

4.6 函数的定义与性质

- 函数的定义

- ☐ 函数定义
- ☐ 从 A 到 B 的函数
- ☐ 函数的像

- 函数的性质

- ☐ 函数的单射、满射、双射性
- ☐ 构造双射函数

- 应用实例：问题描述

函数定义

定义 设 F 为二元关系, 若 $\forall x \in \text{dom}F$ 都存在唯一的 $y \in \text{ran}F$ 使 xFy 成立, 则称 F 为**函数**.
对于函数 F , 如果有 xFy , 则记作 $y=F(x)$, 并称 y 为 F 在 x 的**值**.

例1 $F_1 = \{ \langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle, \langle x_3, y_2 \rangle \}$

$$F_2 = \{ \langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_1, y_2 \rangle \}$$

F_1 是函数, F_2 不是函数

函数相等

定义 设 F, G 为函数, 则

$$F = G \Leftrightarrow F \subseteq G \wedge G \subseteq F$$

如果两个函数 F 和 G 相等, 一定满足下面两个条件:

(1) $\text{dom}F = \text{dom}G$

(2) $\forall x \in \text{dom}F = \text{dom}G$ 都有 $F(x) = G(x)$

实例 函数

$$F(x) = (x^2 - 1)/(x + 1), G(x) = x - 1$$

不相等, 因为 $\text{dom}F \subset \text{dom}G$.

从 A 到 B 的函数

定义 设 A, B 为集合, 如果
 f 为函数

$$\text{dom}f = A$$

$$\text{ran}f \subseteq B,$$

则称 f 为从 A 到 B 的函数, 记作 $f: A \rightarrow B$.

实例

$f: N \rightarrow N, f(x)=2x$ 是从 N 到 N 的函数

$g: N \rightarrow N, g(x)=2$ 也是从 N 到 N 的函数

B 上 A

定义 所有从 A 到 B 的函数的集合记作 B^A ,
读作 “ B 上 A ”, 符号化表示为

$$B^A = \{ f \mid f: A \rightarrow B \}$$

计数:

$$|A|=m, |B|=n, \text{ 且 } m, n > 0, |B^A|=n^m.$$

$$A=\emptyset, \text{ 则 } B^A=B^\emptyset=\{\emptyset\}.$$

$$A \neq \emptyset \text{ 且 } B=\emptyset, \text{ 则 } B^A=\emptyset^A=\emptyset.$$

实例

例2 设 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, 求 B^A .

解 $B^A = \{f_0, f_1, \dots, f_7\}$, 其中

$$f_0 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, a \rangle\}, \quad f_1 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, b \rangle\}$$

$$f_2 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, a \rangle\}, \quad f_3 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, b \rangle\}$$

$$f_4 = \{\langle 1, b \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, a \rangle\}, \quad f_5 = \{\langle 1, b \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, b \rangle\}$$

$$f_6 = \{\langle 1, b \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, a \rangle\}, \quad f_7 = \{\langle 1, b \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, b \rangle\}$$

函数的像

定义 设函数 $f: A \rightarrow B, A_1 \subseteq A$.

A_1 在 f 下的像: $f(A_1) = \{ f(x) \mid x \in A_1 \}$

函数的像 $f(A)$

注意: 函数值 $f(x) \in B$, 而像 $f(A_1) \subseteq B$.

例3 设 $f: N \rightarrow N$, 且 $f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{若 } x \text{ 为偶数} \\ x+1 & \text{若 } x \text{ 为奇数} \end{cases}$

令 $A = \{0, 1\}$, $B = \{2\}$, 那么有

$$f(A) = f(\{0, 1\}) = \{ f(0), f(1) \} = \{0, 2\}$$

函数的性质

定义 设 $f: A \rightarrow B$,

(1) 若 $\text{ran}f = B$, 则称 $f: A \rightarrow B$ 是**满射**的.

(2) 若 $\forall y \in \text{ran}f$ 都存在唯一的 $x \in A$ 使得 $f(x)=y$,
则称 $f: A \rightarrow B$ 是**单射**的.

(3) 若 $f: A \rightarrow B$ 既是满射又是单射的, 则称 $f: A \rightarrow B$ 是**双射**的

f 满射意味着: $\forall y \in B$, 都存在 $x \in A$ 使得 $f(x) = y$.

f 单射意味着: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

实例

例4

判断下面函数是否为单射, 满射, 双射的, 为什么?

(1) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = -x^2 + 2x - 1$

(2) $f: \mathbf{Z}^+ \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \ln x, \mathbf{Z}^+$ 为正整数集

(3) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Z}, f(x) = \lfloor x \rfloor$

(4) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 2x + 1$

(5) $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+, f(x) = (x^2 + 1)/x$, 其中 \mathbf{R}^+ 为正实数集.

实例（续）

解 (1) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = -x^2 + 2x - 1$

在 $x=1$ 取得极大值 0. 既不单射也不满射.

(2) $f: \mathbf{Z}^+ \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \ln x$

单调上升, 是单射. 但不满射, $\text{ran} f = \{\ln 1, \ln 2, \dots\}$.

(3) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{Z}, f(x) = \lfloor x \rfloor$

满射, 但不单射, 例如 $f(1.5) = f(1.2) = 1$.

(4) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 2x + 1$

满射、单射、双射, 因为它是单调的并且 $\text{ran} f = \mathbf{R}$.

(5) $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+, f(x) = (x^2 + 1)/x$

有极小值 $f(1) = 2$. 该函数既不单射也不满射.

构造从A到B的双射函数

有穷集之间的构造

例5 $A=P(\{1,2,3\})$, $B=\{0,1\}^{\{1,2,3\}}$

解 $A=\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

$B=\{f_0, f_1, \dots, f_7\}$, 其中

$f_0=\{<1,0>, <2,0>, <3,0>\}$, $f_1=\{<1,0>, <2,0>, <3,1>\}$,

$f_2=\{<1,0>, <2,1>, <3,0>\}$, $f_3=\{<1,0>, <2,1>, <3,1>\}$,

$f_4=\{<1,1>, <2,0>, <3,0>\}$, $f_5=\{<1,1>, <2,0>, <3,1>\}$,

$f_6=\{<1,1>, <2,1>, <3,0>\}$, $f_7=\{<1,1>, <2,1>, <3,1>\}$.

令 $f: A \rightarrow B$,

$f(\emptyset)=f_0$, $f(\{1\})=f_1$, $f(\{2\})=f_2$, $f(\{3\})=f_3$,

$f(\{1,2\})=f_4$, $f(\{1,3\})=f_5$, $f(\{2,3\})=f_6$, $f(\{1,2,3\})=f_7$

构造从A到B的双射函数（续）

实数区间之间构造双射

构造方法：直线方程

例6 $A=[0,1]$

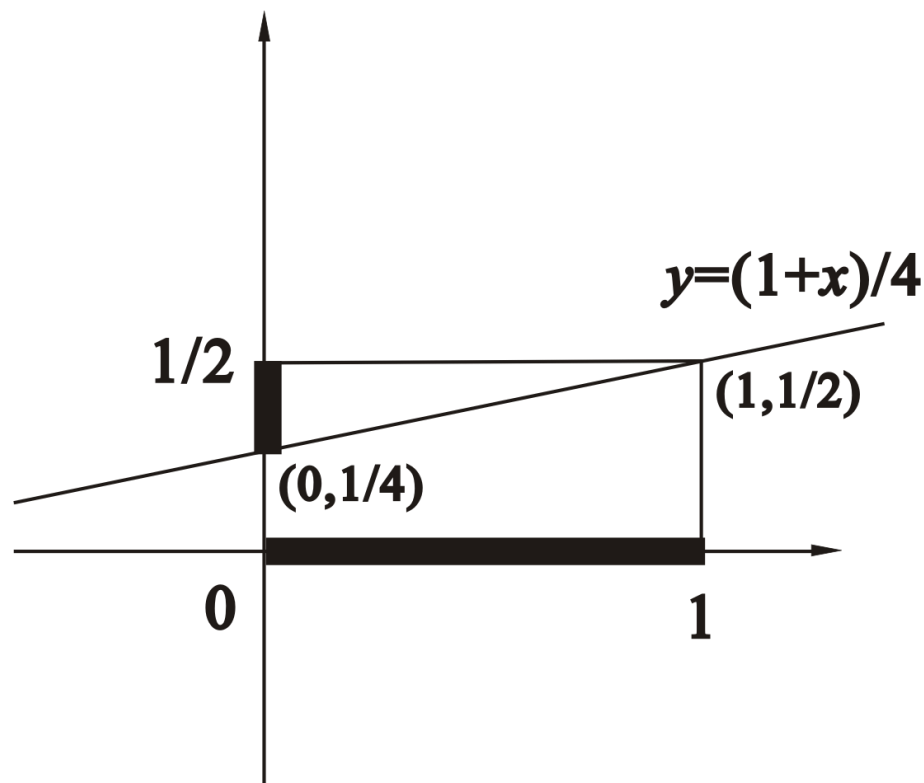
$B=[1/4,1/2]$

构造双射 $f:A \rightarrow B$

解

令 $f: [0,1] \rightarrow [1/4,1/2]$

$$f(x)=(x+1)/4$$



构造从A到B的双射函数（续）

A与自然数集合之间构造双射

方法：将A中元素排成有序图形，然后从第一个元素开始按照次序与自然数对应

例7 $A=\mathbb{Z}, B=\mathbb{N}$ ，构造双射 $f: A \rightarrow B$

将 \mathbb{Z} 中元素以下列顺序排列并与 \mathbb{N} 中元素对应：

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z}: & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & \dots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \mathbb{N}: & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \end{array}$$

则这种对应所表示的函数是：

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x-1 & x < 0 \end{cases}$$

常函数、恒等函数、单调函数

1. 设 $f: A \rightarrow B$, 若存在 $c \in B$ 使得 $\forall x \in A$ 都有 $f(x)=c$, 则称 $f: A \rightarrow B$ 是常函数.
2. 称 A 上的恒等关系 I_A 为 A 上的恒等函数, 对所有的 $x \in A$ 都有 $I_A(x)=x$.
3. 设 $f: R \rightarrow R$, 如果对任意的 $x_1, x_2 \in R$, $x_1 < x_2$, 就有 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 则称 f 为单调递增的; 如果对任意的 $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$, 就有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 f 为严格单调递增的.
类似可以定义单调递减 和 严格单调递减 的函数.

集合的特征函数

4. 设 A 为集合, $\forall A' \subseteq A$, A' 的特征函数

$\chi_{A'}: A \rightarrow \{0,1\}$ 定义为

$$\chi_{A'}(a) = \begin{cases} 1, & a \in A' \\ 0, & a \in A - A' \end{cases}$$

实例 集合: $X = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$,

子集: $T = \{A, C, F, G, H\}$

T 的特征函数 χ_T :

x	A	B	C	D	E	F	G	H
$\chi_T(x)$	1	0	1	0	0	1	1	1

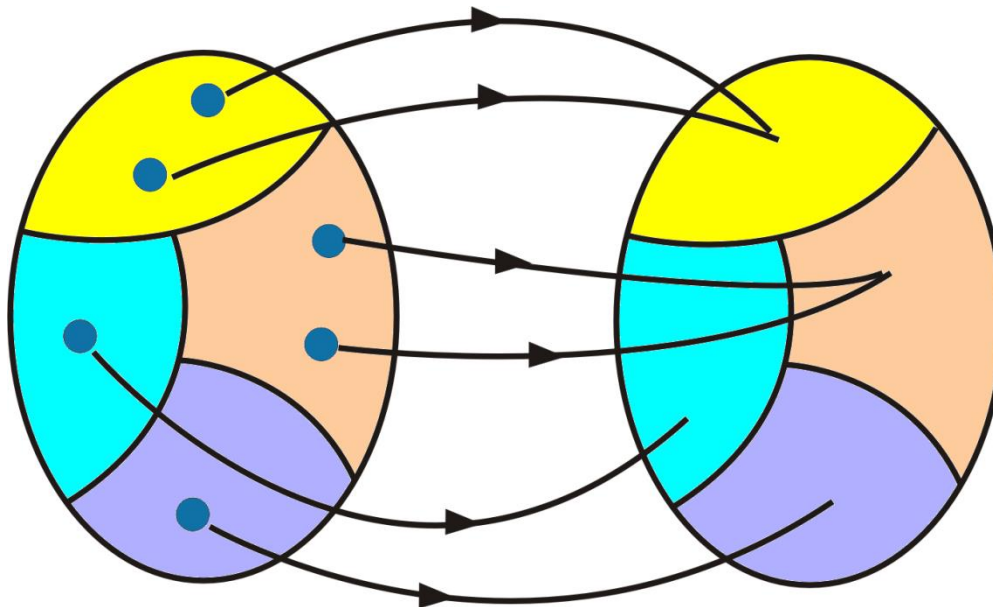
自然映射

5. 设 R 是 A 上的等价关系, 令

$$g: A \rightarrow A/R$$

$$g(a) = [a], \forall a \in A$$

称 g 是从 A 到商集 A/R 的**自然映射**.



实例

例8 (1) A 的每一个子集 A' 都对应于一个特征函数, 不同的子集对应于不同的特征函数. 例如 $A=\{a, b, c\}$, 则有

$$\chi_{\emptyset} = \{ \langle a, 0 \rangle, \langle b, 0 \rangle, \langle c, 0 \rangle \},$$

$$\chi_{\{a, b\}} = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 0 \rangle \}$$

(2) 给定集合 A , A 上不同的等价关系确定不同的自然映射, 其中恒等关系确定的自然映射是双射, 其他的自然映射一般来说是满射. 例如

$$A=\{1, 2, 3\}, R=\{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\} \cup I_A$$

$$g(1) = g(2) = \{1, 2\}, g(3) = \{3\}$$

4.7 函数的复合与反函数

■ 函数的复合

- 函数复合的定理
- 函数复合的性质

■ 反函数

- 反函数存在的条件
- 反函数的性质

函数复合的定理

定理 设 F, G 是函数, 则 $F \circ G$ 也是函数, 且满足

(1) $\text{dom}(F \circ G) = \{ x \mid x \in \text{dom} G \wedge G(x) \in \text{dom} F \}$

(2) $\forall x \in \text{dom}(F \circ G)$ 有 $F \circ G(x) = F(G(x))$

推论1 设 F, G, H 为函数, 则 $(F \circ G) \circ H$ 和 $F \circ (G \circ H)$ 都是函数, 且 $(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$

推论2 设 $f: B \rightarrow C, g: A \rightarrow B$, 则 $f \circ g: A \rightarrow C$, 且 $\forall x \in A$ 都有 $f \circ g(x) = f(g(x))$.

函数复合运算的性质

定理 设 $f: B \rightarrow C, g: A \rightarrow B$.

(1) 如果 $f: B \rightarrow C, g: A \rightarrow B$ 都是满射的, 则 $f \circ g: A \rightarrow C$ 也是满射的.

(2) 如果 $f: B \rightarrow C, g: A \rightarrow B$ 都是单射的, 则 $f \circ g: A \rightarrow C$ 也是单射的.

(3) 如果 $f: B \rightarrow C, g: A \rightarrow B$ 都是双射的, 则 $f \circ g: A \rightarrow C$ 也是双射的.

证 (1) $\forall c \in C$, 由 $f: B \rightarrow C$ 的满射性, $\exists b \in B$ 使得 $f(b)=c$. 对这个 b , 由 $g: A \rightarrow B$ 的满射性, $\exists a \in A$ 使得 $g(a)=b$. 由合成定理有 $f \circ g(a)=f(g(a))=f(b)=c$ 从而证明了 $f \circ g: A \rightarrow C$ 是满射的.

函数复合运算的性质

(2) 假设存在 $x_1, x_2 \in A$ 使得 $f \circ g(x_1) = f \circ g(x_2)$

由合成定理有 $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$.

因为 $f: A \rightarrow B$ 是单射的, 故 $g(x_1) = g(x_2)$. 又由于 $g: A \rightarrow B$ 也是单射的, 所以 $x_1 = x_2$. 从而证明 $f \circ g: A \rightarrow C$ 是单射的.

(3) 由 (1) 和 (2) 得证.

定理 设 $f: A \rightarrow B$, 则

$$f = f \circ I_A = I_B \circ f$$

反函数存在的条件

任给函数 F , 它的逆 F^{-1} 不一定是函数, 是二元关系.

实例: $F = \{ \langle a, b \rangle, \langle c, b \rangle \}$, $F^{-1} = \{ \langle b, a \rangle, \langle b, c \rangle \}$

任给单射函数 $f: A \rightarrow B$, 则 f^{-1} 是函数, 且是从 $\text{ran}f$ 到 A 的双射函数, 但不一定是从 B 到 A 的双射函数.

实例: $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = 2x$,
 $f^{-1}: \text{ran}f \rightarrow \mathbb{N}, f^{-1}(x) = x/2$

反函数

定理 设 $f: A \rightarrow B$ 是双射的, 则 $f^{-1}: B \rightarrow A$ 也是双射的.

证 因为 f 是函数, 所以 f^{-1} 是关系, 且

$$\text{dom } f^{-1} = \text{ran } f = B, \quad \text{ran } f^{-1} = \text{dom } f = A,$$

对于任意的 $y \in B = \text{dom } f^{-1}$, 假设有 $x_1, x_2 \in A$ 使得

$$\langle y, x_1 \rangle \in f^{-1} \wedge \langle y, x_2 \rangle \in f^{-1}$$

成立, 则由逆的定义有

$$\langle x_1, y \rangle \in f \wedge \langle x_2, y \rangle \in f$$

根据 f 的单射性可得 $x_1 = x_2$, 从而证明了 f^{-1} 是函数, 且是满射的. 下面证明 f^{-1} 的单射性.

若存在 $y_1, y_2 \in B$ 使得 $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) = x$, 从而有

$$\langle y_1, x \rangle \in f^{-1} \wedge \langle y_2, x \rangle \in f^{-1}$$

$$\Rightarrow \langle x, y_1 \rangle \in f \wedge \langle x, y_2 \rangle \in f \Rightarrow y_1 = y_2$$

反函数的定义及性质

对于双射函数 $f: A \rightarrow B$, 称 $f^{-1}: B \rightarrow A$ 是它的反函数.

反函数的性质

定理 设 $f: A \rightarrow B$ 是双射的, 则

$$f^{-1} \circ f = I_A, \quad f \circ f^{-1} = I_B$$

对于双射函数 $f: A \rightarrow A$, 有

$$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = I_A$$

函数复合与反函数的计算

例 设 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 3 \\ -2 & x < 3 \end{cases}$$

$$g(x) = x + 2$$

求 $f \circ g, g \circ f$. 如果 f 和 g 存在反函数, 求出它们的反函数.

解 $f \circ g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$g \circ f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$f \circ g(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & x \geq 1 \\ -2 & x < 1 \end{cases}$$

$$g \circ f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x \geq 3 \\ 0 & x < 3 \end{cases}$$

$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 不是双射的, 不存在反函数. $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 是双射的, 它的反函数是 $g^{-1}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g^{-1}(x) = x - 2$

问题描述——多机调度

问题：

有2台机器 c_1, c_2 ；

6项任务 t_1, t_2, \dots, t_6 . 每项任务的加工时间分别为：

$$l(t_1)=l(t_3)=l(t_5)=l(t_6)=1, l(t_2)=l(t_4)=2$$

任务之间的顺序约束是：

任务 t_3 只有在 t_6 和 t_5 完成之后才能开始加工；

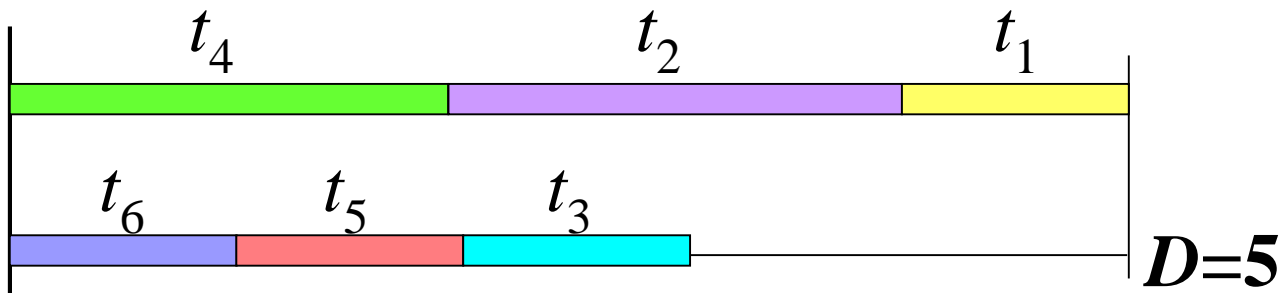
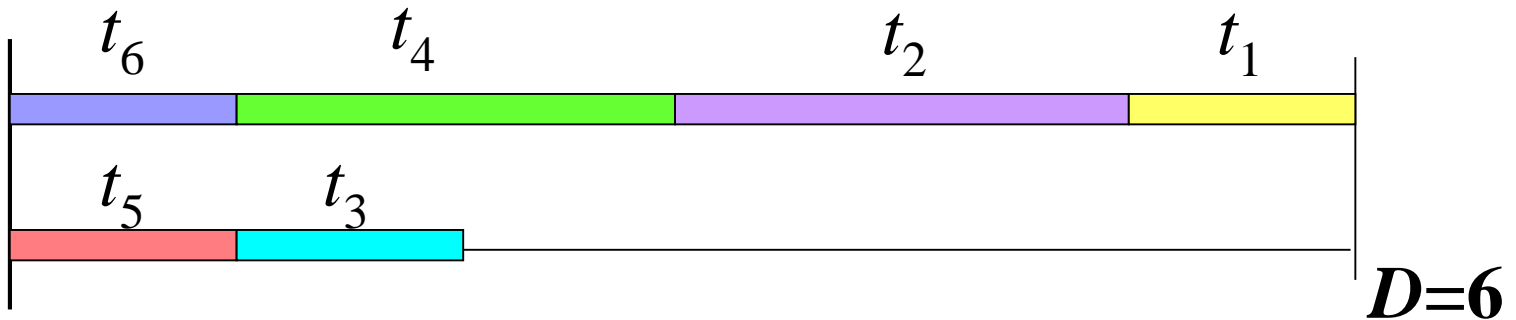
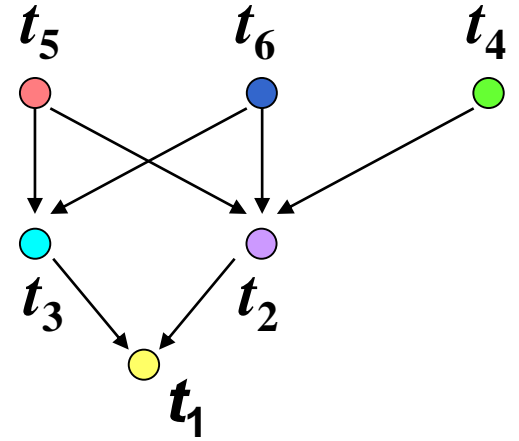
任务 t_2 只有在 t_6, t_5 和 t_4 都完成后才能开始加工；

任务 t_1 只有在 t_3 和 t_2 完成之后才能开始加工。

调度：任务安排在机器上加工的方案

截止时间：开始时刻0，最后停止加工机器的停机时刻

两个调度方案



问题描述

■ 集合

任务集 $T=\{t_1, t_2, \dots, t_n\}, n \in \mathbb{Z}^+$

机器集 $M=\{c_1, c_2, \dots, c_m\}, m \in \mathbb{Z}^+$

时间集 \mathbb{N}

■ 函数和关系

加工时间——函数 $l:T \rightarrow \mathbb{Z}^+$.

顺序约束 R —— T 上的偏序关系, 定义为

$$R=\{\langle t_i, t_j \rangle \mid t_i, t_j \in T, i=j \text{ 或 } t_i \text{ 完成后 } t_j \text{ 才可以开始加工}\}$$

问题描述（续）

■ 可行调度

□ 分配到机器:

T 的 **划分** $\pi = \{T_1, T_2, \dots, T_m\}$, 划分块 T_j 是 T 的非空子集, 由安排在机器 c_j 上加工的所有任务组成.

□ 每个机器上的任务开始时间

$\forall T_j \in \pi$, 存在 **调度函数** $\sigma_j: T_j \rightarrow \mathbb{N}$, 满足以下条件:

(1) 任意时刻 i , 每台机器上正在加工至多1个任务

$$\forall i, 0 \leq i < D,$$

$$|\{t_k \mid t_k \in T_j, \sigma_j(t_k) \leq i < \sigma_j(t_k) + l(t_k)\}| \leq 1, j=1, 2, \dots, m$$

(2) 任务的安排满足偏序约束

$$\forall t_i \in T_i, t_j \in T_j, \langle t_i, t_j \rangle \in R \Leftrightarrow \sigma_i(t_i) + l(t_i) \leq \sigma_j(t_j) \quad i, j=1, 2, \dots, m$$

问题描述（续）

机器 j 的停止时间

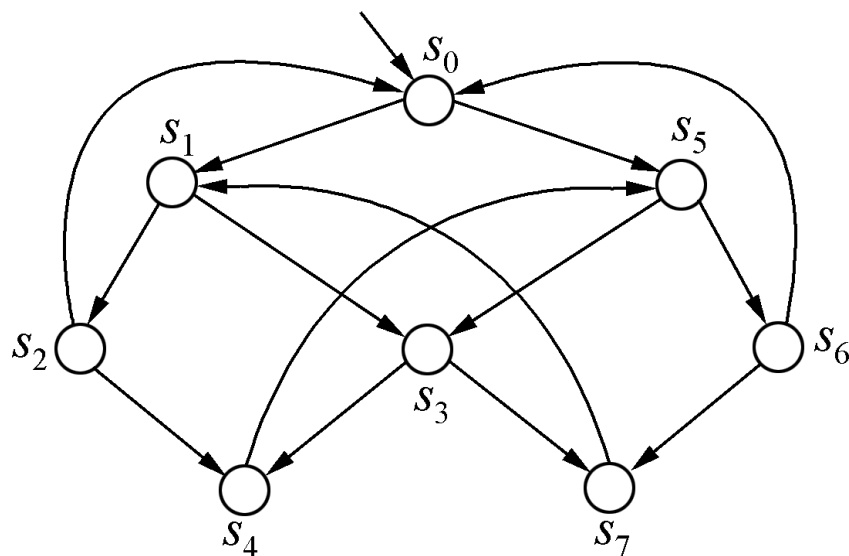
$$D_j = \max\{\sigma_j(t_k) \mid t_k \in T_j\} + l(t_k)$$

所有任务的截止时间

$$D = \max\{D_j \mid j=1,2,\dots,m\}.$$

我们的问题就是确定使得 D 达到最小的可行调度.

资源共享协议描述



闲置状态 i
请求状态 r
访问状态 w

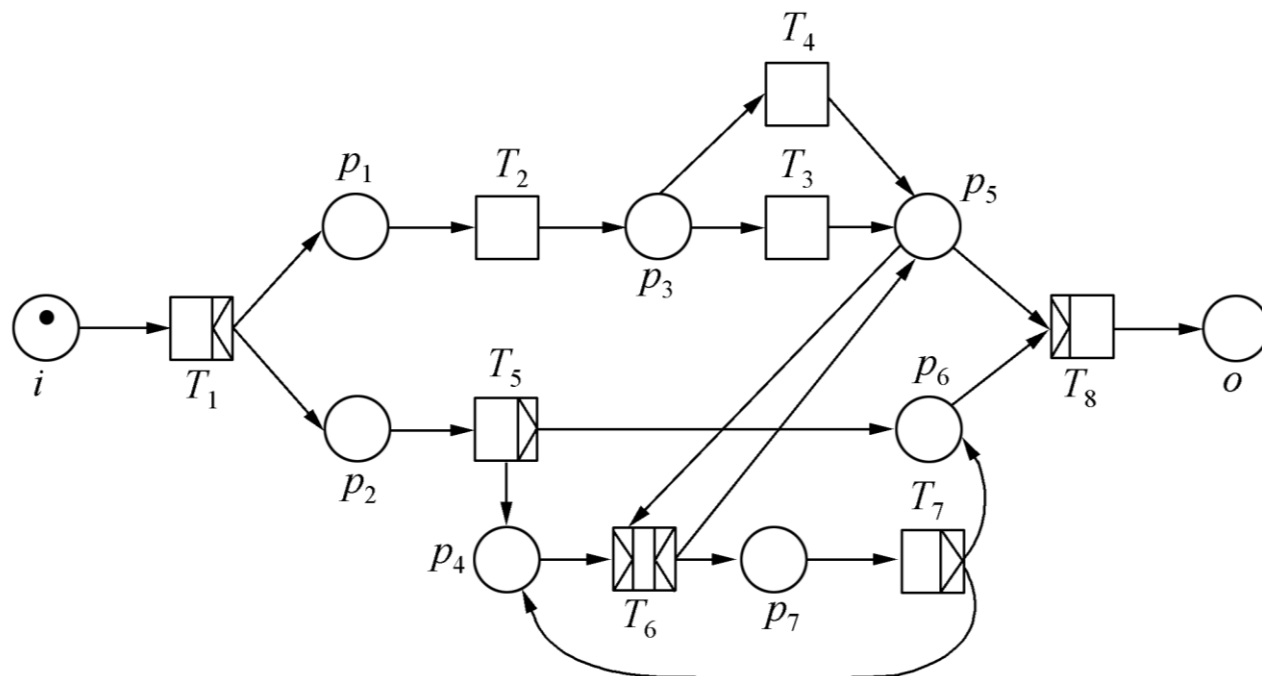
$$\begin{aligned} s_0 &= \langle i_1, i_2 \rangle, & s_1 &= \langle r_1, i_2 \rangle, \\ s_2 &= \langle w_1, i_2 \rangle, & s_3 &= \langle r_1, r_2 \rangle, \\ s_4 &= \langle w_1, r_2 \rangle, & s_5 &= \langle i_1, r_2 \rangle, \\ s_6 &= \langle i_1, w_2 \rangle, & s_7 &= \langle r_1, w_2 \rangle, \end{aligned}$$

$$S = \{i_1, r_1, w_1\} \times \{i_2, r_2, w_2\} - \{\langle w_1, w_2 \rangle\} = \{s_0, s_1, \dots, s_7\}$$

安全性: $\neg(w_1 \wedge w_2)$, 任何时刻至多一个进程访问资源.

活性: $r_1 \rightarrow \Diamond w_1$, 任何进程对资源的需求总会满足

投诉处理流程描述



T_1 : 登记;

T_2 : 寄出调查表;

T_3 : 调查表处理;

T_4 : 过期处理;

T_5 : 投诉评估;

T_6 : 处理投诉;

T_7 : 检查处理结果;

T_8 : 归档保存.

形式化描述

WF_net是三元组 (P,T,F) ，其中 P 是库所集合， T 是变迁集合， F 称为流关系。满足以下条件：

(1) $P \cap T = \emptyset$;

(2) $P \cup T \neq \emptyset$;

(3) $F \subseteq P \times T \cup T \times P$;

(4) $\text{dom}F \cup \text{ran}F = P \cup T$ ，其中

$$\text{dom}F = \{x \mid \exists y (<x,y> \in F)\}, \quad \text{ran}F = \{y \mid \exists x (<x,y> \in F)\};$$

(5) 存在起始库所 $i \in P$ ， $\bullet i = \emptyset$ ， $\bullet i = \{j \mid <j,i> \in F\}$ 称为 i 的前集；

(6) 存在终止库所 $o \in P$ ， $o^\bullet = \emptyset$ ， $o^\bullet = \{j \mid <o,j> \in F\}$ 称为 o 的后集；

(7) 每个结点 $x \in P \cup T$ ，都处在从 i 到 o 的一条路径上。