

TIPE 25/26 - Cycles et Boucles

Méthode des tableaux : Optimisation et étude de la satisfiabilité de formule

GIL Dorian

Sommaire

- 1** Introduction Générale et Objectifs
- 2** Etude Introductive: Forme Alternée
- 3** Etude dans le cadre de la logique temporelle linéaire

Introduction - Definition

Definition (Méthode des tableaux)

Algorithme pour prouver qu'une assertion ϕ ayant pour hypothèse (H_n) soit satisfiable

On supposera que aucune hypothèse n'est faite, on peut facilement adapter l'étude que l'on va faire lors d'ajout d'hypothèse.

Introduction - Definition

Definition (Méthode des tableaux)

Algorithme pour prouver qu'une assertion ϕ ayant pour hypothèse (H_n) soit satisfiable

On supposera que aucune hypothèse n'est faite, on peut facilement adapter l'étude que l'on va faire lors d'ajout d'hypothèse.

- On place ϕ et ses hypothèses dans la racine.
- On applique des règles (R_x) à chaque formule en bout d'arbre qui sont developpables
- Si on trouve des contradictions (des cycles) dans toutes les branches de l'arbre (branches fermées), l'arbre est fermé donc la formule est insatisfiable.

Introduction - Definition

Definition (Méthode des tableaux)

Algorithme pour prouver qu'une assertion ϕ ayant pour hypothèse (H_n) soit satisfiable

On supposera que aucune hypothèse n'est faite, on peut facilement adapter l'étude que l'on va faire lors d'ajout d'hypothèse.

- On place ϕ et ses hypothèses dans la racine.
- On applique des règles (R_x) à chaque formule en bout d'arbre qui sont developpables
- Si on trouve des contradictions (des cycles) dans toutes les branches de l'arbre (branches fermées), l'arbre est fermé donc la formule est insatisfiable.

$$\begin{array}{ccccccc} \phi \vee \psi & \neg(\phi \wedge \psi) & \neg\neg\phi & & \phi \wedge \psi & \neg(\phi \vee \psi) \\ / \quad \backslash & / \quad \backslash & | & & | & \\ \phi & \psi & \neg\phi & \neg\psi & \phi & \phi, \psi & \neg\phi, \neg\psi \end{array}$$

Introduction - Definition

Les règles définies précédemment sont dites Smullyan-Style

Definition (Branche fermée)

Une branche est fermée si elle contient ϕ et $\neg\phi$

Une formule est insatisfiable ssi son arbre associé est dit fermé ssi toutes les branches le sont.

Introduction - Remarques

- On peut utiliser la méthode des tableaux pour montrer qu'une formule est une tautologie:
 - 1 On place $\neg\phi$ et ses hypothèses dans la racine.
 - 2 On applique des règles (R_x) à chaque formule en bout d'arbre qui sont developpables
 - 3 Si on trouve a et $\neg a$ dans les branches de l'arbre (des *cycles*), alors ϕ est une tautologie

On pourra donc aussi adapter nos recherches pour la recherche de tautologie.

- Nous allons maintenant introduire un type de formule et étudier la méthode des tableaux sur ce cas particulier, pour en déduire des propriétés intéressantes. Ou même des optimisations de cette méthode.

Alternée - Définition

Definition (Forme Alternée)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $(a_k)_{k \in [|1,n|]}$ des littéraux, on dit que φ est de forme alternée ssi

$$\varphi = a_1 \wedge (a_2 \vee (a_3 \wedge (\dots (a_n))))$$

Alternée - Définition

Definition (Forme Alternée)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $(a_k)_{k \in [|1,n|]}$ des littéraux, on dit que φ est de forme alternée ssi

$$\varphi = a_1 \wedge (a_2 \vee (a_3 \wedge (\dots (a_n))))$$

On remarquera le parenthesage qui enlève toute ambiguïté sur la priorité entre les opérateurs logiques.

Alternée - Recherche Algorithme

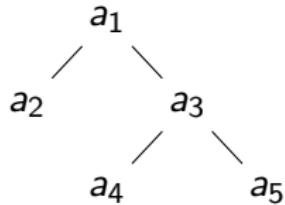
Nous recherchons maintenant un algorithme utilisant la méthode des tableaux pour trouver la satisfiabilité des formes alternées.

Nous allons modéliser conformément à la méthode des tableaux et au dernier théorème présenté comme un arbre binaire, plus précisément en liste chaînée: Par exemple pour $n = 5$, on aura le schéma suivant:

Alternée - Recherche Algorithme

Nous recherchons maintenant un algorithme utilisant la méthode des tableaux pour trouver la satisfiabilité des formes alternées.

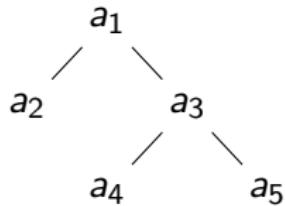
Nous allons modéliser conformément à la méthode des tableaux et au dernier théorème présenté comme un arbre binaire, plus précisément en liste chaînée: Par exemple pour $n = 5$, on aura le schéma suivant:



Alternée - Recherche Algorithme

Nous recherchons maintenant un algorithme utilisant la méthode des tableaux pour trouver la satisfiabilité des formes alternées.

Nous allons modéliser conformément à la méthode des tableaux et au dernier théorème présenté comme un arbre binaire, plus précisément en liste chaînée: Par exemple pour $n = 5$, on aura le schéma suivant:

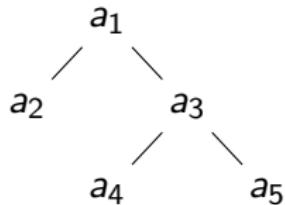


Et ce conformément au règle de la méthode des tableaux. La construction de cette arbre binaire se fait à priori en $\mathcal{O}(n)$

Alternée - Observations

On va faire 3 observations, et on va en déduire un algorithme:

- Si un des littéraux dans une branche gauche (les pairs) ne provoquent aucune contradiction, c'est gagné.
- Dans le cas inverse, on doit rechercher plus profond dans l'arbre (parcours de la branche droite)
- Et ce ainsi de suite, jusqu'à en déduire un arbre fermé, ou pas
- Et ce en prenant aussi en compte les littéraux impairs



Alternée - Schema Algorithme

On décrit un appel de l'algorithme qu'on implémente de manière recursive (dans le cas général): Avant cela on crée un dictionnaire. On appelle littoral droit les littéraux impairs et gauche les pairs:

- 1 On analyse le littoral droit, si il y a contradiction, l'arbre est fermé, sinon on ajoute éventuellement dans le dictionnaire le littoral
- 2 On analyse le littoral gauche, si il produit une contradiction, appel recursif plus profond dans l'arbre, sinon la formule est satisfiable

On peut montrer que cette algorithme est en $\mathcal{O}(n)$

Alternée - Conséquence

On a donc trouvé un moyen polynomial pour montrer la satisfiabilité d'une forme alternée !!

Alternée - Conséquence

On a donc trouvé un moyen polynomial pour montrer la satisfiabilité d'une forme alternée !!

- En effet, ce programme est en $\mathcal{O}(n)$, c'est un parcours linéaire d'une liste chainée, utilisant des opérateurs sur les Hashtbl qu'on peut supposé constant.
- On a prouvé la terminaison et la correction du programme:
- La correction (preuve faite) est assuré par l'invariant "Toutes les branches déjà traités sont fermés"
- La terminaison (preuve faite) est assuré simplement.

Alternée - Conversion

On se demande naturellement quelles sont les formules qu'on peut transformer en formule alternée.

- Quand on traduit une forme alternée, on obtient une FNC dont la taille des clauses est strictement croissante.
- On peut trouver des contres exemples: par exemple $a_1 \vee a_2$ ne pourra pas s'exprimer sous forme alternée (sauf si on fixe un des littéraux)
- En convertissant toutes les formules en FNC, seules certaines formules ayant des clauses à taille croissante pourront être reconvertis en forme alternée.

Alternée - Conclusion

On décide de tester la vitesse d'execution de mon algorithme contre deux algorithmes de satisfiabilités optimisés: Quine et Coq. On utilise un script Python pour générer les mêmes formules pour les différentes structures données demandés par les algorithmes. Sur un dataset de 100 formules générées pseudo-aléatoirement, nous avons les résultats suivants:

- Alternée: 0.000493s
- Quine (avec conversion en CNF): 0.025874s
- Quine (sans conversion en CNF): 0.018691s

Donc notre algorithme est 50 fois plus rapide sur ce dataset, ce qui n'est pas tellement surprenant.

La logique du 1er ordre

- On ajoute les quantificateurs \exists et \forall
- Un ensemble de fonctions de symboles \mathcal{F} qui a des symboles associe un symbole
- Un ensemble de relation \mathcal{R} qui a des symboles associe un booléen.

On note l'arité le nombre d'argument d'une fonction et X les variables.

Definition

On définit les termes $\mathcal{T}(\mathcal{F}, X)$ par induction:

- Tout $x \in X$ est un terme.
- Les constantes sont des termes (symbole d'arité 0).
- $f(t_1, \dots, t_n)$ est un terme si f est un symbole d'arité n et t_1, \dots, t_n sont des termes.

La méthode des tableaux pour logique du 1er ordre

On ajoute quatres règles:

$$\begin{array}{cccc} \forall x, P(x) & \exists x, P(x) & \neg(\forall x, P(x)) & \neg(\exists x, P(x)) \\ | & | & | & | \\ P(t) & P(c) & \exists x, \neg P(x) & \forall x, \neg P(x) \end{array}$$

où t et c est une variable fixe quelconque.

Attention: Pour la règle \forall , on peut choisir t , pour la règle \exists , on prend une variable fraiche c !

La logique temporelle du temps linéaire

Definition (Formule de la LTL)

On définit F l'ensemble des formules de la LTL inductivement par:

- $p \in AP \implies p \in F$
- si ψ et ϕ sont des formules de LTL alors $\neg\psi, \phi \vee \psi, X\psi, \phi U \psi$ sont des formules de LTL

AP un ensemble fini de variables propositionnelles.

Definition (Opérateurs X et U)

- $X\phi$: ϕ doit être satisfaite dans l'état suivant (neXt)
- $\psi U \phi$: ψ doit être satisfaite dans tous les états jusqu'à un état où ϕ est satisfait (Until)

Etat dans la LTL

Definition (Monde)

On définit un tel objet comme $\omega := w_0, w_1, \dots$ une suite infinie d'état. On écrira $\omega^i := w_i, w_{i+1}, \dots$ un suffixe de ω .

Soit $v : \omega \times F \rightarrow \{T, F\}$ une fonction de valuation.

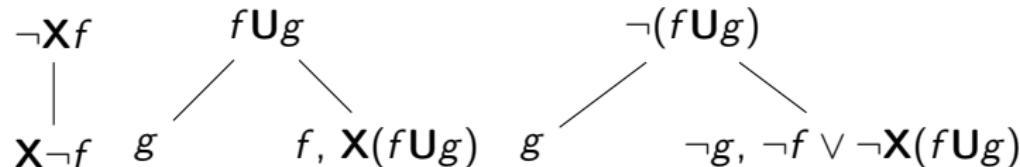
Definition (Satisfaction d'un monde)

En LTL, on définit $\omega \models f$ via:

- $\omega \models a$ si $v(w_0, a) = T$ si a atomique
- $\omega \models \neg f$ si $\neg(\omega \models f)$
- $\omega \models f \vee g$ si $\omega \models f$ ou $\omega \models g$
- $\omega \models Xf$ si $\omega^1 \models f$
- $\omega \models f \mathbf{U} g$ si $\omega \models g$ ou $\omega \models f \wedge X(f \mathbf{U} g)$

Méthode des tableaux en LTL

On définit deux nouvelles règles pour la méthode des tableaux en LTL:



Definition (Formule élémentaire)

f est élémentaire ssi il respecte un de ses 2 points:

- C'est une formule atomique (ou la négation d'une formule atomique)
- Il a comme connecteur logique "principale" \mathbf{X} (des \mathbf{X} -formules)

Si un noeud contient uniquement des formules élémentaires, alors on crée un fils du noeud contenant toutes les \mathbf{X} -formules sans leur connecteur logique principal \mathbf{X}

Exemples d'utilisation de la méthode des tableaux

On peut trouver plusieurs applications à la LTL et à la méthode des tableaux:

- Preuve de programme concurrentiel
- Raisonnement sur des circuits intégrés
- Raisonnement sur les protocoles de communications

Toutes ces applications s'inscrivent dans le cadre de la vérification de modèles qui est une méthode permettant de montrer la correction de systèmes informatiques complexes.

Definition (Verification de modèle (Model Checking))

Technique de vérification qui explore tout les états possible d'un système de manière force brute.

A propos du model checking

- Ce n'est pas avec la LTL que nous allons faire des gros exemples de model checking (Un model checker de base peut s'occuper de 10^9 états environ, allant jusqu'à 10^{476} pour les meilleurs!).
- Ainsi un model checker typique pourrait utiliser entre autres la LTL pour s'occuper en particulier des deadlocks. C'est ainsi qu'on pourrait utiliser la méthode des tableaux pour prouver une formule qui montre que des algorithmes vont bien s'exécuter de manière à ne pas avoir d'inter-dépendance.
- Ainsi nous allons examiner un exemple dans lequel nous allons appliquer la méthode des tableaux pour prouver le bon fonctionnement du système choisi!

Automate de Büchi

Definitions Explications etc...

Contexte

Application, un simple feu rouge ?

Notre But

Résolution par Tableau et par Buchi (après implémentation des solutions). Comparaison des algorithmes en terme de rapidité ?

Bibliographie

- 1 Logique: fondements et applications (Dunod) de Pierre Le Barbenchon, Sophie Pinchinat, François Schwarzentruber
- 2 Mathematical Logic: Tableaux Reasoning for Propositional Logic de Chiara Ghidini
(<https://dit.unitn.it/~dkr/ml2015/slides/PLtableau.pdf>)
- 3 Tableau Methods for Propositional Logic and Term Logic de Tomasz Jarmużek
- 4 The tableau method for temporal logic: an overview - Pierre WOLPER
- 5 Principles of Model Checking - Christel Baier et Joost-Pieter Katoen

Code - Méthode des tableaux classique 1

```
type formula =
| Atom of string
| Not of formula
| And of formula * formula
| Or of formula * formula

let rec expand formula =
  match formula with
  | Not (Not f) -> [[f]]
  | Not (And (f1, f2)) -> [[Not f1]; [Not f2]]
  | Not (Or (f1, f2)) -> [[Not f1; Not f2]]
  | And (f1, f2) -> [[f1; f2]]
  | Or (f1, f2) -> [[f1]; [f2]]
  | _ -> [];

let rec has_cycle branch =
  List.exists (fun f -> List.mem (Not f) branch) branch;;
```

Code - Méthode des tableaux classique 2

```
let rec tableau branches =
  match branches with
  | [] -> false
  | branch :: rest ->

    if has_cycle branch then
      tableau rest
    else
      match branch with
      | [] -> true
      | f :: fs ->

        let expansions = expand f in match expansions with
        | [] -> tableau (fs :: rest)
        | new_branches ->

          let expanded_branches = List.map (fun b -> b @ fs) new_branches in
          tableau (expanded_branches @ rest);;

let is_satisfiable formula =
let initial_branch = [formula] in tableau [initial_branch];;
```

Code - Méthode des tableaux classique 1

```
type prop = | Var of string | Not of prop | And of prop * prop | Or of prop *
            prop
(* Une branche c'est une liste de formule avec un signe *)
type branch = (bool * prop) list

let is_literal = function
  | (true, Var _) -> true
  | (false, Var _) -> true
  | (true, Not (Var _)) -> true
  | (false, Not (Var _)) -> true
  | _ -> false

(* Check les contradictions *)
let branch_closed (br : branch) : bool =
  let pos = Hashtbl.create 16 in
  let neg = Hashtbl.create 16 in
  let record = function
    | (true, Var v) -> Hashtbl.replace pos v true
    | (false, Var v) -> Hashtbl.replace neg v true
    | (true, Not (Var v)) -> Hashtbl.replace neg v true
    | (false, Not (Var v)) -> Hashtbl.replace pos v true
    | _ -> ()
  in
  List.iter record br;
  let closed = ref false in
  Hashtbl.iter (fun v _ -> if (Hashtbl.mem pos v) && (Hashtbl.mem neg v) then
    closed := true) pos;
  !closed
```

Code - Méthode des tableaux classique 2

```
(* La décomposition usuelle faites durant la méthode des tableaux *)
let decompose_once (br : branch) : branch list option =
    let rec find_nonlit acc = function
        | [] -> None
        | x :: xs ->
            if is_literal x then find_nonlit (x::acc) xs
            else Some (List.rev acc, x, xs)
    in
    match find_nonlit [] br with
    | None -> None
    | Some (left, (sign, form), right) ->
        let rest = left @ right in
        let mk b p = (b, p) in
        (match sign, form with
        | true, And (a,b) ->
            Some [ (mk true a) :: (mk true b) :: rest ]
        | false, Or (a,b) ->
            Some [ (mk false a) :: (mk false b) :: rest ]
        | true, Not a ->
            Some [ (mk false a) :: rest; (mk true b)::rest ]
        | false, And (a,b) ->
            Some [ (mk false a)::rest; (mk false b)::rest ]
        | true, Or (a,b) ->
            Some [ (mk true a) :: rest ]
        | false, Not a ->
            Some [ (mk false a) :: rest ]
        | _, _ -> None)
```

Code - Méthode des tableaux classique 3

```
(* La Methode des Tableaux en soit *)
let satisfiable (phi : prop) : bool =
let initial_branch = [ (true, phi) ] in
let rec explore_stack stack =
  match stack with
  | [] -> false
  | br :: rest ->
    if branch_closed br then explore_stack rest else
    match decompose_once br with
    | None -> true
    | Some new_branches -> explore_stack (new_branches @ rest)
in explore_stack [ initial_branch ]
```

Code - Alternée 1

```
type formula =
| Atom of (string* bool)
| And of (string*bool) * formula
| Or of (string*bool) * formula

type branch =
| Empty
| Node of (formula option * formula * branch);;

let extract (f:formula option) = match f with
| None -> Atom("none", false)
| Some t -> t

let rec print_formula (f:formula) = match f with
| Atom(s, b) -> if b then print_string s else print_string "Not";
    print_string s;
| And ((f, b),g) -> if b then print_string f else print_string "Not";
    print_string f;print_string "And";print_formula g
| Or ((f,b),g) -> if b then print_string f else print_string "Not";
    print_string f;print_string "Or";print_formula g;;

let rec print_branches (b:branch) =
print_string "[";
match b with
| Empty -> ()
| Node(a1, a2, b) -> print_formula@@extract a1;print_string ",";
    print_formula a2;print_branches b;
print_string "]";;
```

Code - Alternée 2

```
let rec formula2branch (f:formula) : branch = match f with
| And(a, Or(b, Atom(c))) -> Node(Some(Atom b), Atom a, Node(None, Atom(c),
    Empty))
| And(a, Or(b, c)) -> Node(Some(Atom b), Atom a, formula2branch c)
| And(a, Atom(b)) -> Node(Some (Atom b), Atom a, Empty)
| _ -> failwith "Pas d'alternée"

let has_cycle (br:branch) : bool =
let rec aux (br:branch) (d:(string,bool) Hashtbl.t) : bool = match br with
| Node(None, Atom (f, b), Empty) ->
    if Hashtbl.mem d f then
        Hashtbl.find d f = b
    else
        true
| Node(Some(Atom(fg, bg)), Atom (fd, bd), Empty) ->
    if Hashtbl.mem d fd then
        if Hashtbl.find d fd = bd then
            not @@ Hashtbl.mem d fg && Hashtbl.find d fg <> bg
        else
            false
    else(
        Hashtbl.add d fd bd;
        not @@ Hashtbl.mem d fg && Hashtbl.find d fg <> bg)
| Node(Some (Atom (fg, bg)), Atom (fd, bd), nb) ->
    if Hashtbl.mem d fd then
        if Hashtbl.find d fd <> bd then
```

Code - Alternée 3

```
false
else
  if Hashtbl.mem d fg then
    if Hashtbl.find d fg = bg then
      true
    else
      aux nb d
  else
    true
else
  (Hashtbl.add d fd bd;
  if Hashtbl.mem d fg then
    if Hashtbl.find d fg = bg then
      true
    else
      aux nb d
  else
    true)
| _ -> failwith "Pas d'alternee"
in aux br (Hashtbl.create 100);;

let is_satisfiable (f:formula) : bool = let b = formula2branch f in has_cycle b
;;
```