# 集合论

# 集合论部分

- 第3章 集合的基本概念和运算
- 第4章 二元关系和函数

# 第3章 集合的基本概念和运算

- 3.1 集合的基本概念
- 3.2 集合的基本运算
- 3.3 集合中元素的计数

# 3.1 集合的基本概念

- 集合的定义与表示
- 集合与元素
- 集合之间的关系
- 空集
- 全集
- 幂集

# 集合定义与表示

集合　没有精确的数学定义

理解：一些离散个体组成的全体

组成集合的个体称为它的元素或成员

集合的表示

列元素法　$A=\{ a, b, c, d \}$

谓词表示法　$B=\{ x \mid P(x) \}$

$B$ 由使得 $P(x)$ 为真的 $x$ 构成

常用数集

$N, Z, Q, R, C$ 分别表示自然数、整数、有理数、实数和复数集合，注意 0 是自然数.

# 集合与元素

元素与集合的关系：隶属关系

属于$\in$，不属于 $\notin$

实例

$A=\{\, x \mid x\in \mathbf{R} \wedge x^2-1=0 \,\}$，$A=\{-1,1\}$

$1\in A$，$2\notin A$

注意：对于任何集合 $A$ 和元素 $x$ (可以是集合)，

$x\in A$和 $x\notin A$ 两者成立其一，且仅成立其一.

# 隶属关系的层次结构

例 3.1

$A=\{\ a, \{b,c\}, d, \{\{d\}\}\ \}$

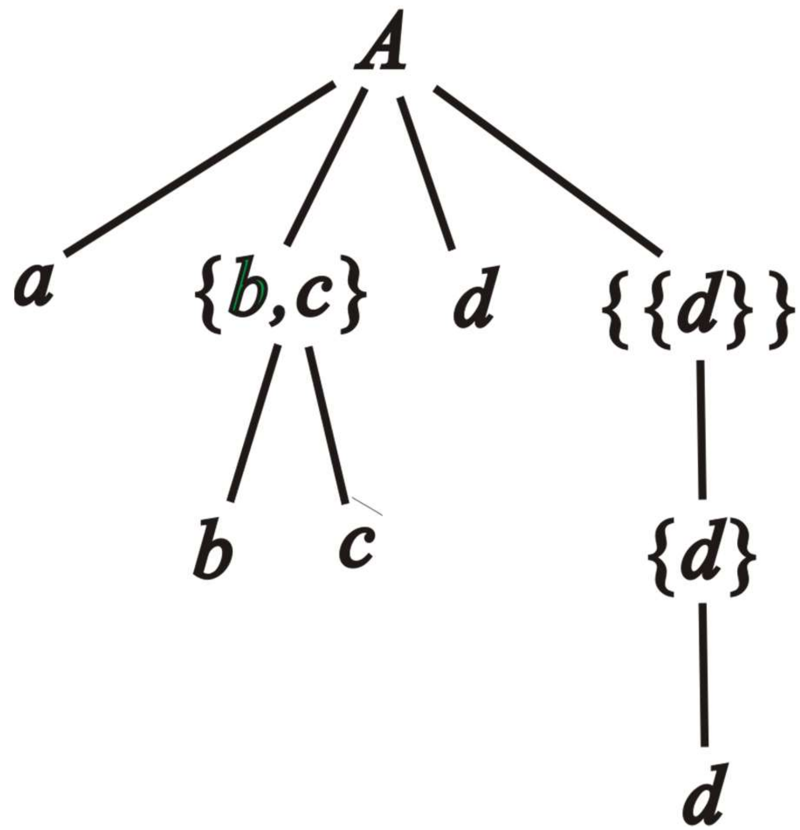
$\{b,c\}\in A$

$b\notin A$

$\{\{d\}\}\in A$

$\{d\}\notin A$

$d\in A$



# 集合之间的关系

包含（子集）　$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B)$

不包含　$A \nsubseteq B \Leftrightarrow \exists x\,(x \in A \wedge x \notin B)$

相等　$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

不相等　$A \neq B$

真包含　$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$

不真包含　$A \not\subset B$

思考：　$\neq$ 和 $\not\subset$ 的定义

注意 $\in$ 和 $\subseteq$ 是不同层次的问题

# 空集与全集

空集 $\varnothing$　不含任何元素的集合

实例　$\{x \mid x^2+1=0 \wedge x \in \mathbf{R}\}$ 就是空集

定理　空集是任何集合的子集

$$\varnothing \subseteq A \Leftrightarrow \forall x\,(x \in \varnothing \rightarrow x \in A) \Leftrightarrow T$$

推论　空集是惟一的.

证　　假设存在$\varnothing_1$和$\varnothing_2$，则$\varnothing_1 \subseteq \varnothing_2$ 且$\varnothing_2 \subseteq \varnothing_1$，因此$\varnothing_1 = \varnothing_2$

全集 $E$

相对性

在给定问题中，全集包含任何集合，即$\forall A\,(A \subseteq E)$

# 幂集

定义 $P(A) = \{ x \mid x \subseteq A \}$

实例

$P(\varnothing) = \{\varnothing\}$,

$P(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

$P(\{1,\{2,3\}\})=\{\varnothing,\{1\},\{\{2,3\}\},\{1,\{2,3\}\}\}$

计数

如果 $|A| = n$，则 $|P(A)| = 2^n$

# 3.2 集合的基本运算

- 集合基本运算的定义

  $\cup \quad \cap \quad - \quad \sim \quad \oplus$

- 文氏图（**John Venn**）
- 例题
- 集合运算的算律
- 集合包含或恒等式的证明

# 集合基本运算的定义

并 $A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$

交 $A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$

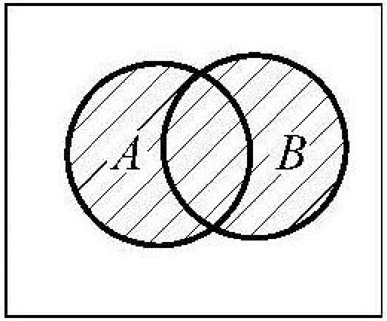
相对补 $A - B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$

对称差 $A \oplus B = (A-B) \cup (B-A)$

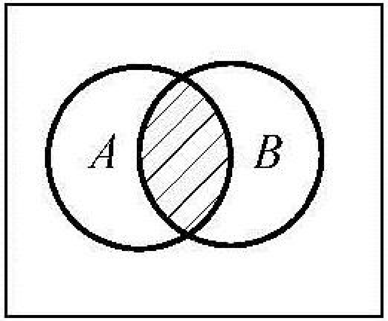
$$= (A \cup B) - (A \cap B)$$

绝对补 $\sim A = E - A$

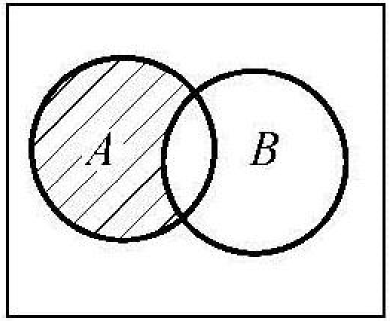
# 文氏图表示



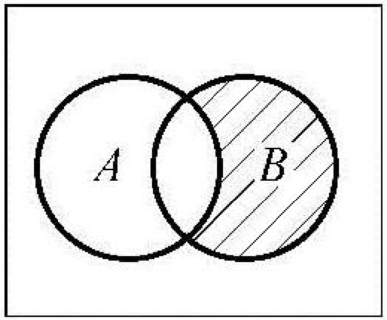

$A \cup B$



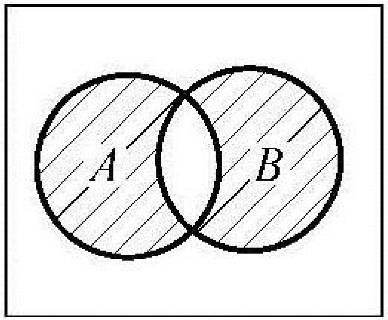

$A \cap B$



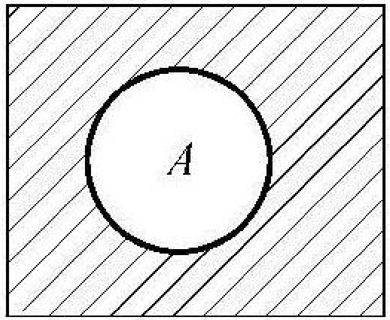

$A - B$




$B - A$




$A \oplus B$




$\sim A$

# 关于运算的说明

- 运算顺序：~和幂集优先，其他由括号确定
- 并和交运算可以推广到有穷个集合上，即

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n = \{x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_n\}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_n = \{x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge x \in A_n\}$$

- 某些重要结果

$$\varnothing \subseteq A-B \subseteq A$$

$A \subseteq B \Leftrightarrow A-B=\varnothing$（后面证明）

$$A \cap B=\varnothing \Leftrightarrow A-B=A$$

# 例1

F:一年级大学生的集合　　S：二年级大学生的集合

R：计算机系学生的集合　　M：数学系学生的集合

T：选修离散数学的学生的集合

L：爱好文学学生的集合　　P：爱好体育运动学生的集合

所有计算机系二年级学生都选修离散数学

数学系一年级的学生都没有选修离散数学

数学系学生或爱好文学或爱好体育运动

只有一、二年级的学生才爱好体育运动

除去数学和计算机系二年级学生外都不选修离散数学

$T \subseteq (M \cup R) \cap S$

$R \cap S \subseteq T$

$(M \cap F) \cap T = \varnothing$

$M \subseteq L \cup P$

$P \subseteq F \cup S$

$S - (M \cup R) \subseteq P$

# 例2

分别对条件(1)到(5)，确定 $X$ 集合与下述那些集合相等。

$S_1 = \{ 1, 2, \ldots, 8, 9 \}$，$S_2 = \{ 2, 4, 6, 8 \}$，$S_3 = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$，

$S_4 = \{ 3, 4, 5 \}$，$S_5 = \{ 3, 5 \}$

(1) 若 $X \cap S_3 = \varnothing$，则 $X$ $= S_2$

(2) 若 $X \subseteq S_4$, $X \cap S_2 = \varnothing$, 则 $X$ $= S_5$

(3) 若 $X \subseteq S_1$， $X \nsubseteq S_3$，则 $X$ $= S_1, S_2, S_4$

(4) 若 $X - S_3 = \varnothing$，则 $X$ $= S_3, S_5$

(5) 若 $X \subseteq S_3$， $X \nsubseteq S_1$，则 $X$ 与 $S_1, \ldots, S_5$ 都不等

# 集合运算的算律

| | $\cup$ | $\cap$ | $\oplus$ |
| --- | --- | --- | --- |
| 交换 | $A\cup B=B\cup A$ | $A\cap B=B\cap A$ | $A\oplus B=B\oplus A$ |
| 结合 | $(A\cup B)\cup C=$ $A\cup(B\cup C)$ | $(A\cap B)\cap C=$ $A\cap(B\cap C)$ | $(A\oplus B)\oplus C=$ $A\oplus(B\oplus C)$ |
| 幂等 | $A\cup A=A$ | $A\cap A=A$ | |

| | $\cup$与$\cap$ | $\cap$与$\oplus$ |
| --- | --- | --- |
| 分配 | $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ | $A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$ |
| 吸收 | $A\cup(A\cap B)=A$ $A\cap(A\cup B)=A$ | |

吸收律的前提：$\cup$、$\cap$可交换

# 集合运算的算律（续）

| | $-$ | $\sim$ |
|---|---|---|
| ***D.M*** 律 | $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$<br>$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$ | $\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$<br>$\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$ |
| 双重否定 | | $\sim\sim A=A$ |

| | $\varnothing$ | $E$ |
|---|---|---|
| 补元律 | $A\cap\sim A=\varnothing$ | $A\cup\sim A=E$ |
| 零律 | $A\cap\varnothing=\varnothing$ | $A\cup E=E$ |
| 同一律 | $A\cup\varnothing=A$ | $A\cap E=A$ |
| 否定 | $\sim\varnothing=E$ | $\sim E=\varnothing$ |

# 集合包含或相等的证明方法

- 证明 $X \subseteq Y$
  - 命题演算法
  - 包含传递法
  - 等价条件法
  - 反证法
  - 并交运算法
- 证明 $X=Y$
  - 命题演算法
  - 等式代入法
  - 反证法
  - 运算法

以上的 $X, Y$ 代表集合公式

# 命题演算法证 $X\subseteq Y$

任取 $x$，

$$x\in X \Rightarrow \ldots \Rightarrow x\in Y$$

例3 证明$A\subseteq B \Leftrightarrow P(A)\subseteq P(B)$

任取$x$

$$x\in P(A) \Rightarrow x\subseteq A \Rightarrow x\subseteq B \Rightarrow x\in P(B)$$

任取$x$

$$x\in A \Rightarrow \{x\}\subseteq A \Rightarrow \{x\}\in P(A) \Rightarrow \{x\}\in P(B)$$

$$\Rightarrow \{x\}\subseteq B \Rightarrow x\in B$$

# 包含传递法证 $X \subseteq Y$

找到集合$T$满足 $X \subseteq T$ 且 $T \subseteq Y$，从而有$X \subseteq Y$

例4 $A-B \subseteq A \cup B$

证 $A-B \subseteq A$

$A \subseteq A \cup B$

所以 $A-B \subseteq A \cup B$

# 利用包含的等价条件证 $X \subseteq Y$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \phi$$

例5 $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$

证 $A \subseteq C \Rightarrow A \cup C = C$

$B \subseteq C \Rightarrow B \cup C = C$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup C = C$

$(A \cup B) \cup C = C \Leftrightarrow A \cup B \subseteq C$

命题得证

# 反证法证 $X\subseteq Y$

欲证$X\subseteq Y$, 假设命题不成立，必存在 $x$ 使得 $x\in X$ 且 $x\notin Y$. 然后推出矛盾.

例6 证明 $A\subseteq C \wedge B\subseteq C \Rightarrow A\cup B\subseteq C$

证 假设 $A\cup B \subseteq C$ 不成立,

则 $\exists x\,(x\in A\cup B\wedge x\notin C)$

因此 $x\in A$ 或 $x\in B$，且 $x\notin C$

若 $x\in A$, 则与 $A\subseteq C$ 矛盾;

若 $x\in B$, 则与 $B\subseteq C$ 矛盾.

# 利用已知包含式并交运算

由已知包含式通过运算产生新的包含式

$$X \subseteq Y \Rightarrow X \cap Z \subseteq Y \cap Z,\ X \cup Z \subseteq Y \cup Z$$

例7 证明 $A \cap C \subseteq B \cap C \land A - C \subseteq B - C \Rightarrow A \subseteq B$

证 $A \cap C \subseteq B \cap C$， $A - C \subseteq B - C$

上式两边求并，得

$(A \cap C) \cup (A - C) \subseteq (B \cap C) \cup (B - C)$

$\Rightarrow (A \cap C) \cup (A \cap \sim C) \subseteq (B \cap C) \cup (B \cap \sim C)$

$\Rightarrow A \cap (C \cup \sim C) \subseteq B \cap (C \cup \sim C)$

$\Rightarrow A \cap E \subseteq B \cap E$

$\Rightarrow A \subseteq B$

# 命题演算法证明$X=Y$

任取 $x$，

$$x\in X \Rightarrow \ldots \Rightarrow x\in Y$$

$$x\in Y \Rightarrow \ldots \Rightarrow x\in X$$

或者

$$x\in X \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x\in Y$$

**例8** 证明 $A\cup(A\cap B)=A$ （吸收律）

证　任取$x$,

$$x\in A\cup(A\cap B) \Leftrightarrow x\in A\vee x\in A\cap B$$

$$\Leftrightarrow x\in A \vee (x\in A \wedge x\in B) \Leftrightarrow x\in A$$

# 等式替换证明$X=Y$

不断进行代入化简，最终得到两边相等

例9 证明$A\cup(A\cap B)=A$ （吸收律）

证 (假设交换律、分配律、同一律、零律成立)

$A\cup(A\cap B)$

$=(A\cap E)\cup(A\cap B)$ 同一律

$=A\cap(E\cup B)$ 分配律

$=A\cap(B\cup E)$ 交换律

$=A\cap E$ 零律

$=A$ 同一律

# 反证法证明$X=Y$

假设 $X=Y$ 不成立，则存在 $x$ 使得 $x\in X$且$x\notin Y$，或者存在 $x$ 使得 $x\in Y$且$x\notin X$，然后推出矛盾.

例10 证明以下等价条件

$$A\subseteq B \Leftrightarrow A\cup B=B \Leftrightarrow A\cap B=A \Leftrightarrow A-B=\varnothing$$

(1) (2) (3) (4)

证明顺序：

(1) ⇒(2), (2) ⇒(3), (3) ⇒(4), (4) ⇒(1)

(1) $\Rightarrow$(2)

显然$B\subseteq A\cup B$，下面证明$A\cup B\subseteq B$.

任取$x$,

$$x\in A\cup B \Leftrightarrow x\in A\vee x\in B \Rightarrow x\in B\vee x\in B \Leftrightarrow x\in B$$

因此有$A\cup B\subseteq B$. 综合上述（2）得证.

(2) $\Rightarrow$(3)

$$A=A\cap(A\cup B) \Rightarrow A=A\cap B$$

（将$A\cup B$用$B$代入)

**$(3) \Rightarrow (4)$**

假设$A-B\neq\varnothing$, 即$\exists x\in A-B$，那么$x\in A$且$x\notin B$. 而

$$x\notin B \Rightarrow x\notin A\cap B.$$

从而与$A\cap B=A$矛盾.

**$(4) \Rightarrow (1)$**

假设$A\subseteq B$不成立，那么

$$\exists x\ (x\in A \wedge x\notin B) \Rightarrow x\in A-B \Rightarrow A-B\neq\varnothing$$

与条件（4）矛盾.

# 集合运算法证明$X=Y$

由已知等式通过运算产生新的等式

$$X=Y \Rightarrow X\cap Z=Y\cap Z,\ X\cup Z=Y\cup Z，X-Z=Y-Z$$

例11 证明$A\cap C=B\cap C \wedge A\cup C=B\cup C \Rightarrow A=B$

证 由 $A\cap C=B\cap C$ 和 $A\cup C=B\cup C$ 得到

$$(A\cup C)-(A\cap C)=(B\cup C)-(B\cap C)$$

从而有 $A\oplus C=B\oplus C$

因此

$$A\oplus C=B\oplus C \Rightarrow (A\oplus C)\oplus C=(B\oplus C)\oplus C$$

$$\Rightarrow A\oplus(C\oplus C)=B\oplus(C\oplus C) \Rightarrow A\oplus\varnothing=B\oplus\varnothing \Rightarrow A=B$$

# 3.3 集合中元素的计数

- 集合的基数与有穷集合
- 包含排斥原理
- 有穷集的计数

# 集合的基数与有穷集合

集合 $A$ 的**基数**：集合$A$中的元素数，记作 card$A$

**有穷集** $A$： card$A$=$|A|$=$n$， $n$为自然数.

有穷集的实例：

$A=\{a,b,c\}$, card$A$=$|A|$=3；

$B=\{x \mid x^2+1=0, x\in R\}$, card$B$=$|B|$=0

无穷集的实例：

$N, Z, Q, R, C$ 等

# 包含排斥原理

定理 设 $S$ 为有穷集，$P_1, P_2, \ldots, P_m$ 是 $m$ 种性质，$A_i$ 是 $S$ 中具有性质 $P_i$ 的元素构成的子集，$i$=1, 2, …, $m$.则 $S$ 中不具有性质 $P_1, P_2, \ldots, P_m$ 的元素数为

$$
\begin{aligned}
&|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_m}| \\
&= |S| - \sum_{i=1}^{m} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \le i < j < k \le m} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots \\
&+ (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|
\end{aligned}
$$

# 证明

证明要点：任何元素 $x$，如果不具有任何性质，则对等式右边计数贡献为 1 ， 否则为 0

证 设 $x$不具有性质 $P_1, P_2, \ldots, P_m$,

$$x \notin A_i, i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x \notin A_i \cap A_j, 1 \le i < j \le m$$

$$\ldots$$

$$x \notin A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m,$$

$x$ 对右边计数贡献为

$$1 - 0 + 0 - 0 + \ldots + (-1)^m \cdot 0 = 1$$

# 证明（续）

设 $x$具有 $n$ 条性质，$1 \le n \le m$

$x$ 对 $|S|$ 贡献为 1

$x$ 对 $\sum_{i=1}^{m} |A_i|$ 贡献为 $C_n^1$

$x$ 对 $\sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j|$ 贡献为 $C_n^2$

….

$x$ 对 $|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$ 贡献为 $C_n^m$

$x$ 对右边计数贡献为

$$1 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^m C_n^m = \sum_{i=0}^{n} C_n^i = 0$$

# 推论

S中至少具有一条性质的元素数为

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m|$$

$$= \sum_{i=1}^{m} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le m} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots$$

$$+ (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

证明 $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m|$

$$= |S| - |\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m}|$$

$$= |S| - |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_m}|$$

将定理 1 代入即可

# 应用

例1 求1到1000之间（包含1和1000在内）既不能被 5 和6 整除，也不能被 8 整除的数有多少个?

解：$S = \{ x \mid x \in \mathrm{Z}, 1 \le x \le 1000 \}$,

如下定义 $S$ 的 3 个子集 $A, B, C$:

$A = \{ x \mid x \in S, 5 \mid x \}$,

$B = \{ x \mid x \in S, 6 \mid x \}$,

$C = \{ x \mid x \in S, 8 \mid x \}$

# 例1（续）

对上述子集计数：

$|S|=1000$,

$|A|=\lfloor 1000/5 \rfloor=200$,  $|B|=\lfloor 1000/6 \rfloor=166$，

$|C|=\lfloor 1000/8 \rfloor=125$,

$|A\cap B|=\lfloor 1000/30 \rfloor=33$,  $|A\cap C| = \lfloor 1000/40 \rfloor=25$,

$|B\cap C|=\lfloor 1000/24 \rfloor=41$,

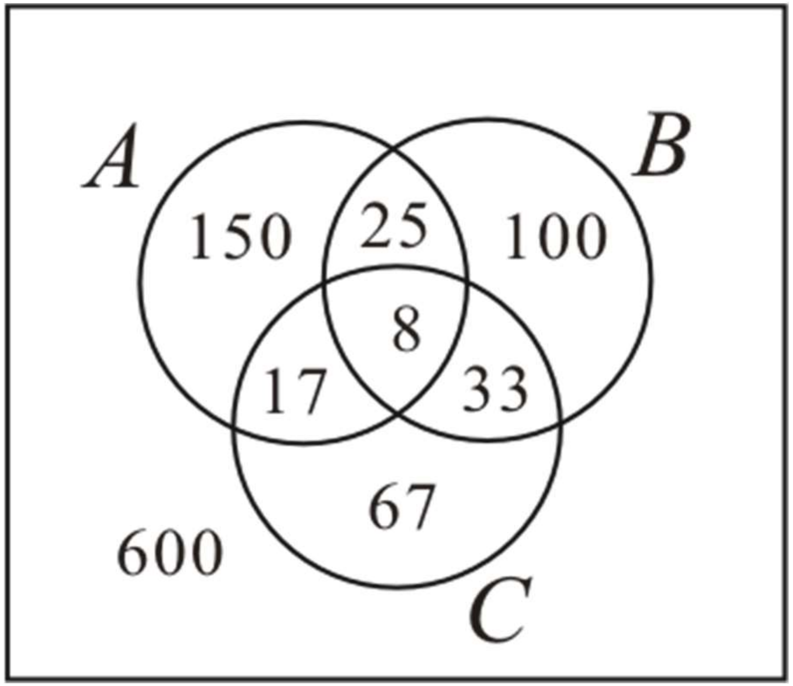
$|A\cap B\cap C| = \lfloor 1000/120 \rfloor=8$,

代入公式

$$N = 1000-(200+166+125)+(33+25+41)-8=600$$

# 文氏图法

求1到1000之间（包含1和1000在内）既不能被 5 和6 整除，也不能被 8 整除的数有多少个？



# 例2

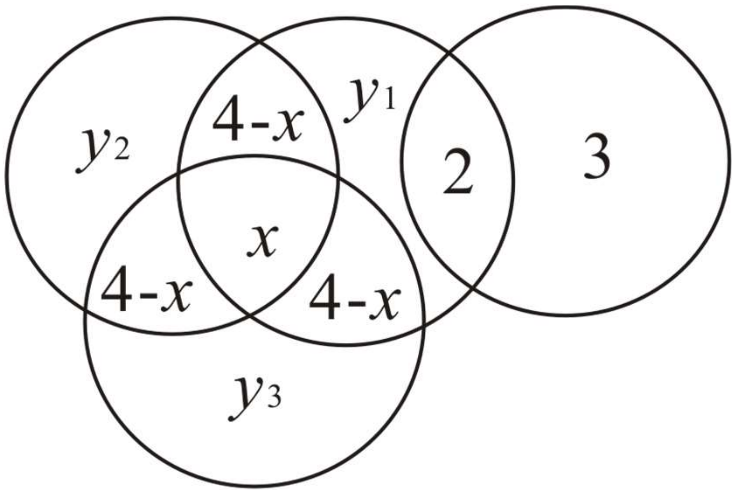
24名科技人员，每人至少会1门外语.

英语：13；　日语：5；　德语：10；　法语：9

英日：2;　　英德：4;　英法：4;　　法德：4

会日语的不会法语、德语

求：只会 1 种语言人数，会 3 种语言人数




$x+2(4-x)+y_1+2=13$

$x+2(4-x)+y_2=10$

$x+2(4-x)+y_3=9$

$x+3(4-x)+y_1+y_2+y_3=19$

$x=1, y_1=4, y_2=3, y_3=2$

# 例3 求欧拉函数的值

欧拉函数： $\phi(n)$

表示$\{0,1,\ldots,n-1\}$中与$n$互素的数的个数.

$\phi(12)=4$，与12互素的数有1, 5, 7, 11.

解： $n$ 的素因子分解式

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$$

$$A_i=\{\, x \mid 0 \le x < n-1 \text{且} \ p_i \text{整除} \ x \,\}$$

$$\phi(n) = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_k}|$$

$$|A_i| = \frac{n}{p_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

$$|A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j}, \quad 1 \le i < j \le n$$

$\ldots$

$$|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k| = \frac{n}{p_1 p_2 \ldots p_k}$$

$$\begin{aligned}
\phi(n) &= |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_k}| \\
&= n - \left(\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \ldots + \frac{n}{p_k}\right) + \left(\frac{n}{p_1 p_2} + \frac{n}{p_1 p_3} + \ldots + \frac{n}{p_{k-1} p_k}\right) \\
&\quad - \ldots + (-1)^k \frac{n}{p_1 p_2 \ldots p_k} \\
&= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)
\end{aligned}$$

# 实例

与 **60** 互素的正整 数有 **16** 个：

**1，7，11，13，17，19，23，29，**

**31，37，41，43，47，49，53，59.**

$$\phi(60) = 60(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})$$

$$= 60\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5} = 16$$