

TIPE 25/26 - Cycles et Boucles

Méthode des tableaux : Optimisation et étude de la satisfiabilité
de formule

GIL Dorian

- Introduction à la méthode des tableaux



Position du problème

- On cherche à étudier une méthode algorithmique permettant de montrer la satisfiabilité d'une formule: la Méthode des tableaux.

Position du problème

- On cherche à étudier une méthode algorithmique permettant de montrer la satisfiabilité d'une formule: la Méthode des tableaux.
- Cette méthode consiste à construire un arbre avec la formule à la racine, et à utiliser des règles pour développer ou créer des branches.

Position du problème

- On cherche à étudier une méthode algorithmique permettant de montrer la satisfiabilité d'une formule: la Méthode des tableaux.
- Cette méthode consiste à construire un arbre avec la formule à la racine, et à utiliser des règles pour développer ou créer des branches.
- On regarde ensuite si il y a des contradictions dans toutes les branches, si c'est le cas, la formule est insatisfaisable.

Position du problème

- On cherche à étudier une méthode algorithmique permettant de montrer la satisfiabilité d'une formule: la Méthode des tableaux.
- Cette méthode consiste à construire un arbre avec la formule à la racine, et à utiliser des règles pour développer ou créer des branches.
- On regarde ensuite si il y a des contradictions dans toutes les branches, si c'est le cas, la formule est insatisfaisable.
- Cette méthode est utilisé dans diverses logiques, pour l'instant, on se restreint à la logique propositionnelle.

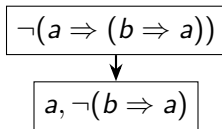
Un exemple graphique

Formule: $\neg(a \Rightarrow (b \Rightarrow a))$

$$\neg(a \Rightarrow (b \Rightarrow a))$$

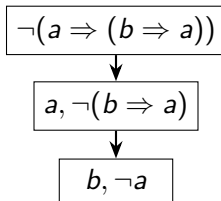
Un exemple graphique

Formule: $\neg(a \Rightarrow (b \Rightarrow a))$



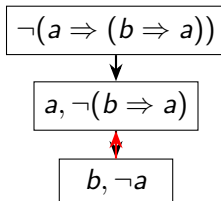
Un exemple graphique

Formule: $\neg(a \Rightarrow (b \Rightarrow a))$



Un exemple graphique

Formule: $\neg(a \Rightarrow (b \Rightarrow a))$



Petite étude introductive

Après l'avoir implémenter, j'ai décidé de me restreindre à une forme particulière de formule logique.

Definition (Forme Alternée)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $(a_k)_{k \in [1, n]}$ des littéraux, on dit que φ est de forme alternée ssi

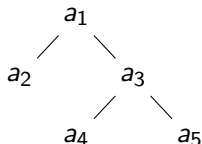
$$\varphi = a_1 \wedge (a_2 \vee (a_3 \wedge (\dots (a_n))))$$

Notre but en faisant une restriction du problème est:

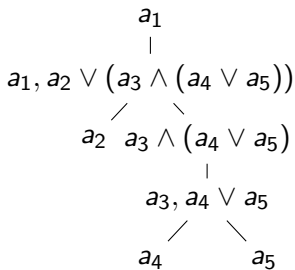
- De mieux comprendre les avantages de cette méthode (dans quelle type de formule la méthode est-elle meilleur ?)
- De trouver des algorithmes polynomiales pour nos restrictions (si ce n'est possible, alors on améliorera aux maximum l'algorithme)

Une réécriture

En utilisant une propriété que j'ai démontré, on va re-écrire l'arbre induit par la méthode des tableaux d'une manière différente:



Au lieu de :

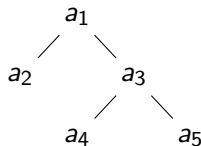


Pour $\varphi = a_1 \wedge (a_2 \vee (a_3 \wedge (a_4 \vee a_5)))$

Résolution du problème

L'algorithme récursif consiste à faire ces analyses (en créant un dictionnaire stockant le "signe" des littéraux):

- 1 On analyse le littéral droit, si il y a contradiction, l'arbre est fermé, sinon on ajoute eventuellement dans le dictionnaire le littéral
- 2 On analyse le littéral gauche, si il produit une contradiction, appel recursif plus profond dans l'arbre, sinon la formule est satisfiable



Le cas de base étant l'arrivée au bout du peigne.

L'algorithme est en $\mathcal{O}(n)$, en supposant les opérations Hashtbl constantes.

L'algorithme est en $\mathcal{O}(n)$, en supposant les opérations Hashtbl constantes.

- La correction (preuve faite) est assuré par l'invariant "Toutes les branches déjà traités sont fermés"
- La terminaison (preuve faite) est assuré simplement.

L'algorithme est en $\mathcal{O}(n)$, en supposant les opérations Hashtbl constantes.

- La correction (preuve faite) est assuré par l'invariant "Toutes les branches déjà traités sont fermés"
- La terminaison (preuve faite) est assuré simplement.

On créé une base de donnée de 100 formules de forme alternée et on fait tourner Quine et notre algorithme dessus.

- **Alternée:** 0.000493s
- **Quine (avec conversion en CNF):** 0.025874s
- **Quine (sans conversion en CNF):** 0.018691s

J'hésite toujours actuellement entre deux dernières approches de mon TIPE:

- 1 Soit trouver une autre formule de la logique propositionnelle à étudier.
- 2 Soit étudier la méthode des tableaux dans la logique du premier ordre (dans ce cas là, s'intéresser aux preuves ?).

Code - Méthode des tableaux classique 1

```
type prop = | Var of string | Not of prop | And of prop * prop | Or  of prop *
prop
(* Une branche c'est une liste de formule avec un signe *)
type branch = (bool * prop) list

let is_literal = function
| (true, Var _) -> true
| (false, Var _) -> true
| (true, Not (Var _)) -> true
| (false, Not (Var _)) -> true
| _ -> false

(* Check les contradictions *)
let branch_closed (br : branch) : bool =
  let pos = Hashtbl.create 16 in
  let neg = Hashtbl.create 16 in
  let record = function
    | (true, Var v) -> Hashtbl.replace pos v true
    | (false, Var v) -> Hashtbl.replace neg v true
    | (true, Not (Var v)) -> Hashtbl.replace neg v true
    | (false, Not (Var v)) -> Hashtbl.replace pos v true
    | _ -> ()
  in
  List.iter record br;
  let closed = ref false in
  Hashtbl.iter (fun v _ -> if (Hashtbl.mem pos v) && (Hashtbl.mem neg v) then
    closed := true) pos;
  !closed
```

Code - Méthode des tableaux classique 2

```
(* La decomposition usuelle faites durant la methode des tableaux *)
let decompose_once (br : branch) : branch list option =
  let rec find_nonlit acc = function
    | [] -> None
    | x :: xs ->
      if is_literal x then find_nonlit (x::acc) xs
      else Some (List.rev acc, x, xs)
  in
  match find_nonlit [] br with
  | None -> None
  | Some (left, (sign, form), right) ->
    let rest = left @ right in
    let mk b p = (b, p) in
    (match sign, form with
    | true, And (a,b) ->
      Some [ (mk true a) :: (mk true b) :: rest ]
    | false, Or (a,b) ->
      Some [ (mk false a) :: (mk false b) :: rest ]
    | true, Or (a,b) ->
      Some [ (mk true a)::rest; (mk true b)::rest ]
    | false, And (a,b) ->
      Some [ (mk false a)::rest; (mk false b)::rest ]
    | true, Not a ->
      Some [ (mk false a) :: rest ]
    | false, Not a ->
      Some [ (mk true a) :: rest ]
    | _, _ -> None)
```

Code - Méthode des tableaux classique 3

```
(* La Methode des Tableaux en soit *)  
let satisfiable (phi : prop) : bool =  
let initial_branch = [ (true, phi) ] in  
let rec explore_stack stack =  
  match stack with  
  | [] -> false  
  | br :: rest ->  
    if branch_closed br then explore_stack rest else  
    match decompose_once br with  
    | None -> true  
    | Some new_branches -> explore_stack (new_branches @ rest)  
in explore_stack [ initial_branch ]
```

Code - Alternée 1

```
type formula =
  | Atom of (string* bool)
  | And of (string*bool) * formula
  | Or of (string*bool) * formula

type branch =
  | Empty
  | Node of (formula option * formula * branch);;

let extract (f:formula option) = match f with
  | None -> Atom("none", false)
  | Some t -> t

let rec print_formula (f:formula) = match f with
  | Atom(s, b) -> if b then print_string s else print_string "Not ";
    print_string s;
  | And ((f, b),g) -> if b then print_string f else print_string "Not ";
    print_string f;print_string " And ";print_formula g
  | Or ((f,b),g) -> if b then print_string f else print_string "Not ";
    print_string f;print_string " Or ";print_formula g;;

let rec print_branches (b:branch) =
  print_string "[";
  match b with
  | Empty -> ()
  | Node(a1, a2, b) -> print_formula@@extract a1;print_string ", ";
    print_formula a2;print_branches b;
  print_string "]";;
```

Code - Alternée 2

```
let rec formula2branch (f:formula) : branch = match f with
| And(a, Or(b, Atom(c))) -> Node(Some(Atom b), Atom a, Node(None, Atom(c),
    Empty))
| And(a, Or(b, c)) -> Node(Some(Atom b), Atom a, formula2branch c)
| And(a, Atom(b)) -> Node(Some (Atom b), Atom a, Empty)
| _ -> failwith "Pas d'alternee"

let has_cycle (br:branch) : bool =
let rec aux (br:branch) (d:(string,bool) Hashtbl.t) : bool = match br with
| Node(None, Atom (f, b), Empty) ->
    if Hashtbl.mem d f then
        Hashtbl.find d f = b
    else
        true
| Node(Some(Atom(fg, bg)), Atom (fd, bd), Empty) ->
    if Hashtbl.mem d fd then
        if Hashtbl.find d fd = bd then
            not @@ Hashtbl.mem d fg && Hashtbl.find d fg <> bg
        else
            false
    else(
        Hashtbl.add d fd bd;
        not @@ Hashtbl.mem d fg && Hashtbl.find d fg <> bg)
| Node(Some (Atom (fg, bg)), Atom (fd, bd), nb) ->
    if Hashtbl.mem d fd then
        if Hashtbl.find d fd <> bd then
```

Code - Alternée 3

```
false
  else
    if Hashtbl.mem d fg then
      if Hashtbl.find d fg = bg then
        true
      else
        aux nb d
    else
      true
else
  (Hashtbl.add d fd bd;
   if Hashtbl.mem d fg then
     if Hashtbl.find d fg = bg then
       true
     else
       aux nb d
   else
     true)
| _ -> failwith "Pas d'alternee"
in aux br (Hashtbl.create 100);;

let is_satisfiable (f:formula) : bool = let b = formula2branch f in has_cycle b
;;
```