UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN ANTONIO ABAD
DEL CUSCO
FACULTAD DE CIENCIAS

Agujeros negros inmersos en campos magnéticos

subtítulo

Por: Weyner Edin Ccuiro Montalvo

Tesis presentada a la Facultad de Ciencias de la Universidad de Nacional de San Antonio Abad del Cusco para optar al grado académico de Físico

Diciembre 2021
Cusco, Perú

Profesor Guía: Ricardo Adan Caceres Saenz

A mis padres

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a mis padres.

Resumen (Aún falta agregar)

Keywords – Template, NHH, master thesis, LaTeX

Abstract

Keywords – Template, NHH, master thesis, LaTeX

Índice general

Índice de cuadros

Índice de figuras

Capítulo 1

Introducción

1.1. Planteamiento del Problema

En el estudio de los agujeros negros y teorías cuánticas de campos siempre hubo problemas ya sea por ecuaciones muy complejas, o no lineales; o por que la teoría es muy interactuante y por lo tanto difícil de calcular. Usando la teoría de cuerdas se encontró una relación entre un tipo de teoría Cuántica de Campos y un tipo de geometría relativista. Usando esta dualidad se encontró que se puede calcular la complejidad de un sistema cuántico. Existen antecedentes del cálculo de la complejidad de sistemas cuánticos discretos, y usando esos métodos planteare métodos análogos para poder calcular la complejidad de un sistema cuántico continuo. Y de esta manera aclarar un poco más el concepto de complexity de un sistema continuo.

1.2. Formulación del Problema

¿Como hallar la complejidad de un Oscilador Armónico con el formalismo de la matriz de covarianza?

1.3. Objetivo

Comparar nuestros resultados obtenidos con los métodos de Fubini Study y de Nielsen para obtener la complexity de un Oscilador Armónico Cuántico. Destajar las ventajas del formalismo de la matriz de covarianza para obtener la complejidad de un oscilador armónico cuántico.

1.4. Justificación

Busco mostrar que el formalismo de la matriz de covarianza es mucho más simple para poder realizar los cálculos, los cálculos se hacen mucho más simples en comparación con los métodos de Fubini-Study, y de Nielsen. Además mostrar la posibilidad de utilizar este formalismo para cálculos mucho más complejos.

1.5. Limitaciones

Dado que el formalismo de la matriz de covarianza es relativamente nuevo es difícil encontrar mucha información sobre este.

1.6. Delimitaciones

Existen muchos tipos de campos cuánticos como el campo complejo, el vectorial, etc. Me centrare solamente en el campo escalar tipo Klein Gordon.

Capítulo 2

Marco Teórico

Considerando la acción :

$$S = \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^4x \, \sqrt{-g} R \tag{2.0.1}$$

Asumiendo un espacio axiosimétrico y estacionario, la métrica más general que se puede escribir es de la siguiente manera(Papapetrou):

$$\mathrm{d}s^2 = -f(\rho,z)(\mathrm{d}t - \omega\, \mathrm{d}\phi)^2 + f^{-1}(\rho,z)\Big[\rho^2\, \mathrm{d}\phi^2 + e^{2\gamma(\rho,z)}\big(\mathrm{d}\rho^2 + \mathrm{d}z^2\big)\Big] \tag{2.0.2}$$

luego asumamos para mayor simplicidad que $\omega = 0$, además tengamos en cuenta que entonces la métrica es:

$$\mathrm{d}s^2 = -f(\rho,z)\, \mathrm{d}t^2 + f^{-1}(\rho,z)\Big[\rho^2\, \mathrm{d}\phi^2 + e^{2\gamma(\rho,z)}\big(\mathrm{d}\rho^2 + \mathrm{d}z^2\big)\Big] \tag{2.0.3}$$

y al exigir que $R_{\mu\nu} = 0$, además de escoger convenientemente, primero $R_{zz} - R_{\rho\rho} = 0$:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\rho} = \frac{1}{4}\frac{1}{f^2(\rho,z)}\left[\left(\frac{\partial f(\rho,z)}{\partial\rho}\right)^2 - \left(\frac{\partial f(\rho,z)}{\partial z}\right)^2\right] \tag{2.0.4}$$

y luego de $R_{\phi\phi} = 0 = R_{tt}$:

$$f(\rho,z)\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial f(\rho,z)}{\partial\rho} + \frac{\partial^2 f(\rho,z)}{\partial\rho^2} + \frac{\partial^2 f(\rho,z)}{\partial z^2}\right) = \left[\left(\frac{\partial f(\rho,z)}{\partial\rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(\rho,z)}{\partial z}\right)^2\right] \tag{2.0.5}$$

Lo cuál se puede escribir como:

$$f(\rho,z)\nabla^2 f(\rho,z) = \boldsymbol{\nabla} f(\rho,z)\cdot\boldsymbol{\nabla} f(\rho,z) \tag{2.0.6}$$

tengamos en cuenta que los operadores ∇^2 y $\boldsymbol{\nabla}$ son operadores definidos en un espacio euclideo en coordenadas cilíndricas con la métrica $\mathrm{d}s^2 = \rho^2\,\mathrm{d}\phi^2 + \mathrm{d}\rho^2 + \mathrm{d}z^2$. y finalmente de $R_{\rho z} = 0$:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial z} = \frac{1}{2}\rho\frac{1}{f^2(\rho,z)}\left(\frac{\partial f(\rho,z)}{\partial\rho}\frac{\partial f(\rho,z)}{\partial z}\right) \tag{2.0.7}$$

ahora juntando todas estas condiciones para las funciones tenemos que:

$$f(\rho,z)\nabla^2 f(\rho,z) = \boldsymbol{\nabla} f(\rho,z)\cdot\boldsymbol{\nabla} f(\rho,z) \tag{2.0.8}$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\rho} = \frac{1}{4}\frac{1}{f^2(\rho,z)}\left[\left(\frac{\partial f(\rho,z)}{\partial\rho}\right)^2 - \left(\frac{\partial f(\rho,z)}{\partial z}\right)^2\right] \tag{2.0.9}$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial z} = \frac{1}{2}\rho\frac{1}{f^2(\rho,z)}\left(\frac{\partial f(\rho,z)}{\partial\rho}\frac{\partial f(\rho,z)}{\partial z}\right) \tag{2.0.10}$$

si fijamos que la parte real de una cierta función $\mathcal{E}$ es igual a $f(\rho,z)$, entonces la ecuación (2.0.8) se reescribe como:

$$(\mathrm{Re}\{\mathcal{E}\})\nabla^2\mathcal{E} = \boldsymbol{\nabla}\mathcal{E}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathcal{E} \tag{2.0.11}$$

uno puede hacer simples modificaciones a $\mathcal{E}$. Una de las importantes es la siguiente(Papapetrou):

$$\mathcal{E} = (\xi-1)/(\xi+1) \tag{2.0.12}$$

cuando reemplazemos $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\xi)$ en (2.0.11), usando

$$\boldsymbol{\nabla}\mathcal{E} = \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\xi-1}{\xi+1}\right) = \frac{2\boldsymbol{\nabla}\xi}{(\xi+1)^2} \tag{2.0.13}$$

$$\nabla^2\mathcal{E} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\xi-1}{\xi+1}\right)\right) = 2\left[\frac{(\xi+1)\nabla^2\xi - 2\boldsymbol{\nabla}\xi\boldsymbol{\nabla}\xi}{(\xi+1)^3}\right] \tag{2.0.14}$$

$$\mathrm{Re}\{\mathcal{E}\} = \frac{2(\xi^*\xi-1)}{(\xi+1)(\xi^*+1)} \tag{2.0.15}$$

obtenemos la siguiente ecuación para ξ:

$$(\xi\xi^* - 1)\nabla^2\xi = 2\xi^*\boldsymbol{\nabla}\xi \cdot \boldsymbol{\nabla}\xi \tag{2.0.16}$$

esta ecuación tambien se puede derivar de principio variacional de:

$$\delta \int \frac{\boldsymbol{\nabla}\xi \cdot \boldsymbol{\nabla}\xi^*}{(\xi\xi^* - 1)^2}\,\mathrm{d}v = 0 \tag{2.0.17}$$

De (2.0.16) podemos notar que si ξ es una solución entonces $e^{\mathrm{i}\alpha}\xi$ también es una solución. Entonces podemos expresar la función ξ de la siguiente manera:

$$\xi = -e^{\mathrm{i}\alpha}\coth\psi \tag{2.0.18}$$

donde al reemplazar esta expresión para ξ en (2.0.16) se tiene que ψ cumple la ecuación de laplace

$$\nabla^2\psi = 0 \tag{2.0.19}$$

Por consiguiente se puede expresar ψ en terminos de una "expansión multipolar". Las soluciones ya fueron estudiadas por Weyl en 1917 cuando $\alpha = 0$ y por Papapetrou en 1953 cuando $\alpha = \pi/2$. Desafortunadamente cuando $\alpha \neq 0 \pmod{\pi}$ uno puede excluir la contribución monopolar de ψ si el espacio es asintóticamente plano. Por lo que esas soluciones no poseen un gran valor físico. Ahora es mejor expresar la solucion en "prolate spheroidal coordinates" (zipoy). Entonces fijamos

$$\rho = (x^2 - 1)^{1/2}(1 - y^2)^{1/2} \tag{2.0.20}$$

$$z = xy \tag{2.0.21}$$

por lo que (2.0.19) se puede reescribir

$$\begin{aligned}
\nabla^2\psi = {} & \nabla^2[P(y)Q(x)] = \frac{1}{x^2 - y^2}\left[\frac{\partial(x^2-1)}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial(1-y^2)}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\right]P(y)Q(x) \\
= {} & \frac{1}{x^2 - y^2}\left[\frac{\partial(x^2-1)}{\partial x}\frac{\partial(P(y)Q(x))}{\partial x} + \frac{\partial(1-y^2)}{\partial y}\frac{\partial(P(y)Q(x))}{\partial y}\right] \\
= {} & \frac{1}{x^2 - y^2}\left\{\left[(1 - y^2)P''(y) - 2yP'(y)\right]Q(x) - \left[(1 - x^2)Q''(x) - 2xQ'(x)\right]P(y)\right\}
\end{aligned}$$

por lo que

$$\left[\left(1-y^2\right)P''(y)-2yP'(y)\right]\frac{1}{P(y)}=\frac{1}{Q(x)}\left[\left(1-x^2\right)Q''(x)-2xQ'(x)\right] \quad (2.0.22)$$

de donde podemos igualar ambos lados a constantes (de nuestra conveniencia)

$$\begin{aligned}\left[\left(1-y^2\right)P''(y)-2yP'(y)\right]\frac{1}{P(y)} &= -l(l+1)\\ \frac{1}{Q(x)}\left[\left(1-x^2\right)Q''(x)-2xQ'(x)\right] &= -l(l+1)\end{aligned}$$

ahora poniendo esto de una manera conveniente, podemos identificar ecuaciones de legendre para ambos polinomios

$$\begin{aligned}\left(1-y^2\right)P''(y)-2yP'(y)+l(l+1)P(y)=0\\ \left(1-x^2\right)Q''(x)-2xQ'(x)+l(l+1)Q(x)=0\end{aligned}$$

finalmente, dado que $x\in[1,+\infty>$ y $y\in[-1,1]$, la solución para $P(y)$ serán las funciones de legendre de primera clase y para $Q(x)$ las de segunda clase. De esta manera ψ puede ser expresado como una funciones de Legendre:

$$\psi=\sum_l \alpha_l Q_l(x)P_l(y) \quad (2.0.23)$$

donde $Q_l(x)$ son las funciones de Legendre de segunda clase y $P_l(y)$ son las funciones de Legendre de primera clase. En el caso puro de $l=0$ tenemos

$$\psi=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \quad (2.0.24)$$

lo cual reemplazando en (2.0.18) tenemos la solución para ξ:

$$\xi=x \quad (2.0.25)$$

Esta solución corresponde a Schwarzschild. Donde $x+1$ es la coordenada radial en Schwarzschild (escogiendo M como unidad de longitud) y $y=\cos(\theta)$. Es decir en coordenadas clásicas ($c=1$) tenemos la siguiente transformación de coordenadas:

$$x = \frac{r}{M} - 1 \qquad (2.0.26)$$
$$y = \cos(\theta) \qquad (2.0.27)$$

entonces reemplazando en (2.0.12) tenemos

$$\mathcal{E} = (x-1)/(x+1) \qquad (2.0.28)$$

donde x es una variable real por lo que podemos identificar que

$$f = (x-1)/(x+1) \qquad (2.0.29)$$
$$\varphi = 0 \qquad (2.0.30)$$

entonces en coordenadas clásicas tenemos que

$$f = 1 - \frac{2M}{r} \qquad (2.0.31)$$
$$\omega = 0 \qquad (2.0.32)$$

Des esta manera reemplzando en (2.0.2) tenemos que

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\left[\rho^2\,\mathrm{d}\phi^2 + e^{2\gamma}\left(\mathrm{d}\rho^2 + \mathrm{d}z^2\right)\right] \qquad (2.0.33)$$

donde

$$\rho = r\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2}\sin(\theta) \qquad (2.0.34)$$
$$z = (r - M)\cos(\theta) \qquad (2.0.35)$$
$$(2.0.36)$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 = &-\left(1-\frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + r^2\sin(\theta)^2\,\mathrm{d}\phi^2 \\
&+\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} e^{2\gamma}\left(\frac{r^2-2mr+m^2\sin(\theta)^2}{r^2}\right)\left[\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\theta^2\right]
\end{aligned}
$$

Asumiendo que

$$\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} e^{2\gamma}\left(\frac{r^2-2mr+m^2\sin(\theta)^2}{r^2}\right) = 1$$

tenemos la clásica métrica de Schwarzschild.

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + r^2\sin(\theta)^2\,\mathrm{d}\phi^2 + \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\theta^2 \quad (2.0.37)$$

2.0.1. Reissner-Nordström

El análisis se realiza de manera similar solo que en este caso en el lagrangiano se agrega el campo electromagnético. Es por eso que la función $\mathcal{E}$ ahora tiene la forma

$$\mathcal{E} = \left(f - |\Phi|^2\right) + \mathrm{i}\varphi \quad (2.0.38)$$

y cuando las nuevas restricciones de este caso se aplican tenemos que como conocemos

$$\mathcal{E} = (\xi - 1)/(\xi + 1) \quad (2.0.39)$$

y con respecto al neuvo campo

$$\Phi = q/(\xi + 1) \quad (2.0.40)$$

se utilizan las mismas coordenadas x, y. Entonces usando nuestra solución anterior para ξ tenemos

$$\mathcal{E} = (x-1)/(x+1) \tag{2.0.41}$$

de donde podemos despejar f

$$f = \mathcal{E} + |\Phi|^2 \tag{2.0.42}$$

reemplazando obtenemos

$$f = \frac{(x-1)}{(x+1)} + \frac{q^2}{(x+1)^2} \tag{2.0.43}$$

con la transformación de coordenadas que definimos y teniendo en cuenta que $Q = qm$ tenemos

$$f = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \tag{2.0.44}$$

por lo que la métrica que obtendremos es

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)\mathrm{d}t^2 + r^2\sin(\theta)^2\,\mathrm{d}\phi^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\theta^2 \tag{2.0.45}$$

Capítulo 3

Metodología

El diseño metodológico, denominado también esquema o metodología para "Es la prescripción de cómo se va a operar o llevar a cabo el plan de investigación en la fase del trabajo de campo y también en la fase de sistematización de resultados y discusión; o sea, se debe bosquejar como se va a proceder con la investigación sin apartarse de la rigurosidad y exigencia que demanda el método científico. En ese entender el Diseño metodológico en este proyecto de investigación es uno NO EXPERIMENTAL, EXPLICATIVA ya que se busca explicar el formalismo de la matriz de covarianza.

Capítulo 4

Análisis

4.1. El modelo

Queremos comparar complexity entre un sistema regular y uno inestable/caótico. Cn ese fin veamos el hamiltoniano.

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{\Omega^2}{2}x^2 \quad \text{donde} \quad \Omega^2 = m^2 - \lambda \ . \tag{4.1.1}$$

analicemos el hamiltoniano, con las ecuaciones canónicas

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_x} &= \dot{x} \\ p_x &= \dot{x} \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} &= -\dot{p}_x \\ \Omega^2 x &= -\dot{p}_x \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

uniendo ambas ecuaciones tenemos

$$\begin{aligned} \Omega^2 x &= -\ddot{x} \\ \ddot{x} + \Omega^2 x &= 0 \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

resolviendo esta ecuación tenemos (considerando Ω es una constante real)

$$x(t) = C_1 cos(\Omega t) + C_2 sen(\Omega t) \tag{4.1.5}$$

si consideramos que $m^2 > \lambda$

$$x(t) = C_1 cos(mt) + C_2 sen(mt) \tag{4.1.6}$$

y si consideramos que $m^2 < \lambda$, Ω ya no es una constante real por lo que resolvemos de nuevo la ecuación (4.1.4)

$$x(t) = C_1 e^{t\sqrt{\lambda}} + C_2 e^{-t\sqrt{\lambda}} \tag{4.1.7}$$

Analizando ambas ecuaciones podemos deducir que: para (4.1.6) esta delimitada, en cambio para (4.1.7) no tiene limites.

Por otro lado analicemos el potencial

$$V = \frac{\Omega^2}{2} x^2 \tag{4.1.8}$$

analicemos este potencial

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} &= \Omega^2 x \quad \text{igualando a cero para hallar puntos críticos} \\ \Omega^2 x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned} \tag{4.1.9}$$

usando el criterio de la segunda derivada para caracterizar ese punto crítico

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \Omega^2 \tag{4.1.10}$$

como podemos observar el tipo de punto crítico solo depende de Ω^2, por lo que si esta variable es negativa entonces este punto es un máximo absoluto (punto de equilibrio inestable), en cambio si Ω^2 es positiva este punto crítico es un mínimo absoluto (punto de equilibrio estable).

Y un caso trivial que no analizamos es cuando $\lambda = m^2$, ya que en este caso el potencial es 0 y el Hamiltoniano corresponde a una partícula libre.

Nuestro estado de referencia es (para $t = 0$)

$$\psi(x, t = 0) = \mathcal{N}(t = 0) \exp\left(-\frac{\omega_r\, x^2}{2}\right) \tag{4.1.11}$$

donde

$$\omega_r = m \tag{4.1.12}$$

por lo tanto

$$\psi(x, t) = e^{-iHt}\psi(x, t = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, K(x, t|x', t = 0)\psi(x, t = 0) \tag{4.1.13}$$

para lo cual necesitamos saber $K(x, t|x', t = 0)$

El propagador en este caso es

$$K(x', t|x, t = 0) = \left(\frac{\omega_r}{2\pi i \sin(\omega_r t)}\right)^{1/2} \exp\left(\left\{\frac{i\omega_r}{2\sin(\omega_r t)}\right\}\left\{\left(x'^2 + x^2\right)\cos(\omega_r t) - 2x'x\right\}\right) \tag{4.1.14}$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\Omega^2}{2}x^2\right)\varphi(x) = E\varphi(x) \tag{4.1.15}$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\left(-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\Omega^2}{2}x^2-E\right)\varphi(x)=0\\
-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2\varphi(x)}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\Omega^2}{2}x^2\varphi(x)-E\varphi(x)=0\\
\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2}-\left(\Omega^2x^2-2E\right)\varphi=0, \quad y=\sqrt{\Omega}x, \quad \eta=\frac{2E}{\Omega}\\
\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}y^2}+\left(\eta-y^2\right)\varphi=0
\end{aligned}
\tag{4.1.16}
$$

analizando asintóticamente la ecuación para el caso $y \to +\infty$

$$
\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}y^2}-y^2\varphi=0 \tag{4.1.17}
$$

cuya solución aproximada es

$$
\varphi(x)\sim\exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) \tag{4.1.18}
$$

ya descartamos el caso donde el exponente es positivo debido a que la función de onda debe anularse para $y \to +\infty$. Entonces la función de onda debe tener la forma

$$
\varphi(y)=\exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right)\phi(y) \tag{4.1.19}
$$

reemplazando este ansatz en la ecuación (4.1.16)

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}\left(\exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right)\phi(y)\right) + \left(\eta - y^2\right)\exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right)\phi(y) = 0 \\
e^{-\frac{1}{2}y^2}\left(-1+y^2\right)\phi(y) - 2e^{-\frac{1}{2}y^2}y\frac{\mathrm{d}\phi(y)}{\mathrm{d}y} + \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right)\frac{\mathrm{d}^2\phi(y)}{\mathrm{d}y^2} + \left(\eta - y^2\right)\exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right)\phi(y) = 0 \\
\left(-1+y^2\right)\phi(y) - 2y\frac{\mathrm{d}\phi(y)}{\mathrm{d}y} + \frac{\mathrm{d}^2\phi(y)}{\mathrm{d}y^2} + \left(\eta - y^2\right)\phi(y) = 0 \\
\frac{\mathrm{d}^2\phi(y)}{\mathrm{d}y^2} - 2y\frac{\mathrm{d}\phi(y)}{\mathrm{d}y} + (\eta - 1)\phi(y) = 0
\end{aligned}
\tag{4.1.20}
$$

cuya solución es

$$
\phi(y) = C_1 H_n(y) \tag{4.1.21}
$$

de donde podemos sacar el espectro de energía

$$
E_n = \Omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{4.1.22}
$$

Por lo tanto la solución a (4.1.16) es

$$
\varphi(y) = C\exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right)H_n(y) \tag{4.1.23}
$$

regresando a la variable original

$$
\varphi(x) = C\exp\left(-\frac{\Omega}{2}x^2\right)H_n\left(\sqrt{\Omega}x\right) \tag{4.1.24}
$$

y hallando la constante de normalización

$$
1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\,|C|^2\exp\left(-\Omega x^2\right)H_n^2\left(\sqrt{\Omega}x\right) \tag{4.1.25}
$$

de donde resulta que

$$\begin{aligned} 1 &= |C|^2 2^n \pi^{1/2} n! \sqrt{\Omega^{-1}} \\ 1 &= C\, 2^{n/2} \pi^{1/4} n!^{1/2} \sqrt[4]{\Omega^{-1}} \\ \therefore C &= \sqrt[4]{\frac{\Omega}{\pi}} \sqrt{\frac{1}{2^n n!}} \end{aligned} \tag{4.1.26}$$

de esta manera obtenemos $\varphi_n(x)$

$$\varphi_n(x) = \left(\frac{\Omega}{\pi}\right)^{1/4} (n!2^n)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\Omega}{2} x^2\right) H_n(\sqrt{\Omega} x) \tag{4.1.27}$$

Luego para hallar α_n

$$\psi(x, t=0) = \sum_n \alpha_n \varphi_n(x) = \left(\frac{w_r}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{\omega_r\, x^2}{2}\right) \tag{4.1.28}$$

si multiplico a ambos lados de esta ecuación por un $\varphi_n^\star(x)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \psi(x, t=0) &= \alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) + \alpha_3 \varphi_3(x) + ... + \alpha_n \varphi_n(x) + ... \\ \varphi_n^\star(x) \psi(x, t=0) &= \varphi_n^\star(x) \alpha_n \varphi_n(x) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \varphi_n^\star(x) \psi(x, t=0) &= \alpha_n \end{aligned} \tag{4.1.29}$$

de esta manera usando la ortogonalidad de los estados y su normalización podemos obtener las constantes α_n, asi

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \varphi_n^\star(x) \psi(x, t=0) \\ \alpha_n &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \left(\frac{\Omega}{\pi}\right)^{1/4} (n!2^n)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\Omega\, x^2}{2}\right) H_n(\sqrt{\Omega} x) \left(\frac{w_r}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{\omega_r\, x^2}{2}\right) \\ \alpha_n &= \left(\frac{\Omega}{\pi}\right)^{1/4} (n!2^n)^{-1/2} \left(\frac{w_r}{\pi}\right)^{1/4} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, H_n(\sqrt{\Omega} x) \exp\left(-\frac{(\omega_r + \Omega) x^2}{2}\right) \end{aligned} \tag{4.1.30}$$

para resolver la integral ahi planteada nos plantearemos otra integral

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, H_n(\sqrt{\Omega}x) \exp\left(-\frac{(\omega_r+\Omega)x^2}{2}\right)$$

usando la siguiente transformación $\quad y = \sqrt{\Omega}x, \quad \mathrm{d}y = \sqrt{\Omega}\,\mathrm{d}x$

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!\sqrt{\Omega}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y\, H_n(y) \exp\left(-\frac{(\omega_r+\Omega)y^2}{2\Omega}\right)$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y\, \Omega^{-1/2} \exp\left(-s^2+2sy\right) \exp\left(-\frac{(\omega_r+\Omega)y^2}{2\Omega}\right)$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \exp\left(-s^2+2s\sqrt{\Omega}x\right) \exp\left(-\frac{(\omega_r+\Omega)x^2}{2}\right)$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \exp\left(-\frac{\Omega}{2}x^2-\frac{\omega_r}{2}x^2+2s\sqrt{\Omega}x-s^2\right)$$

$$I = e^{-s^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \exp\left(-\frac{(\omega_r+\Omega)x^2}{2}+2s\sqrt{\Omega}x\right)$$

$$I = e^{-s^2}\left(\frac{2\pi}{\omega_r+\Omega}\right)^{1/2} \exp\left\{\frac{4s^2\Omega}{2\omega_r+2\Omega}\right\}$$

$$I = \left(\frac{2\pi}{\omega_r+\Omega}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{4s^2\Omega}{2\omega_r+2\Omega}-s^2\right)$$

$$I = \left(\frac{2\pi}{\omega_r+\Omega}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{s^2\Omega-s^2\omega_r}{\omega_r+\Omega}\right)$$

$$I = \left(\frac{2\pi}{\omega_r+\Omega}\right)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{s^2\Omega-s^2\omega_r}{\omega_r+\Omega}\right)^n \quad \text{no sale lo que quiero, de la forma que quiero asi que}$$

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, H_n(\sqrt{\Omega}x) \exp\left(-\frac{(\omega_r+\Omega)x^2}{2}\right) = \left(\frac{2\pi}{\omega_r+\Omega}\right)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^{2n}}{n!}\left(\frac{\Omega-\omega_r}{\omega_r+\Omega}\right)^n \tag{4.1.31}$$

de donde

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, H_n(\sqrt{\Omega}x) \exp\left(-\frac{(\omega_r+\Omega)x^2}{2}\right) = \left(\frac{2\pi}{\omega_r+\Omega}\right)^{1/2} s^n \left(\frac{\Omega-\omega_r}{\omega_r+\Omega}\right)^n \tag{4.1.32}$$

donde s es un parametro libre (no se como eliminarlo). Asi podemos determinar que

$$\alpha_n = \left(\frac{\Omega}{\pi}\right)^{1/4}(n!2^n)^{-1/2}\left(\frac{w_r}{\pi}\right)^{1/4}\left(\frac{2\pi}{\omega_r+\Omega}\right)^{1/2}s^n\left(\frac{\Omega-\omega_r}{\omega_r+\Omega}\right)^n \tag{4.1.33}$$

Empezando del final

$$\begin{aligned}
\psi(x,t) &= \mathcal{N}(t)\exp\left(-\frac{\omega(t)x^2}{2}\right)\\
\psi(x,t) &= \sum_n e^{-i\Omega(n+\frac{1}{2})t}\alpha_n\left(\frac{\Omega}{\pi}\right)^{1/4}(n!2^n)^{-1/2}\exp\left(-\frac{\Omega}{2}x^2\right)H_n(\sqrt{\Omega}x)\\
\psi(x,t) &= \left(\frac{\Omega}{\pi}\right)^{1/4}\exp\left(-i\frac{\Omega}{2}t\right)\exp\left(-\frac{\Omega}{2}x^2\right)\sum_n e^{-i\Omega nt}\alpha_n(n!2^n)^{-1/2}H_n(\sqrt{\Omega}x)
\end{aligned} \tag{4.1.34}$$

este estado evolucionado por el hamiltoniano es

$$\psi(x,t) = \mathcal{N}(t)\exp\left(-\frac{\omega(t)\,x^2}{2}\right) \tag{4.1.35}$$

donde $\mathcal{N}(t)$ es la constante de normalización y (Shankar, 1995)

$$\omega(t) = \Omega\left(\frac{\Omega - i\,\omega_r\cot\left(\Omega\,t\right)}{\omega_r - i\,\Omega\cot\left(\Omega\,t\right)}\right) \tag{4.1.36}$$

El objetivo es calcular la complexity para este estado (4.1.35) a partir de (4.1.11). Además,

$$\omega(t=0) = \omega_r \tag{4.1.37}$$

Ahora calcularemos la constante $\mathcal{N}(t)$ usando

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\,|\psi(x,t)|^2 \tag{4.1.38}$$

podemos reemplazar en la ecuación

$$
\begin{aligned}
1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, |\mathcal{N}(t)|^2 \left| \exp\left(-\frac{\omega(t)\, x^2}{2} \right) \right|^2 \\
1 &= |\mathcal{N}(t)|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \exp\left\{ -\operatorname{Re}[\omega(t)]\, x^2 \right\} \\
1 &= |\mathcal{N}(t)|^2 \left\{ \frac{\pi}{\operatorname{Re}[\omega(t)]} \right\}^{1/2}
\end{aligned}
$$

por lo tanto

$$
\mathcal{N}(t) = \left\{ \frac{\operatorname{Re}[\omega(t)]}{\pi} \right\}^{1/4} \tag{4.1.39}
$$

4.2. Complexity a partir de la matriz de covarianza

La complexity que vamos a hallar corresponde a la circuit complexity, osea esta complejidad netamente solo depende del circuito cuántico; es decir de los operadores. Para poder hallar esta complexity usaremos el método de la matriz de covarianza. Analizaremos de manera concreta la complexity teniendo como funciones de onda la del oscilador armónico cuántico.

4.2.1. Resumen de Circuit Complexity

Hagamos un pequeño resumen de como calcular la complexity del circuito. Detalles de esto pueden ser encontrados en (Jefferson and Myers, 2017). El problema se establece de la siguiente manera: dado un conjunto de gates y un reference state, queremos construir el circuito mas eficiente para llegar a un circuito dado. Formalmente se escribe:

$$
|\psi_{\tau=1}\rangle = \tilde{U}(\tau = 0)\, |\psi_{\tau=0}\rangle \tag{4.2.1}
$$

donde

$$
\tilde{U}(\tau) = \overleftarrow{\mathcal{P}} \exp\left(i \int_0^{\tau} d\tau\, H(\tau) \right) \tag{4.2.2}
$$

es el operador unitario que representa a todo el circuito cuántico, el cuál toma el estado de referencia $|\psi_{\tau=0}\rangle$ y lo lleva al estado target $|\psi_{\tau=0}\rangle$. τ parametriza el camino dentro del espacio de unitarios y da una base particular (puertas elementales) M_I,

$$H(\tau) = Y^I(\tau) M_I \ .$$

En este contexto, los coeficientes $\left\{ Y^I(\tau) \right\}$ se toman como ¨funciones de control¨. El *path ordering* en ((4.2.2)) es necesario ya que no todos los M_I no necesariamente conmutan entre si.

Existe el formalismo de la matriz covariante para poder hacer estos calculos (Braunstein and van Loock, 2005), y eso es lo que haremos

Dado que ambos estados son gausianos, estos pueden ser escritos de manera equivalente por la *Covariance Matrix* como sigue(Weedbrook et al., 2012)

$$G^{ab} = \langle \psi(x,t) | \xi^a \xi^b + \xi^b \xi^a | \psi(x,t) \rangle \tag{4.2.3}$$

$$\tilde{G}^{\tau=0} = S \cdot G^{\tau=0} \cdot S^T \tag{4.2.4}$$

con $\tilde{G}^{\tau=0}$ es una matriz identidad y S una matriz simétrica real cuya transpuesta se denota por S^T. Similarmente el *target state* se transformara como

$$\tilde{G}^{\tau=1} = S \cdot G^{\tau=1} \cdot S^T \tag{4.2.5}$$

El unitario $\tilde{U}(\tau)$ actúa sobre la *covariance matrix* transformada de la siguiente manera,

$$\tilde{G}^{\tau=1} = \tilde{U}(\tau) \cdot \tilde{G}^{\tau=0} \cdot \tilde{U}^{-1}(\tau) \tag{4.2.6}$$

Siguiente nosotros definimos la *cost function* $\mathcal{F}(\tilde{U}, \dot{\tilde{U}})$ y definimos la funcional (Ali et al., 2019)

$$\mathcal{C}(\tilde{U}) = \int_0^1 \mathcal{F}\left(\tilde{U}, \dot{\tilde{U}}\right) \mathrm{d}\tau \tag{4.2.7}$$

minimizando esta funcional de costo nos dará el conjunto óptimo $Y^I(\tau)$, lo cuál nos da el circuito mas eficiente minimizando la longitud del circuito. Hay muchas formas de escoger $\mathcal{F}(\tilde{U}, \dot{\tilde{U}})$. Para mas detalles (Nielsen, 2006). En esta tesis escogeremos

$$\mathcal{F}_2(U, Y) = \sqrt{\sum_I (Y^I)^2} \tag{4.2.8}$$

Para esta elección es fácil ver que $\mathcal{C}(\tilde{U})$, corresponde a la geodesica en la manifold de unitarios. Tambien se puede repetir el trabajo con diferentes $\mathcal{F}(\tilde{U}, \dot{\tilde{U}})$.

4.2.2. Circuit Complexity de un oscilador armónico

Para nuestro caso la *covariance matrix* será

$$G^{ab} = \langle \psi(x,t) | \xi^a \xi^b + \xi^b \xi^a | \psi(x,t) \rangle \quad \text{donde} \quad \xi = \{x, p\} \tag{4.2.9}$$

entonces, para cuando $\tau = 0$

$$\begin{aligned} G^{11} &= \langle \psi(x, t=0) | \hat{x}\hat{x} + \hat{x}\hat{x} | \psi(x, t=0) \rangle \\ &= 2x^2 \langle \psi(x, t=0) | \psi(x, t=0) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} 2x^2 \left(\left(\frac{w_r}{\pi} \right)^{1/4} \exp\left(-\frac{\omega_r\, x^2}{2} \right) \right)^2 \\ &= 2 \left(\frac{w_r}{\pi} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp\left(-\omega_r\, x^2 \right) \\ &= 2 \left(\frac{w_r}{\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{\pi}{w_r} \right)^{1/2} \frac{1}{2\omega_r} \\ &= \frac{1}{\omega_r} \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

$$
\begin{aligned}
G^{12} &= \langle\psi(x,t=0)|\hat{x}\hat{p}+\hat{p}\hat{x}|\psi(x,t=0)\rangle = G^{21} \\
&= \langle\psi(x,t=0)|\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\,|x\rangle\langle x|\,\hat{x}\hat{p}+\hat{p}\hat{x}|\psi(x,t=0)\rangle \\
&= \langle\psi(x,t=0)|\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\,|x\rangle\langle x|\,i+2\hat{p}\hat{x}|\psi(x,t=0)\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\,\langle\psi|x\rangle\,(i\,\langle x|\psi\rangle +\,\langle x|2\hat{p}\hat{x}|\psi\rangle) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\,\langle\psi|x\rangle\left(i\,\langle x|\psi\rangle - i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x\,\langle x|\psi\rangle\right) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\,\langle\psi|x\rangle\,i\left(1-2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x\right)\langle x|\psi\rangle \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{4.2.11}
$$

$$
\begin{aligned}
G^{22} &= \langle\psi(x,t=0)|\hat{p}\hat{p}+\hat{p}\hat{p}|\psi(x,t=0)\rangle \\
&= \langle\psi(x,t=0)|\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\,|x\rangle\langle x|\,\hat{p}\hat{p}+\hat{p}\hat{p}|\psi(x,t=0)\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\,\langle\psi|x\rangle\,2\,\langle x|\hat{p}\hat{p}|\psi\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} 2\left(\frac{w_r}{\pi}\right)^{1/4}\exp\left(-\frac{\omega_r\,x^2}{2}\right)\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right)\left(\frac{w_r}{\pi}\right)^{1/4}\exp\left(-\frac{\omega_r\,x^2}{2}\right) \\
&= -2\left(\frac{w_r}{\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} x\omega_r\exp\bigl(-x^2\omega_r\bigr)\bigl(x^2\omega_r-3\bigr) \\
&= 2\left(\frac{w_r}{\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{\omega_r}\right) \\
&= \omega_r
\end{aligned}
\tag{4.2.12}
$$

de esta manera tenemos que (en las integrales hay una condicional de que $\mathrm{Re}(\omega_r) > 0$)

$$
G^{\tau=0} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\omega_r} & 0 \\ 0 & \omega_r \end{pmatrix}
\tag{4.2.13}
$$

Haciendo un procedimiento similar al anterior tenemos que

$$
\begin{aligned}
G^{11} &= \langle\psi(x,t)|\hat{x}\hat{x}+\hat{x}\hat{x}|\psi(x,t)\rangle \\
&= 2\,\langle\psi(x,t)|\psi(x,t)\rangle\, x^2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, 2x^2 \left\{\frac{\mathrm{Re}[\omega(t)]}{\pi}\right\}^{1/2} \left|\exp\left(-\frac{\mathrm{Re}\{\omega(t)\}\, x^2}{2}\right)\exp\left(-\frac{i\,\mathrm{Im}\{\omega(t)\}\, x^2}{2}\right)\right|^2 \\
&= 2\left\{\frac{\mathrm{Re}[\omega(t)]}{\pi}\right\}^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, x^2 \exp\left(-\,\mathrm{Re}\{\omega(t)\}\, x^2\right) \\
&= 2\left\{\frac{\mathrm{Re}[\omega(t)]}{\pi}\right\}^{1/2} \left(\frac{\pi}{\mathrm{Re}\{\omega(t)\}}\right)^{1/2} \frac{1}{2\,\mathrm{Re}\{\omega(t)\}} \\
&= \frac{1}{\mathrm{Re}\{\omega(t)\}}
\end{aligned}
\tag{4.2.14}
$$

$$
\begin{aligned}
G^{12} &= \langle\psi(x,t=0)|\hat{x}\hat{p}+\hat{p}\hat{x}|\psi(x,t=0)\rangle = G^{21} \\
&= \langle\psi(x,t=0)|\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, |x\rangle\langle x|\, \hat{x}\hat{p}+\hat{p}\hat{x}|\psi(x,t=0)\rangle \\
&= \langle\psi(x,t=0)|\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, |x\rangle\langle x|\, i + 2\hat{p}\hat{x}|\psi(x,t=0)\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \langle\psi|x\rangle \left(i\,\langle x|\psi\rangle + \,\langle x|2\hat{p}\hat{x}|\psi\rangle\right) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \langle\psi|x\rangle \left(i\,\langle x|\psi\rangle - i2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x\,\langle x|\psi\rangle\right) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \langle\psi|x\rangle\, i\left(1-2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x\right)\langle x|\psi\rangle \\
&= -\left\{\frac{\mathrm{Re}[\omega(t)]}{\pi}\right\}^{1/2} \frac{\sqrt{\pi}\,\mathrm{Im}[\omega]}{\mathrm{Re}[\omega]^{3/2}} \\
&= -\frac{\mathrm{Im}[\omega]}{\mathrm{Re}[\omega]}
\end{aligned}
\tag{4.2.15}
$$

$$
\begin{aligned}
G^{22} &= \langle \psi(x,t=0)|\hat{p}\hat{p} + \hat{p}\hat{p}|\psi(x,t=0)\rangle \\
&= \langle \psi(x,t=0)|\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, |x\rangle\langle x|\, \hat{p}\hat{p} + \hat{p}\hat{p}|\psi(x,t=0)\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \langle\psi|x\rangle\, 2\, \langle x|\hat{p}\hat{p}|\psi\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} 2\left\{\frac{\mathrm{Re}[\omega(t)]}{\pi}\right\}^{1/4} \exp\left(-\frac{\omega(t)^*\, x^2}{2}\right)\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right)\left\{\frac{\mathrm{Re}[\omega(t)]}{\pi}\right\}^{1/2} \exp\left(-\frac{\omega(t)\, x^2}{2}\right) \\
&= -2\left\{\frac{\mathrm{Re}[\omega(t)]}{\pi}\right\}^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, (\mathrm{Re}(\omega) + i\,\mathrm{Im}(\omega))e^{-x^2\,\mathrm{Re}(\omega)}\left(ix^2\,\mathrm{Im}(\omega) + x^2\,\mathrm{Re}(\omega) - 1\right) \\
&= \left\{\frac{\mathrm{Re}[\omega(t)]}{\pi}\right\}^{1/2} \frac{\sqrt{\pi}\omega\omega^*}{\mathrm{Re}(\omega)^{3/2}} \\
&= \frac{|\omega(t)|^2}{\mathrm{Re}(\omega(t))}
\end{aligned}
\tag{4.2.16}
$$

(en las integrales hay una condicional de que $\mathrm{Re}[\omega(t)] > 0$), de esta manera resulta que

$$
G^{\tau=1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\mathrm{Re}(\omega(t))} & -\dfrac{\mathrm{Im}(\omega(t))}{\mathrm{Re}(\omega(t))} \\ -\dfrac{\mathrm{Im}(\omega(t))}{\mathrm{Re}(\omega(t))} & \dfrac{|\omega(t)|^2}{\mathrm{Re}(\omega(t))} \end{pmatrix} \tag{4.2.17}
$$

Ahora cambiamos la base de la siguiente manera

$$
\tilde{G}^{\tau=1} = S \cdot G^{\tau=1} \cdot S^T, \quad \tilde{G}^{\tau=0} = S \cdot G^{\tau=0} \cdot S^T \tag{4.2.18}
$$

con

$$
S = \begin{pmatrix} \sqrt{\omega^r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\omega_r}} \end{pmatrix} \tag{4.2.19}
$$

de tal manera que $\tilde{G}^{\tau=0} = I$ donde I es matriz identidad. Para nuestro caso caso de estudio la frecuencia del estado base ω_r es real. Escogeremos los siguientes generadores

$$M_{11} \to \frac{i}{2}(x\,p + p\,x), \quad M_{22} \to \frac{i}{2}x^2, \quad M_{33} \to \frac{i}{2}p^2. \tag{4.2.20}$$

Que nos servirán como nuestras puertas elementales y satisfacen el álgebra $SL(2, R)$

$$[M_{11}, M_{22}] = 2\,M_{22}, \quad [M_{11}, M_{33}] = -2\,M_{33}, \quad [M_{22}, M_{33}] = M_{11} \tag{4.2.21}$$

Ahora como vimos en (referencia a paper de complexity) parametrizamos

$$\tilde{U}(\tau) = \begin{pmatrix} \cos(\mu(\tau))\cosh(\rho(\tau)) - \sin(\theta(\tau))\sinh(\rho(\tau)) & -\sin(\mu(\tau))\cosh(\rho(\tau)) + \cos(\theta(\tau))\sinh(\rho \\ \sin(\mu(\tau))\cosh(\rho(\tau)) + \cos(\theta(\tau))\sinh(\rho(\tau)) & \cos(\mu(\tau))\cosh(\rho(\tau)) + \sin(\theta(\tau))\sinh(\rho(\end{pmatrix} \tag{4.2.22}$$

y usando las condiciones de borde

$$\tilde{G}^{\tau=1} = \tilde{U}(\tau=1)\cdot\tilde{G}^{\tau=0}\cdot\tilde{U}^{-1}(\tau=1), \qquad \tilde{G}^{\tau=0} = \tilde{U}(\tau=0)\cdot\tilde{G}^{\tau=0}\cdot\tilde{U}^{-1}(\tau=0)\,, \tag{4.2.23}$$

esto es

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega_r}{\mathrm{Re}(\omega(t))} & -\frac{\mathrm{Im}(\omega(t))}{\mathrm{Re}(\omega(t))} \\ -\frac{\mathrm{Im}(\omega(t))}{\mathrm{Re}(\omega(t))} & \frac{|\omega(t)|^2}{\mathrm{Re}(\omega(t))\omega_r} \end{pmatrix} = \\ \begin{bmatrix} -\sinh(2\rho(1))\sin(\theta(1)+\mu(1)) + \cosh(2\rho(1)) & \sinh(2\rho(1))\cos(\theta(1)+\mu(1)) \\ \sinh(2\rho(1))\cos(\theta(1)+\mu(1)) & \sinh(2\rho(1))\sin(\theta(1)+\mu(1)) + \cosh(2\rho(1)) \end{bmatrix} \tag{4.2.24}$$

y

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_r} & 0 \\ 0 & \omega_r \end{pmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} -\sinh(2\rho(0))\sin(\theta(0)+\mu(0))+\cosh(2\rho(0)) & \sinh(2\rho(0))\cos(\theta(0)+\mu(0)) \\ \sinh(2\rho(0))\cos(\theta(0)+\mu(0)) & \sinh(2\rho(0))\sin(\theta(0)+\mu(0))+\cosh(2\rho(0)) \end{bmatrix} \tag{4.2.25}$$

donde c es una constante arbitraria. Por simplicidad escogemos

$$\mu(\tau=1)=\mu(\tau=0)=0, \quad \theta(\tau=0)=\theta(\tau=1)=c=\tan^{-1}\left(\frac{\omega_r^2-|\omega(t)|^2}{2\,\omega_r\,\mathrm{Im}(\omega(t))}\right). \tag{4.2.26}$$

$$Y^I = \mathrm{Tr}\left(\partial_\tau \tilde{U}(\tau)\cdot \tilde{U}(\tau)^{-1}\cdot (M^I)^T\right) \ , \tag{4.2.27}$$

donde $\mathrm{Tr}\left(M^I.(M^J)^T\right)=\delta^{IJ}$. Usando esto podemos definir la métrica

$$ds^2 = G_{IJ}dY^I dY^{*J}, \tag{4.2.28}$$

donde el $G_{IJ}=\frac{1}{2}\delta_{IJ}$ es conocida como el factor de penalidad. Dado de la forma $U(s)$ en (4.2.22) tendremos,

$$ds^2 = d\rho^2+\cosh(2\rho)\cosh^2\rho\,d\mu^2+\cosh(2\rho)\sinh^2\rho\,d\theta^2-\sinh(2\rho)^2\,d\mu\,d\theta, \tag{4.2.29}$$

y la funcional de complexity definida en (4.2.8) toma la forma,

$$\mathcal{C}(\tilde{U}) = \int_0^1 d\tau\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}. \tag{4.2.30}$$

La solución más simple en esta geometría es una línea recta (Ali et al., 2019).

$$\rho(\tau) = \rho(1)\,\tau. \tag{4.2.31}$$

Evaluando (4.2.30) es obvio que

$$\mathcal{C}(\tilde{U}) = \rho(1) = \frac{1}{2}\left(\cosh^{-1}\left[\frac{\omega_r^2 + |\omega(t)|^2}{2\,\omega_r\,\mathrm{Re}(\omega(t))}\right]\right). \tag{4.2.32}$$

Capítulo 5

Discusión

Capítulo 6

Conclusión

6.1. Matriz de Consistencia

Formulación del Problema	Formulación de Objetivos	Formulación de Hipótesis	Justificación	Metodología
¿Como hallar la complejidad de un Oscilador Armónico con el formalismo de la matriz de covarianza?	Comparar nuestros resultados obtenidos con los métodos de Fubini Study y de Nielsen para obtener la complexity de un Oscilador Armónico Cuántico. Destajar las ventajas del formalismo de la matriz de covarianza para obtener la complejidad de un oscilador armónico cuántico.	Llegar al mismo resultado que por los otros métodos	Busco mostrar que el formalismo de la matriz de covarianza es mucho más simple para poder realizar los cálculos, los cálculos se hacen mucho más simples en comparación con los métodos de Fubini-Study, y de Nielsen. Además mostrar la posibilidad de utilizar este formalismo para cálculos mucho más complejos.	No Experimental, Explicativa

Bibliografía

Ali, T., Bhattacharyya, A., Haque, S. S., Kim, E. H., and Moynihan, N. (2019). Time evolution of complexity: a critique of three methods. *Journal of High Energy Physics*, 2019(4).

Braunstein, S. L. and van Loock, P. (2005). Quantum information with continuous variables. *Rev. Mod. Phys.*, 77:513–577.

Jefferson, R. A. and Myers, R. C. (2017). Circuit complexity in quantum field theory. *Journal of High Energy Physics*, 2017(10).

Nielsen, M. A. (2006). Quantum computation as geometry. *Science*, 311(5764):1133–1135.

Shankar, R. (1995). *Principles of Quantum Mechanics*. Springer US.

Weedbrook, C., Pirandola, S., García-Patrón, R., Cerf, N. J., Ralph, T. C., Shapiro, J. H., and Lloyd, S. (2012). Gaussian quantum information. *Reviews of Modern Physics*, 84(2):621–669.

Apéndice A

Test

A1. Simetría axial y estacionaria

Asumamos un espacio axiosimétrico y estacionario. En este espacio la métrica se puede expresar de la siguiente manera:

$$\mathrm{d}s^2 = -V(\rho, z)(\mathrm{d}t - \omega\,\mathrm{d}\phi)^2 + V(\rho, z)^{-1}\rho^2\,\mathrm{d}\phi^2 + \Omega(\rho, z)^2\big(\mathrm{d}\rho^2 + \Lambda(\rho, z)\,\mathrm{d}z^2\big) \tag{A1.1}$$

Donde V, Ω, Λ son funciones que solo dependen de ρ y $z$la cual en el caso especial en que el espacio es vacío, es decir $R_{ab} = 0$ tenemos la siguiente ecuación para ρ:

$$D^a D_a \rho = 0 \quad D_a : \text{derivada covariantes en la 2D atravesada por } \rho\, z \tag{A1.2}$$