




离散数学

仝辉

tóng huī

- 
- Email: tonghui@bupt.edu.cn,
tongh@vip.163.com
 - QQ群: 698425030
 - 在课程学习过程中遇到的任何问题, 欢迎通过QQ群讨论
 - 也可以通过QQ群发送小窗口QQ消息
 - 要求: 按时上课, 认真听讲, 课后复习
 - 平时成绩与期末成绩加权平均后得到总评成绩
 - 期末考试方式: 闭卷考试



主要内容

- 数理逻辑
- 集合论
- 图论

（由于课时有限，可能只学习上面的部分内容。）

- 组合分析初步
- 代数系统简介
- 形式语言和自动机初步



教材与教学参考书

■ 教材：

- 耿素云、屈婉玲、张立昂，离散数学（第五版），清华大学出版社，**2013**.

■ 教学参考书：

- 屈婉玲、耿素云、张立昂，离散数学题解（第五版），清华大学出版社，**2013**.



数理逻辑部分

- 第1章 命题逻辑

- 第2章 一阶逻辑



第1章 命题逻辑

1.1 命题符号化及联结词

1.2 命题公式及分类

1.3 等值演算

1.4 范式

1.5 联结词全功能集


1.6 组合电路

1.7 推理理论



1.1 命题符号化及联结词

- 命题与真值
- 原子命题
- 复合命题
- 命题常项
- 命题变项
- 联结词



命题与真值

命题: 判断结果惟一的陈述句

命题的真值: 判断的结果


真值的取值: 真与假

真命题: 真值为真的命题

假命题: 真值为假的命题

注意: 感叹句、祈使句、疑问句都不是命题

陈述句中的悖论以及判断结果不惟一确定的也不是命题



例 下列句子中那些是命题？

(1) $\sqrt{2}$ 是无理数.

真命题

(2) $2 + 5 = 8$.

假命题

(3) $x + 5 > 3$.

真值不确定

(4) 你有铅笔吗？

疑问句

(5) 这只兔子跑得真快呀！

感叹句

(6) 请不要讲话！

祈使句

(7) 我正在说谎话.

悖论

(3)~(7)都不是命题



命题的分类

简单命题(原子命题):

简单陈述句构成的命题

复合命题:

由简单命题与联结词按一定规则复合而成的命题



简单命题符号化

用小写英文字母 $p, q, r, \dots, p_i, q_i, r_i (i \geq 1)$ 表示
简单命题

用“1”表示真，用“0”表示假

例如，令

p : $\sqrt{2}$ 是有理数，则 p 的真值为 0

q : $2 + 5 = 7$ ，则 q 的真值为 1



联结词与复合命题

1. 否定式与否定联结词 “ \neg ”

定义 设 p 为命题, 复合命题 “非 p ”(或 “ p 的否定”)称为 p 的**否定式**, 记作 $\neg p$. 符号 \neg 称作**否定联结词**, 并规定 $\neg p$ 为真当且仅当 p 为假.

2. 合取式与合取联结词 “ \wedge ”

定义 设 p, q 为二命题, 复合命题 “ p 并且 q ”(或 “ p 与 q ”)称为 p 与 q 的**合取式**, 记作 $p \wedge q$. \wedge 称作**合取联结词**, 并规定 $p \wedge q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为真

注意: 描述合取式的灵活性与多样性
分清简单命题与复合命题



例 将下列命题符号化.

- (1) 王晓既用功又聪明.
- (2) 王晓不仅聪明, 而且用功.
- (3) 王晓虽然聪明, 但不用功.
- (4) 张辉与王丽都是三好生.
- (5) 张辉与王丽是同学.

解 令 p : 王晓用功, q : 王晓聪明, 则

- (1) $p \wedge q$
- (2) $q \wedge p$
- (3) $q \wedge \neg p$.



例 (续)

令 r : 张辉是三好学生, s : 王丽是三好学生

(4) $r \wedge s$.

(5) 令 t : 张辉与王丽是同学, t 是简单命题.

说明:

(1)~(4)说明描述合取式的灵活性与多样性.

(5) 中“与”联结的是两个名词, 整个句子是一个简单命题.

联结词与复合命题(续)

3.析取式与析取联结词“ \vee ”

定义 设 p, q 为二命题, 复合命题“ p 或 q ”称作 p 与 q 的**析取式**, 记作 $p \vee q$. \vee 称作**析取联结词**, 并规定 $p \vee q$ 为假当且仅当 p 与 q 同时为假.

例 将下列命题符号化

- (1) 2或4是素数.
- (2) 2或3是素数.
- (3) 4或6是素数.
- (4) 小元元只能拿一个苹果或一个梨.
- (5) 王晓红生于1975年或1976年.



解 令 p :2是素数, q :3是素数, r :4是素数, s :6是素数,
则 (1), (2), (3) 均为相容或.

分别符号化为: $p \vee r, p \vee q, r \vee s$,
它们的真值分别为 1, 1, 0.

(4), (5) 为排斥或.

令 t :小元元拿一个苹果, u :小元元拿一个梨,
则 (4) 符号化为 $(t \wedge \neg u) \vee (\neg t \wedge u)$.

令 v :王晓红生于1975年, w :王晓红生于1976年,
则 (5) 既可符号化为 $(v \wedge \neg w) \vee (\neg v \wedge w)$, 又可
符号化为 $v \vee w$.

联结词与复合命题(续)

4. 蕴涵式与蕴涵联结词 “ \rightarrow ”

定义 设 p, q 为二命题，复合命题 “如果 p , 则 q ” 称作 p 与 q 的**蕴涵式**，记作 $p \rightarrow q$ ，并称 p 是蕴涵式的前件， q 为蕴涵式的后件. \rightarrow 称作**蕴涵联结词**，并规定， $p \rightarrow q$ 为假当且仅当 p 为真 q 为假.

联结词与复合命题(续)

$p \rightarrow q$ 的逻辑关系: q 为 p 的必要条件

“如果 p , 则 q ”的不同表述法很多:

若 p , 就 q

只要 p , 就 q


p 仅当 q

只有 q 才 p

除非 q , 才 p 或 除非 q , 否则非 p .

当 p 为假时, $p \rightarrow q$ 为真

常出现的错误: 不分充分与必要条件



例 设 p : 天冷, q : 小王穿羽绒服,
将下列命题符号化

- | | |
|----------------------|-------------------|
| (1) 只要天冷, 小王就穿羽绒服. | $p \rightarrow q$ |
| (2) 因为天冷, 所以小王穿羽绒服. | $p \rightarrow q$ |
| (3) 若小王不穿羽绒服, 则天不冷. | $p \rightarrow q$ |
| (4) 只有天冷, 小王才穿羽绒服. | $q \rightarrow p$ |
| (5) 除非天冷, 小王才穿羽绒服. | $q \rightarrow p$ |
| (6) 除非小王穿羽绒服, 否则天不冷. | $p \rightarrow q$ |
| (7) 如果天不冷, 则小王不穿羽绒服. | $q \rightarrow p$ |
| (8) 小王穿羽绒服仅当天冷的时候. | $q \rightarrow p$ |

注意: $p \rightarrow q$ 与 $\neg q \rightarrow \neg p$ 等值 (真值相同)

联结词与复合命题(续)

5. 等价式与等价联结词 “ \leftrightarrow ”

定义 设 p, q 为二命题, 复合命题 “ p 当且仅当 q ”称作 p 与 q 的**等价式**, 记作 $p \leftrightarrow q$. \leftrightarrow 称作**等价联结词**. 并规定 $p \leftrightarrow q$ 为真当且仅当 p 与 q 同时为真或同时为假.

说明:

- (1) $p \leftrightarrow q$ 的逻辑关系: p 与 q 互为充分必要条件
- (2) $p \leftrightarrow q$ 为真当且仅当 p 与 q 同真或同假



例

例 求下列复合命题的真值

(1) $2 + 2 = 4$ 当且仅当 $3 + 3 = 6$. 1

(2) $2 + 2 = 4$ 当且仅当 3 是偶数. 0

(3) $2 + 2 = 4$ 当且仅当 太阳从东方升起. 1

(4) $2 + 2 = 4$ 当且仅当 美国位于非洲. 0

(5) 函数 $f(x)$ 在 x_0 可导的充要条件是它在 x_0
连续. 0



联结词与复合命题(续)

以上给出了5个联结词： \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow ，组成一个联结词集合 $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ ，

联结词的优先顺序为： \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow ；如果出现联结词同级，又无括号时，则按从左到右的顺序运算；若遇有括号时，应该先进行括号中的运算。

注意：本书中使用的 括号全为圆括号。



1.2 命题公式及分类

- 命题变项与合式公式
- 公式的赋值
- 真值表
- 命题的分类
 - 重言式
 - 矛盾式
 - 可满足式
- 真值函数

命题变项与合式公式

命题常项：简单命题

命题变项：真值不确定的陈述句

定义 合式公式 (命题公式, 公式) 递归定义如下:

- (1) 单个命题常项或变项 $p, q, r, \dots, p_i, q_i, r_i, \dots, 0, 1$ 是合式公式
- (2) 若 A 是合式公式, 则 $(\neg A)$ 也是合式公式
- (3) 若 A, B 是合式公式, 则 $(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$ 也是合式公式
- (4) 只有有限次地应用(1)~(3)形成的符号串才是合式公式

说明: 外层括号可以省去



合式公式的层次

定义

- (1) 若公式 A 是单个的命题变项, 则称 A 为0层公式.
- (2) 称 A 是 $n+1$ ($n \geq 0$) 层公式是指下面情况之一:
 - (a) $A = \neg B$, B 是 n 层公式;
 - (b) $A = B \wedge C$, 其中 B, C 分别为 i 层和 j 层公式, 且 $n = \max(i, j)$;
 - (c) $A = B \vee C$, 其中 B, C 的层次及 n 同(b);
 - (d) $A = B \rightarrow C$, 其中 B, C 的层次及 n 同(b);
 - (e) $A = B \leftrightarrow C$, 其中 B, C 的层次及 n 同(b).



合式公式的层次 (续)

例如 公式

p

0层

$\neg p$

1层

$\neg p \rightarrow q$

2层

$\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow r$

3层

$((\neg p \wedge q) \rightarrow r) \leftrightarrow (\neg r \vee s)$

4层

公式的赋值

定义 给公式 A 中的命题变项 p_1, p_2, \dots, p_n 指定一组真值称为对 A 的一个**赋值**或**解释**

成真赋值: 使公式为真的赋值

成假赋值: 使公式为假的赋值

说明:

赋值 $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ 之间不加标点符号, $\alpha_i = 0$ 或 1 .

A 中仅出现 p_1, p_2, \dots, p_n , 给 A 赋值 $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ 是指 $p_1 = \alpha_1, p_2 = \alpha_2, \dots, p_n = \alpha_n$

A 中仅出现 p, q, r, \dots , 给 A 赋值 $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$ 是指 $p = \alpha_1, q = \alpha_2, r = \alpha_3 \dots$

含 n 个变项的公式有 2^n 个赋值.

真值表

真值表: 公式 A 在所有赋值下的取值情况列成的表

例 给出公式的真值表

$A = (q \rightarrow p) \wedge q \rightarrow p$ 的真值表

p	q	$q \rightarrow p$	$(q \rightarrow p) \wedge q$	$(q \rightarrow p) \wedge q \rightarrow p$
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1



实例

例 $B = \neg (\neg p \vee q) \wedge q$ 的真值表

p q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$\neg (\neg p \vee q)$	$\neg (\neg p \vee q) \wedge q$
0 0	1	1	0	0
0 1	1	1	0	0
1 0	0	0	1	0
1 1	0	1	0	0

例 $C = (p \vee q) \rightarrow \neg r$ 的真值表

p	q	r	$p \vee q$	$\neg r$	$(p \vee q) \rightarrow \neg r$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

公式的类型

定义 设 A 为一个命题公式

- (1) 若 A 无成假赋值，则称 A 为**重言式** (也称**永真式**)
- (2) 若 A 无成真赋值，则称 A 为**矛盾式** (也称**永假式**)
- (3) 若 A 不是矛盾式，则称 A 为**可满足式**

注意：重言式是可满足式，但反之不真。

上例中 A 为重言式， B 为矛盾式， C 为可满足式

$$A = (q \rightarrow p) \wedge q \rightarrow p, \quad B = \neg(\neg p \vee q) \wedge q, \quad C = (p \vee q) \rightarrow \neg r$$



真值函数

问题：含 n 个命题变项的所有公式共产生多少个互不相同的真值表？

定义 称定义域为 $\{00\dots 0, 00\dots 1, \dots, 11\dots 1\}$ ，值域为 $\{0,1\}$ 的函数是 **n 元真值函数**，定义域中的元素是长为 n 的0,1串. 常用 $F:\{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ 表示 F 是 n 元真值函数.

共有 2^{2^n} 个 n 元真值函数.

例如 $F:\{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$ ，且 $F(00)=F(01)=F(11)=0$ ， $F(10)=1$ ，则 F 为一个确定的2元真值函数.



命题公式与真值函数

对于任何一个含 n 个命题变项的命题公式 A ，都存在惟一的一个 n 元真值函数 F 为 A 的真值表。

等值的公式对应的真值函数相同。

下表给出所有2元真值函数对应的真值表，每一个含2个命题变项的公式的真值表都可以在下表中找到。

例如： $p \rightarrow q$, $\neg p \vee q$, $(\neg p \vee q) \vee (\neg(p \rightarrow q) \wedge q)$ 等都对应表中的 $F_{13}^{(2)}$

2元真值函数对应的真值表

$p \quad q$	$F_0^{(2)}$	$F_1^{(2)}$	$F_2^{(2)}$	$F_3^{(2)}$	$F_4^{(2)}$	$F_5^{(2)}$	$F_6^{(2)}$	$F_7^{(2)}$
0 0	0	0	0	0	0	0	0	0
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1
$p \quad q$	$F_8^{(2)}$	$F_9^{(2)}$	$F_{10}^{(2)}$	$F_{11}^{(2)}$	$F_{12}^{(2)}$	$F_{13}^{(2)}$	$F_{14}^{(2)}$	$F_{15}^{(2)}$
0 0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1