



2.3 一阶逻辑等值式与前束范式

- 等值式

- 基本等值式

 - 量词否定等值式

 - 量词辖域收缩与扩张等值式

 - 量词分配等值式

- 前束范式

等值式与基本等值式

定义 若 $A \leftrightarrow B$ 为逻辑有效式，则称 A 与 B 是**等值的**，记作 $A \Leftrightarrow B$ ，并称 $A \Leftrightarrow B$ 为**等值式**。

基本等值式：

命题逻辑中16组基本等值式的代换实例

如， $\forall x F(x) \rightarrow \exists y G(y) \Leftrightarrow \neg \forall x F(x) \vee \exists y G(y)$

$\neg(\forall x F(x) \vee \exists y G(y)) \Leftrightarrow \neg \forall x F(x) \wedge \neg \exists y G(y)$ 等

消去量词等值式 设 $D = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

$$\forall x A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \dots \wedge A(a_n)$$

$$\exists x A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \dots \vee A(a_n)$$

基本等值式(续)

量词辖域收缩与扩张等值式

设 $A(x)$ 是含 x 自由出现的公式, B 中不含 x 的出现

关于全称量词的:

$$\forall x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \vee B$$

$$\forall x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge B$$

$$\forall x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \rightarrow B$$

$$\forall x(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \forall x A(x)$$

关于存在量词的:

$$\exists x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee B$$

$$\exists x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \wedge B$$

$$\exists x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \rightarrow B$$

$$\exists x(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \exists x A(x)$$



基本的等值式(续)

量词否定等值式

设 $A(x)$ 是含 x 自由出现的公式

$$\neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$$

$$\neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$$

量词分配等值式

$$\forall x (A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$$

$$\exists x (A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$$

注意： \forall 对 \vee 无分配律， \exists 对 \wedge 无分配律，即

$$\forall x (A(x) \vee B(x)) \not\Leftrightarrow \forall x A(x) \vee \forall x B(x)$$

$$\exists x (A(x) \wedge B(x)) \not\Leftrightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$$

例

例 将下面命题用两种形式符号化

(1) 没有不犯错误的人

(2) 不是所有的人都爱看电影

解 (1) 令 $F(x)$: x 是人, $G(x)$: x 犯错误.

$$\neg \exists x (F(x) \wedge \neg G(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x \neg (F(x) \wedge \neg G(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x (F(x) \rightarrow G(x))$$

(2) 令 $F(x)$: x 是人, $G(x)$: 爱看电影.

$$\neg \forall x (F(x) \rightarrow G(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x \neg (F(x) \rightarrow G(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists x (F(x) \wedge \neg G(x))$$

前束范式

定义 设 A 为一个一阶逻辑公式, 若 A 具有如下形式
 $Q_1x_1Q_2x_2\cdots Q_kx_kB$, 则称 A 为**前束范式**, 其中 $Q_i (1\leq i\leq k)$
为 \forall 或 \exists , B 为不含量词的公式.

例如, $\forall x\exists y(F(x)\rightarrow(G(y)\wedge H(x,y)))$

$$\forall x\neg(F(x)\wedge G(x))$$

是前束范式, 而

$$\forall x(F(x)\rightarrow\exists y(G(y)\wedge H(x,y)))$$

$$\neg\exists x(F(x)\wedge G(x))$$

不是前束范式.



换名规则

换名规则：将量词辖域中出现的某个约束出现的个体变项及对应的指导变项，改成其他辖域中未曾出现过的个体变项符号，公式中其余部分不变，则所得公式与原来的公式等值。

公式的前束范式

定理（前束范式存在定理） 一阶逻辑中的任何公式都存在与之等值的前束范式

求前束范式：使用重要等值式、置换规则、换名规则进行等值演算.

例 求下列公式的前束范式

$$(1) \neg \exists x(M(x) \wedge F(x))$$

解 $\Leftrightarrow \forall x(\neg M(x) \vee \neg F(x))$ 量词否定等值式

$$\Leftrightarrow \forall x(M(x) \rightarrow \neg F(x))$$

两步结果都是前束范式，说明前束范式不惟一.

例 (续)

$$(2) \quad \forall x F(x) \wedge \neg \exists x G(x)$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \Leftrightarrow \forall x F(x) \wedge \forall x \neg G(x) \\ & \Leftrightarrow \forall x (F(x) \wedge \neg G(x)) \end{aligned}$$

(量词否定等值式)

(量词分配等值式)

或者

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow \forall x F(x) \wedge \forall x \neg G(x) \\ & \Leftrightarrow \forall x F(x) \wedge \forall y \neg G(y) \\ & \Leftrightarrow \forall x \forall y (F(x) \wedge \neg G(y)) \end{aligned}$$

(换名规则)

(量词辖域扩张)

例 (续)

$$(3) \exists x F(x) \vee \neg \forall x G(x)$$

$$\text{解} \quad \Leftrightarrow \exists x F(x) \vee \exists x \neg G(x)$$

$$\Leftrightarrow \exists x (F(x) \vee \neg G(x))$$

$$\text{或} \quad \Leftrightarrow \exists x F(x) \vee \neg \exists y G(y)$$

$$\Leftrightarrow \exists x (F(x) \vee \exists y \neg G(y))$$

$$\Leftrightarrow \exists x \exists y (F(x) \vee \neg G(y))$$

$$(4) \forall x F(x) \rightarrow \exists y (G(x,y) \wedge \neg H(y))$$

$$\text{解} \quad \Leftrightarrow \forall z F(z) \rightarrow \exists y (G(x,y) \wedge \neg H(y))$$

$$\Leftrightarrow \exists z \exists y (F(z) \rightarrow (G(x,y) \wedge \neg H(y)))$$



例 (续)

$$(5) \forall x(F(x,y) \rightarrow \exists y(G(x,y) \wedge H(x,z)))$$

$$\text{解} \Leftrightarrow \forall x(F(x,y) \rightarrow \exists u(G(x,u) \wedge H(x,z)))$$

$$\Leftrightarrow \forall x \exists u(F(x,y) \rightarrow G(x,u) \wedge H(x,z))$$

注意： \forall 与 \exists 不能颠倒



苏格拉底三段论的正确性

“凡是人都要死的. 苏格拉底是人. 所以苏格拉底是要死的.”

设 $F(x)$: x 是人, $G(x)$: x 是要死的, a : 苏格拉底.

$$\forall x(F(x) \rightarrow G(x)) \wedge F(a) \rightarrow G(a)$$

设前件为真, 即 $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$ 与 $F(a)$ 都为真.

由于 $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$ 为真, 故 $F(a) \rightarrow G(a)$ 为真.

由 $F(a)$ 与 $F(a) \rightarrow G(a)$ 为真, 根据假言推理得证 $G(a)$ 为真.