

全国大学生数学建模竞赛编写的 $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ 模板

摘要

关键字： $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ 图片 表格 公式

一、问题重述

二、模型假设

三、符号说明

四、模型求解

4.1 着陆准备轨道的建模

当嫦娥三号在着陆准备轨道上运动时，主要受到月球对其的引力；而其它天体的引力及耗散力极其微弱，可以忽略不计。因此，将运动过程简化为飞行器与月球的两体运动。在月球系下，飞行器围绕月球做椭圆轨道运动，其运动轨迹如图1所示。

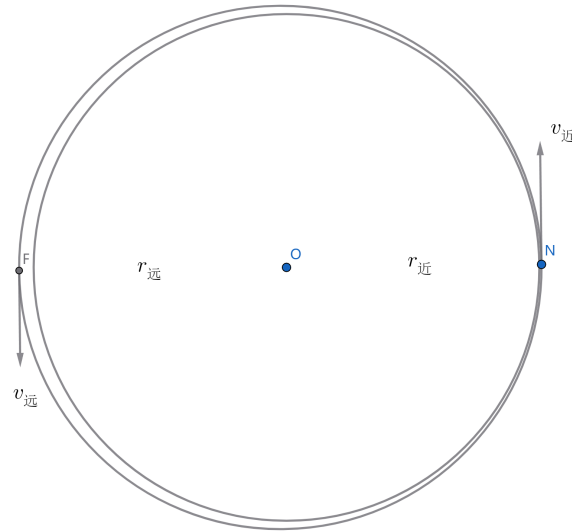


图 1 着陆准备轨道示意图

由角动量守恒定律与能量守恒定律可得

$$\begin{cases} m_0 v_N r_N = m_0 v_F r_F \\ \frac{1}{2} m_0 v_N^2 - \frac{GMm_0}{r_N} = \frac{1}{2} m_0 v_F^2 - \frac{GMm_0}{r_F} \end{cases} \quad (1)$$

故

$$v_F = \frac{r_N}{r_F} v_N \quad (2)$$

$$v_N^2 - v_F^2 = 2GM\left(\frac{1}{r_N} - \frac{1}{r_F}\right)$$

将 (2) 式代入得

$$\left(1 - \frac{r_N^2}{r_F^2}\right) v_N^2 = 2GM\left(\frac{1}{r_N} - \frac{1}{r_F}\right)$$

因此

$$v_N = \sqrt{\frac{2GM r_F}{r_N(r_N + r_F)}} \quad (3)$$

4.2 主减速段轨道的建模

当飞行器到达近月点 N 时，其将转轨进入主减速段轨道。由题意可知，该段轨道的几何形状为抛物线。因此，飞行器在该段内具有恒定的受力。即

$$m\vec{g} + \vec{T} \equiv \vec{C}$$

而轨道初速度应与近月点相同，即

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_N$$

此外，题目还要求了主减速末端的速率 v_1 为一确定值。

综上，轨道形状大致如图2所示。

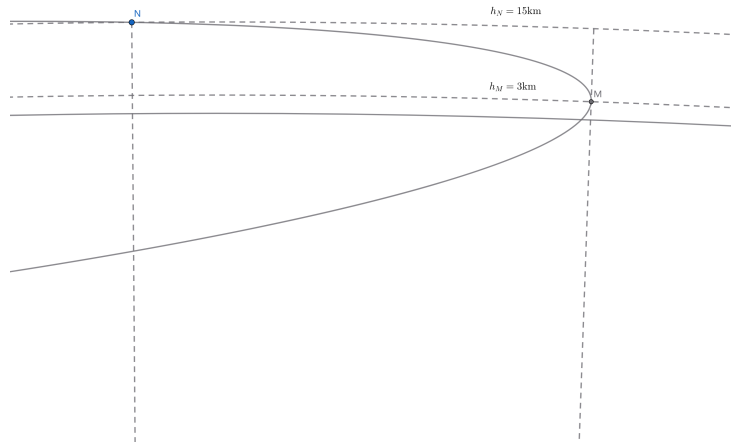


图 2 主减速段轨道示意图

飞行器在该轨道内的运动过程时间较短，在球面方向内的运动距离相对月球半径较小。因此，可以将该过程近似至一直角坐标系内，竖直向下记为 x 轴正方向，球面方向记作 y 轴，如图3所示。

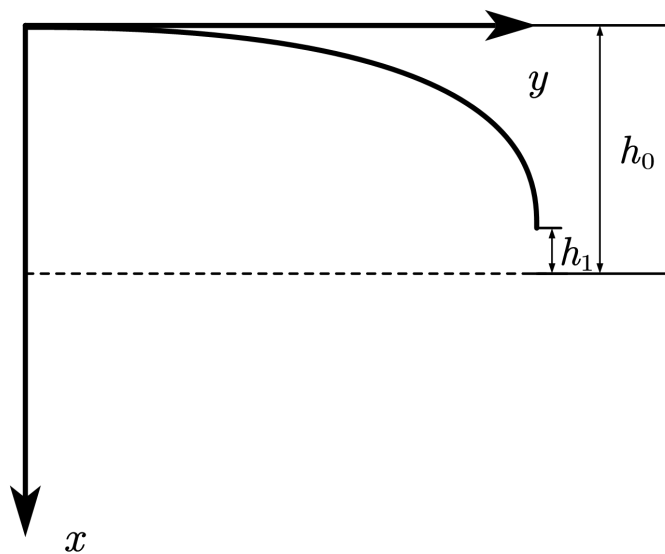


图 3 主减速段在直角坐标系中的近似

此外，由于该过程中，距月心的距离变化 Δr 相对月球半径 R 的相对变化较小，故可以将重力加速度近似为一常量，其值取高度中值处的重力加速度 g 。

该阶段飞行器的受力情况，如图4所示。

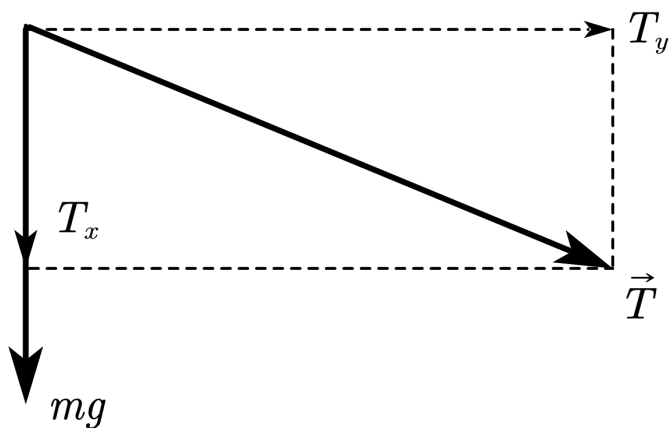


图 4 飞行器在主减速段的受力情况

因此，可以列得牛顿第二定律

$$\begin{cases} T_x + mg = ma_x \\ T_y = ma_y \end{cases} \quad (4)$$

同时，满足比冲公式

$$T = v_e |\dot{m}|$$

设质量减少的速率为 v_m ，因此

$$v_m = |\dot{m}| = \frac{T}{v_e} = \frac{\sqrt{T_x^2 + T_y^2}}{v_e} \quad (5)$$

则质量关于时间的函数 $m(t)$ 满足

$$m(t) = m_0 - v_m t \quad (6)$$

将 (??) 式代入 (??) 式，整理后得

$$\begin{cases} \ddot{x} = g + \frac{T_x}{m_0 - v_m t} \\ \ddot{y} = \frac{T_y}{m_0 - v_m t} \end{cases} \quad (7)$$

五、模型检验

参考文献

- [1] 刘海洋. \LaTeX 入门[J]. 电子工业出版社, 北京, 2013.
- [2] 全国大学生数学建模竞赛论文格式规范 (2020 年 8 月 25 日修改).
- [1] <https://www.latexstudio.net>