1.5 联结词全功能集

- 联结词全功能集

- 与非联结词, 或非联结词

联结词的全功能集

定义 设S是一个联结词集合，如果任何$n(n\geq 1)$ 元真值函数都可以由仅含S中的联结词构成的公式表示，则称S是联结词全功能集.

说明：若S是联结词全功能集，则任何命题公式都可用S中的联结词表示.

设S_1, S_2是两个联结词集合，且$S_1\subseteq S_2$. 若S_1是全功能集，则S_2也是全功能集. 反之，若S_2不是全功能集，则S_1也不是全功能集.

联结词全功能集实例

定理 $\{\neg, \wedge, \vee\}$、$\{\neg, \wedge\}$、$\{\neg, \vee\}$、$\{\neg, \rightarrow\}$都是联结词全功能集.

证明 每一个真值函数都可以用一个主析取范式表示,故$\{\neg, \wedge, \vee\}$是联结词全功能集.

$p \vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$，故$\{\neg, \wedge\}$是全功能集.

$p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$，故$\{\neg, \vee\}$是全功能集.

$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$, 故$\{\neg, \rightarrow\}$也是全功能集.

复合联结词

与非式: $p\uparrow q \Leftrightarrow \neg(p\wedge q)$

或非式: $p\downarrow q \Leftrightarrow \neg(p\vee q)$

↑和↓与¬, ∧, ∨有下述关系:

$\neg p \Leftrightarrow \neg(p\wedge p) \Leftrightarrow p\uparrow p$

$p\wedge q \Leftrightarrow \neg\neg(p\wedge q) \Leftrightarrow \neg(p\uparrow q) \Leftrightarrow (p\uparrow q)\uparrow(p\uparrow q)$

$p\vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p\wedge\neg q) \Leftrightarrow (\neg p)\uparrow(\neg q) \Leftrightarrow (p\uparrow p)\uparrow(q\uparrow q)$

复合联结词(续)

$\neg p \Leftrightarrow p \downarrow p$

$p \wedge q \Leftrightarrow (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$

$p \vee q \Leftrightarrow (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$

定理 $\{\uparrow\}$, $\{\downarrow\}$是联结词全功能集.

可以证明: $\{\wedge, \vee\}$不是全功能集, 从而$\{\wedge\}$, $\{\vee\}$也不是全功能集.

例

例 将公式$p\wedge\neg q$化成只含下列各联结词集中的联结词的等值的公式.

(1) $\{\neg, \vee\}$；(2) $\{\neg, \rightarrow\}$；(3) $\{\uparrow\}$；(4) $\{\downarrow\}$.

解 (1) $p\wedge\neg q \Leftrightarrow \neg(\neg p\vee q)$.

(2) $p\wedge\neg q \Leftrightarrow \neg(\neg p\vee q) \Leftrightarrow \neg(p\rightarrow q)$.

(3) $p\wedge\neg q \Leftrightarrow p\wedge(q\uparrow q) \Leftrightarrow \neg(\neg(p\wedge(q\uparrow q)))$

$\Leftrightarrow \neg(p\uparrow(q\uparrow q)) \Leftrightarrow (p\uparrow(q\uparrow q))\uparrow(p\uparrow(q\uparrow q))$.

(4) $p\wedge\neg q \Leftrightarrow \neg(\neg p\vee q) \Leftrightarrow (\neg p)\downarrow q \Leftrightarrow (p\downarrow p)\downarrow q$.

1.6 组合电路

- 组合电路
- 逻辑门

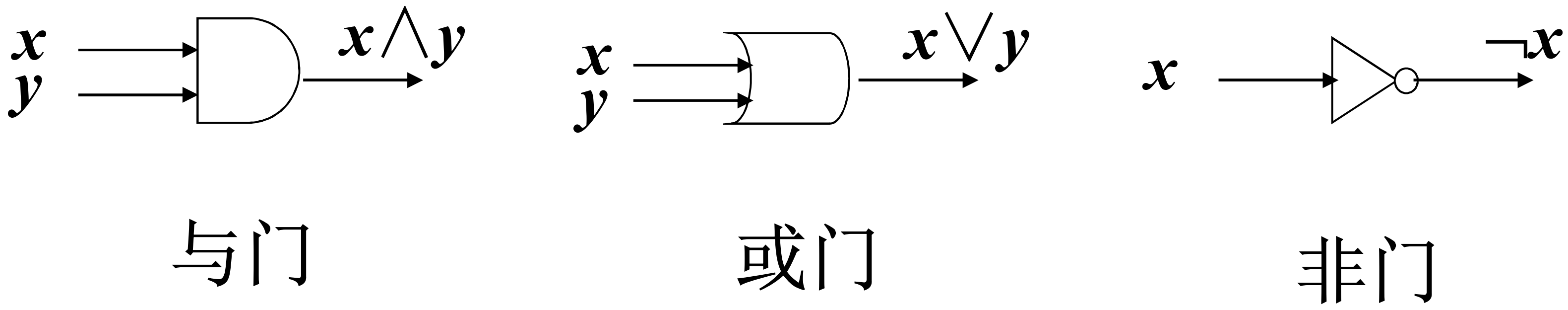
  与门，或门，非门，与非门，或非门
- 奎因-莫可拉斯基方法

组合电路

逻辑门：实现逻辑运算的电子元件.

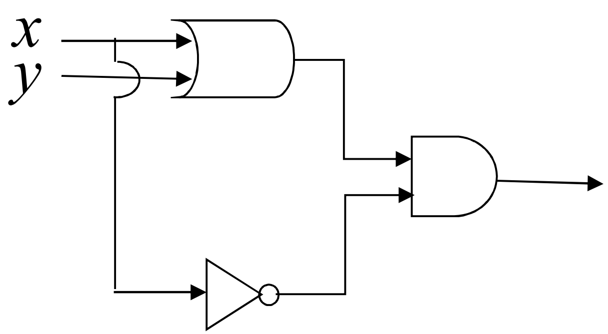
与门，或门，非门.

组合电路:实现命题公式的由电子元件组成的电路.

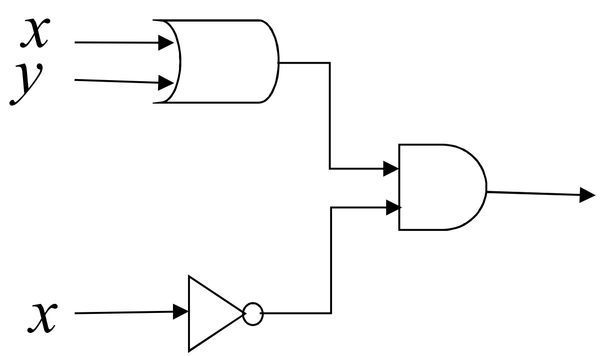


组合电路的例子

$(x \vee y) \wedge \neg x$的组合电路



第一种画法



第二种画法

例

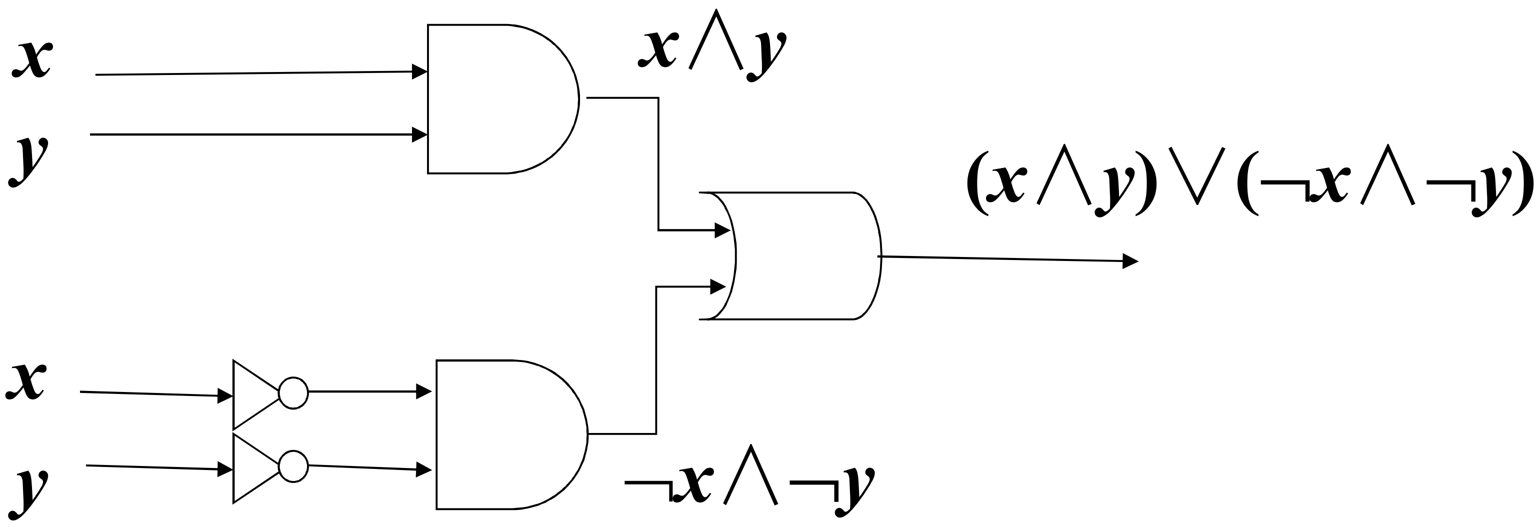
例 楼梯的灯由上下**2**个开关控制, 要求按动任何一个开关都能打开或关闭灯. 试设计一个这样的线路.

解 x,y:开关的状态, F:灯的状态, 打开为**1**, 关闭为**0**.
不妨设当**2**个开关都为**0**时灯是打开的.

$$F=m_0 \lor m_3 = (\neg x \land \neg y) \lor (x \land y)$$

x	y	$F(x,y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

例(续)



设计组合电路

步骤: 1.构造输入输出表(问题的真值函数),

2. 写出主析取范式,

3. 化简.

最简展开式: 包含最少运算的公式

例　当且仅当 x=y=z=1 或 x=y=1且 z=0 时输出1.

$$F= m_6 \lor m_7 = (x \land y \land \neg z) \lor (x \land y \land z)$$

4个与门,1个或门和一个非门

$F \Leftrightarrow x \land y$　　一个与门

奎因-莫可拉斯基方法

1. 合并简单合取式生成所有可能出现在最简展开式中的项.

2. 确定最简展开式中的项.

例 求下述公式的最简展开式:

$$
\begin{aligned}
F= & (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \\
& \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \\
& \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \\
& \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4)
\end{aligned}
$$

例(续)

解

编号	极小项	角码	标记
1	$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4$	1110	*
2	$x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$	1011	*
3	$\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$	0111	*
4	$x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4$	1010	*
5	$\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4$	0101	*
6	$\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$	0011	*
7	$\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4$	0001	*

例(续)

第一批				第二批		
合并项	项	表示串	标记	合并项	项	表示串
(1,4)	$x_1 \wedge x_3 \wedge \neg x_4$	1–10		(3,5,6,7)	$\neg x_1 \wedge x_4$	0– –1
(2,4)	$x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3$	101–				
(2,6)	$\neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$	–011				
(3,5)	$\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_4$	01–1	*			
(3,6)	$\neg x_1 \wedge x_3 \wedge x_4$	0–11	*			
(5,7)	$\neg x_1 \wedge \neg x_3 \wedge x_4$	0–01	*			
(6,7)	$\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_4$	00–1	*			

标记*表示该项已被合并

例(续)

项	覆盖	运算符数
$x_1 \wedge x_3 \wedge \neg x_4$	(1,4)	3
$x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3$	(2,4)	3
$\neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$	(2,6)	3
$\neg x_1 \wedge x_4$	(3,5,6,7)	2

选择(1,4), (2,4)和(3,5,6,7)，或者(1,4), (2,6)和(3,5,6,7).

最简展开式为

$$F \Leftrightarrow (x_1 \wedge x_3 \wedge \neg x_4) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_4)$$

或

$$F \Leftrightarrow (x_1 \wedge x_3 \wedge \neg x_4) \vee (\neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \vee (\neg x_1 \wedge x_4)$$