Проблема собственных значений в задаче Штурма-Лиувилля. Вариант 11.

Содержание

Введение

Дана следующая краевая задача:

$$((-kx+l)u')' + \left(k^2\left(\frac{1}{kx+l} - kx\right)\right)u = \lambda u, k = 1.57495,\ \ l = 11.74842(1)$$

$$u(-1) = u(1) = 0(2)$$

Необходимо найти собственные числа и собственные функции.

Верхние и нижние оценки для собственных чисел

Идея

Для нахождения верхней и нижней оценки необходимо найти собственные числа данного уравнения

$$-\hat{p}y'' + \hat{q}y = \lambda y$$

где $\hat{p} = \min_{x\in(a,b)} \left(\max_{x\in(a,b)} \right) p(x),\ \ \hat{q} = \min_{x\in(a,b)} \left(\max_{x\in(a,b)} \right) q(x)$ в зависимости от того, какую из оценок необходимо получить. Собственные функции будут иметь вид

$$y(x) = C_1 cos(\nu x) + C_2 sin(\nu x)(3)$$

где $\nu = \sqrt{\frac{\lambda - \hat{q}}{\hat{p}}}.$ Для поиска собственных функций необходимо подставить (3) в (2) и приравнять определитель системы к 0:

$$\left|\begin{bmatrix} \cos(\nu x) & -\sin(\nu x) \\ \cos(\nu x) & \sin(\nu x) \end{bmatrix}\right| = 0$$

Имеем:

$$\sin(2\nu x) = 0$$

Таким образом, $\nu_k = \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{N}$. При данном ν_k, учитывая нашу краевую задачу, собственная функция $y_k(x)$ имеет вид $y_k(x) = \frac{\cos(\nu_k x)}{\int_{-1}^{1} \cos^2(\nu_k x)dx}$ при $k = 2l + 1$ и $y_k(x) = \frac{\sin(\nu_k x)}{\int_{-1}^{1} \sin^2(\nu_k x)dx}$ при $k = 2l$. Собственые числа найдем по формуле: $\lambda_k = \nu_k^2 \hat{p} + \hat{q}$.

Реализация

```
k = 1.57495;
l = 11.74842;
```

В нашем случае, $p(x) = kx + l,\ q(x) = k^2\left(\frac{1}{kx + l} - kx\right)$. Поскольку p(x) - линейная функция, ее минимум и максимум достигаются на концах отрезка $(-1, 1)$.

```
syms p x;
p = k*x + l;
min_p = subs(p,-1);
max_p = subs(p,1);
```

Функция $q(x)$, напротив, убывает на $(-1, 1)$, поэтому минимум достигается на левом конце, а максимум - на правом.

```
sym q;
q = k*k*(1/(k*x+l)-k*x);
min_q = subs(q,1);
max_q = subs(q,-1);
```

Соответственно, собственные функции для первого и второго собственного числа равны

```
nu_1 = pi/2;
nu_2 = pi;
syms y_1 y_2;
y_1 = cos(nu_1*x)/dotprod(cos(nu_1*x),cos(nu_1*x));
y_2 = sin(nu_2*x)/dotprod(sin(nu_2*x),sin(nu_2*x));
```

Оценки для собственных чисел равны:

```
lambda_1_min = nu_1*nu_1 * min_p + min_q;
lambda_2_min = nu_2*nu_2*min_p + min_q;
lambda_1_max = nu_1*nu_1*max_p + max_q;
lambda_2_max = nu_2*nu_2*max_p + max_q;
```

Убедимся, что собственные функции удовлетворяют краевой задаче

```
subs(y_1,-1)
```

ans = 0.0

```
subs(y_1,1)
```

ans = 0.0

```
subs(y_2,-1)
```

ans = 0.0

```
subs(y_2,1)
```

ans = 0.0

Найдем невязку, подставив полученные выражения для y_1, y_2 и значения λ_1, λ_2 в (1), получим

```
first_errors = zeros(2,1);
first_errors(1) = dotprod(L(y_1)-lambda_1_min*y_1,L(y_1)-lambda_1_min*y_1);
first_errors(2) = dotprod(L(y_1)-lambda_1_max*y_1,L(y_1)-lambda_1_max*y_1);
second_errors = zeros(2,1);
second_errors(1) = dotprod(L(y_2)-lambda_2_min*y_2,L(y_2)-lambda_2_min*y_2);
second_errors(2) = dotprod(L(y_2)-lambda_2_max*y_2,L(y_2)-lambda_2_max*y_2);
evaluation_labels = {'Оценки lambda 1','Невязки lambda 1','Оценки для lambda 2','Невязки lambda
evaluation_table = table(double([lambda_1_min;lambda_1_max]),first_errors,double([lambda_2_min;
    'VariableNames',evaluation_labels)
```

evaluation_table = 2×4 table

	Оценки lambda 1	Невязки lambda 1	Оценки для lambda 2	Невязки lambda 2
1	21.3816	67.1660	96.6877	460.2052
2	37.0245	67.2713	135.6468	460.4220

Приближенные значения первых двух собственных чисел

Идея

Приближенные значения собственных чисел можно найти по формуле

$$\lambda_i = \frac{[y_i, y_i]}{(y_i, y_i)}$$

где $[y, z] = \int\limits_{-1}^{1} (py'z' + qyz)dx, \ (y, z) = \int\limits_{-1}^{1} y\bar{z}dx$

Реализация

Воспользуемся вспомогательными функциями

```
lambda_1_appr = energprod(y_1,y_1)/dotprod(y_1,y_1)
```

lambda_1_appr = 29.1996951441481771283292800944 76

```
lambda_2_appr = energprod(y_2,y_2)/dotprod(y_2,y_2)
```

lambda_2_appr = 116.1644701316161629733869631309 1

Метод Ритца

Идея

Выберем ЛНЗ систему функций ω_i из H_L. Тогда задача на вариационный принцип Куранта сводится к алгебраической обобщенной задаче на собственные значения:

$$\Gamma_L c - \lambda \Gamma c = 0$$

где $\Gamma = \{(\omega_i, \omega_j)\}_{i,j=1}^n$, $\Gamma_L = \{[\omega_i, \omega_j]\}_{i,j=1}^n$.

В случае, если ω_j - ортогональная нормированная система, то задача сводится к нахождению собственных чисел матрицы Γ_L.

Реализация

Поскольку наша краевая задача является задачей первого типа на обоих концах промежутка, в качестве ЛНЗ системы выберем функции

$$\omega_k(x) = (1-x^2)\widehat{P}_{k-1}^{(2,2)}(x),\ k = 1, 2, \dots, n,$$

где $\widehat{P}_i^{(2,2)}(x) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(i+3)(i+4)(2i+5)}{2(i+1)(i+2)}}P_i^{(2,2)}(x)$, $P_i^{(2,2)}(x)$ - полиномы Якоби.

Такая система будет ортогональной и нормированной.

Для построения матриц Ритца воспользуемся функцией ritz_matrices().

```
[G,G_L] = ritz_matrices(7);
```

Примечание: для построения набора координатных функций используются вспомогательные функции generate_coordinates и myJacobi()

Для поиска собственных чисел матрицы Γ_L воспользуемся функцией встроенной функцией языка MATLAB

```
[vectors,lambdas] = eig(G_L);
```

Искомые собственные числа:

```
lambda_1_acc = lambdas(1,1)
```

```
lambda_1_acc = 29.1475
```

```
lambda_2_acc = lambdas(2,2)
```

```
lambda_2_acc = 115.7299
```

Как и ожидалось, полученные значения удовлетворяют ограничениям, полученным в пункте 1, и близки по значениям к результатам, полученным в пункте 2.

Метод обратных итераций

Идея

Заметим, что λ_{min} - собственное число матрицы $\Gamma^{-1}\Gamma_L$. Кроме того, справедливо

$$\lambda_{min}(\Gamma^{-1}\Gamma_L) = \frac{1}{\lambda_{max}(\Gamma_L^{-1}\Gamma)}$$

Соответственно, мы можем найти $\lambda_{max}(\Gamma_L^{-1}\Gamma)$ методом скалярных произведений, и благодаря этому вычислить $\lambda_{min}(\Gamma^{-1}\Gamma_L)$.

Примечание: метод скалярных произведений был описан в одной из предыдущих работ. Его реализация находится в файле dotProdMethod.m

Реализация

Используя готовую функцию dotProdMethod, вычислим необходимые приближения λ_{min}

```
% технические переменные, необходимые для заполнения таблицы
inv_iter_lambdas = zeros(5,1);
inv_iter_operator_error = zeros(5,1);
inv_iter_error = zeros(5,1);
inv_count = zeros(5,1);

for n=3:7
    inv_count(n-2) = n;
    % Матрицы Ритца
    [G,G_L,coordinates] = ritz_matrices(n);
    A = G_L^(-1)*G;

    % Поиск максимального по модулю собственного числа
    [lambda_max,c] = dotProdMethod(A);

    % Искомое приближение
    lambda_min = 1 / lambda_max;
    inv_iter_lambdas(n-2) = lambda_min;

    % Собственная функция, соответствующая искомому собственному числу
    y_n = y(c,coordinates);
```

```
    % Расчет погрешностей и невязок
    inv_iter_operator_error(n-2) = subs(L(y_n),x,0)-lambda_min*subs(y_n,x,0);
    inv_iter_error(n-2) = lambda_min - lambda_1_acc;
end
```

Оформим результаты в виде следующей таблицы

```
iter_labels = {'n','Lambda_1_n','Lambda_1_n - Lambda_1_acc','Ly - Lambda*y'};
inv_iter_table = table(inv_count,inv_iter_lambdas,inv_iter_error,inv_iter_operator_error, ...
    'VariableNames',iter_labels)
```

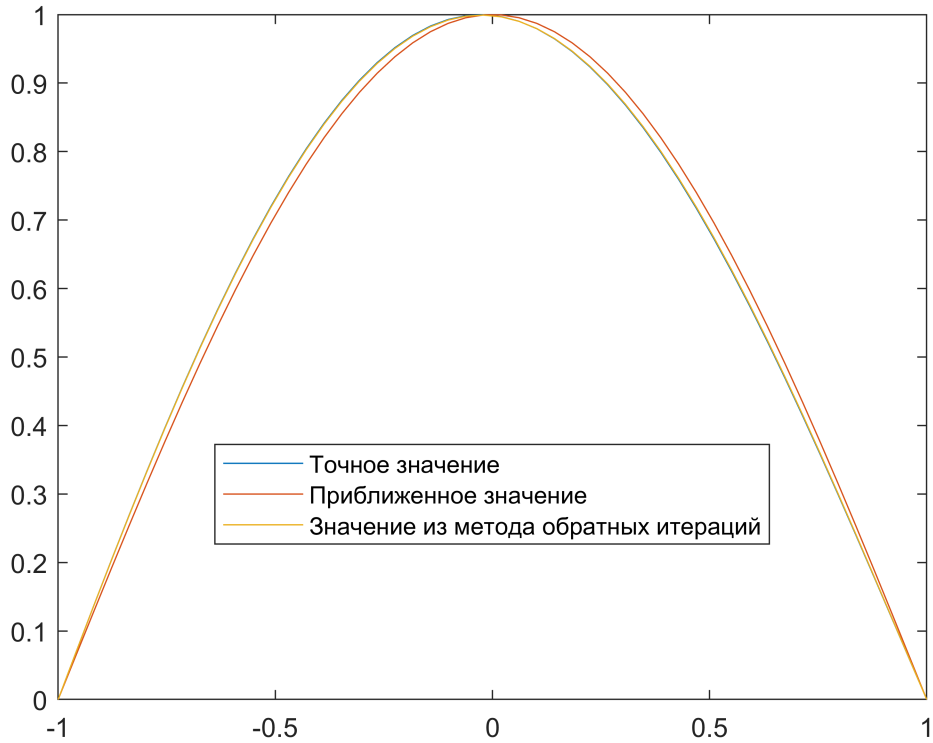
inv_iter_table = 5×4 table

	n	Lambda_1_n	Lambda_1_n - Lambda_1_acc	Ly - Lambda*y
1	3	29.1486	0.0011	-0.3474
2	4	29.1479	0.0004	-0.3277
3	5	29.1476	0.0000	-0.0911
4	6	29.1476	0.0000	-0.0910
5	7	29.1476	0.0000	-0.0906

Выводы

Построим графики собственных функций

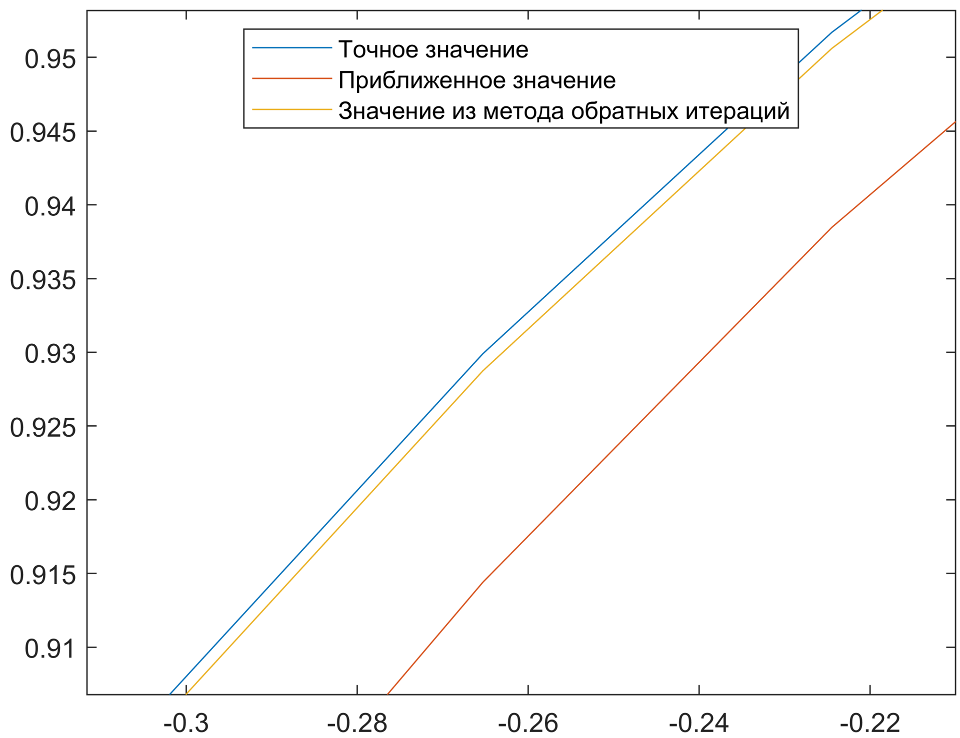
```
x = linspace(-1,1,50);
y_1_acc_val = subs(y(vectors(:,1),coordinates),x);
y_1_approx_val = subs(y_1,x);
y_1_iter_val = subs(y_n,x);
plot(x,y_1_acc_val)
hold on
plot(x,y_1_approx_val)
hold on
plot(x,y_1_iter_val)
hold off
lgd = legend('Точное значение', 'Приближенное значение','Значение из метода обратных итераций')
lgd.Location = "best";
```



Чтобы сделать различия более заметными, изменим масштаб.

```
plot(x,y_1_acc_val)
hold on
plot(x,y_1_approx_val)
hold on
plot(x,y_1_iter_val)
hold off
lgd = legend('Точное значение', 'Приближенное значение','Значение из метода обратных итераций')
lgd.Location = "best";

xlim([-0.3116 -0.2100])
ylim([0.9068 0.9532])
```



Как мы можем заметить, решение, полученное методом обратных итераций, близко по значению к "точному" решению, полученному методом Ритца.

Вспомогательные функции

```
function dotprod = dotprod(y,z) % Скалярное произведение в L2
    dotprod = vpaintegral(y*z,-1,1);
end
function energprod = energprod(y,z) % Энергетическое скалярное произведение
     k = 1.57495;
    l = 11.74842;
    syms p x q;
    p = k*x + l;
    q = k*k*(1/(k*x+l)-k*x);
    energprod = vpaintegral(p*diff(y)*diff(z)+q*y*z,-1,1);
end
function myJacobi = myJacobi(i) % Генератор полиномов Якоби
    syms x;
    myJacobi = 0.25*sqrt((i+3)*(i+4)*(2*i+5)/(2*(i+1)*(i+2)))*jacobiP(i,2,2,x);
end
function coordinate_functions = generate_coordinates(n) % Генератор координатных функций
    coordinate_functions = sym(zeros(n,1));
    syms x;
    for i=1:n
        coordinate_functions(i,1)=(1-x^2)*myJacobi(i-1);
    end
end
```

```
function [G, G_L, coordinates] = ritz_matrices(n) % Генератор матриц Ритца
    G = zeros(n,n);
    G_L = zeros(n,n);
    coordinates = generate_coordinates(n);
    for i=1:n
        for j=1:n
            G(i,j) = dotprod(coordinates(i),coordinates(j));
            G_L(i,j) = energprod(coordinates(i),coordinates(j));
        end
    end
end
function L = L(y) % Дифференциальный оператор
    syms p x q;
    k = 1.57495;
    l = 11.74842;
    q = k*k*(1/(k*x+l)-k*x);
    p = k*x + l;
    L = -diff(p*diff(y)) + q*y;
end
function y = y(c,coordinates) % Поиск приближения по собственному вектору
    syms x;
    y = 0;
    for i=1:size(c)
        y = y + c(i)*coordinates(i);
    end
end
```