几种多项式插值方法的应用与比较

陶 睿

（中国海洋大学 信息科学与工程学院 青岛 266100）

摘要：本文主要讨论插值法中Lagrange插值、Hermite插值、分段三次Hermite插值及三次样条插值，并在python中自己实现了这些算法。在此基础上,用不同的插值方法来逼近函数 $f(x)=\frac{1}{1+25x^2}$，比较了各个方法的误差及其优缺点。

关键词：Lagrange插值；Hermite插值；分段三次Hermite插值；三次样条插值；误差

引言：许多实际问题都用函数来表示某种内在规律的数量关系，其中相当一部分函数是通过实验或观测得到的。在海洋和大气的研究中，许多观测数据都是以区间[a,b]上一系列xi与yi函数值给出的。还有的问题中，虽然 $f(x)$ 在某个区间 $[a,b]$ 上是存在的，有的还是连续的，但却只能给出 $[a,b]$ 上一系列点 x_i 的函数值，这只是一张函数表。因此，我们希望根据给定的函数表做一个既能反映函数 $f(x)$ 的特性，又便于计算简单函数 $p(x)$，用 $p(x)$ 近似 $f(x)$。通常选一类较简单的函数（如代数多项式或分段代数多项式）作为 $f(x)$，并使 $p(x_i)=f(x_i)$ 对i=0,1,2…n成立.这样确定的 $p(x)$ 就是我们希望得到的插值函数。

一、几种插值方法的算法

1.1 Lagrange插值

已知定义在区间 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$，满足 $f(x)\in C^n_{[a,b]}$，且 $f^{(n+1)}(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在。另有 $n+1$ 个包含于 $[a,b]$ 的插值节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$，对应函数值为 $y_0,y_1,\cdots,y_n$，则Lagrange插值的基函数为

$$L_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} \tag{1}$$

n 次Lagrange插值多项式为

$$P_n(x)=\sum_0^n y_iL_i(x) \tag{2}$$

1.2 Hermite插值

已知定义在区间$\left[a,b\right]$上的函数$f\left(x\right)$，满足$f\left(x\right)\in C_{[a,b]}^{n}$，且$f^{(n+1)}\left(x\right)$在$\left[a,b\right]$上存在。另有$n+1$个包含于$\left[a,b\right]$的插值节点$x_0, x_1, \mathrm{L}\ , x_n$，对应函数值为$y_0, y_1, \mathrm{L}\ , y_n$，对应的微商值为$y_0', y_1', \mathrm{L}\ , y_n'$，Hermite插值的基函数为

$$h_i(x) = [1 - 2(x - x_i)l_i'(x_i)]l_i^2(x) \tag{3}$$

$$H_i\left(x\right) = l_i^2\left(x\right)\left(x - x_i\right), i = 0,1,\mathrm{L}\ ,n \tag{4}$$

$2n+1$次Hermite多项式为

$$H\left(x\right) = \sum_{i=0}^{n}\left(y_i h_i\left(x\right) + y_i' H_i\left(x\right)\right) \tag{5}$$

其插值余项为

$$R\left(x\right) = f\left(x\right) - H\left(x\right) = \frac{f^{(2n+2)}\left(\xi\right)}{\left(2n+2\right)!}\omega^2{}_n\left(x\right) \tag{6}$$

其中，$\xi\in\left(a,b\right)$。

1.3 分段三次 Hermite 插值

分段三次 Hermite插值是函数拟合的基本方法,在基础研究和工程技术中有着非常重要的应用。

若 $f(x) \in C^{(1)}[a,b], a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, 则 存 在 唯 一 的 分 段 插 值 函 数 $I(x)$, 满 足 条 件:

$$(1) I_n(x) \in C^{(1)}[a,b] \tag{7}$$

$$(2) I_n(x) = f(x_k), I'_n(x_k) = f'(x_k), k = 0, \ldots, n; \tag{8}$$

$(3)I_n(x)$在每个小区间$[x_k\ , x_{k+1}]$上是关于x的三次代数多项式。

则称$I_n(x)$为$f(x)$的分段三次 Hermite插值。

$$I_n(x) = \sum_{i=0}^{i=n}(f(x_i)\alpha_i(x) + f'(x_i)\beta_i(x)) \tag{9}$$

$$a_j(x) = \begin{cases} \left(\frac{x - x_j}{x_j - x_{j-1}}\right)^2\left(1 + 2\frac{(x - x_j)}{x_{j-1} - x_j}\right) & x_{j-1} \le x \le x_j\ , j = 1, \ldots, n \\ \left(\frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}}\right)^2\left(1 + 2\frac{(x - x_j)}{x_{j+1} - x_j}\right) & x_j \le x \le x_{j+1}\ , j = 0, \ldots, n-1 \\ 0 & x \notin [x_{j-1}\ , x_{j+1}] \end{cases} \tag{10}$$

$$\beta_j(x) = \begin{cases} (x - x_j)\left(\frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}\right)^2 & x_{j-1} \le x \le x_j\ , j = 1, \ldots, n \\ (x - x_j)\left(\frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}}\right)^2 & x_j \le x \le x_{j+1}\ , j = 0, \ldots, n-1 \\ o & x \notin [x_{j-1}\ , x_{j+1}] \end{cases} \tag{11}$$

1.4 三次样条插值

已知区间$[a,b]$上$n+1$个插值节点$x_0,x_1,\cdots,x_n$，则三次样条插值函数为

$$S(x)=\begin{cases} S_1(x) \\ S_2(x) \\ \cdots \\ S_n(x) \end{cases} \tag{12}$$

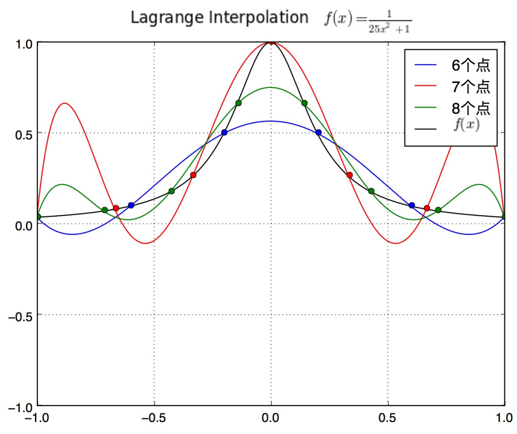
$$S_i(x)=\left(\frac{x-x_i}{h_{i-1}}\right)^2\left(1+2\frac{x-x_{i-1}}{h_{i-1}}\right)y_{i-1}+\left(\frac{x-x_{i-1}}{h_{i-1}}\right)^2\left(1+2\frac{x-x_i}{h_{i-1}}\right)y_i$$
$$+\left(\frac{x-x_i}{h_{i-1}}\right)^2(x-x_{i-1})m_{i-1}+\left(\frac{x-x_{i-1}}{h_{i-1}}\right)^2(x-x_i)m_i \tag{13}$$

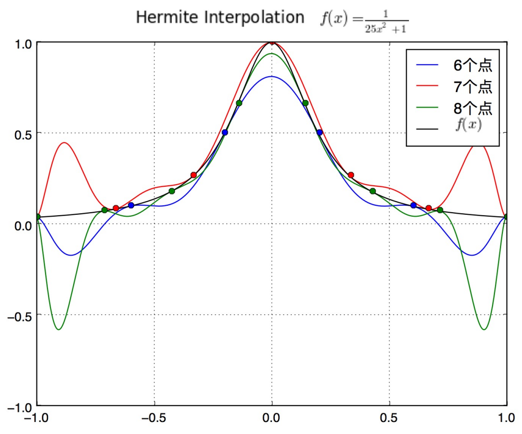
$$h_{i-1}=x_i-x_{i-1},x_{i-1}\le x\le x_i,i=1,2,\cdots,n \tag{14}$$

其中，m_i为$S(x)$在点x_i处的微商值。

二、Lagrange插值与Hermite插值对比

2.1 插值曲线对比





现象及分析：

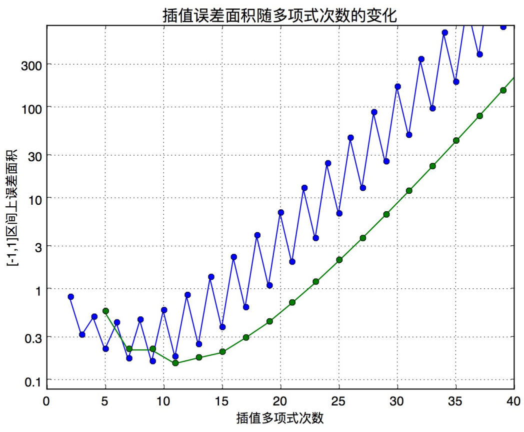
如上图，左侧为Lagrange插值，右侧为Hermite插值。

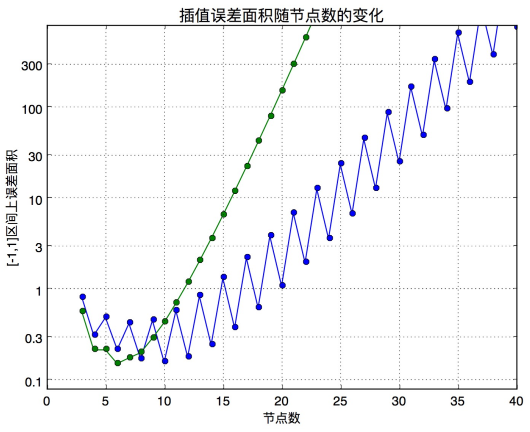
可以看出在选取节点数较少时（6~8个点）：

（1）曲线两侧端点附近，二者表现相当，都有一定的偏离f(x)的现象。

（2）曲线中间，Hermite插值与 f(x) 更加贴近。原因是Hermite插值在节点处还符合一阶导数值相等。

2.2 误差对比





现象及分析：

如上图（误差面积*采用了对数坐标），蓝色为Lagrange插值，绿色为Hermite插值。

可以看出，随着选取节点数以及多项式次数的增加：

（1）二者的误差面积都是先减少后增加，最终呈现指数增长的趋势。二者取得最小值时的多项式次数相近。

Lagrange插值在节点数10，次数9时为最小值。

Hermite　插值在节点数6，次数11时为最小值。

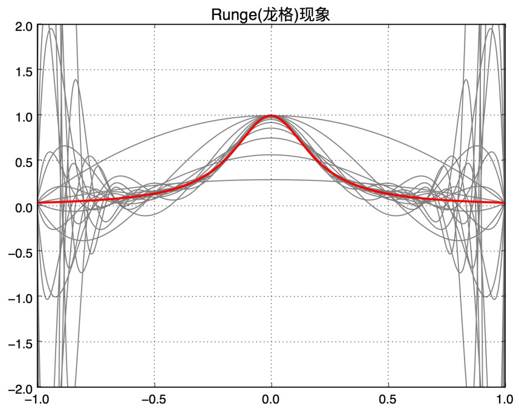
（2）Lagrange插值误差面积呈现奇偶不同的现象。多项式次数为奇数（节点数偶数）时，误差较小；Hermite插值无此现象。其多项式次数均为奇数。原因不明。

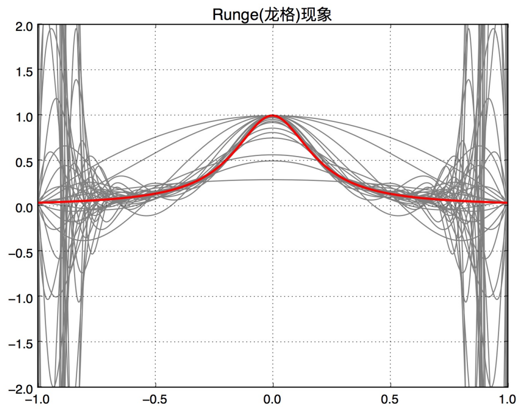
（3）在多项式次数相同时，Hermite插值误差面积更小。原因是Hermite插值在节点处还符合一阶导数值相等，数据信息更完善。

（4）在节点数相同时，Lagrange插值误差面积更小。原因是在选取n+1个节点时，Lagrange插值多项式为n次而Hermite插值多项式为2n+1次。更高的多项式次数带来了更严重的数值不稳定现象。

*误差面积指插值曲线与原函数曲线在区间[-1, 1]上所夹区域的面积。

2.3 Runge（龙格）现象



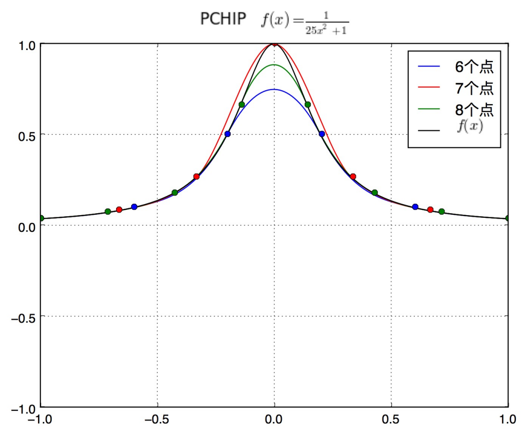


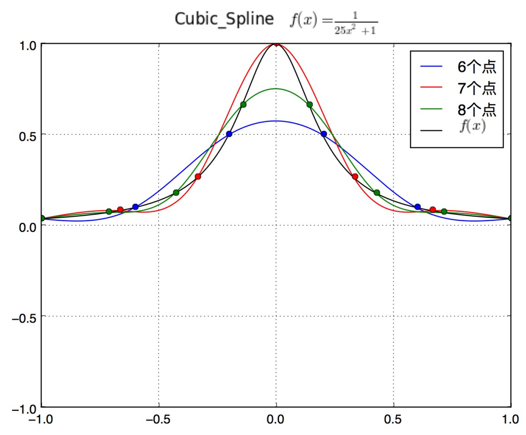
如上图，左侧为Lagrange插值的Runge现象，右侧为Hermite插值的Runge现象。

1901年，Carl David Tolmé Runge意外地发现，用插值多项式逼近函数$f(x)=\frac{1}{1+25x^2}$时出现了一些反常的现象。当次数变高时，插值多项式反而变得更不准确。事实上，当次数n趋于无穷时，该区间上的最大误差值也将趋于无穷大！

三、分段三次Hermite插值与三次样条插值对比

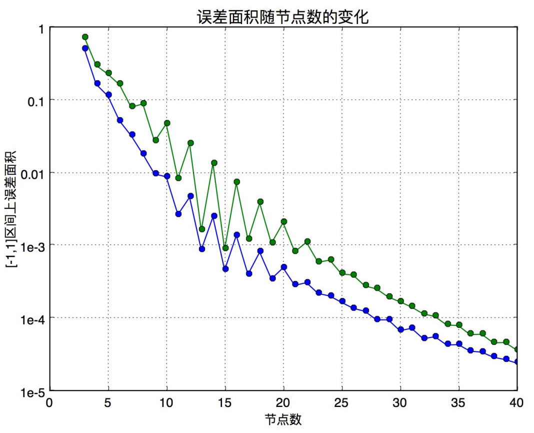
3.1 插值曲线对比





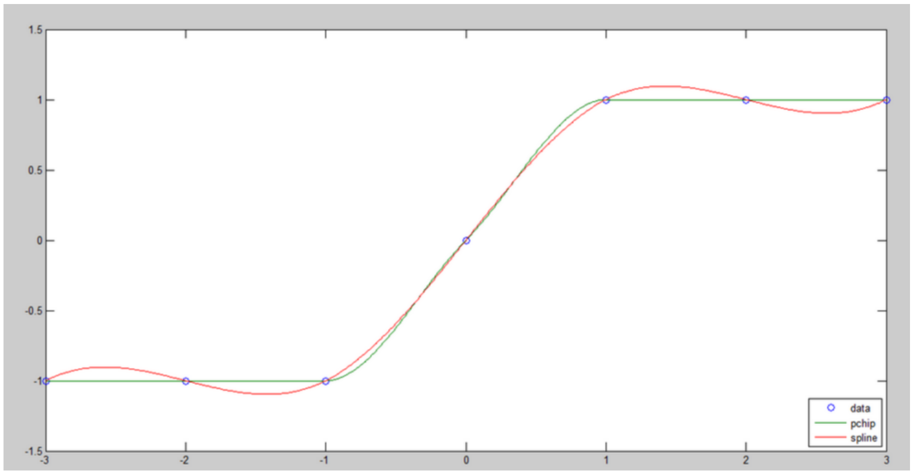
现象及分析：
如上图，左侧为分段三次Hermite插值（下文称PCHIP），右侧为三次样条插值（下文称Spline）。可以看出，PCHIP与 f(x) 更加贴近。原因是PCHIP在节点处的导数值采用了原函数的导数值，数据信息更完善；而Spline的导数值是计算出的，并未参照原函数。

3.2 误差对比



现象及分析：
如上图（误差面积*采用了对数坐标），蓝色为PCHIP，绿色为Spline。可以看出：
（1）二者误差面积均持续减少，最终呈指数减少趋向于零。
（2）PCHIP误差面积更小。原因同PCHIP曲线与 f(x) 更加贴近的原因。
*误差面积指插值曲线与原函数曲线在区间[-1, 1]上所夹区域的面积。

3.2 其他对比



这里以X = [-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3] Y = [-1, -1, -1, 0, 1, 1, 1]为例。如上图，绿色是 PCHIP ，红色是 Spline。

Spline 构造 S(x) 的方式几乎与PCHIP构造 P(x) 的方式相同，Spline的算法在根据边界条件计算出节点处的导数值向量M后，再调用PCHIP算法所得即为 S(x) 。但是，Spline在xi处选择斜率的方式不同，使得 S”(x) 是连续的。这将产生以下效果：

Spline 产生更平滑的结果，即二阶导数连续。而 PCHIP一阶导数连续。不连续的两阶导数隐含着不连续的曲率。人的眼睛可以检测出图形上曲率的不连续。

如果数据由平滑函数的值组成，则 Spline 可获得更精确的结果。

如果数据不平滑，则PCHIP不会超过目标值，也不太震荡。

计算二者的时间开销相当，PCHIP 建立的难度更小。

PCHIP 是保形*的，而 Spline 不一定保形。

四、结束语

Lagrange插值和Hermite插值的优点是表达式简单明确。缺点是如果要增加插值节点，公式必须整个改变，增加了计算量。而且在插值节点较多、多项式次数较高时具有数值不稳定的缺点。所以当区间较大、节点较多时，常用分段低次插值.由于分段插值是局部化的，从而带来了计算上的方便，可以步进地进行计算，同时也具有内在的高度稳定性和较好的收敛性。分段插值的缺点在于不能保证连接点处的光滑性。

如果插值总体平滑很重要，应该考虑运用三次样条插值或三次Hermite插值。表格数据构成函数的导数不存在时，要使用三次样条插值；要求保形性时，要使用分段三次Hermite插值。三次样条插值也是最常用的插值算法。

参考文献：

[1] 彭湘晖. 几种常用插值方法比较分析[J]. 黑龙江水利科技,2008,1(36):62-63.

[2] 王东,陶跃珍. 基于 Matlab三次样条插值的连杆机构轨迹再现优化设计[J]. 机械传动,2011,35(1):38-41.

[3] 徐萃薇,孙绳武. 计算方法引论[M]. 北京:高等教育出版社,2007.

[4] 李洪发. 分段三次Hermite插值的同时逼近[J]. 天津师范大学学报,2012,32(2):38-40

[5] Matrix67. Runge现象： 多项式插值不见得次数越高越准确[Z]. Matrix67博客

[6] 不明作者. 几种插值法的应用与比较[Z]. http://www.docin.com/p-697360378.html

附录（算法实现及绘图Python代码）：

1.Lagrange插值

```
# -*- coding:utf-8 -*-
# ------------------------------------------------------
# Python Lagrange-interpolation 拉格朗日插值
# Author: 陶睿 122345615@qq.com
# Date  : 2015-10-18
# version 1.2
# ------------------------------------------------------

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy import integrate  # 求定积分函数

# ------------------------------------------------------
# 函数名: Lagrange_Interpolation(X, Y, Yd, t)
# 功能: 拉格朗日插值算法
# 说明:
#       X为自变量取值向量。共n+1个值。X[0]...X[n]。
#       Y为对应X的函数值向量。共n+1个值。Y[0]...Y[n]。
#       t是一个值或向量。计算t处的插值结果。如果t是向量，返回一个插值结果的向量。t应满足 X[0]<=t<=X[n]
#       插值多项式Pn(x)的次数为n次。
#       !需要import numpy。 X,Y,Yd为numpy.ndarray类型，t为numpy.float64类型或numpy.ndarray类型。
# 算法:
#       Li(x) = 连乘j = 0..n, j!=i  (x - X[j]) / (X[i] - X[j])
#       Pn(x) = 累加i = 0..n, Li(x)
# ------------------------------------------------------
def Lagrange_Interpolation(X, Y, t):
        n = X.size - 1
        Pn = 0  # Pn: 拉格朗日插值多项式 Lagrange polynomial
        for i in range(0, n + 1):
                L = 1  # L: 拉格朗日插值基函数 Lagrange basis polynomials
                for j in range(0, n + 1):
                        if (j != i):
                                L *= (t - X[j]) / (X[i] - X[j])
                Pn += Y[i] * L
        return Pn


if __name__ == '__main__':

        a = -1
        b = 1
        y = lambda x: 1 / (1 + 25 * x**2)

        testX = np.linspace(a, b, 2001)
        testY = y(testX)

        # 图3: Runge(龙格)现象，并记录误差err
        fig3 = plt.figure(13)
        plt.title(u"Runge(龙格)现象", fontsize = 15)
        ax3_1 = fig3.add_subplot(111)
        ax3_1.set_ylim(-2,2)
```

```
# 计算err随n的变化
nMax = 40
nBest = nMax
errBest = 9999
err = np.zeros(50)
for n in range(nMax, 1, -1):  # n = nMax, nMax-1, ..., 2
        X = np.linspace(a, b, n + 1)
        Y = y(X)
        Pn = lambda x: Lagrange_Interpolation(X, Y, x)

        integrand = lambda x: abs(Pn(x) - y(x))
        err[n] = integrate.quad(integrand, a, b, limit = 2001)[0]

        #图3: Runge
        testF = Pn(testX)
        if (n <= 20):
                ax3_1.plot(testX, testF, color = 'gray', linestyle = "-", linewidth = 1)

#图3: Runge
ax3_1.grid(True)
ax3_1.plot(testX, testY, color = "red", linestyle = "-", linewidth = 2, label = u"原函数")
fig3.savefig(u"/Users/sky/Desktop/计算方法/Lagrange-interpolation_3.jpg")

nList = np.nonzero(err)[0]
errList = np.log10(err[err!=0])

#图4: err随节点数的变化
fig4 = plt.figure(4)
plt.title(u"插值误差面积随节点数的变化", fontsize = 15)
ax4_1 = fig4.add_subplot(111)
ax4_1.set_xlabel(u"节点数")
ax4_1.set_ylabel(u"[-1,1]区间上误差面积")
ax4_1.yaxis.set_ticks((-1, -0.52288, 0, 0.47712, 1, 1.47712, 2, 2.47712))
ax4_1.yaxis.set_ticklabels(('0.1', '0.3', '1', '3', '10', '30', '100', '300'))
ax4_1.set_ylim(-1.1, 2.9)
ax4_1.set_xlim(0,40)
ax4_1.plot(nList + 1, errList, color = 'blue')
ax4_1.plot(nList + 1, errList, 'o', color = 'blue')
ax4_1.grid(True)
fig4.savefig(u"/Users/sky/Desktop/计算方法/误差对比1_2.jpg")

#图2: err随多项式次数的变化
fig2 = plt.figure(2)
plt.title(u"插值误差面积随多项式次数的变化", fontsize = 15)
ax2_1 = fig2.add_subplot(111)
ax2_1.set_xlabel(u"节点数")
ax2_1.set_ylabel(u"[-1,1]区间上误差面积")
ax2_1.yaxis.set_ticks((-1, -0.52288, 0, 0.47712, 1, 1.47712, 2, 2.47712))
ax2_1.yaxis.set_ticklabels(('0.1', '0.3', '1', '3', '10', '30', '100', '300'))
ax2_1.set_ylim(-1.1, 2.9)
ax2_1.set_xlim(0,40)
ax2_1.plot(nList, errList, color = 'blue')
ax2_1.plot(nList, errList, 'o', color = 'blue')
ax2_1.grid(True)
fig2.savefig(u"/Users/sky/Desktop/计算方法/误差对比1_1.jpg")


#图1: Lagrange插值
n = 5
```

```
        X1 = np.linspace(a, b, n + 1)
        X2 = np.linspace(a, b, n + 2)
        X3 = np.linspace(a, b, n + 3)
        Y1 = y(X1)
        Y2 = y(X2)
        Y3 = y(X3)
        testF1 = Lagrange_Interpolation(X1, Y1, testX)
        testF2 = Lagrange_Interpolation(X2, Y2, testX)
        testF3 = Lagrange_Interpolation(X3, Y3, testX)

        fig1 = plt.figure(11)
        plt.title("Lagrange Interpolation   " + r'$f(x) = \frac{1}{25x^2 + 1}$', fontsize = 15)
        ax1_1 = fig1.add_subplot(111)
        ax1_1.set_ylim(-1, 1)
        ax1_1.plot(testX, testF1, color = "b", linestyle = "-", linewidth = 1, label = u'%d个点'%(n +
1))
        ax1_1.plot(testX, testF2, color = "r", linestyle = "-", linewidth = 1, label = u'%d个点'%(n +
2))
        ax1_1.plot(testX, testF3, color = "g", linestyle = "-", linewidth = 1, label = u'%d个点'%(n +
3))
        ax1_1.plot(testX, testY, color = "black", linestyle = "-", linewidth = 1, label = r'$f(x)$')
        ax1_1.plot(X1, Y1, 'o', color = 'b')
        ax1_1.plot(X2, Y2, 'o', color = 'r')
        ax1_1.plot(X3, Y3, 'o', color = 'g')
        ax1_1.grid(True)
        ax1_1.legend(loc='upper right')
        fig1.savefig(u"/Users/sky/Desktop/计算方法/Lagrange-interpolation_1.jpg")
```

2.Hermite插值

```
# -*- coding:utf-8 -*-
# -------------------------------------------------------
# Python Hermite-interpolation 埃尔米特插值
# Author: 陶睿 122345615@qq.com
# Date  : 2015-10-18
# version 1.2
# -------------------------------------------------------

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy import integrate

# -------------------------------------------------------
# 函数名：Hermite_Interpolation(X, Y, Yd, t)
# 功能：埃尔米特插值算法
# 说明：
#       X为自变量取值向量。共n+1个值。X[0]...X[n]。
#       Y为对应X的函数值向量。共n+1个值。Y[0]...Y[n]。
#       Yd为对应X的导数值向量。共n+1个值。Yd[0]...Yd[n]。
#       t是一个值或向量。计算t处的插值结果。如果t是向量，返回一个插值结果的向量。t应满足 X[0]<=t<=X[n]
#       插值多项式Pn(x)的次数为2n+1次。
#       !需要import numpy。 X,Y,Yd为numpy.ndarray类型，t为numpy.float64类型或numpy.ndarray类型。
# 算法：
#       H2n+1(x) = 累加i = 0...n  (y[i]*hi(x) + y'[i]*Hi(x))
#       H2n+1 为 2n+1 次函数
#       Li(x) = 连乘j = 0..n, j!=i  (x - X[j]) / (X[i] - X[j])
#       Lid(x[i]) = 累加j = 0...n, j!=i  1/(X[i] - X[j])
#       hi(x) = (1 - 2(x-X[i])*Ld(i,x) ) * Li^2(x)
#       Hi(x) = (x - X[i])*Li^2(x)
# -------------------------------------------------------
def Hermite_Interpolation(X, Y, Yd, t):
        n = X.size - 1
        P = 0  # P:  2n+1次埃尔米特插值多项式 Hermite polynomial of degree 2n+1
        for i in range(0, n + 1):
                L = 1  # L: 拉格朗日插值基函数 Lagrange basis polynomials
                Ld = 0  # Ld: L在t = X[i]处的导数
                for j in range(0, n + 1):
                        if (j != i):
                                L *= (t - X[j]) / (X[i] - X[j])
                                Ld += 1 / (X[i] - X[j])
                h = L**2 * (1 - 2 * (t - X[i]) * Ld)
                H = L**2 * (t - X[i])
                P += Y[i]*h + Yd[i]*H
        return P


if __name__ == '__main__':

        y = lambda x: 1 / (1 + 25 * x**2)
        yd = lambda x: -50*x / (625 * x**4 + 50 * x**2 + 1)

        a = -1
        b = 1

        testX = np.linspace(a, b, 2001)
        testY = y(testX)
```

```
# 图3：Runge(龙格)现象，并记录误差err
fig3 = plt.figure(23)
plt.title(u"Runge(龙格)现象", fontsize = 15)
ax3_1 = fig3.add_subplot(111)
ax3_1.set_ylim(-2,2)

# 计算err随n的变化
nMax = 40
nBest = nMax
errBest = 9999
err = np.zeros(50)
for n in range(nMax, 1, -1):  # n = nMax, nMax-1, ..., 2
        X = np.linspace(a, b, n + 1)
        Y = y(X)
        Yd = yd(X)
        H = lambda x: Hermite_Interpolation(X, Y, Yd, x)

        integrand = lambda x: abs(H(x) - y(x))
        err[n] = integrate.quad(integrand, a, b, limit = 2001)[0]

        #图3：Runge
        testF = H(testX)
        if (n <= 20):
                ax3_1.plot(testX, testF, color = 'gray', linestyle = "-", linewidth = 1)

        print "#n = ", n, "err = ", err[n]
        if(err[n] < errBest):
                nBest = n
                errBest = err[n]

print "nBest = ", nBest
print "errBest = ", errBest

#图3：Runge
ax3_1.grid(True)
ax3_1.plot(testX, testY, color = "red", linestyle = "-", linewidth = 2, label = u"原函数")
fig3.savefig(u"/Users/sky/Desktop/计算方法/Hermite-interpolation_3.jpg")


nList = np.nonzero(err)[0]
errList = np.log10(err[err!=0])

#图4：err随节点数的变化
fig4 = plt.figure(4)
plt.title(u"插值误差面积随节点数的变化", fontsize = 15)
ax4_1 = fig4.add_subplot(111)
ax4_1.set_xlabel(u"节点数")
ax4_1.set_ylabel(u"[-1,1]区间上误差面积")
ax4_1.yaxis.set_ticks((-1, -0.52288, 0, 0.47712, 1, 1.47712, 2, 2.47712))
ax4_1.yaxis.set_ticklabels(('0.1', '0.3', '1', '3', '10', '30', '100', '300'))
ax4_1.set_ylim(-1.1, 2.9)
ax4_1.set_xlim(0,40)
ax4_1.plot(nList + 1, errList, color = 'green')
ax4_1.plot(nList + 1, errList, 'o', color = 'green')
ax4_1.grid(True)
fig4.savefig(u"/Users/sky/Desktop/计算方法/误差对比1_2.jpg")

#图2：err随多项式次数的变化
```

```
        fig2 = plt.figure(2)
        plt.title(u"插值误差面积随多项式次数的变化", fontsize = 15)
        ax2_1 = fig2.add_subplot(111)
        ax2_1.set_xlabel(u"节点数")
        ax2_1.set_ylabel(u"[-1,1]区间上误差面积")
        ax2_1.yaxis.set_ticks((-1, -0.52288, 0, 0.47712, 1, 1.47712, 2, 2.47712))
        ax2_1.yaxis.set_ticklabels(('0.1', '0.3', '1', '3', '10', '30', '100', '300'))
        ax2_1.set_ylim(-1.1, 2.9)
        ax2_1.set_xlim(0,40)
        ax2_1.plot(2 * nList + 1, errList, color = 'green')
        ax2_1.plot(2 * nList + 1, errList, 'o', color = 'green')
        ax2_1.grid(True)
        fig2.savefig(u"/Users/sky/Desktop/计算方法/误差对比1_1.jpg")


        #图1: Hermite插值
        n = 5
        X1 = np.linspace(a, b, n + 1)
        X2 = np.linspace(a, b, n + 2)
        X3 = np.linspace(a, b, n + 3)
        Y1 = y(X1)
        Y2 = y(X2)
        Y3 = y(X3)
        Yd1 = yd(X1)
        Yd2 = yd(X2)
        Yd3 = yd(X3)
        testF1 = Hermite_Interpolation(X1, Y1, Yd1, testX)
        testF2 = Hermite_Interpolation(X2, Y2, Yd2, testX)
        testF3 = Hermite_Interpolation(X3, Y3, Yd3, testX)

        fig1 = plt.figure(21)
        plt.title("Hermite Interpolation   " + r'$f(x) = \frac{1}{25x^2 + 1}$', fontsize = 15)
        ax1_1 = fig1.add_subplot(111)
        ax1_1.set_ylim(-1, 1)
        ax1_1.plot(testX, testF1, color = "b", linestyle = "-", linewidth = 1, label = u'%d个点'%(n +
1))
        ax1_1.plot(testX, testF2, color = "r", linestyle = "-", linewidth = 1, label = u'%d个点'%(n +
2))
        ax1_1.plot(testX, testF3, color = "g", linestyle = "-", linewidth = 1, label = u'%d个点'%(n +
3))
        ax1_1.plot(testX, testY, color = "black", linestyle = "-", linewidth = 1, label = r'$f(x)$')
        ax1_1.plot(X1, Y1, 'o', color = 'b')
        ax1_1.plot(X2, Y2, 'o', color = 'r')
        ax1_1.plot(X3, Y3, 'o', color = 'g')
        ax1_1.grid(True)
        ax1_1.legend(loc='upper right')
        fig1.savefig(u"/Users/sky/Desktop/计算方法/Hermite-interpolation_1.jpg")
```

3.分段三次Hermite插值

```
# -*- coding:utf-8 -*-
# --------------------------------------------------------
# Python PCHIP 分段三次Hermite插值
# Author: 陶睿 122345615@qq.com
# Date  : 2015-10-30
# version 1.0
# --------------------------------------------------------

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy import integrate

# --------------------------------------------------------
# 函数名：pchip(X, Y, Yd, t)
# Piecewise Cubic Hermite Interpolating Polynomial
# 功能：分段三次Hermite插值算法
# 说明：
#       X为自变量取值向量。共n+1个值。X[0]...X[n]。
#       Y为对应X的函数值向量。共n+1个值。Y[0]...Y[n]。
#       Yd为对应X的导数值向量。共n+1个值。Yd[0]...Yd[n]。
#       t是一个值或向量。计算t处的插值结果。如果t是向量，返回一个插值结果的向量。t应满足 X[0]<=t<=X[n]。
#       插值多项式Pn(x)的次数为3次。
#       !需要import numpy。 X,Y,Yd为numpy.ndarray类型，t为numpy.float64类型或numpy.ndarray类型。
# 算法：
#       对每一段[Xi, Xi+1]调用Hermite_Interpolation算法。
# --------------------------------------------------------
def Hermite_Interpolation(X, Y, Yd, t):
       n = X.size - 1
       P = 0  # P:  2n+1次埃尔米特插值多项式 Hermite polynomial of degree 2n+1
       for i in range(0, n + 1):
              L = 1  # L: 拉格朗日插值基函数 Lagrange basis polynomials
              Ld = 0  # Ld: L在t = X[i]处的导数
              for j in range(0, n + 1):
                     if (j != i):
                            L *= (t - X[j]) / (X[i] - X[j])
                            Ld += 1 / (X[i] - X[j])
              h = L**2 * (1 - 2 * (t - X[i]) * Ld)
              H = L**2 * (t - X[i])
              P += Y[i]*h + Yd[i]*H
       return P

def pchip(X, Y, Yd, t):
       import numpy
       n = X.size - 1

       def _pchip(t):
              yi = 0
              pos = 0  # t在区间[X[pos] , x[pos+1]]中
              for i in range(0, n):
                     if ((X[i] <= t) and (t <= X[i+1])):
                            pos = i
              yi = Hermite_Interpolation(X[pos: pos+2], Y[pos: pos+2], Yd[pos: pos+2], t)
              return yi

       if (type(t) == numpy.float64 or type(t) == float):
              return _pchip(t)
```

```
        elif (type(t) == numpy.ndarray):
                P = np.zeros((t.size))
                for i in range(0, t.size):
                        P[i] = _pchip(t[i])
                return P
# -------------------------------------------------------
# End of pchip(X, Y, Yd, t)
# -------------------------------------------------------

if __name__ == '__main__':

        y = lambda x: 1 / (1 + 25 * x**2)
        yd = lambda x: -50*x / (625 * x**4 + 50 * x**2 + 1)

        a = -1
        b = 1

        testX = np.linspace(a, b, 2001)
        testY = y(testX)

        # 计算err随n的变化
        nMax = 40
        nBest = nMax
        errBest = 9999
        err = np.zeros(50)
        for n in range(nMax, 1, -1):  # n = nMax, nMax-1, ..., 2
                X = np.linspace(a, b, n + 1)
                Y = y(X)
                Yd = yd(X)
                H = lambda x: pchip(X, Y, Yd, x)

                integrand = lambda x: abs(H(x) - y(x))
                err[n] = integrate.quad(integrand, a, b, limit = 2001)[0]

                print "#n = ", n, "err = ", err[n]
                if(err[n] < errBest):
                        nBest = n
                        errBest = err[n]

        print "nBest = ", nBest
        print "errBest = ", errBest

        # 图2：err随节点数的变化
        fig2 = plt.figure(32)
        plt.title(u"误差面积随节点数的变化", fontsize = 15)
        ax2_1 = fig2.add_subplot(111)
        ax2_1.set_xlabel(u"节点数")
        ax2_1.set_ylabel(u"[-1,1]区间上误差面积")
        ax2_1.yaxis.set_ticks((-5,-4,-3,-2,-1,0))
        ax2_1.yaxis.set_ticklabels(('1e-5', '1e-4', '1e-3', '0.01', '0.1', '1'))
        ax2_1.set_ylim(-5, 0)
        ax2_1.set_xlim(0,40)

        nList = np.nonzero(err)[0]
        errList = np.log10(err[err!=0])

        ax2_1.plot(nList + 1, errList, color = 'blue')
        ax2_1.plot(nList + 1, errList, 'o', color = 'blue')
        ax2_1.grid(True)
        fig2.savefig(u"/Users/sky/Desktop/计算方法/误差对比2.jpg")
        #图1: PCHIP
        n = 5
        X1 = np.linspace(a, b, n + 1)
        X2 = np.linspace(a, b, n + 2)
        X3 = np.linspace(a, b, n + 3)
        Y1 = y(X1)
        Y2 = y(X2)
        Y3 = y(X3)
        Yd1 = yd(X1)
        Yd2 = yd(X2)
        Yd3 = yd(X3)
        testF1 = pchip(X1, Y1, Yd1, testX)
        testF2 = pchip(X2, Y2, Yd2, testX)
        testF3 = pchip(X3, Y3, Yd3, testX)

        fig1 = plt.figure(31)
        plt.title("PCHIP   " + r'$f(x) = \frac{1}{25x^2 + 1}$', fontsize = 15)

        ax1_1 = fig1.add_subplot(111)

        ax1_1.set_ylim(-1, 1)
        ax1_1.plot(testX, testF1, color = "b", linestyle = "-", linewidth = 1, label = u'%d个点
'%(n+1))
        ax1_1.plot(testX, testF2, color = "r", linestyle = "-", linewidth = 1, label = u'%d个点
'%(n+2))
        ax1_1.plot(testX, testF3, color = "g", linestyle = "-", linewidth = 1, label = u'%d个点
'%(n+3))
        ax1_1.plot(testX, testY, color = "black", linestyle = "-", linewidth = 1, label = r'$f(x)$')
        ax1_1.plot(X1, Y1, 'o', color = 'blue')
        ax1_1.plot(X2, Y2, 'o', color = 'red')
        ax1_1.plot(X3, Y3, 'o', color = 'green')
        ax1_1.grid(True)
        ax1_1.legend(loc='upper right')

        fig1.savefig(u"/Users/sky/Desktop/计算方法/PCHIP_1.jpg")
```

4.三次样条插值

```
# -*- coding:utf-8 -*-
# -------------------------------------------------------
# Python Cubic Spline 三次样条插值
# Author: 陶睿 122345615@qq.com
# Date  : 2015-10-31
# version 1.0
# -------------------------------------------------------

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy import integrate

# -------------------------------------------------------
# 函数名: Cubic_Spline(X, Y, t)
# Cubic Spline Interpolation
# 功能: 三次样条插值算法(边界条件为端点处二阶微商已知且为0, 即s''(x0) = 0,S''(xn) = 0)
# 说明:
#       X为自变量取值向量。共n+1个值。X[0]...X[n]。
#       Y为对应X的函数值向量。共n+1个值。Y[0]...Y[n]。
#       t是一个值或向量。计算t处的插值结果。如果t是向量, 返回一个插值结果的向量。t应满足 X[0]<=t<=X[n]。
#       插值多项式Pn(x)的次数为3次。
#       !需要import numpy。 X,Y,Yd为numpy.ndarray类型, t为numpy.float64类型或numpy.ndarray类型。
# 算法:
#       计算出M向量后。再调用分段三次插值的算法(pchip(X, Y, Yd, t))。
# -------------------------------------------------------
def Hermite_Interpolation(X, Y, Yd, t):
        n = X.size - 1
        P = 0  # P:  2n+1次埃尔米特插值多项式 Hermite polynomial of degree 2n+1
        for i in range(0, n + 1):
                L = 1  # L: 拉格朗日插值基函数 Lagrange basis polynomials
                Ld = 0  # Ld: L在t = X[i]处的导数
                for j in range(0, n + 1):
                        if (j != i):
                                L *= (t - X[j]) / (X[i] - X[j])
                                Ld += 1 / (X[i] - X[j])
                h = L**2 * (1 - 2 * (t - X[i]) * Ld)
                H = L**2 * (t - X[i])
                P += Y[i]*h + Yd[i]*H
        return P

def pchip(X, Y, Yd, t):
        import numpy
        n = X.size - 1

        def _pchip(t):
                yi = 0
                pos = 0  # t在区间[X[pos] , x[pos+1]]中
                for i in range(0, n):
                        if ((X[i] <= t) and (t <= X[i+1])):
                                pos = i
                yi = Hermite_Interpolation(X[pos: pos+2], Y[pos: pos+2], Yd[pos: pos+2], t)
                return yi

        if (type(t) == numpy.float64 or type(t) == float):
                return _pchip(t)
        elif (type(t) == numpy.ndarray):
            P = np.zeros((t.size))
            for i in range(0, t.size):
                   P[i] = _pchip(t[i])
            return P

def Cubic_Spline(X, Y, t):
       import numpy
       def h(i):
              return (X[i + 1] - X[i])
       dds0 = 0
       ddsn = 0
       n = X.size - 1
       A = np.zeros((n + 1, n + 1))
       beta = np.zeros((n + 1))
       alpha = np.zeros((n + 1))
       alpha[0] = 1
       alpha[n] = 0
       beta[0] = 3.0/h(0)   * (Y[1] - Y[0])   - h(0)/2   * dds0
       beta[n] = 3.0/h(n-1) * (Y[n] - Y[n-1]) - h(n-1)/2 * ddsn
       for i in range(1, n):
              alpha[i] = h(i-1)/(h(i-1) + h(i))
              beta[i] = 3*( (1-alpha[i])/h(i-1)*(Y[i] - Y[i-1]) \
                                  + (alpha[i])  /h(i)  *(Y[i+1] - Y[i]) )
       for i in range(0, n + 1):
              A[i, i] = 2
              if (i < n):
                     A[i, i + 1] = alpha[i]
              if (i > 0):
                     A[i, i - 1] = 1 - alpha[i]
       M = numpy.linalg.solve(A,beta)  #numpy.linalg.solve(A,B)是numpy中求解线性方程组的函数
       return pchip(X, Y, M, t)
# -------------------------------------------------------
# End of Cubic_Spline(X, Y, t)
# -------------------------------------------------------

if __name__ == '__main__':

       y = lambda x: 1 / (1 + 25 * x**2)

       a = -1
       b = 1

       testX = np.linspace(a, b, 2001)
       testY = y(testX)

       # 计算err随n的变化
       nMax = 40
       nBest = nMax
       errBest = 9999
       err = np.zeros(50)
       for n in range(nMax, 1, -1):  # n = nMax, nMax-1, ..., 2
              X = np.linspace(a, b, n + 1)
              Y = y(X)
              H = lambda x: Cubic_Spline(X, Y, x)

              integrand = lambda x: abs(H(x) - y(x))
              err[n] = integrate.quad(integrand, a, b, limit = 2001)[0]

              print "#n = ", n, "err = ", err[n]
              if(err[n] < errBest):
                nBest = n
                errBest = err[n]

        print "nBest = ", nBest
        print "errBest = ", errBest

        # 图2：err随节点数的变化
        fig2 = plt.figure(32)
        plt.title(u"误差面积随节点数的变化", fontsize = 15)
        ax2_1 = fig2.add_subplot(111)
        ax2_1.set_xlabel(u"节点数")
        ax2_1.set_ylabel(u"[-1,1]区间上误差面积")
        ax2_1.yaxis.set_ticks((-5,-4,-3,-2,-1,0))
        ax2_1.yaxis.set_ticklabels(('1e-5', '1e-4', '1e-3', '0.01', '0.1', '1'))
        ax2_1.set_ylim(-5, 0)
        ax2_1.set_xlim(0,40)

        nList = np.nonzero(err)[0]
        errList = np.log10(err[err!=0])

        ax2_1.plot(nList + 1, errList, color = 'green')
        ax2_1.plot(nList + 1, errList, 'o', color = 'green')
        ax2_1.grid(True)
        fig2.savefig(u"/Users/sky/Desktop/计算方法/误差对比2.jpg")


        #图1：Cubic_Spline
        n = 5
        X1 = np.linspace(a, b, n + 1)
        X2 = np.linspace(a, b, n + 2)
        X3 = np.linspace(a, b, n + 3)
        Y1 = y(X1)
        Y2 = y(X2)
        Y3 = y(X3)
        testF1 = Cubic_Spline(X1, Y1, testX)
        testF2 = Cubic_Spline(X2, Y2, testX)
        testF3 = Cubic_Spline(X3, Y3, testX)

        fig1 = plt.figure(41)
        plt.title("Cubic_Spline   " + r'$f(x) = \frac{1}{25x^2 + 1}$', fontsize = 15)

        ax1_1 = fig1.add_subplot(111)

        ax1_1.set_ylim(-1, 1)
        ax1_1.plot(testX, testF1, color = "b", linestyle = "-", linewidth = 1, label = u'%d个点
'%(n+1))
        ax1_1.plot(testX, testF2, color = "r", linestyle = "-", linewidth = 1, label = u'%d个点
'%(n+2))
        ax1_1.plot(testX, testF3, color = "g", linestyle = "-", linewidth = 1, label = u'%d个点
'%(n+3))
        ax1_1.plot(testX, testY, color = "black", linestyle = "-", linewidth = 1, label = r'$f(x)$')
        ax1_1.plot(X1, Y1, 'o', color = 'blue')
        ax1_1.plot(X2, Y2, 'o', color = 'red')
        ax1_1.plot(X3, Y3, 'o', color = 'green')
        ax1_1.grid(True)
        ax1_1.legend(loc='upper right')

        fig1.savefig(u"/Users/sky/Desktop/计算方法/Cubic_Spline_1.jpg")
```