Aula Prática 12

ASA 2024/2025

Q1 (T2 08/09 I.3) Uma empresa produz quatro tipos de produtos. O processo de produção envolve operações de assemblagem, polimento e empacotamento. Para cada tipo de produto, o tempo necessário (em minutos) para cada operação encontra-se representado na seguinte tabela, bem como o lucro obtido por cada unidade vendida.

Tipo	Assemblagem	Polimento	Empacotamento	Lucro (euro)
1	2	3	2	1.50
2	4	2	3	2.50
3	3	3	2	3.00
4	7	4	5	4.50

A empresa estima que, este ano, terá 100000 minutos de tempo disponível para assemblagem, 50000 minutos para polimento e 60000 minutos para empacotamento. O objectivo da empresa é maximizar o lucro.

Formule este problema na forma de um programa linear.

Solução:

$$
\begin{array}{llcl}
max & 1.5x_1 + 2.5x_2 + 3x_3 + 4.5x_4 & & \\
s.a & 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 & \leq & 100\ 000 \\
 & 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & \leq & 50\ 000 \\
 & 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 & \leq & 60\ 000
\end{array}
$$

Q2 (R2 08/09 I.3) Um fabricante da alimentação animal produz uma mistura da alimentação para vacas. A mistura da alimentação contém dois ingredientes activos e um enchimento para fornecer o volume. Um quilograma da mistura da alimentação deve conter uma quantidade mínima de cada um de quatro nutrientes da seguinte forma:

Nutriente	A	B	C	D
Quantidade (gramas)	90	50	20	2

Os ingredientes têm os seguintes custos por unidade de quilograma:

	A	B	C	D	Custo/quilograma
Ingrediente 1 (grama/quilograma)	100	80	40	10	40
Ingrediente 2 (grama/quilograma)	200	150	20	0	60
Enchimento	0	0	0	0	0

O problema para o fabricante é determinar quais as quantidades de ingredientes activos e de enchimento num quilograma da mistura da alimentação, a fim minimizar o custo.

Formule este problema na forma de um programa linear.

Solução:

$$
\begin{array}{lrcl}
min & 40x_1 + 60x_2 + 0x_3 & & \\
s.a & 100x_1 + 200x_2 + 0x_3 & \geq & 90 \\
 & 80x_1 + 150x_2 + 0x_3 & \geq & 50 \\
 & 40x_1 + 20x_2 + 0x_3 & \geq & 20 \\
 & 10x_1 + 0x_2 + 0x_3 & \geq & 2 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\
 & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Q3 (R2 20/21 II.b) Uma fábrica de barras de cereais produz e vende dois tipos de barras: premium e standard. O preço de venda das barras premium é 5 euros por embalagem, enquanto o preço de venda das barras standard é 3 euros por embalagem. Dada a elevada procura de barras por parte dos distribuidores, a fábrica tem sempre conseguido escoar a totalidade da produção. Assim sendo, a produção está apenas limitada pela capacidade dos fornos usados para torrar a mistura de cereais e pelo capital disponível para a compra de matérias primas.

As barras premium requerem 3 horas de tempo de forno por embalagem, enquanto as barras standard requerem 4 horas, sendo que existem 20.000 horas de tempo de forno disponível por embalagem durante o período de um mês.

Os custos directos decorrentes da produção de uma embalagem de barras são: 2 euros por cada embalagem de barras premium e 1 euro por cada embalagem de barras standard. A fábrica dispõe de 4000 euros por mês para investir em produção. Contudo, 45% do facturação da venda de barras premium e 30% do facturação da venda de barras standard estará disponível para ser re-investido na produção de mais barras durante o próprio mês.

Finalmente, obrigações contratuais da fábrica com a autarquia onde está instalada exigem que a produção mensal seja superior a 2000 embalagens.

O director de operações da fábrica pretende agora determinar o número de embalagens de cada um dos tipos de barras a produzir mensalmente por forma a maximizar a facturação.

1. Formule o programa linear que permite resolver este problema.
2. A solução básica inicial do programa linear é exequível?
3. Formule o programa linear dual.

Solução:

1. Começamos por identificar as variáveis do problema:
   - x_1 - número de embalagens premium produzidas;
   - x_2 - número de embalagens standard produzidas.

   Programa linear primal:

$$
\begin{array}{lrrcl}
\text{max} & 5x_1 & +3x_2 & & \\
\text{s.a} & 3x_1 & +4x_2 & \leq & 20000 \\
 & -0.25x_1 & +0.1x_2 & \leq & 4000 \\
 & -x_1 & -x_2 & \leq & -2001 \\
 & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

   onde a restrição de reinvestimento na produção é calculada a partir de:
   $2x_1 + x_2 \leq 4000 + 5 \times 0.45x_1 + 3 \times 0.3x_2$

2. A solução básica inicial não é exequível (a terceira restrição não é satisfeita).

3. Programa linear dual:

$$
\begin{array}{lrrrcl}
\min & 20000y_1 & +4000y_2 & -2001y_3 & & \\
\text{s.a} & +3y_1 & -0.25y_2 & -1y_3 & \geq & 5 \\
 & +4y_1 & +0.1y_2 & -1y_3 & \geq & 3 \\
 & & y_1, y_2, y_3 & & \geq & 0
\end{array}
$$

Q4 (T2 20/21 II.b) Considere o seguinte programa linear:

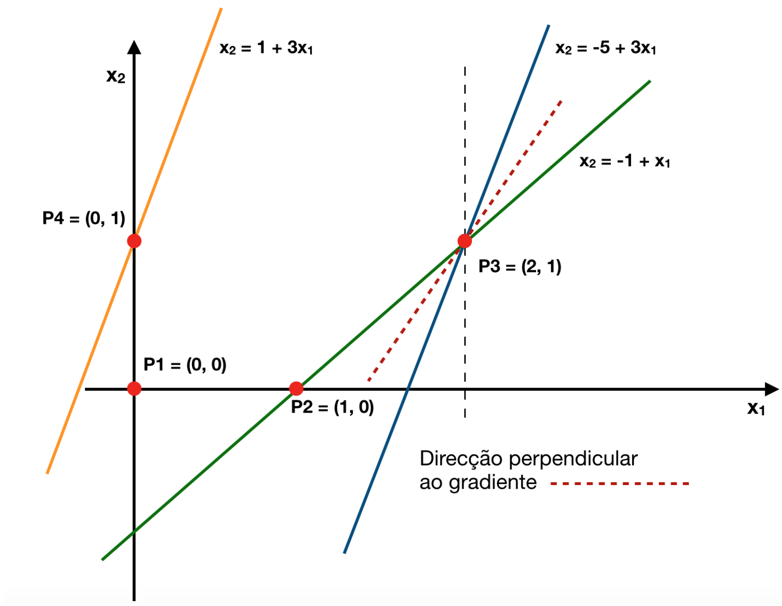
$$
\begin{array}{lrrcl}
\max & 2x_1 & -x_2 & & \\
\text{s.a} & -3x_1 & +x_2 & \leq & 1 \\
 & x_1 & -x_2 & \leq & 1 \\
 & 3x_1 & -x_2 & \leq & 5 \\
 & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

1. Desenhe o conjunto exequível e resolva geometricamente o programa linear. A resposta deve incluir: o valor máximo, as coordenadas onde esse valor é atingido e as equações das rectas que delimitam a região exequível.

2. Formule o programa linear dual e calcule a respectiva solução a partir da solução do programa primal. Indique tanto o valor mínimo como as coordenadas onde esse valor é atingido.

Solução:

1. Representamos a região exequível no diagrama em baixo.



O Teorema Fundamental da Programação Linear estabelece que o valor óptimo da função objectivo, a existir, ocorre num vértice da região exequível. O vector gradiente da função objectivo é: $(2, -1)$. Representamos a tracejado vermelho a recta perpendicular ao gradiente (declive 2). Observamos que no vértice P_3 não existem direcções de subida exequíveis, pelo que concluímos que o valor óptimo é 3 e ocorre no ponto $P_3 = (2, 1)$.

2. O programa linear dual é definido em baixo:

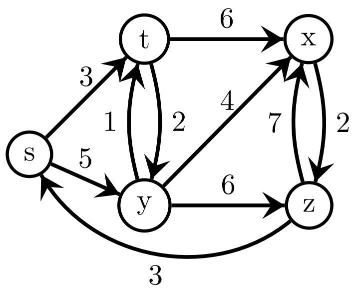
$$\begin{array}{lrrrcl} \min & 1y_1 & +1y_2 & +5y_3 & & \\ \text{s.a} & -3y_1 & +y_2 & +3y_3 & \geq & 2 \\ & y_1 & -y_2 & -y_3 & \geq & -1 \\ & & y_1, y_2, y_3 & & \geq & 0 \end{array}$$

Do Teorema da Dualidade Forte concluímos que o valor mínimo do programa dual coincide com o valor máximo do programa primal, 3. Da inspecção da geometria do programa primal, concluímos que as restrições activas no vértice da solução correspondem às variáveis y_2 e y_3 do problema dual. Segue, por isso, que $y_1 = 0$ no ponto óptimo do problema dual. Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} y_2 + 3y_3 = 2 \\ -y_2 - y_3 = -1 \end{cases}$$

concluímos que o valor mínimo do programa dual se encontra no ponto $(0, 1/2, 1/2)$.

Q5 (CLRS Ex. 29.2-2) Explicite o programa linear que permita encontrar o caminho mais curto do vértice s ao vértice y no grafo seguinte.

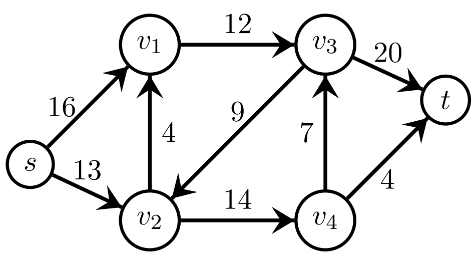


Solução:

Desigualdade triangular (u, v): $d[v] \leq d[u] + w(u, v)$

$$
\begin{array}{lrcr}
max & d[y] & & \\
s.a & d[t] & \leq & d[s] + 3 \\
 & d[y] & \leq & d[s] + 5 \\
 & d[t] & \leq & d[y] + 1 \\
 & d[y] & \leq & d[t] + 2 \\
 & d[x] & \leq & d[t] + 6 \\
 & d[x] & \leq & d[y] + 4 \\
 & d[z] & \leq & d[y] + 6 \\
 & d[z] & \leq & d[x] + 2 \\
 & d[x] & \leq & d[z] + 7 \\
 & d[s] & \leq & d[z] + 3 \\
 & d[s] & = & 0 \\
\multicolumn{4}{l}{d[s], d[t], d[y], d[x], d[z] \geq 0}
\end{array}
$$

Q6 (CLRS Ex. 29.2-4) Explicite o programa linear que permita encontrar o fluxo máximo no grafo seguinte.



Solução:

Codificação das restrições de: capacidade e conservação de fluxo.

$$
\begin{array}{llcr}
max & f_{sv_1} + f_{sv_2} & & \\
s.a & f_{sv_1} & \leq & 16 \\
& f_{sv_2} & \leq & 13 \\
& f_{v_1v_3} & \leq & 12 \\
& f_{v_2v_1} & \leq & 4 \\
& f_{v_2v_4} & \leq & 14 \\
& f_{v_3v_2} & \leq & 9 \\
& f_{v_3t} & \leq & 20 \\
& f_{v_4v_3} & \leq & 7 \\
& f_{v_4t} & \leq & 4 \\
& & & \\
& f_{sv_1} + f_{v_2v_1} & = & f_{v_1v_3} \\
& f_{sv_2} & = & f_{v_2v_1} + f_{v_2v_4} \\
& f_{v_1v_3} + f_{v_4v_3} & = & f_{v_3v_2} + f_{v_3t} \\
& f_{v_2v_4} & = & f_{v_4v_3} + f_{v_4t} \\
& & & f_{uv} \geq 0, \forall_{u,v} \in V
\end{array}
$$