1.3 命题逻辑等值演算

- 等值式
- 基本等值式
- 等值演算
- 置换规则

等值式

定义 若等价式$A \leftrightarrow B$是重言式，则称A与B等值，记作$A \Leftrightarrow B$，并称$A \Leftrightarrow B$是等值式

说明：定义中，A,B,$\Leftrightarrow$均为元语言符号, A或B中可能有哑元出现.

例如，在 $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg p \vee q) \vee (\neg r \wedge r))$中，$r$为左边公式的哑元.

用真值表可验证两个公式是否等值

请验证：$p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r$

$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \not\Leftrightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow r$$

基本等值式

双重否定律：$\neg\neg A \Leftrightarrow A$

等幂律: $A \vee A \Leftrightarrow A$, $A \wedge A \Leftrightarrow A$

交换律: $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$, $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

结合律: $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

分配律: $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

基本等值式(续)

德·摩根律: $\neg(A\lor B)\Leftrightarrow\neg A\land\neg B$

$\neg(A\land B)\Leftrightarrow\neg A\lor\neg B$

吸收律: $A\lor(A\land B)\Leftrightarrow A$, $A\land(A\lor B)\Leftrightarrow A$

零律: $A\lor 1\Leftrightarrow 1$, $A\land 0\Leftrightarrow 0$

同一律: $A\lor 0\Leftrightarrow A$, $A\land 1\Leftrightarrow A$

排中律: $A\lor\neg A\Leftrightarrow 1$

矛盾律: $A\land\neg A\Leftrightarrow 0$

基本等值式(续)

蕴涵等值式: $A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

等价等值式: $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$

假言易位: $A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$

等价否定等值式: $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$

归谬论: $(A \to B) \wedge (A \to \neg B) \Leftrightarrow \neg A$

注意:

A,B,C代表任意的命题公式

牢记这些等值式是继续学习的基础

等值演算与置换规则

等值演算:

由已知的等值式推演出新的等值式的过程

置换规则：若$A \Leftrightarrow B$, 则$\Phi(B) \Leftrightarrow \Phi(A)$

等值演算的基础:

(1) 等值关系的性质：自反、对称、传递

(2) 基本的等值式

(3) 置换规则

应用举例——证明两个公式等值

例1 证明 $p\to(q\to r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\to r$

证 $p\to(q\to r)$

$\Leftrightarrow\neg p\vee(\neg q\vee r)$ （蕴涵等值式，置换规则）

$\Leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)\vee r$ （结合律，置换规则）

$\Leftrightarrow\neg(p\wedge q)\vee r$ （德·摩根律，置换规则）

$\Leftrightarrow(p\wedge q)\to r$ （蕴涵等值式，置换规则）

说明:也可以从右边开始演算（请做一遍）

因为每一步都用置换规则，故可不写出

熟练后，基本等值式也可以不写出

应用举例——证明两个公式不等值

例2 证明: $p\to(q\to r) \not\Leftrightarrow (p\to q)\to r$

用等值演算不能直接证明两个公式不等值,证明两个公式不等值的基本思想是找到一个赋值使一个成真,另一个成假.

方法一 真值表法（自己证）

方法二 观察赋值法. 容易看出000, 010等是左边的的成真赋值，是右边的成假赋值.

方法三 用等值演算先化简两个公式，再观察.

应用举例——判断公式类型

例3 用等值演算法判断下列公式的类型

(1) $q\wedge\neg(p\rightarrow q)$

解 $q\wedge\neg(p\rightarrow q)$

$\Leftrightarrow q\wedge\neg(\neg p\vee q)$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow q\wedge(p\wedge\neg q)$ （德·摩根律）

$\Leftrightarrow p\wedge(q\wedge\neg q)$ （交换律，结合律）

$\Leftrightarrow p\wedge 0$ （矛盾律）

$\Leftrightarrow 0$ （零律）

由最后一步可知，该式为矛盾式.

例3 (续)

(2) $(p\to q)\leftrightarrow(\neg q\to\neg p)$

解 $(p\to q)\leftrightarrow(\neg q\to\neg p)$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\leftrightarrow(q\vee\neg p)$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\leftrightarrow(\neg p\vee q)$ （交换律）

$\Leftrightarrow 1$

由最后一步可知，该式为重言式.

问：最后一步为什么等值于1？

例3 (续)

(3) $((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\wedge r)$

解 $((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\wedge r)$

$\Leftrightarrow (p\wedge(q\vee\neg q))\wedge r$ （分配律）

$\Leftrightarrow p\wedge 1\wedge r$ （排中律）

$\Leftrightarrow p\wedge r$ （同一律）

这不是矛盾式，也不是重言式，而是非重言式的可满足式. 如**101**是它的成真赋值, **000**是它的成假赋值.

总结：A为矛盾式当且仅当$A\Leftrightarrow 0$

A为重言式当且仅当$A\Leftrightarrow 1$

说明：演算步骤不惟一, 应尽量使演算短些

1.4 范式

- 析取范式与合取范式

- 主析取范式与主合取范式

析取范式与合取范式

文字:命题变项及其否定的总称

简单析取式:有限个文字构成的析取式

如 $p, \neg q, p\vee\neg q, p\vee q\vee r, \ldots$

简单合取式:有限个文字构成的合取式

如 $p, \neg q, p\wedge\neg q, p\wedge q\wedge r, \ldots$

析取范式:由有限个简单合取式组成的析取式

$A_1\vee A_2\vee\ldots\vee A_r$, 其中$A_1,A_2,\ldots,A_r$是简单合取式

合取范式:由有限个简单析取式组成的合取式

$A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_r$, 其中$A_1,A_2,\ldots,A_r$是简单析取式

析取范式与合取范式(续)

范式:析取范式与合取范式的总称

公式A的析取范式: 与A等值的析取范式

公式A的合取范式: 与A等值的合取范式

说明:

单个文字既是简单析取式，又是简单合取式

$p\wedge\neg q\wedge r$, $\neg p\vee q\vee\neg r$既是析取范式，又是合取范式

(为什么?)

命题公式的范式

定理 任何命题公式都存在着与之等值的析取范式与合取范式.

求公式A的范式的步骤:

(1) 消去A中的$\rightarrow, \leftrightarrow$（若存在）

(2) 否定联结词$\neg$的内移或消去

(3) 使用分配律

$\wedge$对$\vee$分配（析取范式）

$\vee$对$\wedge$分配（合取范式）

公式的范式存在，但不惟一

求公式的范式举例

例 求下列公式的析取范式与合取范式

(1) $A=(p\to\neg q)\vee\neg r$

解 $\quad (p\to\neg q)\vee\neg r$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\vee\neg r$ （消去$\to$）

$\Leftrightarrow \neg p\vee\neg q\vee\neg r$ （结合律）

这既是A的析取范式（由3个简单合取式组成的析取式），又是A的合取范式（由一个简单析取式组成的合取式）

求公式的范式举例(续)

(2) $B=(p\to\neg q)\to r$

解 $(p\to\neg q)\to r$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\to r$ （消去第一个→）

$\Leftrightarrow \neg(\neg p\vee\neg q)\vee r$ （消去第二个→）

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\vee r$ （否定号内移——德·摩根律）

这一步已为析取范式（两个简单合取式构成）

继续： $(p\wedge q)\vee r$

$\Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(q\vee r)$ （∨对∧分配律）

这一步得到合取范式（由两个简单析取式构成）

极小项与极大项

定义 在含有n个命题变项的简单合取式(简单析取式)中，若每个命题变项均以文字的形式出现且仅出现一次，称这样的简单合取式(简单析取式)为极小项(极大项).

说明：

- n个命题变项产生2^n个极小项和2^n个极大项
- 2^n个极小项（极大项）均互不等值
- 在极小项和极大项中文字均按下标或字母顺序排列
- 用m_i表示第i个极小项，其中i是该极小项成真赋值的十进制表示. 用M_i表示第i个极大项，其中i是该极大项成假赋值的十进制表示, $m_i(M_i)$称为极小项(极大项)的名称.
- m_i与M_i的关系：$\neg m_i \Leftrightarrow M_i$，$\neg M_i \Leftrightarrow m_i$

极小项与极大项(续)

由p, q两个命题变项形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q$	0 0	m_0	$p \vee q$	0 0	M_0
$\neg p \wedge q$	0 1	m_1	$p \vee \neg q$	0 1	M_1
$p \wedge \neg q$	1 0	m_2	$\neg p \vee q$	1 0	M_2
$p \wedge q$	1 1	m_3	$\neg p \vee \neg q$	1 1	M_3

由p, q, r三个命题变项形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	0 0 0	m_0	$p \vee q \vee r$	0 0 0	M_0
$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	0 0 1	m_1	$p \vee q \vee \neg r$	0 0 1	M_1
$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	0 1 0	m_2	$p \vee \neg q \vee r$	0 1 0	M_2
$\neg p \wedge q \wedge r$	0 1 1	m_3	$p \vee \neg q \vee \neg r$	0 1 1	M_3
$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	1 0 0	m_4	$\neg p \vee q \vee r$	1 0 0	M_4
$p \wedge \neg q \wedge r$	1 0 1	m_5	$\neg p \vee q \vee \neg r$	1 0 1	M_5
$p \wedge q \wedge \neg r$	1 1 0	m_6	$\neg p \vee \neg q \vee r$	1 1 0	M_6
$p \wedge q \wedge r$	1 1 1	m_7	$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$	1 1 1	M_7

主析取范式与主合取范式

主析取范式：由极小项构成的析取范式

主合取范式：由极大项构成的合取范式

例如，$n=3$, 命题变项为p, q, r时，

$(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r) \Leftrightarrow m_1\vee m_3$ 是主析取范式

$(p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r) \Leftrightarrow M_1\wedge M_5$ 是主合取范式

A的主析取范式：与A等值的主析取范式

A的主合取范式：与A等值的主合取范式.

主析取范式与主合取范式(续)

定理 任何命题公式都存在着与之等值的主析取范式和主合取范式, 并且是唯一的.

用等值演算法求公式的主范式的步骤:

(1) 先求析取范式（合取范式）

(2) 将不是极小项（极大项）的简单合取式（简单析取式）化成与之等值的若干个极小项的析取（极大项的合取），需要利用同一律（零律）、排中律（矛盾律）、分配律、幂等律等.

(3) 极小项（极大项）用名称 m_i（M_i）表示，并按角标从小到大顺序排序.

求公式的主范式

例 求公式 $A=(p\to\neg q)\to r$的主析取范式与主合取范式.

(1) 求主析取范式

$(p\to\neg q)\to r$

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\vee r$,　　（析取范式）　①

$(p\wedge q)$

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\wedge(\neg r\vee r)$

$\Leftrightarrow (p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_6\vee m_7$,　　②

求公式的主范式(续)

$$r$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee p) \wedge (\neg q \vee q) \wedge r$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_7 \qquad ③$$

②, ③代入①并排序，得

$(p \to \neg q) \to r \Leftrightarrow m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$（主析取范式）

求公式的主范式(续)

(2) 求A的主合取范式

$$(p\to\neg q)\to r$$

$$\Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(q\vee r)\ ,$$ （合取范式） ①

$$p\vee r$$

$$\Leftrightarrow p\vee(q\wedge\neg q)\vee r$$

$$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)$$

$$\Leftrightarrow M_0\wedge M_2,$$ ②

求公式的主范式(续)

$$q\lor r$$

$$\Leftrightarrow (p\land\neg p)\lor q\lor r$$

$$\Leftrightarrow (p\lor q\lor r)\land(\neg p\lor q\lor r)$$

$$\Leftrightarrow M_0\land M_4 \qquad ③$$

②, ③代入①并排序，得

$(p\to\neg q)\to r \Leftrightarrow M_0\land M_2\land M_4$ （主合取范式）

主范式的用途——与真值表相同

(1) 求公式的成真赋值和成假赋值

例如 $(p\rightarrow\neg q)\rightarrow r \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$,

其成真赋值为**001, 011, 101, 110, 111**,

其余的赋值 **000, 010, 100**为成假赋值.

类似地，由主合取范式也可立即求出成假赋值和成真赋值.

主范式的用途(续)

(2) 判断公式的类型

设A含n个命题变项，则

A为重言式$\Leftrightarrow$$A$的主析取范式含$2^n$个极小项

$\Leftrightarrow$$A$的主合取范式为**1.**

A为矛盾式$\Leftrightarrow$ A的主析取范式为**0**

$\Leftrightarrow$ A的主合取范式含2^n个极大项

A为非重言式的可满足式

$\Leftrightarrow$$A$的主析取范式中至少含一个且不含全部极小项

$\Leftrightarrow$$A$的主合取范式中至少含一个且不含全部极大项

主范式的用途(续)

(3) 判断两个公式是否等值

例 用主析取范式判断下述两个公式是否等值：

(1) $p\to(q\to r)$ 与 $(p\wedge q)\to r$

(2) $p\to(q\to r)$ 与 $(p\to q)\to r$

解 $p\to(q\to r) = m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

$(p\wedge q)\to r = m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

$(p\to q)\to r = m_1\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

故(1)中的两公式等值，而(2)的不等值.

说明：

由公式A的主析取范式确定它的主合取范式，反之亦然.

用公式A的真值表求A的主范式.

主范式的用途(续)

例 某公司要从赵、钱、孙、李、周五名新毕业的大学生中选派一些人出国学习. 选派必须满足以下条件:

(1)若赵去，钱也去;

(2)李、周两人中至少有一人去;

(3)钱、孙两人中有一人去且仅去一人;

(4)孙、李两人同去或同不去;

(5)若周去，则赵、钱也去.

试用主析取范式法分析该公司如何选派他们出国?

例 (续)

解此类问题的步骤为：

① 将简单命题符号化

② 写出各复合命题

③ 写出由②中复合命题组成的合取式

④ 求③中所得公式的主析取范式

例 (续)

解 ① 设p：派赵去，q：派钱去，r：派孙去，
s：派李去，u：派周去.

② (1) $(p\to q)$

(2) $(s\vee u)$

(3) $((q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r))$

(4) $((r\wedge s)\vee(\neg r\wedge\neg s))$

(5) $(u\to(p\wedge q))$

③ (1) ~ (5)构成的合取式为

$$A=(p\to q)\wedge(s\vee u)\wedge((q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r))\wedge((r\wedge s)\vee(\neg r\wedge\neg s))\wedge(u\to(p\wedge q))$$

例 (续)

④ $A \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s \wedge \neg u) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s \wedge u)$

结论：由④可知，A的成真赋值为00110与11001，因而派孙、李去（赵、钱、周不去）或派赵、钱、周去（孙、李不去）.

A的演算过程如下：

$A \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge ((q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r)) \wedge (s \vee u) \wedge (\neg u \vee (p \wedge q)) \wedge$
$((r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s))$ （交换律）

$B_1 = (\neg p \vee q) \wedge ((q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r))$

$\Leftrightarrow ((\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (q \wedge \neg r))$ （分配律）

例 (续)

$$B_2 = (s\lor u)\land(\neg u\lor(p\land q))$$

$\Leftrightarrow ((s\land\neg u)\lor(p\land q\land s)\lor(p\land q\land u))$ （分配律）

$$B_1\land B_2 \Leftrightarrow (\neg p\land q\land\neg r\land s\land\neg u)\lor(\neg p\land\neg q\land r\land s\land\neg u)$$

$$\lor(q\land\neg r\land s\land\neg u)\lor(p\land q\land\neg r\land s)\lor(p\land q\land\neg r\land u)$$

再令 $B_3 = ((r\land s)\lor(\neg r\land\neg s))$

得 $A \Leftrightarrow B_1\land B_2\land B_3$

$$\Leftrightarrow (\neg p\land\neg q\land r\land s\land\neg u)\lor(p\land q\land\neg r\land\neg s\land u)$$

注意：在以上演算中多次用矛盾律

要求：自己演算一遍