CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL III

8. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

1 Introdução. Equações Lineares de 1ª Ordem

Nestas equações aparecem duas ou mais variáveis independentes, e portanto as derivadas das funções em causa podem ser parciais. Tal como para as equações ordinárias, a maior ordem que apareça nas derivadas parciais determina a ordem da equação diferencial parcial.

Começamos pelas equações de primeira ordem, onde aparecem portanto apenas primeiras derivadas parciais das funções. Para o caso em que haja duas variáveis independentes x e y, uma tal equação (na variável dependente u) é *linear* se for da forma

$$a(x,y)\,\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\,\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)\,u = f(x,y)$$

(e será ainda *homogénea* se $f(x,y) = 0$).

As equações lineares são um caso particular das *quase-lineares*, que são as da forma

$$a(x,y,u)\,\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y,u)\,\frac{\partial u}{\partial y} = c(x,y,u).$$

Todas estas equações podem ser resolvidas através do *Método das Curvas Características*, que iremos abordar sobretudo no caso das equações lineares. Em termos gerais, e quando for aplicável, este método implica obter uma mudança de variáveis $(x,y) \rightsquigarrow (s,t)$ que torne a equação diferencial parcial numa equação diferencial ordinária de primeira ordem, que em alguns casos poderá ser resolvida através dos métodos vistos anteriormente para esse tipo de equações. A mudança de variáveis necessária pode nem sempre ser possível de obter, e a solução para a equação original pode também acabar por não estar definida em todo o plano (x,y).

1.1 Equações Lineares Homogéneas de 1ª Ordem

Num primeiro exemplo ilustrativo, consideramos uma equação linear homogénea de coeficientes constantes, com $c = 0$. Usaremos a notação indicial para as derivadas parciais, ou seja, u_x denota $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ e u_y denota $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Exemplo:

$u_x + 2\,u_y = 0$

Suponhamos que procuramos uma curva no plano, dada por uma parametrização $g : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ com $g(t) = (x(t), y(t))$, de modo a que

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = 2 \end{cases}$$

Uma curva que satisfaça este sistema tem, em cada ponto (x, y), um vector tangente cujas componentes são dadas pelos coeficientes da equação original. Ao longo de uma curva dessas, temos portanto que

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Ou seja, u é constante em cada curva assim obtida.

Para este exemplo, obtemos

$$\begin{cases} x(t) = t + c_1 \\ \\ y(t) = 2t + c_2 \end{cases}$$

para quaisquer valores de c_1 e c_2 em $\mathbb{R}$.

Em vez de usarmos parametrizações, podemos tentar escrever estas curvas através de equações que explicitem x ou y em termos da outra variável.

Quando isso for possível, teremos por exemplo que $y = y(x)$, ou seja que $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$, donde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = 2.$$

Portanto, para este exemplo, as curvas em questão são as rectas $y(x) = 2x + c$, com $c \in \mathbb{R}$. Estas são as chamadas *curvas características* da equação, que constituem uma família paramétrica (dependente do parâmetro c).

As equações como as deste exemplo podem vir acompanhadas por condições de fronteira adicionais, formando o que se chama um *problema de Cauchy*. Por exemplo, suponhamos que era dada a condição $u(x, 0) = x$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Os pontos no plano onde estão a ser dados os valores de u formam uma curva, que neste caso é o eixo dos x, que podemos parametrizar como $s \leadsto (s, 0)$. Consideremos então que x, y e u dependem de duas variáveis, t e s, de tal modo que a curva $s \leadsto (s, 0)$ corresponde aos valores iniciais (para $t = 0$) de todas as curvas características obtidas.

Ou seja, teremos $x = x(s, t)$ e $y = y(s, t)$, com $x(s, 0) = s$ e $y(s, 0) = 0$. Ao mesmo tempo, $u = u(s, t)$, com $u(s, 0) = u(x(s, 0), y(s, 0)) = u(s, 0) = s$.

A equação original ficou transformada em $\frac{du}{dt} = 0$ ou, mais exactamente, $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, cuja solução é $u(s, t) = c(s)$. A forma desta solução confirma que u é constante em cada curva característica, pois a família dessas curvas é parametrizada por s. Usando a condição dada, temos $s = u(s, 0) = c(s)$, e portanto $u(s, t) = s$.

Para obtermos a solução final $u(x,y)$, será preciso obter a transformação inversa $(s,t) \leadsto (x,y)$, que nem sempre existe em todo o plano. Para isso, usamos o sistema obtido a partir das condições para as curvas características, considerando agora também a dependência em ordem a s.

$$\begin{cases} x(s,t) = t + c_1(s) \\ \\ y(s,t) = 2t + c_2(s) \end{cases}$$

Como $x(s,0) = s$ e $y(s,0) = 0$, temos por fim $x(s,t) = t + s$ e $y(s,t) = 2t$, donde $t(x,y) = y/2$ e $s(x,y) = x - y/2$, e a solução final da equação original é $u(x,y) = x - y/2$.

Exemplo:

Para a mesma equação, se a condição dada fosse $u(0,y) = y$ para qualquer $y \in \mathbb{R}$, teríamos $x(s,0) = 0$, $y(s,0) = s$ e $u(s,0) = s$. O sistema anterior daria agora $x(s,t) = t$ e $y(s,t) = 2t + s$, donde $t(x,y) = x$ e $s(x,y) = y - 2x$. Como a equação é a mesma que no exemplo anterior, temos $u(s,t) = s$, e portanto com a nova condição obtemos $u(x,y) = y - 2x$.

Exemplo:

Ainda para a mesma equação, consideremos agora que a condição dada era $u(s,s) = s$ para qualquer $s \in \mathbb{R}$. Teríamos $x(s,0) = s$, $y(s,0) = s$ e $u(s,0) = s$. O sistema anterior daria agora $x(s,t) = t + s$ e $y(s,t) = 2t + s$, donde $t(x,y) = y - x$ e $s(x,y) = 2x - y$, e portanto $u(x,y) = 2x - y$.

Os exemplos anteriores mostram que a condição de fronteira do problema de Cauchy pode ser dada em qualquer curva, que parametrizamos com a variável s. No entanto, nem sempre podemos garantir solução do problema, mesmo em subconjuntos de todo o plano (x,y).

Exemplo:

Para a equação dos exemplos anteriores, se a condição for dada na parábola $y = x^2$, parametrizada por $g(s) = (s, s^2)$ com $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, temos que para cada $c > -1$ a curva característica $y = 2x + c$ é intersectada duas vezes pela parábola. Ou seja, uma condição $u(s,s^2) = f(s)$ só vai tornar possível o problema de Cauchy se f tiver o mesmo valor nesses dois pontos de intersecção com a parábola, porque u tem de ser constante ao longo de cada curva característica.

Para resolver uma equação linear homogénea geral

$$a(x,y)\,\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\,\frac{\partial u}{\partial y} = -c(x,y)\,u,$$

começamos por procurar as curvas características, resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a(x,y) \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = b(x,y) \end{cases}$$

e, substituindo uma condição de fronteira adequada, obtemos $x(s,t)$ e $y(s,t)$. A equação em u fica então

$$\frac{du}{dt} = -c(x(s,t), y(s,t))\, u,$$

que é uma equação diferencial ordinária linear de solução directa. Obtemos $u(s,t)$, que pode ser transformada em $u(x,y)$ se conseguirmos inverter a transformação $(s,t) \rightarrowtail (x,y)$.

Para que este processo de resolução possa ter sucesso, primeiro é preciso conseguir obter as curvas características. Como o sistema em questão não é em geral linear, isso não é sempre garantido. Para além disso, a equação para u, mesmo linear, pode não ter uma solução em termos de funções elementares, e a transformação $(s,t) \rightarrowtail (x,y)$ pode não ter inversa numa região que contenha a curva onde é dada a condição de fronteira do problema.

<u>Exemplo:</u>

$$\begin{cases} x\, u_x - y\, u_y = u \\ u(s,s) = s^3, \text{ para } s \in \mathbb{R} \end{cases}$$

As curvas características vêm do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = -y, \end{cases}$$

que implica $x(t) = c_1\, \mathrm{e}^t$ e $y(t) = c_2\, \mathrm{e}^{-t}$. Como $x(s,0) = s$, $y(s,0) = s$ e $u(s,0) = s^3$, temos também $x(s,t) = s\,\mathrm{e}^t$ e $y(s,t) = s\,\mathrm{e}^{-t}$. Note-se que as curvas características poderiam também ser obtidas através de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{y}{x},$$

uma equação a resolver apenas para $x > 0$ ou para $x < 0$.

A equação original fica $\dfrac{du}{dt} = u$, que tem como soluções $u(t) = c\,\mathrm{e}^t$. Acrescentando a dependência em relação a s, obtemos $u(s,t) = c(s)\,\mathrm{e}^t$ que, com a condição $u(s,0) = s^3$, fica $u(s,t) = s^3\,\mathrm{e}^t$. A partir do que foi obtido para $x(s,t)$ e $y(s,t)$, vemos que a solução final é $u(x,y) = x^2 y$. Não precisamos aqui de obter portanto uma expressão explícita para a transformação inversa em questão, que não irá neste caso existir com domínio em todo o plano (x, y).

2 Equações Lineares de 2ª Ordem: Introdução

Os vários exemplos de equações com derivadas parciais de 2ª ordem que iremos ver podem ser deduzidos a partir do teorema de Gauss, quando aplicado a situações físicas específicas. Estará sempre subentendido que as regiões ou superfícies que usaremos, e as funções nelas definidas, terão sempre a regularidade suficiente para que os teoremas possam ser usados.

2.1 Equações de Continuidade e do Calor

As primeiras equações que consideraremos são consequência de leis de conservação de quantidades físicas descritas por campos escalares ou vectoriais que reflictam densidades escalares ou de fluxo, como por exemplo massa ou energia de calor.

Seja então $\varphi(x, y, z, t)$ um campo escalar que representa a densidade de uma certa quantidade física Q e $\vec{F}$ a densidade de fluxo de Q (taxa de fluxo de Q por unidade de área.) A quantidade total de Q numa certa região regular V (num instante t) é dada pelo integral

$$\iiint_V \varphi(x, y, z, t)\ \mathrm{dx\,dy\,dz}$$

e o fluxo de Q através da fronteira de V no mesmo instante é

$$\iint_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n}\ dS,$$

onde $\vec{n}$ é a normal unitária exterior à superfície ∂V.

Uma lei de conservação para a quantidade Q tem de dizer que a variação do seu total em todo o volume V é simétrica do fluxo ao longo da fronteira de ∂V. Por exemplo, se Q representar a temperatura, a variação do seu total em todo o volume V é dada pelo calor que abandona o volume através da sua fronteira. Ou seja,

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \varphi(x, y, z, t)\ \mathrm{dx\,dy\,dz} = -\iint_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n}\ dS.$$

Como V é mantido constante, e pelo teorema de Gauss, obtemos

$$\iiint_V \frac{\partial \varphi}{\partial t}\ \mathrm{dx\,dy\,dz} = -\iiint_V \operatorname{div} \vec{F}\ \mathrm{dx\,dy\,dz}.$$

Sendo V um volume arbitrário (e as funções integrandas contínuas), obtemos então

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{F}.$$

Aplicaremos esta equação a dois exemplos distintos. No primeiro, φ será dada pela densidade de massa ρ de um fluido, e $\vec{F} = \rho \vec{v}$ será a sua densidade de fluxo, onde $\vec{v}$ é a velocidade de fluxo . Obtemos a **equação de continuidade** do fluido:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0.}$$

Para o segundo exemplo, definimos $u(x, y, z, t)$ como a temperatura num certo instante em cada ponto de um meio condutor de calor. O campo escalar φ representa a densidade de energia de calor, $\varphi = c\rho u$, onde c é o calor específico do material e ρ é novamente a densidade. O campo vectorial $\vec{F}$ é a densidade de fluxo de calor, dado por $\vec{F} = -k\,\nabla u$, onde k é o coeficiente de conductividade térmica. A lei de conservação fica então

$$\frac{\partial(c\rho u)}{\partial t} = \operatorname{div}(k\,\nabla u).$$

Sabemos que $\operatorname{div}(\nabla u) = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, o Laplaciano de u. Considerando que c, ρ e k são constantes, e definindo o coeficiente de difusão térmica como $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, obtemos a **equação do calor**:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).}$$

2.2 Equação das Ondas

Consoante a dimensão considerada, a equação das ondas irá modelar o movimento vibratório de uma corda (em dimensão 1), de uma membrana (em dimensão 2) ou de um sólido elástico (em dimensão 3). Seja por exemplo V uma subregião regular de $\mathbb{R}^3$, na fronteira da qual se aplica uma força $\vec{F}$. Consideramos que $u(x, y, z, t)$ representa o deslocamento de cada ponto de V no instante t segundo uma certa direcção. A aceleração imposta ao volume V é dada por

$$\frac{d^2}{dt^2}\iiint_V u(x, y, z, t)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} = \iiint_V \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz}$$

e a força total aplicada à sua fronteira é

$$\iint_{\partial V} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS,$$

onde $\vec{n}$ é a normal unitária exterior à superfície ∂V.

Pela segunda lei de Newton, e considerando que a massa total de V é 1, os dois integrais devem ser iguais, e podemos usar o Teorema de Gauss para obter

$$\iiint_V \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} = \iint_{\partial V} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz}$$

Para corpos elásticos, $\vec{F}$ é função de ∇u o que, numa aproximação linear, dá $\vec{F}(u) = a\,\nabla u$ para alguma constante a. Usando o Laplaciano de u, obtemos:

$$\iiint_V \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz} = \iiint_V a\,\Delta u\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dz}.$$

Sendo V um volume arbitrário (e as funções integrandas contínuas), obtemos então a **equação das ondas**:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Big).}$$

2.3 Equações de Laplace e de Poisson

Consideramos uma quantidade $\varphi(x,y,z)$ que sofra um processo de difusão, como por exemplo a concentração de uma substância química ou a temperatura num meio condutor de calor, e o fluxo $\vec{F}$ correspondente a essa quantidade, que é a quantidade que atravessa uma unidade de área por unidade de tempo. No caso da temperatura u, como foi visto para a equação do calor, o fluxo é dado por $\vec{F} = -k\nabla u$, onde k é o coeficiente de conductividade térmica. No caso de uma substância química, o fluxo é dado por uma expressão semelhante, $\vec{F} = -k\nabla\varphi$, onde k é a *difusividade*. Procedendo como para a equação do calor, obtemos

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = k\,\Delta\varphi.$$

Se estivermos interessados em *soluções estacionárias*, que são as independentes do tempo, então $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$, e obtemos a **equação de Laplace**, $\Delta\varphi = 0$, ou:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0}$$

Quando houver fontes $S(x,y,z)$ para a substância química (por exemplo, se esta for gerada por uma reacção), ou para o calor (por exemplo, se estivermos na presença de uma reacção exotérmica), a difusão do estado estacionário é dada pela **equação de Poisson**, $\Delta\varphi = -\dfrac{S(x,y,z)}{k}$, ou:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{S(x,y,z)}{k}}$$

3 Equação do Calor

Vamos resolver a equação do calor apenas para o caso unidimensional, ou seja, quando só haja uma coordenada espacial. Consideramos uma barra de metal com um comprimento l (e espessura desprezável), e tomamos para x a coordenada que indica os pontos sobre a barra.

Seja $u(x,t)$ uma função que indica a temperatura no ponto x e no instante t.

A transmissão de calor na barra satisfaz a equação

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

α^2 é o *coeficiente de difusão térmica*, uma constante para o material em questão.

As condições iniciais que podem ser acrescentadas a este problema chamam-se agora *condições na fronteira*. Um problema típico fica da forma

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad \text{para } t > 0 \\ u(x,0) = f(x), \quad \text{para } 0 < x < l \end{cases}$$

A primeira condição a seguir à equação chama-se *condição de Dirichlet*. Significa que os limites da barra são mantidos a uma temperatura zero, e por isso que estão isolados do exterior.

A segunda condição indica que a distribuição inicial de temperaturas (ou seja, quando $t = 0$) é dada pela função f.

Para resolver o problema, usamos o *método de separação de variáveis*:

Procuramos soluções da forma $u(x,t) = X(x)T(t)$. Note-se que não assumimos que só haja soluções que sejam desta forma.

Obtemos:

$XT' = \alpha^2 X''T$

Como queremos soluções não nulas, devemos ter $X \neq 0$ e $T \neq 0$.

Donde:

$$\frac{T'}{\alpha^2 T} = \frac{X''}{X}.$$

Como cada um dos termos anteriores depende apenas de uma variável, a igualdade implica que devem ser ambos constantes. Ou seja,

$\dfrac{T'}{\alpha^2 T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda$ para certos valores de $\lambda \in \mathbb{R}$

(O sinal de menos antes de λ serve para simplificar a apresentação de certas expressões que surgirão mais tarde.)

Vamos procurar os λ possíveis e, para esses, as soluções da equação original.

Temos:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ T' + \alpha^2 \lambda T = 0 \end{cases}$$

A segunda equação tem como solução $T(t) = ce^{-\alpha^2 \lambda t}$

Para resolver a primeira, usamos o polinómio característico $r^2 + \lambda = 0$.

Caso 1:

Se $\lambda < 0$, obtemos $r = \pm\sqrt{-\lambda}$ (duas raízes reais distintas) e portanto

$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

A condição $u(0,t) = u(l,t) = 0$ (para qualquer $t > 0$) dá, em qualquer caso,

$X(0)T(t) = X(l)T(t) = 0$ para qualquer $t > 0$.

Isto implica $X(0) = X(l) = 0$.

Donde:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}l} & e^{-\sqrt{-\lambda}l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

O determinante da matriz dos coeficientes acima é $e^{-\sqrt{-\lambda}l} - e^{\sqrt{-\lambda}l}$, que é um valor não nulo (porque $\lambda \neq 0$ neste caso.)

Assim,

$c_1 = c_2 = 0 \;\Rightarrow\; X(x) = 0.$

Donde, para $\lambda < 0$ só obtemos soluções nulas.

<u>Caso 2</u>:

Se $\lambda = 0$, o polinómio característico tem como raiz $r = 0$ (dupla). Portanto, a solução para X é

$X(x) = c_1 + c_2 x \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 + c_2 l = 0 \end{cases}$

Obtemos $c_1 = c_2 = 0$ e $X(x) = 0$.

Donde, para $\lambda = 0$ também só obtemos soluções nulas.

<u>Caso 3</u>:

Se $\lambda > 0$, vem $r = \pm i\sqrt{\lambda}$

$\Rightarrow \; X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda} x)$

Donde:

$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 \cos(\sqrt{\lambda} l) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda} l) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \; c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda} l) = 0$

Ou seja, há soluções não nulas para valores de λ tais que $\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda} l) = 0$.

$\Rightarrow \; \sqrt{\lambda} l = n\pi, \;\; n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \; \lambda_n = \dfrac{n^2 \pi^2}{l^2} \quad (n \in \mathbb{N}).$

Para cada λ_n temos $X_n(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n} x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi x}{l}\right)$

e resolvemos a equação em t, obtendo:

$T_n(t) = e^{-\alpha^2 \lambda_n t} = e^{-\dfrac{\alpha^2 n^2 \pi^2 t}{l^2}}$

e também

$u_n(x,t) = X_n(x)\, T_n(t) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi x}{l}\right) e^{-\dfrac{\alpha^2 n^2 \pi^2 t}{l^2}}$

A solução geral da equação é dada pela combinação linear de todos os u_n:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) e^{-\dfrac{\alpha^2 n^2 \pi^2 t}{l^2}}$$

Para determinar os c_n, usamos a última condição do problema inicial:

$u(x,0) = f(x)$ significa, para a solução geral obtida,

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = f(x)$$

A determinação das constantes c_n vai portanto depender da forma da função f, que define a distribuição inicial de temperaturas ao longo da barra de metal.

Exemplo:

$$f(x) = \operatorname{sen}\frac{\pi x}{l} - 2\operatorname{sen}\frac{3\pi x}{l}$$

Da solução geral anterior, vem

$c_1 = 1$, $c_3 = -2$ e $c_n = 0$ para os restantes $n \in \mathbb{N}$.

Igualando coeficientes, obtemos a solução final:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= c_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{l}\right) e^{-\dfrac{\alpha^2 \pi^2 t}{l^2}} + c_3 \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{l}\right) e^{-\dfrac{\alpha^2 \pi^2 9 t}{l^2}} \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{l}\right) e^{-\dfrac{\alpha^2 \pi^2 t}{l^2}} - 2\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{l}\right) e^{-\dfrac{\alpha^2 \pi^2 9 t}{l^2}} \end{aligned}$$

Se $f(x)$ não for desde logo dada como uma série de senos, teremos de desenvolvê-la (em $[-l,l]$) como uma *série de Fourier* de senos.

A primeira condição de fronteira na equação do calor pode também aparecer sob a forma

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0, \quad \text{para } t > 0.$$

Estas são chamadas *condições de Neumann*.

Obtemos:

$X'(0)T(t) = X'(l)T(t) = 0$ para qualquer $t > 0$

$\Rightarrow \; X'(0) = X'(l) = 0.$

$r^2 + \lambda = 0$

<u>Caso 1</u>:

Para $\lambda < 0$:

$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$

$X'(x) = c_1\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}x} - c_2\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}x}$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1\sqrt{-\lambda} - c_2\sqrt{-\lambda} = 0 \\ c_1\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}l} - c_2\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \; c_1 = c_2 = 0$$

<u>Caso 2</u>:

Para $\lambda = 0$:

$X(x) = c_0 + c_1 x$

$X'(x) = c_1$

Portanto:

$X'(0) = X'(l) = 0 \; \Rightarrow \; X_0(x) = c_0$

<u>Caso 3</u>:

Para $\lambda > 0$:

$X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x)$

$X'(x) = -c_1\sqrt{\lambda}\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x) + c_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x)$

$X'(0) = c_2\sqrt{\lambda} = 0 \; \Rightarrow \; c_2 = 0$

$X'(l) = -c_1\sqrt{\lambda}\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}l) = 0$

$\Rightarrow \; \sqrt{\lambda}l = n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$

$$\Rightarrow \ \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ obtemos então

$$X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

e

$$T_n(t) = e^{-\alpha^2\lambda_n t} = e^{-\dfrac{\alpha^2 n^2 \pi^2 t}{l^2}}$$

$$\Rightarrow \ u_n(x,t) = \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) e^{-\alpha^2\lambda_n t} = \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) e^{-\dfrac{\alpha^2 n^2 \pi^2 t}{l^2}}$$

$$\Rightarrow \ u(x,t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) e^{-\alpha^2\lambda_n t} = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) e^{-\dfrac{\alpha^2 n^2 \pi^2 t}{l^2}}$$

Se a última condição do problema apresentar $f(x)$ como uma soma de cosenos, podemos tal como anteriormente comparar coeficientes e obter o valor dos c_n, e depois a solução final (já sem constantes.)

Se for dada uma função $f(x)$ genérica, temos de a escrever como uma série de cosenos (obtendo a *série de Fourier de cosenos* de f) antes de compararmos coeficientes.

4 Equação das Ondas

Tal como para a equação do calor, só resolveremos a equação das ondas no caso unidimensional. Um problema típico será o seguinte.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{para } 0 < x < l \ \text{ e } t > 0 \\ \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad \text{para } t > 0 \\ u(x,0) = f(x), \quad \text{para } 0 < x < l \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \quad \text{para } 0 < x < l \end{cases}$$

Para resolver o problema, usamos novamente o método de separação de variáveis, procurando soluções da forma $u(x,t) = X(x)T(t)$. Obtemos:

$$XT'' = c^2 X'' T$$

Como queremos soluções não nulas, devemos ter $X \neq 0$ e $T \neq 0$.

Donde:

$\dfrac{T''}{c^2 T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda$ para certos valores de $\lambda \in \mathbb{R}$.

Obtemos o sistema:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ T'' = -\lambda c^2 T \end{cases}$$

A primeira equação pode ser resolvida como para a equação do calor: usamos o polinómio característico $r^2 + \lambda = 0$, e só há soluções não nulas para $\lambda > 0$.

Obtemos $X(x) = c_1 cos(\sqrt{\lambda}\,x) + c_2 sen(\sqrt{\lambda}\,x)$.

A condição $u(0,t) = u(l,t) = 0$ (para qualquer $t > 0$) dá

$X(0)T(t) = X(l)T(t) = 0$ para qualquer $t > 0$.

Isto implica $X(0) = X(l) = 0$.

Donde:

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 \cos(\sqrt{\lambda} l) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda} l) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda} l) = 0$$

Ou seja, há soluções não nulas para valores de λ tais que $\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda} l) = 0$.

$\Rightarrow \sqrt{\lambda} l = n\pi, \;\; n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \lambda_n = \dfrac{n^2\pi^2}{l^2} \;\; (n \in \mathbb{N})$.

Para cada λ_n temos $X_n(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n} x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi x}{l}\right)$

Para cada λ_n, a equação em t fica:

$T'' + \dfrac{n^2\pi^2c^2}{l^2} T = 0$,

que tem como solução

$T_n(t) = a_n \cos\left(\dfrac{n\pi c}{l} t\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi c}{l} t\right)$.

A solução geral da equação é então

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{l} t\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{l} t\right)\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Usamos agora as condições iniciais para descobrir o valor dos a_n e dos b_n.

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = f(x),$$

logo

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \mathrm{dx}.$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[-a_n \frac{n\pi c}{l} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi c}{l} t\right) + b_n \frac{n\pi c}{l} \cos\left(\frac{n\pi c}{l} t\right)\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

o que implica

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \frac{n\pi c}{l} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = g(x)$$

logo

$$b_n = \frac{l}{n\pi c}\,\frac{2}{l}\int_0^l g(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\mathrm{dx} = \frac{2}{n\pi c}\int_0^l g(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\mathrm{dx}.$$

Substituindo as expressões para a_n e b_n na solução geral, obtemos a solução final do problema.

4.1 Soluções Estacionárias

Para um problema com uma equação com derivadas parciais como os anteriores, uma *solução estacionária* é uma solução que não depende de t (e portanto mantém-se invariante ao longo do tempo.)

Para as descobrirmos, podemos ignorar directamente nas equações os termos que descrevem derivadas em relação ao tempo.

Para a equação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

obtemos, sem a dependência em ordem ao tempo,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

que tem como soluções

$u(x,t) = c_1\,x + c_2$ (para todos os c_1 e c_2 reais.)

Para a equação das ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

obtemos, sem a dependência em ordem ao tempo, a mesma equação que para a do calor:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

que tem portanto as mesmas soluções

$u(x,t) = c_1\,x + c_2$ (para todos os c_1 e c_2 reais.)

5 Equação de Laplace

Para as equações de Laplace e de Poisson que resolveremos, vamos considerar apenas o caso bidimensional, como no problema seguinte.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \text{para } 0 < x < a \ \text{ e } 0 < y < b \\ \\ u(x,0) = u(x,b) = 0, \quad \text{para } 0 < x < a \\ u(0,y) = 0, \quad \text{para } 0 < y < b \\ u(a,y) = f(y), \quad \text{para } 0 < y < b \end{cases}$$

Para resolver o problema, usamos novamente o método de separação de variáveis, procurando agora soluções da forma $u(x,t) = X(x)Y(y)$. Note-se que a equação de Laplace não descreve fenómenos que dependam do tempo.

Obtemos $X''Y + XY'' = 0$ e, procurando soluções não nulas,

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0$$

o que implica, como anteriormente,

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = -\lambda \qquad \text{para certos valores de } \lambda.$$

Ficamos com o sistema

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ Y'' + \lambda Y = 0 \end{cases}$$

Pensando primeiro na equação em Y, e como das condições iniciais deduzimos que $Y(0) = Y(b) = 0$, concluímos que esta parte do problema é semelhante ao que acontecia com a equação do calor.

Ou seja, só há soluções não nulas para

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{b^2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

que dão lugar às soluções

$$Y_n(y) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

Quanto à equação em X, para cada λ_n passamos a ter

$$X'' - \lambda_n X = 0,$$

que tem como solução geral

$$X_n(x) = a_n e^{\left(\frac{n\pi x}{b}\right)} + b_n e^{-\left(\frac{n\pi x}{b}\right)}$$

Juntando todas as soluções Y_n e X_n, obtemos então a solução geral da equação original:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n e^{\left(\frac{n\pi x}{b}\right)} + b_n e^{-\left(\frac{n\pi x}{b}\right)}\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

Podemos agora, como anteriormente, usar as condições iniciais para determinar os valores dos a_n e dos b_n:

$$u(0,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = 0 \text{ para qualquer } y \in]0,b[,$$

donde $a_n + b_n = 0$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

e portanto

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n e^{\left(\frac{n\pi x}{b}\right)} - a_n e^{-\left(\frac{n\pi x}{b}\right)}\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} 2\, a_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

Por outro lado,

$$u(a,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n e^{\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} + b_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = f(y)$$

para qualquer $y \in]0,b[$, donde

$$\frac{2}{b} \int_0^b f(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy = a_n e^{\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} + b_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} = 2\, a_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi a}{b}\right)$$

e a solução final fica

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{b} \frac{\int_0^b f(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy}{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

6 Problemas com Condições Não Homogéneas

A determinação de soluções estacionárias para as equações do calor e das ondas pode servir para resolver problemas com condições de fronteira não homogéneas.

Exemplo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \\ u(0,t) = 2, \quad \text{para } t > 0 \\ u(1,t) = 3, \quad \text{para } t > 0 \\ u(x,0) = x + \operatorname{sen}(\pi x), \quad \text{para } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Dizemos que este problema tem condições não homogéneas porque $u(0,t)$ e $u(1,t)$ são não nulas. Para o resolver, procuramos primeiro uma solução estacionária que satisfaça estas condições de fronteira.

Como foi visto anteriormente, as soluções estacionárias para a equação do calor são da forma $u(x,t) = c_1 x + c_2$, para quaisquer valores de c_1 e c_2 em $\mathbb{R}$. Usando as condições $u(0,t) = 2$ e $u(1,t) = 3$ para qualquer $t > 0$, obtemos $c_1 \cdot 0 + c_2 = 2$ e $c_1 \cdot 1 + c_2 = 3$, donde $u(x,t) = x + 2$.

Subtraindo esta solução estacionária ao problema inicial, obtemos um novo problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad \text{para } t > 0 \\ u(x,0) = \operatorname{sen}(\pi x) - 2, \quad \text{para } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Este é um problema com condições homogéneas, cuja solução geral foi obtida anteriormente:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \operatorname{sen}(n\pi x)\, e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t},$$

onde os coeficientes c_n são os da série de Fourier de senos de $\operatorname{sen}(\pi x) - 2$ no intervalo $[0,1]$, ou seja:

$$c_n = \int_0^1 -2 \operatorname{sen}(n\pi x)\, dx = \frac{2}{n\pi} \cos(n\pi x)\Big|_0^1 = \frac{2}{n\pi}\left[(-1)^n - 1\right] \quad \text{para } n > 1$$

e

$$c_1 = 1 + \int_0^1 -2 \operatorname{sen}(\pi x)\, dx = 1 + \frac{2}{\pi} \cos(\pi x)\Big|_0^1 = 1 - \frac{4}{\pi}$$

A solução deste problema homogéneo fica então

$$u(x,t) = \left(1 - \frac{4}{\pi}\right) \operatorname{sen}(\pi x)\, e^{-\alpha^2\pi^2 t} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{n\pi} \left[(-1)^n - 1\right] \operatorname{sen}(n\pi x)\, e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t}.$$

Somando a esta solução a solução estacionária que obtivémos, chegamos por fim à solução do problema não homogéneo original:

$$u(x,t) = x + 2 + \left(1 - \frac{4}{\pi}\right) \operatorname{sen}(\pi x)\, e^{-\alpha^2\pi^2 t} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{n\pi} \left[(-1)^n - 1\right] \operatorname{sen}(n\pi x)\, e^{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t}.$$

A equação de Laplace não possui soluções estacionárias, pois o tempo t não é uma variável independente para as situações físicas descritas por essa equação. Podemos contudo aplicar o mesmo princípio de sobreposição de soluções (válido para quaisquer equações lineares) para resolver problemas com condições não homogéneas também nestes casos.

Exemplo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \text{para } 0 < x < a \ \text{ e } 0 < y < b \\ \\ u(x,0) = f_1(x), \quad \text{para } 0 < x < a \\ u(x,b) = f_2(x), \quad \text{para } 0 < x < a \\ u(0,y) = g_1(y), \quad \text{para } 0 < y < b \\ u(a,y) = g_2(y), \quad \text{para } 0 < y < b \end{cases}$$

Separamos este problema em dois problemas, cada um deles com condições homogéneas em relação a uma das duas variáveis independentes:

$$(1) \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \text{para } 0 < x < a \ \text{ e } 0 < y < b \\ \\ u(x,0) = 0, \quad \text{para } 0 < x < a \\ u(x,b) = 0, \quad \text{para } 0 < x < a \\ u(0,y) = g_1(y), \quad \text{para } 0 < y < b \\ u(a,y) = g_2(y), \quad \text{para } 0 < y < b \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \text{para } 0 < x < a \ \text{ e } 0 < y < b \\ \\ u(x,0) = f_1(x), \quad \text{para } 0 < x < a \\ u(x,b) = f_2(x), \quad \text{para } 0 < x < a \\ u(0,y) = 0, \quad \text{para } 0 < y < b \\ u(a,y) = 0, \quad \text{para } 0 < y < b \end{cases}$$

A solução geral do problema (1) foi já obtida:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \mathrm{e}^{\left(\frac{n\pi x}{b}\right)} + b_n \mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi x}{b}\right)} \right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right),$$

onde os coeficientes a_n e b_n dependem dos do desenvolvimento em série de Fourier de senos das funções $g_1(y)$ e $g_2(y)$ no intervalo $[0,b]$.

O problema (2) vai ter uma solução semelhante, visto a equação de Laplace e as condiçoes apresentadas serem simétricas em x e y. Esta solução é

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[c_n \mathrm{e}^{\left(\frac{n\pi y}{a}\right)} + d_n \mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi y}{a}\right)}\right] \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right),$$

e os coeficientes c_n e d_n dependem dos do desenvolvimento em série de Fourier de senos das funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$ no intervalo $[0,a]$.

A solução para o problema não homogéneo original será então dada pelas soma das soluções obtidas para os problemas (1) e (2).

7 Equação de Poisson

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x,y), & \text{para } 0 < x < a \ \text{ e } 0 < y < b \\ \\ u(x,0) = f_1(x), & \text{para } 0 < x < a \\ u(x,b) = f_2(x), & \text{para } 0 < x < a \\ u(0,y) = g_1(y), & \text{para } 0 < y < b \\ u(a,y) = g_2(y), & \text{para } 0 < y < b \end{cases}$$

Para um problema com a equação de Poisson como este, podemos usar novamente o princípio de sobreposição de soluções, considerando os problemas

$$(1) \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & \text{para } 0 < x < a \ \text{ e } 0 < y < b \\ \\ u(x,0) = f_1(x), & \text{para } 0 < x < a \\ u(x,b) = f_2(x), & \text{para } 0 < x < a \\ u(0,y) = g_1(y), & \text{para } 0 < y < b \\ u(a,y) = g_2(y), & \text{para } 0 < y < b \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x,y), & \text{para } 0 < x < a \ \text{ e } 0 < y < b \\ \\ u(x,0) = 0, & \text{para } 0 < x < a \\ u(x,b) = 0, & \text{para } 0 < x < a \\ u(0,y) = 0, & \text{para } 0 < y < b \\ u(a,y) = 0, & \text{para } 0 < y < b \end{cases}$$

O problema (1) na forma geral apresentada é um problema para a equação de Laplace com condições não homogéneas, que foi tratado na secção anterior.

Para o problema (2), podemos tentar deduzir a forma de uma solução a partir do que fizémos para a equação de Laplace, quando tínhamos condições homogéneas apenas numa das variáveis independentes. Por exemplo, quando $Y(0) = Y(b) = 0$, obtivémos soluções não nulas $Y_n(y) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)$ para $n \in \mathbb{N}$. Com condições homogéneas em x, obteríamos $X_m(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{m\pi x}{a}\right)$ para $m \in \mathbb{N}$, e portanto faz sentido procurar uma solução da forma

$$u(x,y) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} c_{m,n} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

Substituindo esta solução na equação original (quando se possa derivar a série dupla termo a termo), obtemos

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} -c_{m,n} \left(\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = F(x,y).$$

Os coeficientes $c_{m,n}$ podem ser obtidos a partir do desenvolvimento em série de Fourier de $F(x,y)$ no rectângulo $[0,a] \times [0,b]$ (se a função $F(x,y)$ for suficientemente regular). Este tipo de desenvolvimentos generalizam os que foram anteriormente obtidos para funções de uma variável, mas não irão ser abordados neste texto. Em certos casos, por exemplo se F depender apenas de x ou de y, será suficiente usar séries de Fourier apenas numa variável, como as vistas anteriormente, para resolver a equação de Poisson.

Tal como na secção anterior, a solução para o problema com a equação de Poisson será então dada pelas soma das soluções obtidas para os problemas (1) e (2).