Aula Prática 4

ASA 2024/2025

Q1 (T2 08/09 II.2) Considere o problema de determinar a colocação óptima de parêntesis, que permite reduzir o número de operações na multiplicação de matrizes. Como sabe, o número de operações mínimo para efectuar a multiplicação $A_i \; A_{i+1} \; \ldots \; A_j$ é dado por:

$$m[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{if } \; i = j \\ \min\limits_{i \le k < j} \{m[i,k] + m[k+1,j] + p_{i-1}p_k p_j\} & \text{if } \; i < j \end{cases}$$

Considerando as matrizes A_1, A_2, A_3 e A_4 com as seguintes dimensões:

Matriz	Dimensão
A_1	2×5
A_2	5×3
A_3	3×1
A_4	1×2

Indique qual a colocação óptima de parêntesis para o produto $A_1 \, A_2 \, A_3 \, A_4$. Para o efeito deverá escrever a expressão do produto $A_1 \, A_2 \, A_3 \, A_4$, colocando os parêntesis na posição correcta. Adicionalmente, indique os valores de $m[1,2]$, $m[1,4]$, $m[1,3]$ e $m[2,4]$.

Solução:

Expressão	$m[1,2]$	$m[1,4]$	$m[1,3]$	$m[2,4]$
$(A \times (B \times C)) \times D$	30	29	25	25

Q2 (R2 08/09 II.2) Considere o problema da identificação da maior subsequência comum (LCS) entre duas sequências, S e T. Admita que, numa formulação do problema em termos de programação dinâmica, o comprimento da maior subsequência comum entre os prefixos $S_i = \langle s_1, s_2, \ldots, s_i \rangle$ e $T_j = \langle t_1, t_2, \ldots, t_j \rangle$ é definido por:

$$c[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{se } \; i = 0 \lor j = 0 \\ c[i-1, j-1] + 1 & \text{se } \; i,j > 0 \land s_i = t_j \\ \max(c[i-1,j], c[i,j-1]) & \text{se } \; i,j > 0 \land s_i \neq t_j \end{cases}$$

Dadas as sequências $S = ABCBCDBBDCABCDB$ e $T = ABBACBDCCDBACD$, indique qual a LCS, bem como os seguintes valores: $c[0,10]$, $c[4,6]$, $c[5,12]$, $c[9,13]$, $c[10,10]$, $c[14,14]$ e $c[15,14]$.

Solução:

LCS	$c[0,10]$	$c[4,6]$	$c[5,12]$	$c[9,13]$	$c[10,10]$	$c[14,14]$	$c[15,14]$
ABCBCDBACD	0	4	5	7	7	10	10

Q3 (R2 13/14 II.a) Suponha que gere uma empresa de produção de azeite e que existe um conjunto de n encomendas. Cada encomenda i ($1 \leq i \leq n$) permite uma receita de v_i euros na compra de a_i quilolitros de azeite, onde $a_i \geq 1$ e $a_i \in \mathbb{N}$.

Este ano a produção foi mais reduzida do que em anos anteriores, tendo sido produzidos apenas K quilolitros. Como consequência, não será possível satisfazer todas as n encomendas porque $\sum_{i=1}^{n} a_i > K$.

Considerando que as encomendas não podem ser parcialmente satisfeitas, indique um modelo de programação dinâmica que permite decidir quais as encomendas a satisfazer por forma a maximizar a receita total. Indique a complexidade da solução proposta.

Solução: A abordagem usando programação dinâmica tem complexidade $O(n \times K)$. Considere-se a tabela $\mathtt{r}[\mathtt{i},\mathtt{j}]$, em que `i` varia de 0 a n e que itera sobre todas as encomendas, e `j` varia de 1 a K. O tamanho desta tabela é portanto $O(n \times K)$.

O valor $\mathtt{r}[\mathtt{i},\mathtt{j}]$ representa a receita que é possivel obter seleccionando apenas entre as primeiras i encomendas e com uma produção de j quilolitros para escoar. Portanto, temos a seguinte relação:

$$\mathtt{r}[\mathtt{i},\mathtt{j}] = \begin{cases} 0 & \text{se } \ i = 0 \vee j = 0 \\ -\infty & \text{se } \ j < 0 \\ max(v_i + r[i-1, j-a_i], r[i-1, j]) & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Q4 (R2 16/17 II.b) Nesta questão iremos considerar o problema de distribuir palavras por linhas, por forma a que o resultado final seja o mais equilibrado possivel. Consequentemente o resultado final deverá ser apelativo.

Consideremos a sequência de palavras `aaa bb cc ddddd`, que podem, por exemplo, ser distríbuidas em 3 linhas da seguintes maneiras:

```
aaa bb
cc
ddddd

aaa
bb cc
ddddd
```

Considere que para identificar esta diferença, é dado um vetor `L[i,j]` que representa o custo de guardar as palavras da `i` à `j` numa linha. Quanto menor for este custo melhor. Caso as palavras excedam o tamanho limite da linha o valor `L[i,j]` será $+\infty$. No exemplo acima $\mathtt{L}[1,2] + \mathtt{L}[3,3]$ é maior do que $\mathtt{L}[1,1] + \mathtt{L}[2,3]$, indicando assim que a segunda distribuição é considerada melhor. Note que as palavras começam a ser numeradas em 1.

Considerando que o vetor `L[i,j]` já foi previamente calculado, complete a fórmula da recursão para a resolução deste problema em termos de programação dinâmica. Assumindo que `C[j]` representa o custo da melhor distribuição das primeiras j palavras em frases, tantas quantas as que forem necessárias.

$$\mathtt{C}[\mathtt{j}] = \begin{cases} 0 & \text{, se } \mathtt{j} = 0 \\ \min_{1 \leq \mathtt{i} \leq \mathtt{j}} \left\{ \qquad\qquad\qquad\qquad \right\} & \text{, caso contrario.} \end{cases}$$

Solução:

$$\texttt{C[j]} = \begin{cases} 0 & \text{se } \ j = 0 \\ min_{1 \leq i \leq j}\{\, C[i-1] + L[i,j] \,\} & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Q5 (R2 08/09 II.1) Considere que dispõe de um conjunto infinito de moedas com valores inteiros:

$$v_1 = 1 < v_2 < \cdots < v_n$$

com o qual pretende fazer o troco de uma determinada quantia inteira, utilizando o menor número de moedas possível (problema dos trocos). Assuma uma formulação para o problema em termos de programação dinâmica. Considerando que $m[i, j]$ é o número mínimo de moedas necessário para efectuar o troco da quantia j, quando são utilizadas moedas com valores $v_1, v_2, \ldots, v_i$, indique as expressões que devem ser colocadas nos campos A e B abaixo:

$$m[i, j] = \begin{cases} \infty & \text{se } \ j < 0 \\ 0 & \text{se } \ j = 0 \\ \min(A, B) & \text{se } \ j \geq 1 \end{cases}$$

Solução:

A: $m[i-1, j]$

B: $m[i, j - v_i] + 1$