5.4 最短路径,关键路径与着色

- 带权图
- 最短路径与Dijkstra标号法
- 项目网络图与关键路径
- 着色问题

最短路径

带权图$G=<V,E,w>$, 其中$w:E\to \mathbf{R}$.

$\forall e\in E$, $w(e)$称作e的权. $e=(v_i,v_j)$, 记$w(e)=w_{ij}$. 若v_i,v_j不相邻, 记$w_{ij}=\infty$.

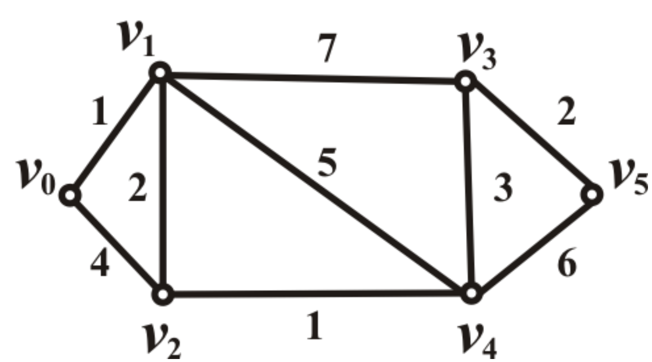
通路L的权: L的所有边的权之和, 记作$w(L)$.

u和v之间的最短路径: u和v之间权最小的通路.

例 $L_1=v_0v_1v_3v_5$, $w(L_1)=10$,

$L_2=v_0v_1v_4v_5$, $w(L_2)=12$,

$L_3=v_0v_2v_4v_5$, $w(L_3)=11$.



标号法(E.W.Dijkstra, 1959)

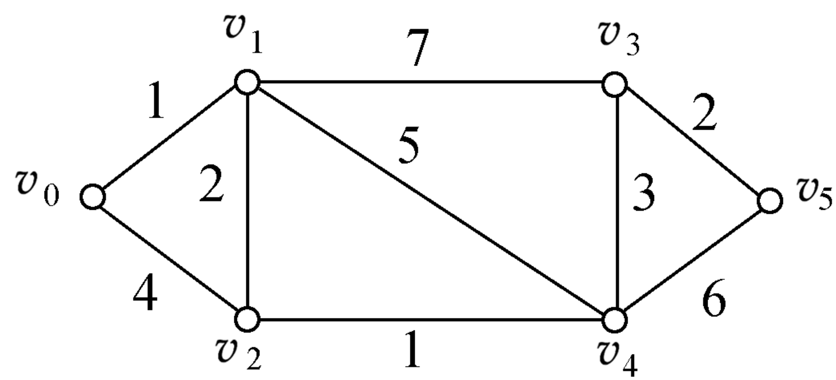
设带权图$G=<V,E,w>$, 其中$\forall e\in E$, $w(e)\geq 0$.

设$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, 求v_1到其余各顶点的最短路径

1. 令 $l_1\leftarrow 0$, $p_1\leftarrow\lambda$, $l_j\leftarrow +\infty$, $p_j\leftarrow\lambda$, $j=2,3,\ldots,n$,
   $P=\{v_1\}$, $T=V-\{v_1\}$, $k\leftarrow 1$, $t\leftarrow 1$. / λ表示空
2. 对所有的$v_j\in T$且$(v_k,v_j)\in E$
   令$l\leftarrow\min\{l_j, l_k+w_{kj}\}$,
   若$l=l_k+w_{kj}$, 则令$l_j\leftarrow l$, $p_j\leftarrow v_k$.
3. 求$l_i=\min\{l_j \mid v_j\in T_t\}$.
   令$P\leftarrow P\cup\{v_i\}$, $T\leftarrow T-\{v_i\}$, $k\leftarrow i$.
4. 令$t\leftarrow t+1$,
   若$t<n$, 则转2.

Dijkstra标号法实例

例 求v_0到v_5的最短路径



t	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
1	$(0, \lambda)^*$	$(+\infty, \lambda)$	$(+\infty, \lambda)$	$(+\infty, \lambda)$	$(+\infty, \lambda)$	$(+\infty, \lambda)$
2		$(1,v_0)^*$	$(4,v_0)$	$(+\infty, \lambda)$	$(+\infty, \lambda)$	$(+\infty, \lambda)$
3			$(3,v_1)^*$	$(8,v_1)$	$(6,v_1)$	$(+\infty, \lambda)$
4				$(8,v_1)$	$(4,v_2)^*$	$(+\infty, \lambda)$
5				$(7,v_4)^*$		$(10,v_4)$
6						$(9,v_3)^*$

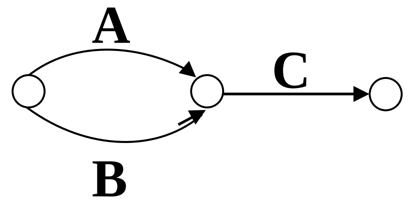
v_0到v_5的最短路径: $v_0v_1v_2v_4v_3v_5$， $d(v_0,v_5)=9$

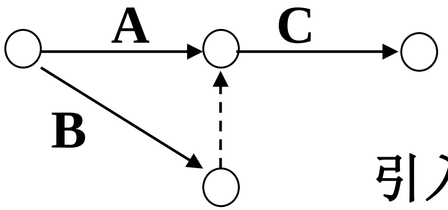
项目网络图

项目网络图: 表示项目的活动之间前后顺序一致的带权有向图. 边表示活动, 边的权是活动的完成时间,顶点表示事项(项目的开始和结束、活动的开始和结束).

要求: (1) 有一个始点(入度为0)和一个终点(出度为0).

(2) 任意两点之间只能有一条边.





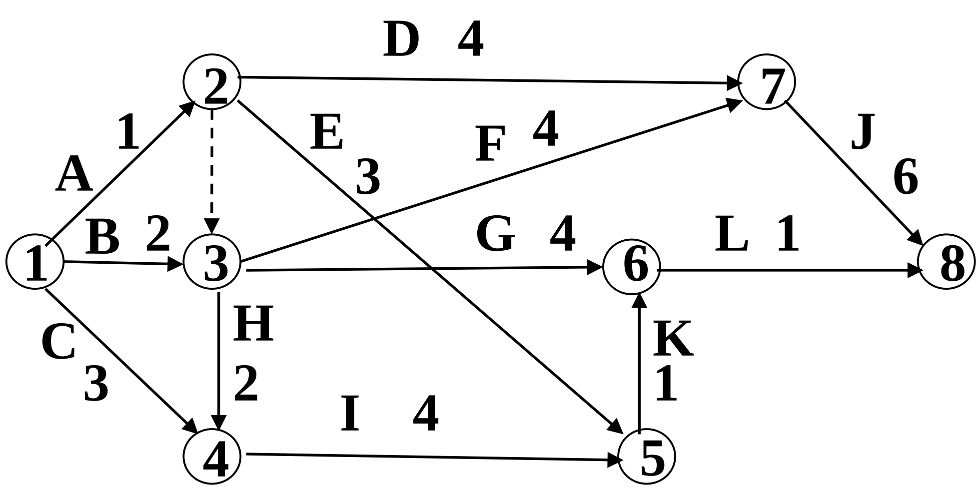
引入虚活动

(3) 没有回路.

(4) 每一条边始点的编号小于终点的编号.

例

活动	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
紧前活动	–	–	–	A	A	A,B	A,B	A,B	C,H	D,F	E,I	G,K
时间(天)	1	2	3	4	3	4	4	2	4	6	1	1



关键路径

关键路径: 项目网络图中从始点到终点的最长路径

关键活动: 关键路径上的活动

设$D=\langle V,E,W\rangle$, $V=\{1,2,\ldots,n\}$, 1是始点, n是终点.

(1)事项i的最早完成时间$ES(v_i)$: i最早可能开始的时间, 即从始点到i的最长路径的长度.

$$ES(1)=0$$

$$ES(i)=\max\{ES(j)+w_{ji} \mid \langle j,i\rangle \in E\},\quad i=2,3,\ldots,n$$

(2)事项i的最晚完成时间$LF(i)$: 在不影响项目工期的条件下, 事项i最晚必须完成的时间.

$$LF(n)=ES(n)$$

$$LF(i)=\min\{LF(j)-w_{ij} \mid \langle i,j\rangle \in E\},\quad i=n-1,n-2,\ldots,1$$

关键路径(续)

(3) 活动<*i,j*>的最早开始时间*ES*(*i,j*): <*i,j*>最早可能开始时间.

(4) 活动<*i,j*>的最早完成时间*EF*(*i,j*): <*i,j*>最早可能完成时间.

(5) 活动<*i,j*>的最晚开始时间*ES*(*i,j*): 在不影响项目工期的条件下, <*i,j*>最晚必须开始的时间.

(6) 活动<*i,j*>的最晚完成时间*ES*(*i,j*): 在不影响项目工期的条件下, <*i,j*>最晚必须完成的时间.

(7) 活动<*i,j*>的缓冲时间*SL*(*i,j*):

$$SL(i,j)= LS(i,j)-ES(i,j)=LF(i,j)-EF(i,j)$$

显然, $ES(i,j)= ES(i)$, $EF(i,j)= ES(i)+w_{ij}$,

$LF(i,j)=LF(j)$, $LS(i,j)=LF(j)-w_{ij}$,

例(续)

事项的最早开始时间

$TE(1)=0$

$TE(2)=\max\{0+1\}=1$

$TE(3)=\max\{0+2,1+0\}=2$

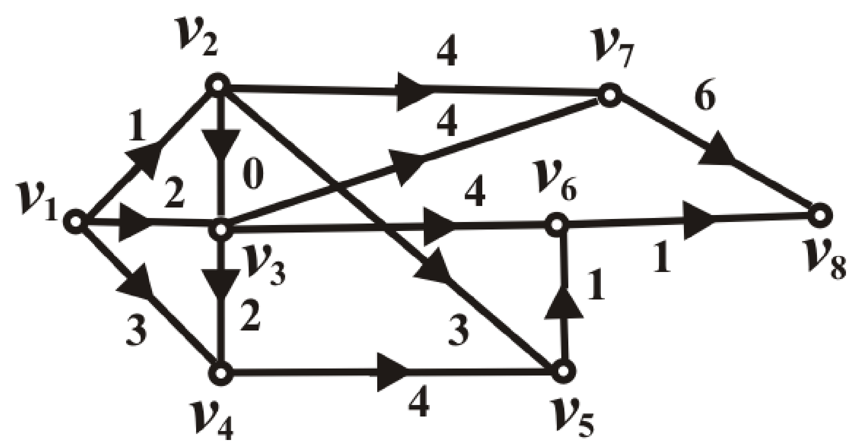
$TE(4)=\max\{0+3,2+2\}=4$

$TE(5)=\max\{1+3,4+4\}=8$

$TE(6)=\max\{2+4,8+1\}=9$

$TE(7)=\max\{1+4,2+4\}=6$

$TE(8)=\max\{9+1,6+6\}=12$



例(续)

事项的最晚完成时间

$TL(8)=12$

$TL(7)=\min\{12-6\}=6$

$TL(6)=\min\{12-1\}=11$

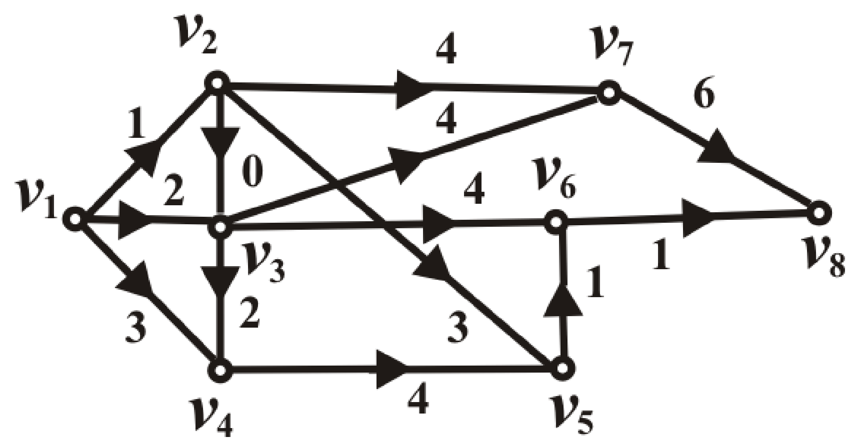
$TL(5)=\min\{11-1\}=10$

$TL(4)=\min\{10-4\}=6$

$TL(3)=\min\{6-2,11-4,6-4\}=2$

$TL(2)=\min\{2-0,10-3,6-4\}=2$

$TL(1)=\min\{2-1,2-2,6-3\}=0$



例(续)

活动	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
ES	0	0	0	1	1	2	2	2	4	6	8	9
EF	1	2	3	5	4	6	6	4	8	12	9	10
LS	1	0	3	2	7	2	7	4	6	6	10	11
LF	2	2	6	6	10	6	11	6	10	12	11	12
SL	1	0	3	1	6	0	5	2	2	0	2	2

总工期:12天

关键路径: $v_1v_3v_7v_8$　　　**关键活动: B,F,J**