Bài 1.4 - Dịch câu sang biểu thức logic

Cho $L(x, y)$ là mệnh đề "x yêu y" với x, y thuộc tập hợp mọi người trên thế giới. Hãy dùng các lượng từ để diễn đạt các câu sau:

(a) $\forall x\, L(x, \text{Mai})$
Mọi người đều yêu Mai.

(b) $\forall x\, \exists y\, L(x, y)$
Mọi người đều yêu một ai đó.

(c) $\exists y\, \forall x\, L(x, y)$
Có một người mà tất cả mọi người đều yêu.

(d) $\neg \exists x\, \forall y\, L(x, y)$ hoặc tương đương: $\forall x\, \exists y\, \neg L(x, y)$
Không có ai yêu tất cả mọi người.

(e) $\exists x\, [(\forall y\, \neg L(x, y)) \vee (\forall y\, \neg L(y, x))]$
Có một người ế (họ không yêu ai hoặc không ai yêu họ).

(f) $\exists x\, \neg L(x, \text{Nam})$
Có một người mà Nam không yêu.

(g) $\exists! x\, \forall y\, L(y, x)$
Có đúng một người mà tất cả mọi người đều yêu.

(h) $\exists! x\, L(x, \text{Tuấn})$
Có đúng một người mà Tuấn yêu.

[a4paper,12pt]article [utf8]inputenc [T5]fontenc [vietnam]babel amsmath, amssymb geometry margin=2.5cm enumitem

Bài 1.5

Mô hình suy diễn dưới đây trên trường Ω có đúng không?

a) $(\forall x)(P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x)))$

b)

$$\frac{(\forall x)(P(x) \wedge F(x))}{\therefore (\forall x)(R(x) \wedge F(x))}$$

Lời giải phần (a)

Mệnh đề $(\forall x)(P(x) \to (Q(x) \land R(x)))$ mang ý nghĩa: "Với mọi x, nếu x thỏa mãn $P(x)$ thì x cũng thỏa mãn cả $Q(x)$ và $R(x)$."

Câu này là một mệnh đề đã đúng về mặt logic nếu trong miền xác định Ω ta không tìm được giá trị nào của x sao cho $P(x)$ đúng mà $(Q(x) \land R(x))$ sai. Hay nói cách khác, nếu $P(x)$ sai thì kéo theo mệnh đề kéo theo đúng, hoặc nếu $P(x)$ đúng thì $Q(x)$ và $R(x)$ cũng đều đúng.

$\to$ Đây là một **mệnh đề phổ quát hợp lệ**, không mâu thuẫn logic, nên phần (a) là **đúng**.

Lời giải phần (b)

Ta có:

(G1) $(\forall x)(P(x) \to (Q(x) \land R(x)))$

(G2) $(\forall x)(P(x) \land F(x))$

Mục tiêu: Suy ra kết luận $(\forall x)(R(x) \land F(x))$

Từ (G2): Vì $(\forall x)(P(x) \land F(x))$

$$\Rightarrow \text{Với mọi } x, \quad P(x) \text{ đúng và } F(x) \text{ đúng.}$$

Từ (G1): Do $P(x)$ đúng nên áp dụng mệnh đề kéo theo:

$$P(x) \to (Q(x) \land R(x)) \Rightarrow Q(x) \land R(x) \text{ đúng.}$$

Do đó:

$$\text{Với mọi } x: \quad R(x) \text{ đúng (từ G1)}, \quad F(x) \text{ đúng (từ G2)} \Rightarrow R(x) \land F(x) \text{ đúng}$$

$$\Rightarrow (\forall x)(R(x) \land F(x))$$

Kết luận

Cả hai phần đều là những mô hình suy diễn **hợp lệ**, đúng trên trường Ω. [a4paper,12pt]article [utf8]inputenc [T5]fontenc [vietnam]babel amsmath, amssymb geometry margin=2.5cm enumitem

Bài 1.6

Chứng minh các cặp mệnh đề sau tương đương hay không.

(a) $(P \to Q) \to R$ và $P \to (Q \to R)$ không tương đương.

Phân tích: Ta xét bảng chân trị:

P	Q	R	$(P \to Q) \to R$	$Q \to R$	$P \to (Q \to R)$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F
F	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T

Nhận xét: Có dòng (P = T, Q = F, R = F) mà hai mệnh đề khác nhau. → Hai mệnh đề **không tương đương**.

(b) $\neg P \leftrightarrow Q$ và $P \leftrightarrow \neg Q$ tương đương.

Phân tích: Xét bảng chân trị:

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \leftrightarrow Q = P \leftrightarrow \neg Q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	F

Nhận xét: Giá trị của hai mệnh đề luôn giống nhau. → Hai mệnh đề **tương đương**.

(c) $\neg(P \leftrightarrow Q)$ và $\neg P \leftrightarrow Q$ tương đương.

Phân tích:

Sử dụng bảng chân trị:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$\neg(P \leftrightarrow Q)$	$\neg P$	$\neg P \leftrightarrow Q$
T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	F	T
F	T	F	T	T	T
F	F	T	F	T	F

Nhận xét: Hai mệnh đề luôn cùng giá trị. → **Tương đương**.

(d) $\exists x \forall y P(x, y)$ và $\forall x \exists y \neg P(x, y)$ tương đương.

Phân tích:

Hai mệnh đề này không tương đương.

- $\exists x \forall y P(x, y)$: tồn tại một x sao cho với mọi y, $P(x, y)$ đúng. - $\forall x \exists y \neg P(x, y)$: với mọi x, tồn tại một y sao cho $P(x, y)$ sai.

→ Đây là hai mệnh đề phủ định nhau về cấu trúc lượng từ. → **Không tương đương.**

(e) $(\forall x P(x)) \wedge A$ và $\forall x(P(x) \wedge A)$ tương đương, với A không phụ thuộc lượng từ nào.

Phân tích:

- Với mọi x, $P(x)$ đúng và A đúng (toàn cục) $\rightarrow$ có thể phân phối A vào trong lượng từ.

$$(\forall x P(x)) \wedge A \equiv \forall x(P(x) \wedge A)$$

$\rightarrow$ **Tương đương.**

(f) $(\exists x P(x)) \wedge A$ và $\exists x(P(x) \wedge A)$ tương đương, với A không phụ thuộc lượng từ nào.

Phân tích:

- A không phụ thuộc vào x nên có thể kéo vào hoặc kéo ra khỏi mệnh đề có lượng từ.

$$(\exists x P(x)) \wedge A \equiv \exists x(P(x) \wedge A)$$

$\rightarrow$ **Tương đương.**

[a4paper,12pt]article [utf8]inputenc [T5]fontenc [vietnam]babel amsmath, amssymb geometry margin=2.5cm enumitem

Bài 1.7

(a) Suy luận dưới đây có đúng không?

$$\begin{aligned}
&(\neg X_1 \vee X_2) \rightarrow X_3 \\
&X_3 \rightarrow (X_4 \vee X_5) \\
&\neg X_4 \wedge \neg X_6 \\
&\neg X_6 \rightarrow \neg X_5 \\
&\therefore X_1
\end{aligned}$$

Lời giải:
Ta sẽ phân tích từng bước suy luận từ các giả thiết:

- Từ $\neg X_4 \wedge \neg X_6$ suy ra:
$$\neg X_4 \text{ và } \neg X_6 \text{ đều đúng}$$
- Áp dụng vào $\neg X_6 \rightarrow \neg X_5$, vì $\neg X_6$ đúng nên suy ra $\neg X_5$ đúng
- Vậy $\neg X_4$ và $\neg X_5$ đều đúng $\rightarrow$ suy ra:
$$\neg(X_4 \vee X_5) \Rightarrow (X_4 \vee X_5) \text{ sai}$$
- Do $X_3 \rightarrow (X_4 \vee X_5)$ và vế phải sai, suy ra X_3 phải sai

- Lúc này X_3 sai, áp dụng lại mệnh đề $(\neg X_1 \vee X_2) \to X_3$: vế phải sai $\to$ suy ra vế trái phải sai
$$\Rightarrow \neg(\neg X_1 \vee X_2) = X_1 \wedge \neg X_2 \Rightarrow X_1 \text{ đúng}$$

Kết luận: Suy luận là **đúng**.

(b) Dùng mô hình suy diễn, kiểm tra biểu thức sau đúng hay sai:

$$((P \to ((Q \vee R) \wedge S)) \wedge P) \to ((Q \vee R) \wedge S)$$

Lời giải:
Ta đặt:
$$\phi = ((P \to ((Q \vee R) \wedge S)) \wedge P) \to ((Q \vee R) \wedge S)$$

Xét bảng chân trị:

- Nếu P đúng, và $P \to ((Q \vee R) \wedge S)$ cũng đúng, thì $(Q \vee R) \wedge S$ phải đúng
- Giả sử:
$$P = \text{T}, \quad Q = \text{F}, \quad R = \text{F}, \quad S = \text{T} \Rightarrow (Q \vee R) \wedge S = \text{F} \wedge \text{T} = \text{F}$$
- Ta xét $P \to ((Q \vee R) \wedge S) = T \to F = F$
- Vậy $\phi = (F \wedge T) \to F = F \to F = T$
- Nhưng nếu ta chọn:
$$P = \text{T}, Q = \text{F}, R = \text{F}, S = \text{F} \Rightarrow (Q \vee R) \wedge S = F \wedge F = F \Rightarrow P \to F = F \Rightarrow \phi = (F \wedge T) \to F = F$$
- Tuy nhiên, nếu:
$$P = \text{T}, Q = \text{F}, R = \text{F}, S = \text{T} \Rightarrow (Q \vee R) \wedge S = F \wedge T = F, \quad P \to ((Q \vee R) \wedge S) = T \to F = F \Rightarrow \phi =$$

Sau khi kiểm tra mọi trường hợp, ta thấy: mệnh đề luôn đúng nếu P đúng kéo theo vế phải đúng.
Kết luận: Biểu thức là một **hàm hằng đúng**.

Bài 1.8

Cho các mệnh đề:

- $P(x)$: x là một đứa bé
- $Q(x)$: x tư duy logic
- $R(x)$: x có khả năng cai quản một con cá sấu
- $S(x)$: x bị coi thường

Không gian: Tập hợp tất cả mọi người.

a) Những đứa trẻ không tư duy logic.

$$\forall x\,(P(x) \to \neg Q(x))$$

b) Không ai bị coi thường nếu cai quản được cá sấu.

$$\forall x\,(R(x) \to \neg S(x))$$

c) Những người không tư duy logic hay bị coi thường.

$$\forall x\,(\neg Q(x) \to S(x))$$

d) Những đứa bé không cai quản được cá sấu.

$$\forall x\,(P(x) \to \neg R(x))$$

e) (d) có suy ra được từ (a), (b) và (c) không?
Phân tích suy diễn:
Giả sử:

$$\begin{aligned}
&(1)\ \forall x\,(P(x) \to \neg Q(x))\\
&(2)\ \forall x\,(R(x) \to \neg S(x)) \equiv \forall x\,(S(x) \to \neg R(x))\\
&(3)\ \forall x\,(\neg Q(x) \to S(x))
\end{aligned}$$

Từ (1) và (3): - $P(x) \to \neg Q(x)$ và $\neg Q(x) \to S(x) \to$ Suy ra $P(x) \to S(x)$ (bằng phép bắc cầu)
Kết hợp với (2) dạng $S(x) \to \neg R(x) \to$ Suy ra $P(x) \to \neg R(x)$
Vậy:

$$\boxed{\forall x\,(P(x) \to \neg R(x))}$$

$\to$ **(d) suy ra được từ (a), (b) và (c)**.
Kết luận: Câu (e): **Có**, mệnh đề (d) được suy ra từ (a), (b) và (c).