第4章 二元关系与函数

4.1 集合的笛卡儿积和二元关系

- 有序对
- 笛卡儿积及其性质
- 二元关系的定义
- 二元关系的表示

有序对

定义 由两个客体 x 和 y，按照一定的顺序组成的二元组称为有序对，记作 $\langle x,y\rangle$

实例：点的直角坐标(3,–4)

有序对性质

有序性 $\langle x,y\rangle \neq \langle y,x\rangle$ （当 $x\neq y$ 时）

$\langle x,y\rangle$ 与 $\langle u,v\rangle$ 相等的充分必要条件是

$$\langle x,y\rangle=\langle u,v\rangle \Leftrightarrow x=u \wedge y=v$$

例1 $\langle 2, x+5\rangle = \langle 3y-4, y\rangle$，求 x, y.

解 $3y-4 = 2, x+5 = y \Rightarrow y = 2, x = -3$

有序 n 元组

定义 一个有序 n ($n \geq 3$) 元组 $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ 是一个有序对，其中第一个元素是一个有序 n-1元组，即

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle = \langle \langle x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \rangle, x_n \rangle$$

当 n=1时, $\langle x \rangle$ 形式上可以看成有序 1 元组.

实例 n 维向量是有序 n元组.

笛卡儿积

定义　设A,B为集合，A与B 的笛卡儿积记作$A\times B$，

即　　$A\times B=\{ <x,y> \mid x\in A \wedge y\in B \}$

例2　$A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b,c\}$

$A\times B=\{<1,a>,<1,b>,<1,c>,<2,a>,<2,b>,<2,c>,$
$<3,a>,<3,b>,<3,c>\}$

$B\times A=\{<a,1>,<b,1>,<c,1>,<a,2>,<b,2>,<c,2>,$
$<a,3>, <b,3>,<c,3>\}$

$A=\{\varnothing\}$,　$P(A)\times A=\{<\varnothing,\varnothing>, <\{\varnothing\},\varnothing>\}$

笛卡儿积的性质

不适合交换律 $A\times B\neq B\times A \quad (A\neq B,\ A\neq\varnothing,\ B\neq\varnothing)$

不适合结合律 $(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C) \quad (A\neq\varnothing,\ B\neq\varnothing)$

对于并或交运算满足分配律

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$

$$(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$$

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$

$$(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$$

若A或B中有一个为空集，则$A\times B$就是空集.

$$A\times\varnothing=\varnothing\times B=\varnothing$$

若$|A|=m$, $|B|=n$, 则 $|A\times B|=mn$

性质的证明

证明　$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

证 任取$<x,y>$

$<x,y>\in A\times(B\cup C)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\cup C$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)$

$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow <x,y>\in A\times B\vee<x,y>\in A\times C$

$\Leftrightarrow <x,y>\in(A\times B)\cup(A\times C)$

所以有$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$.

例题

例3 (1) 证明 $A=B \wedge C=D \Rightarrow A\times C=B\times D$

(2) $A\times C=B\times D$是否推出 $A=B \wedge C=D$? 为什么?

解 (1) 任取$<x,y>$

$$<x,y>\in A\times C \Leftrightarrow x\in A \wedge y\in C$$

$$\Leftrightarrow x\in B \wedge y\in D \Leftrightarrow <x,y>\in B\times D$$

(2) 不一定. 反例如下:

$A=\{1\}$, $B=\{2\}$, $C=D=\varnothing$, 则 $A\times C=B\times D$ 但是 $A\neq B$.

二元关系的定义

定义 如果一个集合满足以下条件之一：

（1）集合非空, 且它的元素都是有序对

（2）集合是空集

则称该集合为一个二元关系, 简称为关系，记作R.

如$<x,y>\in R$, 可记作 xRy；如果$<x,y>\notin R$, 则记作$x \not{R} y$

实例：$R=\{<1,2>,<a,b>\}$, $S=\{<1,2>,a,b\}$.

R是二元关系, 当a, b不是有序对时，S不是二元关系

根据上面的记法，可以写 $1R2$, aRb, $a \not{R} c$ 等.

从A到B的关系与A上的关系

定义 设A,B为集合，$A\times B$的任何子集所定义的二元关系叫做从A到B的二元关系，当$A=B$时则叫做 A上的二元关系.

例4 $A=\{0,1\}$, $B=\{1,2,3\}$, $R_1=\{<0,2>\}$, $R_2=A\times B$, $R_3=\varnothing$, $R_4=\{<0,1>\}$. 那么 R_1, R_2, R_3, R_4是从 A 到 B 的二元关系, R_3和R_4同时也是 A上的二元关系.

计数

$|A|=n$, $|A\times A|=n^2$, $A\times A$的子集有2^{n^2}个. 所以 A上有 2^{n^2}个不同的二元关系.

例如 $|A|=3$, 则 A上有=512个不同的二元关系.

A上重要关系的实例

设 A 为任意集合,

$\varnothing$是 A 上的关系，称为空关系

E_A, I_A 分别称为全域关系与恒等关系，定义如下：

$$E_A=\{<x,y>|x\in A\wedge y\in A\}=A\times A$$

$$I_A=\{<x,x>|x\in A\}$$

例如, $A=\{1,2\}$, 则

$$E_A=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>\}$$

$$I_A=\{<1,1>,<2,2>\}$$

A上重要关系的实例（续）

小于等于关系 L_A, 整除关系D_A, 包含关系$R_\subseteq$定义:

$L_A=\{<x,y>|\ x,y\in A\wedge x\le y\}$, $A\subseteq\mathbf{R}$，$\mathbf{R}$为实数集合

$D_B=\{<x,y>|\ x,y\in B\wedge x$整除$y\}$,

$B\subseteq\mathbf{Z}^*$, $\mathbf{Z}^*$为非0整数集

$R_\subseteq=\{<x,y>|\ x,y\in A\wedge x\subseteq y\}$, A是集合族.

类似的还可以定义大于等于关系, 小于关系, 大于关系, 真包含关系等等.

实例

例如 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, 则

$$L_A=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<2,3>,<3,3>\}$$

$$D_A=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<3,3>\}$$

$A=P(B)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$, 则 A上的包含关系是

$$R_{\subseteq}=\{<\varnothing,\varnothing>,<\varnothing,\{a\}>,<\varnothing,\{b\}>,<\varnothing,\{a,b\}>,<\{a\},\{a\}>,$$
$$<\{a\},\{a,b\}>,<\{b\},\{b\}>,<\{b\},\{a,b\}>,<\{a,b\},\{a,b\}>\}$$

关系的表示

表示方式：关系的集合表达式、关系矩阵、关系图

关系矩阵：若$A=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$，$B=\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$，$R$是从$A$到$B$的关系，$R$的关系矩阵是布尔矩阵$M_R = [\,r_{ij}\,]_{m\times n}$，其中 $r_{ij}= 1 \Leftrightarrow < a_i, b_j> \in R$.

关系图：若$A= \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$，$R$是从$A$上的关系，$R$的关系图是$G_R=<A, R>$，其中$A$为结点集，$R$为边集.如果$<x_i,x_j>$属于关系$R$，在图中就有一条从 x_i 到 x_j 的有向边.

注意：A, B为有穷集，关系矩阵适于表示从A到B的关系或者A上的关系，关系图适于表示A上的关系

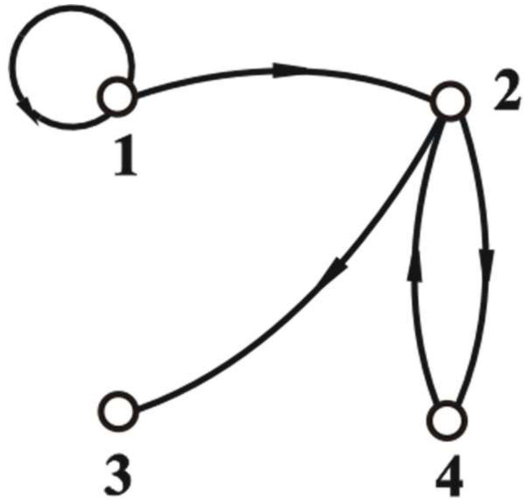
实例

A={1,2,3,4},

R={<1,1>,<1,2>,<2,3>,<2,4>,<4,2>},

R的关系矩阵M_R和关系图G_R如下:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



4.2 关系的运算

- 基本运算定义
  - 定义域、值域、域
  - 逆、合成、限制、像
- 基本运算的性质
- 幂运算
  - 定义
  - 求法
  - 性质

关系的基本运算定义

定义域、值域 和 域

$$\mathrm{dom}R = \{\, x \mid \exists y\, (\langle x,y\rangle \in R) \,\}$$

$$\mathrm{ran}R = \{\, y \mid \exists x\, (\langle x,y\rangle \in R) \,\}$$

$$\mathrm{fld}R = \mathrm{dom}R \cup \mathrm{ran}R$$

例1 $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,3\rangle\}$, 则

$\mathrm{dom}R=\{1, 2, 4\}$

$\mathrm{ran}R=\{2, 3, 4\}$

$\mathrm{fld}R=\{1, 2, 3, 4\}$

关系的基本运算定义（续）

逆与合成

$$R^{-1} = \{<y,x> \mid <x,y> \in R\}$$

$$R \circ S = |<x,z> \mid \exists\, y\, (<x,y> \in R \wedge <y,z> \in S)\, \}$$

例2 $R=\{<1,2>, <2,3>, <1,4>, <2,2>\}$

$S=\{<1,1>, <1,3>, <2,3>, <3,2>, <3,3>\}$

$R^{-1}=\{<2,1>, <3,2>, <4,1>, <2,2>\}$

$R \circ S =\{<1,3>, <2,2>, <2,3>\}$

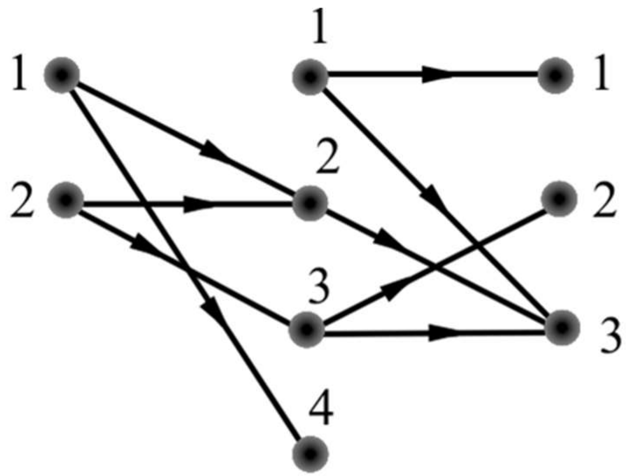
$S \circ R =\{<1,2>, <1,4>, <3,2>, <3,3>\}$

合成运算的图示方法

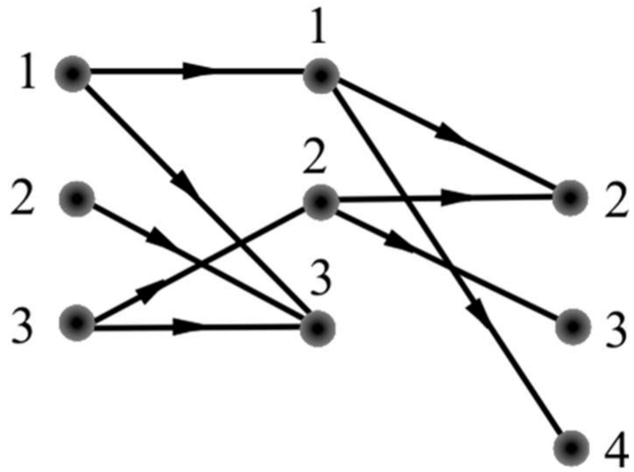
利用图示（不是关系图）方法求合成

$R \circ S = \{<1,3>, <2,2>, <2,3>\}$

$S \circ R = \{<1,2>, <1,4>, <3,2>, <3,3>\}$



$R \circ S$



$S \circ R$

限制与像

定义 F 在A上的限制

$$F\upharpoonright A = \{<x,y> \mid xFy \wedge x\in A\}$$

A 在F下的像

$$F[A] = \mathrm{ran}(F\upharpoonright A)$$

实例 $R=\{<1,2>, <2,3>, <1,4>, <2,2>\}$

$R\upharpoonright\{1\}=\{<1,2>,<1,4>\}$

$R[\{1\}]=\{2,4\}$

$R\upharpoonright\varnothing=\varnothing$

$R[\{1,2\}]=\{2,3,4\}$

注意：$F\upharpoonright A\subseteq F$, $F[A] \subseteq \mathrm{ran}F$

关系基本运算的性质

定理1 设F是任意的关系, 则

(1) $(F^{-1})^{-1}=F$

(2) $\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$, $\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$

证 (1) 任取$<x,y>$, 由逆的定义有

$$<x,y>\in(F^{-1})^{-1} \Leftrightarrow <y,x>\in F^{-1} \Leftrightarrow <x,y>\in F$$

所以有 $(F^{-1})^{-1}=F$

(2) 任取x,

$$x\in \mathrm{dom}F^{-1} \Leftrightarrow \exists y(<x,y>\in F^{-1})$$

$$\Leftrightarrow \exists y(<y,x>\in F) \Leftrightarrow x\in \mathrm{ran}F$$

所以有$\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$. 同理可证 $\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$.

关系基本运算的性质（续）

定理2 设F, G, H是任意的关系, 则

(1) $(F\circ G)\circ H=F\circ(G\circ H)$

(2) $(F\circ G)^{-1}= G^{-1}\circ F^{-1}$

证 (1) 任取$<x,y>$,

$$<x,y>\in(F\circ G)\circ H \Leftrightarrow \exists t(<x,t>\in F\circ G \wedge <t,y>\in H)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\ (\exists s(<x,s>\in F \wedge <s,t>\in G) \wedge <t,y>\in H)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\ \exists s\ (<x,s>\in F \wedge <s,t>\in G \wedge <t,y>\in H)$$

$$\Leftrightarrow \exists s\ (<x,s>\in F \wedge \exists t\ (<s,t>\in G \wedge <t,y>\in H))$$

$$\Leftrightarrow \exists s\ (<x,s>\in F \wedge <s,y>\in G\circ H)$$

$$\Leftrightarrow <x,y>\in F\circ(G\circ H)$$

所以 $(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$

关系基本运算的性质（续）

(2) 任取$<x,y>$,

$$<x,y> \in (F \circ G)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow <y,x> \in F \circ G$$

$$\Leftrightarrow \exists t\, (<y,t> \in F \wedge (t,x) \in G)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\, (<x,t> \in G^{-1} \wedge (t,y) \in F^{-1})$$

$$\Leftrightarrow <x,y> \in G^{-1} \circ F^{-1}$$

所以 $(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$

A上关系的幂运算

设R为A上的关系, n为自然数, 则 R 的 n次幂定义为:

(1) $R^0=\{<x,x> \mid x \in A\}=I_A$

(2) $R^{n+1} = R^n \circ R$

注意:

对于A上的任何关系R_1和R_2都有

$$R_1{}^0 = R_2{}^0 = I_A$$

对于A上的任何关系 R 都有

$$R^1 = R$$

幂的求法

对于集合表示的关系R，计算 R^n 就是n个R右复合 .
矩阵表示就是n个矩阵相乘, 其中相加采用逻辑加.

例3 设$A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$,
求R的各次幂, 分别用矩阵和关系图表示.

解 R与R^2的关系矩阵分别为

$$M=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad M^2=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

幂的求法（续）

同理，$R^0=I_A$, R^3和R^4的矩阵分别是：

$$M^0=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad M^3=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad M^4=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

因此$M^4=M^2$, 即$R^4=R^2$. 因此可以得到

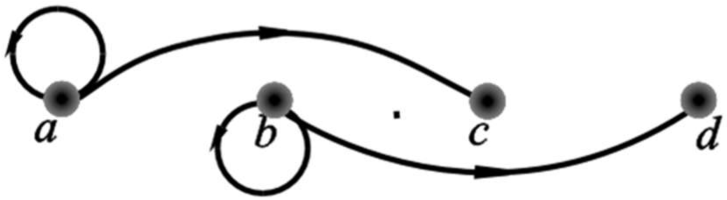
$$R^2=R^4=R^6=\ldots,\quad R^3=R^5=R^7=\ldots$$

幂的求法（续）

$R^0, R^1, R^2, R^3, \ldots$的关系图如下图所示

R^0

R^1



$R^2=R^4=\ldots$

$R^3=R^5=\ldots$

幂运算的性质

定理3　设A为n元集, R是A上的关系, 则存在自然数 s 和 t, 使得　$R^s = R^t$.

证　R为A上的关系，由于$|A|=n$，A上的不同关系只有 2^{n^2}个.

当列出 R 的各次幂

$$R^0, R^1, R^2, \ldots, , \ldots,$$

必存在自然数 s 和 t 使得　$R^s=R^t$.

幂运算的性质（续）

定理4 设 R 是 A 上的关系, $m, n\in \mathrm{N}$, 则

(1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$

(2) $(R^m)^n = R^{mn}$

证 用归纳法

(1) 对于任意给定的$m\in \mathrm{N}$, 施归纳于n.

若$n=0$, 则有

$$R^m \circ R^0 = R^m \circ I_A = R^m = R^{m+0}$$

假设$R^m \circ R^n = R^{m+n}$, 则有

$$R^m \circ R^{n+1} = R^m \circ (R^n \circ R) = (R^m \circ R^n) \circ R = R^{m+n+1},$$

所以对一切$m, n\in \mathrm{N}$有$R^m \circ R^n = R^{m+n}$.

幂运算的性质（续）

(接上页证明)

(2) 对于任意给定的 $m \in \mathrm{N}$, 施归纳于n.

若n=0, 则有

$$(R^m)^0 = I_A = R^0 = R^{m \times 0}$$

假设 $(R^m)^n = R^{mn}$, 则有

$$(R^m)^{n+1} = (R^m)^n \circ R^m = (R^{mn}) \circ R^m = R^{mn+m} = R^{m(n+1)}$$

所以对一切 $m,n \in \mathrm{N}$ 有 $(R^m)^n = R^{mn}$.