第2章 一阶逻辑

2.1 一阶逻辑基本概念

2.2 一阶逻辑合式公式及解释

2.3 一阶逻辑等值式与前束范式

2.1 一阶逻辑基本概念

- 个体词
- 谓词
- 量词
- 一阶逻辑中命题符号化

命题逻辑的局限性

苏格拉底三段论：

凡是人都要死的.

苏格拉底是人.

所以苏格拉底是要死的.

在命题逻辑中，只能用p、q、r表示以上3个命题，

上述推理可表成 $(p \wedge q) \rightarrow r$ ，

这不是重言式。

基本概念——个体词、谓词、量词

个体词（个体）：所研究对象中可以独立存在的具体或抽象的客体

个体常项：具体的事物，用a, b, c表示

个体变项：抽象的事物，用x, y, z表示

个体域：个体变项的取值范围

有限个体域，如$\{a, b, c\}, \{1, 2\}$

无限个体域，如**N, Z, R, …**

全总个体域：宇宙间一切事物组成

基本概念 (续)

谓词: 表示个体词性质或相互之间关系的词

谓词常项：$F(x)$：x是人

谓词变项：$F(x)$：x具有性质F

一元谓词: 表示事物的性质

多元谓词(n元谓词, $n\geq2$): 表示事物之间的关系

如 $L(x,y)$：x与y有关系L，$L(x,y)$：$x\geq y$，…

0元谓词: 不含个体变项的谓词, 即命题常项或命题变项。

基本概念(续)

量词: 表示数量的词

- 全称量词∀: 表示任意的, 所有的, 一切的等
  - 如 $\forall x$ 表示对个体域中所有的x
- 存在量词∃: 表示存在, 有的, 至少有一个等
  - 如 $\exists x$ 表示在个体域中存在x

一阶逻辑中命题符号化

例 用**0**元谓词将命题符号化

要求：先将它们在命题逻辑中符号化，再在一阶逻辑中符号化。

(1) 墨西哥位于南美洲

在命题逻辑中, 设 p: 墨西哥位于南美洲

符号化为 p

在一阶逻辑中，设a：墨西哥，$F(x)$：x位于南美洲，符号化为$F(a)$。

例(续)

(2)$\sqrt{2}$ 是无理数仅当 $\sqrt{3}$是有理数。

在命题逻辑中，设 p:$\sqrt{2}$ 是无理数，q: $\sqrt{3}$ 是有理数.

符号化为 $p \rightarrow q$。

在一阶逻辑中, 设$F(x)$: x是无理数, $G(x)$: x是有理数，

符号化为 $\mathrm{F}(a) \rightarrow \mathrm{G}(b)$，这里$a$表示 $\sqrt{2}$ ，b表示 $\sqrt{3}$。

(3) 如果2>3，则3<4。

在命题逻辑中, 设 p：2>3，q：3<4.

符号化为 $p \rightarrow q$

在一阶逻辑中, 设 $F(x,y)$：$x>y$，$G(x,y)$：$x<y$,

符号化为 $F(a,b) \rightarrow G(b,c)$，这里$a$:2, b:3, c:4。

一阶逻辑中命题符号化(续)

例 在一阶逻辑中将下面命题符号化

(1) 人都爱美； **(2)** 有人用左手写字。

分别取**(*a*)** ***D***为人类集合，**(*b*)** ***D***为全总个体域 **.**

解：**(*a*) (1)** 设$G(x)$: x爱美，符号化为 $\forall x\, G(x)$

(2) 设$G(x)$: x用左手写字，符号化为 $\exists x\, G(x)$

(*b*) 设$F(x)$: x为人，$G(x)$: 同**(*a*)**中

(1) $\forall x\, (F(x) \rightarrow G(x))$

(2) $\exists x\, (F(x) \wedge G(x))$

这是两个基本公式，注意它们的使用。

一阶逻辑中命题符号化(续)

例 在一阶逻辑中将下面命题符号化

(1) 正数都大于负数

(2) 有的无理数大于有的有理数

解 注意: 题目中没给个体域, 使用全总个体域

(1) 令$F(x)$: x为正数, $G(y)$: y为负数, $L(x,y)$: $x>y$

$$\forall x(F(x)\rightarrow\forall y(G(y)\rightarrow L(x,y)))$$

或 $\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow L(x,y))$ 两者等值

(2) 令$F(x)$: x是无理数, $G(y)$: y是有理数,

$L(x,y)$: $x>y$

$$\exists x(F(x)\wedge\exists y(G(y)\wedge L(x,y)))$$

或 $\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge L(x,y))$ 两者等值

一阶逻辑中命题符号化(续)

几点注意:

1元谓词与多元谓词的区分

无特别要求, 应使用全总个体域, 引入特性谓词

量词顺序一般不能随便颠倒

两个基本形式$\forall x\,(F(x)\rightarrow G(x))$和$\exists x\,(F(x)\wedge G(x))$的使用。

否定的表示，如

“没有不呼吸的人”等同于“所有的人都呼吸”。

“不是所有的人都喜欢吃糖”等同于“存在不喜欢吃糖的人”。

2.2 一阶逻辑公式及解释

- 合式公式(简称公式)
- 个体变项的自由出现和约束出现
- 解释与赋值
- 公式分类

  永真式，矛盾式，可满足式

字母表

定义 字母表包含下述符号：

(1) 个体常项：$a, b, c, \ldots, a_i, b_i, c_i, \ldots, i \geq 1$

(2) 个体变项：$x, y, z, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, i \geq 1$

(3) 函数符号：$f, g, h, \ldots, f_i, g_i, h_i, \ldots, i \geq 1$

(4) 谓词符号：$F, G, H, \ldots, F_i, G_i, H_i, \ldots, i \geq 1$

(5) 量词符号：$\forall, \exists$

(6) 联结词符号：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

(7) 括号与逗号：(,), ,

项

定义 项的定义如下：

(1) 个体常项和个体变项是项.

(2) 若$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是任意的$n$元函数，$t_1,t_2,\ldots,t_n$是任意的$n$个项，则$\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 是项.

(3) 所有的项都是有限次使用 (1), (2) 得到的.

个体常项、变项是项，由它们构成的n元函数和复合函数还是项。

原子公式

定义 设$R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是任意的n元谓词，$t_1,t_2,\ldots, t_n$是任意的n个项，则称$R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$是原子公式.

原子公式是由项组成的n元谓词.

例如，$F(x,y)$, $F(f(x_1,x_2),g(x_3,x_4))$等均为原子公式

合式公式

定义 合式公式（简称公式）定义如下：

(1) 原子公式是合式公式。

(2) 若A是合式公式，则 $(\neg A)$也是合式公式。

(3) 若A, B是合式公式，则$(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$也是合式公式。

(4) 若A是合式公式，则$\forall xA$, $\exists xA$也是合式公式。

(5) 只有有限次地应用(1)~(4)形成的符号串是合式公式。

如 $x\geq 0$, $\forall x\,(F(x)\rightarrow G(x))$, $\forall x\exists y(x+y=1)$

个体变项的自由出现与约束出现

定义 在公式$\forall xA$和$\exists xA$中，称x为指导变元，A为相应量词的辖域. 在$\forall x$和$\exists x$的辖域中，x的所有出现都称为约束出现，A中不是约束出现的其他变项均称为是自由出现.

例如, 在公式 $\forall x(F(x,y)\rightarrow G(x,z))$ 中,

$A=(F(x,y)\rightarrow G(x,z))$为$\forall x$的辖域,

x为指导变元, A中x的两次出现均为约束出现,

y与z均为自由出现.

闭式: 不含自由出现的个体变项的公式.

公式的解释与分类

给定闭式 $A=\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

取个体域N, $F(x)$: $x>2$, $G(x)$: $x>1$

代入得$A=\forall x(x>2\rightarrow x>1)$ 真命题

给定非闭式 $B=\forall xF(x,y)$

取个体域N, $F(x,y)$: $x\geq y$

代入得$B=\forall x(x\geq y)$ 不是命题

令$y=1$， $B=\forall x(x\geq 1)$ 假命题

解释和赋值

定义 解释I由下面4部分组成:

(a) 非空个体域D_I

(b) 对每一个个体常项a 指定一个 $\bar{a}\in D_I$

(c) 对每一个函数符号f指定一个D_I上的函数 $\bar{f}$

(d) 对每一个谓词符号F指定一个D_I上的谓词 $\bar{F}$

赋值σ: 对每一个命题变项x指定一个值$\sigma(x)\in D_I$

公式A在解释I和赋值σ下的含义: 取个体域D_I, 并将公式中出现的a、f、F 分别解释成 $\bar{a}$ 、$\bar{f}$、 $\bar{F}$, 把自由出现的x换成$\sigma(x)$后所得到的命题.

在给定的解释和赋值下, 任何公式都成为命题.

实例

例 给定解释 I 如下:

(a) 个体域 D=N

(b) $\bar{a}=2$

(c) $\bar{f}(x,y)=x+y$, $\bar{g}(x,y)=xy$

(d) 谓词 $\bar{F}(x,y): x=y$

以及赋值σ: **$\sigma(x)=0$, $\sigma(y)=1$, $\sigma(z)=2$.**

说明下列公式在 I 与σ下的涵义,并讨论真值

(1) $\forall xF(g(x,a),y)$

$\forall x(2x=1)$　　假命题

例(续)

(2) $\forall xF(f(x,a),y)\to\forall yF(x,f(y,a)))$

$\forall x(x+2=1)\to\forall y(0=y+2)$ 真命题

(3) $\exists xF(f(x,y),g(x,z))$

$\exists x(x+1=2x)$ 真命题

(4) $\forall x\forall y\exists zF(f(x,y),z)$

$\forall x\forall y\exists z\,(x+y=z)$ 真命题

(5) $\exists x\forall y\forall zF(f(y,z),x)$

$\exists x\forall y\forall z\,(y+z=x)$ 假命题

闭式只需要解释, 如(4),(5)

公式的分类

永真式(逻辑有效式):在任何解释和赋值下为真命题
矛盾式(永假式):在任何解释和赋值下为假命题
可满足式：存在成真的解释和赋值

说明：
永真式为可满足式，但反之不真
谓词公式的可满足性（永真性, 永假性)是不可判定的

代换

定义 设A_0是含命题变项$p_1, p_2, \ldots, p_n$的命题公式，$A_1, A_2, \ldots, A_n$是n个谓词公式，用A_i处处代替A_0中的p_i $(1 \le i \le n)$，所得公式A称为A_0的代换实例.

如 $F(x) \to G(x)$, $\forall x F(x) \to \exists y G(y)$是$p \to q$的代换实例

定理 重言式的代换实例都是永真式，矛盾式的代换实例都是矛盾式.

实例

例 判断下列公式的类型

(1) $\forall xF(x)\to\exists xF(x)$;

设I为任意的解释，若$\forall xF(x)$为假，则$\forall xF(x)\to\exists xF(x)$为真. 若$\forall xF(x)$为真，则$\exists xF(x)$也为真，所以$\forall xF(x)\to\exists xF(x)$也为真.

是逻辑有效式.

(2) $\forall xF(x)\to(\forall x\exists yG(x,y)\to\forall xF(x))$;

重言式$p\to(q\to p)$ 的代换实例，是逻辑有效式.

例(续)

(3) $\forall xF(x)\rightarrow(\forall xF(x)\lor\exists yG(y))$;

重言式$p\rightarrow(p\lor q)$的代换实例，是逻辑有效式.

(4) $\neg(F(x,y)\rightarrow R(x,y))\land R(x,y)$;

矛盾式$\neg(p\rightarrow q)\land q$的代换实例，是矛盾式.

例(续)

(5) $\forall x\exists yF(x,y)\rightarrow\exists x\forall yF(x,y)$.

取解释I：个体域N，$F(x,y)$为$x=y$.

公式被解释为$\forall x\exists y(x=y)\rightarrow\exists x\forall y(x=y)$，其值为假.

解释I'：个体域N, $F(x,y)$为$x\leq y$, 得到一个新的 在I'下,

公式被解释为$\forall x\exists y(x\leq y)\rightarrow\exists x\forall y(x\leq y)$，其值为真.

是非逻辑有效式的可满足式.

例(续)

(6) $\exists x F(x,y)$

取解释I：个体域N，$F(x,y)$为$x<y$. 赋值σ_1：$\sigma_1(y)=1$.

在I和σ_1下，$\exists x(x<1)$，真命题.

取解释I：个体域N, $F(x,y)$为$x<y$. 赋值σ_2：$\sigma_2(y)=0$.

在I和σ_2下，$\exists x(x<0)$，假命题

是非逻辑有效式的可满足式.