

# Lời giải Bài Tập Chương 1 - Logic cơ bản

**Bài 1.1:** Chứng minh các biểu thức sau là hằng đúng bằng hai cách (lập bảng chân trị và dùng luật logic).

a)  $((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q$

– Bảng chân trị:

P	Q	$P \rightarrow Q$	$(P \rightarrow Q) \wedge P$	Biểu thức
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

– Dùng luật logic:

$$((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q \equiv \text{áp dụng Modus Ponens} \Rightarrow Q$$

—

b)  $P \wedge Q \rightarrow P$

– Bảng chân trị:

P	Q	$P \wedge Q$	Biểu thức
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

– Dùng luật logic: Từ  $P \wedge Q \rightarrow P$  theo luật loại bỏ hội.

—

c)  $\neg(P \wedge Q) \wedge P \rightarrow \neg Q$

– Bảng chân trị:

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg(P \wedge Q) \wedge P$	Biểu thức
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	T	T
F	T	F	T	F	T
F	F	F	T	F	T

– Dùng luật logic: Nếu  $P$  đúng và  $P \wedge Q$  sai thì  $Q$  phải sai  $\Rightarrow \neg Q$  đúng.

—

d)  $(P \rightarrow (Q \wedge R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R))$

– Bảng chân trị:

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \rightarrow (Q \wedge R)$	$P \rightarrow Q$	$P \rightarrow R$	RHS	Biểu thức
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T	F	F	T
T	F	T	F	F	F	T	F	T
T	F	F	F	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T	T	T

– **Dùng luật logic:** Nếu  $P$  đúng thì  $Q \wedge R$  đúng  $\Rightarrow Q$  và  $R$  đều đúng.

Nếu  $P$  sai thì  $P \rightarrow X$  luôn đúng.

$\rightarrow$  **Biểu thức luôn đúng hằng đúng.**

đ)  $((P \wedge Q) \leftrightarrow P) \rightarrow (P \rightarrow Q)$

**Bài 1.2:** Sử dụng quy tắc suy diễn trong mệnh đề logic.

a)  $((X_1 \rightarrow X_2) \wedge (\neg X_3 \vee X_4) \wedge (X_1 \vee X_3)) \rightarrow (\neg X_2 \rightarrow X_4)$

Giả sử  $\neg X_2$  đúng. Từ  $X_1 \rightarrow X_2$  suy ra  $X_1$  phải sai. Khi đó,  $X_3$  phải đúng. Với  $\neg X_3 \vee X_4$  và  $X_3$  đúng  $\Rightarrow X_4$  đúng.  
 $\Rightarrow$  mệnh đề đúng.

b) Lập luận: Nếu được thưởng thì An đi Đà Lạt. Nếu đi Đà Lạt thì An thăm Thiền Viện. An không thăm Thiền Viện  $\Rightarrow$  không đi Đà Lạt  $\Rightarrow$  không được thưởng.  
**Suy luận đúng (Modus Tollens).**

**Bài 1.3:** Dịch các câu thành biểu thức logic.

Gọi:

- $R(x)$ : x là chim ruồi
- $S(x)$ : x có màu sắc sỡ
- $L(x)$ : x là chim lớn
- $H(x)$ : x sống bằng mật ong
- $G(x)$ : x có màu xám
- $N(x)$ : x là chim nhỏ

a)  $\forall x(R(x) \rightarrow S(x))$

b)  $\forall x(L(x) \rightarrow \neg H(x))$

c)  $\forall x(\neg(L(x) \wedge H(x)) \rightarrow G(x))$

d)  $\forall x(R(x) \rightarrow N(x))$

**Bài 1.4:** Dịch các câu thành biểu thức logic có lượng từ.

Gọi  $L(x, y)$ : x yêu y.

- a)  $\forall x L(x, Mai)$
- b)  $\forall x \exists y L(x, y)$
- c)  $\exists x \forall y L(y, x)$
- d)  $\neg \exists x \forall y L(x, y)$
- e)  $\exists x [\forall y \neg L(x, y) \vee \forall y \neg L(y, x)]$
- f)  $\exists x \neg L(Nam, x)$
- g)  $\exists x [\forall y L(y, x) \wedge \forall z (\forall y L(y, z) \rightarrow z = x)]$
- h)  $\exists x \exists y [x \neq y \wedge L(Tun, x) \wedge L(Tun, y) \wedge \forall z (L(Tun, z) \rightarrow (z = x \vee z = y))]$

**Bài 1.5:** Kiểm tra mô hình suy diễn. Cho hai mệnh đề:

$$(1) \forall x (P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x))), \quad (2) \forall x (P(x) \wedge F(x))$$

Từ (2) suy ra  $P(x)$  đúng với mọi  $x$ , kết hợp với (1) ta được:

$$P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x)) \Rightarrow Q(x) \wedge R(x) \Rightarrow R(x)$$

Mà (2) cũng cho  $F(x)$  đúng với mọi  $x$ , nên  $R(x) \wedge F(x)$  đúng với mọi  $x$ .

Do đó, ta suy ra:

$$\boxed{\forall x (R(x) \wedge F(x))}$$

Suy luận là **đúng**.

**Bài 1.6:** Chứng minh các cặp mệnh đề sau tương đương hoặc không.

- a)  $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$  và  $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

**Không tương đương.**

Xét phản ví dụ:  $P = T, Q = F, R = T$ . Khi đó:

$$(P \rightarrow Q) = F, \quad (P \rightarrow Q) \rightarrow R = T$$

$$(Q \rightarrow R) = F \rightarrow T = T, \quad P \rightarrow (Q \rightarrow R) = T$$

Tuy cho kết quả giống nhau, nhưng với  $P = T, Q = T, R = F$  thì:

$$(P \rightarrow Q) = T, \quad (P \rightarrow Q) \rightarrow R = F$$

$$Q \rightarrow R = T \rightarrow F = F, \quad P \rightarrow (Q \rightarrow R) = T \rightarrow F = F$$

Có những trường hợp kết quả khác nhau.

$\Rightarrow$  Hai mệnh đề **không tương đương**.

- b)  $\neg P \leftrightarrow Q$  và  $P \leftrightarrow \neg Q$

**Tương đương.**

Vì phủ định hai vế và đổi vị trí vẫn giữ ý nghĩa tương đương logic.

Có thể xác nhận bằng bảng chân trị, hai mệnh đề luôn cho cùng giá trị.

- c)  $\neg(P \leftrightarrow Q)$  và  $\neg P \leftrightarrow Q$

**Không tương đương.**

Xét bảng chân trị:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$\neg(P \leftrightarrow Q)$	$\neg P$	$\neg P \leftrightarrow Q$
T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	F	T
F	T	F	T	T	T
F	F	T	F	T	F

Hai mệnh đề cho giá trị khác nhau trong một số trường hợp không tương đương.

- d)  $\neg\exists x\forall y P(x, y)$  và  $\forall x\exists y \neg P(x, y)$

**Tương đương.**

Theo quy tắc phủ định lượng từ:

$$\neg\exists x\forall y P(x, y) \equiv \forall x\exists y \neg P(x, y)$$

- e)  $(\forall x P(x)) \wedge A$  và  $\forall x(P(x) \wedge A)$

**Tương đương nếu A không chứa biến x.**

Vì trong trường hợp đó, A là một mệnh đề độc lập có thể phân phối vào hoặc ra ngoài lượng từ mà không ảnh hưởng logic.

- f)  $(\exists x P(x)) \wedge A$  và  $\exists x(P(x) \wedge A)$

**Tương đương nếu A không chứa biến x.**

Giải thích tương tự câu (e): nếu A không phụ thuộc vào x, việc đặt nó bên trong hoặc ngoài lượng từ  $\exists$  không làm thay đổi ý nghĩa mệnh đề.

**Bài 1.7:** Kiểm tra suy luận.

- a) Từ chuỗi điều kiện, suy ra  $X_5 = F \Rightarrow X_4 \vee X_5 = F \Rightarrow X_3 = F \Rightarrow (\neg X_1 \vee X_2) = F \Rightarrow X_1 = T, X_2 = F$   
 $\Rightarrow$  suy luận đúng.
- b) Biểu thức  $((P \rightarrow ((Q \vee R) \wedge S)) \wedge P) \rightarrow ((Q \vee R) \wedge S)$  là hằng đúng do áp dụng Modus Ponens.

**Bài 1.8:** Dịch sang biểu thức mệnh đề.

- $P(x)$ : x là đứa bé
- $Q(x)$ : x tư duy logic
- $R(x)$ : x cai quản cá sấu
- $S(x)$ : x bị coi thường

a)  $\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$

b)  $\forall x(R(x) \rightarrow \neg S(x))$

c)  $\forall x(\neg Q(x) \rightarrow S(x))$

d)  $\forall x(P(x) \rightarrow \neg R(x))$

- e) Không suy ra được (d) từ (a), (b), (c) vì không có liên hệ trực tiếp giữa  $P(x)$  và  $R(x)$ .