

基于LGL伪光谱-SQP算法的嫦娥三号月球软着陆轨道最优化设计

刘怡¹ 武红芳²

(1. 华北水利水电大学 河南郑州 450003; 2. 河南省汝州市质量技术监督局检验检测中心 河南汝州 467500)

摘要: 论文主要研究嫦娥三号的软着陆过程。根据万有引力与能量守恒定律得到嫦娥三号在近月点和远月点速度的大小与方向, 根据牛顿运动定律, 求出近月点与远月点的位置, 建立三维动力学模型, 利用LGL伪光谱-SQP算法将问题转化为非线性规划问题, 进一步优化得出结论。

关键词: 万有引力定律 三维动力学 LGL伪光谱 SQP算法
中图分类号: V412 文献标识码: A

文章编号: 1672-3791(2015)06(c)-0189-02

嫦娥三号于2013年12月2日1时30分成功发射, 12月6日抵达月球轨道, 它在着陆准备轨道上的运行质量为2.4t, 其安装在下部的主减速发动机能够产生1500N-7500N的可调节推力, 其比冲(即单位质量的推进剂产生的推力)为2940m/s, 可以满足调整速度的控制要求。四周安装有姿态调整发动机, 在给定主减速发动机的推力方向后, 能够自动通过多个发动机的脉冲组合实现各种姿态的调整控制。其预定着陆点为19.51W, 44.12N, 海拔为-2641m, 在高速飞行的情况下, 要保证准确地月球预定区域内实现软着陆, 关键问题是着陆轨道与控制策略的设计, 基本要求为: 着陆准备轨道为近月点15km, 远月点100km的椭圆形轨道; 着陆轨道为从近月点至着陆点, 其软着陆过程共分为6个阶段, 要求满足每个阶段在关键点所处的状态; 尽量减少软着陆过程的燃料消耗。

1 确定近月点、远月点及其相应速度

1.1 求近月点与远月点的速度

由万有引力定律可以求得在嫦娥三号在近月点与远月点的速度比, 再根据能量守恒定律, 在知道月球与嫦娥三号质量的情况下即可求出近月点与远月点的速度的大小。通过运动的规律可知嫦娥三号在近月点与远月点的方向与轨道方向相切。

模型的建立与求解如下所示。

设近月点为A, 远月点为B, A、B两点的曲率半径为r, 月心与近月点的距离为a, 月心与远月点的距离为b, 月球平均半径为R, 月球质量为M, 嫦娥三号着陆器质量m, 万有引力常量G。(M=7.3477×10²²kg, G=6.67191×10⁻¹¹N·m²/kg² R=1737.013km)

则:

$$a=R+15\text{ km}$$

$$b=R+100\text{ km}$$

由万有引力相关定律可知: $G M m / d^2 = m v^2 / r$

可得

$$V_a / V_b = b / a$$

由能量守恒定律, 对着陆器在准备轨道的近月点和远月点进行分析可知:

$$E = 1/2 m v^2 - G M m / d$$

$$\text{又 } E_a = E_b \text{ 得}$$

$$V_a \approx 1.69245 \text{ km/s} \quad V_b \approx 1.61414 \text{ km/s}$$

由天体运动规律可知, 近月点、远月点的

速度方向与轨道方向相切。

1.2 求近月点与远月点的位置

假设近月点是距月球表面15km圆上的任意一点, 根据牛顿运动定律, 利用近月点的速度与推力等已知条件, 首先算出推力与水平方向的夹角, 由此算出水平位移, 进而求得纬度的变化值, 利用落地点的经纬度即可求出近月点的经纬度, 又远月点与近月点与月心的连线为一条直线则可求出远月点的经纬度。

模型的建立与求解如下所示。

主减速完成后的垂直速度 $V_j \approx 57 \text{ m/s}$, 嫦娥三号从近月点到主减速完成竖直方向的位移 $h = 12000 \text{ m}$ 。

由牛顿运动定律:

$$\textcircled{1} v^2 = 2ax; \text{ 则垂直加速度 } a' = 0.135375 \text{ m/s}^2,$$

$$\text{又: } a' = g - \frac{F \sin \theta}{m}, \text{ 则 } \sin \theta = 0.4793, \theta = 28.639693^\circ$$

$$\textcircled{2} v = at \text{ (初速度为0) 则主减速阶段所用的时间 } t_j = 398 \text{ s},$$

$$\textcircled{3} x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \text{ 则水平位移 } x_i = 436370.958 \text{ m}$$

又月球的半径 $R = 1737.013 \text{ km}$, 主减速完成时的高度 $h' = 3 \text{ km}$, 则把水平位移近似为弧度后其所对应的弧度变化角

$$\theta_i = \frac{x_i}{R + h'} \cdot \frac{360^\circ}{2\pi} = 15.0351^\circ, \text{ 进而近月点的纬度}$$

$S = 29.0849^\circ \text{N}$, 近月点、远月点的位置为: 经纬度(19.51W, 29.0849N), 高度15km; 远月点的位置为(19.52E, 60.9151S), 高度为100km。

2 确定着陆轨道和最优化控制策略

2.1 模型的建立

建立月球精确软着陆三维球体动力学模型, 月心惯性坐标系 $oxyz$, 设原点位于月球中心, oz 轴指向动力下降起始点, ox 轴位于环月轨道平面内且指向前进方向, oy 轴按右手定则确定, 着陆器在 $oxyz$ 系下的位置用极坐标 (r, α, β) 来表示, r 为月心到着陆器的距离矢量(r 表示大小), α 和 β 表示经度和纬

度。

轨道坐标系 $o'xyz$, 原点位于着陆器的质心 o' , z' 轴为月心指向着陆器质心的方向, $o'x$ 轴位于当地水平面内指向着陆器运动方向, $o'y$ 轴按照右手定则确定。制动力 F 的方向与着陆器本体轴重合, 着陆器相对于轨道坐标系的姿态角分别为偏航角 ψ 和俯仰角 θ 。绕正 $o'z$ 轴逆时针旋转为正, θ 绕正 $o'y$ 轴顺时针旋转为正。忽略月球的非球形摄动和自转影响, 着陆器质心动力学方程为^[1]:

$$\left. \begin{aligned} \dot{u} &= \frac{F \cos \theta \cos \psi}{m} - \frac{uv}{r} + \frac{v^2}{r \tan \beta} \\ \dot{v} &= \frac{F \cos \theta \cos \psi}{m} - \frac{v\omega}{r} - \frac{uv}{r \tan \beta} \\ \dot{\omega} &= \frac{F \sin \theta}{m} - \frac{\mu_m}{r^2} + \frac{v^2 + u^2}{r} \\ \dot{\alpha} &= \frac{v}{r \sin \beta}, \dot{\beta} = \frac{u}{r}, \dot{m} = -\frac{F}{I_s} \end{aligned} \right\}$$

式中 u 为月球引力常数; m 为着陆器质量; u, v, ω 分别为着陆器速度在轨道坐标系3轴向的分量为推进发动机的比冲。

约束条件如下。

(1) 边值约束条件:

月球精确软着陆初值约束条件:

$$x_0 = [u_0, v_0, w_0, r_0, \alpha_0, \beta_0, m_0]^T$$

终值约束条件

$$x_f = [u_f, v_f, w_f, r_f, \alpha_f, \beta_f]^T$$

(2) 过程约束条件:

在整个月球精确软着陆过程中, 某些参数应当满足一定的实际约束, 主要有以下几个。

① 着陆器控制约束

$$F_{\min} \leq F(t) \leq F_{\max}$$

② 着陆器高度约束 $r(t) \geq r_m$

③ 着陆器质量约束 $m \leq m(t) \leq m_0$

式中 F_{\max} 为推力器所能提供的推力上限, r_m 为月球半径, m 为着陆器净质量, m_0 为着陆器初始质量。

性能指标

在月球精确软着陆的最优轨迹规划问题中, 性能指标应选取燃料最省, 即:

$$Q = \int_{t_0}^{t_f} F(t)dt \rightarrow \min$$

2.2 利用 LGL 伪光谱法将问题变为非线性规划

LGL伪光谱方法基本原理如下。

(1)状态逼近。

将时间域通过区间变换离散化得到LGL节点,在LGL节点上离散状态变量和控制变量,并以LGL节点构造Lagrange插值多项式来逼近状态变量和控制变量

(2)化为代数方程。

所涉及到的积分和微分运算,把微分动力学方程约束转化LGL节点处的代数约束,目的在于将目标函数和约束条件都化为了代数方程,成为约束非线性规划问题标准形式。

离散变换计算如下。

(1)参数的优化及方程的处理。

区间变换:

$$\varepsilon = 2t - (t_0 + t_f) / (t_f - t_0), \quad \varepsilon \in [-1, 1]$$

采用LGL伪谱法离散,LGL节点数为 $N+1$,将 ε_i ($i=0, 1, \dots, N$)作为LGL节点,其中 $\varepsilon_0 = -1, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{N-1}$ 为 $L_N(\varepsilon)$ 的零点, $\varepsilon_N = 1, L_N(\varepsilon)$ 为 N 次Legendre,且 $L_N(\varepsilon) = \delta L_N(\varepsilon) / \delta \varepsilon$ 用插值多项式分别逼近状态和控制变量。

$$x(\varepsilon) \approx X(\varepsilon) = \sum_{i=0}^N \xi_i(\varepsilon) X(\varepsilon_i)$$

$$u(\varepsilon) \approx U(\varepsilon) = \sum_{i=0}^N \xi_i(\varepsilon) U(\varepsilon_i)$$

其中,Lagrange正交多项式

$$\xi_i(\varepsilon) = \frac{(\varepsilon^2 - 1)L(\varepsilon)}{N(N+1)L_N(\varepsilon_i)(\varepsilon - \varepsilon_i)}$$

近似控制和状态分别为:

$$U(\varepsilon) = [F_L(\varepsilon), \theta_L(\varepsilon), \psi_L(\varepsilon)]^T$$

$$X(\varepsilon) = [u_L(\varepsilon), v_L(\varepsilon), w_L(\varepsilon), r_L(\varepsilon),$$

$$\alpha_L(\varepsilon), m_L(\varepsilon)]^T$$

确定待优化参数和:

$$\{u_L(\varepsilon_i), v_L(\varepsilon_i), w_L(\varepsilon_i), r_L(\varepsilon_i), \alpha_L(\varepsilon_i), \beta_L(\varepsilon_i), m_L(\varepsilon_i), F_L(\varepsilon_i), \theta_L(\varepsilon_i), \psi_L(\varepsilon_i)\}_{i=0,1,\dots,N}$$

对动力学微分方程作近似处理:

$$\dot{x}(\varepsilon_i) \approx \dot{X}(\varepsilon_i) = \sum_{i=0}^N \dot{\xi}_i(\varepsilon_i) X(\varepsilon_i) = \sum_{i=0}^N D_{ji}(X(\varepsilon_i),$$

$$X_i = [u_L(\varepsilon), v_L(\varepsilon), w_L(\varepsilon), r_L(\varepsilon), \alpha_L(\varepsilon), \beta_L(\varepsilon), m_L(\varepsilon)]^T$$

$$U_i = [F_L(\varepsilon), \theta_L(\varepsilon), \phi_L(\varepsilon)]^T, \quad \text{且}$$

$$D_L = \begin{pmatrix} D_{00} & D_{0N} \\ \vdots & \vdots \\ D_{N0} & D_{NN} \end{pmatrix} \otimes I_{7 \times 7}$$

将动力学约束简写为:

$$D_L \begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_N \end{pmatrix} - \frac{t_f - t_0}{2} \begin{pmatrix} f(X_0, U_0) \\ \vdots \\ f(X_N, U_N) \end{pmatrix} = 0$$

对积分型的性能指标处理如下:

$$J_L = \frac{t_f - t_0}{2} \int_{-1}^1 F(\varepsilon) d\varepsilon \approx \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{i=0}^N F_L(\varepsilon_i) \omega_i$$

式中Gauss-Lobatto积分公式的加权系数

$$\omega_i = \frac{2}{N(N+1)[L_N(\varepsilon_i)]^2}$$

(2)约束条件^[2]

①初值约束:

$$I_{7 \times 7} X(-1) = X_0 = [u_0, v_0, w_0, r_0,$$

$$\alpha_0, \beta_0, m_0]^T$$

②终值约束:

$$[I_{6 \times 6}, 0_{6 \times 1}] X(1) = X_f = [u_f, v_f, w_f,$$

$$w_f, r_f, \alpha_f, \beta_f]^T$$

③控制约束:

$$F_{\min} \leq F_L(\varepsilon_i) \leq F_{\max} \quad (i = 0, 1, \dots, N)$$

④高度约束:

$$r_L(\varepsilon_i) \geq r_m \quad (i = 0, 1, \dots, N)$$

⑤质量约束:

$$m \leq m_L(\varepsilon_i) \leq m_0 \quad (i = 0, 1, \dots, N)$$

(3)问题的转化。

将原轨迹优化的最优控制问题转化为指标和约束皆为代数方程的非线性规划问题:寻找一组最优的参数 $\{X^*(\varepsilon_i), U^*(\varepsilon_i), t_f^*\}$ ($i = 0, 1, \dots, N$),在满足约束条件的情况下,使得性能指标最优。离散后的非线性规划问题很可能无法找到可行解,这就需要在问题P1的约束条件中引入松弛变量,转化为工程实际中在制导适用性更强的问题P2。寻找最优参数,使得式(4)的性能指标极小,且满足约束条件及:

$$-\sigma \leq \sum_{i=0}^N D_{ij} X(\varepsilon_i) - \frac{t_f - t_0}{2} f[X(\varepsilon_i), U(\varepsilon_i),$$

$$\varepsilon_i, t_0, t_f] \leq \sigma \quad (j = 0, 1, \dots, N)$$

$$-\delta \leq \phi[X(\varepsilon_0, t_0, X(\varepsilon_N), t_f)] \leq \delta$$

其中,实向量 $\sigma \geq 0, \delta \geq 0$;其取值与LGL节点数 N 有关,一般 N 越大取值越大。

2.3 SQP 优化算法

2.3.1算法优点及主要思想

SQP方法是解决有约束非线性优化问题的重要算法,在轨道优化问题的直接法中得到了较多应用。与其他参数优化算法相比,SQP具有收敛性好,算效率高,界搜索能力强等优点^[3]。其简单快速性尤其适用于新型制导方案要求的在轨规划。

SQP的主要思想为利用简单的二次函数逼近拉格朗日函数来构造二次规划子问题计算搜索方向^[4]。该算法是解决约束非线性规划问题的有效方法,SPQ和LGL的结合也体现了一定的创新性。

2.3.2算法步骤

(1)给定插值点处的初始点,通过插值计算,选取正定矩阵,选取控制误差大于零,计算梯度,令 $K=0$ 。

(2)求解二次规划子问题,得到搜索方向及相应的朗格朗日因子。

(3)选择度量函数,由精度一维线搜索确定步长因子。

(4)更新修正矩阵, $k=k+1$ 至2步。

(5)算法终止。

2.3.3模型的求解

已知数据:

着陆边界条件

初始条件 $r_0=1753\text{km}, \alpha_0=0^\circ, \beta_0=0^\circ, u_0=1692\text{km/m}, v_0=0, w_0=0$

终端条件 $r_f=1738\text{km}, \alpha_f=1.5^\circ, \beta_f=20^\circ, u_f, v_f, w_f=0$

3 结语

着陆优化时间467s,着陆时剩余质量,由结果可知:着陆过程中所需控制推力最大值为6395N,小于推力器最大限值,各路状态很好地收敛到终端约束,LGL节点在时间轴上分布具有的对称非均匀性不影响曲线形状,仿真结果验证了LGL伪谱-SQP方法应用于月球着陆轨道最优轨迹规划问题是有效的。

大限值,各路状态很好地收敛到终端约束,LGL节点在时间轴上分布具有的对称非均匀性不影响曲线形状,仿真结果验证了LGL伪谱-SQP方法应用于月球着陆轨道最优轨迹规划问题是有效的。

参考文献

- [1] 梁栋,刘良栋,何英姿.月球精确软着陆最优标称轨迹在轨制导方法[J].中国空间科学技术,2011,31(6):27-35.
- [2] 沈明辉.SQP方法在最优制导律中的应用[J].弹道学报,2006,18(3):48-50.
- [3] 孙军伟,乔栋,崔平远.基于SQP方法的常推力月球软着陆轨道优化方法[J].宇航学报,2006,27(1):99-102,112.