



UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD
DEL CUSCO
FACULTAD DE CIENCIAS

Agujeros negros inmersos en campos magnéticos

subtítulo

Por: Weyner Edin Ccuiro Montalvo

Tesis presentada a la Facultad de Ciencias de la Universidad de Nacional de
San Antonio Abad del Cusco para optar al grado académico de Físico

Diciembre 2021

Cusco, Perú

Profesor Guía: Ricardo Adan Caceres Saenz

© 2020, Nombre

Ninguna parte de esta tesis puede reproducirse o transmitirse bajo ninguna forma o por ningún medio o procedimiento, sin permiso por escrito del autor.

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento

A mis padres

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a mis padres.

Resumen (Aún falta agregar)

Keywords – Template, NHH, master thesis, LaTeX

Abstract

Keywords – Template, NHH, master thesis, LaTeX

Índice general

AGRADECIMIENTOS	I
Resumen	II
Abstract	III
1. Introducción	1
1.1. Planteamiento del Problema	1
1.2. Formulación del Problema	1
1.3. Objetivo	1
1.4. Justificación	2
1.5. Limitaciones	2
1.6. Delimitaciones	2
2. Marco Teórico	3
3. Metodología	6
4. Análisis	7
4.1. El modelo	7
4.2. Complexity a partir de la matriz de covarianza	15
4.2.1. Resumen de Circuit Complexity	15
4.2.2. Circuit Complexity de un oscilador armónico	17
5. Discusión	24
6. Conclusión	25
6.1. Matriz de Consistencia	25
Referencias	27
Apéndices	28
A. Test	28
A1. hola	28
A2. Logo Universidad de Concepción	28

Índice de cuadros

Índice de figuras

A2.1.UdeC logo	28
--------------------------	----

Capítulo 1

Introducción

1.1. Planteamiento del Problema

En el estudio de los agujeros negros y teorías cuánticas de campos siempre hubo problemas ya sea por ecuaciones muy complejas, o no lineales; o por que la teoría es muy interactuante y por lo tanto difícil de calcular. Usando la teoría de cuerdas se encontró una relación entre un tipo de teoría Cuántica de Campos y un tipo de geometría relativista. Usando esta dualidad se encontró que se puede calcular la complejidad de un sistema cuántico. Existen antecedentes del cálculo de la complejidad de sistemas cuánticos discretos, y usando esos métodos plantear métodos análogos para poder calcular la complejidad de un sistema cuántico continuo. Y de esta manera aclarar un poco más el concepto de complexity de un sistema continuo.

1.2. Formulación del Problema

¿Como hallar la complejidad de un Oscilador Armónico con el formalismo de la matriz de covarianza?

1.3. Objetivo

Comparar nuestros resultados obtenidos con los métodos de Fubini Study y de Nielsen para obtener la complejidad de un Oscilador Armónico Cuántico. Destacar

las ventajas del formalismo de la matriz de covarianza para obtener la complejidad de un oscilador armónico cuántico.

1.4. Justificación

Busco mostrar que el formalismo de la matriz de covarianza es mucho más simple para poder realizar los cálculos, los cálculos se hacen mucho más simples en comparación con los métodos de Fubini-Study, y de Nielsen. Además mostrar la posibilidad de utilizar este formalismo para cálculos mucho más complejos.

1.5. Limitaciones

Dado que el formalismo de la matriz de covarianza es relativamente nuevo es difícil encontrar mucha información sobre este.

1.6. Delimitaciones

Existen muchos tipos de campos cuánticos como el campo complejo, el vectorial, etc. Me centrare solamente en el campo escalar tipo Klein Gordon.

Capítulo 2

Marco Teórico

Asumamos un espacio axiosimétrico y estacionario. En este espacio la métrica se puede expresar de la siguiente manera:

$$ds^2 = -V(dt - \omega d\phi)^2 + V^{-1}\rho^2 d\phi^2 + \Omega^2(d\rho^2 + \Lambda dz^2) \quad (2.0.1)$$

Donde V, Ω, Λ son funciones que solo dependen de ρ y z la cual en el caso especial en que el espacio es vacío, es decir $R_{ab} = 0$ tenemos la siguiente ecuación para ρ :

$$D^a D_a \rho = 0 \quad D_a : \text{derivada covariantes en la 2D atravesada por } \rho z \quad (2.0.2)$$

y la métrica se puede expresar de la siguiente manera (Papapetrou):

$$ds^2 = -f(dt - \omega d\phi)^2 + f^{-1}[\rho^2 d\phi^2 + e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2)] \quad (2.0.3)$$

y al exigir que $R_{\mu\nu} = 0$:

$$\nabla(f^{-1}\nabla f + \rho^{-2}f^2\omega\nabla\omega) = 0 \quad (2.0.4)$$

$$\nabla(\rho^{-2}f^2\nabla\omega) = 0 \quad (2.0.5)$$

$$\frac{1}{4}\rho V^{-2}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)^2 - \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] - \frac{1}{4}\rho^{-1}V^2\left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial \rho}\right)^2 - \left(\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)^2\right] = \frac{\partial \gamma}{\partial \rho} \quad (2.0.6)$$

$$\frac{1}{2}\rho V^{-2}\frac{\partial V}{\partial \rho}\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{1}{2}\rho^{-1}V^2\frac{\partial \omega}{\partial \rho}\frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{\partial \gamma}{\partial z} \quad (2.0.7)$$

desarrollando (2.0.4) con ayuda de (2.0.5) tenemos:

$$f\nabla^2 f = \nabla f \cdot \nabla f - \rho^{-2} f^4 \nabla \omega \cdot \nabla \omega \quad (2.0.8)$$

Ahora definamos una función φ que no depende de l azimut, entonces esta función cumple la siguiente identidad:

$$\nabla(\rho^{-1} \hat{\mathbf{n}} \times \nabla \varphi) = 0 \quad (2.0.9)$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector unitario en la dirección del azimut. Ahora de (2.0.5) podemos decir que es la condición de integrabilidad de un función φ definida por:

$$\rho^{-1} f^2 \nabla \omega = \hat{\mathbf{n}} \times \nabla \varphi \quad (2.0.10)$$

esta relación es equivalente a:

$$f^{-2} \nabla \varphi = -\rho^{-1} \hat{\mathbf{n}} \times \nabla \omega \quad (2.0.11)$$

esto implica que

$$\nabla(f^{-2} \nabla(\varphi)) = 0 \quad (2.0.12)$$

si expresamos (2.0.8) en función de este nuevo potencial φ . Podemos definir la función \mathcal{E} .

$$\mathcal{E} = f + i\varphi \quad (2.0.13)$$

que cumple la ecuación:

$$(\text{Re}\{\mathcal{E}\})\nabla^2 \mathcal{E} = \nabla \mathcal{E} \times \nabla \mathcal{E} \quad (2.0.14)$$

uno puede hacer simples modificaciones a \mathcal{E} . Una de las importantes es la siguiente(Papapetrou):

$$\mathcal{E} = (\xi - 1)/(\xi + 1) \tag{2.0.15}$$

Ahora es mejor expresar la solución en "prolate spheroidal coordinates" (zipoy).
Entonces fijamos

$$\rho = (x^2 - 1)^{1/2}(1 - y^2)^{1/2} \tag{2.0.16}$$

$$z = xy \tag{2.0.17}$$

Capítulo 3

Metodología

El diseño metodológico, denominado también esquema o metodología para “Es la prescripción de cómo se va a operar o llevar a cabo el plan de investigación en la fase del trabajo de campo y también en la fase de sistematización de resultados y discusión; o sea, se debe bosquejar como se va a proceder con la investigación sin apartarse de la rigurosidad y exigencia que demanda el método científico. En ese entender el Diseño metodológico en este proyecto de investigación es uno NO EXPERIMENTAL, EXPLICATIVA ya que se busca explicar el formalismo de la matriz de covarianza.

Capítulo 4

Análisis

4.1. El modelo

Queremos comparar complexity entre un sistema regular y uno inestable/caótico. Cn ese fin veamos el hamiltoniano.

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{\Omega^2}{2}x^2 \quad \text{donde} \quad \Omega^2 = m^2 - \lambda . \quad (4.1.1)$$

analicemos el hamiltoniano, con las ecuaciones canónicas

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_x} &= \dot{x} \\ p_x &= \dot{x} \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} &= -\dot{p}_x \\ \Omega^2 x &= -\dot{p}_x \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

uniendo ambas ecuaciones tenemos

$$\begin{aligned}\Omega^2 x &= -\ddot{x} \\ \ddot{x} + \Omega^2 x &= 0\end{aligned}\tag{4.1.4}$$

resolviendo esta ecuación tenemos (considerando Ω es una constante real)

$$x(t) = C_1 \cos(\Omega t) + C_2 \sin(\Omega t)\tag{4.1.5}$$

si consideramos que $m^2 > \lambda$

$$x(t) = C_1 \cos(mt) + C_2 \sin(mt)\tag{4.1.6}$$

y si consideramos que $m^2 < \lambda$, Ω ya no es una constante real por lo que resolvemos de nuevo la ecuación (4.1.4)

$$x(t) = C_1 e^{t\sqrt{\lambda}} + C_2 e^{-t\sqrt{\lambda}}\tag{4.1.7}$$

Analizando ambas ecuaciones podemos deducir que: para (4.1.6) esta delimitada, en cambio para (4.1.7) no tiene limites.

Por otro lado analicemos el potencial

$$V = \frac{\Omega^2}{2} x^2\tag{4.1.8}$$

analicemos este potencial

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dx} &= \Omega^2 x \quad \text{igualando a cero para hallar puntos críticos} \\ \Omega^2 x &= 0 \\ x &= 0\end{aligned}\tag{4.1.9}$$

usando el criterio de la segunda derivada para caracterizar ese punto crítico

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \Omega^2 \quad (4.1.10)$$

como podemos observar el tipo de punto crítico solo depende de Ω^2 , por lo que si esta variable es negativa entonces este punto es un máximo absoluto (punto de equilibrio inestable), en cambio si Ω^2 es positiva este punto crítico es un mínimo absoluto (punto de equilibrio estable).

Y un caso trivial que no analizamos es cuando $\lambda = m^2$, ya que en este caso el potencial es 0 y el Hamiltoniano corresponde a una partícula libre.

Nuestro estado de referencia es (para $t = 0$)

$$\psi(x, t = 0) = \mathcal{N}(t = 0) \exp\left(-\frac{\omega_r x^2}{2}\right) \quad (4.1.11)$$

donde

$$\omega_r = m \quad (4.1.12)$$

por lo tanto

$$\psi(x, t) = e^{-iHt} \psi(x, t = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx K(x, t|x', t = 0) \psi(x', t = 0) \quad (4.1.13)$$

para lo cual necesitamos saber $K(x, t|x', t = 0)$

El propagador en este caso es

$$K(x', t|x, t = 0) = \left(\frac{\omega_r}{2\pi i \sin(\omega_r t)}\right)^{1/2} \exp\left(\left\{\frac{i\omega_r}{2 \sin(\omega_r t)}\right\} \{(x'^2 + x^2) \cos(\omega_r t) - 2x'x\}\right) \quad (4.1.14)$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\Omega^2}{2} x^2\right) \varphi(x) = E \varphi(x) \quad (4.1.15)$$

entonces

$$\begin{aligned}
& \left(-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\Omega^2}{2} x^2 - E \right) \varphi(x) = 0 \\
& -\frac{1}{2} \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + \frac{\Omega^2}{2} x^2 \varphi(x) - E \varphi(x) = 0 \\
& \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - (\Omega^2 x^2 - 2E) \varphi = 0, \quad y = \sqrt{\Omega} x, \quad \eta = \frac{2E}{\Omega} \\
& \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + (\eta - y^2) \varphi = 0
\end{aligned} \tag{4.1.16}$$

analizando asintóticamente la ecuación para el caso $y \rightarrow +\infty$

$$\frac{d^2 \varphi}{dy^2} - y^2 \varphi = 0 \tag{4.1.17}$$

cuya solución aproximada es

$$\varphi(x) \sim \exp\left(-\frac{1}{2} y^2\right) \tag{4.1.18}$$

ya descartamos el caso donde el exponente es positivo debido a que la función de onda debe anularse para $y \rightarrow +\infty$. Entonces la función de onda debe tener la forma

$$\varphi(y) = \exp\left(-\frac{1}{2} y^2\right) \phi(y) \tag{4.1.19}$$

reemplazando este ansatz en la ecuación (4.1.16)

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2}{dy^2} \left(\exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) \phi(y) \right) + (\eta - y^2) \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) \phi(y) = 0 \\
& e^{-\frac{1}{2}y^2} (-1 + y^2) \phi(y) - 2e^{-\frac{1}{2}y^2} y \frac{d\phi(y)}{dy} + \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) \frac{d^2\phi(y)}{dy^2} + (\eta - y^2) \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) \phi(y) = 0 \\
& (-1 + y^2) \phi(y) - 2y \frac{d\phi(y)}{dy} + \frac{d^2\phi(y)}{dy^2} + (\eta - y^2) \phi(y) = 0 \\
& \frac{d^2\phi(y)}{dy^2} - 2y \frac{d\phi(y)}{dy} + (\eta - 1) \phi(y) = 0
\end{aligned} \tag{4.1.20}$$

cuya solución es

$$\phi(y) = C_1 H_n(y) \tag{4.1.21}$$

de donde podemos sacar el espectro de energía

$$E_n = \Omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \tag{4.1.22}$$

Por lo tanto la solución a (4.1.16) es

$$\varphi(y) = C \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) H_n(y) \tag{4.1.23}$$

regresando a la variable original

$$\varphi(x) = C \exp\left(-\frac{\Omega}{2}x^2\right) H_n\left(\sqrt{\Omega}x\right) \tag{4.1.24}$$

y hallando la constante de normalización

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx |C|^2 \exp(-\Omega x^2) H_n^2\left(\sqrt{\Omega}x\right) \tag{4.1.25}$$

de donde resulta que

$$\begin{aligned}
1 &= |C|^2 2^n \pi^{1/2} n! \sqrt{\Omega^{-1}} \\
1 &= C 2^{n/2} \pi^{1/4} n!^{1/2} \sqrt[4]{\Omega^{-1}} \\
\therefore C &= \sqrt[4]{\frac{\Omega}{\pi}} \sqrt{\frac{1}{2^n n!}}
\end{aligned} \tag{4.1.26}$$

de esta manera obtenemos $\varphi_n(x)$

$$\varphi_n(x) = \left(\frac{\Omega}{\pi}\right)^{1/4} (n! 2^n)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\Omega}{2} x^2\right) H_n(\sqrt{\Omega} x) \tag{4.1.27}$$

Luego para hallar α_n

$$\psi(x, t=0) = \sum_n \alpha_n \varphi_n(x) = \left(\frac{w_r}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{\omega_r x^2}{2}\right) \tag{4.1.28}$$

si multiplico a ambos lados de esta ecuación por un $\varphi_n^*(x)$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\psi(x, t=0) &= \alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) + \alpha_3 \varphi_3(x) + \dots + \alpha_n \varphi_n(x) + \dots \\
\varphi_n^*(x) \psi(x, t=0) &= \varphi_n^*(x) \alpha_n \varphi_n(x) \\
\int_{-\infty}^{+\infty} dx \varphi_n^*(x) \psi(x, t=0) &= \alpha_n
\end{aligned} \tag{4.1.29}$$

de esta manera usando la ortogonalidad de los estados y su normalización podemos obtener las constantes α_n , así

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \varphi_n^*(x) \psi(x, t=0) \\
\alpha_n &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\frac{\Omega}{\pi}\right)^{1/4} (n! 2^n)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\Omega}{2} x^2\right) H_n(\sqrt{\Omega} x) \left(\frac{w_r}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{\omega_r x^2}{2}\right) \\
\alpha_n &= \left(\frac{\Omega}{\pi}\right)^{1/4} (n! 2^n)^{-1/2} \left(\frac{w_r}{\pi}\right)^{1/4} \int_{-\infty}^{+\infty} dx H_n(\sqrt{\Omega} x) \exp\left(-\frac{(\omega_r + \Omega) x^2}{2}\right)
\end{aligned} \tag{4.1.30}$$

para resolver la integral ahí planteada nos plantearemos otra integral

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} dx H_n(\sqrt{\Omega}x) \exp\left(-\frac{(\omega_r + \Omega)x^2}{2}\right) \\
&\text{usando la siguiente transformación } y = \sqrt{\Omega}x, \quad dy = \sqrt{\Omega} dx \\
I &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n! \sqrt{\Omega}} \int_{-\infty}^{+\infty} dy H_n(y) \exp\left(-\frac{(\omega_r + \Omega)y^2}{2\Omega}\right) \\
I &= \int_{-\infty}^{+\infty} dy \Omega^{-1/2} \exp(-s^2 + 2sy) \exp\left(-\frac{(\omega_r + \Omega)y^2}{2\Omega}\right) \\
I &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(-s^2 + 2s\sqrt{\Omega}x) \exp\left(-\frac{(\omega_r + \Omega)x^2}{2}\right) \\
I &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp\left(-\frac{\Omega}{2}x^2 - \frac{\omega_r}{2}x^2 + 2s\sqrt{\Omega}x - s^2\right) \\
I &= e^{-s^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp\left(-\frac{(\omega_r + \Omega)x^2}{2} + 2s\sqrt{\Omega}x\right) \\
I &= e^{-s^2} \left(\frac{2\pi}{\omega_r + \Omega}\right)^{1/2} \exp\left\{\frac{4s^2\Omega}{2\omega_r + 2\Omega}\right\} \\
I &= \left(\frac{2\pi}{\omega_r + \Omega}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{4s^2\Omega}{2\omega_r + 2\Omega} - s^2\right) \\
I &= \left(\frac{2\pi}{\omega_r + \Omega}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{s^2\Omega - s^2\omega_r}{\omega_r + \Omega}\right) \\
I &= \left(\frac{2\pi}{\omega_r + \Omega}\right)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{s^2\Omega - s^2\omega_r}{\omega_r + \Omega}\right)^n \quad \text{no sale lo que quiero, de la forma que quiero así que} \\
I &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} dx H_n(\sqrt{\Omega}x) \exp\left(-\frac{(\omega_r + \Omega)x^2}{2}\right) = \left(\frac{2\pi}{\omega_r + \Omega}\right)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^{2n}}{n!} \left(\frac{\Omega - \omega_r}{\omega_r + \Omega}\right)^n
\end{aligned} \tag{4.1.31}$$

de donde

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx H_n(\sqrt{\Omega}x) \exp\left(-\frac{(\omega_r + \Omega)x^2}{2}\right) = \left(\frac{2\pi}{\omega_r + \Omega}\right)^{1/2} s^n \left(\frac{\Omega - \omega_r}{\omega_r + \Omega}\right)^n \tag{4.1.32}$$

donde s es un parametro libre (no se como eliminarlo). Así podemos determinar que

$$\alpha_n = \left(\frac{\Omega}{\pi}\right)^{1/4} (n!2^n)^{-1/2} \left(\frac{w_r}{\pi}\right)^{1/4} \left(\frac{2\pi}{\omega_r + \Omega}\right)^{1/2} s^n \left(\frac{\Omega - \omega_r}{\omega_r + \Omega}\right)^n \quad (4.1.33)$$

Empezando del final

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \mathcal{N}(t) \exp\left(-\frac{\omega(t)x^2}{2}\right) \\ \psi(x, t) &= \sum_n e^{-i\Omega(n+\frac{1}{2})t} \alpha_n \left(\frac{\Omega}{\pi}\right)^{1/4} (n!2^n)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\Omega}{2}x^2\right) H_n(\sqrt{\Omega}x) \\ \psi(x, t) &= \left(\frac{\Omega}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-i\frac{\Omega}{2}t\right) \exp\left(-\frac{\Omega}{2}x^2\right) \sum_n e^{-i\Omega nt} \alpha_n (n!2^n)^{-1/2} H_n(\sqrt{\Omega}x) \end{aligned} \quad (4.1.34)$$

este estado evolucionado por el hamiltoniano es

$$\psi(x, t) = \mathcal{N}(t) \exp\left(-\frac{\omega(t)x^2}{2}\right) \quad (4.1.35)$$

donde $\mathcal{N}(t)$ es la constante de normalización y (Shankar, 1995)

$$\omega(t) = \Omega \left(\frac{\Omega - i\omega_r \cot(\Omega t)}{\omega_r - i\Omega \cot(\Omega t)} \right) \quad (4.1.36)$$

El objetivo es calcular la complexity para este estado (4.1.35) a partir de (4.1.11). Además,

$$\omega(t=0) = \omega_r \quad (4.1.37)$$

Ahora calcularemos la constante $\mathcal{N}(t)$ usando

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx |\psi(x, t)|^2 \quad (4.1.38)$$

podemos reemplazar en la ecuación

$$\begin{aligned}
1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx |\mathcal{N}(t)|^2 \left| \exp \left(-\frac{\omega(t) x^2}{2} \right) \right|^2 \\
1 &= |\mathcal{N}(t)|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp \{ -\operatorname{Re}[\omega(t)] x^2 \} \\
1 &= |\mathcal{N}(t)|^2 \left\{ \frac{\pi}{\operatorname{Re}[\omega(t)]} \right\}^{1/2}
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\mathcal{N}(t) = \left\{ \frac{\operatorname{Re}[\omega(t)]}{\pi} \right\}^{1/4} \quad (4.1.39)$$

4.2. Complexity a partir de la matriz de covarianza

La complexity que vamos a hallar corresponde a la circuit complexity, osea esta complejidad netamente solo depende del circuito cuántico; es decir de los operadores. Para poder hallar esta complexity usaremos el método de la matriz de covarianza. Analizaremos de manera concreta la complexity teniendo como funciones de onda la del oscilador armónico cuántico.

4.2.1. Resumen de Circuit Complexity

Hagamos un pequeño resumen de como calcular la complexity del circuito. Detalles de esto pueden ser encontrados en (Jefferson and Myers, 2017). El problema se establece de la siguiente manera: dado un conjunto de gates y un reference state, queremos construir el circuito mas eficiente para llegar a un circuito dado. Formalmente se escribe:

$$|\psi_{\tau=1}\rangle = \tilde{U}(\tau=0) |\psi_{\tau=0}\rangle \quad (4.2.1)$$

donde

$$\tilde{U}(\tau) = \overleftarrow{\mathcal{P}} \exp \left(i \int_0^\tau d\tau H(\tau) \right) \quad (4.2.2)$$

es el operador unitario que representa a todo el circuito cuántico, el cuál toma el estado de referencia $|\psi_{\tau=0}\rangle$ y lo lleva al estado target $|\psi_{\tau=0}\rangle$. τ parametriza el camino dentro del espacio de unitarios y da una base particular (puertas elementales) M_I ,

$$H(\tau) = Y^I(\tau)M_I .$$

En este contexto, los coeficientes $\{Y^I(\tau)\}$ se toman como “funciones de control”. El *path ordering* en ((4.2.2)) es necesario ya que no todos los M_I no necesariamente conmutan entre si.

Existe el formalismo de la matriz covariante para poder hacer estos calculos (Braunstein and van Loock, 2005), y eso es lo que haremos

Dado que ambos estados son gaussianos, estos pueden ser escritos de manera equivalente por la *Covariance Matrix* como sigue(Weedbrook et al., 2012)

$$G^{ab} = \langle \psi(x, t) | \xi^a \xi^b + \xi^b \xi^a | \psi(x, t) \rangle \quad (4.2.3)$$

$$\tilde{G}^{\tau=0} = S \cdot G^{\tau=0} \cdot S^T \quad (4.2.4)$$

con $\tilde{G}^{\tau=0}$ es una matriz identidad y S una matriz simétrica real cuya transpuesta se denota por S^T . Similarmente el *target state* se transformara como

$$\tilde{G}^{\tau=1} = S \cdot G^{\tau=1} \cdot S^T \quad (4.2.5)$$

El unitario $\tilde{U}(\tau)$ actúa sobre la *covariance matrix* transformada de la siguiente manera,

$$\tilde{G}^{\tau=1} = \tilde{U}(\tau) \cdot \tilde{G}^{\tau=0} \cdot \tilde{U}^{-1}(\tau) \quad (4.2.6)$$

Siguiente nosotros definimos la *cost function* $\mathcal{F}(\tilde{U}, \dot{\tilde{U}})$ y definimos la funcional (Ali et al., 2019)

$$\mathcal{C}(\tilde{U}) = \int_0^1 \mathcal{F}(\tilde{U}, \dot{\tilde{U}}) d\tau \quad (4.2.7)$$

minimizando esta funcional de costo nos dará el conjunto óptimo $Y^I(\tau)$, lo cuál nos da el circuito mas eficiente minimizando la longitud del circuito. Hay muchas formas de escoger $\mathcal{F}(\tilde{U}, \dot{\tilde{U}})$. Para mas detalles (Nielsen, 2006). En esta tesis escogeremos

$$\mathcal{F}_2(U, Y) = \sqrt{\sum_I (Y^I)^2} \quad (4.2.8)$$

Para esta elección es fácil ver que $\mathcal{C}(\tilde{U})$, corresponde a la geodesica en la manifold de unitarios. Tambien se puede repetir el trabajo con diferentes $\mathcal{F}(\tilde{U}, \dot{\tilde{U}})$.

4.2.2. Circuit Complexity de un oscilador armónico

Para nuestro caso la *covariance matrix* será

$$G^{ab} = \langle \psi(x, t) | \xi^a \xi^b + \xi^b \xi^a | \psi(x, t) \rangle \quad \text{donde} \quad \xi = \{x, p\} \quad (4.2.9)$$

entonces, para cuando $\tau = 0$

$$\begin{aligned} G^{11} &= \langle \psi(x, t=0) | \hat{x}\hat{x} + \hat{x}\hat{x} | \psi(x, t=0) \rangle \\ &= 2x^2 \langle \psi(x, t=0) | \psi(x, t=0) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} 2x^2 \left(\left(\frac{w_r}{\pi} \right)^{1/4} \exp \left(-\frac{\omega_r x^2}{2} \right) \right)^2 \\ &= 2 \left(\frac{w_r}{\pi} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp(-\omega_r x^2) \\ &= 2 \left(\frac{w_r}{\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{\pi}{w_r} \right)^{1/2} \frac{1}{2\omega_r} \\ &= \frac{1}{\omega_r} \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

$$\begin{aligned}
G^{12} &= \langle \psi(x, t=0) | \hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x} | \psi(x, t=0) \rangle = G^{21} \\
&= \langle \psi(x, t=0) | \int_{-\infty}^{+\infty} dx |x\rangle\langle x| \hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x} | \psi(x, t=0) \rangle \\
&= \langle \psi(x, t=0) | \int_{-\infty}^{+\infty} dx |x\rangle\langle x| i + 2\hat{p}\hat{x} | \psi(x, t=0) \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \langle \psi | x \rangle (i \langle x | \psi \rangle + \langle x | 2\hat{p}\hat{x} | \psi \rangle) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \langle \psi | x \rangle \left(i \langle x | \psi \rangle - i \frac{d}{dx} x \langle x | \psi \rangle \right) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \langle \psi | x \rangle i \left(1 - 2 \frac{d}{dx} x \right) \langle x | \psi \rangle \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.2.11}$$

$$\begin{aligned}
G^{22} &= \langle \psi(x, t=0) | \hat{p}\hat{p} + \hat{p}\hat{p} | \psi(x, t=0) \rangle \\
&= \langle \psi(x, t=0) | \int_{-\infty}^{+\infty} dx |x\rangle\langle x| \hat{p}\hat{p} + \hat{p}\hat{p} | \psi(x, t=0) \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \langle \psi | x \rangle 2 \langle x | \hat{p}\hat{p} | \psi \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \left(\frac{w_r}{\pi} \right)^{1/4} \exp \left(-\frac{\omega_r x^2}{2} \right) \left(-\frac{d^2}{dx^2} \right) \left(\frac{w_r}{\pi} \right)^{1/4} \exp \left(-\frac{\omega_r x^2}{2} \right) \\
&= -2 \left(\frac{w_r}{\pi} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} x \omega_r \exp(-x^2 \omega_r) (x^2 \omega_r - 3) \\
&= 2 \left(\frac{w_r}{\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\pi} \sqrt{\omega_r} \right) \\
&= \omega_r
\end{aligned} \tag{4.2.12}$$

de esta manera tenemos que (en las integrales hay una condicional de que $\text{Re}(\omega_r) > 0$)

$$G^{\tau=0} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_r} & 0 \\ 0 & \omega_r \end{pmatrix} \tag{4.2.13}$$

Haciendo un procedimiento similar al anterior tenemos que

$$\begin{aligned}
G^{11} &= \langle \psi(x, t) | \hat{x}\hat{x} + \hat{x}\hat{x} | \psi(x, t) \rangle \\
&= 2 \langle \psi(x, t) | \psi(x, t) \rangle x^2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx 2x^2 \left\{ \frac{\text{Re}[\omega(t)]}{\pi} \right\}^{1/2} \left| \exp \left(-\frac{\text{Re}\{\omega(t)\} x^2}{2} \right) \exp \left(-\frac{i \text{Im}\{\omega(t)\} x^2}{2} \right) \right|^2 \\
&= 2 \left\{ \frac{\text{Re}[\omega(t)]}{\pi} \right\}^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^2 \exp(-\text{Re}\{\omega(t)\} x^2) \\
&= 2 \left\{ \frac{\text{Re}[\omega(t)]}{\pi} \right\}^{1/2} \left(\frac{\pi}{\text{Re}\{\omega(t)\}} \right)^{1/2} \frac{1}{2 \text{Re}\{\omega(t)\}} \\
&= \frac{1}{\text{Re}\{\omega(t)\}}
\end{aligned} \tag{4.2.14}$$

$$\begin{aligned}
G^{12} &= \langle \psi(x, t=0) | \hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x} | \psi(x, t=0) \rangle = G^{21} \\
&= \langle \psi(x, t=0) | \int_{-\infty}^{+\infty} dx |x\rangle \langle x| \hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x} | \psi(x, t=0) \rangle \\
&= \langle \psi(x, t=0) | \int_{-\infty}^{+\infty} dx |x\rangle \langle x| i + 2\hat{p}\hat{x} | \psi(x, t=0) \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \langle \psi | x \rangle (i \langle x | \psi \rangle + \langle x | 2\hat{p}\hat{x} | \psi \rangle) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \langle \psi | x \rangle \left(i \langle x | \psi \rangle - i2 \frac{d}{dx} x \langle x | \psi \rangle \right) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \langle \psi | x \rangle i \left(1 - 2 \frac{d}{dx} x \right) \langle x | \psi \rangle \\
&= - \left\{ \frac{\text{Re}[\omega(t)]}{\pi} \right\}^{1/2} \frac{\sqrt{\pi} \text{Im}[\omega]}{\text{Re}[\omega]^{3/2}} \\
&= - \frac{\text{Im}[\omega]}{\text{Re}[\omega]}
\end{aligned} \tag{4.2.15}$$

$$\begin{aligned}
G^{22} &= \langle \psi(x, t=0) | \hat{p}\hat{p} + \hat{p}\hat{p} | \psi(x, t=0) \rangle \\
&= \langle \psi(x, t=0) | \int_{-\infty}^{+\infty} dx |x\rangle\langle x| \hat{p}\hat{p} + \hat{p}\hat{p} | \psi(x, t=0) \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \langle \psi | x \rangle 2 \langle x | \hat{p}\hat{p} | \psi \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} 2 \left\{ \frac{\text{Re}[\omega(t)]}{\pi} \right\}^{1/4} \exp\left(-\frac{\omega(t)^* x^2}{2}\right) \left(-\frac{d^2}{dx^2}\right) \left\{ \frac{\text{Re}[\omega(t)]}{\pi} \right\}^{1/4} \exp\left(-\frac{\omega(t) x^2}{2}\right) \\
&= -2 \left\{ \frac{\text{Re}[\omega(t)]}{\pi} \right\}^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx (\text{Re}(\omega) + i \text{Im}(\omega)) e^{-x^2 \text{Re}(\omega)} (ix^2 \text{Im}(\omega) + x^2 \text{Re}(\omega) - 1) \\
&= \left\{ \frac{\text{Re}[\omega(t)]}{\pi} \right\}^{1/2} \frac{\sqrt{\pi} \omega \omega^*}{\text{Re}(\omega)^{3/2}} \\
&= \frac{|\omega(t)|^2}{\text{Re}(\omega(t))}
\end{aligned} \tag{4.2.16}$$

(en las integrales hay una condicional de que $\text{Re}[\omega(t)] > 0$), de esta manera resulta que

$$G^{\tau=1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\text{Re}(\omega(t))} & -\frac{\text{Im}(\omega(t))}{\text{Re}(\omega(t))} \\ \frac{\text{Im}(\omega(t))}{\text{Re}(\omega(t))} & \frac{|\omega(t)|^2}{\text{Re}(\omega(t))} \end{pmatrix} \tag{4.2.17}$$

Ahora cambiamos la base de la siguiente manera

$$\tilde{G}^{\tau=1} = S \cdot G^{\tau=1} \cdot S^T, \quad \tilde{G}^{\tau=0} = S \cdot G^{\tau=0} \cdot S^T \tag{4.2.18}$$

con

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{\omega_r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\omega_r}} \end{pmatrix} \tag{4.2.19}$$

de tal manera que $\tilde{G}^{\tau=0} = I$ donde I es matriz identidad. Para nuestro caso de estudio la frecuencia del estado base ω_r es real. Escogeremos los siguientes generadores

$$M_{11} \rightarrow \frac{i}{2}(x p + p x), \quad M_{22} \rightarrow \frac{i}{2}x^2, \quad M_{33} \rightarrow \frac{i}{2}p^2. \quad (4.2.20)$$

Que nos servirán como nuestras puertas elementales y satisfacen el álgebra $SL(2, R)$

$$[M_{11}, M_{22}] = 2 M_{22}, \quad [M_{11}, M_{33}] = -2 M_{33}, \quad [M_{22}, M_{33}] = M_{11} \quad (4.2.21)$$

Ahora como vimos en (referencia a paper de complexity) parametrizamos

$$\tilde{U}(\tau) = \begin{pmatrix} \cos(\mu(\tau)) \cosh(\rho(\tau)) - \sin(\theta(\tau)) \sinh(\rho(\tau)) & -\sin(\mu(\tau)) \cosh(\rho(\tau)) + \cos(\theta(\tau)) \sinh(\rho(\tau)) \\ \sin(\mu(\tau)) \cosh(\rho(\tau)) + \cos(\theta(\tau)) \sinh(\rho(\tau)) & \cos(\mu(\tau)) \cosh(\rho(\tau)) + \sin(\theta(\tau)) \sinh(\rho(\tau)) \end{pmatrix} \quad (4.2.22)$$

y usando las condiciones de borde

$$\tilde{G}^{\tau=1} = \tilde{U}(\tau=1) \cdot \tilde{G}^{\tau=0} \cdot \tilde{U}^{-1}(\tau=1), \quad \tilde{G}^{\tau=0} = \tilde{U}(\tau=0) \cdot \tilde{G}^{\tau=0} \cdot \tilde{U}^{-1}(\tau=0), \quad (4.2.23)$$

esto es

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega_r}{\operatorname{Re}(\omega(t))} & -\frac{\operatorname{Im}(\omega(t))}{\operatorname{Re}(\omega(t))} \\ -\frac{\operatorname{Im}(\omega(t))}{\operatorname{Re}(\omega(t))} & \frac{|\omega(t)|^2}{\operatorname{Re}(\omega(t))\omega_r} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\sinh(2\rho(1)) \sin(\theta(1) + \mu(1)) + \cosh(2\rho(1)) & \sinh(2\rho(1)) \cos(\theta(1) + \mu(1)) \\ \sinh(2\rho(1)) \cos(\theta(1) + \mu(1)) & \sinh(2\rho(1)) \sin(\theta(1) + \mu(1)) + \cosh(2\rho(1)) \end{bmatrix} \quad (4.2.24)$$

y

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_r} & 0 \\ 0 & \omega_r \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\sinh(2\rho(0)) \sin(\theta(0) + \mu(0)) + \cosh(2\rho(0)) & \sinh(2\rho(0)) \cos(\theta(0) + \mu(0)) \\ \sinh(2\rho(0)) \cos(\theta(0) + \mu(0)) & \sinh(2\rho(0)) \sin(\theta(0) + \mu(0)) + \cosh(2\rho(0)) \end{bmatrix} \quad (4.2.25)$$

donde c es una constante arbitraria. Por simplicidad escogemos

$$\mu(\tau = 1) = \mu(\tau = 0) = 0, \quad \theta(\tau = 0) = \theta(\tau = 1) = c = \tan^{-1} \left(\frac{\omega_r^2 - |\omega(t)|^2}{2\omega_r \operatorname{Im}(\omega(t))} \right). \quad (4.2.26)$$

$$Y^I = \operatorname{Tr} \left(\partial_\tau \tilde{U}(\tau) \cdot \tilde{U}(\tau)^{-1} \cdot (M^I)^T \right), \quad (4.2.27)$$

donde $\operatorname{Tr} \left(M^I \cdot (M^J)^T \right) = \delta^{IJ}$. Usando esto podemos definir la métrica

$$ds^2 = G_{IJ} dY^I dY^{*J}, \quad (4.2.28)$$

donde el $G_{IJ} = \frac{1}{2} \delta_{IJ}$ es conocida como el factor de penalidad. Dado de la forma $U(s)$ en (4.2.22) tendremos,

$$ds^2 = d\rho^2 + \cosh(2\rho) \cosh^2 \rho d\mu^2 + \cosh(2\rho) \sinh^2 \rho d\theta^2 - \sinh(2\rho)^2 d\mu d\theta, \quad (4.2.29)$$

y la funcional de complexity definida en (4.2.8) toma la forma,

$$\mathcal{C}(\tilde{U}) = \int_0^1 d\tau \sqrt{g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}. \quad (4.2.30)$$

La solución más simple en esta geometría es una línea recta (Ali et al., 2019).

$$\rho(\tau) = \rho(1) \tau. \quad (4.2.31)$$

Evaluando (4.2.30) es obvio que

$$\mathcal{C}(\tilde{U}) = \rho(1) = \frac{1}{2} \left(\cosh^{-1} \left[\frac{\omega_r^2 + |\omega(t)|^2}{2 \omega_r \operatorname{Re}(\omega(t))} \right] \right). \quad (4.2.32)$$

Capítulo 5

Discusión

Capítulo 6

Conclusión

6.1. Matriz de Consistencia

Formulación del Problema	Formulación de Objetivos	Formulación de Hipótesis	Justificación	Metodología
¿Como hallar la complejidad de un Oscilador Armónico con el formalismo de la matriz de covarianza?	Comparar nuestros resultados obtenidos con los métodos de Fubini Study y de Nielsen para obtener la complexity de un Oscilador Armónico Cuántico. Destacar las ventajas del formalismo de la matriz de covarianza para obtener la complejidad de un oscilador armónico cuántico.	Llegar al mismo resultado que por los otros métodos	Busco mostrar que el formalismo de la matriz de covarianza es mucho más simple para poder realizar los cálculos, los cálculos se hacen mucho más simples en comparación con los métodos de Fubini-Study, y de Nielsen. Además mostrar la posibilidad de utilizar este formalismo para cálculos mucho más complejos.	No Experimental, Explicativa

Bibliografía

- Ali, T., Bhattacharyya, A., Haque, S. S., Kim, E. H., and Moynihan, N. (2019). Time evolution of complexity: a critique of three methods. *Journal of High Energy Physics*, 2019(4).
- Braunstein, S. L. and van Loock, P. (2005). Quantum information with continuous variables. *Rev. Mod. Phys.*, 77:513–577.
- Jefferson, R. A. and Myers, R. C. (2017). Circuit complexity in quantum field theory. *Journal of High Energy Physics*, 2017(10).
- Nielsen, M. A. (2006). Quantum computation as geometry. *Science*, 311(5764):1133–1135.
- Shankar, R. (1995). *Principles of Quantum Mechanics*. Springer US.
- Weedbrook, C., Pirandola, S., García-Patrón, R., Cerf, N. J., Ralph, T. C., Shapiro, J. H., and Lloyd, S. (2012). Gaussian quantum information. *Reviews of Modern Physics*, 84(2):621–669.

Apéndice A

Test

A1. hola

Hola

A2. Logo Universidad de Concepción

Figura A2.1: UdeC logo

