

# Разностные схемы для уравнений эллиптического типа. Итерационные методы решений сеточных уравнений. Вариант 12.

## Содержание

|  |   |
|--|---|
| Условие.....   | 1 |
| Начальные данные.....  | 1 |
| Метод итерации с оптимальным параметром.....                                     | 2 |
| Метод Зейделя.....   | 3 |
| Итерационный метод с чебышевским набором параметров.....                         | 4 |
| Попеременно-треугольный итерационный метод с чебышевским набором параметров..... | 5 |
| Метод переменных направлений.....  | 6 |

## Условие

Найти решение задачи

$$Lu = -f(x, y)$$

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left( \left(1 + \frac{x}{2}\right) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1$$

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \mu(x, y)$$

следующими методами:

1. Методом итерации с оптимальным параметром;
2. Методом Зейделя;
3. Итерационным методом с чебышевским набором параметров;
4. Попеременно-треугольным итерационным методом с чебышевским набором параметров.
5. Методом переменных направлений.

Отладить решение на функции  $u^*(x, y) = xy^2(1 + y)$

## Начальные данные

```
addpath("methods\","norms\","utils\  
global f;  
global mu_bot;  
global mu_top;  
global mu_left;  
global mu_right;  
global lx;  
global ly;  
global eps;  
global q;  
global p;  
global pk;  
global c1;
```

```

global c2;
global d12;
global U_exact;
global k_max;
syms x;
syms y;

lx = 1;
ly = 1;
eps = 0.001;
q = 1;
p = 1 + x/2;
pk = 1;
c1 = 1;
c2 = 1.5;
d12 = 1;
U_exact = x*y^2*(1+y);
[f, mu_bot, mu_top, mu_left, mu_right] = initConditions(U_exact);

N = 10;
M = 10;
k_max = 50;
par = 3;

```

## Метод итерации с оптимальным параметром

```
u_opt = OptimalSimpleIteration(N, M);
```

Метод простой итерации с оптимальным параметром:

1. Мера аппроксимации точного решения  $||F - Au^*||$ :  
norm1 = 3.8475
2. Мера аппроксимации нулевого приближения  $||F - Au_0||$ :  
norm2 = 395.7255
3. Оценка количества итераций  
norm3 = 173
4. Спектральный радиус матрицы перехода:  
ro = 0.9607

| k  | F-AU^(k) | rel.d. | U^(k)-u* | rel.error | U^(k)-U^(k-1) | apostest | p_k    |
|----|----------|--------|----------|-----------|---------------|----------|--------|
| 1  | 152.8033 | 0.3861 | 0.9395   | 0.6783    | 0.7953        | 19.4180  | 0.3861 |
| 2  | 73.6572  | 0.1861 | 0.7950   | 0.5740    | 0.3071        | 7.4980   | 0.4820 |
| 3  | 54.5816  | 0.1379 | 0.7039   | 0.5082    | 0.1480        | 3.6143   | 0.7410 |
| 4  | 43.1206  | 0.1090 | 0.6162   | 0.4449    | 0.1097        | 2.6783   | 0.7900 |
| 5  | 31.9191  | 0.0807 | 0.5492   | 0.3965    | 0.0867        | 2.1159   | 0.7402 |
| 6  | 26.2600  | 0.0664 | 0.4850   | 0.3502    | 0.0642        | 1.5663   | 0.8227 |
| 7  | 22.2599  | 0.0563 | 0.4473   | 0.3230    | 0.0528        | 1.2886   | 0.8477 |
| 8  | 17.3516  | 0.0438 | 0.4206   | 0.3036    | 0.0447        | 1.0923   | 0.7795 |
| 9  | 15.8167  | 0.0400 | 0.3964   | 0.2862    | 0.0349        | 0.8514   | 0.9115 |
| 10 | 12.7273  | 0.0322 | 0.3726   | 0.2690    | 0.0318        | 0.7761   | 0.8047 |
| 11 | 11.5450  | 0.0292 | 0.3515   | 0.2538    | 0.0256        | 0.6245   | 0.9071 |
| 12 | 9.7690   | 0.0247 | 0.3314   | 0.2392    | 0.0232        | 0.5665   | 0.8462 |
| 13 | 8.6441   | 0.0218 | 0.3136   | 0.2264    | 0.0196        | 0.4794   | 0.8849 |
| 14 | 7.7611   | 0.0196 | 0.2969   | 0.2143    | 0.0174        | 0.4242   | 0.8978 |
| 15 | 6.9036   | 0.0174 | 0.2820   | 0.2036    | 0.0156        | 0.3808   | 0.8895 |
| 16 | 6.2287   | 0.0157 | 0.2685   | 0.1939    | 0.0139        | 0.3388   | 0.9022 |
| 17 | 5.7341   | 0.0145 | 0.2576   | 0.1860    | 0.0125        | 0.3056   | 0.9206 |
| 18 | 5.1615   | 0.0130 | 0.2476   | 0.1787    | 0.0115        | 0.2814   | 0.9001 |
| 19 | 4.7868   | 0.0121 | 0.2382   | 0.1720    | 0.0104        | 0.2533   | 0.9274 |
| 20 | 4.3371   | 0.0110 | 0.2295   | 0.1657    | 0.0096        | 0.2349   | 0.9061 |
| 21 | 4.0203   | 0.0102 | 0.2214   | 0.1599    | 0.0087        | 0.2128   | 0.9269 |

6. Приближенное решение на крупной сетке:

ans = 6×6

```

0      0      0      0      0      0
0 -0.0183 -0.0218 -0.0100 0.0148 0.0480
0 -0.0128 0.0067 0.0557 0.1300 0.2240
0 0.0329 0.1155 0.2359 0.3896 0.5760
0 0.1497 0.3535 0.5879 0.8502 1.1520
0 0.4000 0.8000 1.2000 1.6000 2.0000

```

7. Таблица точного решения на крупной сетке:

ans = 6×6

```

0      0      0      0      0      0
0 0.0096 0.0192 0.0288 0.0384 0.0480
0 0.0448 0.0896 0.1344 0.1792 0.2240
0 0.1152 0.2304 0.3456 0.4608 0.5760
0 0.2304 0.4608 0.6912 0.9216 1.1520
0 0.4000 0.8000 1.2000 1.6000 2.0000

```

## Метод Зейделя

```
u_zeid = ZeidelMethod(N, M);
```

1. Мера аппроксимации точного решения  $\|F-Au^*\|$ :

norm1 = 3.8475

2. Мера аппроксимации нулевого приближения  $\|F-Au_0\|$ :

norm2 = 395.7255

3. Оценка количества итераций

norm3 = 87

4. Спектральный радиус матрицы перехода:

ro = 0.9229

| k  | F-AU^(k) | rel.d. | U^(k)-u* | rel.error | U^(k)-U^(k-1) | apostest | p_k    |
|----|----------|--------|----------|-----------|---------------|----------|--------|
| 1  | 142.7204 | 0.3607 | 0.9548   | 0.6893    | 1.0015        | 11.9809  | 0.3964 |
| 2  | 81.7433  | 0.2066 | 0.7581   | 0.5473    | 0.3970        | 4.7490   | 0.5801 |
| 3  | 48.6065  | 0.1228 | 0.6230   | 0.4498    | 0.2303        | 2.7547   | 0.6111 |
| 4  | 28.7479  | 0.0726 | 0.5239   | 0.3782    | 0.1407        | 1.6833   | 0.6988 |
| 5  | 20.6745  | 0.0522 | 0.4679   | 0.3378    | 0.0983        | 1.1763   | 0.6949 |
| 6  | 15.4451  | 0.0390 | 0.4140   | 0.2989    | 0.0683        | 0.8174   | 0.7781 |
| 7  | 12.0467  | 0.0304 | 0.3648   | 0.2634    | 0.0532        | 0.6360   | 0.7840 |
| 8  | 9.3585   | 0.0236 | 0.3265   | 0.2357    | 0.0417        | 0.4986   | 0.8283 |
| 9  | 7.3345   | 0.0185 | 0.2972   | 0.2145    | 0.0345        | 0.4130   | 0.8242 |
| 10 | 6.0247   | 0.0152 | 0.2721   | 0.1964    | 0.0285        | 0.3404   | 0.8262 |
| 11 | 5.0221   | 0.0127 | 0.2529   | 0.1826    | 0.0235        | 0.2812   | 0.8307 |
| 12 | 4.3035   | 0.0109 | 0.2355   | 0.1700    | 0.0195        | 0.2336   | 0.8363 |
| 13 | 3.7107   | 0.0094 | 0.2198   | 0.1587    | 0.0163        | 0.1954   | 0.8657 |
| 14 | 3.2032   | 0.0081 | 0.2058   | 0.1486    | 0.0141        | 0.1691   | 0.8766 |
| 15 | 2.7722   | 0.0070 | 0.1934   | 0.1397    | 0.0124        | 0.1483   | 0.8865 |
| 16 | 2.4070   | 0.0061 | 0.1824   | 0.1317    | 0.0110        | 0.1314   | 0.8865 |
| 17 | 2.0973   | 0.0053 | 0.1727   | 0.1247    | 0.0097        | 0.1165   | 0.8872 |
| 18 | 1.8479   | 0.0047 | 0.1641   | 0.1185    | 0.0086        | 0.1034   | 0.8883 |
| 19 | 1.6498   | 0.0042 | 0.1564   | 0.1129    | 0.0077        | 0.0918   | 0.8896 |
| 20 | 1.4744   | 0.0037 | 0.1496   | 0.1080    | 0.0068        | 0.0817   | 0.8910 |
| 21 | 1.3232   | 0.0033 | 0.1435   | 0.1036    | 0.0061        | 0.0728   | 0.8923 |

6. Приближенное решение на крупной сетке:

ans = 6×6

```

0      0      0      0      0      0
0 -0.0153 -0.0165 -0.0043 0.0186 0.0480
0 -0.0064 0.0176 0.0671 0.1373 0.2240
0 0.0410 0.1290 0.2497 0.3982 0.5760
0 0.1556 0.3632 0.5977 0.8563 1.1520
0 0.4000 0.8000 1.2000 1.6000 2.0000

```

7. Таблица точного решения на крупной сетке:

ans = 6×6

```

0      0      0      0      0      0
0 0.0096 0.0192 0.0288 0.0384 0.0480
0 0.0448 0.0896 0.1344 0.1792 0.2240
0 0.1152 0.2304 0.3456 0.4608 0.5760
0 0.2304 0.4608 0.6912 0.9216 1.1520
0 0.4000 0.8000 1.2000 1.6000 2.0000

```

## Итерационный метод с чебышевским набором параметров

```
u_cheb = ChebIterationMethods(N, M, par);
```

Метод итераций с оптимальным Чебышевским параметром:

1. Мера аппроксимации точного решения  $\|F-Au^*\|$ :

norm1 = 3.8475

2. Мера аппроксимации нулевого приближения  $\|F-Au_0\|$ :

norm2 = 395.7255

3. Оценка количества итераций

norm3 = 27

4. Спектральный радиус матрицы перехода:

ro = 0.9607

| k  | F-AU^(k)   | rel.d.  | U^(k)-u* | rel.error | U^(k)-U^(k-1) | apostest | p_k     |
|----|------------|---------|----------|-----------|---------------|----------|---------|
| 1  | 5.0481e+03 | 12.7565 | 12.3737  | 8.9335    | 13.7588       | 335.9173 | 0.6210  |
| 2  | 1.1300e+03 | 2.8555  | 4.3162   | 3.1162    | 8.5445        | 208.6106 | 0.3271  |
| 3  | 464.7888   | 1.1745  | 1.8750   | 1.3537    | 2.7949        | 68.2367  | 0.1858  |
| 4  | 227.9768   | 0.5761  | 1.3952   | 1.0073    | 0.5193        | 12.6793  | 4.3841  |
| 5  | 334.5661   | 0.8455  | 1.0203   | 0.7366    | 2.2768        | 55.5871  | 0.1926  |
| 6  | 173.2973   | 0.4379  | 0.7671   | 0.5538    | 0.4384        | 10.7041  | 1.7037  |
| 7  | 61.0088    | 0.1542  | 0.2151   | 0.1553    | 0.7470        | 18.2367  | 0.0845  |
| 8  | 35.2373    | 0.0890  | 0.1969   | 0.1421    | 0.0631        | 1.5414   | 19.4057 |
| 9  | 362.6235   | 0.9164  | 1.1598   | 0.8373    | 1.2252        | 29.9117  | 0.5010  |
| 10 | 129.3112   | 0.3268  | 0.5723   | 0.4132    | 0.6138        | 14.9853  | 0.5211  |
| 11 | 46.8131    | 0.1183  | 0.3206   | 0.2315    | 0.3198        | 7.8087   | 0.1635  |
| 12 | 28.5925    | 0.0723  | 0.2697   | 0.1947    | 0.0523        | 1.2770   | 5.4592  |
| 13 | 37.7966    | 0.0955  | 0.1939   | 0.1400    | 0.2856        | 6.9716   | 0.1735  |
| 14 | 18.2797    | 0.0462  | 0.1737   | 0.1254    | 0.0495        | 1.2093   | 1.5908  |
| 15 | 15.7135    | 0.0397  | 0.1069   | 0.0772    | 0.0788        | 1.9236   | 0.2064  |
| 16 | 8.0831     | 0.0204  | 0.1074   | 0.0775    | 0.0163        | 0.3970   | 17.2833 |
| 17 | 102.7630   | 0.2597  | 0.2242   | 0.1619    | 0.2810        | 6.8615   | 0.6189  |
| 18 | 22.8337    | 0.0577  | 0.1074   | 0.0775    | 0.1739        | 4.2466   | 0.3247  |
| 19 | 9.3065     | 0.0235  | 0.1034   | 0.0746    | 0.0565        | 1.3789   | 0.1841  |
| 20 | 4.6962     | 0.0119  | 0.1024   | 0.0739    | 0.0104        | 0.2539   | 4.5103  |
| 21 | 6.9965     | 0.0177  | 0.0957   | 0.0688    | 0.0469        | 1.1451   | 0.1955  |

6. Приближенное решение на крупной сетке:

ans = 6×6

```

0      0      0      0      0      0
0 -0.0101 -0.0091 0.0034 0.0226 0.0480
0 0.0044 0.0321 0.0790 0.1437 0.2240
0 0.0505 0.1420 0.2611 0.4039 0.5760
0 0.1612 0.3708 0.6038 0.8590 1.1520
0 0.4000 0.8000 1.2000 1.6000 2.0000

```

7. Таблица точного решения на крупной сетке:

ans = 6×6

```

0      0      0      0      0      0
0 0.0096 0.0192 0.0288 0.0384 0.0480
0 0.0448 0.0896 0.1344 0.1792 0.2240
0 0.1152 0.2304 0.3456 0.4608 0.5760
0 0.2304 0.4608 0.6912 0.9216 1.1520
0 0.4000 0.8000 1.2000 1.6000 2.0000

```

## Попеременно-треугольный итерационный метод с чебышевским набором параметров.

AlternateTriangularMethod(N, M, par);

Попеременно-треугольный метод с оптимальными чебышевскими параметрами:

1. Мера аппроксимации точного решения  $\|F-Au^*\|$ :

norm1 = 3.8475

2. Мера аппроксимации нулевого приближения  $\|F-Au_0\|$ :

norm2 = 395.7255

3. Оценка количества итераций

Считаем отдельно.

4. Спектральный радиус матрицы перехода:

ro = 0.6058

### 3. Оценка количества итераций

| k | F-AU <sup>^</sup> (k) | rel.d. | U <sup>^</sup> (k)-u <sup>*</sup> | rel.error | U <sup>^</sup> (k)-U <sup>^</sup> (k-1) | apostest | p_k    |
|---|-----------------------|--------|-----------------------------------|-----------|---|----------|--------|
| 1 | 545.7555              | 1.3791 | 1.7528                            | 1.2655    | 3.1379                                  | 4.8221   | 0.4747 |

6. Приближенное решение на крупной сетке:

ans = 6x6

| 0 | 0       | 0       | 0       | 0      |
|---|---------|---------|---------|--------|
| 0 | -0.0035 | -0.0096 | -0.0047 | 0.0175 |
| 0 | 0.0062  | 0.0393  | 0.0896  | 0.1609 |
| 0 | 0.0452  | 0.1844  | 0.3537  | 0.5257 |
| 0 | 0.1361  | 0.4195  | 0.7605  | 1.1414 |
| 0 | 0.4000  | 0.8000  | 1.2000  | 1.6000 |
|   |         |         |         | 2.0000 |

7. Таблица точного решения на крупной сетке:

ans = 6x6

| 0 | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0 | 0.0096 | 0.0192 | 0.0288 | 0.0384 | 0.0480 |
| 0 | 0.0448 | 0.0896 | 0.1344 | 0.1792 | 0.2240 |
| 0 | 0.1152 | 0.2304 | 0.3456 | 0.4608 | 0.5760 |
| 0 | 0.2304 | 0.4608 | 0.6912 | 0.9216 | 1.1520 |
| 0 | 0.4000 | 0.8000 | 1.2000 | 1.6000 | 2.0000 |

## Метод переменных направлений

```
u_dir_var = DirectionVariablesMethod(N, M);
```

Схема переменных направлений:

1. Мера аппроксимации точного решения  $||F - Au^*||$ :

```
norm1 = 3.8475
```

2. Мера аппроксимации нулевого приближения  $||F-Au_0||$ :

```
norm2 = 395.7255
```

### 3. Оценка количества итераций

```
norm3 = 11
```

4. Спектральный радиус матрицы перехода:

—

| k | F-AU^(k) | rel.d.     | U^(k)-u* | rel.error | U^(k)-U^(k-1) | apostest | p_k    |
|---|----------|------------|----------|-----------|---------------|----------|--------|
| 1 | 49.3952  | 0.1248     | 0.3751   | 0.2708    | 1.3540        | 0        | 0.1618 |
| 2 | 23.8738  | 0.0603     | 0.1936   | 0.1397    | 0.2191        | 0        | 0.4246 |
| 3 | 8.6554   | 0.0219     | 0.1409   | 0.1017    | 0.0930        | 0        | 0.3561 |
| 4 | 4.5133   | 0.0114     | 0.1217   | 0.0879    | 0.0331        | 0        | 0.6049 |
| 5 | 2.1716   | 0.0055     | 0.1091   | 0.0788    | 0.0200        | 0        | 0.4934 |
| 6 | 1.1846   | 0.0030     | 0.1045   | 0.0754    | 0.0099        | 0        | 0.5309 |
| 7 | 0.6653   | 0.0017     | 0.1007   | 0.0727    | 0.0052        | 0        | 0.5928 |
| 8 | 0.3378   | 8.5350e-04 | 0.0993   | 0.0717    | 0.0031        | 0        | 0.4726 |

6. Приближенное решение на крупной сетке:

ans = 6×6

|   |         |         |        |        |        |
|---|---------|---------|--------|--------|--------|
| 0 | 0       | 0       | 0      | 0      | 0      |
| 0 | -0.0092 | -0.0079 | 0.0032 | 0.0223 | 0.0480 |
| 0 | 0.0027  | 0.0303  | 0.0781 | 0.1428 | 0.2240 |
| 0 | 0.0493  | 0.1405  | 0.2597 | 0.4032 | 0.5760 |
| 0 | 0.1602  | 0.3696  | 0.6031 | 0.8589 | 1.1520 |
| 0 | 0.4000  | 0.8000  | 1.2000 | 1.6000 | 2.0000 |

7. Таблица точного решения на крупной сетке:

ans = 6×6

|   |        |        |        |        |        |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0 | 0      | 0      | 0      | 0      | 0      |
| 0 | 0.0096 | 0.0192 | 0.0288 | 0.0384 | 0.0480 |
| 0 | 0.0448 | 0.0896 | 0.1344 | 0.1792 | 0.2240 |
| 0 | 0.1152 | 0.2304 | 0.3456 | 0.4608 | 0.5760 |
| 0 | 0.2304 | 0.4608 | 0.6912 | 0.9216 | 1.1520 |
| 0 | 0.4000 | 0.8000 | 1.2000 | 1.6000 | 2.0000 |