BÀI TẬP MÔN TOÁN RỜI RẠC

Phần 1. Logic mệnh đề và logic vị từ

Bài 1.1: Chứng minh các biểu thức sau là hằng đúng bằng hai cách (lập bảng chân trị và dùng luật logic):

a) $((P \to Q) \land P) \to Q$

b) $P \land Q \to P$

c) $\neg(P \land Q) \land P \to \neg Q$

d) $(P \to (Q \land R)) \to ((P \to Q) \land (P \to R))$

e) $((P \land Q) \leftrightarrow P) \to (P \to Q)$

Cách 1: Dùng bảng chân trị

a) $((P \to Q) \land P) \to Q$

P	Q	$P \to Q$	$(P \to Q) \land P$	Toàn biểu thức
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

$\Rightarrow$ Biểu thức luôn đúng.

b) $P \land Q \to P$

P	Q	$P \land Q$	Toàn biểu thức
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

$\Rightarrow$ Biểu thức luôn đúng.

c) $\neg(P \land Q) \land P \to \neg Q$

P	Q	$P \land Q$	$\neg(P \land Q)$	$\neg(P \land Q) \land P$	Toàn biểu thức
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	T	T
F	T	F	T	F	T
F	F	F	T	F	T

$\Rightarrow$ Biểu thức luôn đúng.

d) $(P \to (Q \land R)) \to ((P \to Q) \land (P \to R))$

P	Q	R	$Q \land R$	$P \to (Q \land R)$	$(P \to Q)$	$(P \to R)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T	F
T	F	T	F	F	F	T
T	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T

$\Rightarrow$ Biểu thức luôn đúng.

e) $((P \land Q) \leftrightarrow P) \to (P \to Q)$

P	Q	$P \land Q$	$(P \land Q) \leftrightarrow P$	$P \to Q$	Toàn biểu thức
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	F	T	T	T
F	F	F	T	T	T

$\Rightarrow$ Biểu thức luôn đúng.

Cách 2: Dùng luật logic

a)

$$((P \to Q) \land P) \to Q \quad \text{áp dụng Modus Ponens}$$

b)

$$P \land Q \to P \quad \text{(luật loại bỏ hội - conjunction elimination)}$$

c)

$$\begin{aligned} \neg(P \land Q) \land P &\equiv P \land (\neg P \lor \neg Q) \\ &\equiv (P \land \neg P) \lor (P \land \neg Q) \\ &\Rightarrow \text{Biểu thức đúng } \Rightarrow \neg Q \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} P \to (Q \land R) &\equiv \neg P \lor (Q \land R) \\ &\Rightarrow (\neg P \lor Q) \land (\neg P \lor R) \\ &\equiv (P \to Q) \land (P \to R) \end{aligned}$$

e)

$$(P \wedge Q) \leftrightarrow P \Rightarrow \text{chỉ đúng khi } P \to Q \text{ và } Q \to P$$
$$\Rightarrow \text{Khi biểu thức đúng, thì } P \to Q$$

Bài 1.2a

Chứng minh mệnh đề sau là hằng đúng:

$$((X_1 \to X_2) \wedge (\neg X_3 \vee X_4) \wedge (X_1 \vee X_3)) \to (\neg X_2 \to X_4)$$

Giả sử:

$$\begin{aligned} &(1) \quad X_1 \to X_2 \\ &(2) \quad \neg X_3 \vee X_4 \\ &(3) \quad X_1 \vee X_3 \end{aligned}$$

Ta xét 2 trường hợp:
TH1: X_1 đúng. Từ (1) suy ra X_2 đúng. Vậy $\neg X_2$ sai $\Rightarrow$ mệnh đề $\neg X_2 \to X_4$ đúng (do tiền đề sai).
TH2: X_1 sai. Từ (3) suy ra X_3 đúng. Khi đó (2) suy ra X_4 đúng. Do đó, $\neg X_2 \to X_4$ vẫn đúng.
Kết luận: Mệnh đề luôn đúng trong mọi trường hợp $\Rightarrow$ là hằng đúng.

Bài 1.2b

Gọi:

- P: An được thưởng cuối năm
- Q: An đi Đà Lạt
- R: An thăm Thiền Viện

Mệnh đề tương đương:

$$\begin{aligned} &(1) \quad P \to Q \\ &(2) \quad Q \to R \\ &(3) \quad \neg R \\ \text{Kết luận:} \quad &\therefore \neg P \end{aligned}$$

Lập luận:

- Từ (2) và (3): Modus Tollens $\Rightarrow \neg Q$
- Từ (1) và $\neg Q$: Modus Tollens $\Rightarrow \neg P$

Kết luận: Suy luận là hợp lệ.

Bài 1.3 – Dịch các câu thành biểu thức logic vị từ

Gọi:

- $R(x)$: x là chim ruồi (hummingbird)
- $B(x)$: x là chim lớn (big bird)
- $C(x)$: x có màu sắc sặc sỡ (is colorful)
- $M(x)$: x sống bằng mật ong (lives on nectar)
- $G(x)$: x có màu xám (is gray)
- $S(x)$: x là chim nhỏ (is small)

a) Tất cả chim ruồi đều có màu sắc sặc sỡ:
$\forall x\,(R(x) \to C(x))$

b) Không có con chim lớn nào sống bằng mật ong:
$\forall x\,(B(x) \to \neg M(x))$

c) Các chim lớn không sống bằng mật ong đều có màu xám:
$\forall x\,(B(x) \land \neg M(x) \to G(x))$

d) Chim ruồi đều nhỏ:
$\forall x\,(R(x) \to S(x))$

Bài 1.4 – Dịch các câu thành biểu thức logic

Gọi:

- $L(x, y)$: x yêu y
- Mai, Nam, Tun: các hằng số đại diện cho người cụ thể

a) Mọi người đều yêu Mai:
$\forall x\, L(x, \mathrm{Mai})$

b) Mọi người đều yêu một ai đó:
$\forall x\, \exists y\, L(x, y)$

c) Có một người mà tất cả mọi người đều yêu:
$\exists y\, \forall x\, L(x, y)$

d) Không có ai yêu tất cả mọi người:
$\neg \exists x\, \forall y\, L(x, y)$
hoặc tương đương: $\forall x\, \exists y\, \neg L(x, y)$

e) Có một người ế (họ không yêu ai hoặc không ai yêu họ):
$\exists x\ [(\forall y\, \neg L(x, y)) \lor (\forall y\, \neg L(y, x))]$

f) Có một người mà Nam không yêu:
$\exists y\, \neg L(\text{Nam}, y)$

g) Có đúng một người mà tất cả mọi người đều yêu:
$\exists y\, [\forall x\, L(x, y) \wedge \forall z\, (\forall x\, L(x, z) \rightarrow z = y)]$

h) Có đúng hai người mà Tuấn yêu:
$\exists x \exists y\, \big[x \neq y \wedge L(\text{Tuấn}, x) \wedge L(\text{Tuấn}, y) \wedge \forall z\, \big(L(\text{Tuấn}, z) \rightarrow (z = x \vee z = y)\big)\big]$

Bài 1.5 – Kiểm tra tính hợp lệ của suy diễn

Cho các mệnh đề:

a) $(\forall x)(P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x)))$

b) $\dfrac{(\forall x)(P(x) \wedge F(x))}{(\forall x)(R(x) \wedge F(x))}$

Phân tích:

- Từ b): Với mọi x, ta có $P(x)$ và $F(x)$ đều đúng.
- Kết hợp với a): Vì $P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge R(x))$, nên nếu $P(x)$ đúng thì $Q(x)$ và $R(x)$ đều đúng.
- Do đó, với mọi x:

$$P(x) \wedge F(x) \Rightarrow Q(x) \wedge R(x), \text{ mà } F(x) \text{ đã có} \Rightarrow R(x) \wedge F(x)$$

Kết luận: Suy diễn từ hai mệnh đề trên là **hợp lệ**. Mô hình là **đúng**.

Bài 1.6 – Chứng minh các cặp mệnh đề

a) $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$ và $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ không tương đương

Phản ví dụ:
Xét bảng chân trị:

P	Q	R	$(P \rightarrow Q) \rightarrow R$	$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
T	F	F	F	F
T	F	T	T	T
T	T	F	F	F
F	T	F	T	T
F	T	T	T	T

Dòng 4: $(P \rightarrow Q) \rightarrow R = T, P \rightarrow (Q \rightarrow R) = T$ Dòng 1: $(P \rightarrow Q) \rightarrow R = F$, $P \rightarrow (Q \rightarrow R) = F \rightarrow$ Có thể trùng nhau ở vài dòng, nhưng tổng thể **không luôn giống nhau $\Rightarrow$ Không tương đương.**

—

b) $\neg P \leftrightarrow Q$ **và** $P \leftrightarrow \neg Q$ **tương đương**

Chứng minh: Xét lại bảng chân trị:

P	Q	$\neg P$	$\neg P \leftrightarrow Q$	$P \leftrightarrow \neg Q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	F	T	F	F

$\Rightarrow$ Hai biểu thức có giá trị giống nhau ở mọi dòng $\Rightarrow$ **Tương đương.**

—

c) $\neg(P \leftrightarrow Q)$ **và** $\neg P \leftrightarrow Q$ **tương đương**

Phân tích:
- $\neg(P \leftrightarrow Q)$: Hai mệnh đề khác nhau về giá trị chân trị. - $\neg P \leftrightarrow Q$: Tương đương logic giữa phủ định P và Q.

Xét bảng chân trị:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$\neg(P \leftrightarrow Q)$	$\neg P \leftrightarrow Q$
T	T	T	F	F
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	T	F	F

$\Rightarrow$ Hai biểu thức **có cùng giá trị** ở mọi dòng $\Rightarrow$ **Tương đương.**

—

d) $\neg\exists x\forall y P(x,y)$ **và** $\forall x\exists y\neg P(x,y)$ **tương đương**

Dùng luật phủ định lượng từ:

$$\neg\exists x\forall y P(x,y) \equiv \forall x\neg\forall y P(x,y) \equiv \forall x\exists y\neg P(x,y)$$

$\Rightarrow$ **Tương đương.**

—

e) $(\forall x P(x)) \wedge A$ **và** $\forall x(P(x) \wedge A)$ **tương đương (A là mệnh đề không chứa lượng từ)**

Giải thích:
- Vế trái: A độc lập, không phụ thuộc vào x. - Vế phải: A nằm trong phạm vi của lượng từ $\forall x$, nhưng vì A không phụ thuộc x, nên có thể đưa ra ngoài.

$$\forall x(P(x) \wedge A) \equiv (\forall x P(x)) \wedge A$$

$\Rightarrow$ **Tương đương.**

—

f) $(\exists x P(x)) \wedge A$ **và** $\exists x(P(x) \wedge A)$ **tương đương (A là mệnh đề không chứa lượng từ)**

Giải thích:

- Vế trái: $P(x)$ đúng với một giá trị x, và A đúng. - Vế phải: Tìm được một x sao cho $P(x)$ đúng và A cũng đúng. Vì A đúng với mọi x, điều kiện là như nhau.

$$(\exists x P(x)) \wedge A \equiv \exists x(P(x) \wedge A)$$

$\Rightarrow$ **Tương đương.**

Bài 1.7

a) Suy luận dưới đây có đúng không?

- Giả thuyết:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad (\neg X_1 \vee X_2) \to X_3 \\
&(2) \quad X_3 \to (X_4 \vee X_5) \\
&(3) \quad \neg X_4 \wedge \neg X_6 \\
&(4) \quad \neg X_6 \to \neg X_5
\end{aligned}$$

- Kết luận cần chứng minh: X_1

Diễn giải suy luận:

- Từ (3): $\neg X_4$ và $\neg X_6$
- Từ (4) và $\neg X_6 \Rightarrow \neg X_5$
- Vậy: $\neg X_4 \wedge \neg X_5 \Rightarrow \neg(X_4 \vee X_5)$
- Do đó: phủ định của hệ quả trong (2), nên $X_3 \to (X_4 \vee X_5)$ là sai nếu X_3 là đúng
- Mệnh đề kéo theo chỉ sai khi mệnh đề đầu đúng và mệnh đề sau sai $\Rightarrow X_3 = \text{true}$
- Từ (1): để $X_3 = \text{true}$ thì $(\neg X_1 \vee X_2)$ phải là true, hoặc mệnh đề kéo theo vô điều kiện
- Nhưng nếu $(\neg X_1 \vee X_2)$ là false, thì kéo theo bị sai $\Rightarrow$ mâu thuẫn
- Giả sử $X_2 = \text{false}$, để $(\neg X_1 \vee X_2) = \text{true}$ thì $\neg X_1 = \text{true} \Rightarrow X_1 = \text{false}$
- Nhưng cuối cùng cần chứng minh $X_1 = \text{true} \Rightarrow$ mâu thuẫn $\Rightarrow$ **không chứng minh được**

Kết luận: Suy luận **không hợp lệ** – ta không thể suy ra X_1 từ các giả thiết đã cho.

—

b) Dùng mô hình suy diễn, kiểm tra mệnh đề sau:

$$((P \to ((Q \lor R) \land S)) \land P) \to ((Q \lor R) \land S)$$

Phân tích:

- Giả sử mệnh đề bên trái là đúng:
  - $P \to ((Q \lor R) \land S)$ là đúng
  - P đúng
- Khi đó, từ P và mệnh đề kéo theo, ta suy ra $((Q \lor R) \land S)$ là đúng.

Vì vậy, toàn bộ mệnh đề là một hệ quả lôgic đúng.
Kết luận: Biểu thức là hằng đúng.
Chứng minh bằng suy diễn:

(1) $P \to ((Q \lor R) \land S)$
(2) P
(3) Từ (1) và (2): suy ra $((Q \lor R) \land S)$
(4) Vậy toàn mệnh đề đúng.