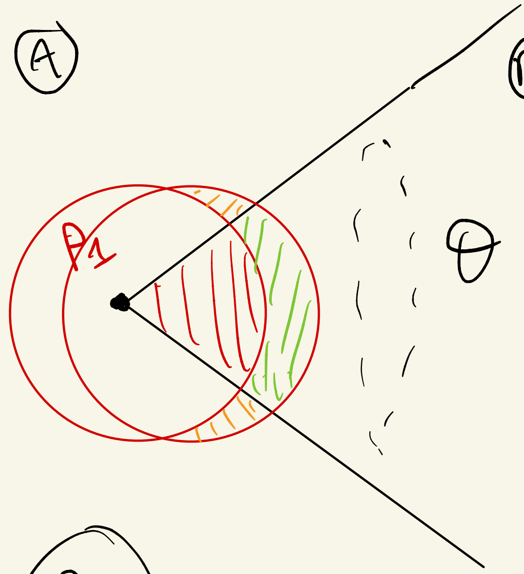
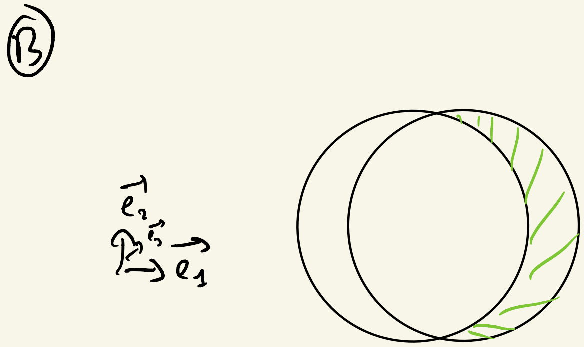




$$P_1 - \frac{\mathrm{Vol}(\text{vert})}{\mathrm{Vol}(\text{boule})}$$

P_1

1. On prend un cône $\left(\begin{cases} x \geq 0 \\ \rho \leq x \tan\theta \end{cases}, (x, \rho, \theta_1, \dots, \theta_d) \right)$

2. On injecte un bruit au point $(0, \dots, 0)$
On calcule $p_1 = \mathbb{P}(U(0,\sigma) \notin \text{Cône})$ avec un Monte-Carlo

3. On calcule le single-noise certificate $p_2^{(SN)}$

4. On calcule le vrai certificat $p_2^{(opt)}$ par:
$p_2^{(opt)} = \mathbb{P}(U(\delta,\sigma) \notin \text{Cône})$ avec un monte-carlo

5. On fait le graphe de $p_2^{(opt)} - p_2^{(SN)}$ en fctθ de θ et de la dimension $(1, 2, \dots, 10)$

⚠ Une fois qu'on a samplé les points (par ex selon $U(0,r)$) on les convertit en coord polaires : $(x_1, \dots, x_d) \to (x_1, \underbrace{\sqrt{x_2^2 + \dots + x_d^2}}_{(=\rho)}, \underbrace{\theta_3, \dots, \theta_d})$

n'apparaissent pas dans l'eq du cône → inutiles

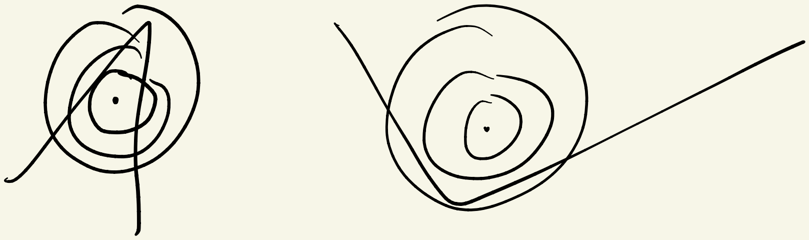
⑥ Idem avec un paraboloïde de révolution ($\rho \leq a x_1^2$) avec paramètre a.

⑦ Idem avec bruit gaussien $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$
(nuance : le single-noise certificate se calcule différemment).

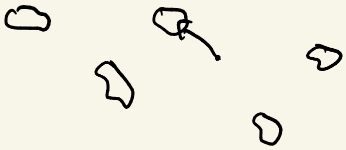
⑧ Tester nouveaux certificats en petite dimension
* Bruits gaussiens concentriques
* —— uniformes ——
* Bruits gaussiens translatés

(avec le cône / le paraboloïde)

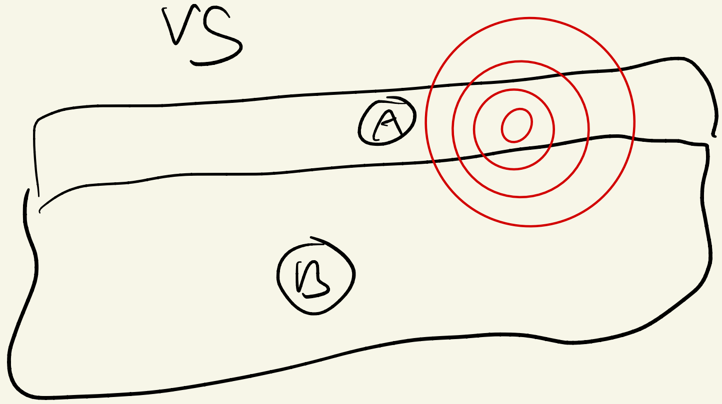
9



r petit → chang^t de ρ
$\frac{\partial \rho}{\partial r}$ est élevé



VS



ρ évolue de façon régulière

10 (Maths) quel choix de bruits donne un certificat qui se calcule bien ?

$$p_i = \int \underbrace{\mathbb{1}_S}_{\text{Ney-Pearson set}} \underbrace{f_i}_{\text{bruit utilisé}} \, d\mu$$

mesure de comptage par ex

→ se calculent bien ?

$$S = \left\{ z \in \mathbb{R}^d ,\ f_0(z) \leq \sum k_i f_i(z) \right\}$$

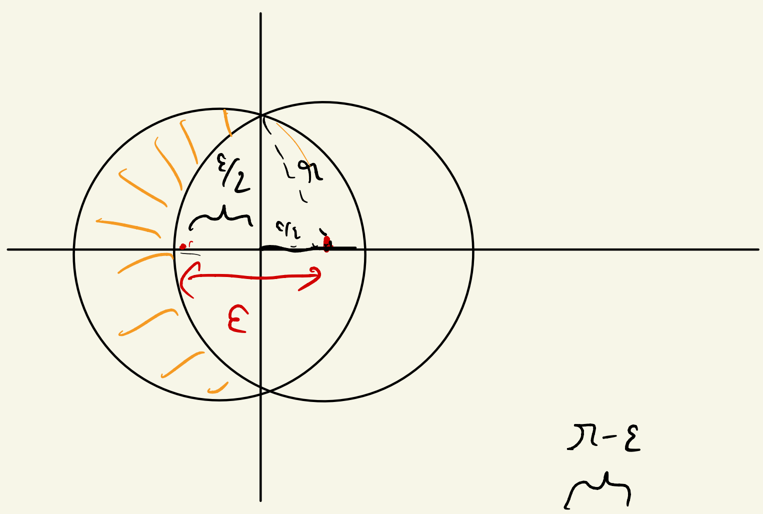
Pistes :

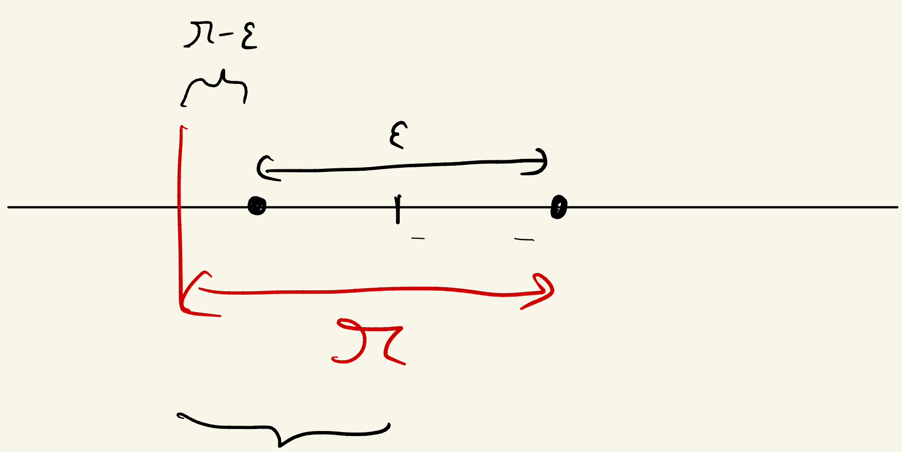
- Mettre des symétries dans les g_i (par ex bruits isotropes concentriques) puis par ex coord. polaires
→ se ramène à un calcul en dim 2 ou 3

Ex : gaussiennes de σ ≠ → $\left\{ r \geq 0,\ e^{-\frac{r^2}{2\sigma_0^2}} \leq \sum h_i\, e^{-\frac{r^2}{2\sigma_i^2}} \right\}$

avec $r \sim \chi(d)$ en dim 1.

Single-noise certificate en uniform





$$r - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} = r - \frac{\varepsilon}{2}$$

Volume de la calotte sphérique

$$V_{cap} = \frac{1}{2} \underbrace{V_n(r)}_{\text{volume de la boule}} I_{1-\left(\frac{\varepsilon}{2r}\right)^2}\left(\frac{d+1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Incomplete regularized beta

$$I_z(a,b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^{z} t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt$$

$$= \frac{\text{Incomplete beta}(a,b,z)}{\text{beta}(a,b)}$$

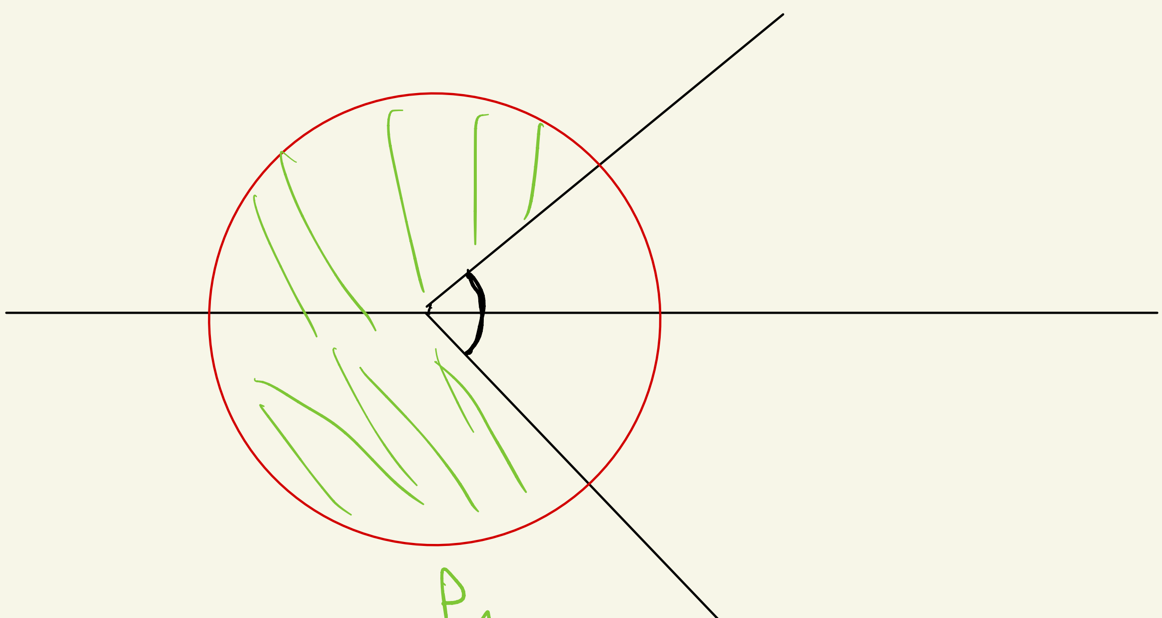
$$V_{orange} = V_n(r) - 2\,V_{cap}$$

$$= V_n(r)\left(1 - I_{1-\left(\frac{\varepsilon}{2r}\right)^2}\left(\frac{d+1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$$

Single-noise certificate

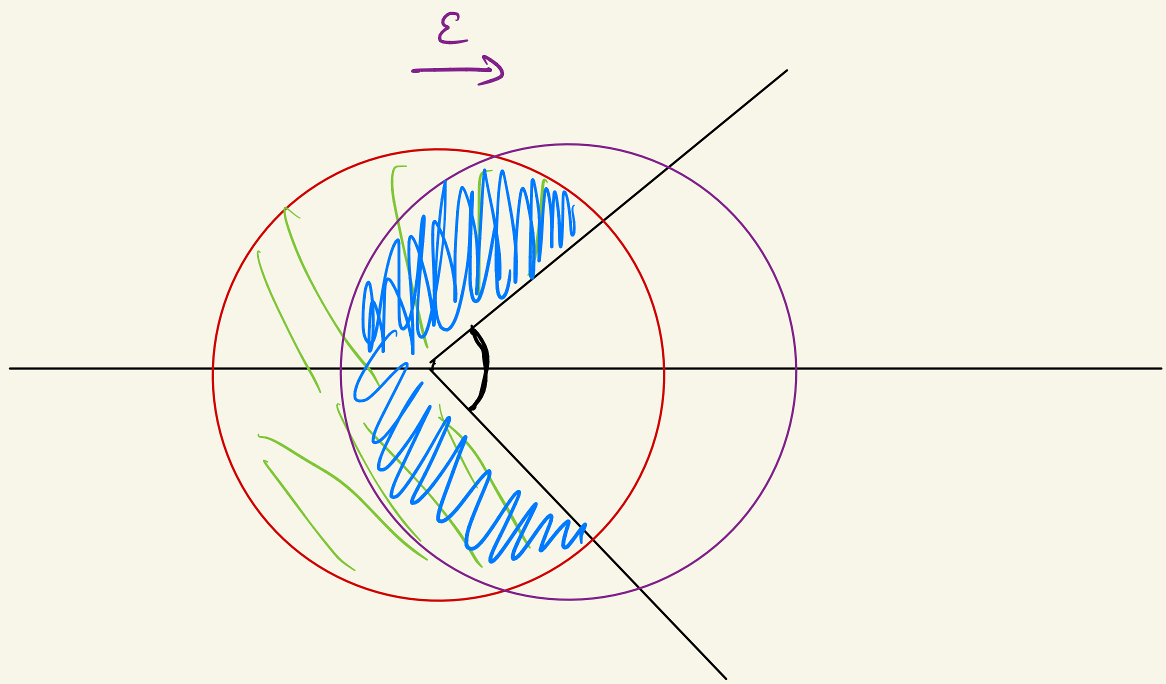
$$P_{SN} = \underbrace{P_1}_{\text{observé}} - \frac{V_{orange}}{V_n(r)}$$

$$\boxed{P_{SN} = P_1 - \left(1 - I_{1-\left(\frac{\varepsilon}{2r}\right)^2}\left(\frac{d+1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)}$$



P_1 = relative volume of this area

True certificate:



$$P_{true} = \frac{\mathrm{vol}\,(\mathrm{blue})}{\mathrm{vol}\,(\mathrm{ball})} \longrightarrow$$ Monte-carlo sur la boule translatée.