CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL III

5. SUPERFÍCIES E INTEGRAIS DE SUPERFÍCIE

EXERCÍCIOS

Superfícies

1. Indique os pontos regulares das seguintes superfícies:

(a) $x = 2u,\ y = u^2 + v,\ z = v^2 \quad (u, v \in \mathbb{R})$

(b) $x = u^2 - v^2,\ y = u + v,\ z = u^2 + 4v \quad (u, v \in \mathbb{R})$

2. Determine uma expressão para o vector unitário normal às superfícies indicadas a seguir. Identifique essas superfícies.

(a) $x = \cos v \,\mathrm{sen}\, u,\ y = \mathrm{sen}\, v \,\mathrm{sen}\, u,\ z = \cos u \quad (u \in [0, \pi],\ v \in [0, 2\pi])$

(b) $x = \mathrm{sen}\, v,\ y = u,\ z = \cos v \quad (u \in [-1, 3],\ v \in [0, 2\pi])$

3. Relativamente às superfícies a seguir indicadas, determine o plano tangente e a recta normal no ponto $(1, 0, 1)$.

(a) $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2\}$

(b) $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$

4. Determine a equação do plano tangente à superfície dada por

$$x = u^2,\ y = u \,\mathrm{sen}\,(e^v),\ z = \frac{1}{3} u \cos(e^v), \quad (u, v \in \mathbb{R}).$$

no ponto $(13, -2, 1)$.

5. Determine a área da superfície dada por

$$x = \cos\theta \,\mathrm{sen}\,\phi,\ y = \mathrm{sen}\,\theta \,\mathrm{sen}\,\phi,\ z = \cos\phi, \quad (\theta \in [0, 2\pi],\ \phi \in [0, \pi])$$

O que sucede se variarmos ϕ entre $-\pi/2$ e $\pi/2$? E se for entre 0 e 2π? Porque se obtêm resultados diferentes?

6. Seja $\Phi(u, v) = (u - v,\ u + v,\ uv)$, com (u, v) em $D = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 1\}$. Calcule a área de $\Phi(D)$.

7. Parametrize a superfície $x^2 - y^2 = 1$, para $x > 0$, $-1 \leq y \leq 1$ e $0 \leq z \leq 1$, e exprima a sua área na forma de um integral.

8. A superfície cilíndrica $x^2+y^2 = x$ divide a superfície esférica S (de centro na origem e raio 1) em duas regiões, S_1 (interior ao cilindro) e S_2 (exterior ao cilindro), de áreas $A(S_1)$ e $A(S_2)$ respectivamente. Calcule a razão $A(S_2)/A(S_1)$.

9. Calcule a área da superfície cónica $z^2 = x^2 + y^2$ $(z \geq 0)$ que se encontra dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz$ $(R > 0)$.

10. Determine o plano tangente e a recta normal no ponto $(1, 0, 0)$ à superfície cónica

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}.$$

11. Calcule a equação do plano tangente no ponto $(1, 0, 3)$ à superfície $3x^2+8xy-z = 0$ (com $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$).

12. Considere a superfície parametrizada por

$$\Phi(r, \theta) = (r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta, \theta), \quad (r \in [0, 1],\ \theta \in [0, 4\pi]).$$

(a) Esboce e descreva a superfície.

(b) Determine uma expressão para uma normal unitária à superfície.

(c) Determine a equação do plano tangente à superfície num ponto (x_0, y_0, z_0).

13. Calcule a área da superfície definida pelas condições

$$x + y + z = 1 \quad \text{e} \quad x^2 + 2y^2 \leq 1.$$

14. Calcule a área da superfície definida pelo gráfico da função

$$z = \frac{2}{3}\left(x^{3/2} + y^{3/2}\right),$$

em que $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

15. Calcule a área da superfície

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2},\ \sqrt{3}\,|y| < |x|,\ z \geq 0\}.$$

Integrais de Superfície

1. Calcule os seguintes integrais de superfície:

(a) $\iint_S z\, dS$, onde $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\}$ $(a > 0)$.

(b) $\iint_S z\, dS$, onde $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(c) $\iint_S z^2\, dS$, onde $S = frC$, com $C = [-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]$.

2. Seja S uma superfície esférica de centro na origem e raio $R > 0$.

(a) Utilize a simetria para justificar que

$$\iint_S x^2\, dS = \iint_S y^2\, dS = \iint_S z^2\, dS$$

e indique o valor destes integrais.

(b) Uma superfície metálica com a forma de S tem densidade de carga eléctrica por unidade de área $\epsilon(x,y,z) = x^2 + y^2$. Calcule a sua carga eléctrica total.

3. **(a)** Um fluido uniforme movendo-se verticalmente de cima para baixo (chuva) é descrito pelo campo de vectores $\vec{F}(x,y,z) = (0,0,-1)$. Determine o fluxo total através da superfície cónica $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, para $0 < z < 1$.

(b) Suponha que a chuva sofre a influência do vento de modo a que caia com uma inclinação de 45^{o}, ou seja segundo o campo de vectores $\vec{G}(x,y,z) = -(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Qual é agora o fluxo através da superfície cónica?

4. Considere a superfície $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2,\ z > 0\}$, orientada segundo a normal unitária $\vec{n}$ com terceira componente negativa. Calcule o fluxo do campo $\vec{F}(x,y,z) = (x + y^2)\,\mathbf{i} + (x^2 + y)\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k}$ através de S.

5. Com $\vec{F}(x,y,z) = (x^2 + y - 4)\,\mathbf{i} + 3xy\,\mathbf{j} + (2xz + z^2)\,\mathbf{k}$, calcule

$$\iint_S (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS,$$

onde S é a superfície definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 16,\ z \geq 0$ e $\vec{n}$ é a normal unitária exterior.

6. A superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = (x^2 + y^2)^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

tem densidade de massa $m(x,y,z) = \sqrt{1 + 16(x^2 + y^2)^3}$. Qual a sua massa total?

7. Calcule o fluxo do campo $\vec{F}(x,y,z) = x^2\,\mathbf{i} + y^3\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ através da superfície cónica definida por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 < z < 1$, orientada segundo a normal $\vec{n}$ com terceira componente positiva.

RESPOSTAS

Superfícies

1. **(a)** A superfície é regular.
   (b) Todos os pontos excepto $(0, 0, -4)$.

2. **(a)** $\vec{n} = \cos v \operatorname{sen} u\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u\,\mathbf{j} + \cos u\,\mathbf{k}$. Trata-se de uma superfície esférica.
   (b) $\vec{n} = -\operatorname{sen} v\,\mathbf{i} - \cos v\,\mathbf{k}$. Trata-se de uma superfície cilíndrica.

3. **(a)** $z - 2x + 1 = 0$; $(1 - 2t, 0, 1 + t),\ t \in \mathbb{R}$.
   (b) $x = 1$; $(1 + t, 0, 1),\ t \in \mathbb{R}$.

4. $18z - 4y - x = 13$.

5. 4π; 4π; 8π.

6. $\frac{\pi}{3}\,(6\sqrt{6} - 8)$.

7. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{2t^2 + 1}{t^2 + 1}}\,\mathrm{dt}$.

8. $A(S_2)/A(S_1) = \dfrac{\pi + 2}{\pi - 2}$.

9. $\pi\,\sqrt{2}\,R^2$.

10. $x + z = 1$; $(1 + t, 0, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

11. $6x + 8y - z = 3$.

12. **(a)** Helicóide.
    (b) $\vec{n} = (\operatorname{sen}\theta, -\cos\theta, r)/\sqrt{1 + r^2}$.
    (c) $y_0(x - x_0) - x_0(y - y_0) + (x_0^2 + y_0^2)(z - z_0) = 0$.

13. $\frac{\pi\sqrt{6}}{2}$.

14. $\frac{4}{15}\,(9\sqrt{3} - 8\sqrt{2} + 1)$.

15. $2\sqrt{2}\pi/3$.

Integrais de Superfície

1. **(a)** πa^3.

(b) $\frac{5\pi\sqrt{5}}{12} + \frac{\pi}{60}$.

(c) $\frac{40}{3}$.

2. **(a)** $\frac{4}{3}\pi R^4$.

(b) $\frac{8}{3}\pi R^4$.

3. **(a)** π.

(b) $\frac{\pi}{2}\sqrt{2}$.

4. -2π.

5. -16π.

6. 5π.

7. $\frac{2\pi}{3} - \frac{3\pi}{20}$.