4.2

使用贪心法，把底面长度从小到大对物品排序，从标号小的物品开始依次装入库房，直到某个物品装不下为止。
证明命题：对任何输入，把物品按照从小到大的顺序装入得到最优解。
使用交换论证。
对于物品集合 $S=\{1,2,\cdots,n\}$，假设$A=\{i_1,i_2,i_3,\cdots,i_k\}$是一个最优解，假设$i_1=1,i_2=2\cdots,i_{j-1}=j-1,i_j\neq j,$
则把i_j替换成j，得到A',则A'也是一个可行解,也是一个最优解，至多再经过$n-1$次替换就可以得到$B=\{1,2,3\cdots,k\},B$也是一个最优解，命题得证
时间复杂度 $T(n)=O(n\log n)$

4.3

算法思想：首先令 $a[1]=d_1+4$，对 $d_2,d_3,\cdots,d_n$ 检查，$\exists j,$使得$d_j\leq a[1]+4$并且$d_{j+1}>a[1]+4,$ 则 $a[2]=d_{j+1}+4$，直到包含所有的村庄
伪代码：

```
a[1]<-d[1]+4
k<-1
for j<-2 to n
    if d[j]>a[k]+4
    then k<-k+1
        a[k]<-d[j]+4
return a
```

证明：采用归纳假设。
假设对于任何正整数 k，存在最优解包含算法前 k 步选择的基站位置。
k=1，存在最优解包含 a[1]，若不然，存在另一个最优解 b[1]，$b[1]\neq a[1]$，并且$b[1]<d_1+4=a[1]$，则将 b[1] 替换成 a[1]，仍是一个最优解，所以命题 k 等于 1 的时候成立。
假设对于 k，存在最优解 A 包含算法前 k 步选择的基站位置
$A=\{a[1],a[2],\cdots,a[k]\}\cup B$
假定 $\{a[1],\cdots,a[k]\}$ 包含 $\{d_1,\cdots,d_s\}$ 的村庄范围，则 B 的求解可以看成是对于 $\{d_{s+1},\cdots,d_n\}$ 求解的子问题，根据归纳假设，B=$\{a[k+1],\cdots,a[k']\}$，

从而证明了对于 k+1 时，命题依旧成立。从而整个命题得证。
时间复杂度 $O(n)$

4.6

采用贪心法：按照加工时间从小到大对作业进行排序，使得 $t_i \leq t_{i+1}$，按照标号从小到大的次序安排所有作业（并且没有空闲时间）
$time(i_j) = f(i_j) + t(i_j) = \sum_{k=1}^{j} t(i_k)$
f 的总共完成时间为 $time(f) = \sum_{k=1}^{n} time(i_k) = \sum_{j=1}^{n} t(i_j)(n-j+1)$ 要使平均时间达到最小，即要使 time(f) 达到最小，由上述表达式可知，让序列 t 从小到大一定能达到最小，不然存在逆序 (i,j), 交换 i，j 一定能达到更小的 $time(f)$，经过有限次的变换，一定会达到没有逆序的序列。

4.17

命题 1: 设 T 是图 G 的一棵最小生成树，C 是 G 的一个圈，如果 C 中边的权彼此不等，那么在 C 中权最大的边不属于 T。
证明：设 e 是 C 中权最大的边，假设 e 在 T 中，取 C 不在 T 的边 e' ,$\omega(e') < \omega(e)$, 用 e'替换 e, 得到一棵 G 的生成树 T' ，且 $\omega(T') < \omega(T)$，与 T 是最小生成树矛盾，命题得证。
命题 2: 对于 $\forall e \in E$, 令$s(e) = -w(e)$是边的权值。 构造带权图 G'=<V,E,S>。G' 的最小生成树 T'满足本题所要求的最佳带宽性质。命题 2:$\forall u, v \in V, P'$是在上述生成树T '中连接u，v的唯一路径，$\omega(P') = \omega(u,v)$ 证明：反证法:，假若不是，那么 G'中存在节点 u，v, 且有一条 u-v 的路径 P，使得 $\omega(P) > \omega(P')$, 设 e'=（(x,y) 是 P'中带宽最小的边。又由于 $\omega(P') < \omega(P)$。由于 P 上任何边的带宽大于 $\omega(e')$, 因此 e'不在路径 P 上。于是 G 中存在圈 C(u-x-y-v-u)，又因为 e'带宽是圈 C 中最小的，则 e'的权重是圈 C 中最大的。按照命题 1 的结论 e'不应该存在于 T'中。则发生矛盾，所以命题 2 得证。
时间复杂度为 kruskal 的时间复杂度 $O(m \log m) = O(m \log n)$

4.20

贪心法：对序列 r 进行排序，使得 $r_1 \geq r_2 \geq r_3 \cdots r_n$，按排序后结果购买许可证。证明：采用交换论证 $cost_{all} = 1000 * (r_1^0 + r_2^1 + \cdots + r_n^{n-1})$
假如存在逆序，即 ($\exists i, j$使得$r_i < r_j$)，交换 i，j，一定能得到一个更小的 $cost_{all}^{'}$，经过有限次交换后，序列 r 一定不存在逆序，得证。时间复杂度 $O(n \log n)$