Домашняя работа 3

Василий Станцев

13.10.2024

Задача 1

Рассмотрим две независимые случайные величины $X \sim Pois(\lambda_1)$ и $Y \sim Pois(\lambda_2)$. Найдите распределение $Z = X + Y$. (1 балл)

Решение

Найдем вероятность, что Z примет значение n как сумму произведений вероятностей $\mathbf{P}(X = k)$ на $\mathbf{P}(Y = n - k)$ для всех возможных значений k, т.е. при $k = 0..n$:

$$\mathbf{P}(Z = n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(X = k)\mathbf{P}(Y = n - k),$$

подставляя формулу вероятности для распределения Пуассона, получим:

$$\mathbf{P}(Z = n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_1^k \cdot e^{-\lambda_1}}{k!} \cdot \frac{\lambda_2^{n-k} \cdot e^{-\lambda_1}}{(n-k)!} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_1^k \cdot \lambda_2^{n-k}}{k! \cdot (n-k)!},$$

умножим и разделим дробь под знаком суммы на $n!$, получим:

$$\mathbf{P}(Z = n) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_1^k \cdot \lambda_2^{n-k} \cdot n!}{k! \cdot (n-k)! \cdot n!} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \lambda_1^k \cdot \lambda_2^{n-k}$$

Учитывая формулу биномиальных коэффициентов и бинома Ньютона, окончательно получаем:

$$\mathbf{P}(Z = n) = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \mathbf{C}_n^k \cdot \lambda_1^k \cdot \lambda_2^{n-k} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n \cdot e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} \sim Pois(\lambda_1 + \lambda_2),$$

Таким образом сумма двух случайных величин, распределенных по Пуассону, также является случайной величиной распределенной по Пуассону, причем параметр ее распределения равен сумме параметров распределения исходных случайных величин.

Задача 2

В круге радиуса R случайно проводится хорда. Пусть ξ ее длина.Найти вероятность $Q_x = \mathbf{P}(\xi \geqslant x)$. Вычислить вероятности Q_R и $Q_{R\sqrt{3}}$ того, что длина хорды больше стороны правильного вписанного шестиугольника и треугольника соответственно. В каждом из следующих случаев дать подробное решение:

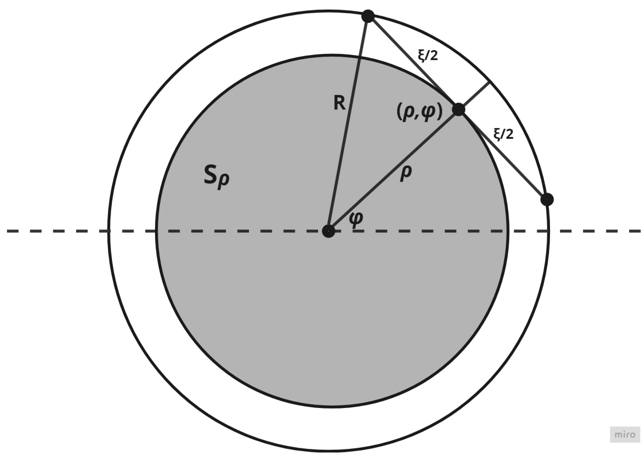
a. Считать, что слово "случайно" означает, что середина хорды равномерно распределена в круге. (1 балл)

b. Считать, что слово "случайно" означает, что направление хорды фиксировано, а середина равномерно распределена на диаметре окружности. (1 балл)

c. Считать, что слово "случайно" означает, что один из концов хорды закреплен, а другой равномерно распределен на окружности. (1 балл)

Решение

Случай (a). Воспользуемся геометрическим представлением вероятности. Для удобства перейдем к полярным координатам с началом координат в центре заданного круга. Тогда положение середины хорды определяется парой координат (ρ, φ), где $\rho = (0..R), \varphi = (0..2\pi)$.



Расчитаем длину хорды:

$$\xi = 2 \cdot \sqrt{R^2 - \rho^2}$$

Подставим в неравенство $\xi \geqslant x$ значение ξ и решим его отностельно ρ:

$$2 \cdot \sqrt{R^2 - \rho^2} \geqslant x$$

$$4 \cdot (R^2 - \rho^2) \geqslant x^2$$

$$R^2 - \rho^2 \geqslant \frac{x^2}{4}$$

$$\rho^2 \leqslant R^2 - \frac{x^2}{4}$$

$$\rho \leqslant \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}$$

Таким образом, для выполнения условия $\xi \geqslant x$ необходимо, чтобы выполнялось условие $\rho \leqslant \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}$, что на рисунке соответствует попаданию центра хорды в круг с радиусом $\rho = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}$. Так как точка середины хорды равномерно распределена в начальном круге, то вероятность $Q_x = \mathbf{P}(\xi \geqslant x)$ можно определить как отношение площади круга с радиусом $\rho = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}$ к площади исходного круга радиусом R.

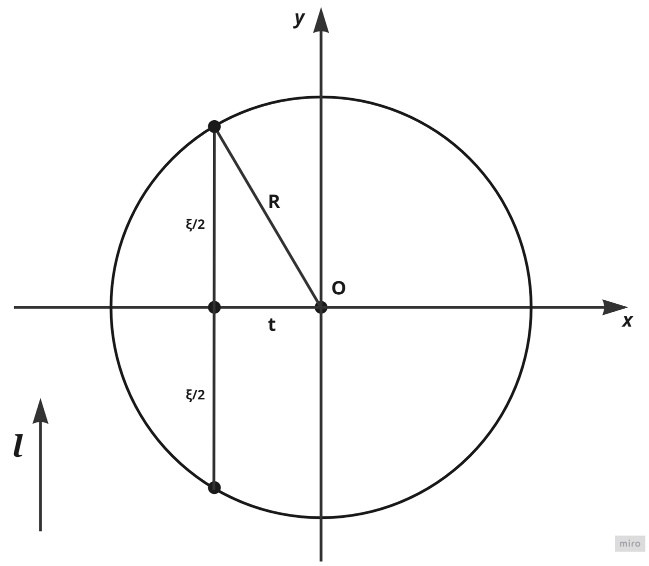
$$Q_x = \mathbf{P}(\xi \geqslant x) = \mathbf{P}(\rho \leqslant \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}) = \frac{S_\rho}{S_R} = \frac{\pi \cdot (R^2 - \frac{x^2}{4})}{\pi \cdot R^2} = 1 - \frac{x^2}{4 \cdot R^2}$$

Подставив в полученное выражение вместо x значения R и $R\sqrt{3}$ найдем Q_R и $Q_{R\sqrt{3}}$:

$$Q_R = \mathbf{P}(\xi \geqslant R) = 1 - \frac{R^2}{4 \cdot R^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$Q_{R\sqrt{3}} = \mathbf{P}(\xi \geqslant R\sqrt{3}) = 1 - \frac{R^2 \cdot 3}{4 \cdot R^2} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} = 0,25$$

Случай (b). Середина хорды рапределена по диаметру, который перпендикулярен направлению хорды l. Построим оси координат так, чтобы ось Y совпала с направлением хорды l, а диаметр, на котором распределены точки центра хорды, совпал с осью X, причем начало координат совпало с центром исходного круга



Тогда длину хорды получим по формуле

$$\xi = 2 \cdot \sqrt{R^2 - t^2}$$

Подставив это выражение в условие $\xi \geqslant x$ получим

$$x \leqslant 2\sqrt{R^2 - t^2}$$

Решим это неравенство относительно t

$$x^2 \leqslant 4(R^2 - t^2)$$

$$x^2 \leqslant 4R^2 - 4t^2$$

$$4t^2 \leqslant 4R^2 - x^2$$

$$t^2 \leqslant \frac{4R^2 - x^2}{4}$$

$$|t| \leqslant \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}$$

$$t \in \left[-\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}; \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}\right]$$

Учитывая, что по условию t - это случайная величина равномерно распределенная на отрезке $[-R; R]$, т.е $t \sim Unif[-R, R]$, получаем, что $Q_x = \mathbf{P}(\xi \geqslant x)$, это вероятность, что случайная величина t попадет в интервал $\left[-\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}; \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}\right]$, т.е.

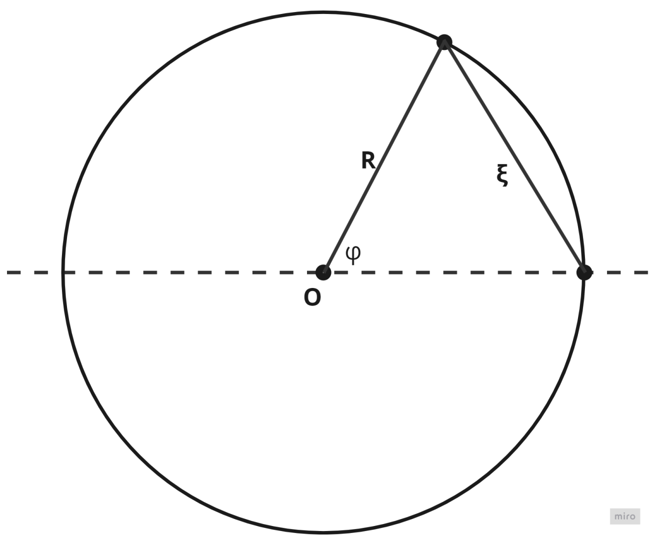
$$Q_x = \mathbf{P}(\xi \geqslant x) = \frac{\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}} - (-\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}})}{R - (-R)} = \frac{\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}} - (-\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}})}{R - (-R)} = \frac{\sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}}{R}$$

Подставив в полученное выражение вместо x значения R и $R\sqrt{3}$ найдем Q_R и $Q_{R\sqrt{3}}$:

$$Q_R = \mathbf{P}(\xi \geqslant R) = \frac{\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}}}{R} = \frac{\sqrt{\frac{3}{4}R^2}}{R} = \frac{R\sqrt{\frac{3}{4}}}{R} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$$

$$Q_{R\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{R^2 - \frac{(R\sqrt{3})^2}{4}}}{R} = \frac{\sqrt{R^2 - \frac{3R^2}{4}}}{R} = \frac{\sqrt{\frac{R^2}{4}}}{R} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Случай (с). Перейдем в полярные координатs так, чтобы начало отсчёта углов совпало с фиксированным концом хорды, а угол ϕ соответствовал полярному углу незакрепленной точки хорды, и, так как незакрепленная точка хорды равномерно распределена по окружности, угол φ является случайной величиной равномерно распределенной на отрезке $[0; 2\pi]$, т.е. $\varphi \sim Unif[0, 2\pi]$



Тогда длина хорды равна:

$$\xi = 2 \cdot R \sin\frac{\varphi}{2}$$

Подставив это выражение в условие $\xi \geqslant x$ получим

$$x \leqslant 2 \cdot R \sin\frac{\varphi}{2}$$

Решим это неравенство относительно φ

$$\frac{x}{2R} \leqslant \sin\frac{\varphi}{2}$$

$$\sin\frac{\varphi}{2} \geqslant \frac{x}{2R}$$

$$\frac{\varphi}{2} \geqslant \left[\begin{array}{l} \arcsin\frac{x}{2R} \\ \pi - \arcsin\frac{x}{2R} \end{array}\right.$$

$$\varphi \geqslant \left[\begin{array}{l} 2\arcsin\frac{x}{2R} \\ 2\pi - 2\arcsin\frac{x}{2R} \end{array}\right.$$

$$\varphi \geqslant \left[\begin{array}{l} 2\arcsin\frac{x}{2R} \\ 2\pi - 2\arcsin\frac{x}{2R} \end{array}\right.$$

$$2\arcsin\frac{x}{2R} \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - 2\arcsin\frac{x}{2R}$$

Учитывая, что по условию φ - это случайная величина равномерно распределенная на отрезке $[0; 2\pi]$, т.е $\varphi \sim Unif[0, 2\pi]$, получаем, что $Q_x = \mathbf{P}(\xi \geqslant x)$, это вероятность, что случайная величина φ попадет в интервал $\left[2\arcsin\frac{x}{2R}; 2\pi - 2\arcsin\frac{x}{2R}\right]$, т.е.

$$Q_x = \mathbf{P}(\xi \geqslant x) = \frac{2\pi - 2\arcsin\frac{x}{2R} - 2\arcsin\frac{x}{2R}}{2\pi - 0} = \frac{2\pi - 4\arcsin\frac{x}{2R}}{2\pi} = 1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{x}{2R}$$

Подставив в полученное выражение вместо x значения R и $R\sqrt{3}$ найдем Q_R и $Q_{R\sqrt{3}}$:

$$Q_R = \mathbf{P}(\xi \geqslant R) = 1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{R}{2R} = 1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{1}{2} = 1 - \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \approx 0,667$$

$$Q_{R\sqrt{3}} = 1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{R\sqrt{3}}{2R} = 1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{2}{\pi}\frac{\pi}{3} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \approx 0,333$$

Итог Во всех трех случаях получили различные вероятности Q_x и итоговая вероятность $Q_x = \mathbf{P}(\xi \geqslant x)$ зависит от способа задания расположения хорды.

Задача 3

В киоске можно купить билеты двух разных лотерей. В первой лотерее можно выиграть 1000 рублей с вероятностью 0.1, а цена билета 100 рублей. Во второй лотерее можно выиграть 500 рублей с вероятностью 0.1 и 5000 рублей с вероятностью 0.01, а цена билета 200 рублей. Вы подкидываете честную монетку, чтобы решить, билет какой лотереи вы купите. Пусть X - случайная величина, описывающая вашу прибыль (выигрыш минус расходы) от покупки билета. Найдите распределение X (вам поможет формула полной вероятности) и покажите, что математическое ожидание X равно среднему арифметическому математических ожидайний прибылей от участия в этих двух лотереях. Обоснуйте строго математически, что то же самое соотношение будет выполняться вне зависимости от размеров и вероятностей выигрыша в этих лотереях. (2 балла)

Решение

Бросок честной монетки описывается 2 несовместными исходами с вероятностями $p = 0,5$ у каждого. Примем прибыль от выигрыша в первую лотерею за X_1,а прибыль от выигрыша во вторую за X_2, рассчитаем прибыль от первой лотереи после броска монетки по формуле полной вероятности:

$$P(X_{1m}) = P(X_1|H_1)P(H_1) + P(X_1|H_2)P(H_2)$$

, где

$P(H_1)$ - вероятность, что выбрали 1 лотерею,

$P(X_1|H_1)$ - вероятность получения прибыли в первой лотерее, если выбрали 1 лотерею,

$$P(X_1|H_1) = \frac{P(X_1 \cap H_1)}{P(H_1)} = \frac{P(X_1) \cdot P(H_1)}{P(H_1)} = P(X_1),$$

т.к. события X_1 и H_1 - независимые

$P(H_2)$ - вероятность, что выбрали 2 лотерею,

$P(X_1|H_2)$ - вероятность получения прибыли в первой лотерее, если выбрали 2 лотерею,

$$P(X_1|H_2) = \frac{P(X_1 \cap H_2)}{P(H_1)} = \frac{0}{P(H_2)} = 0,$$

т.к. события X_1 и H_2 - несовместные, таким образом

$$P(X_{1m}) = P(X_1|H_1)P(H_1) + P(X_1|H_2)P(H_2) = P(X_1) \cdot P(H_1) + 0 \cdot P(H_2)$$

$$P(X_{1m}) = P(X_1) \cdot P(H_1)$$

аналогично получим

$$P(X_{2m}) = P(X_2) \cdot P(H_2)$$

Запишем таблицу распределения вероятности выигрыша для первой лотереи:

Выигрыш	1000	0
Вероятность	0.1	0.9

Уменьшив сумму выигрыша на стоимость билета получим распределение вероятности прибыли на первой лотерее:

x_{1i}	900	-100
$p_{x_{1i}}$	0.1	0.9

Определим мат.ожидание прибыли в первой лотерее

$$E(X_1) = \sum_{i=1}^{n} x_{1i} \cdot p_{x_{1i}} = 900 \cdot 0.1 + (-100) \cdot 0.9 = 90 - 90 = 0$$

Запишем таблицу распределения вероятности выигрыша для второй лотереи:

Выигрыш	5000	500	0
Вероятность	0,01	0.1	0.89

Уменьшив сумму выигрыша на стоимость билета получим распределение вероятности прибыли на второй лотерее:

x_{2i}	4800	300	-200
$p_{x_{2i}}$	0,01	0.1	0.89

Определим мат.ожидание прибыли во второй лотерее

$$E(X_2) = \sum_{i=1}^{n} x_{2i} \cdot p_{x_{2i}} = 4800 \cdot 0.01 + 300 \cdot 0.1 + (-200) \cdot 0.89 = 48 + 30 - 178 = -100$$

Посчитаем распределение вероятности прибыли X как полную вероятность для каждого исхода (исходами X являются по отдельности все исходы X_1 и все исходы X_2)

x_{mi}	-200	-100	300	900	4800
$p_{x_{mi}}$	$0.89 \cdot 0.5 = 0.445$	$0.9 \cdot 0.5 = 0.45$	$0.1 \cdot 0.5 = 0.05$	$0.1 \cdot 0.5 = 0.05$	$0.01 \cdot 0.5 = 0.005$

Определим мат.ожидание прибыли:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_{x_i} = -200 \cdot 0.445 + (-100) \cdot 0.45 + 300 \cdot 0.05 + 900 \cdot 0.05 + 4800 \cdot 0.005 =$$

$$E(X) = -89 - 45 + 15 + 45 + 24 = -50$$

Заметим, что среднее арифметическое мат.ожиданий прибыли в каждой из лотерей:

$$\frac{E(X_1) + E(X_2)}{2} = \frac{0 + (-100)}{2} = \frac{-100}{2} = -50 = E(X)$$

Если расписать $p_{x_{mi}}$ как полную вероятность прибыли в соответствующей лотереи с учетом броска монетки, получим

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_{mi} \cdot p_{x_{mi}} = \sum_{i=1}^{n} x_{1i} \cdot p_{x_{1i}} \cdot P(H_1) + \sum_{i=1}^{n} x_{2i} \cdot p_{x_{2i}} \cdot P(H_2) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_{1i} \cdot p_{x_{1i}} \cdot \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{n} x_{2i} \cdot p_{x_{2i}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{1i} \cdot p_{x_{1i}} + \sum_{i=1}^{n} x_{2i} \cdot p_{x_{2i}}}{2} = \frac{E(X_1) + E(X_2)}{2}$$

Получили тот же результат, который говорит о том что, мат.ожидание конечной прибыли равно среднему арифметическому от мат.ожиданий прибыли в каждой из лотерей и не зависит от размеров и вероятностей выигрышей в этих лотереях

Задача 4

Вы участвуете в шоу Монти Холла. Монти испытывает новую версию игры со следующими правилами. Вы выбираете одну из трех дверей. За одной дверью машина, за другой - компьютер, а за оставшейся - коза (все расстановки равновероятны). Монти знает, что находится за каждой дверью, открывает одну дверь (не ту, которую вы выбрали) и дает вам выбрать, изменять ли свой первоначальный выбор двери (на оставшуюся неоткрытую).

(a) В этом пункте предположим, что Монти всегда открывает дверь, за которой находится менее ценный приз (коза менее ценна, чем компьютер). Монти открыл дверь, за которой находится коза. Стоит ли вам поменять свой первоначальный выбор с учетом этой информации? (2 балла)

(b) Теперь предположим, что Монти открывает дверь с менее ценным призом с вероятностью p, а дверь с более ценным призом с вероятностью $q = 1 - p$. Монти открыл дверь, за которой оказался компьютер. Стоит ли вам поменять свой первоначальный выбор с учетом этой информации (ответ может зависеть от p)? Если вы поменяете свой выбор, чему станет равна вероятность выиграть машину? (2 балла)

Решение

Пусть мы выбрали 1 дверь. Примем гипотезы $H_{i=1,2,3}$ - машина находится за 1,2,3 дверью, при этом $P(H_i) = \frac{1}{3}$ Рассмотрим событие A - Монти открыл 2 дверь. Вариант с открытием 3 двери - аналогичен варианту открытия 2 двери.

Случай (a) Рассчитаем вероятность события А при выполнении условий первого пункта:

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + P(A|H_3)P(H_3)$$

$P(A|H_1)$ - это событие, что Монти открыл дверь с козой при условии, что за 1 дверью машина, вероятность $P(A|H_1) = 1$, так как коза всегда дешевле компьютера.

$P(A|H_2)$ - это событие, что Монти открыл дверь с козой при условии, что за 2 дверью машина, вероятность $P(A|H_2) = 0$, т.к. Монти открыл 2 дверь.

$P(A|H_3)$ - это событие, что Монти открыл дверь с козой при условии, что за 3 дверью машина, вероятность $P(A|H_3) = 1$, так как коза всегда дешевле машины.

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + P(A|H_3)P(H_3) = 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Найдем вероятность того что наш первоначальный выбор верный и машина за 1 дверью при условии события A

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Найдем вероятность того что наш первоначальный выбор неверный и машина за 3 дверью при условии события A

$$P(H_3|A) = \frac{P(A|H_3)P(H_3)}{P(A)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Следовательно, менять первоначальный выбор двери не обязательно, вероятность выигрыша автомобиля не изменится.

Случай (b) Рассчитаем вероятность события А исходя из новых условий:

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + P(A|H_3)P(H_3)$$

$P(A|H_1)$ - это событие, что Монти открыл дверь с компьтером при условии, что за 1 дверью машина (т.е. Монти открыл более ценный приз из оставшихся), вероятность $P(A|H_1) = 1 - p$.

$P(A|H_2)$ - это событие, что Монти открыл дверь с компьтером при условии, что за 2 дверью машина, вероятность $P(A|H_2) = 0$, т.к. Монти открыл 2 дверь.

$P(A|H_3)$ - это событие, что Монти открыл дверь с компьтером при условии, что за 3 дверью машина (т.е. Монти открыл менее ценный приз из оставшихся), вероятность $P(A|H_3) = p$.

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1)+P(A|H_2)P(H_2)+P(A|H_3)P(H_3) = (1-p)\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}+p\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}-\frac{p}{3}+\frac{p}{3} = \frac{1}{3}$$

Найдем вероятность того, что наш первоначальный выбор верный и машина за 1 дверью при условии события A

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A)} = \frac{(1-p) \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 1 - p = q$$

Найдем вероятность того что наш первоначальный выбор неверный и машина за 3 дверью при условии события A

$$P(H_3|A) = \frac{P(A|H_3)P(H_3)}{P(A)} = \frac{p \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = p$$

Таким образом, вероятность выиграть машину зависит от вероятности с которой Монти открывает дверь с менее ценным призом. Если вероятность $p > q$, тогда есть смысл поменять свою дверь на другую неоткрытую. При этом вероятнось выигрыша будет равна p - вероятности, с которой Монти открывает дверь с менее ценным призом.