数据结构 - 区间，数组，矩阵和树状数组
Interval, Array, Matrix & Binary Indexed Tree

课程版本 v5.0　　主讲 令狐冲

扫描二维码关注微信/微博
获取最新面试题及权威解答

微信: ninechapter
微博: http://www.weibo.com/ninechapter
知乎: http://zhuanlan.zhihu.com/jiuzhang
官网: http://www.jiuzhang.com

先修知识与大纲

本章节，我们将要学习和区间，数组，矩阵有关的一些问题，以及一个最近兴起的数据结构——树状数组（Binary Indexed Tree）

请在随课教程中先修如下知识：

- 如何用 Comparator 对区间进行排序
- 在排好序的区间序列中插入一个段新区间
- 快速选择算法 Quick Select（返回第三章复习）
- K 路归并算法（K-way Merge Algorithm）
- 子数组与前缀和（Subarray & Prefix Sum）
- 如何用位运算来数二进制中 1 的个数

大纲：

- Merge Two / K Sorted Arrays / Intervals 相关算法即拓展题
- Median of Unsorted / Two Sorted / K Sorted Arrays 相关算法及拓展题
- 通过 Range Sum Query 学习 Binary Indexed Tree

Merge Two Sorted Arrays

http://www.lintcode.com/problem/merge-two-sorted-arrays

http://www.jiuzhang.com/solutions/merge-two-sorted-arrays/

Follow up I

把小数组 Merge 到有足够空余空间的大数组里

http://www.lintcode.com/problem/merge-sorted-array/

http://www.jiuzhang.com/solutions/merge-sorted-array/

Follow Up II

http://www.lintcode.com/problem/merge-two-sorted-interval-lists/

http://www.jiuzhang.com/solutions/merge-two-sorted-interval-lists/

归并 2 个有序的区间序列

Follow up III

归并 K 个数组

http://www.lintcode.com/problem/merge-k-sorted-arrays/

http://www.jiuzhang.com/solutions/merge-k-sorted-arrays/

k 路归并算法（外排序算法 External Sorting）

Follow up IV

http://www.lintcode.com/problem/merge-k-sorted-interval-lists/

http://www.jiuzhang.com/solutions/merge-k-sorted-interval-lists/

归并 K 个有序区间序列

Intersection of Two Arrays

http://www.lintcode.com/problem/intersection-of-two-arrays/

http://www.jiuzhang.com/solutions/intersection-of-two-arrays/

求两个数组的交集

Follow up I

http://www.lintcode.com/problem/intersection-of-two-arrays-ii/

http://www.jiuzhang.com/solutions/intersection-of-two-arrays-ii/

如何有重复如何处理？

Follow up II

http://www.lintcode.com/problem/intersection-of-arrays/

http://www.jiuzhang.com/solutions/intersection-of-arrays/

多个数组如何处理？

不用 HashMap 怎么做？

Sparse Matrix Multiplication

http://www.lintcode.com/problem/sparse-matrix-multiplication

http://www.jiuzhang.com/solutions/sparse-matrix-multiplication

简化版：如何加速稀疏向量（Sparse Vector）的乘法？

与 Interval 有关的重要算法

将在《九章算法强化班》中讲解

扫描线算法（Sweep Line Algorithm）

Median

求数组的中位数

Follow up I: 没排序数组的第 k 大

用我们之前学过的 Quick Select 算法就可以轻松解决

啥不记得？去随课教程看第三章双指针算法

Median of Two Sorted Arrays

http://www.lintcode.com/problem/median-of-two-sorted-arrays

http://www.jiuzhang.com/solutions/median-of-two-sorted-arrays

FindMedian = FindKth(k=n/2)

Follow up I

http://www.lintcode.com/problem/median-of-k-sorted-arrays/

http://www.jiuzhang.com/problem/median-of-k-sorted-arrays/

求 K 个排序数组的中位数

Follow up II

假如 K 个排序数组位于不同的机器上

如何利用机器的并发性提高算法效率？

更多二分答案算法

将在《九章算法强化班》中讲解

Binary Search on Answer

休息 5 分钟

http://www.jiuzhang.com/course/1/questionnaire/

调查问卷，给个5分好评哦亲

Best Time to Buy and Sell Stock

http://www.lintcode.com/problem/best-time-to-buy-and-sell-stock/

http://www.jiuzhang.com/solutions/best-time-to-buy-and-sell-stock/

有没有看出和 Maximum Subarray 是一样的题？

Submatrix Sum

http://www.lintcode.com/problem/submatrix-sum/

http://www.jiuzhang.com/solutions/submatrix-sum/

Maximum Submatrix

http://www.lintcode.com/problem/maximum-submatrix/

http://www.jiuzhang.com/solutions/maximum-submatrix/

如何转换成 Maximum Subarray？

Range Sum Query Immutable

http://www.lintcode.com/problem/range-sum-query-immutable/

http://www.jiuzhang.com/solutions/range-sum-query-immutable/

Range Sum Query 2D Immutable

http://www.lintcode.com/problem/range-sum-query-2d-immutable/

http://www.jiuzhang.com/solutions/range-sum-query-2d-immutable

Range Sum Query Mutable

http://www.lintcode.com/problem/range-sum-query-mutable/

http://www.jiuzhang.com/solutions/range-sum-query-mutable/

Binary Indexed Tree

又名：Fenwick Tree 中文名：树状数组 简写：BIT

基于“前缀和”信息来实现——

Log(n) 修改任意位置值

Log(n) 查询任意区间和

Binary Indexed Tree 的特性

功能特性：

对于一个有 N 个数的数组，支持如下功能：

update(index, val) // logN 的时间内更新数组中一个位置上的值

getPrefixSum(k) // log(K) 的时间内获得数组中前 K 个数的和

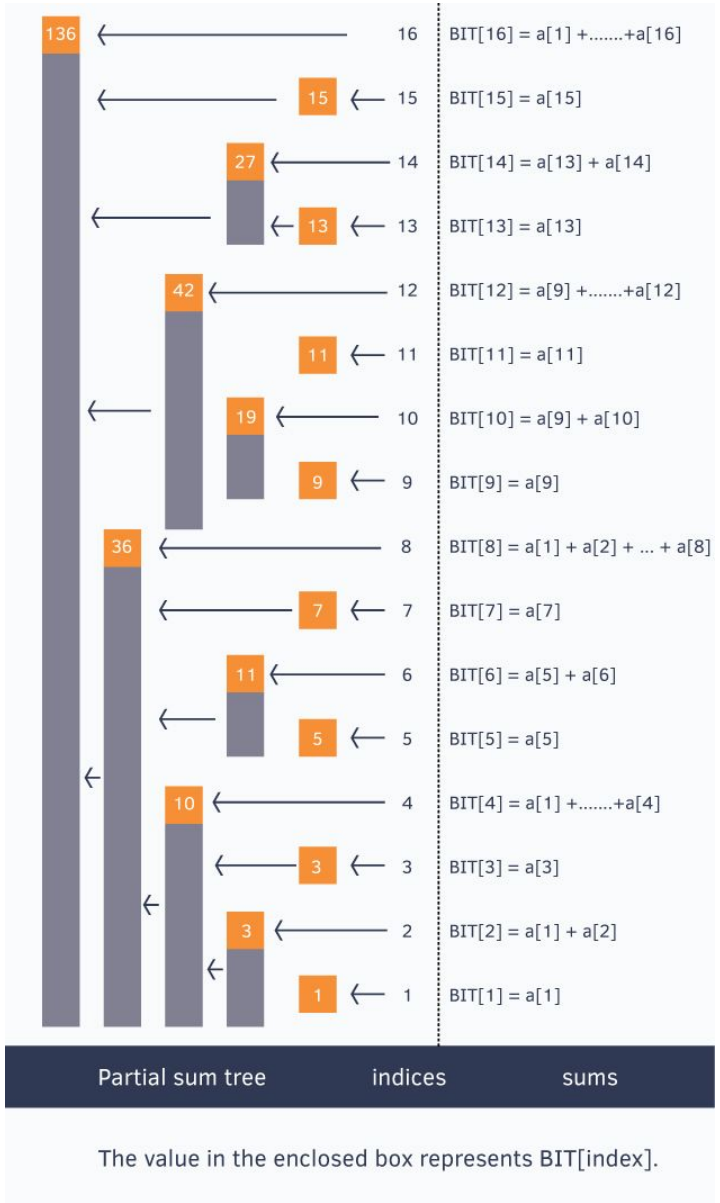
问：如何用 getPrefixSum(k) 实现 getRangeSum(x, y) ？

实现特性：

虽然名字叫做 Tree，但是是用数组（Array）存储的

BIT 是一棵**多叉树，父子关系代表包含关系**

BIT的第0位空出来，没有用上



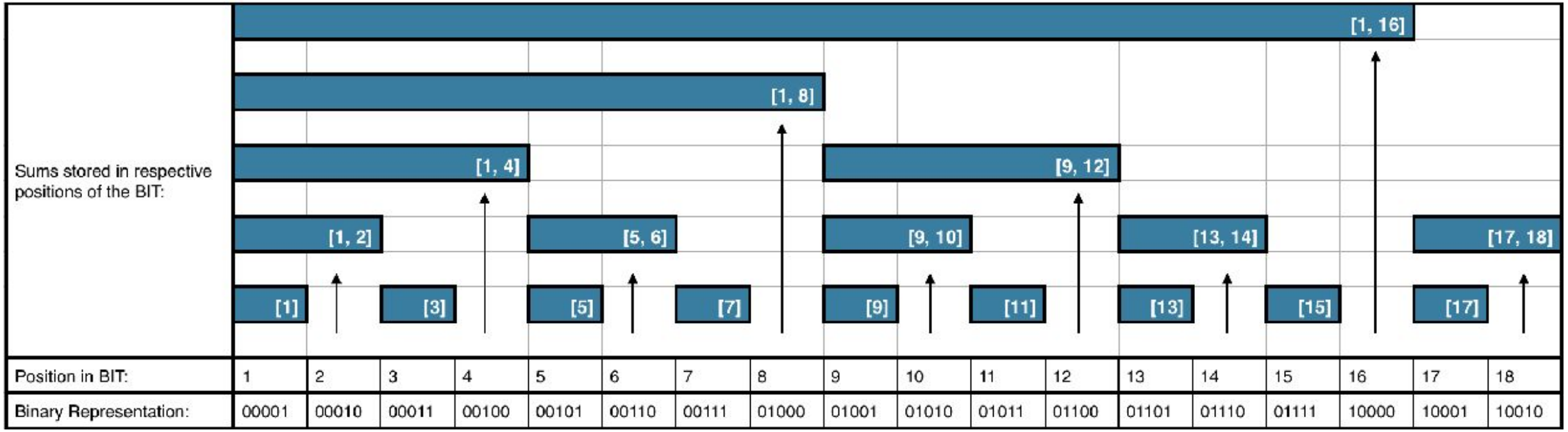
换个角度看

假设原数组为 A，树状数组为 BIT

BIT[16] = A[1] + A[2] … + A[16]

BIT[15] = A[15]

...



Position in BIT:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Binary Representation:	00001	00010	00011	00100	00101	00110	00111	01000	01001	01010	01011	01100	01101	01110	01111	10000	10001	10010

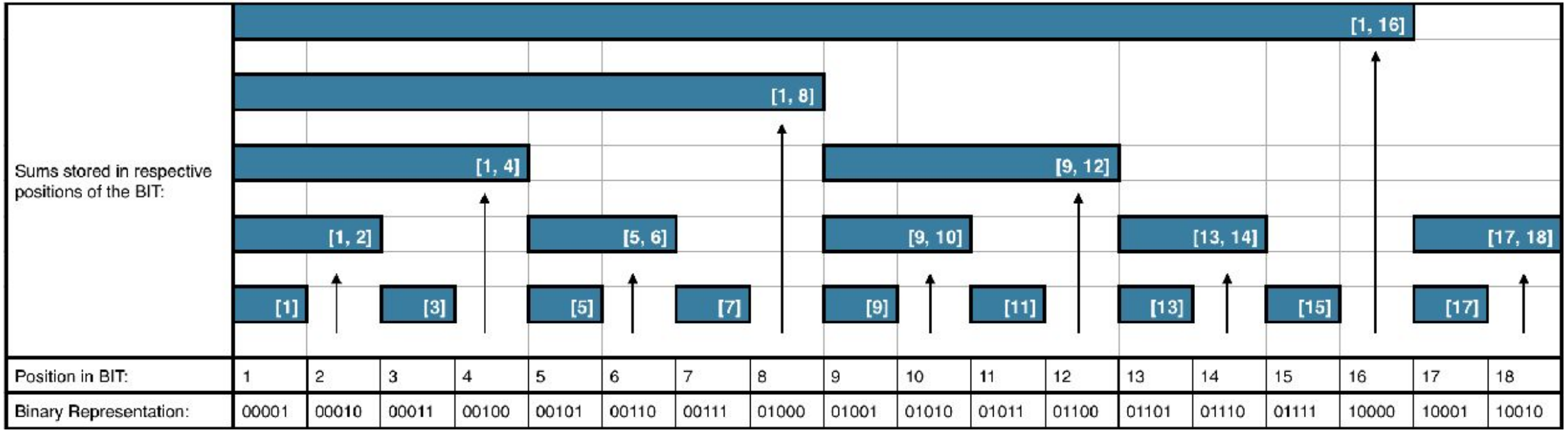
如何求前缀和？

getPrefixSum(16) = BIT[16]

getPrefixSum(15) = BIT[15] + BIT[14] + BIT[12] + BIT[8]

getPrefixSum(14) = BIT[14] + BIT[12] + BIT[8]

getPrefixSum(13) = BIT[13] + BIT[12] + BIT[8]



Position in BIT:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Binary Representation:	00001	00010	00011	00100	00101	00110	00111	01000	01001	01010	01011	01100	01101	01110	01111	10000	10001	10010

找规律

01111 01110 01100 01000

getPrefixSum(15) = BIT[15] + BIT[14] + BIT[12] + BIT[8]

10010 10000

getPrefixSum(18) = BIT[18] + BIT[16]

10101 10100 10000

getPrefixSum(21) = BIT[21] + BIT[20] + BIT[16]

猜猜看，getPrefixSum(k) 等于 BIT 数组中哪些数之和是如何计算的？

lowbit 最后一个二进制位

lowbit(x) = x & (-x)

```
    ...0101011 0000...
&   ...1010101 0000...
-----------------------
    ...0000001 0000...
```

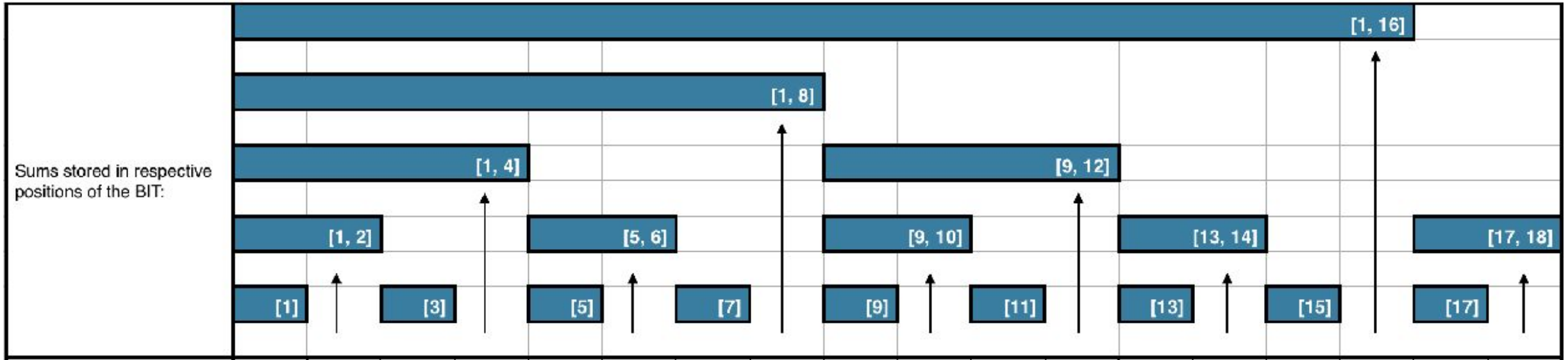
如何更新？

当 A[x] 被更新时，哪些 BIT 中的数会收到影响？

更改了A[1]，受到影响的是 BIT[1], BIT[2], BIT[4], BIT[8], BIT[16] …

更改了A[5]，受到影响的是 BIT[5], BIT[6], BIT[8], BIT[16] …

更改了A[9]，受到影响的是 BIT[9], BIT[10], BIT[12], BIT[16] …



Position in BIT:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Binary Representation:	00001	00010	00011	00100	00101	00110	00111	01000	01001	01010	01011	01100	01101	01110	01111	10000	10001	10010

继续找规律

01111 10000

update(15) => BIT[15], BIT[16]

00001 00010 00100 01000 10000

update(1) => BIT[1], BIT[2], BIT[4], BIT[8], BIT[16]

01001 01010 01100 10000

update(9) => BIT[9], BIT[10], BIT[12], BIT[16]

这里 => 符号代表影响到的BIT里需要被更新的位置

猜猜看，更改序列是如何得到的？

BIT的两个操作总结

getPrefixSum(x)

不断的做 x = x - lowbit(x) 直到 x = 0

update(x, val)

- 计算出 delta = val - A[x] 也就是增量
- 从 x 开始，不断的将 BIT[x] += delta，然后 x = x + lowbit(x)，直到 x > N

参考程序


```java
public void update(int index, int val) {
    int delta = val - arr[index];
    arr[index] = val;

    for (int i = index + 1; i <= arr.length; i = i + lowbit(i)) {
        bit[i] += delta;
    }
}

public int getPrefixSum(int index) {
    int sum = 0;
    for (int i = index + 1; i > 0; i = i - lowbit(i)) {
        sum += bit[i];
    }
    return sum;
}

private int lowbit(int x) {
    return x & (-x);
}
```

Range Sum Query 2D Mutable

http://www.lintcode.com/problem/range-sum-query-2d-mutable/

http://www.jiuzhang.com/solutions/range-sum-query-2d-mutable/

2D BIT 可能难以想象，但是代码很容易记

Binary Indexed Tree 总结

Binary Indexed Tree 事实上就是一个有**部分区段累加和数组**

把原先我们累加的方式从:

```
for (int i = index; i >= 0; i = i - 1) sum += arr[i];
```

改成了

```
for (int i = index+1; i >= 1; i = i - lowbit(i)) sum += bit[i];
```

这样我们很容易将这个算法拓展到 2D, 3D …

Count of Smaller Number before itself

http://www.lintcode.com/problem/count-of-smaller-number-before-itself/

http://www.jiuzhang.com/solutions/count-of-smaller-number-before-itself/

基于“值的范围”构建 Binary Indexed Tree 是一种常见策略

线段树 Segment Tree

可以取代 Binary Indexed Tree，功能更强大的数据结构

九章微课堂《线段树入门》

http://www.jiuzhang.com/tutorial/segment-tree

线段树(Segment Tree)特别万能
基本不考，但是如果能掌握，可以一口气解决一大堆问题
线段树是基于分治法实现的，可以作为很好的分治法的练习

	Binary Indexed Tree	Segment Tree	Heap	Balanced BST
区间和	O(logN)	O(logN)	不支持	不支持
区间最大值/最小值	不支持	O(logN)	不支持	不支持
所有数最大值/最小值	O(logN)	取值O(1) 更新 O(logN)	取值 O(1) 更新 O(logN)	O(logN)
比某个数大的最小值	不支持	log(N)	不支持	O(logN)
比某个数小的最大值	不支持	log(N)	不支持	O(logN)
实现难度	简单，记不住	中等，容易记住	中等，老写错	难，不会写

还想继续上课？

报名《硅谷求职算法集训营》，三个月更系统的学习算法知识

报名《人工智能集训营》，三个月掌握机器学习，深度学习，强化学习，让你的简历瞬间脱颖而出！

报名下一期九章算法班，享团购价半价优惠（下下期无此优惠）

报名其他九章课程，享团购价优惠

师父领进门，修行靠自身

祝大家都能找到自己理想的工作!

拿到 Offer 记得QQ上告诉我哦!