CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL III

8. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

EXERCÍCIOS

Equações de Primeira Ordem

1. Determine as curvas características para as equações

- **(a)** $2xy\, u_x - (x^2 + y^2)\, u_y = 0$.
- **(b)** $(x^2 - y^2 + 1)\, u_x + 2xy\, u_y = 0$.
- **(c)** $y\, u_x - x\, u_y = 0$.
- **(d)** $x^2\, u_x + (y^2 - 1)\, u_y = 0$.

2. Resolva a equação de primeira ordem $y\, u_x + x\, u_y = 2u$ sujeita à condição

- **(a)** $u(x, 0) = x$ para $x > 0$.
- **(b)** $u(x, 0) = 0$ para $x \in \mathbb{R}$.
- **(c)** $u(0, y) = y^2$ para $y > 0$.
- **(d)** $u(s, 2s) = s$ para $s > 0$.
- **(e)** $u(1, y) = \dfrac{1+y}{1-y}$ para $y > 1$.

3. Determine a solução de cada um dos seguintes problemas e indique a região do plano (x, y) onde essa solução é válida.

- **(a)** $u_x + u_y = u^2$, com $u(x, 0) = 1$ para $x \in \mathbb{R}$.
- **(b)** $x\, u_x + y\, u_y = u$, com $u(x, 0) = x$ para $x > 0$.
- **(c)** $x\, u_x + x\, u_y = u$, com $u(1, y) = y$ para $y \in \mathbb{R}$.

4. Determine as curvas características da equação $u_x - u_y = 0$, para $x > 0$ e $y > 0$, e mostre que uma delas intersecta a hipérbole $xy = 1$ no ponto $(1, 1)$. Deduza que condição deve f satisfazer para que o problema

$$\begin{cases} u_x - u_y = 0 \text{ para x} > 0 \text{ e y} > 0, \\ u(x, 1/x) = f(x) \text{ para x} > 0. \end{cases}$$

tenha solução.

Equações de Segunda Ordem

1. Considere a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u, \quad x \in]0,1[$$

(a) Recorrendo ao método de separação de variáveis, determine, para $t \geq 0$ e $x \in]0,1[$, soluções da equação que satisfaçam $u(0,t) = 0$ e $u(1,t) = 0$.

(b) Determine uma solução que satisfaça a condição inicial

$$u(x,0) = 3\,\mathrm{sen}(2\pi x) - 7\,\mathrm{sen}(4\pi x)$$

2. **(a)** Recorrendo ao método de separação de variáveis, determine as soluções para $t \geq 0$ e para $x \in]0,\pi[$ de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u, \quad x \in]0,\pi[, \\ \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0. \end{cases}$$

(b) Determine a solução que satisfaz a condição inicial

$$u(x,0) = (\pi - x)x, \quad x \in]0,\pi[$$

3. Determine a solução do problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u, \quad x \in]0,L[, \ t > 0, \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0, \ t > 0, \\ \\ u(x,0) = \cos(3\pi x/L), \quad x \in]0,L[. \end{cases}$$

4. Seja f a função definida no intervalo $[0,2\pi]$ por $f(x) = x$.

(a) Determine a série de Fourier de cosenos da função f.

(b) Resolva o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - tu, \quad x \in]0,2\pi[, \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(2\pi,t) = 0, \\ \\ u(x,0) = f(x), \quad x \in]0,2\pi[. \end{cases}$$

5. Resolva o seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in]0,1[, \ t > 0, \\[2ex] u(0,t) = u(1,t) = 0, \ t > 0, \\[2ex] u(x,0) = 0, \quad x \in]0,1[, \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 1, \quad x \in]0,1[. \end{cases}$$

onde c é uma constante real positiva.

6. Resolva o seguinte problema para a equação de Laplace

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad x, y \in]0,1[, \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,1) = \cos(2\pi x), \quad x \in]0,1[, \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,y) = \cos(2\pi y), \quad y \in]0,1[. \end{cases}$$

7. Considere a equação de propagação do calor $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

(a) Mostre que esta equação possui soluções estacionárias da forma $u(x) = Ax + B$.

(b) Determine a solução estacionária para o problema correspondente a uma barra situada entre os pontos $x = 0$ e $x = L$, em que se fixam as temperaturas $u(0,t) = T_1$ e $u(L,t) = T_2$.

(c) Resolva a equação para $0 < x < 1$ sujeita às condições iniciais e de fronteira

$$\begin{cases} u(0,t) = 20, \ t > 0, \\ u(1,t) = 60, \ t > 0, \\ u(x,0) = 75. \end{cases}$$

8. Recorrendo ao método de separação de variáveis, determine a solução $u(x, y, t)$ do seguinte problema para a equação das ondas

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad x, y \in]0, 1[, \ t > 0 \\ \\ u(x, 0, t) = x, \quad u(x, 1, t) = x, \quad x \in]0, 1[, \ t > 0, \\ \\ u(0, y, t) = 0, \quad u(1, y, t) = 1, \quad y \in]0, 1[, \ t > 0, \\ \\ u(x, y, 0) = x, \quad x, y \in]0, 1[, \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = \cos(2\pi(x - y)) - \cos(2\pi(x + y)), \quad x, y \in]0, 1[. \end{cases}$$

RESPOSTAS

Equações de Primeira Ordem

1. **(a)** $\dfrac{x^3}{3} + y^2 x = c, \;$ para $c \in \mathbb{R}$.

(b) $\dfrac{x^2}{y} + y + \dfrac{1}{y} = c, \;$ para $c \in \mathbb{R}$.

(c) Circunferências $x^2 + y^2 = c, \;$ para $c > 0$.

(d) $y = \dfrac{1 + ke^{-2/x}}{1 - ke^{-2/x}}, \;$ para $k \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

2. **(a)** $u(x, y) = \sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}\,(x + y), \;$ válida para $x > 0$ e $x > y$.

(b) $u(x, y) = 0, \;$ válida em $\mathbb{R}^2$.

(c) $u(x, y) = (x + y)^2, \;$ válida para $y > 0$ e $y > x$.

(d) $u(x, y) = \dfrac{(x + y)^{3/2}}{3\sqrt{3\,(y - x)}}, \;$ válida para $x > 0$ e $y > x$.

(e) $u(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}, \;$ válida para $y > 1$ e $y > x$.

3. **(a)** $u(x, y) = \dfrac{1}{1 - y}, \;$ válida para $y < 1$.

(b) $u(x, y) = x, \;$ válida para $x > 0$.

(c) $u(x, y) = (y - x + 1)\,x, \;$ válida em $\mathbb{R}^2$.

4. As curvas características são as rectas $x + y = c, \;$ com $c > 0$.
f deve satisfazer $f(x) = f(1/x) \;$ para $x > 0$.

Equações de Segunda Ordem

1. **(a)** $u(x, t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} c_n\, e^{(1-n^2\,\pi^2)\,t}\, \mathrm{sen}\,(n\pi x)$.

(b) $u(x, t) = 3\, e^{(1-4\pi^2)\,t}\, \mathrm{sen}(2\pi x) - 7\, e^{(1-16\pi^2)\,t}\, \mathrm{sen}(4\pi x)$.

2. **(a)** $u(x, t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} c_n\, e^{-(1+n^2)\,t}\, \mathrm{sen}\,(nx), \;\; c_n \in \mathbb{R}$.

(b) $u(x,t) = \dfrac{8}{\pi} \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^3}\, e^{-(1+(2k-1)^2)\,t} \operatorname{sen}\left((2k-1)\,x\right).$

3. $u(x,t) = \mathrm{e}^{-(1+9(\pi/L)^2)t} \cos(3\pi x/L).$

4. **(a)** $\pi - \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{8}{\pi\,(2k-1)^2} \cos\frac{(2k-1)\,x}{2}.$

(b) $u(x,t) = \pi\, e^{-t^2/2} - \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{8}{\pi\,(2k-1)^2}\, e^{-(t^2/2+(2k-1)^2\,t/4)} \cos\frac{(2k-1)\,x}{2}.$

5. $u(x,t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2\,(1-(-1)^k)}{k^2\pi^2 c} \operatorname{sen}(k\pi c t) \operatorname{sen}(k\pi x).$

6. $u(x,y) = \dfrac{\cosh(2\pi x)\cos(2\pi y) + \cosh(2\pi y)\cos(2\pi x)}{2\,\pi\,\operatorname{senh}(2\pi)} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$

7. **(b)** $u(x,t) = T_1 + \dfrac{T_2 - T_1}{L}\, x.$

(c) $u(x,t) = 20 + 40x + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{10}{k\pi}\,(3\,(-1)^{k+1} + 11)\, e^{-k^2\pi^2\alpha^2 t} \operatorname{sen}(k\pi x).$

8. $u(x,y,t) = x + \dfrac{1}{\sqrt{2}\pi} \operatorname{sen}(2\sqrt{2}\pi t) \operatorname{sen}(2\pi x) \operatorname{sen}(2\pi y).$