Análise e Síntese de Algoritmos

Fluxos máximos. Aplicações.

Prof. Pedro T. Monteiro

IST - Universidade de Lisboa

2024/2025

Contexto

- Revisão [CLRS, Cap.1-13]
  - Fundamentos; notação; exemplos
- Técnicas de Síntese de Algoritmos [CLRS, Cap.15-16]
  - Programação dinâmica [CLRS, Cap.15]
  - Algoritmos greedy [CLRS, Cap.16]
- Algoritmos em Grafos [CLRS, Cap.21-26]
  - Algoritmos elementares
  - Caminhos mais curtos [CLRS, Cap.22,24-25]
  - Árvores abrangentes [CLRS, Cap.23]
  - Fluxos máximos [CLRS, Cap.26]
- Programação Linear [CLRS, Cap.29]
  - Algoritmos e modelação de problemas com restrições lineares
- Tópicos Adicionais
  - Complexidade Computacional [CLRS, Cap.34]

Resumo

Emparelhamento Bipartido Máximo

Escape problem

Exercício de modelação de exame

Emparelhamento Bipartido Máximo

Problema:

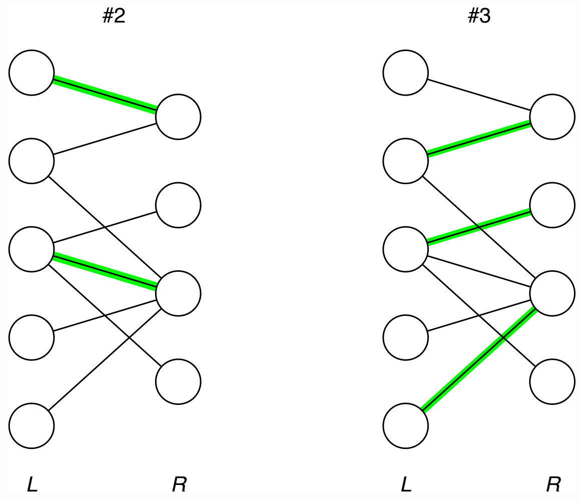
- Emparelhamento de um conjunto de L máquinas com um conjunto de R tarefas a serem efectuadas simultanemente
- Emparelhamento de um conjunto de L candidatos com um conjunto de R empregos
- Emparelhamento de um conjunto de L leitores com um conjunto de R livros
- ...

Emparelhamento Bipartido Máximo

Considere um grafo $G = (V, E)$ não dirigido

- Emparelhamento
  - $M \subseteq E$, tal que para qualquer vértice $v \in V$ não mais do que um arco em M é incidente em v
- Emparelhamento Máximo
  - Emparelhamento cardinalidade máxima (na dimensão de M)
- Grafo Bipartido
  - Grafo pode ser dividido em $V = L \cup R$, em que L e R são disjuntos e em que todos os arcos de E estão entre L e R
- Emparelhamento Bipartido Máximo
  - Emparelhamento máximo em que G é bipartido

Cardinalidade de M



Abordagem greedy não é eficaz!

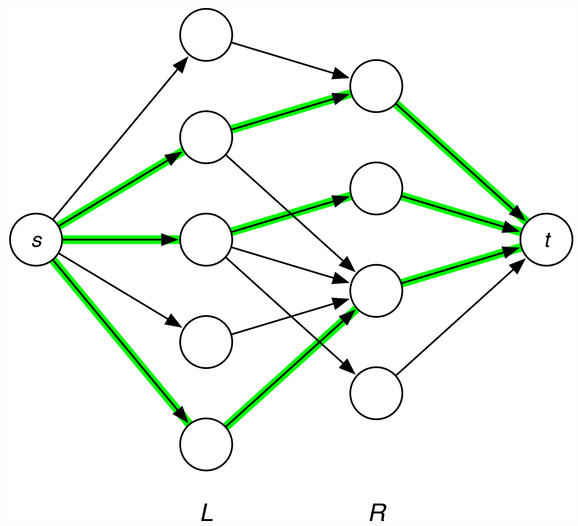
Utilização Redes de Fluxo

Construir grafo $G' = (V', E')$:

$$
\begin{aligned}
V' = \quad & V \cup \{s, t\} \\
E' = \quad & \{(s, u) : u \in L\} \cup \\
& \{(u, v) : u \in L, v \in R, \text{ e } (u, v) \in E\} \cup \\
& \{(v, t) : v \in R\}
\end{aligned}
$$

- Atribuir capacidade unitária a cada arco de E'
- Emparelhamento bipartido máximo em G equivale a encontrar fluxo máximo em G'

G'



Análise da Correcção

1. Dados G e G', se M é um emparelhamento em G, existe um fluxo f de valor inteiro em G', com $|f| = |M|$

- Seja M um emparelhamento, e $(u, v) \in M$
- Definir f utilizando arcos de M, $f(s, u) = f(u, v) = f(v, t) = 1$
- Para restantes arcos $(u, v) \in E'$, $f(u, v) = 0$
- Os caminhos $s \to u \to v \to t$ para todo o $(u, v) \in M$ são disjuntos em termos dos vértices, com excepção de s e t
- Como existem $|M|$ caminhos, cada um com uma contribuição de uma unidade de fluxo para o fluxo total f, $|f| = |M|$

Análise da Correcção

2. Dados G e G', se $|f|$ é um fluxo de valor inteiro em G', existe um emparelhamento M em G, com $|f| = |M|$

- Definir $M = \{(u, v) : u \in L, v \in R \text{ e } f(u, v) > 0\}$
  - Para cada $u \in L$, existe no máximo um $v \in R$ tal que $f(u, v) = 1$
  - Apenas um arco incidente com capacidade 1
  - Capacidades são inteiras
  - De forma simétrica para $v \in R$
- Logo M é um emparelhamento
- $|M| = f(L, R) = f(s, L) = f(s, V') = |f|$

Análise da Correcção

- Se todas as capacidades têm valor inteiro, então para fluxo máximo f, $|f|$ é inteiro
  - Indução no número de iterações do algoritmo genérico de Ford-Fulkerson
- Emparelhamento bipartido máximo $|M|$ em G corresponde a $|f|$, em que f é o fluxo máximo de G'
  - Se $|M|$ é emparelhamento máximo em G, e $|f|$ não é máximo em G', então existe f' que é máximo
  - f' é inteiro, $|f'| > |f|$
  - e f' corresponde a emparelhamento $|M'|$, com $|M'| > |M|$
    O que gera uma contradição!

Análise da Complexidade

- A aplicação do algoritmo genérico de Ford-Fulkerson tem complexidade $O(E\,|f^*|)$
- Emparelhamento bipartido máximo é não superior a $\min(|L|, |R|) = O(V)$ e tem valor inteiro (i.e., no caso do emparelhamento máximo, $|f^*| = O(V)$)
- Complexidade de identificação do emparelhamento bipartido máximo é $O(V\,E)$

Algoritmo de Hopcroft-Karp

- Usa uma BFS para procurar o caminho de aumento
- Complexidade: $O(E.\sqrt{V})$

Emparelhamento Bipartido Máximo

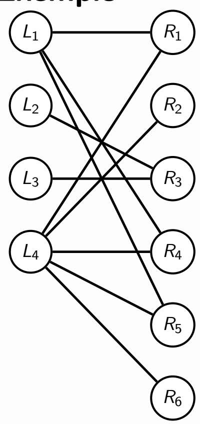
Teorema de Hall

Seja $G = (V, E)$ um grafo não dirigido, bipartido com $V = L \cup R$, onde $|L| \leq |R|$

Então, G contém um emparelhamento de cardinalidade $|L|$, se e só se, para cada $S \subseteq L$, $|S| \leq |N(S)|$

Emparelhamento Bipartido Máximo

Exemplo



Existe um emparelhamento de tamanho 4?

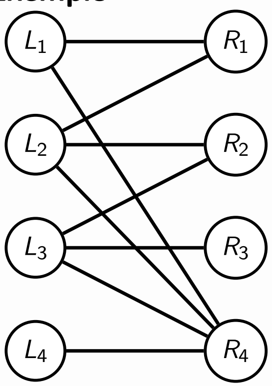
Se $S \subseteq L = \{L_2, L_3\}$, $N(S) = \{R_3\}$, então $|S| = 2$ e $|N(S)| = 1$

$|S| \not\leq |N(S)|$ o que viola o teorema de Hall

Não existe!

Emparelhamento Bipartido Máximo

Exemplo



Existe um emparelhamento de tamanho 4?

Sim existe! $M = \{(L_4, R_4), (L_3, R_3), (L_1, R_1), (L_2, R_2)\}$

Escape problem

26-1 Escape problem

An $n \times n$ ***grid*** is an undirected graph consisting of n rows and n columns of vertices, as shown in Figure 26.11. We denote the vertex in the ith row and the jth column by (i, j). All vertices in a grid have exactly four neighbors, except for the boundary vertices, which are the points (i, j) for which $i = 1$, $i = n$, $j = 1$, or $j = n$.

Given $m \leq n^2$ starting points $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_m, y_m)$ in the grid, the ***escape problem*** is to determine whether or not there are m vertex-disjoint paths from the starting points to any m different points on the boundary.

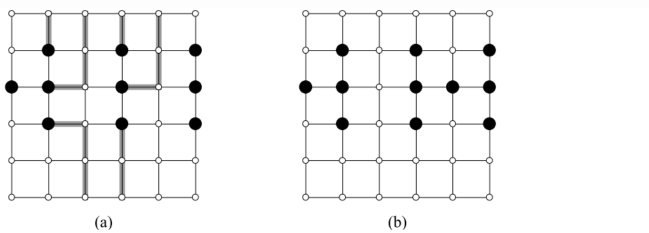


Figure 26.11 Grids for the escape problem. Starting points are black, and other grid vertices are white. **(a)** A grid with an escape, shown by shaded paths. **(b)** A grid with no escape.

Escape problem (variação - projecto 2 de 19/20)

TÉCNICO LISBOA

Descrição do Problema

Por causa do COVID-19, o Eng. António Caracol foi encarregue de projectar um sistema que permita aos cidadãos de Manhattan deslocar-se a um supermercado sem se cruzarem com nenhum outro cidadão. Estão disponíveis no mapa da cidade, as localizações dos supermercados, que se situam todos em esquinas e as moradas dos cidadãos que, para este efeito, se situam também nas esquinas.

Tratando-se de Manhatan, as ruas têm um arranjo em quadriculado absolutamente regular, e considera-se que em todas as ruas se circula em ambos os sentidos. As avenidas estão numeradas de 1 a M e são na direcção NORTE-SUL, enquanto que as ruas estão numeradas de 1 a N e são na direcção ESTE-OESTE. Os cruzamentos são definidos por um par de números, sendo que o par (A,B) corresponde ao cruzamento da Avenida A com a rua B.

Dados um conjunto de supermercados abertos e de cidadãos que querem fazer compras a uma dada hora, o sistema deverá determinar qual o número máximo de cidadãos que pode deslocar-se a um supermercado, sem correr o risco de se encontrar com outro cidadão, numa rua, avenida ou cruzamento, inicial, intermédio ou final do seu percurso.

Podem existir dois supermercados no mesmo cruzamento, mas apenas um deles poderá ser usado numa solução, para evitar contactos nesse local. Dois ou mais cidadãos podem morar no mesmo cruzamento, mas apenas um deles poderá sair à rua de cada vez, os que ficam em casa não levantam problemas de contágio. Da mesma forma, se um ou mais cidadãos morarem num cruzamento mas não sairem à rua, o cruzamento pode ser usado por outro cidadão para passar ou aceder a um supermercado, nesse ou noutro cruzamento.

EE 19/20 II.c

TÉCNICO LISBOA

Existem diversos eventos para os quais a procura de bilhetes é bastante superior aos disponíveis. Um desses eventos é o Mundial de Futebol. Suponha que no calendário temos um conjunto de m jogos, $\{J_1, ..., J_m\}$, tal que para cada jogo J_i (com $1 \leq i \leq m$) existem b_i bilhetes disponíveis. Existe um conjunto de n pessoas interessadas em adquirir bilhetes, $\{P_1, ..., P_n\}$, tal que cada pessoa P_k (com $1 \leq k \leq n$) pode pedir 1 bilhete para cada jogo que lhe interessa assistir. No entanto, devido a uma procura elevada de bilhetes foi decidido atribuir a cada pessoa apenas 1 bilhete para um único jogo. Pretende-se calcular a atribuição de bilhetes a pessoas.

EE 19/20 II.c

TÉCNICO LISBOA

a) Modele o problema da atribuição de bilhetes como um problema de fluxo máximo. A resposta deve deve incluir o procedimento utilizado para determinar a atribuição de bilhetes a pessoas.

Construção da rede de fluxo $G = (V, E, w, s, t)$:
Consideramos um vértice por jogo, um vértice por pessoa e dois vértices adicionais s e t, respectivamente a fonte e o destino. Formalmente:

$$V = \{J_i \mid 1 \leq i \leq m\} \cup \{P_k \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{s, t\}$$

$$\begin{aligned} E = &\{(s, P_i, 1) \mid 1 \leq i \leq n\} && P_i \text{ só tem direito a um único bilhete} \\ \cup &\{(P_k, J_i, 1) \mid J_i \in \textbf{wishes}(P_k)\} && P_k \text{ deseja assistir ao jogo } J_i \\ \cup &\{(J_i, t, b_i) \mid 1 \leq i \leq m\} && \text{Existem } b_i \text{ bilhetes disponíveis para } J_i \end{aligned}$$

Onde **wishes**(P_k) denota o conjunto dos jogos que a pessoa P_k está interessada em assistir. Uma vez calculado o fluxo máximo, f^*, é atribuído à pessoa P_k um bilhete para o jogo J_i se $f^*(P_k, J_i) = 1$.

EE 19/20 II.c

TÉCNICO LISBOA

b) Admitindo que o número n de pessoas interessadas em assistir a jogos é muito superior ao número m de jogos ($n >> m$) e também superior ao número de bilhetes disponíveis por jogo, indique o algoritmo que utilizaria para a calcular o fluxo máximo, bem como a respectiva complexidade assimptótica medida em função dos parâmetros do problema.
De entre os algoritmos de fluxo estudados nas aulas deve escolher aquele que garanta a complexidade assimptótica mais baixa para o problema em questão.
Nota: A resposta deverá necessariamente incluir as expressões que definem o número de vértices e de arcos da rede de fluxo proposta ($|V|$ e $|E|$, respectivamente) em função dos parâmetros do problema.

Complexidade:

- $|V| = m + n + 2 \in O(n + m)$
- $|E| \leq n + m.n + m \in O(n.m)$
- $|f^*| = \sum_{k=1}^{m} b_k \leq \sum_{k=1}^{m} n = O(n.m)$
- Ford-Fulkerson: $O(E\,|f^*|) = O((n.m)^2)$ ← **escolheria o FF!**
- Edmonds-Karp: $O(V\,E^2) = O((n+m).(n.m)^2)$

Questões?

Dúvidas?