

# 图论

# 图论部分

- 第5章 图的基本概念
- 第6章 特殊的图
- 第7章 树



# 第5章 图的基本概念

## 5.1 无向图及有向图

## 5.2 通路, 回路和图的连通性

## 5.3 图的矩阵表示

## 5.4 最短路径, 关键路径和着色

# 5.1 无向图及有向图

- 无向图与有向图
- 顶点的度数
- 握手定理
- 简单图
- 完全图
- 子图
- 补图

# 无向图

**多重集合**: 元素可以重复出现的集合

**无序积**:  $A \& B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$

**定义 无向图**  $G = \langle V, E \rangle$ , 其中

(1) 顶点集  $V$  是非空有穷集合,

其元素称为**顶点**

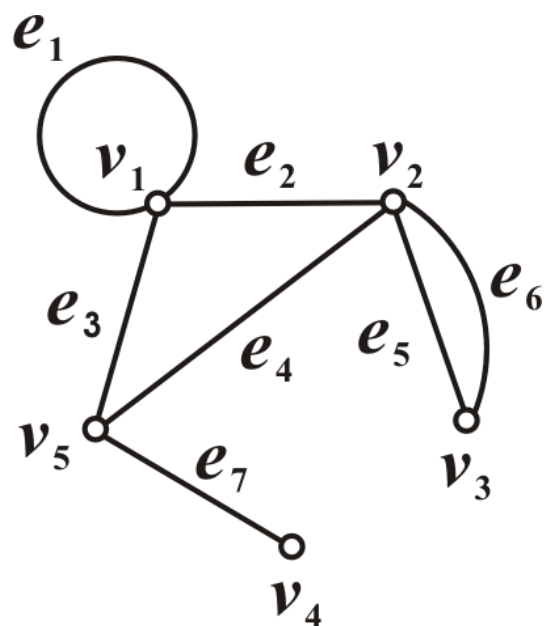
(2) 边集  $E$  为  $V \& V$  的多重子集,

其元素称为**无向边**, 简称**边**.

例如,  $G = \langle V, E \rangle$ , 其中

$V = \{v_1, v_2, \dots, v_5\}$ ,

$E = \{(v_1, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_3), (v_2, v_5), (v_1, v_5), (v_4, v_5)\}$



# 有向图

定义 有向图 $D=<V,E>$ , 其中

(1) 顶点集 $V$ 是非空有穷集合,

其元素称为顶点

(2) 边集 $E$ 为 $V\times V$ 的多重子集, 其

元素称为有向边, 简称边.

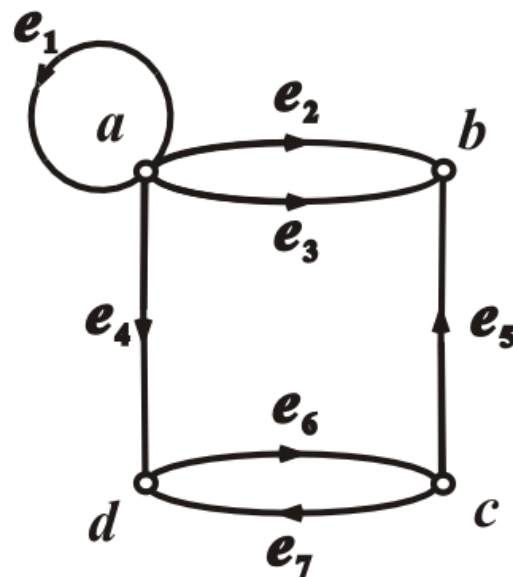
$D$ 的基图: 用无向边代替有向边

如 $D=<V,E>$ , 其中

$V=\{a,b,c,d\}$

$E=\{<a,a>, <a,b>, <a,b>, <a,d>, <c,b>, <d,c>, <c,d>\}$

图的数学定义与图形表示, 在同构意义下一一对应



# 无向图与有向图(续)

通常用 $G$ 表示无向图,  $D$ 表示有向图, 也常用 $G$ 泛指无向图和有向图.

$V(G), E(G), V(D), E(D)$ :  $G$ 和 $D$ 的顶点集, 边集.

$n$  阶图:  $n$ 个顶点的图

零图:  $E=\emptyset$

平凡图: 1 阶零图

空图:  $V=\emptyset$

# 顶点和边的关联与相邻

**定义** 设 $e=(u,v)$ 是无向图 $G=\langle V,E \rangle$ 的一条边, 称 $u,v$ 为 $e$ 的端点,  $e$ 与 $u(v)$ 关联. 若 $u \neq v$ , 则称 $e$ 与 $u(v)$ 的关联次数为1; 若 $u=v$ , 则称 $e$ 为环, 此时称 $e$ 与 $u$ 的关联次数为2; 若 $w$ 不是 $e$ 端点, 则称 $e$ 与 $w$ 的关联次数为0. 无边关联的顶点称作孤立点.

**定义** 设无向图 $G=\langle V,E \rangle$ ,  $u,v \in V$ ,  $e,e' \in E$ , 若 $(u,v) \in E$ , 则称 $u,v$ 相邻; 若 $e,e'$ 至少有一个公共端点, 则称 $e,e'$ 相邻.

对有向图有类似定义. 设 $e=\langle u,v \rangle$ 是有向图的一条边, 又称 $u$ 是 $e$ 的始点,  $v$ 是 $e$ 的终点,  $u$ 邻接到 $v$ ,  $v$ 邻接于 $u$ .



# 顶点的度数

设 $G=\langle V, E \rangle$ 为无向图,  $v \in V$ ,

$v$ 的度数(度)  $d(v)$ :  $v$ 作为边的端点次数之和

悬挂顶点: 度数为1的顶点

悬挂边: 与悬挂顶点关联的边

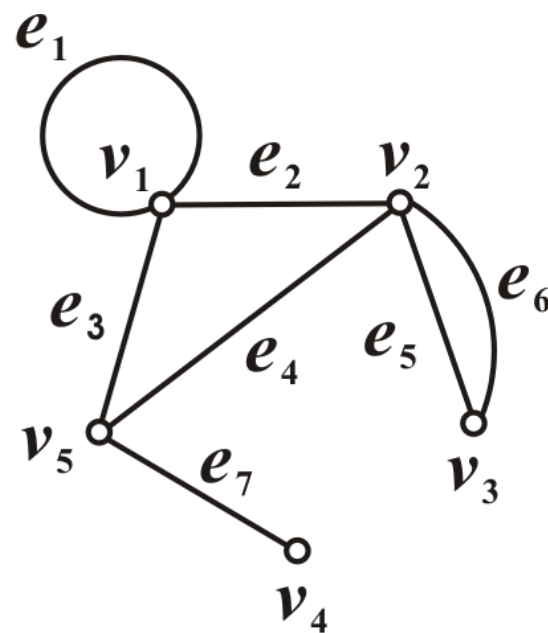
$G$ 的最大度  $\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V\}$

$G$ 的最小度  $\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V\}$

例如  $d(v_5)=3$ ,  $d(v_2)=4$ ,  $d(v_1)=4$ ,

$\Delta(G)=4$ ,  $\delta(G)=1$ ,

$v_4$ 是悬挂顶点,  $e_7$ 是悬挂边,  $e_1$ 是环



# 顶点的度数(续)

设 $D=\langle V,E \rangle$ 为有向图,  $v \in V$ ,

$v$ 的出度 $d^+(v)$ :  $v$ 作为边的始点次数之和

$v$ 的入度 $d^-(v)$ :  $v$ 作为边的终点次数之和

$v$ 的度数(度)  $d(v)$ :  $v$ 作为边的端点次数之和

$$d(v) = d^+(v) + d^-(v)$$

$D$ 的最大出度 $\Delta^+(D) = \max\{d^+(v) | v \in V\}$

最小出度 $\delta^+(D) = \min\{d^+(v) | v \in V\}$

最大入度 $\Delta^-(D) = \max\{d^-(v) | v \in V\}$

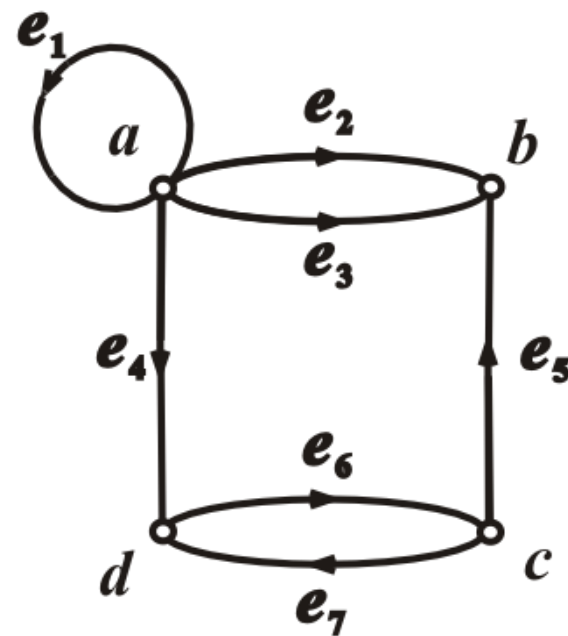
最小入度 $\delta^-(D) = \min\{d^-(v) | v \in V\}$

最大度 $\Delta(D) = \max\{d(v) | v \in V\}$

最小度 $\delta(D) = \min\{d(v) | v \in V\}$

# 例

例  $d^+(a)=4, d^-(a)=1, d(a)=5,$   
 $d^+(b)=0, d^-(b)=3, d(b)=3,$   
 $\Delta^+(D)=4, \delta^+(D)=0, \Delta^-(D)=3,$   
 $\delta^-(D)=1, \Delta(D)=5, \delta(D)=3.$



# 图论基本定理——握手定理

**定理** 任意无向图和有向图的所有顶点度数之和都等于边数的2倍, 并且有向图的所有顶点入度之和等于出度之和等于边数.

证  $G$ 中每条边(包括环)均有两个端点, 所以在计算 $G$ 中各顶点度数之和时, 每条边均提供2度,  $m$ 条边共提供 $2m$ 度. 有向图的每条边提供一个入度和一个出度, 故所有顶点入度之和等于出度之和等于边数.

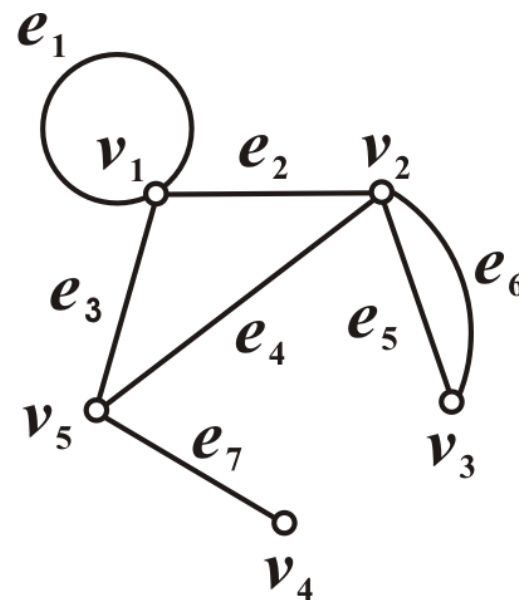
**推论** 任意无向图和有向图的奇度顶点个数必为偶数.

# 图的度数列

设无向图 $G$ 的顶点集 $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

$G$ 的度数列:  $d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n)$

如右图度数列: 4, 4, 2, 1, 3



设有向图 $D$ 的顶点集 $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

$D$ 的度数列:  $d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n)$

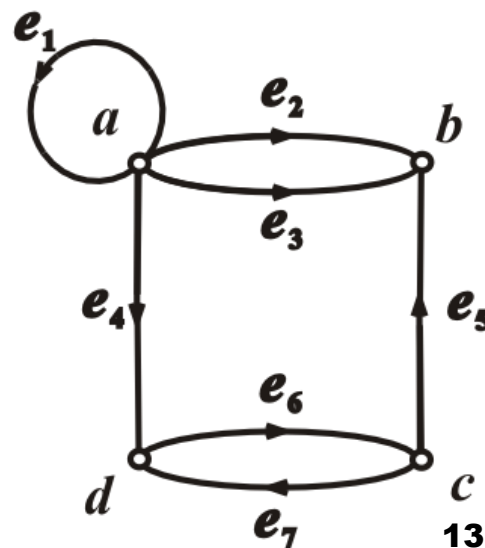
$D$ 的出度列:  $d^+(v_1), d^+(v_2), \dots, d^+(v_n)$

$D$ 的入度列:  $d^-(v_1), d^-(v_2), \dots, d^-(v_n)$

如右图度数列: 5, 3, 3, 3

出度列: 4, 0, 2, 1

入度列: 1, 3, 1, 2



# 握手定理的应用

例1  $(3,3,3,4)$ ,  $(2,3,4,6,8)$ 能成为图的度数列吗?

解 不可能. 它们都有奇数个奇数.

例2 已知图 $G$ 有10条边, 4个3度顶点, 其余顶点的度数均小于等于2, 问 $G$ 至少有多少个顶点?

解 设 $G$ 有 $n$ 个顶点. 由握手定理,

$$4 \times 3 + 2 \times (n - 4) \geq 2 \times 10$$

解得  $n \geq 8$

# 握手定理的应用(续)

例3 证明不存在具有奇数个面且每个面都具有奇数条棱的多面体.

证 用反证法. 假设存在这样的多面体,  
作无向图 $G=<V,E>$ , 其中 $V=\{v \mid v \text{ 为多面体的面}\}$ ,  
 $E=\{(u,v) \mid u,v \in V \wedge u \text{ 与 } v \text{ 有公共的棱} \wedge u \neq v\}$ .  
根据假设,  $|V|$ 为奇数且 $\forall v \in V, d(v)$ 为奇数. 这与握手定理的推论矛盾.

# 多重图与简单图

**定义** (1) 在无向图中, 如果有2条或2条以上的边关联同一对顶点, 则称这些边为**平行边**, 平行边的条数称为**重数**.

(2) 在有向图中, 如果有2条或2条以上的边具有相同的始点和终点, 则称这些边为**有向平行边**, 简称**平行边**, 平行边的条数称为**重数**.

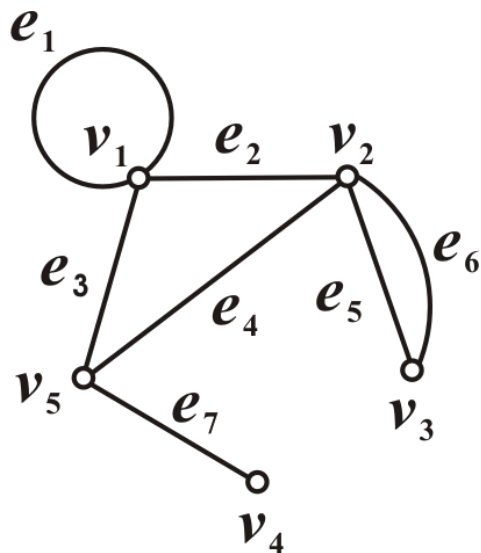
(3) 含平行边的图称为**多重图**.

(4) 既无平行边也无环的图称为**简单图**.

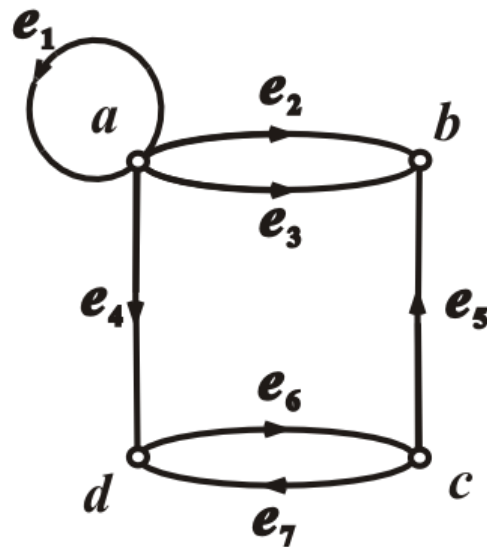
**注意:** 简单图是极其重要的概念



# 实例



$e_5$ 和 $e_6$ 是平行边  
重数为2  
不是简单图



$e_2$ 和 $e_3$ 是平行边,重数为2  
 $e_6$ 和 $e_7$ 不是平行边  
不是简单图

# 图的同构

**定义** 设 $G_1=\langle V_1, E_1 \rangle$ ,  $G_2=\langle V_2, E_2 \rangle$ 为两个无向图(有向图), 若存在双射函数 $f: V_1 \rightarrow V_2$ , 使得对于任意的 $v_i, v_j \in V_1$ ,

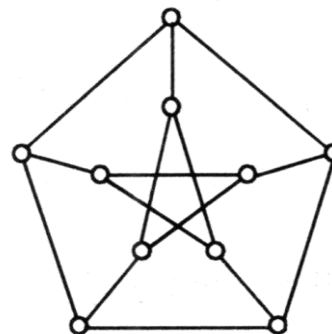
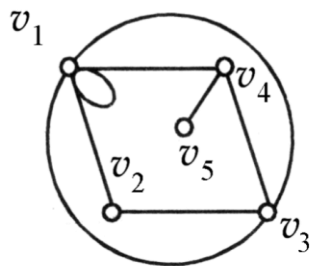
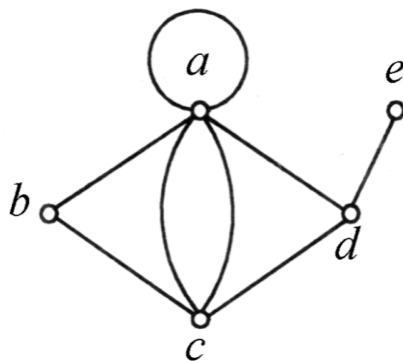
$(v_i, v_j) \in E_1$  ( $\langle v_i, v_j \rangle \in E_1$ ) 当且仅当

$(f(v_i), f(v_j)) \in E_2$  ( $\langle f(v_i), f(v_j) \rangle \in E_2$ ) ,

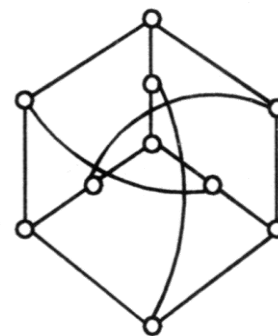
并且,  $(v_i, v_j)$  ( $\langle v_i, v_j \rangle$ ) 与  $(f(v_i), f(v_j))$  ( $\langle f(v_i), f(v_j) \rangle$ ) 的重数相同, 则称 $G_1$ 与 $G_2$ 是**同构**的, 记作 $G_1 \cong G_2$ .

# 同构实例

例1 证明下述2对图是同构的



彼得森图



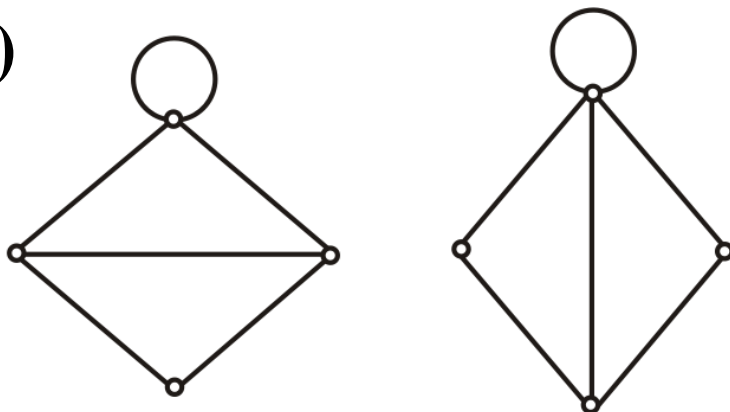
# 同构实例(续)

例2 试画出4阶3条边的所有非同构的无向简单图



例3 判断下述每一对图是否同构:

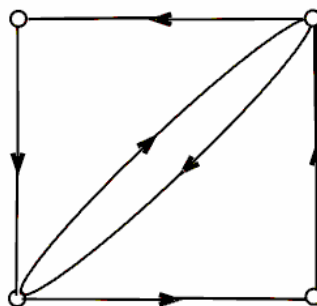
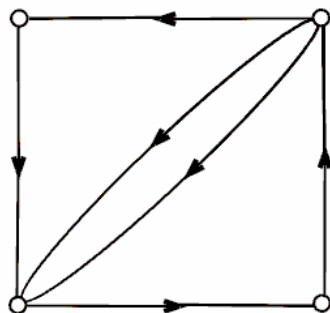
(1)



度数列不同  
不同构

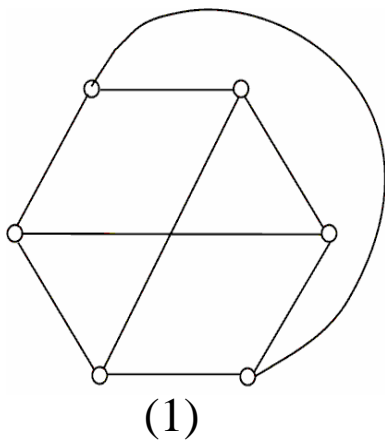
# 同构实例(续)

(2)

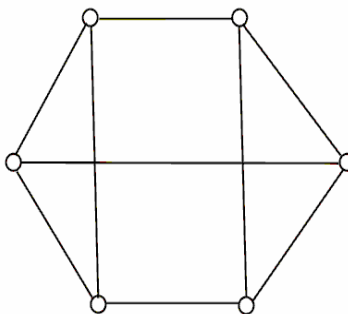


不同构  
入(出)度列不同

(3)



(1)



(2)

不同构(左边没有  
三角形,右边有三  
角形)

注意:度数列相同

# 图的同构(续)

几点说明:

图之间的同构关系具有自反性、对称性和传递性.

能找到多条同构的必要条件,但它们都不是充分条件:

① 边数相同,顶点数相同

② 度数列相同(不计度数的顺序)

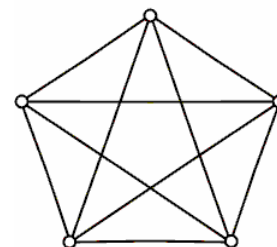
③ 对应顶点的关联集及邻域的元素个数相同,等等  
若破坏必要条件,则两图不同构

至今没有找到判断两个图同构的多项式时间算法

# 完全图

**$n$ 阶无向完全图 $K_n$** : 每个顶点都与其他顶点相邻的 $n$ 阶无向简单图.

简单性质: 边数 $m=n(n-1)/2$ ,  $\Delta=\delta=n-1$

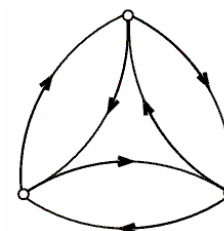


$K_5$

**$n$ 阶有向完全图**: 每对顶点之间均有两条方向相反的有向边的 $n$ 阶有向简单图.

简单性质: 边数 $m=n(n-1)$ ,  $\Delta=\delta=2(n-1)$ ,

$$\Delta^+=\delta^+=\Delta^-=\delta^-=n-1$$



3阶有向完全图

# 子图


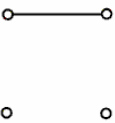
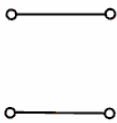
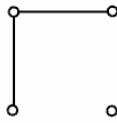
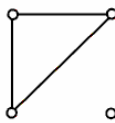
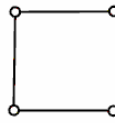
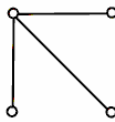
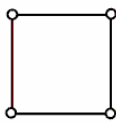
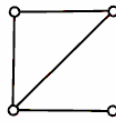
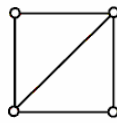
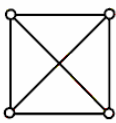
**定义** 设 $G=\langle V,E\rangle$ ,  $G'=\langle V',E'\rangle$ 是两个图

- (1) 若 $V'\subseteq V$ 且 $E'\subseteq E$ , 则称 $G'$ 为 $G$ 的**子图**,  $G$ 为 $G'$ 的**母图**, 记作 $G'\subseteq G$
- (2) 若 $G'\subseteq G$  且 $V'=V$ , 则称 $G'$ 为 $G$ 的**生成子图**
- (3) 若 $V'\subset V$  或 $E'\subset E$ , 称 $G'$ 为 $G$ 的**真子图**
- (4) 设 $V'\subseteq V$  且 $V'\neq\emptyset$ , 以 $V'$ 为顶点集, 以两端点都在 $V'$ 中的所有边为边集的 $G$ 的子图称作 **$V'$ 的导出子图**, 记作  $G[V']$
- (5) 设 $E'\subseteq E$ 且 $E'\neq\emptyset$ , 以 $E'$ 为边集, 以 $E'$ 中边关联的所有顶点为顶点集的 $G$ 的子图称作 **$E'$ 的导出子图**, 记作  $G[E']$

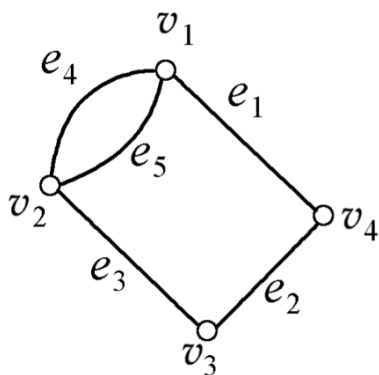


# 生成子图实例

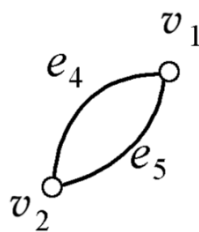
$K_4$ 的所有非同构的生成子图

| m | 0   | 1   | 2  | 3   | 4  | 5   | 6   |  |
|---|---|---|--|---|--|---|---|--|
|   |  |  | <br> | <br><br> | <br> |  |  |  |

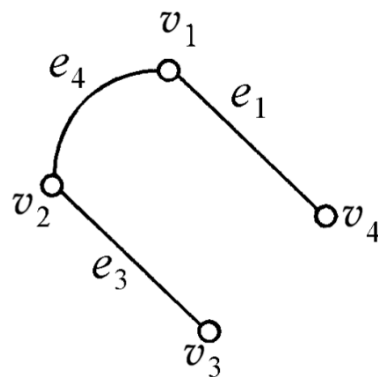
# 导出子图实例



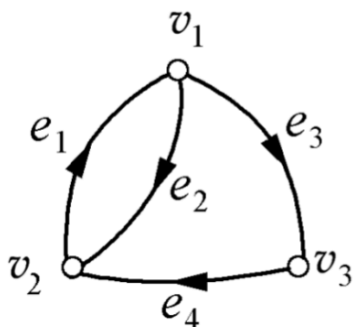
$G$



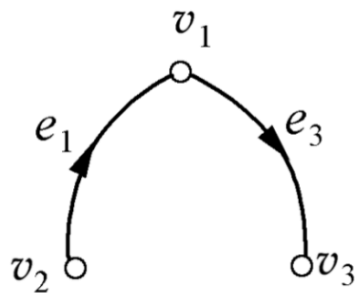
$G[\{v_1, v_2\}]$



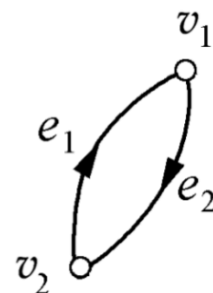
$G[\{e_1, e_3, e_4\}]$



$D$



$D[\{e_1, e_3\}]$



$D[\{v_1, v_2\}]$

# 补图

**定义** 设 $G=\langle V, E \rangle$ 为 $n$ 阶无向简单图，以 $V$ 为顶点集，所有使 $G$ 成为完全图 $K_n$ 的添加边组成的集合为边集的图，称为 $G$ 的**补图**，记作  $\overline{G}$ .

若 $G \cong \overline{G}$ ，则称 $G$ 是**自补图**.

**例** 对 $K_4$ 的所有非同构子图，指出互为补图的每一对子图，并指出哪些是自补图.