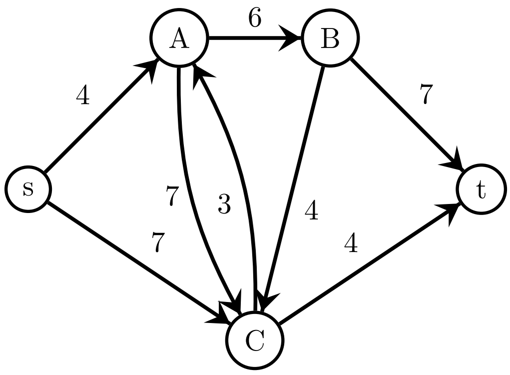
Aula Prática 11

ASA 2024/2025

Q1 (T1 08/09, III.1) Considere a rede de fluxo da figura onde s e t são respectivamente os vértices fonte e destino na rede.

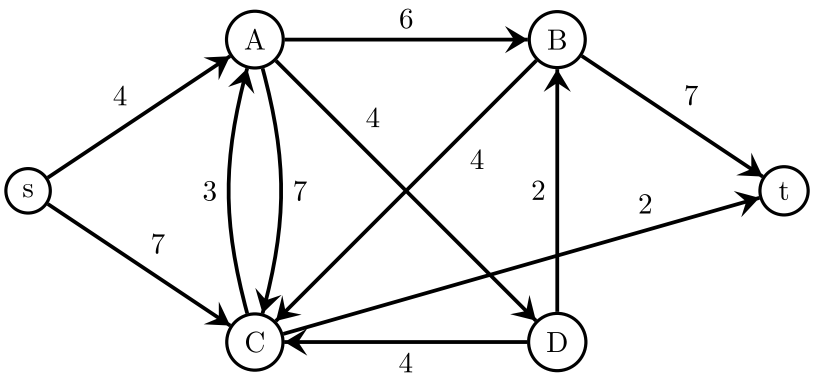


Aplique o algoritmo de EDMONDS-KARP ao grafo. Indique o valor das capacidades residuais para os seguintes pares de vértices após <u>dois</u> caminhos de aumento: (A, C), (B, A), (C, A), (C, s), (C, B) e (t, B).

Solução:
Após dois caminhos de aumento: $\langle s, C, t\rangle$, $\langle s, A, B, t\rangle$

	(A, C)	(B, A)	(C, A)	(C, s)	(C, B)	(t, B)
c_f	7	4	3	4	0	4

Q2 (R1 08/09 III.1 & III.2) Considere a rede de fluxo da figura onde s e t são respectivamente os vértices fonte e destino na rede.



1. Aplique o algoritmo de Edmonds-Karp ao grafo. Indique, por ordem, os caminhos de aumento descobertos.

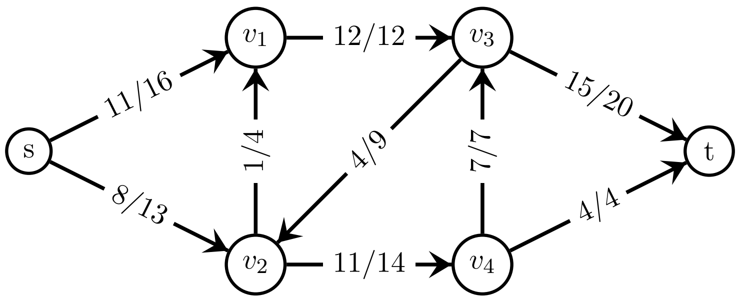
2. Quais são os cortes mínimos na rede de fluxo?

Solução:
Caminhos de aumento:

1°	2°	3°	4°
$\langle s, C, t\rangle$ (2)	$\langle s, A, B, t\rangle$ (4)	$\langle s, C, A, B, t\rangle$ (2)	$\langle s, C, A, D, B, t\rangle$ (1)

Cortes mínimos:
$\{s, C\}/\{A, B, D, t\}$
ou
$\{s, A, B, C, D\}/\{t\}$

Q3 (CLRS Ex. 26.2-2) No grafo seguinte, qual o valor do fluxo no corte $(s, v_2, v_4)/(v_1, v_3, t)$? Qual o valor da capacidade do corte?



Solução:

$$
\begin{aligned}
f(S,T) = &\quad f(s,v_1) + f(v_2,v_1) - f(v_3,v_2) + f(v_4,v_3) + f(v_4,t) \\
= &\quad 11 + 1 - 4 + 7 + 4 \\
= &\quad 19 \\
c(S,T) = &\quad c(s,v_1) + c(v_2,v_1) + c(v_4,v_3) + c(v_4,t) \\
= &\quad 16 + 4 + 7 + 4 \\
= &\quad 31
\end{aligned}
$$

Q4 (T1 11/12, II.3) Indique se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa.

1. No método de Ford-Fulkerson, para uma rede de fluxo com capacidades inteiras, um arco pode ser crítico no máximo $O(|f^*|)$ vezes.

2. Após a aplicação do método de Ford-Fulkerson é possível detectar um corte mínimo em tempo $O(V + E)$.

3. A complexidade do método de Ford-Fulkerson é $O(V^3)$.

4. Durante a execução do método de Ford-Fulkerson pode existir um vértice $u \in V \setminus \{s, t\}$ tal que $\sum_{v \in V} f(u, v) \neq 0$.

5. Após a execução do método de FORD-FULKERSON não pode existir um caminho na rede residual nem de s para t, nem de t para s.

6. Após a execução do método de FORD-FULKERSON, podem existir mais do que um corte mínimo.

Solução:

V, V, F, F, F, V

Q5 (CLRS Ex. 26.2-8) Suponha que redefinimos a rede de fluxo residual impedindo os arcos para s. Demonstre que o procedimento FORD-FULKERSON continua a calcular correctamente o fluxo máximo da rede.

Solução:

O FF itera enquanto existirem caminhos de aumento de $s \rightsquigarrow t$. Se não considerarmos arcos para s, qualquer caminho de aumento p não é alterado, dado que p simples, ou seja, p não tem ciclos e s não aparece repetido em p.

Logo, o FF continua a calcular correctamente o valor do fluxo máximo.

Q6 (R1 19/20 II.d) O Departamento de Informática da Universidade Técnica de Caracolândia decidiu implementar uma nova aplicação para determinar automaticamente a composição dos júris de dissertações de mestrado. No semestre em consideração existem n estudantes que pretendem defender as suas dissertações, $\{S_1, ..., S_n\}$, e m professores disponíveis para participar em júris, $\{P_1, ..., P_m\}$. O problema da constituição dos júris deve respeitar as seguintes restrições:

- Cada professor P_j, com $1 \leq j \leq m$, pode participar no máximo em l_j júris;
- Cada professor P_j só pode participar nos júris dos estudantes que fizeram teses na sua área de especialização. Denotamos o conjunto de professores especialistas na tese do aluno S_i por $\texttt{SP}(S_i)$.
- Cada júri deve ser constituído por três professores.

Admita que o problema tem solução, isto é, que, dadas as disponibilidades dos professores, é possível constituir o júri de todos os alunos. Pretende-se agora calcular uma atribuição de professores a júris.

1. Modele o problema da constituição de júris como um problema de fluxo máximo. A resposta deve incluir o procedimento utilizado para determinar a constituição dos júris a partir do fluxo calculado.

2. Indique a complexidade assimptótica, medida em função dos parâmetros do problema (número de alunos, n, e número de professores, m), do método de Ford-Fulkerson e do algoritmo de Edmonds-Karp.

Solução:

1. *Construção da rede de fluxo* $G = (V, E, w, s, t)$. Na construção da rede de fluxo consideramos um vértice por professor, um vértice por estudantes e e dois vértices adicionais s e t, respectivamente a fonte e o sumidouro. Formalmente:

- $V = \{S_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{P_j \mid 1 \leq i \leq m\} \cup \{s, t\}$
-

$$\begin{array}{ll} E = \{(s, P_j, l_j) \mid 1 \leq j \leq m\} & P_j \text{ só pode participar em } l_j \text{ defesas} \\ \quad \cup \{(P_j, S_i, 1) \mid P_j \in \texttt{SP}(S_i)\} & P_j \text{ pode participar no júri do estudante } S_i \\ \quad \cup \{(S_i, t, 3) \mid 1 \leq i \leq n\} & \text{3 membros por júri} \end{array}$$

Como sabemos que é possível formar todos os jurís, concluímos que o fluxo máximo é $3.n$. Uma vez calculado o fluxo máximo, f^*, o júri do aluno S_i é constituído pelos professores P_{j_1}, P_{j_2} e P_{j_3} tais que: $f^*(P_{j_1}, S_i) = 1$, $f^*(P_{j_2}, S_i) = 1$, e $f^*(P_{j_3}, S_i) = 1$.

2. *Complexidade.*

   - $|V| = n + m + 2 \in O(n + m)$
   - $|E| = m + m.n + n \in O(n.m)$
   - $|f^*| \leq 3n \in O(n)$
   - Ford-Fulkerson: $O(n^2.m)$
   - RF: $O((n + m)^3)$

   A melhor solução consiste em usar um algoritmo baseado no método de Ford Fulkerson.

Q7 (T1 20/21 II.d) Caracolândia tem n residentes $\{R_1, ..., R_n\}$, m clubes $\{C_1, ..., C_m\}$ e k partidos políticos $\{P_1, ..., P_k\}$, e o seu governo decidiu estabelecer uma comissão para financiamento de eventos lúdicos. A comissão deve ser constituída por um residente indicado por cada clube. Contudo, de modo a garantir o peso relativo dos vários partidos políticos, exige-se ainda que a comissão seja integrada por exactamente c_i membros de cada partido P_i. Cada residente pode pertencer a vários clubes mas apenas a um único partido político.

O governo de Caracolândia pretende agora determinar se é possível constituir uma comissão que satisfaça as restrições estabelecidas.

1. Modele o problema da constituição da comissão como um problema de fluxo máximo.

2. Admitindo que o número total de residentes n é muito superior ao número de partidos, número de clubes, e número total de elementos da comissão, indique a complexidade assimptótica, medida em função dos parâmetros do problema, do método de Ford-Fulkerson e do algoritmo de Edmonds-Karp.

Solução:

1. *Construção da rede de fluxo:* $G = (V, E, c, s, t)$. Na construção da rede de fluxo consideramos um vértice por residente, um vértice por partido político, um vértice por comissão e dois vértices adicionais s e t, respectivamente a fonte e o sumidouro. Formalmente:

   - $V = \{s, t\} \cup \{R_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{C_i \mid 1 \leq i \leq m\} \cup \{P_i \mid 1 \leq i \leq n\}$

- $$
\begin{aligned}
E = \ & \{(s, C_i, 1) \mid 1 \le i \le n\} && C_i \text{ pode nomear } \underline{\text{um}} \text{ representante} \\
& \cup \{(C_i, R_j, 1) \mid R_j \text{ é membro do clube } C_i\} \\
& \cup \{(R_i, P_j, 1) \mid R_i \text{ é membro do partido } P_j\} \\
& \cup \{(P_i, t, c_i) \mid 1 \le i \le k\} && P_i \text{ pode nomear } c_i \text{ representantes}
\end{aligned}
$$

2. *Complexidade:*

   - $|V| = n + m + k + 2 = O(n)$
   - $|E| \le n + n.m + 2k = O(n.m)$
   - $|f^*| \le \sum_{i=1}^{k} c_k \le n = O(m)$
   - Método de Ford-Fulkerson: $O(|f^*|.E) = O(n.n.m) = O(n.m^2)$
   - Edmonds Karp: $O(E^2.V) = O(n^2.m^2.n) = O(n^3.m^2)$