

Méthode des tableaux : Optimisation pour des formules de la forme alternée

Forme proposition pour accélérer méthode tableau mémoisation des propositions (SQL, dictionnaire, serialisation ?)

Contents

1	Logique Propositionnelle	1
1.1	Définition	1
1.2	Principe	2
1.3	Formules de forme alternée	3
1.4	Satisfaisabilité	3
1.5	Preuve sous hypothèse	3
2	Logique du 1er ordre	4

1 Logique Propositionnelle

1.1 Définition

Définition 1: La *logique propositionnelle* est un type de logique où les formules sont obtenus par des variables propositionnelles reliées par des connecteurs.

Définition 2 (Modèle): Un *modèle* d'une formule ϕ est une valuation qui rend vraie cette formule. On note l'ensemble des modèles de ϕ par:

$$Mod(\phi) := \{v \in Val | v \models \phi\}$$

Val étant l'ensemble des valuations de ϕ et $v \models \phi$ signifiant que la valuation v satisfait ϕ

Définition 3 (Conséquence Logique): Une formule ϕ est *conséquence logique* d'une formule, notée ψ si $Mod(\psi) \subseteq Mod(\phi)$. On note cela $\psi \models \phi$

On note \mathcal{V} un vocabulaire qu'on définit par $\mathcal{V} := \{p, q, \dots, \neg, \wedge, \vee, \implies, \iff, (,)\}$ et \mathcal{V}^* l'ensemble de toutes les expressions que l'on peut former avec le vocabulaire \mathcal{V}

Définition 4 (Système formel): Un système formel est défini par un tuple $(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A}, \mathcal{R})$, tel que:

- \mathcal{V} est un ensemble de symboles
- \mathcal{E} est un ensemble d'expressions bien formées dans \mathcal{V}^*
- \mathcal{A} est un ensemble d'axiomes ($\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$)
- \mathcal{R} est un ensemble de règles de déduction de la forme: $r_i : f_1, f_2, \dots, f_n \vdash g$ avec $f_i, g \in \mathcal{E}$

Définition 5 (Dédution ou preuve): Soit un système SF, une preuve de c_p à partir de h_1, \dots, h_n dans SF qu'on note $h_1, \dots, h_n \vdash c_p$ toute suite c_1, \dots, c_p telle que $\forall i \in \mathcal{N} | 1 \leq i \leq p, c_i$ est un des suivants:

- Un axiome
- Une hypothèse
- Obtenu par application d'une règle r_i telle que $c_{i_1}, \dots, c_{i_k} \vdash c_i$ où $i_1, \dots, i_k < i$

On note $n \in \mathbb{N}^*$ Le procédé de la méthode des tableaux consiste donc à séparer les formules logiques complexes en plus petite formule jusqu'à que des paires complémentaires de littéraux (a et $\neg a$) soit extrait ou qu'on ne peut plus simplifier la formule. Pour cela, on doit définir quelques concepts sur les arbres.

Définition 6 (Arbre de déduction): Arbre dont les sommets sont composés de formule, qui sont soit une hypothèse à la racine de l'arbre, soit une formule obtenue par l'application d'une règle sur une formule présente dans la même branche plus proche de la racine.

Definition 7 (Branche fermée): Une branche est fermée si elle contient ϕ et $\neg\phi$

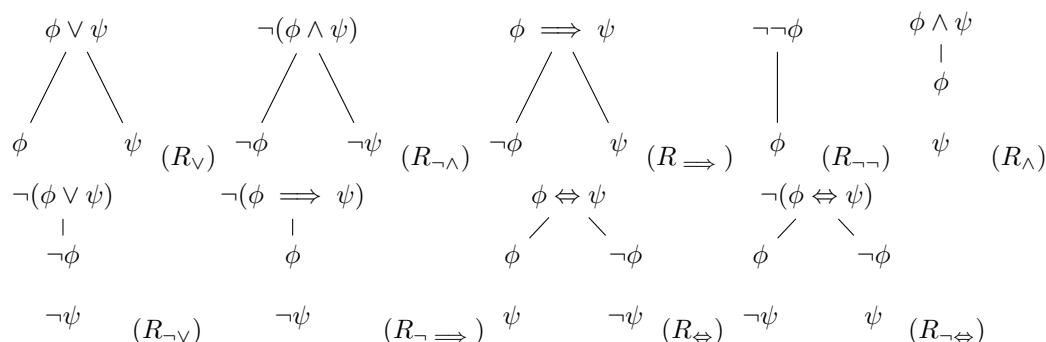
Definition 8 (Arbre fermé): Un arbre de déduction est fermé si toutes les branches le sont.

1.2 Principe

Pour ainsi en déduire si une formule ϕ est insatisfaisable ou pas, on adopte des règles qu'on applique sur un arbre de déduction.

- On place $\neg\phi$ dans la racine de l'arbre.
- On applique les règles (R_x) suivantes à chaque branche non fermée de l'arbre
- Si l'arbre est in fine fermé, alors ϕ est vrai

Les règles (R_x) dites Smullyan-style sont:



Dans les cas où on trouve dans une même branche a et $\neg a$, on ferme la branche, si l'arbre devient fermé, alors $\neg\phi$ est forcément faux, donc ϕ est forcément vrai.

Proposition 1: Soit Ψ un ensemble d'hypothèse et ϕ une formule, on note $\Psi \vdash \phi$ l'existence d'un arbre fermé pour $\Psi \cup \{\neg\phi\}$.

$$\Psi \vdash \phi \Leftrightarrow \Psi \models \phi$$

Autrement dit, appliqué la méthode des tableaux à la négation de la formule et ses hypothèses est équivalent à prouver cette formule (*Prouver dans le sens que c'est une tautologie en supposant Ψ*)

Preuve 1: La preuve de cette proposition permet de prouver la correction de l'implémentation de base. Elle est trouvable en ligne

Cette proposition assure un moyen de prouver une formule.

Proposition 2: Soit Ψ un ensemble d'hypothèse et ϕ une formule, on note $\Psi \vdash \phi$ la non existence d'un arbre fermé pour Ψ .

$$\Psi \vdash \phi \Leftrightarrow \Psi \models \phi$$

Autrement dit, appliqué la méthode des tableaux est équivalent à prouver la satisfaisabilité de cette formule

Preuve 2: En ligne

Cette proposition assure un moyen de prouver la satisfaisabilité d'une formule

1.3 Formules de forme alternée

Definition 9: Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\alpha_k)_{k \in [1, n]}$ des littéraux, une formule ϕ est de forme alternée ssi

$$\phi := \alpha_1 \wedge (\alpha_2 \vee (\alpha_3 \wedge (\dots (\alpha_n))))$$

On gardera les parenthèses dans la suite pour garder le coté intuitif de cet écriture

On remarque une CNS pour que ce genre de formule soit vrai:

Proposition 3: ϕ de forme alternée est vrai ssi:

$$(\exists k \in \mathbb{N}^*, \alpha_{2k-2} \text{ OU } n \text{ impair} \implies \alpha_n \text{ avec } k = \frac{n-1}{2}) \text{ ET } \forall i \in [1, k], \alpha_{2i-1}$$

Preuve 3: (\Leftarrow) Immédiat

(\Rightarrow) Supposons ϕ de forme alternée vrai: α_1 est forcément vrai, deux possibilités : soit α_2 est vrai, soit $\alpha_3 \wedge (\dots)$ est vrai. Dans le deuxième cas, on répète le raisonnement sur $\alpha_3 \wedge (\dots)$ qui est bien de forme alternée.

Deux cas de figure:

- On arrête donc le processus dès que un littéral indexé par un nombre pair est vrai. Dans ce cas là, tout les indexés impair précédents sont aussi vrai.
- Si aucun littéral pair est vrai, alors n est impair sans quoi ϕ n'est pas vrai car α_n doit être vrai. On en déduit que tout les littéraux impairs sont vraies, donc la formule est vrai.

Mais ceci n'est pas important, cela aide juste à se donner une idée de la structure

1.4 Satisfaisabilité

On peut résoudre facilement la satisfaisabilité de la formule en convertissant le tout en FNC et en implémentant un 2-SAT solver, mais ce n'est pas ce qui nous intéresse ici. Revenons à la méthode des tableaux, en appliquant les règles à la famille de formule de forme alternée, on observe un pattern sur l'arbre résultant $\forall k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{array}{c} a_{2k-1} \wedge (a_{2k} \vee A) \\ | \\ a_{2k-1} \\ / \quad \backslash \\ a_{2k} \quad A \end{array}$$

où A est la suite de la forme alternée, de forme presque-equivalente à $a_{2k-1} \wedge (a_{2k} \vee A)$

1.5 Preuve sous hypothèse

Proposition 4: Avec les mêmes définitions, soit $\phi = \alpha_1 \wedge (\alpha_2 \vee (\alpha_3 \wedge (\dots (\alpha_n))))$ une formule de forme alternée:

$$\neg \phi = \neg \alpha_1 \vee (\neg \alpha_2 \wedge (\neg \alpha_3 \vee (\dots (\neg \alpha_n))))$$

Cette forme est cohérente avec les propriétés de \neg .

Preuve 4: On prouve par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathcal{P}(n) : \neg \phi = \neg \alpha_1 \vee (\neg \alpha_2 \wedge (\neg \alpha_3 \vee (\dots (\neg \alpha_n))))$$

$$\mathcal{P}(1) : \neg \phi = \neg \alpha_1 \text{ vrai}$$

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{P}(k)$:

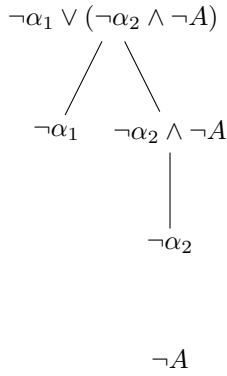
$$\neg \phi = \neg (\alpha_1 \wedge (\alpha_2 \vee (\alpha_3 \wedge (\dots (\alpha_{n+1}))))$$

$$= \neg \alpha_1 \vee (\neg \alpha_2 \wedge \neg (\alpha_3 \wedge (\dots (\alpha_{n+1}))))$$

On trouve le résultat en appliquant l'hypothèse de récurrence sur $\alpha_3 \wedge (\dots (\alpha_{n+1}))$ qui est de forme alternée.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$$

De là, on peut enfin en déduire la forme de l'arbre induit par la méthode des tableaux sur la négation d'une formule de forme alternée sans hypothèse



Proposition 5: $\neg\phi$ de forme alternée est vrai ssi:

$$(\forall k \in \mathbb{N}^*, \neg\alpha_{2k-2} \text{ ET } n \text{ impair ET } \neg\alpha_n \text{ avec } k = \frac{n-1}{2}) \text{ OU } \exists i \in [1, k], \neg\alpha_{2i-1}$$

Preuve 5: On utilise la négation de la proposition 3 ainsi que $\phi \rightarrow F \Leftrightarrow \neg\phi \rightarrow T$

2 Logique du 1er ordre

La logique propositionnelle étant mathématiquement limitée, on se propose l'utilisation de la logique du 1er ordre. Cela nous permettra ainsi d'étudier Zenon, un prouveur d'automatique de théorème.

Definition 10: La *logique du 1er ordre* est un type de logique qui en plus des éléments de la logique propositionnelle permet l'utilisation de quantificateurs et de *termes*.

Definition 11: Soit un ensemble infini de variables $X = \{x, y, x_1, x_2, \dots\}$ et un ensemble $\mathcal{F} = \{c, f, g, \dots\}$ de symboles de fonction (autrement appelé signature). On rappelle que l'arité d'un symbole est son nombre d'argument. Les termes sont définis par induction:

- $\forall x \in X, x$ est un terme
- Tout symbole d'arité 0 (les constantes) est un terme
- $f(t_1, \dots, t_n)$ est un terme ssi f est un symbole d'arité n et t_1, \dots, t_n sont des termes

On note $\mathcal{T}(\mathcal{F}, X)$ l'ensemble des termes sur \mathcal{F} et X .