

基于多波束测线布设优化模型的研究

摘要

近年来,随着多波束测深技术的广泛应用以及人们对海底地形进行高精度测量的迫切需求,海洋测深正向全覆盖、高精度、高效率的趋势发展。而在海区测深技术中,测线布设作为一个重要环节,具有重要的实际意义。本文建立了多波束测线覆盖宽度及重叠率随相关参数的数学模型,并且研究了多波束测线的布设优化问题。

针对问题一:首先对题目条件下任意一条测线上的测量船,根据条带和海底坡面的几何关系,利用解析几何知识,确定覆盖宽度与各个参数的关系式。接着,对非平坦海底,为保证测量的便利性和数据的完整性,推广定义相邻条带之间的重叠率,分别确立了本问中海水深度,覆盖宽度,重叠率与测线距中心点处的距离的关系式。最后,表1的计算结果将以表格形式展示并保存在文件“result1.xlsx”中。

针对问题二:首先定义海域中心为原点的世界坐标系,并且对于一个确定的 β ,以测量船为坐标原点建立自然坐标系。通过投影的方法,将三维坐标关系转化为平面几何关系,利用几何知识,确定与测线方向垂直平面的坡度 α' 与 β 的函数关系式及测线方向竖直平面的坡度 α'' 与 β 的函数关系式。于是,基于问题一求出的覆盖宽度 W 表达式,计算新的覆盖宽度 W'_i 随 β 和测量船距海域中心处距离的变化关系。代入数值,编程计算得到的结果将以表格形式展示并保存在文件“result2.xlsx”中。

针对问题三:考虑到相邻测线可能不平行,类似问题一,本文对不平行测线相邻条带之间的重叠率进行拓展定义。在重叠率应有10%~20%及全覆盖的约束条件下,我们排除了测线与任一海域边界不平行的情况。于是,测线设计仅需考虑平行测线。进一步,对平行测线作分类讨论,建立多元单目标优化问题,利用内点法,遍历法等算法,分别计算测线沿南北或东西方向的最优解并进行比较,最后得到测量长度最短且满足约束条件的设计方案为测线沿南北方向平行分布,测线长度为62海里。

针对问题四:首先分析题目所给附件的数据,将数据可视化,并用曲线拟合,可以发现,曲面 $Z = 3.1734 * X^2 + 0.0095 * XY + 0.0024 * Y^2 + 0.0000 * X + -0.0000 * Y + 0.0000$ 与所给数据拟合相关系数高于96%,于是,本文将该海域进行近似处理为非线性平坦海底,并参考已有实验可知,测线方向应该沿梯度方向。进一步,计算出梯度以后,可以发现梯度沿某一方向上的数值是相等地,从而设计的测线也是相互平行的。

关键字: 多波束测深 投影法 多元单目标优化 线性规划 内点法

一、问题重述

1.1 问题背景

水深测量是海洋资源探测的首要基本工作之一，是实施海洋资源开发和利用的不可或缺的基本步骤。随着声呐系统等技术的深入研究与实践，多波束测深系统在单波束测深技术的基础上发展起来。与传统的单波束测深技术相比，多波束测深一次性能够发射数十甚至上百个声波束，在多个方面都表现出了显著的优势，包括更广阔的测量范围、更快的测量速度与更高的精度和效率。在实际探测任务中，往往时间紧迫，耗资巨大，因此在确保多波束测深系统工作质量的前提下，如何科学合理地规划测线以节约测量成本，优化工作效率，具有重要的理论和实际意义。

1.2 问题要求

问题 1：今测线下方海底呈一与水平面成 α 角度的坡面，据此建立多波束测深的覆盖宽度 W 及相邻条带之间重叠率 η 的数学模型。进一步，设换能器的开角是 120° ，坡度 $\alpha = 5^\circ$ ，海域中心点深处为 $70m$ ，依据所建模型，计算给定位置海水深度、覆盖宽度及与前一条测线的重叠率，并将结果保存到 result1.xlsx 中。

问题 2：考虑一矩形待测海域，在问题 1 的条件下，当测线相对于海底坡面法线在水平面上的投影方向成角度 β 时，建立多波束测深覆盖宽度的数学模型。进一步，设换能器的开角是 120° ，坡度 $\alpha = 5^\circ$ ，海域中心点深处为 $120m$ ，依据所建模型，计算给定位置波束测深的覆盖宽度，并将结果保存到 result2.xlsx 中。

问题 3：仍设多波束换能器的开角为 120° ，为一个南北长 $2NM$ 、东西宽 $4NM$ ，海域中心点深 $110m$ ，海底地貌呈 5° 坡面（东高西低）的矩形海域设计一组测量长度最短的测线，要求测深波束能够覆盖整个海域，并且相邻条带间的重叠率介于 10% 与 20% 之间。

问题 4：在给定的另一片矩形海域内，利用历史测深数据，设计满足题目要求的测线，同时分别计算三个指标：1. 测线总长，2. 漏测海域占总给定海域面积的百分比，3. 重叠率超过 20% 部分的测线总长。

二、问题分析

2.1 问题 1 的分析

对于海底地貌平坦且测线平行的情形，题中给出了测量波束覆盖宽度重叠率的计算公式 $\eta = 1 - \frac{d}{W}$ 。注意到本文要研究的是非平坦海底，我们应当对 η 的定义做相应的推广。考虑到多波束工作原理 [1]，相邻波束夹角相同时，边缘波束在同一深度处更为稀疏 [2]（见所给题目中的图 2），加上表层声速变化对边缘影响尤为明显 [3]，从而，为保证测量的便利性和数据的完整性，相邻条带的重叠率应在 10% ~ 20%，基于此，本文针对不平行的测线或者海底非平坦的情况，对相邻条带之间的重叠率进行了定义。

根据题意，我们需要在海底呈起伏坡面时，建立多波束测探的覆盖宽度及相邻条带之间重叠率的数学模型。由于本题仅涉及二维平面内波束测探的覆盖宽度，可以利用简单的平面几何学，在船只在海底坡面与水平面成角度 α 的海平面上，换能器开角为 θ 时，建立平面内的三角函数关系，推导多波束测深的覆盖宽度和相邻条带之间重叠率的数量关系。

进一步，设多波束换能器的开角是 120° ，当坡面角度 $\alpha = 1.5^\circ$ ，海域中心点处深度为 $70m$ ，依据所建模型，借助程式计算，可以得到各测线的海水宽度、覆盖宽度及测线重叠率。

2.2 问题 2 的分析

问题 2 在问题 1 的基础上增加了测线相对于海底坡面的偏移角度 β ，导致测线下方的海底并非一条等高线。因之，在同一测线上，随着船只远离海域中心点，波束测深范围也会发生相应变化。为此，对于不同船只位置，需要计算测量波束在海底坡面上的投影与水平面之间的夹角及其行进方向与其在坡面上的投影之间的夹角，求得对应位置波束测深范围。

进一步，设换能器的开角是 120° ，坡度 $\alpha = 5^\circ$ ，海域中心点深处为 $120m$ 时，对于表 2 中各偏移角度 β ，依据所建模型，借助程式计算，可以得到对应船只位置、偏移角度的波束测深范围。

2.3 问题 3 的分析

本题要求针对给定海域设计最短测线，以覆盖整个待测海域。由于相邻条带间的重叠率不能超过 20%，所以测线两两不交。事实上，现行的海底多波束测量技术标准要求布置的测线与海底等高线方向平行，并且为了减小由船只转弯等因素导致的测量误差，往往要求测线设计为平行直线。因此，对于题中所给东高西低的海底地貌，可以设计一组南北走向的平行直线，建立关于测线条数及其总长度的优化模型。

2.4 问题 4 的分析

在问题 4 中，为设计尽可能满足题目要求的测线，我们需要分析海底的大致地形。对附件中的数据作图，并用软件拟合海底面，将该地形与 [5] 中分析过的非线性平坦海底比较，符合非线性平坦海底的数学模型，从而知道测线方向应该设计成沿梯度方向。于是，我们只需要确定测线间隔。由于问题 4 中换能器开角并非固定，所以我们将其视为一个变量，基于此，对一定间隔的相邻测线，其重叠率可以在一定范围内改变，也就是说，只要间隔合理，可以避免重叠率超过 20%。

三、 模型假设

- 1. 待测海域上没有渔网和礁石等障碍需要测量船只避让。
- 2. 忽略测量船横摇或纵摇对声波信号的发射和接收误差。
- 3. 换能器开角在测量过程中保持稳定。

四、 符号说明

表 1 符号说明

符号	含义
W	测深波束覆盖宽度
D	海域中心处的海水深度
η	相邻条带之间的重叠率
L	南北方向矩形海域的长度
R	东西方向矩形海域的长度
ϕ	漏测海区占总待测海域面积的百分比
x, y, z	世界坐标系下的坐标
α	坡度
θ	换能器开角

五、模型建立与求解

5.1 问题 1：覆盖宽度变化模型建立与求解

5.1.1 建立 W 与坡度 α 、换能器开角 θ 及海水深度 D 的关系

任取问题一中某一条测线上的船只为原点建立自然坐标系（如图1），其中 y 方向为垂直纸面向外。在该坐标系中，记船投影在坡面上的点为 $(0, D)$ ，沿坡向上，下方向上最外侧波束与坡面的交点为 (a_1, b_1) ， (a_2, b_2) 。

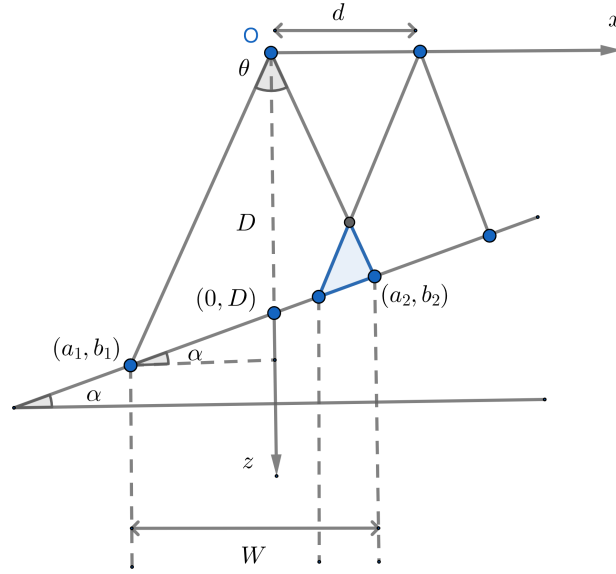


图 1 求解 W 表达式的几何示意图

由图可知，我们得到下列几何关系式：

$$\tan \alpha = \frac{b_1 - D}{0 - a_1}$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{0 - a_1}{b_1 - 0}$$

另一方面

$$\tan \alpha = \frac{D - b_2}{a_2 - 0}$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{0 - a_1}{b_1 - 0}$$

联立四个式子，化简可求解得

$$a_1 = \frac{D \tan \frac{\theta}{2}}{\tan \alpha \tan \frac{\theta}{2} - 1}$$

及

$$a_2 = \frac{D \tan \frac{\theta}{2}}{\tan \alpha \tan \frac{\theta}{2} + 1}$$

其中 $\alpha \in [0^\circ, 90^\circ)$ 。根据覆盖宽度定义，我们可以得到

$$W = a_2 - a_1 = \frac{2D \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \alpha \tan^2 \frac{\theta}{2}} \quad (1)$$

5.1.2 W 与 η 随船坐标变化的关系模型的建立与求解

Step 1 : W_i 表达式的确立

以海域中心点处为坐标原点，建立如图所示坐标系（图），其中 x, y, z 轴对应的单位向量分别为 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ （由于 $\mathbf{e}_3 \cdot (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) > 0$ ，故 $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$ 满足右手系，可以建立坐标系）。在该世界坐标系下，根据题目表 1 给定各测线，记第 i 条测线上的测量船的横坐标为 x_i ，测量船的第 i 个位置是 (x_i, y_i, z_i) ，其波束覆盖边缘点分别是 $(x_1^{(i)}, y_1^{(i)}, z_1^{(i)}), (x_2^{(i)}, y_2^{(i)}, z_2^{(i)})$ ，此时

$$x_i = (i - 5) \times d, d = 200, i = 1, 2, \dots, 9$$

接 5.1.1，令 $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}$ 分别为第 i 只测量船波束覆盖边缘点在船体自然坐标系中的横坐标，则有

$$\begin{aligned} x_1^{(i)} &= x_i + a_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} &= x_i + a_2^{(i)} \end{aligned} \quad (2)$$

于是，根据(1)，对第 i 只测量船的覆盖宽度 W_i ，我们有

$$W_i = x_1^{(i)} - x_2^{(i)} = \frac{2D_i \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \alpha \tan^2 \frac{\theta}{2}} \quad (3)$$

其中， D_i 是船在第 i 个位置距离海底的竖直距离，特别地， $D_5 = D$ ，并且有

$$\tan \alpha = \frac{D_5 - D_i}{x_i}$$

即

$$D_i = D_5 - x_i \tan \alpha$$

Step 2 : η_i 表达式的确立

若测线相互平行，我们对相邻条带之间的重叠率进行拓展定义。定义第 i 个位置的测量船与前一个位置的测量波束重叠率为

$$\eta_i = \frac{x_2^{(i)} - x_1^{(i-1)}}{W_i} \quad (4)$$

特别地, 当 $\alpha = 0^\circ$, 即测线下方海底地貌完全平坦且测线间隔相等 (与题目中的图 4 情况一致) 时, 第 i 个位置测量船与前一个位置间距 $d_i = x_i - x_{i-1}$, 并且此时 $x_1^{(i)}$ 与 $x_2^{(i)}$ 关于 x_i 对称, 那么 $x_2^{(i)} - x_1^{(i-1)} = W_i - d_i$, 代入 4 可知, 这与题中所给海底地形平坦条件下 $\eta = 1 - \frac{d}{W}$ 的公式一致。

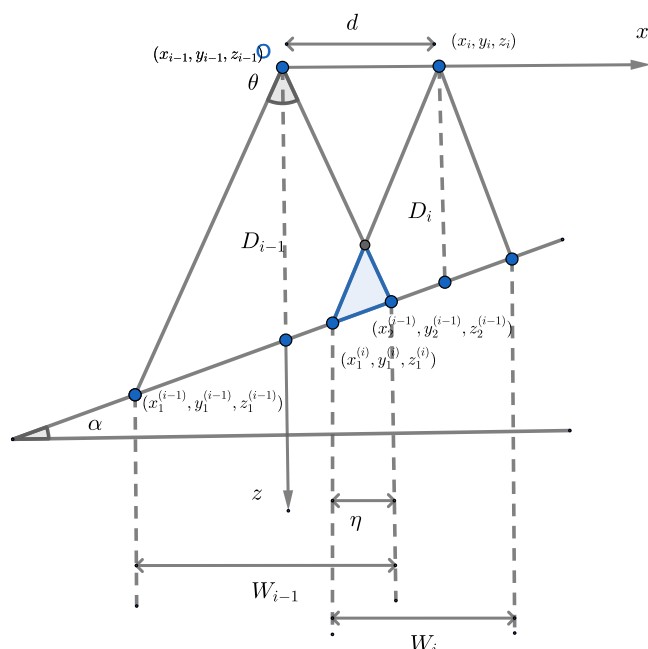


图 2 重叠计算率示意

Step 3 : 计算结果求解

当 $\alpha = 1.5^\circ$, $\theta = 120^\circ$ 时, 根据公式(3)及(4), 编程计算得出结果如下表。结果数据保存在 result1.xlsx 中。

测线距中心点处的距离/m	-800	-600	-400	-200	0	200	400	600	800
海水深度/m	90.949	85.712	80.474	75.237	70.000	64.763	59.526	54.288	49.051
覆盖宽度/m	315.705	297.526	279.346	261.166	242.987	224.807	206.628	188.448	170.269
与前一条测线的重叠率/%	—	0.328	0.284	0.234	0.177	0.110	0.032	-0.061	-0.175

表 2 问题 1 的计算结果

需要注意的是, 若 $\tan^2 \alpha \tan^2 \frac{\theta}{2} \geq 1$, 例如 $\alpha = 45^\circ$ 且 $\theta = 90^\circ$ 时, 探测波束将会越过坡面而覆盖到其外的区域, 从而不再适用(1)计算覆盖宽度。不过, 对于这种情况, 我们总可以调整换能器的开角, 使之有效测量。

5.2 问题 2 的模型建立与求解

通过对问题 2 的分析, 我们知道求解关键在于计算测量波束在海底坡面上的投影与水平面之间的夹角 α' 及测线方向与其在海底坡面投影的夹角 α'' 。方便起见, 分别称之为测线法向夹角及测线方向夹角。通过将问题 1 的坐标系旋转所给偏移角度, 在图中以船初始位置为原点, 波束所在平面朝向纸面内方向为 x' 轴, 测线方向为 y' 轴, 竖直向下方向为 z' 轴建立空间直角坐标系 (右手系), 其正方向所对应单位向量分别为 $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$ 。

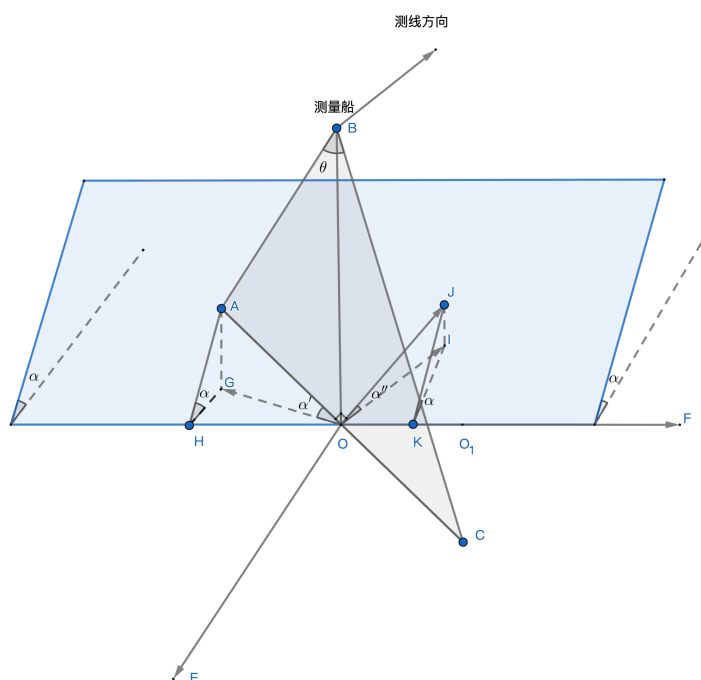


图3 问题2的几何模型

5.2.1 计算测线法向夹角 α'

设坡面法向量在坡面上的单位投影向量是 \mathbf{n}' 。如图 3, 点 B 是测量船所在位置, $\triangle ABC$ 是波束所在平面, 图中黑色线条都处于水平面中, 其中 AC 是在坡面上波束的覆盖宽度, 而 O 是 HF 上一点, 且 $GH \perp OH$, $IK \perp HF$, \overrightarrow{OF} 沿 y 轴方向, $\overrightarrow{OG} = \mathbf{i}'$, $\overrightarrow{OJ} = \mathbf{j}'$, \overrightarrow{BO} 沿 \mathbf{k}' 方向, \overrightarrow{OE} 沿 \mathbf{n}' 方向, AG 及 JI 与水平面垂直。令 $AG = m$, $JI = n$, $\angle AOG = \alpha'$ 是所求测线法向夹角。在 $\triangle AGO$ 中

$$\tan \alpha' = \frac{AG}{OG} = m$$

另一方面，在 $\triangle AGH$ 中，注意 $\angle AHG = \alpha$ 是坡面角度，有

$$\tan \alpha = \frac{AG}{GH}$$

又在 $\triangle OGH$ 中, 由于 $OG = |\mathbf{i}'| = 1$, 故 $GH = |\cos(\beta - 90^\circ)|$, 得到 $\alpha' = \arctan(\sin \beta \tan \alpha)$ 。

5.2.2 计算测线方向夹角 α''

类似5.2.1中的计算, 在图 3 $\triangle OIJ$ 中

$$\tan \alpha'' = \frac{IJ}{OI} = n$$

另一方面, 在 $\triangle IJK$ 中

$$\tan \alpha = \frac{IJ}{IK}$$

又在 $\triangle OIK$ 中, 由于 $OI = |\mathbf{j}'| = 1$, 故 $IK = |\sin(\beta - 90^\circ)|$, 得到 $\alpha'' = \arctan(-\cos \beta \tan \alpha)$ 。

5.2.3 计算波束测深覆盖宽度

当测量船停留在海域中心, 由(1)可以知道其测深波束覆盖宽度

$$W' = \frac{2D \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \alpha' \tan^2 \frac{\theta}{2}} \quad (5)$$

其中 D 是海域中心的水深。在 $\alpha = 1.5^\circ$, $\theta = 120^\circ$ 时, 对于题中表 2 给定测量船各位置数据, 记 $a_i = (i - 1) \times d$ 是测量船在系 $x'y'z'$ 中的第 i 个纵坐标位置, 第 i 次测量的海水深度为 D'_i , $i = 1, 2, \dots, 8$, 此时 $D'_1 = 120m$ 。如图 4, 当船只沿着测线行驶, 海水深度会因为海底坡面上升而逐渐减小, 根据三角函数关系式

$$\tan \alpha'' = \frac{D'_1 - D'_i}{a_i - a_1}$$

于是 $D'_i = D'_1 - (a_i - a_1) \tan \alpha''$, 并且多波束测深覆盖宽度

$$W'_i = \frac{2D'_i \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \alpha' \tan^2 \frac{\theta}{2}}, \quad i = 1, 2, \dots, 8$$

计算结果如下并保存在 result2.xlsx 中。特别地, 当 $\beta = 90^\circ$, 即测线方向与海底坡面等高线方向没有偏移时, 则 $\alpha' = \alpha$, $\alpha'' = 0^\circ$, 此时沿测线方向海水深度不再递减, 保持一致, (5)退化成为(1)。这表明问题 1 的几何模型是问题 2 模型的一种特殊情况, 此外, 将问题 1 海域中心的数据代入问题 2 模型进行求解, 其结果与问题 1 海域中心的结果一致。

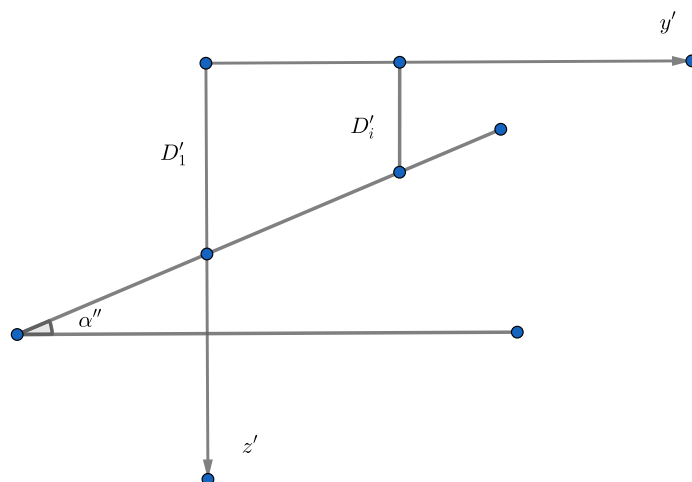


图 4 沿测线方向海水深度递减

覆盖宽度/m		测量船距海域中心点处的距离/海里							
		0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1
测线方向夹角/ $^{\circ}$	0	242.49	292.89	343.28	393.68	444.08	494.48	544.88	595.28
	45	242.74	278.41	314.08	349.76	385.43	421.11	456.78	492.46
	90	242.99	242.99	242.99	242.99	242.99	242.99	242.99	242.99
	135	242.74	207.06	171.39	135.71	100.04	64.37	28.69	-6.98
	180	242.49	192.09	141.69	91.29	40.89	-9.51	-59.91	-110.30
	225	242.74	207.06	171.39	135.71	100.04	64.37	28.69	-6.98
	270	242.99	242.99	242.99	242.99	242.99	242.99	242.99	242.99
	315	242.74	278.41	314.08	349.76	385.43	421.11	456.78	492.46

表 3 问题 2 的计算结果

5.3 问题 3 的模型建立与求解

5.3.1 计划测线方向的分析

在问题分析中我们已经提到，设计测线尽量为平行直线且两两不交。需要进一步指出，在本题中，测线方向应当设计成与待测海域边界平行。

首先，我们拓展对于不平行相邻测线的重叠率。假设存在一条测线 l_1 不与海域边界平行， l_2 是与其相邻的测线之一，根据问题二，我们可以发现由于西深东浅，西侧覆

盖宽度较大,如图 5 所示。基于问题一分析中定义相邻条带之间的重叠率的思想,对 l_2 , 记 W_2 为图中测线 l_2 上一点处的覆盖宽度,该处的重叠率 η 为 W_2 在 l_1 条带内的长度比 W_2 的值。

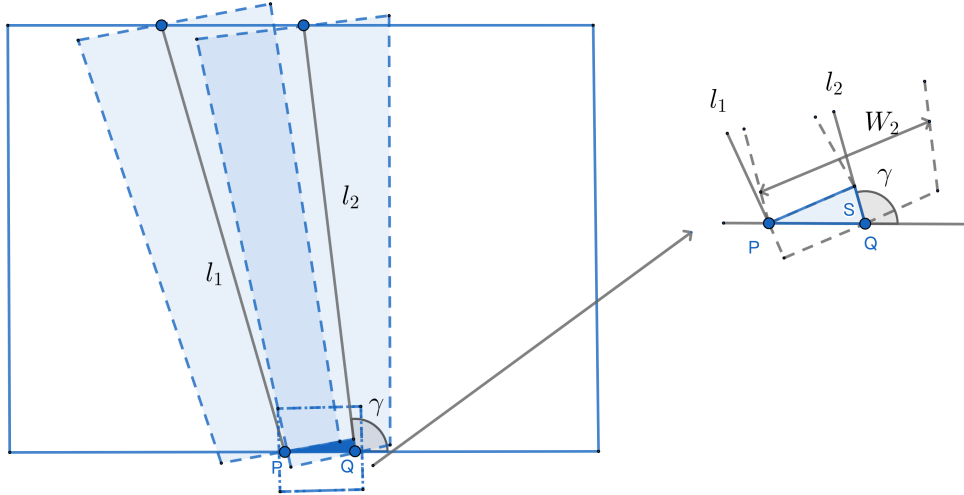


图 5 不平行测线: $\gamma > 90^\circ$

接着,对图 5,深蓝色区块(图 5 左)是 l_1 条带未覆盖但被 l_2 条带覆盖的区域,记为 S 。下面,我们对 l_2 与南边界的夹角 γ 作分类讨论。

Case 1: 若 $\gamma > 90^\circ$ (图 5),那么对 S 区域,由于 l_1 条带未覆盖,于是此处 W_2 在 l_1 条带内的长度为 0,从而此处 $\eta = 0$,不符合约束条件。

Case 2: 若 $\gamma < 90^\circ$,由图可知(图 6),区域 S 无法被测量, $\phi > 0$,不符合约束条件。

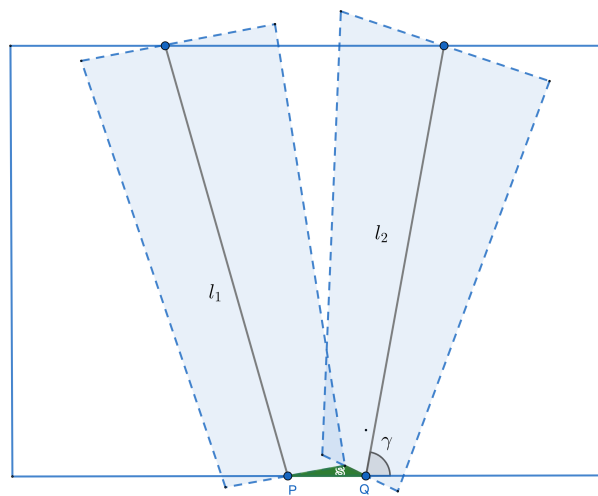


图 6 不平行测线: $\gamma < 90^\circ$

Case 3: 若 $\gamma = 90^\circ$ (图 7),要使得 Q 点处 $\eta \geq 10\%$,则 l_2 西侧条带将与 l_1 相交,记

P 点为 l_1 与南侧边界交点，过点 P 作 W_1 为 l_1 在一点处的覆盖宽度，P 点落在 l_2 条带内，显然，在该点处， $\eta > 20\%$ ，不符合约束条件。

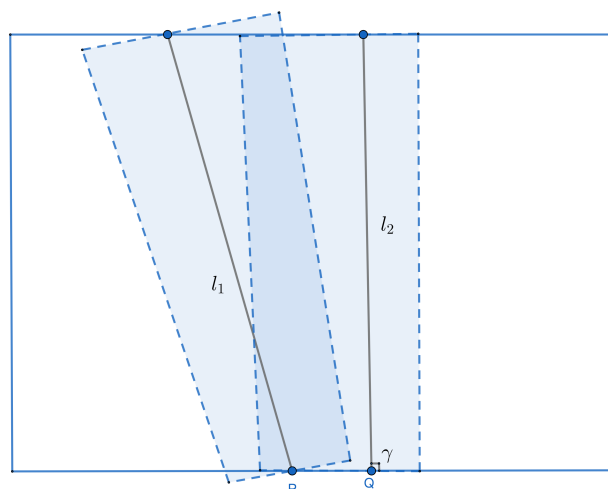


图 7 不平行测线： $\gamma = 90^\circ$

综上，在约束条件

$$\begin{cases} 10\% \leq \eta \leq 20\% \\ \phi = 0 \end{cases}$$

下，不存在与边界都不平行的测线。于是，我们设计的测线方向要么沿南北方向，要么沿东西方向。

5.3.2 计划测线间断情况的分析

接下来，我们对测线是否间断作分类讨论。

Case 1：测线从一条与之垂直边界出发至另一条与之垂直的边界结束。

1. 测线沿东西方向 (图 8)：在这种情况下，不难计算，在西边界，每条测线的覆盖宽度 718m；而在东边界，每条测线的覆盖宽度 44.9m，从而可以验证相邻两条测线的重叠率不可能一直保持在 10% ~ 20% 之间，故测线沿东西方向不间断的方案可以排除。
2. 测线沿南北方向 (图 9)：

Case 2：测线从一条与之垂直边界出发到海域中某一位置间断 (如图 10)。这是为了解决 **Case 1** 中测线沿某一方向不间断时可能出现的重叠率不满足 10% ~ 20% 的情况。显然，在这种情况下，每一组平行测线从西到东的重叠率为从 20% 到 10% 为最优方案。

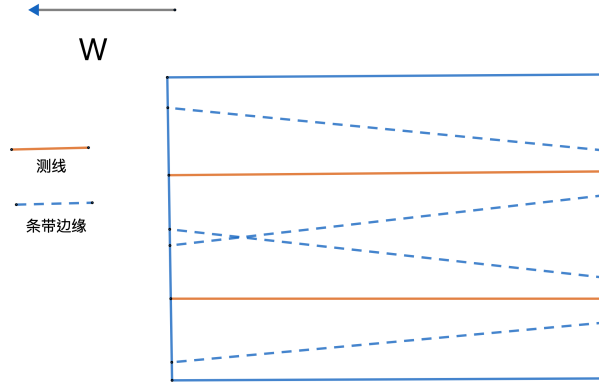


图 8 测线沿东西方向示意图

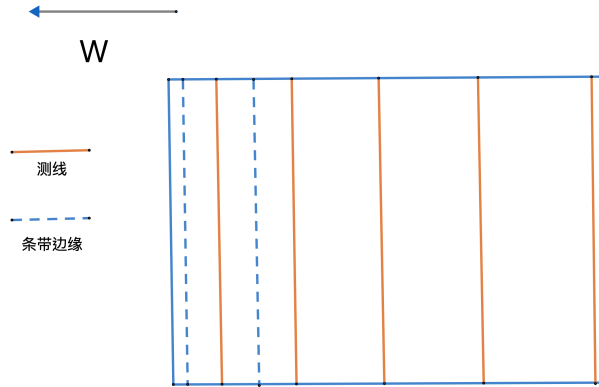


图 9 测线沿南北方向示意图

经过计算,我们发现,对西端位于 $x = -\frac{R}{2}$ 的测线组,末端为 $x = -2827.5$, $W_1 = 718$, 一共有 6 条测线, 每条长度为 878 米, 对于右端位于 $x = \frac{R}{2}$ 的测线组, 当重叠率为 10% 时, $W_n = 44.9$, 至少有 101 条测线, 数值估计所有测线总长超过 80 海里。

5.3.3 单目标优化测线布设模型的建立与求解

基于以上讨论, 本部分对5.3.2中的情况建立单目标含约束的优化模型并求解。

Step 1 : 单目标含约束优化模型的建立

$$\min_N \sum_{i=1}^N |\vec{L}_i|$$

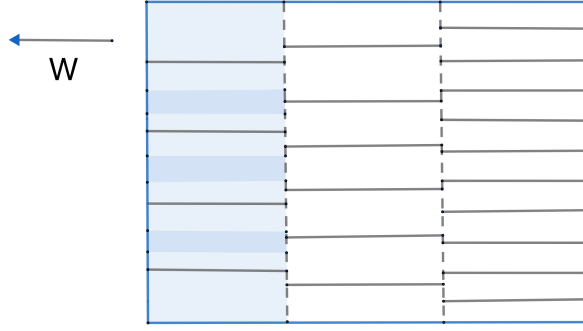


图 10 测线沿东西方向示意图

s.t.

$$\begin{cases} |\vec{L}_i| = L \\ 10\% \leq \eta_i \leq 20\% \\ x_2^{(N)} \geq \frac{R}{2} \\ x_1^N \leq -\frac{R}{2} \\ x_i \leq x_{i+1} \end{cases}$$

对于该优化问题，由（2）和（3），我们可以得到， $\eta_i = \frac{x_2^{(i-1)} - x_1^{(i)}}{x_2^{(i)} - x_1^{(i)}}$ ，其中

$$\begin{aligned} x_2^{(i-1)} &= x_{i-1} + a_2^{(i-1)} \\ &= x_{i-1} + \frac{D_{i-1} \tan \frac{\theta}{2}}{\tan \alpha \tan \frac{\theta}{2} + 1} \\ &= x_{i-1} + (D - x_{i-1} \tan \alpha) \frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\tan \alpha \tan \frac{\theta}{2} + 1} \\ &= \frac{1}{\tan \alpha \tan \frac{\theta}{2} + 1} x_{i-1} + \frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\tan \alpha \tan \frac{\theta}{2} + 1} D \end{aligned}$$

类似的，我们可以得到

$$x_1^{(i)} = \frac{-1}{\tan \alpha \tan \frac{\theta}{2} - 1} x_i + \frac{\tan \frac{\theta}{2}}{\tan \alpha \tan \frac{\theta}{2} - 1} D$$

为了方便表示，我们令 $x_2^{(i-1)} = k_1 x_{i-1} + b_1$, $x_1^{(i)} = k_2 x_i + b_2$, 于是，我们有

$$\eta_i = \frac{k_1 x_{i-1} + b_1 - (k_2 x_i + b_2)}{k_1 x_{(i)} + b_1 - (k_2 x_i + b_2)} \quad (6)$$

Step 2 : 优化子问题建立与求解

为了求解最小的 N ，我们对其从 $N = 2$ 开始遍历，在每一次的遍历中，我们求解子问题如下：

$$\begin{cases} \max f(\mathbf{X}) = x_2^{(N)} = k_1 * x_i + b_1 \\ \text{s.t. } 10\% \leq \eta_i(x_{i-1}, x_i) \leq 20\% \\ x_2^{(N)} \geq \frac{R}{2} \\ x_1^N \leq -\frac{R}{2} \\ x_i \leq x_{i+1} \end{cases}$$

其中 $\mathbf{X} = \{x_i | i \in \{1, 2, \dots, N\}\}$ 。令 $Ans = \max f(\mathbf{X})$ ，当 $Ans \geq \frac{R}{2}$ 时，停止遍历，此时最优值 $N^* = N$ 是最少能够满足完全覆盖待测海域的测线数量， $\mathbf{X}^* = \mathbf{X}$ 是最优测线分布的 x 坐标集合。

这是一个含线性不等式约束的优化问题，我们采用如下基于惩罚函数设计的内点法求解。

惩罚函数法的基本思想将约束问题转化为无约束问题，通过引入惩罚项来惩罚违反约束的解，从而在无约束问题中找到最优解。在内点法中，我们将惩罚函数定义于可行域内，此时最优点将会在可行域内逐步逼近约束边界上的极值点。我们的求解过程如下：

- 记待优化函数为 $f(\mathbf{x}) = -f(\mathbf{X})$ ，不等式约束为 $g_j(\mathbf{x}) \geq 0$ 。
- 设计惩罚函数的形式为 $\phi(x, r) = f(\mathbf{x}) + r^{(k)} \sum_{i=1}^m \frac{1}{g_i(\mathbf{x})}$ ，其中 $r^{(k)}$ 是惩罚因子，且 $\{r^{(k)}\}$ 是递减并趋近于 0 的正数序列。
- 对于每个惩罚因子，我们利用模拟退火算法求解目标函数为 $F(x)$ 的无约束优化问题。
- 当 $F(x)$ 的变化区域稳定时，停止迭代。

Step 3 : 求解结果与分析

下面是基于上述算法的求解结果：此时，测线数量为 $N^* = 31$ ，最短总长度为 $NL = 6200$ 。验证第 N 条测线的右侧覆盖坐标 $x_2^N = 3713$ 满足完全覆盖条件，同时相邻两条测线间的覆盖率如下表：

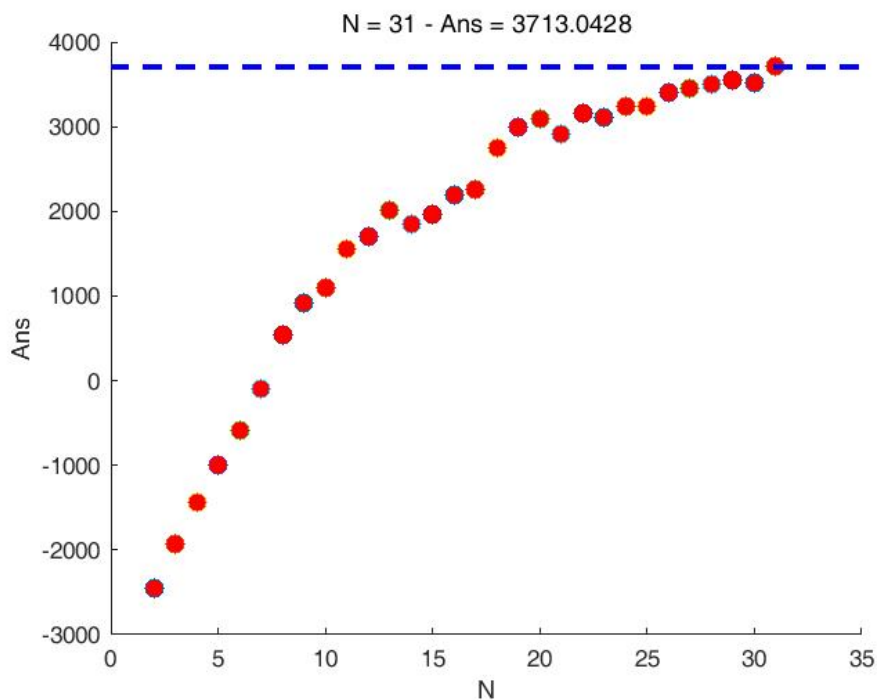


图 11 测线条数的遍历结果

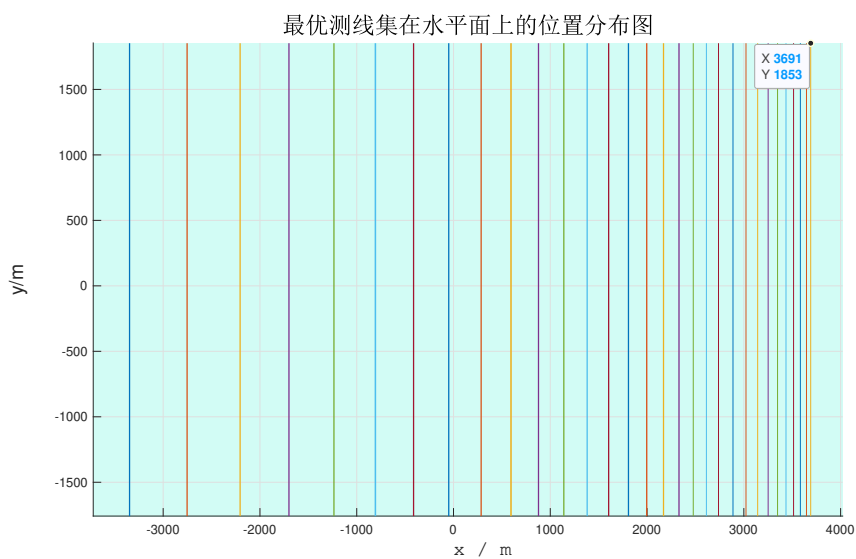


图 12 测线总长最短设计示意

5.4 问题 4 的模型建立与求解

5.5 数据预处理

为了描述待测海域海底地形，首先对所给海底深度数据进行归一化处理。令其中最深处高度为 0，接着对”附件.xlsx”的数据画图，并用二次曲线拟合得到曲面方程 $Z = 3.1734 * X^2 + 0.0095 * XY + 0.0024 * Y^2 + 0.0000 * X + -0.0000 * Y + 0.0000$ ，相

表 4 相邻两条测线间的覆盖率

0.100	0.100	0.100	0.100	0.200	0.200
0.100	0.100	0.100	0.100	0.200	0.200
0.100	0.100	0.100	0.100	0.200	0.200
0.100	0.100	0.100	0.100	0.200	0.200
0.100	0.100	0.100	0.100	0.200	0.100

关系数为 $R = 0.964 > 0.950$ ，拟合效果较好。切换拟合曲面视角，观察到该海域底部大致呈现出抛物面的形状，对于每一个数据点我们计算其梯度（图??），可以发现，该片海域梯度在某一方向上等值。

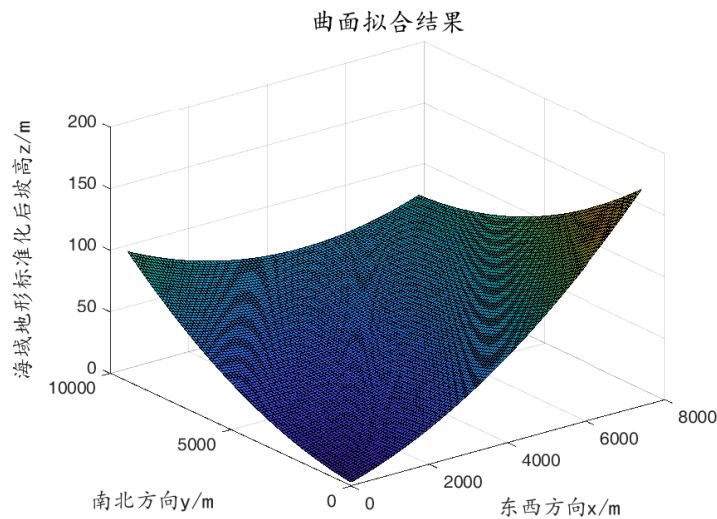


图 13 与问题 4 附件对应的海底地形图拟合的二次曲面

5.5.1 对附件海深数据的分析

对于附件.xlsx 中的海水深度数据，本文要针对这片海域设计多波束测量船的测量布线。在目前的测深系统中，主要采用平行测线和扇形测线 [4]。由于没有了重叠率必须在 10 到 20 范围内的硬性约束，所以相邻测线可不平行且不考虑测线发生间断的情况。在上述模型建立的过程中，我们发现覆盖宽度与测线方向及海深密切相关，重叠率还与测线间隔有关，所以在测线设计的过程中，我们主要考虑测线方向和测线间隔的设计。

在文献 [5] 中，作者通过对几种典型的海底沿不同的方向布设测线进行仿真分析得到结论：沿垂直于等深线的总方向即梯度总方向设计测线既可以完善地显示海底地貌，还可以提高工作效率。并且，可以得到拟合的二次曲面方程为，根据文献 [5] 中非线性平坦海底数学模型的测线布设仿真分析，可知，沿梯度方向布设测线得到的效果更好。故本文设计的测线方向为分别沿子海域的梯度方向。

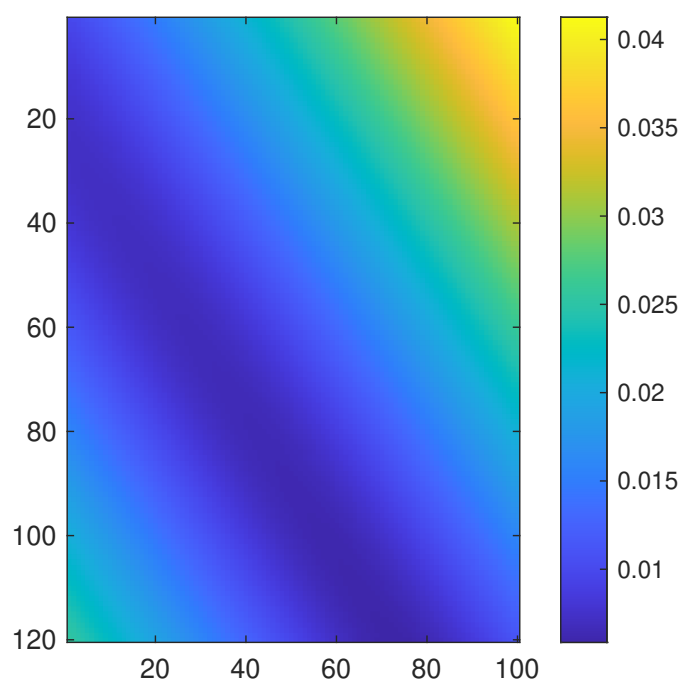


图 14 待测海底梯度分布

根据多波束测深原理，在不同的水深，为保证数据的完整性，换能器开角 θ 有一定的范围 [6]。由于问题 4 中换能器开角并非固定，所以我们将其视为一个变量，基于此，对一定间隔的相邻测线，其重叠率可以在一定范围内改变，也就是说，只要间隔合理，可以避免重叠率超过 20%。

最后，本文的测线布设如图，计算的指标：测线总长度为 154823m，漏测海区占总待测海域面积百分比为 0，重叠率超过 20% 部分的总长度为 0。

六、模型评价

6.1 模型优点

1. 由于在原有相邻条带之间的重叠率定义的基础上作了推广，我们的模型更加贴合实际。
2. 问题一，二所建立的几何关系模型，选取不同的投影面并建立几何关系，将三维模型在平面上进行求解，简易灵活。
3. 问题一二建立的模型可相互验证，体现了逻辑的严谨。

6.2 模型缺点

1. 问题四考虑并非全面，没有其他情况例如曲线或折线等作更深入地分析。

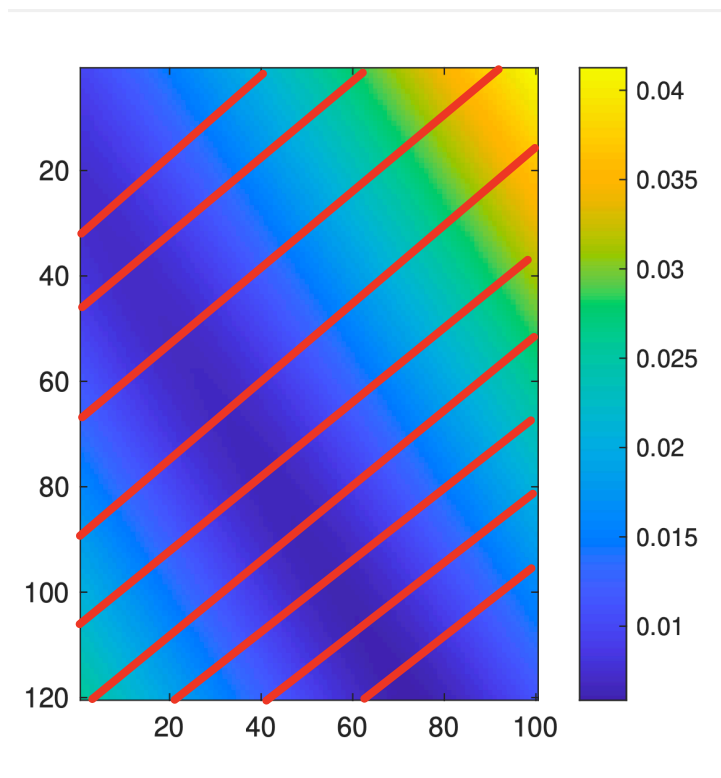


图 15 问题 4 测线布设

2. 没有考虑实际测量中可能产生的误差，导致结果有一定误差。
3. 部分模型求解为遍历算法，增加了一定的计算难度。

参考文献

- [1] 杨卓, 刘彤, 刘永辉等. 多波束测深系统在沉管隧道水下地形测量中的应用研究 [J]. 广州建筑, 2023, 51(04): 97-100.
- [2] 成芳, 胡国成. 多波束测量测线布设优化方法研究 [J]. 海洋技术学报, 2016, 35(02): 87-

91.

- [3] 刘林. 多波束测深数据失真的原因及解决办法 [J]. 价值工程,2023,42(21):125-128.
- [4] 张立华, 殷晓冬. 水深测量计划测线布设与航迹控制算法 [J]. 海洋测绘,2002(02):33-35.
- [5] 夏伟, 刘雁春, 肖付民等. 测线布设方向的不同对海底显示的影响 [J]. 海洋测绘,2004(03):28-31.
- [6] DZ/T 0292-2016, 海洋多波束水深测量规程 [S].

支撑材料列表

result1.xlsx

result2.xlsx

dataB.xlsx

拟合计算梯度.m

附录 A 问题一模型求解

```
clear,clc;

h0 = 70; %中心点处的海水深度
dx =200; %相邻侧线之间的x距离
alpha = deg2rad(1.5);%坡度（弧度）
beta = deg2rad(60); %半开角（弧度）

%%1-1
% d = h0+dx* tan(alpha); %海水深度
% w = 2*h0* tan(beta)/(1-tan(alpha)^2*tan(beta)^2); %覆盖宽度
%%1-2
h5=h0;
for i=1:9 %1-9
    x(i)=(i-5)*dx; %船的横坐标
    h(i) = h5-x(i)* tan(alpha); %海水深度
    w(i) = 2*h(i)* tan(beta)/(1-tan(alpha)^2*tan(beta)^2); %覆盖宽度
    n(i) = 1-dx/w(i); %相邻测线之间的重叠率
end
```

附录 B 问题二模型求解

```
clear,clc;

h0 = 70; %中心点处的海水深度
alpha = deg2rad(1.5);%坡度（弧度）
beta = deg2rad(60); %半开角（弧度）
Beta0=[0,45,90,135,180,225,270,315];
for k=1:8
    Beta(k)=Beta0(k)-90;
end

y=[0,0.3,0.6,0.9,1.2,1.5,1.8,2.1]; %距海域中心点处的距离/海里
y0=0;
```

```

for j=1:8      %1~8列
    y(j)=y(j)*1852;
    for i=1:8
        v(i)=deg2rad(Beta(i));          %测线夹角-pi/2(弧度)
        Alphaa(i,j)=atan(tan(alpha)*sin(v(i))); %alpha''
        Alpha(i,j)=atan(tan(alpha)*cos(v(i))); %alpha'
        h(i,j)=h0-(y(j)-y0)*tan(Alphaa(i,j));
        w(i,j) = 2*h(i,j)* tan(beta)/(1-tan(Alpha(i,j))^2*tan(beta)^2); %覆盖宽度

    end
end

```

```

clear,clc;
global h0 R k1 k2 b1 b2 N x1;
h0 = 110; %中心点处的海水深度
R = 2*1853; %半长（东西向）

alpha = deg2rad(1.5);%坡度（弧度）
beta = deg2rad(60); %半开角（弧度）
k1=1/(tan(alpha)*tan(beta)+1);
b1=tan(beta)*h0/(tan(alpha)*tan(beta)+1);
k2=1/(-tan(alpha)*tan(beta)+1);
b2=tan(beta)*h0/(tan(alpha)*tan(beta)-1);
%x1=-3439; %初始化x1
N=2;
figure;
maxs=[];
maxans=0;
lastans=0;
lasts=[];

while 1

    [Ans,s] =my_func();
    % 绘制图形
    hold on;
    % 在这里添加绘图代码，根据 ans 绘制你的图形
    % 例如，可以绘制一个简单的点图
    plot(N, Ans, 'o', 'MarkerFaceColor', 'r', 'MarkerSize', 8);

    title(['N = ', num2str(N), ' - Ans = ', num2str(Ans)]);
    xlabel('N');
    ylabel('Ans');
    if(maxans<Ans)
        maxans=Ans;
    end
end

```

```

        maxs = s;
    end
    if(abs(lastans-Ans)<1)
        disp(['收敛: ', num2str(N-1)]);
        break;
    else
        lastans=Ans;
        lasts=s;
    end
    if(Ans>=R)
        disp(['最小的N值为: ', num2str(N)]);
        %figure(2);

        break;
    end
    N=N+1;
end
% 定义 x 范围 (例如, 从 -5 到 5)
x_range = [0, 35];

% 创建一个包含 x 值的向量, 使其与 y 值相对应
x_values = linspace(x_range(1), x_range(2), 1000); % 生成100个均匀分布的 x 值

% 使用 plot 函数绘制水平线
plot(x_values, R * ones(size(x_values)), 'b--', 'LineWidth', 2); % 'r--'
    表示红色虚线, 可以根据需要更改样式

% MATLABpool close
function [Ans,s]=my_func()
    global R N;
    % 定义目标函数
    fun = @(y) -objective_function(y); % 加负号以求最大值
    % 定义初始点
    x0 = -R*ones(N,1); % 你可以提供一个初始猜测
    nonlcon = @(y) my_nonlinear_constraint(y);

    lb = -R*ones(N,1);
    ub = R*1.0001*ones(N,1);
    % 调用 fmincon 函数来执行优化
    options = optimoptions('fmincon', 'Display',
        'final','MaxIterations',4000,'MaxFunctionEvaluations',8000,'TolX',
        1e-12,'Algorithm','interior-point'); % 根据需要设置
%    [x, fval] = fmincon(fun, x0, A, b, Aeq, beq, lb, ub, nonlcon, options);
    [y, fval] = fmincon(fun, x0, [], [], [], [], lb, ub, nonlcon, options);

    % 找到最优解
    max_value = -fval; % 由于加了负号, 需要还原为最大值

```

```

% 输出结果
%disp(['最优解: ', num2str(x)]);
disp(['最大值: ', num2str(max_value)]);
Ans = max_value;
s=y;
end

% 目标函数
function value = objective_function(x)
global h0 R k1 k2 b1 b2 N x1;
% 在这里定义你的目标函数
% 例如: value = -x(1)^2 - x(2)^2; % 加负号以求最大值
value =k1* x(N)+b1;
end

% 非线性不等式约束函数
function [c, ceq] = my_nonlinear_constraint(y)
global R k1 k2 b1 b2 N;
% 在这里定义你的非线性不等式约束
% c 表示不等式约束
% ceq 表示等式约束
% 例如, 你可以使用 c = [] 和 ceq = [some_function(x) - threshold] 形式定义约束
% % 非线性不等式约束
% a = 5; % 假设要求 x >= 5
% c(1) = x - a;

a1=0.1;
a2=0.2;
%c=zeros(2*N,1);
%c=zeros(1,2*N);
t=2;
for i = 2:2:2*(N-1)
    eta = abs(k1 * y(t- 1) + b1 - (k2 * y(t) + b2))/ ((k1 - k2) * y(t) + (b1 - b2));
    c(i)= eta-a2;
    c(i+1)=-eta+a1;
    t=t+1;
end
%
c(2*N)=(k2*y(1)+b2+R);

ceq = [];
end

```