CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL III

6. TEOREMAS DE GAUSS E DE STOKES

EXERCÍCIOS

1. Seja $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$ e $\vec{n}$ a sua normal exterior em cada ponto. Calcule $\iint_{\partial W} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$ para os seguintes campos de vectores:

(a) $\vec{F}(x,y,z) = y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + xz\,\mathbf{k}$.

(b) $\vec{F}(x,y,z) = (x-y)\,\mathbf{i} + (y-z)\,\mathbf{j} + (z-x)\,\mathbf{k}$.

2. Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$, onde S é a superfície do cilindro dado por $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$, e $\vec{F}(x,y,z) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + z\,(x^2+y^2)^2\,\mathbf{k}$ (considere a normal exterior).

3. Use o teorema da divergência de Gauss para calcular o fluxo do campo

$$\vec{F}(x,y,z) = (x-y)\,\mathbf{i} + (y-z)\,\mathbf{j} + (z-x)\ \mathbf{k}$$

através da esfera de centro na origem e raio 1, no sentido exterior.

4. Designando por W o cubo $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ e por $\vec{n}$ a sua normal exterior em cada ponto, calcule $\iint_{\partial W} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$ para os seguintes campos de vectores:

(a) $\vec{F}(x,y,z) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

(b) $\vec{F}(x,y,z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$.

5. Considere a meia superfície esférica superior de centro na origem e raio 1,

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{1 - x^2 - y^2},\ z \geq 0\},$$

orientada segundo a sua normal exterior. Verifique o teorema de Stokes para o campo de vectores $\vec{F}(x,y,z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$.

6. Utilize o teorema de Stokes para calcular $\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$ nos casos seguintes, considerando a normal exterior:

(a) S é a superfície definida por $x^2 + y^2 + 3z^2 = 1,\ z \leq 0$, e $\vec{F}(x,y,z) = y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j} + zx^3y^2\,\mathbf{k}$.

(b) S é a meia superfície esférica superior de centro na origem e raio 1 e $\vec{F}(x,y,z) = x^3\,\mathbf{i} - y^3\,\mathbf{j}$.

(c) $\vec{F}(x,y,z) = (xz + yz^2 + x)\,\mathbf{i} + (yxz^3 + y)\,\mathbf{j} + (x^2z^4)\,\mathbf{k}$ e $S = S_1 \cup S_2$, onde:

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$$
$$\text{e}\ \ S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1, z \geq 1\}.$$

7. Para $\vec{F}(x,y,z) = (3y, -xz, -yz^2)$, integre rot $\vec{F}$ na parte da superfície $2z = x^2+y^2$ abaixo do plano $z = 2$, quer directamente, quer através do teorema de Stokes (considere a normal exterior).

8. Verifique o teorema de Stokes para o helicóide $\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, \theta)$, com $(r,\theta) \in [0,1] \times [0,\pi/2]$, e para o campo de vectores $\vec{F}(x,y,z) = (z,x,y)$ (considere a normal exterior).

9. Considere o campo de vectores $\vec{F}(x,y,z) = (0,0,2)$ e a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 = 1,\ z > 0\}$$

orientada segundo a normal com terceira componente positiva.

(a) Usando o teorema da divergência de Gauss, calcule o fluxo de $\vec{F}$ através de S segundo a normal indicada.

(b) Determine $\Psi(x,y,z) = (\phi(x,y,z),0,0)$ tal que rot $\Psi = \vec{F}$ e $\phi(x,0,0) = 0$. Calcule o fluxo de $\vec{F}$ através de S (segundo a normal indicada) usando o teorema de Stokes.

10. Considere o campo de vectores $\vec{F}(x,y,z) = (-y,x,1)$ e a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = \sqrt{x^2+z^2},\ 0 < y < 1\}$$

orientada segundo a normal com segunda componente positiva.

(a) Usando o teorema da divergência de Gauss, calcule o fluxo de $\vec{F}$ através de S segundo a normal indicada.

(b) Determine $\Psi(x,y,z) = (0, \phi(x,y,z), -x^2/2)$ tal que rot $\Psi = \vec{F}$ e que $\phi(0,y,0) = 0$. Calcule o fluxo de $\vec{F}$ através de S (segundo a normal indicada) usando o teorema de Stokes.

11. Considere o campo de vectores $\vec{F}(x,y,z) = (-y,x,1)$ e a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2+y^2,\ x^2+y^2 < 1\}$$

orientada segundo a normal com terceira componente positiva.

(a) Usando o teorema da divergência de Gauss, calcule o fluxo de $\vec{F}$ através de S segundo a normal indicada.

(b) Determine um campo de vectores $\Psi(x,y,z) = (0, \psi(x), \phi(x,y))$ tal que rot $\Psi = \vec{F}$ e calcule o fluxo de $\vec{F}$ através de S (segundo a normal indicada) usando o teorema de Stokes.

(c) Verifique os resultados obtidos calculando o fluxo de $\vec{F}$ através de S (segundo a normal indicada) pela definição.

12. A fronteira de uma superfície regular S é constituída por uma linha fechada c. Se f e g forem duas funções de classe C^2, mostre que:

(a) $\int_c f\,\nabla g \cdot dg = \iint_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot \vec{n}\, dS$, quando g e $\vec{n}$ são compatíveis.

(b) $\int_c (f\,\nabla g + g\,\nabla f) \cdot dg = 0$.

13. Seja S uma superfície regular e $\vec{F}$ um campo de vectores perpendicular à tangente à fronteira (não vazia) de S. Mostre que

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = 0$$

para qualquer escolha de normal unitária $\vec{n}$.

14. Seja $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo de vectores de classe C^1 tal que $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ e $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$. Mostre que existe uma função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\vec{F} = \nabla f$ e $\operatorname{Lap} f = 0$.

15. Suponha que $\vec{F}(x, y, z)$ é um campo de vectores tangente à superfície fechada $S = \partial W$ de uma região elementar simétrica W. Prove que

$$\iiint_W (\operatorname{div} \vec{F}) \cdot\ dx\, dy\, dz = 0.$$

RESPOSTAS

1. **(a)** 0.
(b) $\frac{3\pi}{2}$.

2. 0.

3. 4π.

4. **(a)** 0.
(b) 3.

5. Cada integral na fórmula do teorema de Stokes é nulo.

6. **(a)** 2π.
(b) 0.
(c) 0.

7. 20π.

8. Cada integral na fórmula do teorema de Stokes tem o valor de $\pi/4$.

9. **(a)** 16π.
(b) $\Psi = (-2y, 0, 0)$; 16π.

10. **(a)** 0.
(b) $\Psi = (0, x + yz, -x^2/2)$; 0.

11. **(a)** π.
(b) $\Psi = (0, x, -(x^2 + y^2)/2)$; $-\pi$.
(c) π.