Жесткие системы. Вариант 11

Содержание

Точное решение задачи Коши

Для поиска точного решения воспользуемся встроенными методами языка MATLAB

```
syms y1(t) y2(t);
cond1 = y1(0) == 0;
cond2 = y2(0) == 1;
ode1 = diff(y1) == -125*y1 + 123.55*y2;
ode2 = diff(y2) == 123.55*y1 -123*y2;
[y1sol,y2sol] = dsolve([ode1;ode2],[cond1;cond2]);
y1sol
```

```
y1sol =
```

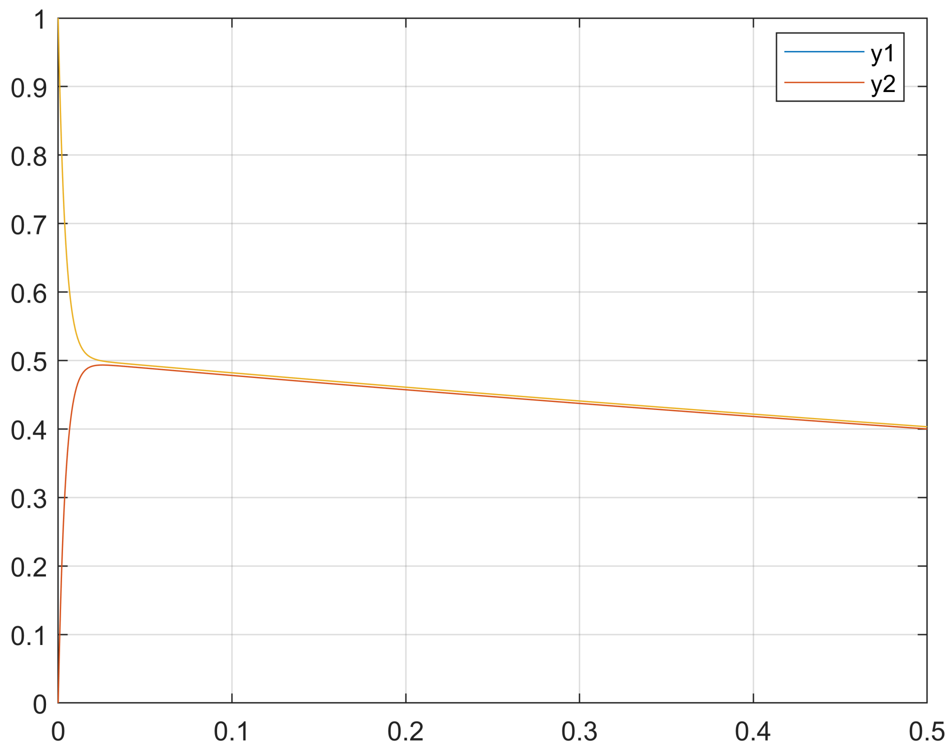
$$e^{\frac{t\,(\sqrt{6106241}-2480)}{20}}\left(\frac{\sqrt{6106241}}{2471}-\frac{20}{2471}\right)\left(\frac{10\,\sqrt{6106241}}{6106241}+\frac{1}{2}\right)-\frac{\sqrt{6106241}\;e^{-\frac{t\,(\sqrt{6106241}+2480)}{20}}\left(\frac{\sqrt{6106241}}{2471}\right.}{12212482}$$

```
y2sol
```

```
y2sol =
```

$$e^{\frac{t\,(\sqrt{6106241}-2480)}{20}}\left(\frac{10\,\sqrt{6106241}}{6106241}+\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{6106241}\;e^{-\frac{t\,(\sqrt{6106241}+2480)}{20}}\,(\sqrt{6106241}-20)}{12212482}$$

```
fplot(y1sol,[0 0.5])
hold on
fplot(y2sol,[0 0.5])
grid on
legend('y1','y2','Location','best')
```



Теперь построим вектор значений полученных ранее функций на отрезке $[0, 0.5]$ с шагом h

```
h_acc=0.1;
x = 0:h_acc:0.5;
y1_mat = matlabFunction(y1sol);
y2_mat = matlabFunction(y2sol);
Y_acc_h1 = [y1_mat(x);y2_mat(x)]
```

```
Y_acc_h1 = 2×6
   -0.0000    0.4782    0.4573    0.4374    0.4183    0.4001
    1.0000    0.4821    0.4610    0.4409    0.4217    0.4033
```

Приближенное решение задачи Коши с шагом h = 0.05

Для начала введем матрицу системы

```
A = [-125,123.55;123.55,-123]
```

```
A = 2×2
 -125.0000  123.5500
  123.5500 -123.0000
```

Подготовим входные данные для работы методов

```
h1 = 0.05;
x_h1 = 0:h1:0.5;
Y_h1 = zeros(2,size(x_h1,2));
Y_h1(2,1) = 1
```

```
Y_h1 = 2×11
     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
     1     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
```

Явный метод Эйлера

Расчетная формула метода Эйлера имеет вид

$Y_{i+1} = (E + Ah)Y_i$

Реализация алгоритма находится в функции eulerMethod.m

```
[euler_y_h1,euler_w_h1] = eulerMethod(A,h1,Y_h1)
```

```
euler_y_h1 = 2×11
10^10 ×
         0    0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0001    0.0012 ···
    0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000    0.0001   -0.0012
euler_w_h1 = 2×2
   -5.2500    6.1775
    6.1775   -5.1500
```

Неявный метод Эйлера

Расчетная формула невного метода Эйлера имеет вид

$Y_{i+1} = (E - Ah)^{-1}Y_i$

Реализация алгоритма находится в функции invEuler.m

```
[inv_euler_y_h1,inv_euler_w_h1] = invEuler(A,h1,Y_h1)
```

```
inv_euler_y_h1 = 2×11
         0    0.4517    0.4756    0.4678    0.4578    0.4478    0.4380    0.4285 ···
    1.0000    0.5301    0.4851    0.4720    0.4615    0.4514    0.4416    0.4319
inv_euler_w_h1 = 2×2
    7.2500   -6.1775
   -6.1775    7.1500
```

Интерполяционный метод Адамса третьего порядка

Расчетная формула интерполяционного метода Адамса имеет вид:

$$Y_{i+1} = \left(E - \frac{5hA}{12}\right)^{-1}\left(E + \frac{2hA}{3}\right)Y_i - \left(E - \frac{5hA}{12}\right)^{-1}\left(\frac{hA}{12}\right)Y_{i-1}$$

Реализация алгоритма находится в функции adamsMethod.m

```
[adams_y_h1,adams_w1_h1,adams_w2_h1] = adamsMethod(A,h1,inv_euler_y_h1)
```

```
adams_y_h1 = 2×11
         0    0.4517    0.4386    0.5083    0.4030    0.5182    0.3449    0.5487 ···
    1.0000    0.5301    0.5216    0.4313    0.5151    0.3807    0.5329    0.3114
adams_w1_h1 = 2×2
   -0.1096    1.0769
    1.0769   -0.0921
adams_w2_h1 = 2×2
   -0.0854    0.0828
    0.0828   -0.0840
```

Проверка на устойчивость

Метод Эйлера

Для устойчивости метода Эйлера необходимо, чтобы все собственные числа матрицы перехода $W = (E + hA)$ были по модулю меньше 1. Найдем максимальное по модулю собственное число:

```
max_lambda = max(abs(eig(euler_w_h1)))
```

```
max_lambda = 11.3777
```

Оно намного больше 1. Соответственно, при h = 0.05 метод Эйлера не устойчив.

Обратный метод Эйлера

Данный метод устойчив при любых h.

Метод Адамса

Для устойчивости метода Адамса необходимо, чтобы все корни характеристических уравнений $(\mu^{(k)})^2 - \lambda_k(W_1)\mu^{(k)} + \lambda_k(W_2) = 0,\ k = 1, \dots, n$ были по модулю меньше 1.

Найдем собственные числа матриц W_1 и W_2:

```
lambda_W1_h1 = eig(adams_w1_h1)
```

```
lambda_W1_h1 = 2×1
   -1.1777
    0.9761
```

```
lambda_W2_h1 = eig(adams_w2_h1)
```

```
lambda_W2_h1 = 2×1
   -0.1675
   -0.0018
```

Найдем корни характеристических уравнений:

```
first_char_eq = [1 -lambda_W1_h1(1) lambda_W2_h1(1)];
second_char_eq = [1 -lambda_W1_h1(2) lambda_W2_h1(2)];
first_roots_h1 = roots(first_char_eq);
second_roots_h1 = roots(second_char_eq);
```

Нас интересуют максимальные по модулю корни, поэтому рассмотрим только их.

```
max_of_first_roots_h1 = max(abs(first_roots_h1))
```

```
max_of_first_roots_h1 = 1.3060
```

```
max_of_2nd_roots_h1 = max(abs(second_roots_h1))
```

```
max_of_2nd_roots_h1 = 0.9779
```

Первое уравнение имеет корень, по модулю больший, чем 1. Значит, метод Адамса тоже не является устойчивым для h = 0.05

Приближенное решение задачи Коши с шагом h = 0.001

Повторим все выполненные ранее операции с новым шагом

```
h2 = 0.001;
x_h2 = 0:h2:0.5
```

```
x_h2 = 1×501
         0    0.0010    0.0020    0.0030    0.0040    0.0050    0.0060    0.0070 ···
```

```
Y_h2 = zeros(2,size(x_h2,2));
Y_h2(2,1) = 1
```

```
Y_h2 = 2×501
     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0 ···
     1     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0     0
```

Метод Эйлера

```
[euler_y_h2,euler_w_h2] = eulerMethod(A,h2,Y_h2)
```

```
euler_y_h2 = 2×501
         0    0.1235    0.2165    0.2863    0.3388    0.3783    0.4079    0.4301 ···
    1.0000    0.8770    0.7844    0.7147    0.6621    0.6225    0.5927    0.5702
euler_w_h2 = 2×2
    0.8750    0.1235
    0.1235    0.8770
```

Обратный метод Эйлера

```
[inv_euler_y_h2] = invEuler(A,h2,Y_h2)
```

```
inv_euler_y_h2 = 2×501
         0    0.0990    0.1783    0.2418    0.2927    0.3334    0.3660    0.3921 ···
    1.0000    0.9014    0.8223    0.7588    0.7079    0.6670    0.6342    0.6079
```

Метод Адамса

```
[adams_y_h2, adams_w1_h2,adams_w2_h2] = adamsMethod(A,h2,inv_euler_y_h2)
```

```
adams_y_h2 = 2×501
         0    0.0990    0.1868    0.2551    0.3084    0.3500    0.3824    0.4077 ···
    1.0000    0.9014    0.8138    0.7456    0.6923    0.6506    0.6180    0.5925
adams_w1_h2 = 2×2
    0.8772    0.1213
```

```
    0.1213    0.8792
adams_w2_h2 = 2×2
   -0.0094    0.0093
    0.0093   -0.0093
```

Повторная проверка на устойчивость

Метод Эйлера

Найдем максимальное по модулю собственное число:

```
max_lambda_h2 = max(abs(eig(euler_w_h2)))
```

```
max_lambda_h2 = 0.9996
```

Оно меньше 1. Соответственно, при h = 0.001 метод Эйлера устойчив.

Метод Адамса

Найдем собственные числа матриц W_1 и W_2:

```
lambda_W1_h2 = eig(adams_w1_h2)
```

```
lambda_W1_h2 = 2×1
    0.7569
    0.9995
```

```
lambda_W2_h2 = eig(adams_w2_h2)
```

```
lambda_W2_h2 = 2×1
   -0.0187
   -0.0000
```

Найдем корни характеристических уравнений:

```
first_char_eq_h2 = [1 -lambda_W1_h2(1) lambda_W2_h2(1)];
second_char_eq_h2 = [1 -lambda_W1_h2(2) lambda_W2_h2(2)];
first_roots_h2 = roots(first_char_eq_h2);
second_roots_h2 = roots(second_char_eq_h2);
```

Нас интересуют максимальные по модулю корни, поэтому рассмотрим только их.

```
max_of_first_roots_h2 = max(abs(first_roots_h2))
```

```
max_of_first_roots_h2 = 0.7808
```

```
max_of_2nd_roots_h2 = max(abs(second_roots_h2))
```

```
max_of_2nd_roots_h2 = 0.9996
```

Все корни по модулю меньше 1. Значит, метод Адамса тоже является устойчивым для h = 0.001

Результат

Метод Эйлера

С шагом h1 = 0.05

В таблице ниже представлен модуль разности между точным решением и решением, полученным методом Эйлера, в точках [0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5].

```
euler_h1_table =array2table(abs(Y_acc_h1 - euler_y_h1(:,1:2:11)));
euler_h1_table.Properties.RowNames = {'y*1 - y1', 'y*2-y2'};
euler_h1_table.Properties.Description = 'Разница между точным и полученным значениями';
euler_h1_table.Properties.VariableNames = {'0','0.1','0.2','0.3','0.4','0.5'}
```

euler_h1_table = 2×6 table

	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
1 y*1 - y1	1.1102e-16	64.7242	8.3787e+03	1.0846e+06	1.4041e+08	1.8176e+10
2 y*2-y2	0	64.2019	8.3111e+03	1.0759e+06	1.3928e+08	1.8030e+10

По таблице легко можно заметить неустойчивость метода Эйлера при данном значении h.

С шагом h2 = 0.001

Ниже приведена аналогичная предыдущему пункту таблица модулей разности для решения, полученного с шагом h.

```
euler_h2_table =array2table(abs(Y_acc_h1 - euler_y_h2(:,1:100:501)));
euler_h2_table.Properties.RowNames = {'y*1 - y1', 'y*2-y2'};
euler_h2_table.Properties.Description = 'Разница между точным и полученным значениями';
euler_h2_table.Properties.VariableNames = {'0','0.1','0.2','0.3','0.4','0.5'}
```

euler_h2_table = 2×6 table

	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
1 y*1 - y1	1.1102e-16	4.7562e-06	9.0975e-06	1.3051e-05	1.6642e-05	1.9896e-05
2 y*2-y2	0	4.7949e-06	9.1715e-06	1.3157e-05	1.6778e-05	2.0057e-05

При рассмотрении таблицы устойчивость метода Эйлера с шагом h2 становится очевидной.

Обратный метод Эйлера

Если сравнить 2 таблицы, с легкостью можно заметить тот факт, что обратный метод Эйлера устойчив при обоих значениях h

```
inv_euler_h1_table =array2table(abs(Y_acc_h1 - inv_euler_y_h1(:,1:2:11)));
inv_euler_h1_table.Properties.RowNames = {'y*1 - y1', 'y*2-y2'};
inv_euler_h1_table.Properties.Description = 'Разница между точным и полученным значениями';
inv_euler_h1_table.Properties.VariableNames = {'0','0.1','0.2','0.3','0.4','0.5'}
```

inv_euler_h1_table = 2×6 table

	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
1 y*1 - y1	1.1102e-16	0.0026	4.3271e-04	6.4322e-04	8.2053e-04	9.8117e-04
2 y*2-y2	0	0.0030	4.6745e-04	6.4862e-04	8.2720e-04	9.8914e-04

```
inv_euler_h2_table =array2table(abs(Y_acc_h1 - inv_euler_y_h2(:,1:100:501)));
```

```
inv_euler_h2_table.Properties.RowNames = {'y*1 - y1', 'y*2-y2'};
inv_euler_h2_table.Properties.Description = 'Разница между точным и полученным значениями';
inv_euler_h2_table.Properties.VariableNames = {'0','0.1','0.2','0.3','0.4','0.5'}
```

inv_euler_h2_table = 2×6 table

	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
1 y*1 - y1	1.1102e-16	4.7533e-06	9.0923e-06	1.3044e-05	1.6633e-05	1.9885e-05
2 y*2-y2	0	4.7922e-06	9.1662e-06	1.3150e-05	1.6768e-05	2.0046e-05

Метод Адамса

С шагом h1 = 0.05

В данном случае неустойчивость метода не столь очевидна, как в случае с методом Эйлера, однако заметно, что метод имеет достаточно большую погрешность

```
adams_h1_table =array2table(abs(Y_acc_h1 - adams_y_h1(:,1:2:11)));
adams_h1_table.Properties.RowNames = {'y*1 - y1', 'y*2-y2'};
adams_h1_table.Properties.Description = 'Разница между точным и полученным значениями';
adams_h1_table.Properties.VariableNames = {'0','0.1','0.2','0.3','0.4','0.5'}
```

adams_h1_table = 2×6 table

	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
1 y*1 - y1	1.1102e-16	0.0396	0.0543	0.0925	0.1578	0.2692
2 y*2-y2	0	0.0395	0.0541	0.0919	0.1567	0.2673

С шагом h2 = 0.001

Согласно таблице, метод Адамса с шагом h2 устойчив.

```
adams_h2_table =array2table(abs(Y_acc_h1 - adams_y_h2(:,1:100:501)));
adams_h2_table.Properties.RowNames = {'y*1 - y1', 'y*2-y2'};
adams_h2_table.Properties.Description = 'Разница между точным и полученным значениями';
adams_h2_table.Properties.VariableNames = {'0','0.1','0.2','0.3','0.4','0.5'}
```

adams_h2_table = 2×6 table

	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
1 y*1 - y1	1.1102e-16	4.7532e-08	4.5460e-08	4.3477e-08	4.1581e-08	3.9767e-08
2 y*2-y2	0	4.7919e-08	4.5829e-08	4.3830e-08	4.1919e-08	4.0090e-08