5.2 通路、回路、图的连通性

- 简单通(回)路, 初级通(回)路, 复杂通(回)路
- 无向图的连通性

  无向连通图, 连通分支
- 有向连通图

  弱连通图, 单向连通图, 强连通图
- 点割集与割点
- 边割集与割边(桥)

通路与回路

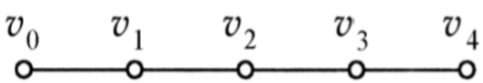
定义 给定图$G=<V,E>$（无向或有向的），G中顶点与边的交替序列$\Gamma=v_0e_1v_1e_2\ldots e_lv_l$,

(1) 若$\forall i(1\le i\le l)$, v_{i-1}, v_i是e_i的端点(对于有向图, 要求v_{i-1}是始点, v_i是终点), 则称Γ为通路, v_0是通路的起点, v_l是通路的终点, l为通路的长度. 又若$v_0=v_l$，则称Γ为回路.

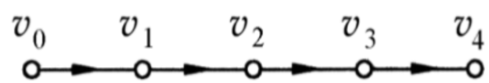
(2) 若通路(回路)中所有顶点(对于回路, 除$v_0=v_l$)各异，则称为初级通路(初级回路).初级通路又称作路径，初级回路又称作圈.

(3) 若通路(回路)中所有边各异，则称为简单通路(简单回路), 否则称为复杂通路(复杂回路).

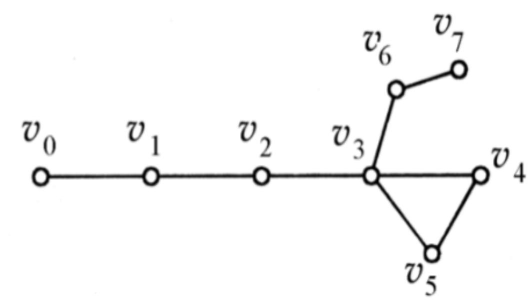
通路与回路实例



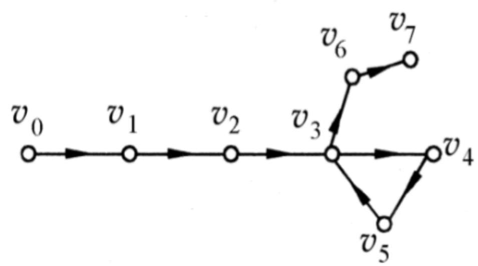
v_0 v_1 v_2 v_3 v_4



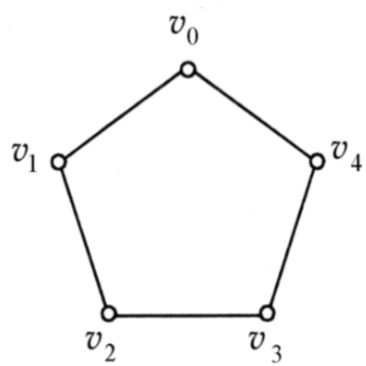
v_0 v_1 v_2 v_3 v_4



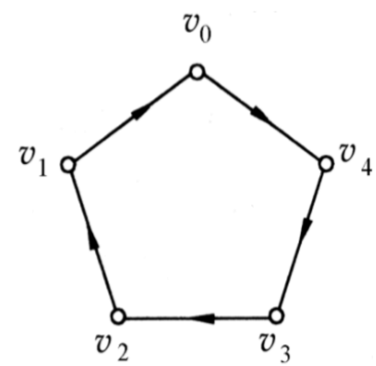
v_0 v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_7



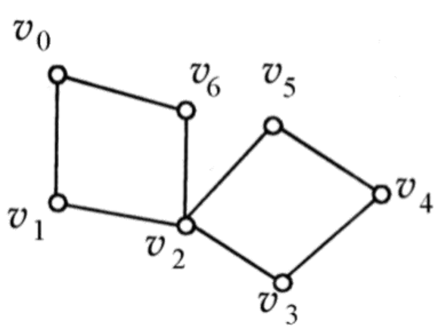
v_0 v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_7



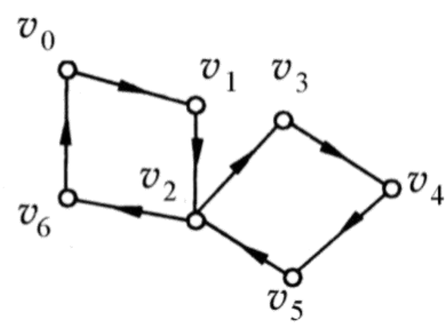
v_0 v_1 v_2 v_3 v_4



v_0 v_1 v_2 v_3 v_4



v_0 v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6



v_0 v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6

通路与回路(续)

说明:

- 表示方法

  ① 用顶点和边的交替序列(定义), 如$\Gamma=v_0e_1v_1e_2\ldots e_lv_l$

  ② 用边的序列, 如$\Gamma=e_1e_2\ldots e_l$

  ③ 简单图中, 用顶点的序列, 如$\Gamma=v_0v_1\ldots v_l$

  ④ 非简单图中,可用混合表示法,如$\Gamma=v_0v_1e_2v_2e_5v_3v_4v_5$

- 环是长度为1的圈, 两条平行边构成长度为2的圈.
- 在无向简单图中, 所有圈的长度≥3; 在有向简单图中, 所有圈的长度≥2.

通路与回路(续)

- 在两种意义下计算圈的个数

① 定义意义下

在无向图中, 一个长度为$l(l\geq 3)$的圈看作$2l$个不同的圈. 如$v_0v_1v_2v_0$, $v_1v_2v_0v_1$, $v_2v_0v_1v_2$, $v_0v_2v_1v_0$, $v_1v_0v_2v_1$, $v_2v_1v_0v_2$看作6个不同的圈.

在有向图中, 一个长度为$l(l\geq 3)$的圈看作l个不同的圈.

② 同构意义下

所有长度相同的圈都是同构的, 因而是1个圈.

通路与回路(续)

定理 在n阶图G中，若从顶点u到v（$u \neq v$）存在通路，则从u到v存在长度小于等于$n-1$的通路.

推论 在n阶图G中，若从顶点u到v（$u \neq v$）存在通路，则从u到v存在长度小于等于$n-1$的初级通路.

定理 在一个n阶图G中，若存在v到自身的回路，则一定存在v到自身长度小于等于n的回路.

推论 在一个n阶图G中，若存在v到自身的简单回路，则存在v到自身长度小于等于n的初级回路.

无向图的连通性

设无向图$G=<V,E>$,

u与v连通: 若u与v之间有通路. 规定u与自身总连通.

连通关系 $R=\{<u,v>|\ u,v \in V$且$u \sim v\}$是V上的等价关系

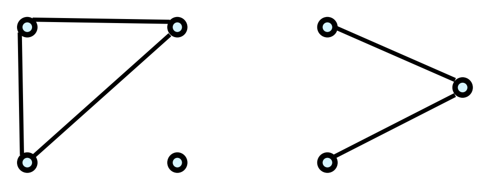
连通图:任意两点都连通的图. 平凡图是连通图.

连通分支: V关于连通关系R的等价类的导出子图

设$V/R=\{V_1,V_2,\ldots,V_k\}$, $G[V_1]$, $G[V_2]$, …,$G[V_k]$是G的连通分支, 其个数记作$p(G)=k$.

G是连通图$\Leftrightarrow p(G)=1$

例



点割集

记 $G-v$: 从G中删除v及关联的边

$G-V'$: 从G中删除V'中所有的顶点及关联的边

$G-e$: 从G中删除e

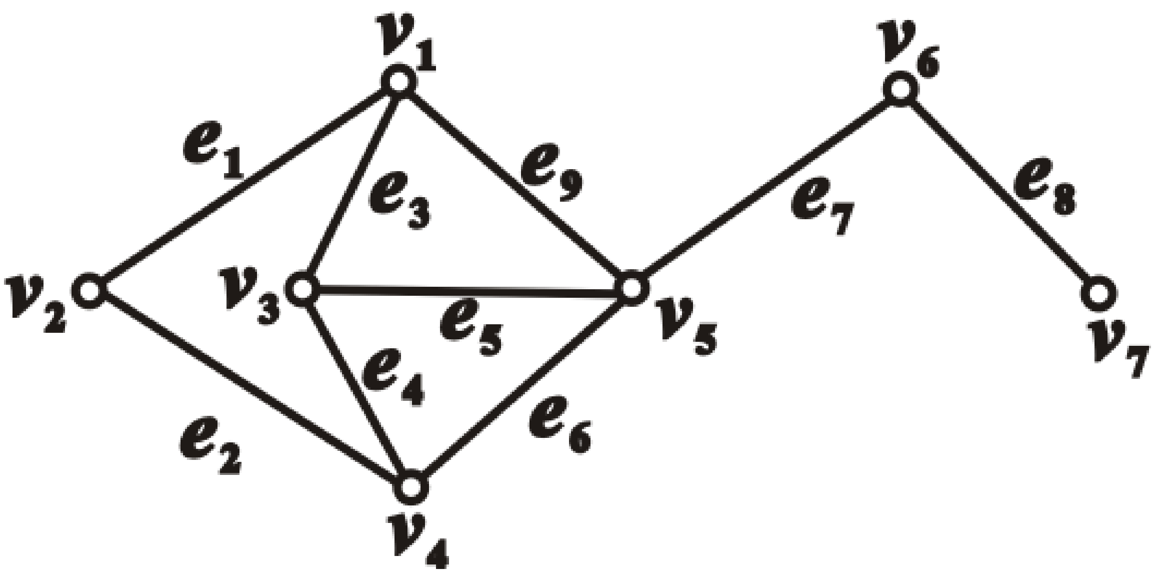
$G-E'$: 从G中删除E'中所有边

定义 设无向图$G=\langle V,E\rangle$, $V'\subset V$, 若$p(G-V')>p(G)$且 $\forall V''\subset V'$, $p(G-V'')=p(G)$, 则称V'为G的点割集. 若$\{v\}$为点割集, 则称v为割点.

点割集实例

例 $\{v_1,v_4\}$, $\{v_6\}$是点割集, v_6是割点.

$\{v_2,v_5\}$不是点割集



边割集

定义 设无向图$G=<V,E>$, $E'\subseteq E$, 若$p(G-E')>p(G)$且$\forall E''\subset E'$, $p(G-E'')=p(G)$, 则称E'为G的**边割集**. 若$\{e\}$为边割集, 则称e为**割边**或**桥**.

在上一页的图中，$\{e_1,e_2\}$，$\{e_1,e_3,e_5,e_6\}$，$\{e_8\}$等是边割集，e_8是桥，$\{e_7,e_9,e_5,e_6\}$不是边割集

说明：K_n无点割集

n阶零图既无点割集，也无边割集.

若G连通，E'为边割集，则$p(G-E')=2$

若G连通，V'为点割集，则$p(G-V')\geq 2$

有向图的连通性

设有向图$D=<V,E>$

u可达v: u到v有通路. 规定u到自身总是可达的.

可达具有自反性和传递性

D弱连通(连通): 基图为无向连通图

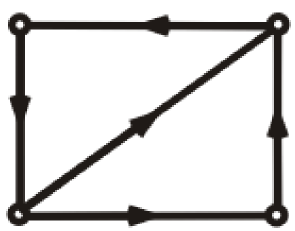
D单向连通: $\forall u,v\in V$，u可达v 或v可达u

D强连通: $\forall u,v\in V$，u与v相互可达

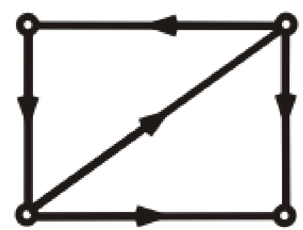
强连通$\Rightarrow$单向连通$\Rightarrow$弱连通

有向图的连通性(续)

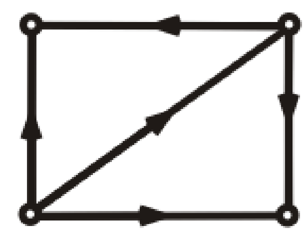
例



强连通



单向连通



弱连通

定理(强连通判别法) D强连通当且仅当D中存在经过每个顶点至少一次的回路

定理(单向连通判别法) D单向连通当且仅当D中存在经过每个顶点至少一次的通路

5.3 图的矩阵表示

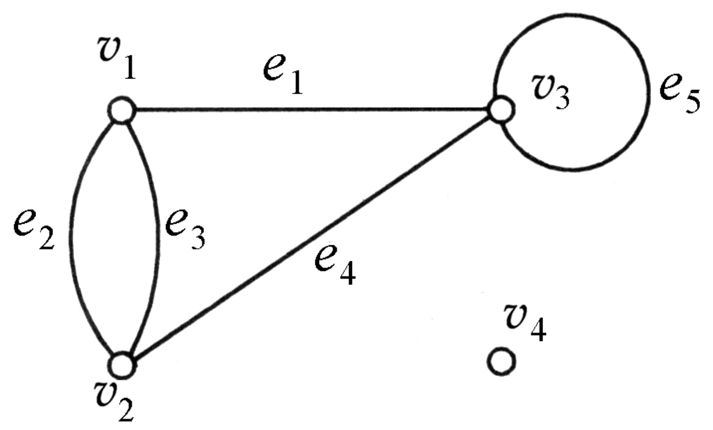
- 无向图的关联矩阵
- 有向图的关联矩阵
- 有向图的邻接矩阵
- 有向图的可达矩阵

无向图的关联矩阵

定义　设无向图$G=<V,E>$，$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，$E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$，令$m_{ij}$为$v_i$与$e_j$的关联次数，称$(m_{ij})_{n\times m}$为$G$的关联矩阵，记为$M(G)$.

例

$$M(G)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



无向图的关联矩阵

定义 设无向图$G=\langle V,E\rangle$，$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，$E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$，令$m_{ij}$为$v_i$与$e_j$的关联次数，称$(m_{ij})_{n\times m}$为$G$的关联矩阵，记为$M(G)$.

性质 (1) 每一列恰好有两个1或一个2

(2) $\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = d(v_i) \quad (i=1,2,\ldots,n)$

(3) $\sum_{i,j} m_{ij} = 2m$

(4) v_i为孤立点当且仅当第i行全为0

(5) 平行边的列相同

有向图的关联矩阵

定义 设无环有向图$D=<V,E>$, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, 令

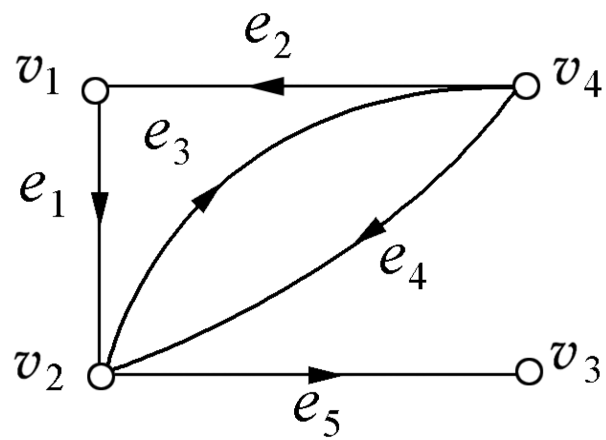
$$m_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{为}e_j\text{的始点}\\ 0, & v_i\text{与}e_j\text{不关联}\\ -1, & v_i\text{为}e_j\text{的终点}\end{cases}$$

则称$(m_{ij})_{n\times m}$为D的关联矩阵，记为$M(D)$.

有向图的关联矩阵(续)

例

$$\boldsymbol{M(D)}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



性质

(1) 每一列恰好有一个**1**和一个**-1**

(2) 第i行**1** 的个数等于$d^+(v_i)$**, -1** 的个数等于$d^-(v_i)$

(3) 1的总个数等于**-1**的总个数**,** 且都等于m

(4) 平行边对应的列相同

有向图的邻接矩阵

定义 设有向图$D=<V,E>$, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, 令$a_{ij}^{(1)}$为顶点$v_i$邻接到顶点$v_j$边的条数，称$(a_{ij}^{(1)})_{m\times n}$为**D的邻接矩阵**, 记作$A(D)$, 简记为$A$.

性质

(1) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^+(v_i), \quad i=1,2,\ldots,n$

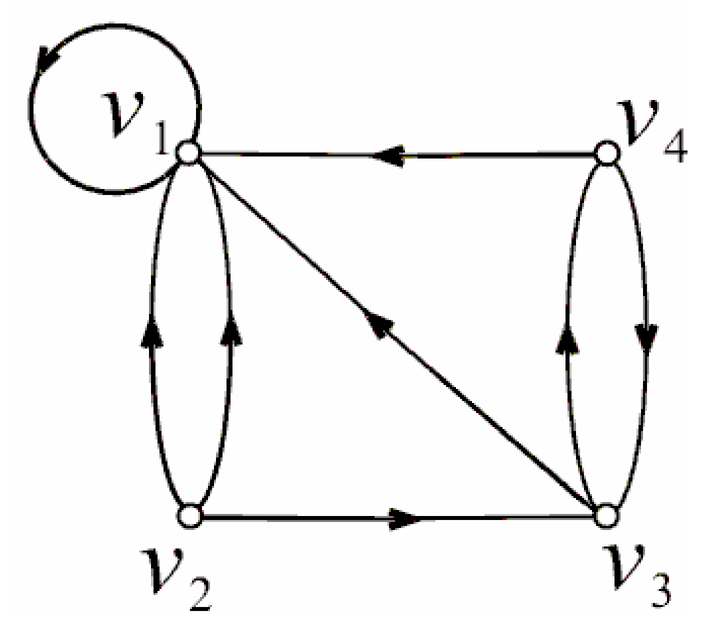
(2) $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^-(v_j), \quad j=1,2,\ldots,n$

(3) $\sum\limits_{i,j} a_{ij}^{(1)} = m$ --- D中长度为1的通路数

(4) $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(1)}$ --- D中长度为1的回路数

有向图的邻接矩阵实例

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$



D中的通路及回路数

定理 设A为n阶有向图D的邻接矩阵, 则$A^l(l\geq 1)$中元素

$a_{ij}^{(l)}$为D中v_i到v_j长度为 l 的通路数,

$a_{ii}^{(l)}$为v_i到自身长度为 l 的回路数,

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{(l)}$ 为D中长度为 l 的通路总数,

$\sum_{i=1}^{n}a_{ii}^{(l)}$ 为D中长度为 l 的回路总数.

D中的通路及回路数(续)

推论 设$B_l=A+A^2+\ldots+A^l(l\geq 1)$, 则$B_l$中元素

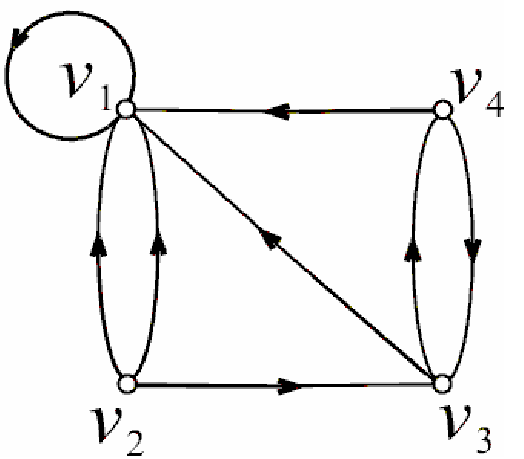
$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^{(l)}$为$D$中长度小于或等于$l$ 的通路数,

$\sum_{i=1}^{n}b_{ii}^{(l)}$ 为D中长度小于或等于l 的回路数.

例 问在有向图D中

(1) 长度为1, 2, 3, 4的通路各有多少条? 其中回路分别为多少条?

(2) 长度小于或等于4的通路为多少条? 其中有多少条回路?



例(续)

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&0&1&0\\1&0&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}\quad A^2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\3&0&0&1\\2&0&1&0\\2&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\4&0&1&0\\3&0&0&1\\3&0&1&0\end{bmatrix}\quad A^4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\5&0&0&1\\4&0&1&0\\4&0&0&1\end{bmatrix}$$

长度	通路	回路
1	8	1
2	11	3
3	14	1
4	17	3
合计	50	8

有向图的可达矩阵

定义 设$D=<V,E>$为有向图, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, 令

$$p_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{可达}v_j\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

称$(p_{ij})_{n\times n}$为D的可达矩阵, 记作$P(D)$, 简记为P.

性质:

$P(D)$主对角线上的元素全为1.

D强连通当且仅当$P(D)$的元素全为1.

有向图的可达矩阵实例

例

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$