Lời giải Bài Tập Chương 1 - Logic cơ bản

Bài 1.1: *Chứng minh các biểu thức sau là hằng đúng bằng hai cách (lập bảng chân trị và dùng luật logic).*

a) $((P \to Q) \land P) \to Q$

– Bảng chân trị:

P	Q	$P \to Q$	$(P \to Q) \land P$	Biểu thức
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

– Dùng luật logic:

$$((P \to Q) \land P) \to Q \equiv \text{áp dụng Modus Ponens} \Rightarrow Q$$

—

b) $P \land Q \to P$

– Bảng chân trị:

P	Q	$P \land Q$	Biểu thức
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

– Dùng luật logic: Từ $P \land Q \to P$ theo luật loại bỏ hội.

—

c) $\neg(P \land Q) \land P \to \neg Q$

– Bảng chân trị:

P	Q	$P \land Q$	$\neg(P \land Q)$	$\neg(P \land Q) \land P$	Biểu thức
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	T	T
F	T	F	T	F	T
F	F	F	T	F	T

– Dùng luật logic: Nếu P đúng và $P \land Q$ sai thì Q phải sai $\Rightarrow \neg Q$ đúng.

—

d) $(P \to (Q \land R)) \to ((P \to Q) \land (P \to R))$

– Bảng chân trị:

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \to (Q \wedge R)$	$P \to Q$	$P \to R$	RHS	Biểu thức
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T	F	F	T
T	F	T	F	F	F	T	F	T
T	F	F	F	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T	T	T

– **Dùng luật logic:** Nếu P đúng thì $Q \wedge R$ đúng $\Rightarrow$ Q và R đều đúng.
Nếu P sai thì $P \to X$ luôn đúng.
$\to$ **Biểu thức luôn đúng hằng đúng.**

—

đ) $((P \wedge Q) \leftrightarrow P) \to (P \to Q)$

Bài 1.2: *Sử dụng quy tắc suy diễn trong mệnh đề logic.*

a) $((X_1 \to X_2) \wedge (\neg X_3 \vee X_4) \wedge (X_1 \vee X_3)) \to (\neg X_2 \to X_4)$
Giả sử $\neg X_2$ đúng. Từ $X_1 \to X_2$ suy ra X_1 phải sai. Khi đó, X_3 phải đúng. Với $\neg X_3 \vee X_4$ và X_3 đúng $\Rightarrow$ X_4 đúng.
$\Rightarrow$ mệnh đề đúng.

b) Lập luận: Nếu được thưởng thì An đi Đà Lạt. Nếu đi Đà Lạt thì An thăm Thiền Viện. An không thăm Thiền Viện $\Rightarrow$ không đi Đà Lạt $\Rightarrow$ không được thưởng.
Suy luận đúng (Modus Tollens).

Bài 1.3: *Dịch các câu thành biểu thức logic.*
Gọi:

- $R(x)$: x là chim ruồi
- $S(x)$: x có màu sặc sỡ
- $L(x)$: x là chim lớn
- $H(x)$: x sống bằng mật ong
- $G(x)$: x có màu xám
- $N(x)$: x là chim nhỏ

a) $\forall x(R(x) \to S(x))$

b) $\forall x(L(x) \to \neg H(x))$

c) $\forall x(\neg(L(x) \wedge H(x)) \to G(x))$

d) $\forall x(R(x) \to N(x))$

Bài 1.4: *Dịch các câu thành biểu thức logic có lượng từ.*
Gọi $L(x, y)$: x yêu y.

a) $\forall x\, L(x, Mai)$

b) $\forall x\, \exists y\, L(x, y)$

c) $\exists x\, \forall y\, L(y, x)$

d) $\neg\exists x\, \forall y\, L(x, y)$

e) $\exists x\, [\forall y\, \neg L(x, y) \vee \forall y\, \neg L(y, x)]$

f) $\exists x\, \neg L(Nam, x)$

g) $\exists x\, [\forall y\, L(y, x) \wedge \forall z\, (\forall y\, L(y, z) \to z = x)]$

h) $\exists x\, \exists y\, [x \neq y \wedge L(Tun, x) \wedge L(Tun, y) \wedge \forall z\, (L(Tun, z) \to (z = x \vee z = y))]$

Bài 1.5: *Kiểm tra mô hình suy diễn.* Cho hai mệnh đề:

$$(1)\ \forall x(P(x) \to (Q(x) \wedge R(x))), \quad (2)\ \forall x(P(x) \wedge F(x))$$

Từ (2) suy ra $P(x)$ đúng với mọi x, kết hợp với (1) ta được:

$$P(x) \to (Q(x) \wedge R(x)) \Rightarrow Q(x) \wedge R(x) \Rightarrow R(x)$$

Mà (2) cũng cho $F(x)$ đúng với mọi x, nên $R(x) \wedge F(x)$ đúng với mọi x.
Do đó, ta suy ra:

$$\boxed{\forall x(R(x) \wedge F(x))}$$

Suy luận là **đúng**.

Bài 1.6: *Chứng minh các cặp mệnh đề sau tương đương hoặc không.*

a) $(P \to Q) \to R$ và $P \to (Q \to R)$
Không tương đương.
Xét phản ví dụ: $P = \mathrm{T}, Q = \mathrm{F}, R = \mathrm{T}$. Khi đó:

$$(P \to Q) = \mathrm{F}, \quad (P \to Q) \to R = \mathrm{T}$$

$$(Q \to R) = \mathrm{F} \to \mathrm{T} = \mathrm{T}, \quad P \to (Q \to R) = \mathrm{T}$$

Tuy cho kết quả giống nhau, nhưng với $P = T, Q = T, R = F$ thì:

$$(P \to Q) = T, \quad (P \to Q) \to R = F$$

$$Q \to R = T \to F = F, \quad P \to (Q \to R) = T \to F = F$$

Có những trường hợp kết quả khác nhau.
$\Rightarrow$ Hai mệnh đề **không tương đương**.

b) $\neg P \leftrightarrow Q$ và $P \leftrightarrow \neg Q$
Tương đương.
Vì phủ định hai vế và đổi vị trí vẫn giữ ý nghĩa tương đương logic.
Có thể xác nhận bằng bảng chân trị, hai mệnh đề luôn cho cùng giá trị.

c) $\neg(P \leftrightarrow Q)$ và $\neg P \leftrightarrow Q$
Không tương đương.
Xét bảng chân trị:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$\neg(P \leftrightarrow Q)$	$\neg P$	$\neg P \leftrightarrow Q$
T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	F	T
F	T	F	T	T	T
F	F	T	F	T	F

Hai mệnh đề cho giá trị khác nhau trong một số trường hợp không tương đương.

d) $\neg\exists x \forall y\, P(x,y)$ và $\forall x \exists y\, \neg P(x,y)$
Tương đương.
Theo quy tắc phủ định lượng từ:

$$\neg\exists x \forall y\, P(x,y) \equiv \forall x \exists y\, \neg P(x,y)$$

e) $(\forall x\, P(x)) \wedge A$ và $\forall x(P(x) \wedge A)$
Tương đương nếu A không chứa biến x.
Vì trong trường hợp đó, A là một mệnh đề độc lập có thể phân phối vào hoặc ra ngoài lượng từ mà không ảnh hưởng logic.

f) $(\exists x\, P(x)) \wedge A$ và $\exists x(P(x) \wedge A)$
Tương đương nếu A không chứa biến x.
Giải thích tương tự câu (e): nếu A không phụ thuộc vào x, việc đặt nó bên trong hoặc ngoài lượng từ $\exists$ không làm thay đổi ý nghĩa mệnh đề.

Bài 1.7: *Kiểm tra suy luận.*

a) Từ chuỗi điều kiện, suy ra $X_5 = F \Rightarrow X_4 \vee X_5 = F \Rightarrow X_3 = F \Rightarrow (\neg X_1 \vee X_2) = F \Rightarrow X_1 = T, X_2 = F$
$\Rightarrow$ suy luận đúng.

b) Biểu thức $((P \to ((Q \vee R) \wedge S)) \wedge P) \to ((Q \vee R) \wedge S)$ là hằng đúng do áp dụng Modus Ponens.

Bài 1.8: *Dịch sang biểu thức mệnh đề.*

- $P(x)$: x là đứa bé
- $Q(x)$: x tư duy logic
- $R(x)$: x cai quản cá sấu
- $S(x)$: x bị coi thường

a) $\forall x(P(x) \to \neg Q(x))$

b) $\forall x(R(x) \to \neg S(x))$

c) $\forall x(\neg Q(x) \to S(x))$

d) $\forall x(P(x) \to \neg R(x))$

e) Không suy ra được (d) từ (a), (b), (c) vì không có liên hệ trực tiếp giữa $P(x)$ và $R(x)$.