Análise e Síntese de Algoritmos

Programação Linear.

Prof. Pedro T. Monteiro

IST - Universidade de Lisboa

2024/2025

Contexto

- Revisão [CLRS, Cap.1-13]
  - Fundamentos; notação; exemplos
- Técnicas de Síntese de Algoritmos [CLRS, Cap.15-16]
  - Programação dinâmica [CLRS, Cap.15]
  - Algoritmos greedy [CLRS, Cap.16]
- Algoritmos em Grafos [CLRS, Cap.21-26]
  - Algoritmos elementares
  - Caminhos mais curtos [CLRS, Cap.22,24-25]
  - Árvores abrangentes [CLRS, Cap.23]
  - Fluxos máximos [CLRS, Cap.26]
- Programação Linear [CLRS, Cap.29]
  - Algoritmos e modelação de problemas com restrições lineares
- Tópicos Adicionais
  - Complexidade Computacional [CLRS, Cap.34]

Resumo

Motivação

Formulações

Reduções para Programação Linear

Motivação - Exemplo 1

Como ganhar uma eleição?

- Comprando-a, gastando dinheiro em campanhas :)
- No entanto, um político quer minimizar os seus custos
- Necessário fazer chegar a mensagem certa à demografia certa

Existem três regiões principais (demografia):

- Urbanos - 100.000 votantes registados
- Suburbanos - 200.000 votantes registados
- Rurais - 50.000 votantes registados

É preciso estimar o número de votos obtido por cada € gasto nas campanhas em cada tema

	Urbanos	Suburbanos	Rurais
Estradas	-2	5	3
Liberalização da Droga	8	2	-5
Subsídios Agricultura	0	0	10
Imposto sobre Gasolina	10	0	-2

- Cada entrada representa o número de (milhares) votos ganhos por cada 1.000€ gastos em campanhas
- Valores negativos indicam votos perdidos

Objectivo

- Queremos ganhar pelo menos 50% dos votos (100.000 urbanos, 200.000 suburbanos e 50.000 rurais)
- Minimizar o total a gastar nas campanhas

	Urbanos	Suburbanos	Rurais
Estradas	-2	5	3
Liberalização da Droga	8	2	-5
Subsídios Agricultura	0	0	10
Imposto sobre Gasolina	10	0	-2

Definição do problema

variáveis denotam quantia a gastar em campanha nos diferentes temas: x_1 = estradas; x_2 = droga; x_3 = subsídios; x_4 = imposto

$$\begin{array}{lcll} -2x_1 + 8x_2 + 0x_3 + 10x_4 & \geq & 50 & (50\%\ 100.000) \\ 5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 & \geq & 100 & (50\%\ 200.000) \\ 3x_1 - 5x_2 + 10x_3 - 2x_4 & \geq & 25 & (50\%\ 50.000) \end{array}$$

Programa Linear

Combinação da função objectivo com as restrições lineares

Exemplo

$$\begin{array}{lll} \text{minimizar} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & \\ \text{sujeito a} & -2x_1 + 8x_2 + 0x_3 + 10x_4 & \geq 50 \\ & 5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 & \geq 100 \\ & 3x_1 - 5x_2 + 10x_3 - 2x_4 & \geq 25 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 & \end{array}$$

Solução do programa linear $\Rightarrow$ estratégia óptima

Motivação - Exemplo 2

Uma pessoa tem insuficiências nos nutrientes N_a, N_b, N_c.
No entanto, estes nutrientes podem ser encontrados em diferentes tipos de comida.
Considere a seguinte tabela que mostra a quantidade de cada nutriente N_a, N_b, N_c por cada dose unitária de comida x_1, x_2, x_3, x_4.

	N_a	N_b	N_c
x_1	3	10	5
x_2	8	4	7
x_3	10	5	2
x_4	0	15	10

Motivação - Exemplo 2

Para suprimir as suas necessidades, deverá consumir 40 unidades do nutriente N_a e N_c, assim como 50 unidades de N_b. No entanto, o custo por cada dose unitária de comida varia da seguinte forma: $custo(x_1) = 4$, $custo(x_2) = 3$, $custo(x_3) = 2$, e $custo(x_4) = 6$.

Assumindo que pode comprar doses parciais, qual a quantidade de cada tipo de comida a consumir para ficar saudável e da forma mais barata possível?

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimizar} & 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 & \\
\text{sujeito a} & 3x_1 + 8x_2 + 10x_3 + 0x_4 & \geq 40 \\
 & 10x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 15x_4 & \geq 50 \\
 & 5x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 10x_4 & \geq 40 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 &
\end{array}
$$

Motivação - Exemplo 3

Novos horários do IST - MEPP

Restrições

- aulas teóricas de UCs do mesmo ano/período não se podem sobrepor
- um turno X tem de poder ter acesso a pelo menos uma aula prática de cada UC desse ano/periodo
- um professor não pode estar a atribuído a mais de uma aula ao mesmo tempo
- tem de haver um intervalo de tempo t entre aulas que mudem de campus para qualquer aluno/professor
- uma sala não pode ter mais de uma aula atribuída ao mesmo tempo
- ...

Função objectivo: minimizar

- intervalos sem aulas
- mudanças entre campus
- ...

Formulação Geral

- Optimizar (minimizar ou maximizar) função linear sujeita a conjunto de restrições lineares
- Função linear (função objectivo):

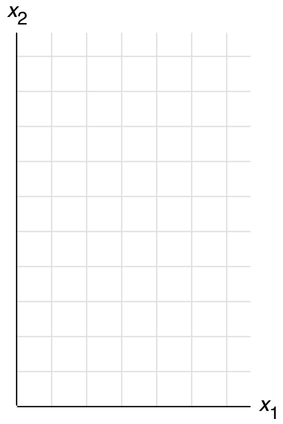
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

- Restrições lineares:

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad \begin{array}{c} \geq \\ = \\ \leq \end{array} \; b_i$$

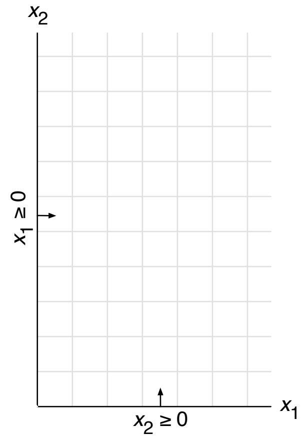
Exemplo
maximizar
sujeito a

$$x_1, x_2 \geq 0$$



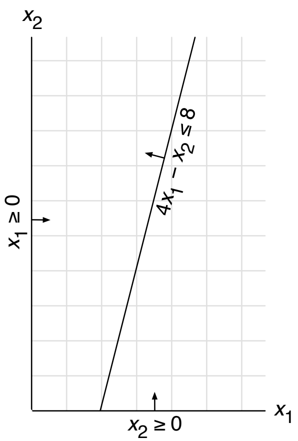
Exemplo
maximizar
sujeito a

$$x_1, x_2 \geq 0$$



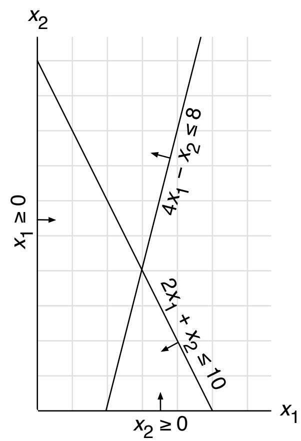
Exemplo
maximizar
sujeito a

$$\begin{array}{rcrcr} 4x_1 & - & x_2 & \leq & 8 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$



Exemplo
maximizar
sujeito a

$$\begin{array}{rcrcr} 4x_1 & - & x_2 & \leq & 8 \\ 2x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

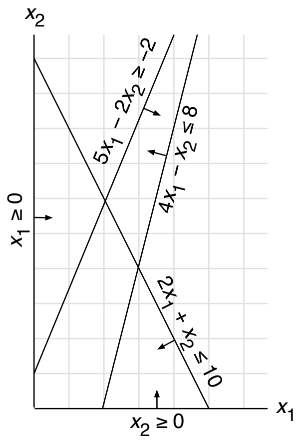


Exemplo

maximizar

sujeito a

$$\begin{array}{rcrcr} 4x_1 & - & x_2 & \leq & 8 \\ 2x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \\ 5x_1 & - & 2x_2 & \geq & -2 \\ & x_1, x_2 & & \geq & 0 \end{array}$$

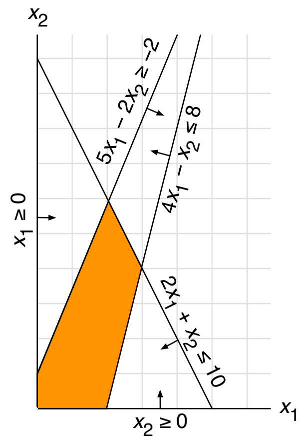


Exemplo

maximizar

sujeito a

$$\begin{array}{rcrcr} 4x_1 & - & x_2 & \leq & 8 \\ 2x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \\ 5x_1 & - & 2x_2 & \geq & -2 \\ & x_1, x_2 & & \geq & 0 \end{array}$$

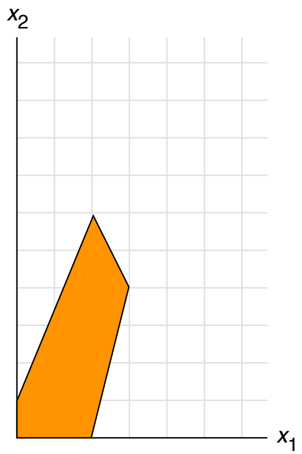


Exemplo

maximizar $x_1 + x_2$

sujeito a

$$\begin{array}{rcrcr} 4x_1 & - & x_2 & \leq & 8 \\ 2x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \\ 5x_1 & - & 2x_2 & \geq & -2 \\ & x_1, x_2 & & \geq & 0 \end{array}$$

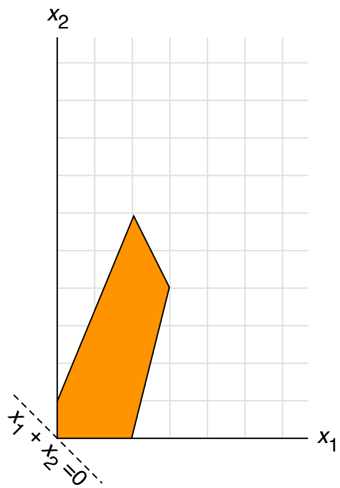


Exemplo

maximizar $x_1 + x_2$

sujeito a

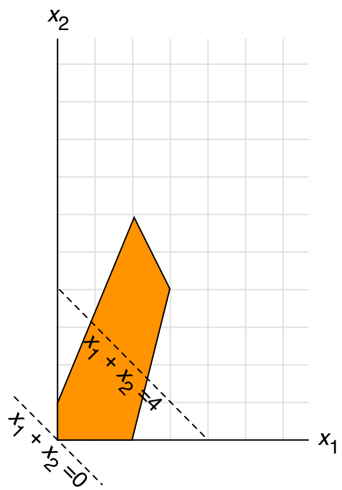
$$\begin{array}{rcrcr} 4x_1 & - & x_2 & \leq & 8 \\ 2x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \\ 5x_1 & - & 2x_2 & \geq & -2 \\ & x_1, x_2 & & \geq & 0 \end{array}$$



Interpretação geométrica

Exemplo

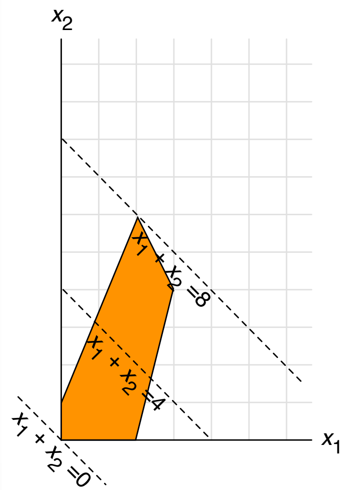
$$
\begin{array}{lrcrcr}
\text{maximizar} & x_1 & + & x_2 & & \\
\text{sujeito a} & & & & & \\
& 4x_1 & - & x_2 & \leq & 8 \\
& 2x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \\
& 5x_1 & - & 2x_2 & \geq & -2 \\
& & x_1, x_2 & & \geq & 0
\end{array}
$$



Interpretação geométrica

Exemplo

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\text{maximizar} & x_1 & + & x_2 & & \\
\text{sujeito a} & & & & & \\
& 4x_1 & - & x_2 & \leq & 8 \\
& 2x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \\
& 5x_1 & - & 2x_2 & \geq & -2 \\
& & x_1, x_2 & & \geq & 0
\end{array}
$$

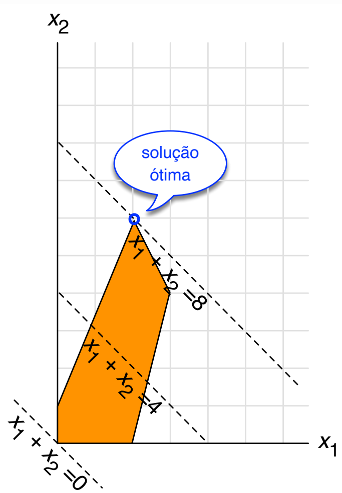


Interpretação geométrica

Exemplo

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\text{maximizar} & x_1 & + & x_2 & & \\
\text{sujeito a} & & & & & \\
& 4x_1 & - & x_2 & \leq & 8 \\
& 2x_1 & + & x_2 & \leq & 10 \\
& 5x_1 & - & 2x_2 & \geq & -2 \\
& & x_1, x_2 & & \geq & 0
\end{array}
$$

Solução: $x_1 = 2, \quad x_2 = 6$

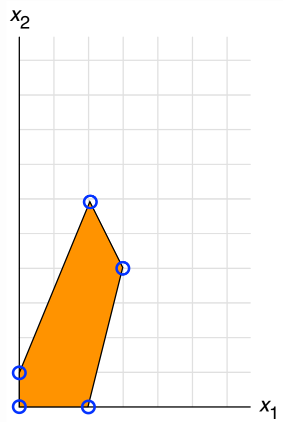


Definições

- Solução exequível: qualquer solução que satisfaça o conjunto de restrições
- A cada solução exequível corresponde um valor (custo) da função objectivo
- O conjunto de soluções exequíveis é designado por região exequível
- A região exequível é um conjunto convexo no espaço n-dimensional
  - Conjunto convexo S: qualquer ponto de um segmento que liga quaisquer dois pontos em S está também em S
  - S é designado por simplex

Teorema fundamental Programação Linear

A solução óptima encontra-se num vértice do simplex



Solução: exequível ou não exequível

Valor da função objectivo: valor objectivo

Valor máximo/mínimo: valor objectivo óptimo

Se formulação não tem soluções exequíveis diz-se não exequível; caso contrário diz-se exequível

Se formulação é exequível, mas sem solução óptima, diz-se não limitado

Dois programas lineares L e L' são equivalentes se para cada solução solução exequível $\bar{x}$ para L com valor objectivo z, existe uma solução exequível $\bar{x}'$ para L' com valor objectivo z, e vice-versa

Forma Standard

$$\begin{array}{lll} \text{maximizar} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ \text{sujeito a} & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & i = 1, 2, \dots, m \\ & x_j \geq 0 & j = 1, 2, \dots, n \end{array}$$

Todos os valores c_j, a_{ij}, b_i são valores reais

Representação Matricial

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{sujeito a} & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{array}$$

Em que $\mathbf{A} = (a_{ij}), \mathbf{b} = (b_i), \mathbf{c} = (c_j)$ e $\mathbf{x} = (x_j)$

Conversão para Forma Standard

Passo 1: Se for um problema de minimização

⇒ Converter para maximização multiplicando coeficientes por -1

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{minimizar} & -2x_1 & + & 3x_2 & & \\ \text{sujeito a} & & & & & \\ & x_1 & + & x_2 & = & 7 \\ & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & & & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcrcr} \text{maximizar} & 2x_1 & - & 3x_2 & & \\ \text{sujeito a} & & & & & \\ & x_1 & + & x_2 & = & 7 \\ & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & & & \geq & 0 \end{array}$$

Conversão para Forma Standard

Passo 2: Variáveis sem restrição de serem não negativas
⇒ Substituir cada ocorrência de x_i por $(x_{i1} - x_{i2})$,
em que x_{i1} e x_{i2} são novas variáveis

$$\begin{array}{rrcrcrl}
\text{maximizar} & 2x_1 & - & 3x_2 & & & \\
\text{sujeito a} & & & & & & \\
& x_1 & + & x_2 & = & 7 \\
& x_1 & - & 2x_2 & \leq & 4 \\
& x_1 & & & \geq & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrcrcrcl}
\text{maximizar} & 2x_1 & - & 3x'_2 & + & 3x''_2 & & \\
\text{sujeito a} & & & & & & & \\
& x_1 & + & x'_2 & - & x''_2 & = & 7 \\
& x_1 & - & 2x'_2 & + & 2x''_2 & \leq & 4 \\
& & & x_1, x'_2, x''_2 & & & \geq & 0
\end{array}$$

Conversão para Forma Standard

Passo 3: Restrições com igualdade
⇒ Introduzir duas restrições, uma com $\leq$ e outra com $\geq$

$$\begin{array}{rrcrcrcl}
\text{maximizar} & 2x_1 & - & 3x'_2 & + & 3x''_2 & & \\
\text{sujeito a} & & & & & & & \\
& x_1 & + & x'_2 & - & x''_2 & = & 7 \\
& x_1 & - & 2x'_2 & + & 2x''_2 & \leq & 4 \\
& & & x_1, x'_2, x''_2 & & & \geq & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrcrcrcl}
\text{maximizar} & 2x_1 & - & 3x'_2 & + & 3x''_2 & & \\
\text{sujeito a} & & & & & & & \\
& x_1 & + & x'_2 & - & x''_2 & \leq & 7 \\
& x_1 & + & x'_2 & - & x''_2 & \geq & 7 \\
& x_1 & - & 2x'_2 & + & 2x''_2 & \leq & 4 \\
& & & x_1, x'_2, x''_2 & & & \geq & 0
\end{array}$$

Conversão para Forma Standard

Passo 4: Restrições com $\geq$
⇒ Multiplicar por -1 a restrição

$$\begin{array}{rrcrcrcl}
\text{maximizar} & 2x_1 & - & 3x'_2 & + & 3x''_2 & & \\
\text{sujeito a} & & & & & & & \\
& x_1 & + & x'_2 & - & x''_2 & \leq & 7 \\
& x_1 & + & x'_2 & - & x''_2 & \geq & 7 \\
& x_1 & - & 2x'_2 & + & 2x''_2 & \leq & 4 \\
& & & x_1, x'_2, x''_2 & & & \geq & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrcrcrcr}
\text{maximizar} & 2x_1 & - & 3x'_2 & + & 3x''_2 & & \\
\text{sujeito a} & & & & & & & \\
& x_1 & + & x'_2 & - & x''_2 & \leq & 7 \\
& -x_1 & - & x'_2 & + & x''_2 & \leq & -7 \\
& x_1 & - & 2x'_2 & + & 2x''_2 & \leq & 4 \\
& & & x_1, x'_2, x''_2 & & & \geq & 0
\end{array}$$

Conversão para a Forma Slack

Objectivo: trabalhar apenas com igualdades

- Todas as restrições, excepto as restrições das variáveis serem não negativas, são igualdades
- Para cada restrição introduzir uma nova variável s_i (variável de slack)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \qquad s_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$$

$$s_i = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \qquad s_i \geq 0$$

Conversão da Forma Standard para Forma Slack

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$$

$$x_{n+i} \geq 0$$

Conversão para a Forma Slack

Nas expressões: $x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$

- Variáveis expressas em função de outras variáveis designam-se por variáveis básicas
- As variáveis que definem as variáveis básicas designam-se por variáveis não-básicas
- A solução básica é obtida quando se colocam as variáveis não-básicas com valor 0

Na Forma Slack, a função objectivo é definida como:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Conversão para a Forma Slack

N: Conjunto de índices das variáveis não básicas, $|N| = n$

B: Conjunto de índices das variáveis básicas, $|B| = m$

$N \cup B = \{1, 2, \ldots, n+m\}$

Forma Slack descrita por: (N, B, A, b, c, v)

v: constante na função objectivo

$$\begin{aligned} z &= v + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ x_{n+i} &= b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \quad i = 1, 2, \ldots, m \end{aligned}$$

Exemplo: conversão para forma Slack (se já estiver na forma Standard)

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 \\ \text{sujeito a} & \\ & x_1 + x_2 - x_3 \leq 7 \\ & -x_1 - x_2 + x_3 \leq -7 \\ & x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} z &= 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 \\ x_4 &= 7 - x_1 - x_2 + x_3 \\ x_5 &= -7 + x_1 + x_2 - x_3 \\ x_6 &= 4 - x_1 + 2x_2 - 2x_3 \end{aligned}$$

CLRS Ex 29.1-5

Converta o programa linear para a forma Slack

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & 2x_1 - 6x_3 \\ \text{sujeito a} & \\ & x_1 + x_2 - x_3 \leq 7 \\ & 3x_1 - x_2 \geq 8 \\ & -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 0 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} z &= 2x_1 - 6x_3 \\ x_4 &= 7 - x_1 - x_2 + x_3 \\ x_5 &= -8 + 3x_1 - x_2 \\ x_6 &= - x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

Reduções para Programação Linear

Fluxo Máximo $\Rightarrow$ PL

$$
\begin{array}{lllr}
\text{maximizar} & \sum\limits_{v \in V} f(s, v) & & \\
\text{sujeito a} & f(u, v) \leq c(u, v) & \forall u, v \in V & \text{(capacidade)} \\
 & \sum_{v \in V} f(v, u) = \sum_{v \in V} f(u, v) & \forall u \in V \setminus \{s, t\} & \text{(conservação)}
\end{array}
$$

Usar PL será mais eficiente do que um algoritmo de max-flow?

E se considerarmos duas entidades diferentes?
$f_1(u, v) + f_2(u, v) \leq c(u, v) \quad \forall u, v \in V$

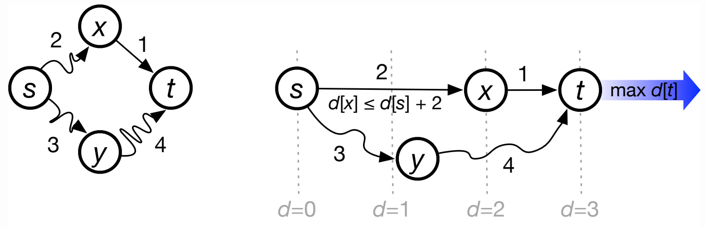
E se considermos restrições adicionais, etc?

Reduções para Programação Linear

Caminhos Mais Curtos $\Rightarrow$ PL

Caminhos mais curtos entre s e t:

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximizar} & d[t] \\
\text{sujeito a} & d[v] \leq d[u] + w(u, v), \ \ \forall (u, v) \in E \\
 & d[s] = 0
\end{array}
$$



Questões?

Dúvidas?