### Piste de recherche de sujet

### Decomposition de graphe

07/02 Premiere idée de sujet: Identification de graphe décomposable en cycle hamiltonien en temps polynomial

### Logique, systeme de preuve

07/02 J'aimerai néanmoins plus m'orienté vers la logique, piste de recherche: Méthode des tableaux, Zenon theorem prover, calcul séquent. Exploration de la méthode des tableaux: J'ai besoin de trouové un livre présentant cette méthode

# 1 Méthode des tableaux

## 1.1 Logique propositionelle

Definition 1: La *logique propositionelle* est un type de logique où les formules sont obtenus par des variables propositionelles reliées par des connecteurs.

Definition 2 (Modèle): Un *modèle* d'une formule $\phi$ est une valuation qui rend vraie cette formule. On note l'ensemble des modèles de $\phi$ par:

$$Mod(\phi) := \{v \in Val | v \vDash \phi\}$$

$Val$ étant l'ensemble des valuations de $\phi$ et $v \vDash \phi$ signfiant que la valuation $v$ satisfait $\phi$

Definition 3 (Conséquence Logique): Une formule $\phi$ est *conséquence logique* d'une formule, notée $\psi$ si $Mod(\psi) \subseteq Mod(\phi)$. On note cela $\psi \vDash \phi$

On note $\mathcal{V}$ un vocabulaire qu'on définie par $\mathcal{V} := \{p, q, \dots, \neg, \wedge, \vee, \implies, \Leftrightarrow, (, )\}$ et $\mathcal{V}*$ l'ensemble de toutes les expressions que l'on peut former avec le vocabulaire $\mathcal{V}$

Definition 4 (Système formel): Un système formel est défini par un tuple $(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A}, \mathcal{R})$, tel que:

- $\mathcal{V}$ est un ensemble de symboles
- $\mathcal{E}$ est un ensemble d'expressions bien formées dans $\mathcal{V}*$
- $\mathcal{A}$ est un ensemble d'axiomes ($\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$)
- $\mathcal{R}$ est un ensemble de règles de déduction de la forme: $r_i : f_1, f_2, \dots, f_n \vdash g$ avec $f_i, g \in \mathcal{E}$

Definition 5 (Déduction ou preuve): Soit un système SF, une preuve de $c_p$ à partir de $h_1, \dots, h_n$ dans SF qu'on note $h_1, \dots, h_n \vdash c_p$ toute suite $c_1, \dots, c_p$ telle que $\forall i \in \mathcal{N} | 1 \leq i \leq p$, $c_i$ est un des suivants:

- Un axiome
- Une hypothèse
- Obtenu par application d'une règle $r_i$ telle que $c_{i_1}, \dots c_{i_k} \vdash c_i$ où $i_1, \dots, i_k < i$

On note $n \in [1, +\infty]$

Definition 6: *La méthode des tableaux* consistent en prouvant une assertion $B$ ayant pour hypothèse $(A_n)$ en montrant que $\{A_1, \dots, A_n, \neg B\}$ est insatisfaisable (Cela revient à montrer qu'une implication est vraie car sa négation ne peut être vraie) i.e $((A_1, \dots, A_n) \implies B) \Leftrightarrow Mod(\neg((A_1, \dots, A_n) \implies B)) = \emptyset \Leftrightarrow Mod((A_1, \dots, A_n) \wedge \neg B) = \emptyset$.

Le procédé consiste donc à séparer les formules logiques complexes en plus petite formule jusqu'à que des pairs complementaires de litteraux ($a$ et $\neg a$) soit extrait ou qu'on ne peut plus simplifier la formule.

Pour cela, on doit définir quelques concepts sur les arbres.

> Definition 7 (Arbre de déducitton): Arbre dont les sommets sont composés de formule, qui sont soit une hypothèse à la racine de l'arbre, soit une formule obtenue par l'application d'une règle sur une formule présente dans la même branche plus proche de la racine.

> Definition 8 (Branche fermée): Une branche est germée si elle contient $\phi$ et $\neg\phi$

> Definition 9 (Arbre fermé): Un arbre de déduction est fermé si toutes les branches le sont.

Pour ainsi en déduire si une formule $\phi$ est vrai ou non, on adopte des règles qu'on applique sur un arbre de déduction.

- On place $\neg\phi$ dans la racine de l'arbre.
- On applique les règles $(R_x)$ suivantes à chaque branche non fermé de l'arbre
- Si l'arbre est in fine fermé, alors $\phi$ est vrai

Les règles $(R_x)$ sont:

$$\begin{array}{c} \phi \lor \psi \\ \swarrow \quad \searrow \\ \phi \qquad \psi \end{array} \ (R_\lor) \qquad \begin{array}{c} \neg(\phi \land \psi) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \neg\phi \qquad \neg\psi \end{array} \ (R_{\neg\land}) \qquad \begin{array}{c} \phi \implies \psi \\ \swarrow \quad \searrow \\ \neg\phi \qquad \psi \end{array} \ (R_{\implies}) \qquad \begin{array}{c} \neg\neg\phi \\ | \\ \phi \end{array} \ (R_{\neg\neg}) \qquad \begin{array}{c} \phi \land \psi \\ | \\ \phi \\ \psi \end{array} \ (R_\land) \qquad \begin{array}{c} \neg(\phi \lor \psi) \\ | \\ \neg\phi \\ \neg\psi \end{array} \ (R_{\neg\lor})$$

$$\begin{array}{c} \neg(\phi \implies \psi) \\ | \\ \phi \\ \neg\psi \end{array} \ (R_{\neg\implies}) \qquad \begin{array}{c} \phi \Leftrightarrow \psi \\ \swarrow \quad \searrow \\ \phi \qquad \neg\phi \\ \psi \qquad \neg\psi \end{array} \ (R_\Leftrightarrow) \qquad \begin{array}{c} \neg(\phi \Leftrightarrow \psi) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \phi \qquad \neg\phi \\ \neg\psi \qquad \psi \end{array} \ (R_{\neg\Leftrightarrow})$$

Dans les cas où on trouve dans une même branche $a$ et $\neg a$, on ferme la branche, si l'arbre devient fermé, alors $\neg\phi$ est forcement faux, donc $\phi$ est vrai.

## 1.2 Preuve

Preuve de Terminaison et equivalance entre le fait de trouver un tableau fermé pour $\neg\phi$ et la satisfaisabilité de $\phi$ d'un tableau

## 1.3 Application en code

# 2 Logique du 1er ordre

La logique propositionelle étant mathématiquement limité, on se propose l'utilisation de la logique du 1er ordre. Cela nous permettra ainsi d'étudier Zenon, un prouveur d'automatique de theorème.

> Definition 10: La *logique du 1er ordre* est un type de logique qui en plus des élements de la logique propositionelle permet l'utilisation de quantificateurs et de *termes*.

> Definition 11: Soit un ensemble infini de variables $X = \{x, y, x_1, x_2, \dots\}$ et un ensemble $\mathcal{F} = \{c, f, g, \dots\}$ de symboles de fonction (autrement appelé signature). On rappelle que l'arité d'un symbole est son nombre d'argument. Les termes sont définis par induction:
>
> - $\forall x \in X, x$ est un terme
> - Tout symbole d'arité 0 (les constantes) est un terme
> - $f(t_1, \dots, t_n)$ est un terme ssi $f$ est un symbole d'arité $n$ et $t_1, \dots, t_n$ sont des termes
>
> On note $\mathcal{T}(\mathcal{F}, X)$ l'ensemble des termes sur $\mathcal{F}$ et $X$.