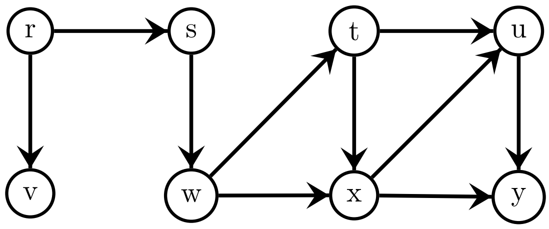
Aula Prática 7

ASA 2024/2025

Q1 Aplique uma DFS no seguinte grafo, a começar em s e utilizando a ordem lexicográfica para os vizinhos.



Solução:

	r	s	t	u	v	w	x	y
d	13	1	3	4	14	2	8	5
f	16	12	10	7	15	11	9	6

Q2 (CLRS Ex. 22.3-8) Indique um contra-exemplo para a conjectura de que se num grafo dirigido G existe um caminho do vértice u para o vértice v, e se $d(u) < d(v)$ numa DFS de G, então v é descendente de u na floresta DF resultante.

Solução: Considerando o grafo $u \leftrightarrows s \to v$. Se a DFS começa em s, visita u e só depois visita v, então $d(u) < d(v)$, mas v não é descendente de u na floresta DF resultante.

Q3 (CLRS Ex. 22.3-9) Indique um contra-exemplo para a conjectura de que se num grafo dirigido G existe um caminho do vértice u para o vértice v, então para qualquer DFS em G temos que $d(v) \leq f(u)$.

Solução: Considerando o grafo $u \leftrightarrows s \to v$. Se a DFS começa em s, visita u e só depois visita v, então temos que $d(v) > f(u)$, gerando um contra-exemplo.

Q4 (CLRS Ex. 22.3-11) Explique como é que um vértice u num grafo dirigido G pode terminar numa árvore DF contendo apenas u, apesar de u ter arcos de entrada e arcos de saída.

Q5 (T1 08/09 I.3) Considere a aplicação de uma pesquisa em profundidade (DFS) num grafo $G = (V, E)$. Para cada uma das seguintes afirmações, indique se é verdadeira (V) ou falsa (F).

1. Para qualquer DFS em G, existe sempre um vértice com tempo de fim igual a $2|V|$.

2. Seja $u \in V$ um vértice de G atingível a partir de todos os outros vértices do grafo. Nesse caso, u é o primeiro vértice a ser fechado para qualquer DFS em G.

3. Se $d[v] = d[u] + 1$, então o arco (u, v) é um arco de árvore

4. Seja $(u, v) \in E$ um arco do grafo. Então temos necessariamente que $d[u] < d[v]$.

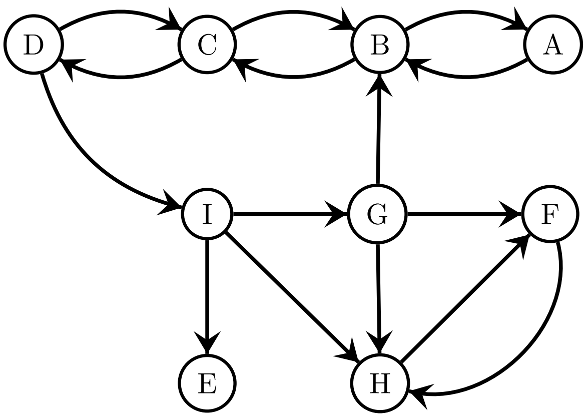
5. Se $f[v] < d[u]$ e existe um arco $(u, v) \in E$, então (u, v) é um arco de cruzamento.

6. Se $d[v] < d[u]$ e existe um arco $(u, v) \in E$, então (u, v) é um arco para trás.

Solução:

1.	2.	3.	4.	5.	6.
V	F	V	F	V	F

Q6 Considere o grafo dirigido:



Aplique o algoritmo que utiliza duas travessias em profundidade primeiro (DFS) para encontrar os componentes fortemente ligados do grafo. Considere que na primeira DFS os vértices são considerados por ordem lexicográfica (ou seja, A, B, C...). Em ambas as DFS, os adjacentes são sempre considerados também por ordem lexicográfica.

- Indique os tempos de descoberta d e de fim f de cada vértice na **segunda DFS do grafo**.
- Indique os componentes fortemente ligados **pela ordem que são descobertos pelo algoritmo**.

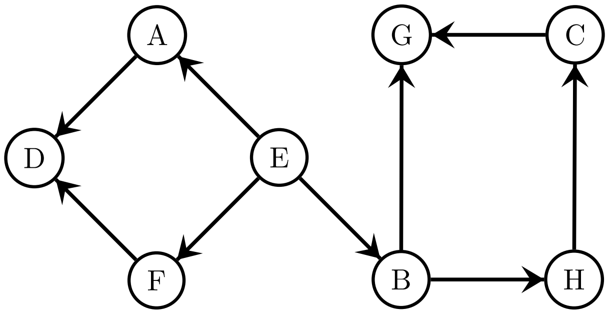
Nota: Neste algoritmo os valores de d começam em 1.

Solução:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
d	1	2	3	4	17	13	7	14	8
f	12	11	6	5	18	16	10	15	9

Componentes fortemente ligadas: $\{A, B, C, D, G, I\}, \{F, H\}, \{E\}$

Q7 (T1 12/13 – I.b) Considere o grafo dirigido acíclico DAG:



Aplique uma procura em profundidade primeiro (DFS) com início no vértice E e que visita os filhos por ordem lexicográfica. Indique os valores de descoberta (d) e fim (f), para cada um dos vértices. Indique também a ordenação topológica resultante.

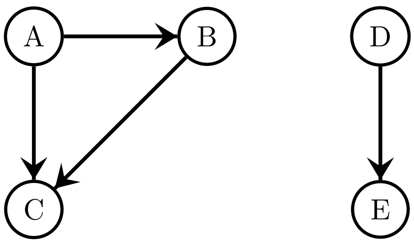
Nota: Os tempos de uma DFS começam em 1.

Solução:

	A	B	C	D	E	F	G	H
d	2	6	10	3	1	14	7	9
f	5	13	11	4	16	15	8	12

Ordem: E, F, B, H, C, G, A, D

Q8 (T1 06/07 I.2) Considere o seguinte grafo dirigido:



Indique três ordenações topológicas possíveis para este grafo. Indique os valores de descoberta e fim (d, f) que levaram a essas ordenações.

Solução:

	A	B	C	D	E
(d, f)	$(5, 10)$	$(6, 9)$	$(7, 8)$	$(1, 4)$	$(2, 3)$

	D	E	A	B	C
(d, f)	$(7, 10)$	$(8, 9)$	$(1, 6)$	$(2, 5)$	$(3, 4)$

	D	A	E	B	C
(d, f)	$(9, 10)$	$(7, 8)$	$(5, 6)$	$(1, 4)$	$(2, 3)$

Q9 (CLRS Ex 22.5-3) O professor Bacon afirma que o algoritmo para componentes fortemente ligados seria mais simples se usássemos o grafo original (em vez do transposto) na segunda DFS e, adicionalmente, analisássemos os nós por ordem crescente dos seus tempos de fim.

Será que o algoritmo produz sempre os resultados correctos?

Solução:

Considerando o grafo $v \leftrightarrows s \rightarrow u$, podemos obter 2 SCCs: {s,v} e {u}.

Assumindo que 1a DFS começa em s, visita/fecha v e visita/fecha u. Se a 2a DFS não considerar G^T e considerar os tempos de fim por ordem crescente, vai iniciar no nó $v \rightarrow s \rightarrow u$ retornando um único SCC. Apesar de não existir arco (u, s) ou (u, v)!

Q10 (CLRS Ex 22.5-1) Como muda o número de componentes fortemente ligados de um grafo se adicionarmos um novo arco entre dois nós?

Solução:

A adição de um arco não pode partir um SCC a meio. Logo, o número de SCCs nunca pode aumentar. Adicionando um arco (u, v):

- se u e v pertencem ao mesmo SCC: não altera o SCC.
  $\Rightarrow$ # SCCs igual

- se u e v pertencem a SCCs diferentes:

  - se não existe arco em sentido contrário, ou seja, entre o SCC de v e o SCC de u:
    $\Rightarrow$ # SCCs igual
  - se existe um arco em sentido contrário: colapsa os dois SCCs.
    $\Rightarrow$ # SCCs diminui ¿ ¿

Q11 (CLRS Ex 22.4-3) Indique um algoritmo que determine se um grafo não dirigido $G = (V, E)$ contém um ciclo simples. O algoritmo deve correr em tempo $O(V)$ independentemente de E.

Solução:

Um grafo <u>não dirigido</u> é acíclico se e só se uma DFS não gerar arcos para trás.

- se houver arcos para trás
  $\Rightarrow$ tem um ciclo

- se não houver arcos para trás, então só existem arcos em árvore.
  $\Rightarrow$ não há ciclos

Complexidade: Num DAG não dirigido existem no máximo $|V| - 1$ arcos. Se virmos $|V|$ arcos distintos é porque vimos um arco para trás, e consequentemente um ciclo. Logo, $O(V)$!

Q12 (CLRS Ex 22.5-5) Indique um algoritmo em tempo $O(V + E)$ para calcular o grafo de componentes fortemente ligado dado um grafo dirigido $G = (V, E)$. Garanta que existe no máximo um arco entre dois vértices do grafo de componentes produzido.

Solução:

1. Determinar os SCCs do grafo G usando o algoritmo de Tarjan ou DFS(G)+DFS(G^T). Registar o SCC de cada vértice i em $k[i]$
   $\Rightarrow O(V + E)$

2. Criar V^{SCC} pertencentes ao G^{SCC}
   $\Rightarrow O(V)$

3. Determinar as ligações entre V^{SCC}. Se ainda não existe $k[i] \rightarrow k[j]$, adicionar o arco. Onde $k[i]$ e $k[j]$ indicam os SCCs dos vértices i e j.
   $\Rightarrow O(E)$