全国大学生数学建模竞赛编写的 LaTeX 模板

摘要

关键字： TeX　图片　表格　公式

一、 问题重述

二、 模型假设

三、 符号说明

四、 模型求解

4.1 着陆准备轨道的建模

当嫦娥三号在着陆准备轨道上运动时，主要受到月球对其的引力；而其它天体的引力及耗散力极其微弱，可以忽略不计。因此，将运动过程简化为飞行器与月球的两体运动。在月球系下，飞行器围绕月球做椭圆轨道运动，其运动轨迹如图1所示。

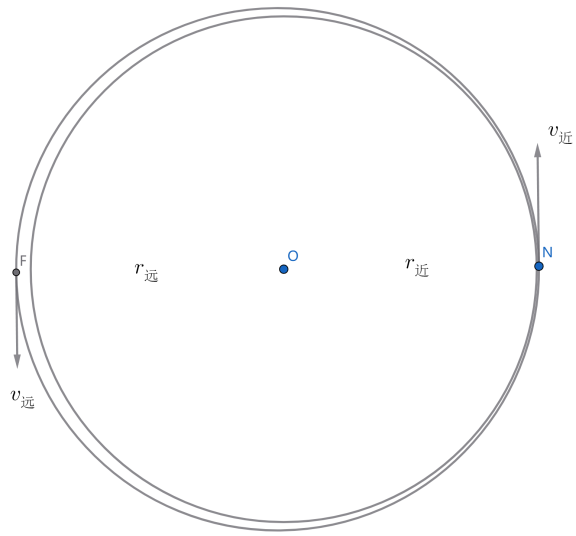

图 **1**　着陆准备轨道示意图

由角动量守恒定律与能量守恒定律可得

$$\begin{cases} m_0 v_N r_N = m_0 v_F r_F \\ \frac{1}{2} m_0 v_N^2 - \frac{GMm_0}{r_N} = \frac{1}{2} m_0 v_F^2 - \frac{GMm_0}{r_F} \end{cases} \tag{1}$$

故

$$v_F = \frac{r_N}{r_F} v_N \tag{2}$$

$$v_N^2 - v_F^2 = 2GM(\frac{1}{r_N} - \frac{1}{r_F})$$

将 (2) 式代入得

$$(1 - \frac{r_N^2}{r_F^2}) v_N^2 = 2GM(\frac{1}{r_N} - \frac{1}{r_F})$$

因此

$$\boxed{v_N = \sqrt{\frac{2GMr_F}{r_N(r_N + r_F)}}} \tag{3}$$

4.2 主减速段轨道的建模

当飞行器到达近月点 N 时，其将转轨进入主减速段轨道。由题意可知，该段轨道的几何形状为抛物线。因此，飞行器在该段内具有恒定的受力。即

$$m\vec{g} + \vec{T} \equiv \vec{C} \tag{4}$$

而轨道初速度应与近月点相同，即

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_N$$

记近月点的速率为 v_0，故 $\|\vec{v}_N\| = v_0$

此外，题目还要求了主减速末端的速率 v_1 为一确定值。

综上，轨道形状大致如图2所示。

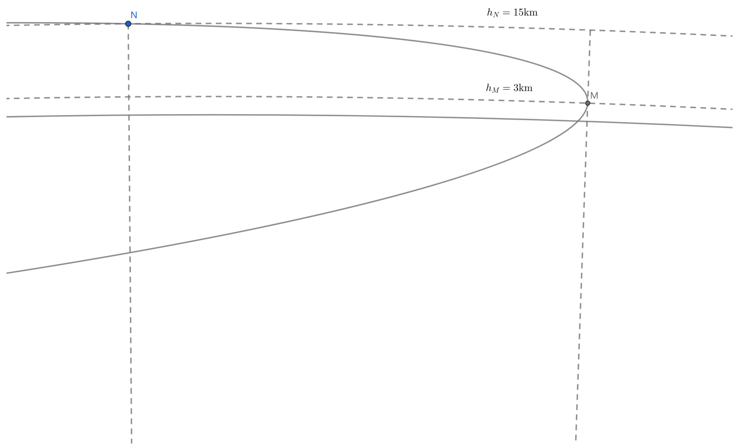

图 **2**　主减速段轨道示意图

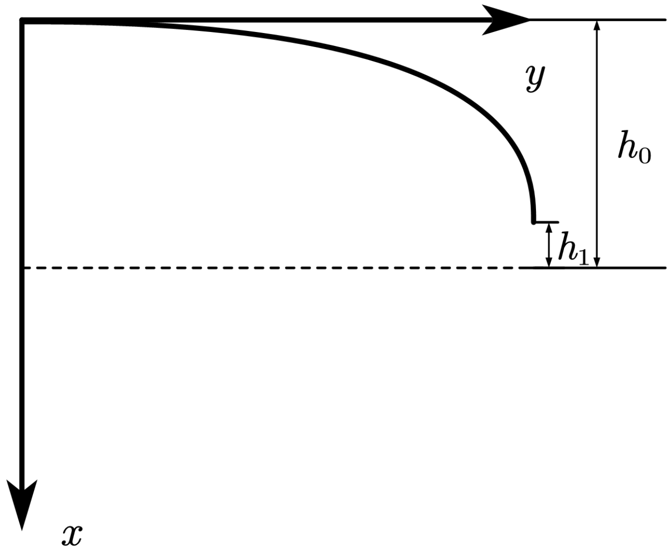

图 **3**　主减速段在直角坐标系中的近似

飞行器在该轨道内的运动过程时间较短，在球面方向内的运动距离相对月球半径较小。因此，可以将该过程近似至一直角坐标系内，竖直向下记为 x 轴正方向，球面方向记作 y 轴，如图3所示。

此外，由于该过程中，距月心的距离变化 Δr 相对月球半径 R 的相对变化较小，故可以将重力加速度近似为一常量，其值取高度中值处的重力加速度 g。此时，由恒力条件 (4) 式进一步分析，知 T 近似为一恒力。设 T 在 x, y 轴上的分量分别为 T_x, T_y。

该阶段飞行器的受力情况，如图4所示。

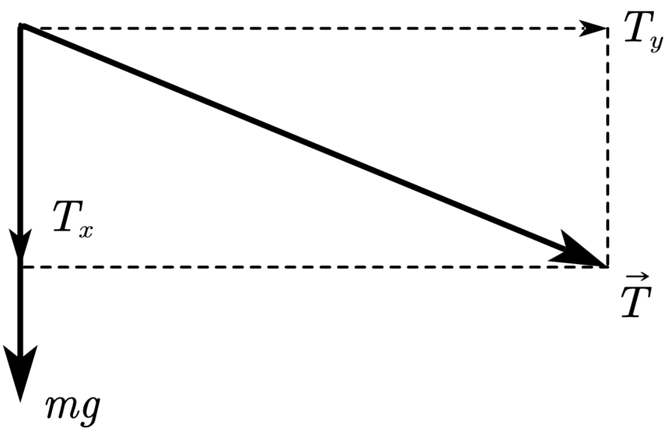

图 **4**　飞行器在主减速段的受力情况

因此，可以列得牛顿第二定律

$$\begin{cases} T_x + mg = ma_x \\ T_y = ma_y \end{cases} \tag{5}$$

同时，满足比冲公式

$$T = v_e|\dot{m}|$$

设质量减少的速率为 v_m，因此

$$\boxed{v_m = |\dot{m}| = \frac{T}{v_e} = \frac{\sqrt{T_x^2 + T_y^2}}{v_e}} \tag{6}$$

则质量关于时间的函数 $m(t)$ 满足

$$m(t) = m_0 - v_m t \tag{7}$$

将 (7) 式代入 (5) 式，整理后得

$$\begin{cases} \ddot{x} = g + \frac{T_x}{m_0 - v_m t} \\ \ddot{y} = \frac{T_y}{m_0 - v_m t} \end{cases} \tag{8}$$

两边同时积分

$$\begin{cases} \dot{x} = gt - \frac{T_x}{v_m} \ln(m_0 - v_m t) + C_1 \\ \dot{y} = -\frac{T_y}{v_m} \ln(m_0 - v_m t) + C_2 \end{cases}$$

代入初值条件

$$\begin{cases} v_{0,x} = 0 \\ v_{0,y} = v_0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} C_1 = \frac{T_x}{v_m} \ln m_0 \\ C_2 = v_0 + \frac{T_y}{v_m} \ln m_0 \end{cases}$$

代回得

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{T_x}{v_m} \ln m_0 + gt - \frac{T_x}{v_m} \ln(m_0 - v_m t) \\ \dot{y} = v_0 + \frac{T_y}{v_m} \ln m_0 - \frac{T_y}{v_m} \ln(m_0 - v_m t) \end{cases} \tag{9}$$

取定积分得

$$\begin{cases} \Delta x = \frac{T_x}{v_m} \ln m_0 \cdot t + \frac{1}{2} g t^2 - \frac{T_x}{v_m}((t - \frac{m_0}{v_m}) \ln(m_0 - v_m t) - t) \\ \Delta y = (v_0 + \frac{T_y}{v_m} \ln m_0) t - \frac{T_y}{v_m}((t - \frac{m_0}{v_m}) \ln(m_0 - v_m t) - t) \end{cases} \tag{10}$$

由于 Δx 为一定值，在给定的 T_x, T_y 条件下，可以算得时间 t。由该 t 下的 $\dot{x}, \dot{y}$ 可以算得速率 v_1，综合各个条件，可以得到优化模型

$$
\begin{aligned}
&\max m_1 = m_0 - v_m t \\
&s.t. \begin{cases}
T = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} \\
v_m = \frac{T}{v_e} \\
\Delta x = \frac{T_x}{v_m} \ln m_0 \cdot t + \frac{1}{2} g t^2 - \frac{T_x}{v_m}((t - \frac{m_0}{v_m}) \ln(m_0 - v_m t) - t) \\
\dot{x} = \frac{T_x}{v_m} \ln m_0 + g t - \frac{T_x}{v_m} \ln(m_0 - v_m t) \\
\dot{y} = v_0 + \frac{T_y}{v_m} \ln m_0 - \frac{T_y}{v_m} \ln(m_0 - v_m t) \\
v_1 = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \\
1500 \leq T \leq 7500
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

设该 NLP 问题的解为 (T_x, T_y, t)，由式

$$
\Delta y = (v_0 + \frac{T_y}{v_m} \ln m_0) t - \frac{T_y}{v_m}((t - \frac{m_0}{v_m}) \ln(m_0 - v_m t) - t)
$$

求得水平位移 Δy。而通过水平位移以及轨道方向，可以得到近月点与目标着陆点的经纬度偏差。

五、 模型检验

参考文献

[1] 刘海洋. LaTeX 入门[J]. 电子工业出版社, 北京, 2013.

[2] 全国大学生数学建模竞赛论文格式规范 (2020 年 8 月 25 日修改).

[1] https://www.latexstudio.net