Análise e Síntese de Algoritmos

Fluxos máximos. Ford-Fulkerson. Edmonds-Karp.

Cap. 26

Prof. Pedro T. Monteiro

IST - Universidade de Lisboa

2024/2025

Contexto

- Revisão [CLRS, Cap.1-13]
  - Fundamentos; notação; exemplos
- Técnicas de Síntese de Algoritmos [CLRS, Cap.15-16]
  - Programação dinâmica
  - Algoritmos greedy
- Algoritmos em Grafos [CLRS, Cap.21-26]
  - Algoritmos elementares
  - Caminhos mais curtos [CLRS, Cap.22,24-25]
  - Árvores abrangentes [CLRS, (Cap. 21 +) Cap.23]
  - Fluxos máximos [CLRS, Cap.26]
- Programação Linear [CLRS, Cap.29]
  - Algoritmos e modelação de problemas com restrições lineares
- Tópicos Adicionais
  - Complexidade Computacional [CLRS, Cap.34]

Resumo

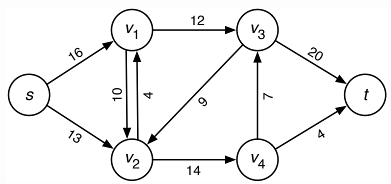
Problema

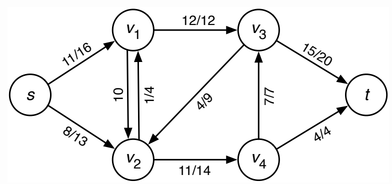
Problema

Qual o volume de água máximo (por segundo), que é possível fazer chegar a Lisboa a partir da Barragem de Castelo de Bode?

- Existe uma rede de condutas de água que permitem o envio da água de Castelo de Bode para Lisboa
- Cada conduta apresenta uma capacidade limite, de metros cúbicos por segundo

Objectivo: Encontrar um algoritmo eficiente



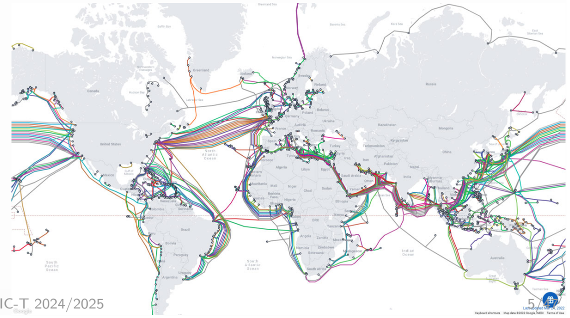


Motivação

Aplicações

Envio de materiais/informação em redes:

- Rede de distribuição: Electricidade, água, petróleo ou gás
- Contentores numa rede de transportes
- Informação numa rede de comunicação
- Tráfego numa rede rodoviária
- ...



Motivação

Fluxos Máximos em Grafos (definição problema)

Dado um grafo dirigido $G = (V, E)$:

- Com um vértice fonte s e um vértice destino t
- Em que cada arco (u, v) é caracterizado por uma capacidade não negativa $c(u, v)$, indicando o valor limite de "fluxo" que é possível enviar de u para v
- Pretende-se calcular o valor máximo de "fluxo" que é possível enviar do vértice fonte s para o vértice destino t, respeitando as restrições de capacidade dos arcos

Fluxos Máximos em Grafos

Definição de rede de fluxo

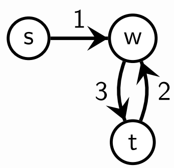
- Uma rede de fluxo $G = (V, E)$ é um grafo dirigido
- Cada arco (u, v) é caracterizado por uma capacidade não negativa $c(u, v) \geq 0$
  - Indica valor limite de "fluxo" que é possível passar por (u, v)
  - Se $(u, v) \notin E$, então $c(u, v) = 0$
- Se $(u, v) \in E$, então $(v, u) \notin E$ (não há arcos anti-paralelos)
- Dois vértices especiais: fonte s (source) e destino t (sink)
- Todos os vértices de G pertencem a um caminho de s para t
  $s \rightsquigarrow v \rightsquigarrow t, \forall v \in V$
- Grafo é ligado, $|E| \geq |V| - 1$

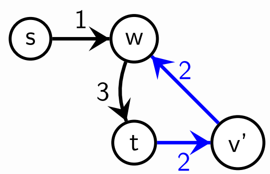
Fluxos Máximos em Grafos

Estratégias de modelação

Para redes de fluxo com arcos anti-paralelos entre vértices u e v

- Criar um vértice adicional v' entre (u, v) respeitando as capacidades

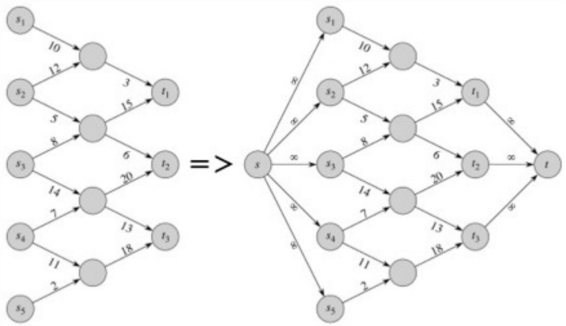




Estratégias de modelação

Para redes de fluxo com múltiplas fontes e/ou destinos

- Definir super-fonte que liga a todas as fontes
- Definir super-destino ao qual ligam todos os destinos
- Considerar capacidades infinitas entre:
  - super-fonte e fontes ($c(s, s_i) = \infty$)
  - destinos e super-destino ($c(t_i, t) = \infty$)



Propriedades de Fluxo

Um fluxo em $G = (V, E)$ é uma função $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as propriedades:

- Restrição de Capacidade:

$$0 \leq f(u, v) \leq c(u, v) \ , \ \ \forall u, v \in V$$

- Conservação de Fluxo:

$$\sum_{v \in V} f(v, u) = \sum_{v \in V} f(u, v) \ , \ \ \forall u \in V - \{s, t\}$$

Valor de Fluxo

Seja f uma função de fluxo numa rede de fluxo $G = (V, E, s, t, c)$,
o valor de fluxo de f, denotado por $|f|$, é definido por:

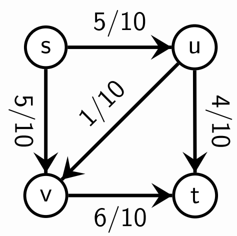
$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v) - \sum_{v \in V} f(v, s)$$

(valor total do fluxo que sai da fonte menos o que entra na fonte)

Problema do Fluxo Máximo

Dada uma rede de fluxo $G = (V, E, s, t, c)$, determinar qual o valor máximo de fluxo $|f^*|$ de s para t

Exemplo



Valor do Fluxo $|f| = 10$
Fluxo Máximo $|f^*| = 20$

Fluxos Máximos em Grafos

Propriedades adicionais

- Dados conjuntos de vértices X e Y: $\sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} f(x, y)$
- Considere rede de fluxo $G = (V, E)$, uma função de fluxo f em G e $X, Y, Z \subseteq V$:
  - $f(X, X) = 0$
  - Se $X \cap Y = \emptyset$:
    - $f(X \cup Y, Z) = f(X, Z) + f(Y, Z)$
    - $f(Z, X \cup Y) = f(Z, X) + f(Z, Y)$

Método Ford-Fulkerson

Conceitos

- Redes residuais
- Caminhos de aumento
- Cortes em redes de fluxo
- Teorema do Fluxo-Máximo Corte-Mínimo
- Algoritmo Genérico de Ford-Fulkerson

Método Ford-Fulkerson

Ford-Fulkerson-Method(G, s, t)

```
Inicializar fluxo f a 0
while existe caminho de aumento p = ⟨s, ..., t⟩ do
  aumentar fluxo f utilizando p
end while
return f
```


Rede Residual

Rede Residual

Dado $G = (V, E)$, um fluxo f, e vértices $u, v \in V$

- $c_f(u, v)$ denota a capacidade residual de (u, v):
  fluxo líquido adicional que é possível enviar de u para v

$$c_f(u, v) = \begin{cases} c(u, v) - f(u, v) & (u, v) \in E \\ f(v, u) & (v, u) \in E \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

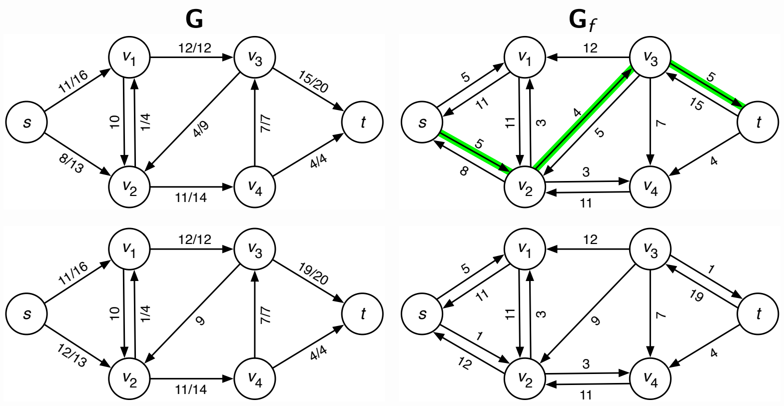
- $G_f = (V, E_f)$ denota a rede residual de G, onde

$$E_f = \{(u, v) \in V \times V : c_f(u, v) > 0\}$$

- Cada arco (residual) de G_f permite apenas fluxo líquido positivo

Rede Residual

Exemplo



Rede Residual

Aumento de Fluxo

Seja $G = (V, E, s, t, c)$ uma rede de fluxo, f um fluxo, G_f a rede residual de G e f' um fluxo em G_f:

- O aumento de fluxo f' em f, é uma função de $V \times V$ em $\mathbb{R}$:

$$(f \uparrow f')(u,v) = \begin{cases} f(u,v) + f'(u,v) - f'(v,u) & \text{se } (u,v) \in E \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Empurrar fluxo $f'(v,u)$, no arco contrário na rede residual, corresponde a cancelar fluxo na rede original
- f' é definido em G_f e é um fluxo
- Propriedades de um fluxo são verificadas:
  Restrição de capacidade + Conservação de fluxo

Rede Residual

Lema do Aumento de Fluxo

Seja $G = (V, E)$ uma rede de fluxo com origem s e destino t, e seja f um fluxo em G. Seja G_f a rede residual de G induzida por f, e seja f' um fluxo em G_f. Então a função $f \uparrow f'$ é um fluxo em G, com valor $|f \uparrow f'| = |f| + |f'|$.

Prova

$$\begin{aligned} |f \uparrow f'| &= \sum_{v \in V} (f \uparrow f')(s,v) - \sum_{v \in V} (f \uparrow f')(v,s) \quad = \quad \ldots \\ &= \sum_{v \in V} f(s,v) - \sum_{v \in V} f(v,s) + \sum_{v \in V} f'(s,v) - \sum_{v \in V} f'(v,s) \\ &= |f| + |f'| \end{aligned}$$

Não há arcos anti-paralelos em G: para cada $v \in V$, apenas pode existir o arco (s, v) ou (v, s)

Ver prova completa no CLRS, Lema 26.1

Rede Residual

Caminho de Aumento

Seja $G = (V, E, s, t, c)$ rede de fluxo, f um fluxo e G_f a rede residual de G:

- Caminho de aumento p:
  caminho simples de s para t na rede residual G_f
- Capacidade residual de p:
  $c_f(p) = \min\{c_f(u,v) : (u,v) \text{ em } p\}$
- $c_f(p)$ permite definir fluxo f_p em G_f, $|f_p| = c_f(p) > 0$
- $f \uparrow f_p$ é um fluxo em G, com valor $|f \uparrow f_p| = |f| + |f_p| > |f|$

Cortes em Rede de Fluxo

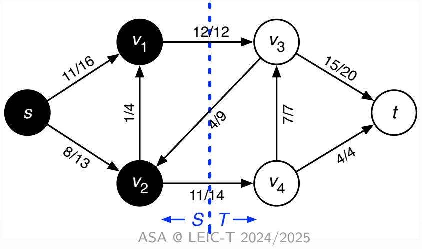
Definição

Um corte (S, T) de $G = (V, E)$ é uma partição de V em S e $T = V - S$, tal que $s \in S$ e $t \in T$

- Fluxo líquido do corte (S, T):

$$f(S, T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u, v) - \sum_{v \in T} \sum_{u \in S} f(v, u)$$

- Capacidade do corte (S, T): $c(S, T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u, v)$

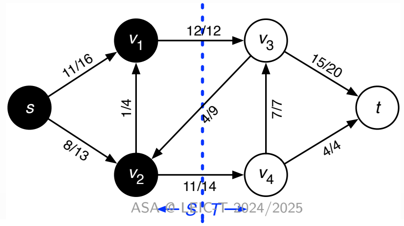


Cortes em Rede de Fluxo

Fluxo através de um Corte

Se $G = (V, E)$ com fluxo f, então o fluxo líquido através de qualquer corte (S, T) é $f(S, T) = |f|$

- $V = T \cup S$, pelo que $f(S, V) = f(S, T \cup S) = f(S, T) + f(S, S)$
- Logo, $f(S, V) = f(S, T)$, dado que $f(S, S) = 0$
- $f(S, V) = f(s, V) + f(S - \{s\}, V) = f(s, V) = |f|$
- Observação: para $u \in S - \{s\}$ temos $f(u, V) = 0$ (conservação de fluxo nos vértices intermédios)



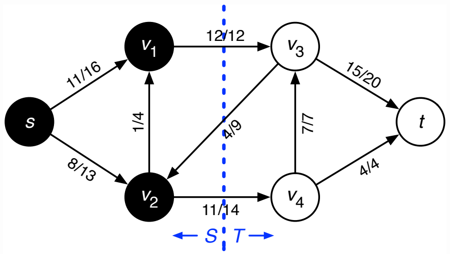
Cortes em Rede de Fluxo

Limitação de Fluxo

Qualquer valor de fluxo é limitado superiormente pela capacidade de qualquer corte de G

- Seja (S, T) qualquer corte de G, e f um fluxo:

$$|f| = f(S, T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u, v) \leq \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u, v) = c(S, T)$$



Cortes em Rede de Fluxo

Teorema Fluxo Máximo - Corte Mínimo

Seja $G = (V, E)$, com fonte s e destino t, e f um fluxo, então as proposições seguintes são equivalentes:

1. f é um fluxo máximo em G
2. A rede residual G_f não contém caminhos de aumento
3. $|f| = c(S, T)$ para um corte (S, T) de G

Prova $1 \rightarrow 2$

- Admitir que f é fluxo máximo em G mas que G_f tem caminho de aumento
- Então é possível definir um novo fluxo $f + f_p$ com valor $|f| + |f_p| > |f|$; $\Rightarrow$ contradição de que f é fluxo máximo

Cortes em Rede de Fluxo

Teorema Fluxo Máximo - Corte Mínimo

Seja $G = (V, E)$, com fonte s e destino t, e f um fluxo, então as proposições seguintes são equivalentes:

1. f é um fluxo máximo em G
2. A rede residual G_f não contém caminhos de aumento
3. $|f| = c(S, T)$ para um corte (S, T) de G

Prova $2 \rightarrow 3$

- $S = \{v \in V : \text{existe caminho de } s \text{ para } v \text{ em } G_f\}$
- $T = V - S$, onde $s \in S$ e $t \in T$, logo (S, T) é um corte
- Assumindo que $u \in S$ e $v \in T$, temos:
  - $f(u, v) = c(u, v)$, caso contrário teríamos $(u, v) \in E_f$, o que colocaria v em S
  - $f(v, u) = 0$, se $(v, u) \in E$, caso contrário $c_f(u, v) = f(v, u)$ seria positivo e $(u, v) \in E_f$, o que colocaria v em S

Cortes em Rede de Fluxo

Teorema Fluxo Máximo - Corte Mínimo

Seja $G = (V, E)$, com fonte s e destino t, e f um fluxo, então as proposições seguintes são equivalentes:

1. f é um fluxo máximo em G
2. A rede residual G_f não contém caminhos de aumento
3. $|f| = c(S, T)$ para um corte (S, T) de G

Prova $2 \rightarrow 3$

- ...
- Assim, o valor do fluxo $|f|$ é dado por:

$$\begin{aligned} |f| = f(S, T) &= \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u, v) - \sum_{v \in T} \sum_{u \in S} f(v, u) \\ &= \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u, v) - \sum_{v \in T} \sum_{u \in S} 0 \\ &= c(S, T) \end{aligned}$$

Cortes em Rede de Fluxo

Teorema Fluxo Máximo - Corte Mínimo

Seja $G = (V, E)$, com fonte s e destino t, e f um fluxo, então as proposições seguintes são equivalentes:

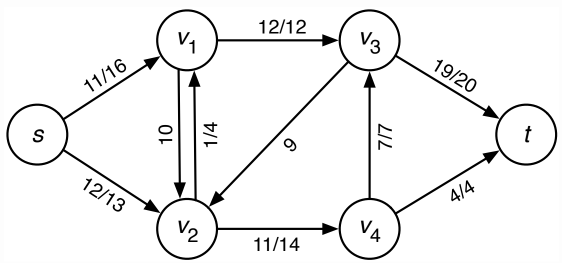
1. f é um fluxo máximo em G
2. A rede residual G_f não contém caminhos de aumento
3. $|f| = c(S, T)$ para um corte (S, T) de G

Prova $3 \rightarrow 1$

- Dado que $|f| \leq c(S, T)$, para qualquer corte (S, T) de G
- Como $|f| = c(S, T)$ (definido acima), então f é fluxo máximo

Cortes em Rede de Fluxo

Exemplo



Q: Corte mínimo?

$\{s, v_1, v_2, v_4\}, \{v_3, t\}$

Algoritmo Ford-Fulkerson

Ford-Fulkerson(G, s, t)

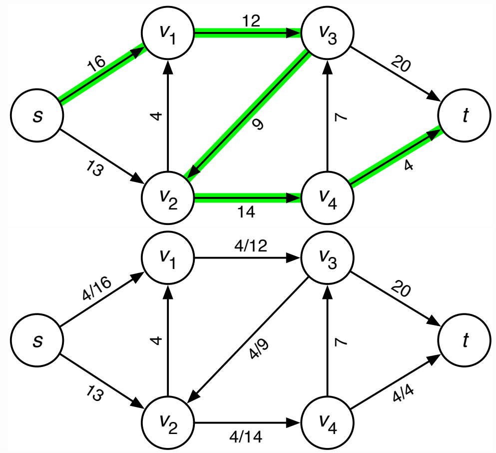
```
for each edge (u,v) ∈ G.E do
  f(u,v) ← 0
  f(v,u) ← 0
end for
while exists path p ∈ G_f from s to t do
  c_f(p) ← min{c_f(u,v): (u,v) ∈ p}
  for each edge (u,v) ∈ p do
    if (u,v) ∈ E then
      f(u,v) ← f(u,v) + c_f(p)
    else
      f(v,u) ← f(v,u) - c_f(p)
    end if
  end for
end while
```


Algoritmo Ford-Fulkerson

Exemplo

G_f

G

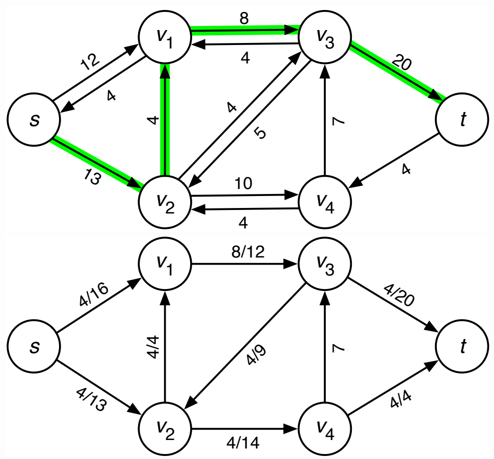


Algoritmo Ford-Fulkerson

Exemplo

G_f

G

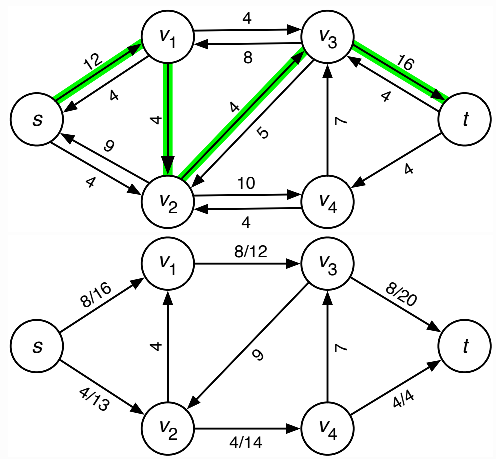


Algoritmo Ford-Fulkerson

Exemplo

G_f

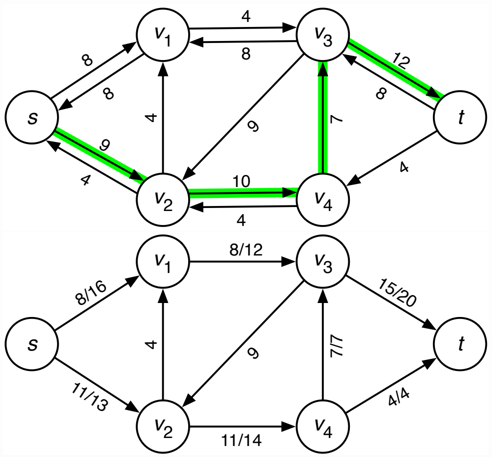
G



Exemplo

$\mathbf{G}_f$

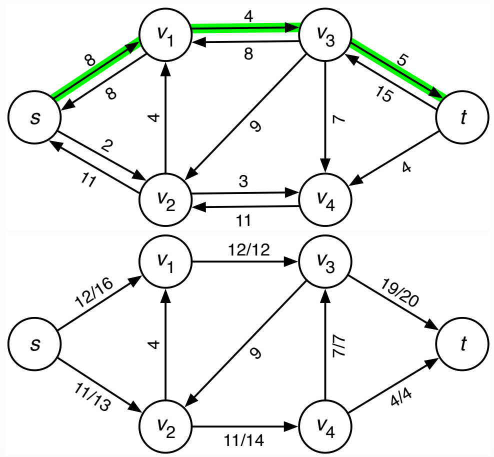
G



Exemplo

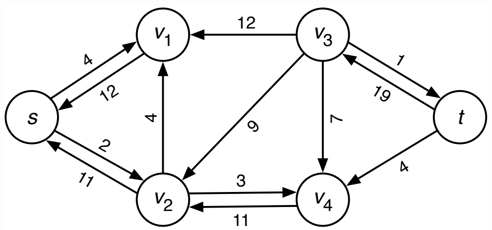
$\mathbf{G}_f$

G



Exemplo

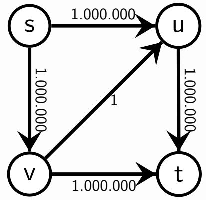
$\mathbf{G}_f$



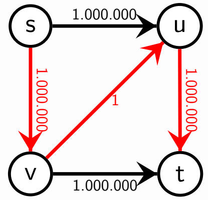
Não existem mais caminhos de aumento!

Análise Algoritmo Básico

- Número de aumentos de fluxo pode ser elevado
- Ex: Fluxo máximo $|f^*| = 2.000.000$
- No pior caso: número de caminhos de aumento é 2.000.000



Rede de fluxo



Caminho de aumento p com $c_f(p) = 1$

Algoritmo Ford-Fulkerson

Análise Algoritmo Básico

- Número de caminhos de aumento limitado por valor máximo do fluxo $|f^*|$
- Complexidade: $O(E\ |f^*|)$
- Por exemplo: DFS para encontrar caminho de aumento

Q: Será possível melhorar a complexidade do algoritmo para $|f^*|$ grandes?

Algoritmo Edmonds-Karp

Algoritmo Edmonds-Karp

- Implementação do método de Ford-Fulkerson
- Escolher caminho de aumento mais curto no número de arcos
- Utilizar BFS em G_f para identificar caminho mais curto
  (pesos unitários)

Algoritmo Edmonds-Karp

Análise

Se o algoritmo Edmonds-Karp for executado numa rede de fluxo $G = (V, E)$ com origem s e destino t, então para todos os vértices $v \in V - \{s, t\}$, na rede residual G_f, a distância do caminho mais curto $\delta_f(s, v)$ cresce monotonamente com cada aumento de fluxo.

Prova

Assumir que para $v \in V - \{s, t\}$ existe um aumento de fluxo que origina a diminuição da distância do caminho mais curto de s para v e provar por contradição. Considerar que:

- $\delta_f(s, v)$: distância mais curta de s para v na rede residual G_f
- $\delta_{f'}(s, v)$: distância mais curta de s para v na rede residual $G_{f'}$
- Sequência de eventos considerada:

$$f \rightarrow G_f \rightarrow BFS \rightarrow p \rightarrow f' \rightarrow G_{f'} \rightarrow BFS \rightarrow p'$$

Algoritmo Edmonds-Karp

Análise (cont.)

$\delta_f(s, v)$ cresce monotonamente com cada aumento de fluxo

Prova (cont.)

- Considere-se o primeiro $v \in V$ tal que, após aumento de fluxo (de f para f'), a distância do caminho mais curto diminui, $\delta_{f'}(s, v) < \delta_f(s, v)$
- Seja $p = \langle s, \ldots, u, v\rangle$ o caminho mais curto de s para v em $G_{f'}$
  - $\delta_{f'}(s, u) = \delta_{f'}(s, v) - 1$
  - $\delta_{f'}(s, u) \geq \delta_f(s, u)$ (u não falha, porque v é o primeiro que falha)
- $(u, v) \in E_f \Rightarrow \delta_f(s, v) \leq \delta_f(s, u) + 1 \leq \delta_{f'}(s, u) + 1 = \delta_{f'}(s, v)$
  - Contradiz pressuposto $\delta_{f'}(s, v) < \delta_f(s, v)$
  - Logo, concluimos que $(u, v) \notin E_f$

Algoritmo Edmonds-Karp

Prova (cont.)

$\delta_f(s, v)$ cresce de forma monótona com cada aumento de fluxo

- Como podemos ter $(u, v) \notin E_f$ e $(u, v) \in E_{f'}$?
  - O aumento de fluxo deve ter aumentado o fluxo de v para u
- Aumento sempre pelo caminho mais curto, então o caminho mais curto entre s e u em G_f tem como último arco (v, u), logo

$$\delta_f(s, v) = \delta_f(s, u) - 1 \leq \delta_{f'}(s, u) - 1 = \delta_{f'}(s, v) - 2$$

- Contradiz o pressuposto $\delta_{f'}(s, v) < \delta_f(s, v)$!

Algoritmo Edmonds-Karp

Análise

Número de aumentos de fluxo do algoritmo Edmonds-Karp é $O(V\,E)$

Prova

- Arco (u, v) na rede residual G_f é crítico se capacidade residual do caminho de aumento p é igual à capacidade residual do arco
  - Arco crítico desaparece após aumento de fluxo
- Quantas vezes pode arco (u, v) ser arco crítico?
  - Como caminhos de aumento são caminhos mais curtos, $\delta_f(s, v) = \delta_f(s, u) + 1$
  - (u, v) só volta à rede residual após arco (v, u) aparecer em caminho de aumento (com fluxo f')

Como	$\delta_{f'}(s, u) = \delta_{f'}(s, v) + 1$
Dado que	$\delta_f(s, v) \leq \delta_{f'}(s, v)$ (resultado anterior)
Obtém-se	$\delta_{f'}(s, u) = \delta_{f'}(s, v) + 1 \geq \delta_f(s, v) + 1 = \delta_f(s, u) + 2$

Algoritmo Edmonds-Karp

Análise

Número de aumentos de fluxo do algoritmo Edmonds-Karp é $O(V\,E)$

Prova (cont.)

- Distância de s a u aumenta pelo menos de 2 unidades entre cada par de vezes que (u, v) é crítico
  - No limite, distância de s a u é não superior a $|V| - 2$
  - Pelo que arco (u, v) pode ser crítico $O(V)$ vezes
  - Existem $O(E)$ pares de vértices
  - Na execução do algoritmo de Edmonds-Karp o número total de vezes que arcos podem ser críticos é $O(V\,E)$
  - Como cada caminho de aumento tem um arco crítico, então existem $O(V\,E)$ caminhos de aumento

Algoritmo Edmonds-Karp

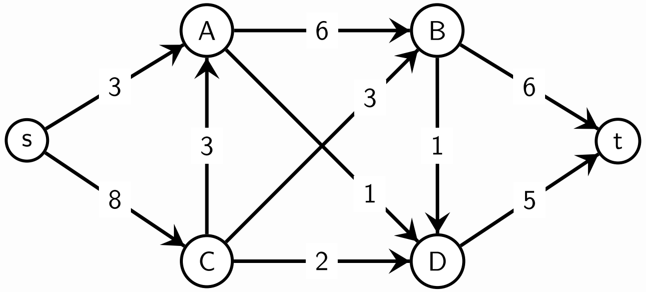
Complexidade

A complexidade do algoritmo Edmonds-Karp é $O(V\,E^2)$

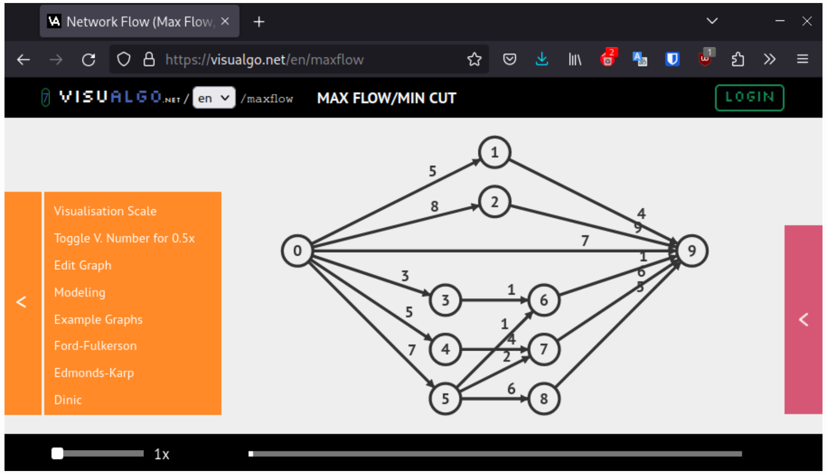
- Complexidade de BFS é $O(V + E) = O(E)$
  - Grafo é ligado: $|E| \geq |V| - 1$
- BFS realizada em cada aumento de fluxo
- Número de aumento de fluxo é $O(V\,E)$

Algoritmo Edmonds-Karp

Exercício (quadro/casa)



Indique um corte mínimo da rede, o valor do fluxo máximo, o número de caminhos de aumento, e o fluxo de cada arco após a aplicação do algoritmo. **Nota:** Na selecção do caminho de aumento, em caso de empate (caminhos de aumento com o mesmo comprimento), escolha o menor caminho de aumento por ordem lexicográfica.



https://visualgo.net/en/maxflow

Questões?

Dúvidas?