Решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Вариант 11.

Содержание

Введение

Необходимо найти приближенное решение следующего интегрального уравнения

$$u(x) - 5\int_0^1 \frac{y\cos x}{xy-2}u(y)dy = 2 + \frac{e^{5x}-1}{2x} \quad (1)$$

используя квадратурную формулу Гаусса.

Идея

Заменим интеграл в уравнении (1) на квадратурную сумму по формуле Гаусса, получим уравнение

$$u^n(x) - \sum_{k=1}^{n} A_k H(x, x_k) u^n(x_k) = f(x) \quad (2)$$

Поочередно будем полагать $x_k = x_1, x_2, \ldots, x_n$. Получим систему уравнений $Dz = g$, где $D = (d_{jk})_{k,j=1}^n$, $d_{jk} = \delta_{jk} - A_k H(x_j, x_k)$, $g = (f(x_1), \ldots, f(x_n))$, $z = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$. По вектору z можно получить решение уравнения (2) по формуле

$$u^n(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k H(x, x_k)\zeta_k + f(x)$$

Увеличивая количество узлов квадратурной формулы, можно получить решение исходного уравнения с заданной точностью.

Замечание(о квадратурной формуле Гаусса):

Узлами квадратурной формулы Гаусса являются корни многочлена Лежандра:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

А ее коэффициенты можно найти по формуле $A_k = \dfrac{2}{(1-x_k^2)(P'_n(x_k))^2}$.

Коэффициенты и узлы механической квадратуры выражаются следующим образом:

$$A_{ip+j} = \frac{h}{2} B_j, i = 0, \dots, m-1, j = 1, \dots, p$$

$$x_{ip+j} = \frac{h}{2} t_j + a + (2i+1)\frac{h}{2}, i = 0, \dots, m-1, j = 1, \dots, p$$

где B_j, t_j - коэффициенты и узлы формулы Гаусса.

Реализация

Зададим необходимые технические переменные

```
a = 0;
b = 1;
m = 1;
epsilon = 10^(-6);
u_vals = zeros(0,3);
p = 1;
```

Определим функции f и H

```
syms f x H y;
f = 2 + (exp(5*x) - 1)/(2*x);
H = 5*y*cos(x) / (x*y - 2);
```

Ищем новые приближения до тех пор, пока не будет достигнута интересующая нас точность

```
while 1
    % Коэффициенты и узлы механической квадратурной формулы
    [A,points] = mechanical_formula(1,p,a,b);

    % Задание системы уравнений
    D = zeros(p,p);
    g = zeros(p,1);
    for i = 1:p
        for j = 1:p
            D(i,j) = eq(i,j) - A(j)*subs(H,[x, y],[points(i), points(j)]);
        end
        g(i) = subs(f,points(i));
    end

    % Решение системы
    z = linsolve(D,g);

    % Поиск значений текущего приближения на концах и в середине отрезка
    % [a,b]

    u_curr = u(A, points, z,f,H);
    u_vals = [u_vals; double([limit(u_curr,x,a),limit(u_curr,x,(a+b)/2),limit(u_curr,x,b)])];

    if (p > 1)
        error = max(abs(u_vals(p)-u_vals(p-1)));
    else
```

```
        error = epsilon+1;
    end

    if(error<epsilon)
        break;
    end

    p = p+1;

end
```

Оформим результат в виде следующей таблицы

```
result = table(u_vals, 'VariableNames',{'u_n(x)'})
```

result = 8×1 table

	u_n(x)		
1	-2.8116	5.8493	70.4393
2	-10.6062	-3.7634	61.4817
3	-11.2589	-5.1436	59.3353
4	-11.2637	-5.2084	59.1397
5	-11.2624	-5.2096	59.1289
6	-11.2623	-5.2096	59.1284
7	-11.2623	-5.2096	59.1284
8	-11.2623	-5.2096	59.1284

Погрешность, полученная на последнем шаге работы алгоритма

```
u_vals(p,:) - u_vals(p-1,:)
```

ans = 1×3
10^{-6} ×
    0.0581   0.0561   -0.5022

Вспомогательные функции

```
function [B,t] = gauss_formula(p) % Узлы и коэффициенты формулы Гаусса
    B = zeros(p,1);
    syms x;
    polynom = legendreP(p,x);
    t = double(root(polynom));
    for i=1:p
        B(i) = 2 / ((1-t(i)^2)*(subs(diff(polynom),x,t(i)))^2);
    end

end

% Узлы и коэффициенты механической квадратурной формулы
```

```
function [A,x] = mechanical_formula(m,p,a,b)
    A = zeros(m*p,1);
    x = zeros(m*p,1);
    h = (b-a)/m;
    [B,t] = gauss_formula(p);
    for i = 1:m
        for j= 1:p
            A((i-1)*p+j) = h*B(j)/2;
            x((i-1)*p+j) = h*t(j)/2 + a + (2*i-1)*h/2;
        end
    end
end

% Значение u_n в заданной точке
function u = u(A,x,z,f,H)
    syms u y;
    u = f;
    for k=1:size(x,1)
        u = u + A(k)*subs(H,y,x(k,1))*z(k);
    end

end
```