CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL III

7. SÉRIES DE FOURIER

EXERCÍCIOS

1. Considere a função

$$\phi(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 \leq x \leq 0, \\ +1 & \text{se } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

(a) Calcule a série de Fourier de ϕ.

(b) Através da série obtida na alínea anterior, determine a soma da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

2. Seja $g(x) = 1 - |x|$, no intervalo $[-1, 1]$.

(a) Determine a série de Fourier de g.

(b) Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para calcular a soma da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

3. Seja $h(x) = x^2$, no intervalo $[-2, 2]$.

(a) Determine a série de Fourier de h.

(b) Utilizando a série obtida num ponto adequado, aproveite para calcular a soma da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$$

4. Determine a série de Fourier da função definida no intervalo $[-2, 2]$ por

$$l(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Indique a soma da série para cada $x \in [-2, 2]$.

5. Desenvolva a função definida no intervalo $[0,1]$ por $f(x) = x$ numa série de Fourier de cosenos e indique para que valores converge (pontualmente) a série obtida.

6. Desenvolva a função definida no intervalo $[0,1]$ por $f(x) = 1$ numa série de Fourier de senos e indique para que valores converge (pontualmente) a série obtida.

7. Calcule a série de Fourier de onda sinusoidal rectificada, isto é, de

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } \operatorname{sen} x > 0 \\ 0 & \text{se } \operatorname{sen} x \leq 0 \end{cases}$$

para $x \in [-\pi, \pi]$.

RESPOSTAS

1. **(a)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{(2k-1)\,\pi} \operatorname{sen}\left((2k-1)\,\pi x\right).$

(b) $\pi/4$.

2. **(a)** $\displaystyle\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{(2k-1)^2\,\pi^2} \cos\left((2k-1)\,\pi x\right).$

(b) $\pi^2/8$.

3. **(a)** $\displaystyle\frac{4}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k\,16}{k^2\,\pi^2} \cos\left(\frac{k\,\pi\,x}{2}\right).$

(b) $\pi^2/6$.

4. $$\frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\pi}\left[\operatorname{sen}\frac{k\pi}{2}\cos\frac{k\pi x}{2} + \left(1-\cos\frac{k\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{k\pi x}{2}\right] = \begin{cases} 0 & \text{se } -2 \le x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{se } 1 < x \le 2 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases}$$

5. $\displaystyle\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{(2k-1)^2\,\pi^2} \cos\left((2k-1)\,\pi x\right).$

Esta série tem soma igual a x em cada $x \in [0,\, 1]$.

6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{(2k-1)\,\pi} \operatorname{sen}\left((2k-1)\,\pi x\right).$

Esta série tem soma igual a 1 se $x \in]0,\, 1[$, e soma igual a 0 se $x = 0$ ou $x = 1$.

7. $\displaystyle\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-4k^2}\cos(2kx).$