



4.5 等价关系与偏序关系

- 等价关系的定义与实例
- 等价类及其性质
- 商集与集合的划分
- 等价关系与划分的一一对应
- 偏序关系
- 偏序集与哈斯图
- 偏序集中的特定元素

等价关系的定义与实例

定义 设 R 为非空集合上的关系. 如果 R 是自反的、对称的和传递的, 则称 R 为 A 上的**等价关系**. 设 R 是一个等价关系, 若 $\langle x, y \rangle \in R$, 称 x 等价于 y , 记做 $x \sim y$.

实例 设 $A = \{1, 2, \dots, 8\}$, 如下定义 A 上的关系 R :

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge x \equiv y \pmod{3} \}$$

其中 $x \equiv y \pmod{3}$ 叫做 x 与 y **模3相等**, 即 x 除以3的余数与 y 除以3的余数相等.



等价关系的验证

验证模 3 相等关系 R 为 A 上的等价关系, 因为

$$\forall x \in A, \text{ 有 } x \equiv x(\text{mod } 3)$$

$$\forall x, y \in A, \text{ 若 } x \equiv y(\text{mod } 3), \text{ 则有 } y \equiv x(\text{mod } 3)$$

$$\forall x, y, z \in A, \text{ 若 } x \equiv y(\text{mod } 3), y \equiv z(\text{mod } 3),$$

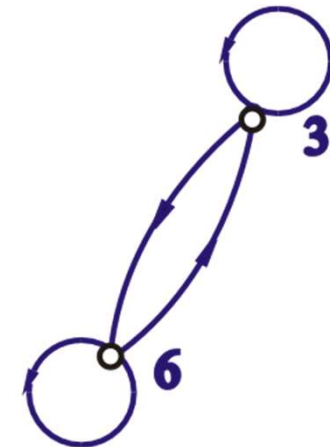
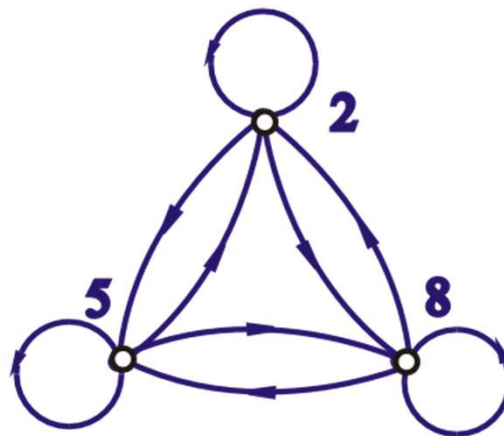
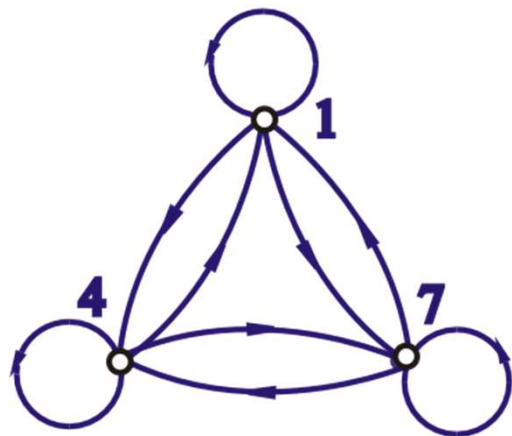
$$\text{则有 } x \equiv z(\text{mod } 3)$$

自反性、对称性、传递性得到验证

A上模3等价关系的关系图

设 $A=\{1,2,\dots,8\}$,

$$R=\{ \langle x,y \rangle \mid x,y \in A \wedge x \equiv y \pmod{3} \}$$



等价类

定义 设 R 为非空集合 A 上的等价关系, $\forall x \in A$, 令

$$[x]_R = \{ y \mid y \in A \wedge xRy \}$$

称 $[x]_R$ 为 x 关于 R 的**等价类**, 简称为 x 的等价类, 简记为 $[x]$.

实例 $A = \{ 1, 2, \dots, 8 \}$ 上模 3 等价关系的等价类:

$$[1] = [4] = [7] = \{ 1, 4, 7 \}$$

$$[2] = [5] = [8] = \{ 2, 5, 8 \}$$

$$[3] = [6] = \{ 3, 6 \}$$



等价类的性质

定理1 设 R 是非空集合 A 上的等价关系, 则

- (1) $\forall x \in A$, $[x]$ 是 A 的非空子集.
- (2) $\forall x, y \in A$, 如果 $x R y$, 则 $[x]=[y]$.
- (3) $\forall x, y \in A$, 如果 $x \not R y$, 则 $[x]$ 与 $[y]$ 不交.
- (4) $\cup \{ [x] \mid x \in A \} = A$, 即所有等价类的并集就是 A .



实例

$A = \{1, 2, \dots, 8\}$ 上模 3 等价关系的等价类:

$$[1] = [4] = [7] = \{1, 4, 7\},$$

$$[2] = [5] = [8] = \{2, 5, 8\},$$

$$[3] = [6] = \{3, 6\}$$

以上3 类两两不交,

$$\{1, 4, 7\} \cup \{2, 5, 8\} \cup \{3, 6\} = \{1, 2, \dots, 8\}$$

商集

定义 设 R 为非空集合 A 上的等价关系, 以 R 的所有等价类作为元素的集合称为 A 关于 R 的**商集**, 记做 A/R , $A/R = \{ [x]_R \mid x \in A \}$

实例 $A = \{1, 2, \dots, 8\}$, A 关于模3等价关系 R 的商集为

$$A/R = \{ \{1, 4, 7\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 6\} \}$$

A 关于恒等关系和全域关系的商集为:

$$A/I_A = \{ \{1\}, \{2\}, \dots, \{8\} \}$$

$$A/E_A = \{ \{1, 2, \dots, 8\} \}$$



集合的划分

定义 设 A 为非空集合, 若 A 的子集族 $\pi(\pi \subseteq P(A))$ 满足下面条件:

(1) $\emptyset \notin \pi$

(2) $\forall x \forall y (x, y \in \pi \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y = \emptyset)$

(3) $\bigcup \pi = A$

则称 π 是 A 的一个**划分**, 称 π 中的元素为 A 的**划分块**.

例题

例1 设 $A = \{a, b, c, d\}$,

给定 $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6$ 如下:

$$\pi_1 = \{ \{a, b, c\}, \{d\} \}, \quad \pi_2 = \{ \{a, b\}, \{c\}, \{d\} \}$$

$$\pi_3 = \{ \{a\}, \{a, b, c, d\} \}, \quad \pi_4 = \{ \{a, b\}, \{c\} \}$$

$$\pi_5 = \{ \emptyset, \{a, b\}, \{c, d\} \}, \quad \pi_6 = \{ \{a, \{a\}\}, \{b, c, d\} \}$$

则 π_1 和 π_2 是 A 的划分, 其他都不是 A 的划分.
为什么?



等价关系与划分的一一对应

商集 A/R 就是 A 的一个划分

不同的商集对应于不同的划分

任给 A 的一个划分 π , 如下定义 A 上的关系 R :

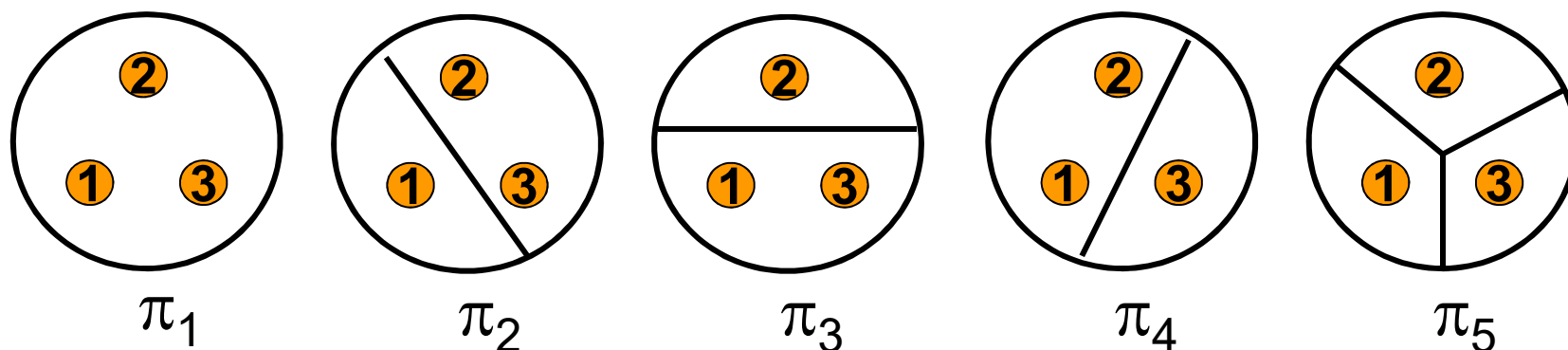
$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge x \text{ 与 } y \text{ 在 } \pi \text{ 的同一划分块中} \}$$

则 R 为 A 上的等价关系, 且该等价关系确定的商集就是 π .

例2 给出 $A = \{1, 2, 3\}$ 上所有的等价关系

求解思路: 先做出 A 的所有划分, 然后根据划分写出对应的等价关系.

等价关系与划分之间的对应



π_1 对应于全域关系 E_A , π_5 对应于恒等关系 I_A

π_2, π_3 和 π_4 分别对应等价关系 R_2, R_3 和 R_4 .

$$R_2 = \{\langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle\} \cup I_A, \quad R_3 = \{\langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle\} \cup I_A$$

$$R_4 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\} \cup I_A$$



实例

例3 设 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, 在 $A \times A$ 上定义二元关系 R :

$$\langle \langle x, y \rangle, \langle u, v \rangle \rangle \in R \Leftrightarrow x+y = u+v,$$

求 R 导出的划分.

解 $A \times A = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 1 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle \}$



实例（续）

根据 $\langle x, y \rangle$ 的 $x + y = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ 将 $A \times A$ 划分成7个等价类:

$$(A \times A)/R = \{ \{ \langle 1, 1 \rangle \}, \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle \}, \\ \{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 1 \rangle \}, \\ \{ \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 1 \rangle \}, \\ \{ \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 2 \rangle \}, \\ \{ \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 3 \rangle \}, \{ \langle 4, 4 \rangle \} \}$$



偏序关系

定义 非空集合 A 上的自反、反对称和传递的关系, 称为 A 上的**偏序关系**, 记作 \leq . 设 \leq 为偏序关系, 如果 $\langle x, y \rangle \in \leq$, 则记作 $x \leq y$, 读作 x “小于或等于” y .

实例

集合 A 上的恒等关系 I_A 是 A 上的偏序关系.

小于或等于关系, 整除关系和包含关系也是相应集合上的偏序关系.

相关概念

x 与 y 可比: 设 R 为非空集合 A 上的偏序关系,

$$x, y \in A, x \text{与} y \text{可比} \Leftrightarrow x \leq y \vee y \leq x.$$

结论: 任取两个元素 x 和 y , 可能有下述情况:

$x < y$ (或 $y < x$), $x = y$, x 与 y 不是可比的.

全序关系:

R 为非空集合 A 上的偏序, $\forall x, y \in A$, x 与 y 都是可比的, 则称 R 为**全序** (或 **线序**)

实例: 数集上的小于或等于关系是全序关系

整除关系不是正整数集合上的全序关系



相关概念（续）

覆盖：设 R 为非空集合 A 上的偏序关系， $x, y \in A$ ，如果 $x < y$ 且不存在 $z \in A$ 使得 $x < z < y$ ，则称 y 覆盖 x 。

实例：{ 1, 2, 4, 6 }集合上的整除关系，
2 覆盖 1，
4 和 6 覆盖 2。
4 不覆盖 1。



偏序集与哈斯图

定义 集合 A 和 A 上的偏序关系 \leq 一起叫做**偏序集**, 记作 $\langle A, \leq \rangle$.

实例: 整数集和小于等于关系构成偏序集 $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$, 幂集 $P(A)$ 和包含关系构成偏序集 $\langle P(A), R_{\subseteq} \rangle$.

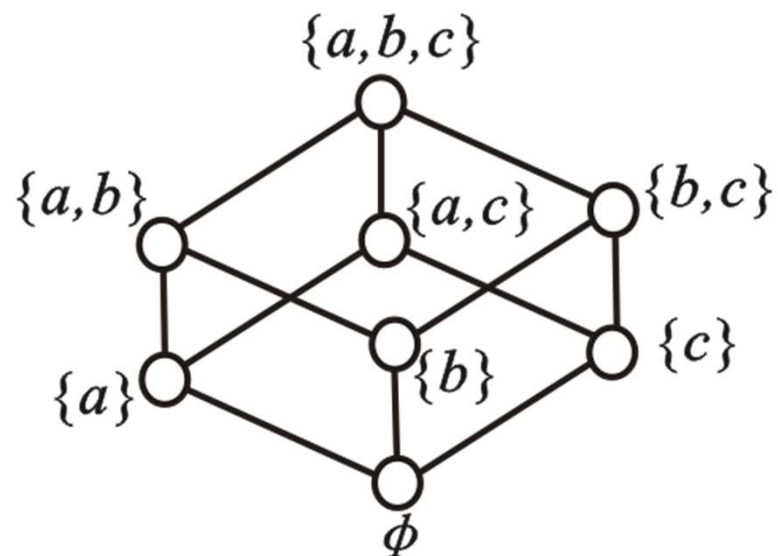
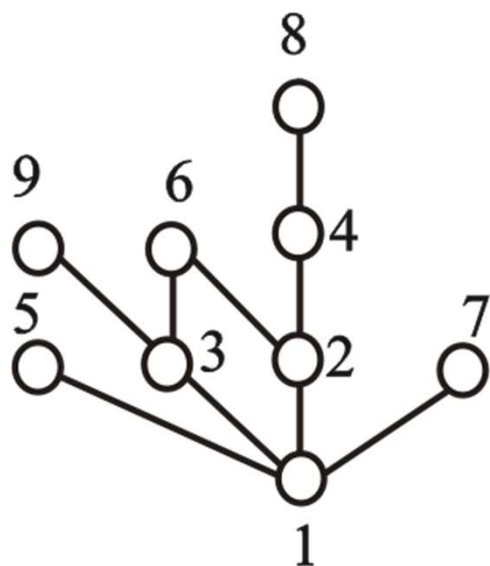
哈斯图: 利用偏序自反、反对称、传递性简化的关系图

特点: 每个结点没有环, 两个连通的结点之间的序关系通过结点位置的高低表示, 位置低的元素的顺序在前, 具有覆盖关系的两个结点之间连边

哈斯图实例

例4 $\langle \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, R_{\text{整除}} \rangle$

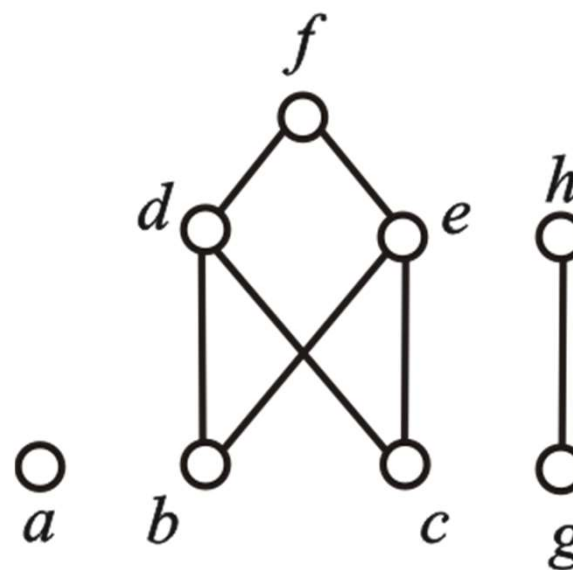
$\langle P(\{a, b, c\}), R_{\subseteq} \rangle$



哈斯图实例（续）

例5

已知偏序集 $\langle A, R \rangle$
的哈斯图如右图所示,
试求出集合 A 和关系
 R 的表达式.



$$A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

$$R = \{ \langle b, d \rangle, \langle b, e \rangle, \langle b, f \rangle, \langle c, d \rangle, \langle c, e \rangle, \langle c, f \rangle, \langle d, f \rangle, \langle e, f \rangle, \langle g, h \rangle \} \cup I_A$$

偏序集的特定元素

定义 设 $\langle A, \leq \rangle$ 为偏序集, $B \subseteq A, y \in B$.

- (1) 若 $\forall x (x \in B \rightarrow y \leq x)$ 成立, 则称 y 为 B 的**最小元**.
- (2) 若 $\forall x (x \in B \rightarrow x \leq y)$ 成立, 则称 y 为 B 的**最大元**.
- (3) 若 $\neg \exists x (x \in B \wedge x < y)$ 成立, 则称 y 为 B 的**极小元**.
- (4) 若 $\neg \exists x (x \in B \wedge y < x)$ 成立, 则称 y 为 B 的**极大元**.



特殊元素的性质

- 对于有穷集，极小元和极大元必存在，可能存在多个.
- 最小元和最大元不一定存在，如果存在一定惟一.
- 最小元一定是极小元；最大元一定是极大元.
- 孤立结点既是极小元，也是极大元.

偏序集的特定元素(续)

定义 设 $\langle A, \leq \rangle$ 为偏序集, $B \subseteq A, y \in A$.

(1) 若 $\forall x(x \in B \rightarrow x \leq y)$ 成立, 则称 y 为 B 的**上界**.

(2) 若 $\forall x(x \in B \rightarrow y \leq x)$ 成立, 则称 y 为 B 的**下界**.

(3) 令 $C = \{y \mid y \text{ 为 } B \text{ 的上界}\}$, 则称 C 的最小元为 B 的**最小上界** 或 **上确界**.

(4) 令 $D = \{y \mid y \text{ 为 } B \text{ 的下界}\}$, 则称 D 的最大元为 B 的**最大下界** 或 **下确界**.

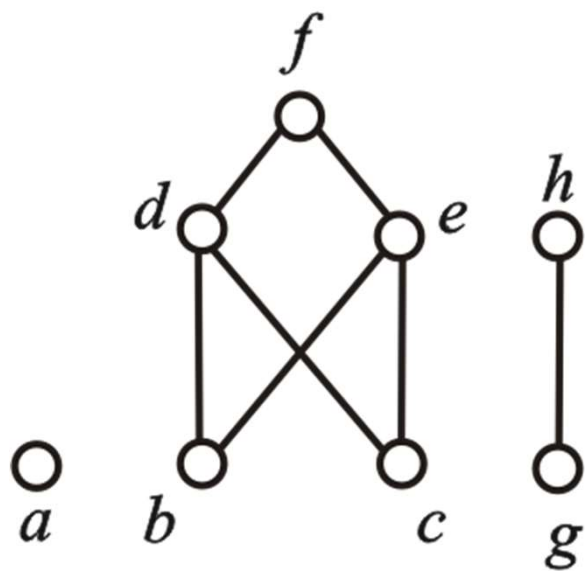


特殊元素的性质

- 下界、上界、下确界、上确界不一定存在
- 下界、上界存在不一定惟一
- 下确界、上确界如果存在，则惟一
- 集合的最小元就是它的下确界，最大元就是它的上确界；反之不对。

实例

例6 设偏序集 $\langle A, \leq \rangle$ 如下图所示，求 A 的极小元、最小元、极大元、最大元. 设 $B = \{b, c, d\}$, 求 B 的下界、上界、下确界、上确界.



极小元: a, b, c, g ;

极大元: a, f, h ;

没有最小元与最大元.

B 的下界和最大下界都不存在, 上界有 d 和 f ,
最小上界为 d .