$

Operação pivot entre x_3 e x_5

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} z & = & \frac{111}{4} & + & \frac{x_2}{16} & - & \frac{x_5}{8} & - & \frac{11x_6}{16} \\ x_1 & = & \frac{33}{4} & - & \frac{x_2}{16} & + & \frac{x_5}{8} & - & \frac{5x_6}{16} \\ x_3 & = & \frac{3}{2} & - & \frac{3x_2}{8} & - & \frac{x_5}{4} & + & \frac{x_6}{8} \\ x_4 & = & \frac{69}{4} & + & \frac{3x_2}{16} & + & \frac{5x_5}{8} & - & \frac{x_6}{16} \end{array}$$

Nota: Ilustrado com sistema de equações. Formas matricial e Tableau não abordadas.

Algoritmo Simplex

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} z & = & \frac{111}{4} & + & \frac{x_2}{16} & - & \frac{x_5}{8} & - & \frac{11x_6}{16} \\ x_1 & = & \frac{33}{4} & - & \frac{x_2}{16} & + & \frac{x_5}{8} & - & \frac{5x_6}{16} \\ x_3 & = & \frac{3}{2} & - & \frac{3x_2}{8} & - & \frac{x_5}{4} & + & \frac{x_6}{8} \\ x_4 & = & \frac{69}{4} & + & \frac{3x_2}{16} & + & \frac{5x_5}{8} & - & \frac{x_6}{16} \end{array}$$

Operação pivot entre x_2 e x_3

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} z & = & 28 & - & \frac{x_3}{6} & - & \frac{x_5}{6} & - & \frac{2x_6}{3} \\ x_1 & = & 8 & + & \frac{x_3}{6} & + & \frac{x_5}{6} & - & \frac{x_6}{3} \\ x_2 & = & 4 & - & \frac{8x_3}{3} & - & \frac{2x_5}{3} & + & \frac{x_6}{3} \\ x_4 & = & 18 & - & \frac{x_3}{2} & + & \frac{x_5}{2} & & \end{array}$$

Nota: Ilustrado com sistema de equações. Formas matricial e Tableau não abordadas.

Algoritmo Simplex

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} z & = & 28 & - & \frac{x_3}{6} & - & \frac{x_5}{6} & - & \frac{2x_6}{3} \\ x_1 & = & 8 & + & \frac{x_3}{6} & + & \frac{x_5}{6} & - & \frac{x_6}{3} \\ x_2 & = & 4 & - & \frac{8x_3}{3} & - & \frac{2x_5}{3} & + & \frac{x_6}{3} \\ x_4 & = & 18 & - & \frac{x_3}{2} & + & \frac{x_5}{2} & & \end{array}$$

Não há coeficientes positivos na função objectivo. Simplex termina.
Solução: $x_1 = 8$, $x_2 = 4$ e $x_3 = 0$. Valor função objectivo: 28.

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \text{maximizar} & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & \\ \text{sujeito a} & x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & \leq & 30 \\ & 2x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & \leq & 24 \\ & 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 36 \\ & & & x_1, x_2, x_3 & & & \geq & 0 \end{array}$$

Nota: Ilustrado com sistema de equações. Formas matricial e Tableau não abordadas.

Solução Exequível Inicial

Solução Exequível Inicial

Um programa linear pode ser exequível, mas solução básica inicial pode não ser exequível

- Seja L um programa linear na forma standard, e seja L_{aux} definido da seguinte forma:

$$\begin{array}{lll} \text{maximizar} & -x_0 & \\ \text{sujeito a} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_0 \leq b_i & i = 1, 2, \ldots, m \\ & x_j \geq 0 & j = 0, 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

- Então L é exequível se e só se o valor objectivo óptimo de L_{aux} é 0
  - Se L tem solução, então L_{aux} tem solução com $x_0 = 0$, o valor óptimo
  - Se o valor óptimo de x_0 é 0, então solução é solução para L

Solução Exequível Inicial

Solução Exequível Inicial

Se solução básica inicial for não exequível:

- A partir de L construir L_{aux}
- Determinar índice l com menor b_i
  - Aplicar operação pivot entre x_l e x_0
  - A solução básica calculada é exequível para L_{aux}
- Aplicar passos do Simplex para calcular solução óptima
  - Se solução óptima verifica $x_0 = 0$, retornar solução calculada, sem x_0
  - Caso contrário L não é exequível

Solução Exequível Inicial

Solução Exequível Inicial

Após a primeira aplicação de pivot, a solução básica é exequível para L_{aux}

- $e = 0$
- l tal que $b_l < b_i$, $i = 1, \ldots, m$
  - $b_l < 0$, pois solução inicial exequível se $bi \geq 0$
- Após aplicar operação pivot tem-se:
  - $x_0 = b_l / a_{l0}$
  - $x_i = b_i - a_{i0}(b_l / a_{l0})$, $i \neq 0$
- Como $a_{i0} = -1$ para todo o i,
  - $x_0 = -b_l > 0$
  - $x_i = b_i - b_l > 0$

Solução Exequível Inicial

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{maximizar} & 2x_1 & - & x_2 & & \\ \text{sujeito a} & & & & & \\ & 2x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & - & 5x_2 & \leq & -4 \\ & & x_1, x_2 & & \geq & 0 \end{array}$$

Solução básica inicial não é exequível.
Construção de Programa Linear Auxiliar.

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{maximizar} & & & & - & x_0 & & \\ \text{sujeito a} & & & & & & & \\ & 2x_1 & - & x_2 & - & x_0 & \leq & 2 \\ & x_1 & - & 5x_2 & - & x_0 & \leq & -4 \\ & & & x_1, x_2, x_0 & & & \geq & 0 \end{array}$$

Solução Exequível Inicial

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximizar} & -x_0 \\
\text{sujeito a} & \\
& \begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & - & x_0 & \leq & 2 \\ x_1 & - & 5x_2 & - & x_0 & \leq & -4 \\ & & x_1, x_2, x_0 & & & \geq & 0 \end{array}
\end{array}
$$

Forma slack do Programa Linear Auxiliar.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
z & = & & & & & & - & x_0 \\
x_3 & = & 2 & - & 2x_1 & + & x_2 & + & x_0 \\
x_4 & = & -4 & - & x_1 & + & 5x_2 & + & x_0
\end{array}
$$

Solução Exequível Inicial

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
z & = & & & & & & - & x_0 \\
x_3 & = & 2 & - & 2x_1 & + & x_2 & + & x_0 \\
x_4 & = & -4 & - & x_1 & + & 5x_2 & + & x_0
\end{array}
$$

Operação pivot entre x_0 e x_4.

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
z & = & -4 & - & x_1 & + & 5x_2 & - & x_4 \\
x_3 & = & 6 & - & x_1 & - & 4x_2 & + & x_4 \\
x_0 & = & 4 & + & x_1 & - & 5x_2 & + & x_4
\end{array}
$$

Solução básica inicial passou a ser exequível para o programa auxiliar.
Resolver programa auxiliar usando Simplex.

Algoritmo Simplex

Resultados Formais

Dado um programa linear (A, b, c):

- Se o algoritmo Simplex retorna uma solução, a solução é exequível
- Se o algoritmo Simplex retorna "unbounded", o programa é não limitado
- Dado um programa linear (A, b, c) na forma standard, e B um conjunto de variáveis básicas, a forma slack é única

Algoritmo Simplex

Resultados Formais

Variação do valor da função objectivo após pivoting:

- Pode não diminuir
  - Variável escolhida tem coeficiente positivo
  - Valor da variável é não negativo, pelo que novo valor da função de custo não pode diminuir
- Pode não aumentar
  - Degenerescência
  - Mas é sempre possível assegurar que algoritmo termina

Algoritmo Simplex

Resultados Formais

O Simplex está em ciclo se existem formas slack idênticas para duas iterações do algoritmo

- Se o algoritmo Simplex não termina após C_m^{n+m} iterações, então o algoritmo está em ciclo
  - Cada conjunto B determina unicamente a forma slack
  - Existem $n + m$ variáveis e $|B| = m$
  - Número de modos de escolher B: C_m^{n+m}
  - Número de formas slack distintas: C_m^{n+m}
  - Se algoritmo executar mais de C_m^{n+m} iterações, então está em ciclo
- Eliminar ciclos:
  - Regra de Bland: desempates na escolha de variáveis através da escolha da variável com o menor índice

Teorema Fundamental PL

Teorema Fundamental da Programação Linear

Qualquer programa linear L na forma standard:

- Se L não é exequível, o algoritmo Simplex retorna "infeasible"
- Se L não é limitado, o algoritmo Simplex retorna "unbounded"
- Caso contrário, o algoritmo Simplex retorna uma solução óptima com um valor objectivo finito

Dualidade

Dualidade

- Conceito essencial em optimização
  - Normalmente associado com existência de algoritmos polinomiais
  - Permite provar que solução é óptima
    e.g., fluxo máximo - corte mínimo
- A formulação original é conhecida como o programa primal
- Programa linear dual:

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimizar} & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & \\
\text{sujeito a} & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j & j = 1, 2, \ldots, n \\
 & y_i \geq 0 & i = 1, 2, \ldots, m
\end{array}
$$

Dualidade

Primal

$$
\begin{array}{lrrrcl}
\text{Max} & 6x_1 & +14x_2 & +13x_3 & & \\
 & \frac{1}{2}x_1 & +2x_2 & +x_3 & \leq & 24, \\
 & x_1 & +2x_2 & +4x_3 & \leq & 60, \\
 & \multicolumn{5}{l}{x_1, x_2, x_3 \geq 0}
\end{array}
$$

Dual

$$
\begin{array}{lrrcl}
\text{min} & 24y_1 & +60y_2 & & \\
 & \frac{1}{2}y_1 & +y_2 & \geq & 6, \\
 & 2y_1 & +2y_2 & \geq & 14, \\
 & 1y_1 & +4y_2 & \geq & 13, \\
 & \multicolumn{4}{l}{y_1, y_2 \geq 0}
\end{array}
$$

Dualidade Fraca

Seja x (y) uma qualquer solução exequível do programa primal (dual). Nestas condições:

Primal

$$
\begin{aligned}
Ax &\leq b \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j &\leq b_i \\
y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) &\leq y_i b_i \\
\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} \right) x_j &\leq \sum_{i=1}^{m} y_i b_i
\end{aligned}
$$

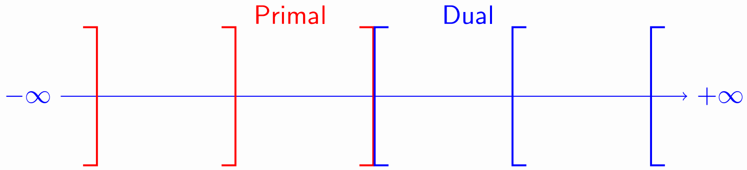
Dual

$$
\begin{aligned}
A^T y &\geq c \\
\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i &\geq c_j \\
\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j &\geq c_j x_j \\
\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j &\geq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j
\end{aligned}
$$

$$
\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j \leq \sum_{i=1}^{m} y_i b_i
$$

Dualidade Fraca

Exemplo



Dualidade Forte

Dualidade Forte em Programação Linear

Seja x uma qualquer solução pelo algoritmo Simplex, e sejam N e B os conjuntos de variáveis para a forma slack final.

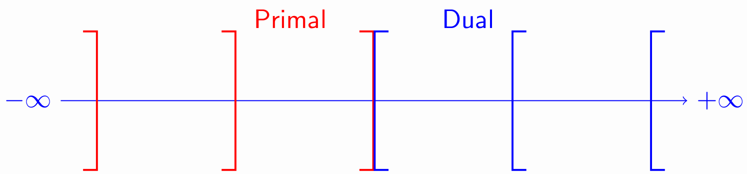
Seja c' o vector dos coeficientes da forma slack final e seja $y_i = -c'_{n+i}$ para $(n+i) \in N$; 0 caso contrário.

Nestas condições:

- x é solução óptima para o programa primal
- y é a solução óptima para o programa dual
- e, $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$

Dualidade

Exemplo



Se o primal é não limitado, o dual é não exequível

Se o dual é não limitado, o primal é não exequível

Questões?

Dúvidas?