# TIPE 25/26 - Cycles et Boucles

## Méthode des tableaux : Optimisation et étude de la satisfiabilité de formule

GIL Dorian

# Sommaire

# Où on s'est quitté

On s'était quitté la dernière fois sur une discussion sur l'orientation du questionnement de mon TIPE.
La remarque principale étant que je devais faire mon étude de la méthode des tableaux sur une forme particulière de formule que je devais poser moi même.
J'ai donc décidé en lien avec les remarques que vous m'avez fait de bien re-orienter mon TIPE.

# Ce que j'ai fait - Définition

## Definition (Forme Alternée)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $(a_k)_{k \in [|1,n|]}$ des litteraux, on dit que $\varphi$ est de forme alternée ssi

$$\varphi = a_1 \wedge (a_2 \vee (a_3 \wedge (\ldots (a_n))))$$

# Ce que j'ai fait - Définition

## Definition (Forme Alternée)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $(a_k)_{k \in [|1,n|]}$ des litteraux, on dit que $\varphi$ est de forme alternée ssi

$$\varphi = a_1 \wedge (a_2 \vee (a_3 \wedge (\ldots (a_n))))$$

## Theorem

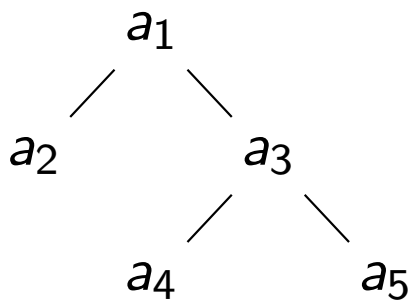
- *Si $\varphi$ une forme alternée:*

$$\neg\varphi = \neg a_1 \vee (\neg a_2 \wedge (\neg a_3 \vee (\ldots (\neg a_n))))$$

- *Chaque arbre induit des formes alternées par la méthode des tableaux peut être écrit comme un arbre binaire tel qu'on nomme dans les nodes les hypothèses, l'écriture est en $\mathcal{O}(n)$*

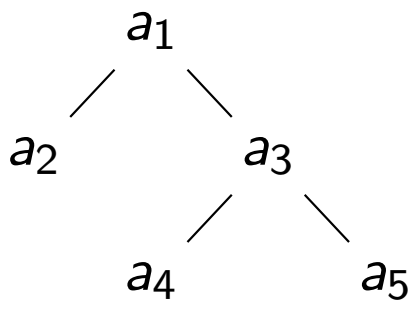
# Ce que j'ai fait - Algorithme

En utilisant la 2ème propriétés, on peut trouver un moyen d'écrire l'algorithme de la méthode des tableaux, en utilisant la forme spéciale de l'arbre induit (exemple si dessous pour $n = 5$)



# Ce que j'ai fait - Algorithme

En utilisant la 2ème propriétés, on peut trouver un moyen d'écrire l'algorithme de la méthode des tableaux, en utilisant la forme spéciale de l'arbre induit (exemple si dessous pour $n = 5$)




On décrit donc un algorithme en $\mathcal{O}(n)$:

Avant cela on créé un dictionnaire. On appelle litteral droit les litteraux impairs et gauche les pairs:

1. On analyse le litteral droit, si il y a contradiction, l'arbre est fermé, sinon on ajoute eventuellement dans le dictionnaire le litteral
2. On analyse le litteral gauche, si il produit une contradiction, appel recursif plus profond dans l'arbre, sinon la formule est satisfiable

# Objectifs Futurs

Voici ce que j'aimerai faire pendant les grandes vacances

1. Trouver une formule plus difficile de la logique propositionelle à étudier.
2. M'intéresser à la logique du premier ordre pour faire une ultime étude de la méthode des tableaux.

Voir de possiblement de directement passer à une étude en logique du première ordre.

# Bibliographie


1. Logique: fondements et applications (Dunod) de Pierre Le Barbenchon, Sophie Pinchinat, François Schwarzentruber
2. Mathematical Logic: Tableaux Reasoning for Propositional Logic de Chiara Ghidini (https://dit.unitn.it/ ldkr/ml2015/slides/PLtableau.pdf)
3. Tableau Methods for Propositional Logic and Term Logic de Tomasz Jarmużek

# Code - Méthode des tableaux classique 1

```
type formula =
    | Atom of string
    | Not of formula
    | And of formula * formula
    | Or of formula * formula

let rec expand formula =
    match formula with
    | Not (Not f) -> [[f]]
    | Not (And (f1, f2)) -> [[Not f1]; [Not f2]]
    | Not (Or (f1, f2)) -> [[Not f1; Not f2]]
    | And (f1, f2) -> [[f1; f2]]
    | Or (f1, f2) -> [[f1]; [f2]]
    | _ -> [];;

let rec has_cycle branch =
    List.exists (fun f -> List.mem (Not f) branch) branch;;
```

# Code - Méthode des tableaux classique 2

```
let rec tableau branches =
    match branches with
    | [] -> false
    | branch :: rest ->

    if has_cycle branch then
        tableau rest
    else
        match branch with
        | [] -> true
        | f :: fs ->

        let expansions = expand f in match expansions with
        | [] -> tableau (fs :: rest)
        | new_branches ->

        let expanded_branches = List.map (fun b -> b @ fs) new_branches in
        tableau (expanded_branches @ rest);;

    let is_satisfiable formula =
    let initial_branch = [formula] in tableau [initial_branch];;
```

# Code - Alternée 1

```
type formula =
    | Atom of (string* bool)
    | And of (string*bool) * formula
    | Or of (string*bool) * formula

type branch =
    | Empty
    | Node of (formula option * formula * branch);;

let extract (f:formula option) = match f with
    | None ->  Atom("none", false)
    | Some t -> t

let rec print_formula (f:formula) = match f with
    | Atom(s, b) -> if b then print_string s else print_string "Not ";
        print_string s;
    | And ((f, b),g) -> if b then print_string f else print_string "Not ";
        print_string f;print_string " And ";print_formula g
    | Or ((f,b),g) -> if b then print_string f else print_string "Not ";
        print_string f;print_string " Or ";print_formula g;;

let rec print_branches (b:branch) =
    print_string " [";
    match b with
        | Empty -> ()
        | Node(a1, a2, b) -> print_formula@@extract a1;print_string ", ";
            print_formula a2;print_branches b;
    print_string "]";;
```

# Code - Alternée 2

```
let rec formula2branch (f:formula) : branch = match f with
    | And(a, Or(b, Atom(c))) -> Node(Some(Atom b), Atom a, Node(None, Atom(c),
        Empty))
    | And(a, Or(b, c)) ->  Node(Some(Atom b), Atom a, formula2branch c)
    | And(a, Atom(b)) -> Node(Some (Atom b), Atom a, Empty)
    | _ -> failwith "Pas alternee"

let has_cycle (br:branch) : bool =
    let rec aux (br:branch) (d:(string,bool) Hashtbl.t) : bool = match br with
    | Node(None, Atom (f, b), Empty) ->
      if Hashtbl.mem d f then
        Hashtbl.find d f = b
      else
        true
    | Node(Some(Atom(fg, bg)), Atom (fd, bd), Empty) ->
        if Hashtbl.mem d fd then
          if Hashtbl.find d fd = bd then
            not @@ Hashtbl.mem d fg && Hashtbl.find d fg <> bg
          else
            false
        else(
          Hashtbl.add d fd bd;
          not @@ Hashtbl.mem d fg && Hashtbl.find d fg <> bg)
    | Node(Some (Atom (fg, bg)), Atom (fd, bd), nb) ->
      if Hashtbl.mem d fd then
        if Hashtbl.find d fd <> bd then
```

# Code - Alternée 3

```
false
    else
    if Hashtbl.mem d fg then
        if Hashtbl.find d fg = bg then
        true
        else
        aux nb d
    else
        true
else
    (Hashtbl.add d fd bd;
    if Hashtbl.mem d fg then
    if Hashtbl.find d fg = bg then
        true
    else
        aux nb d
    else
    true)
| _ -> failwith "Pas␣alternee"
in aux br (Hashtbl.create 100);;

let is_satisfiable (f:formula) : bool = let b = formula2branch f in has_cycle b
     ;;
```