文章编号:1671-1114(2012)02-0038-03

分段三次 Hermite 插值的同时逼近

李洪发
(天津师范大学 政治与行政学院,天津 300387)

摘　要:讨论基于等距节点的分段三次 Hermite 插值的同时逼近,给出了相应量的收敛估计.

关键词:分段三次 Hermite 插值;同时逼近;误差估计;等距节点
中图分类号:O174.41　　**文献标志码**:A

Simultaneous approximation of piecewise cubic Hermite interpolation

LI Hong-fa
(College of Politics and Public Adminstration, Tianjin Normal University, Tianjin 300387, China)

Abstract: The simultaneous approximation of the piecewise cubic Hermite interpolation based on the equidistant nodes is discussed. The convergence rate is given.

Key words: piecewise cubic Hermite interpolation; simultaneous approximation; error estimate; equidistant nodes

---

分段三次 Hermite 插值是函数拟合的基本方法,在基础研究和工程技术中有着非常重要的应用[1-3].光滑函数的同时逼近问题是逼近理论研究的重要课题,并且在工程问题中有着重要的实际意义,文献[4-6]讨论了多项式插值的同时逼近问题,本研究讨论分段三次 Hermite 插值的同时逼近问题.

若 $f(x)\in C^{(1)}[a,b]$,$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,则存在唯一的分段插值函数 $I_n(x)$,满足条件

1) $I_n(x)\in C^{(1)}[a,b]$;

2) $I_n(x_k)=f(x_k)$,$I_n'(x_k)=f'(x_k)$,$k=0,\cdots,n$;

3) $I_n(x)$在每个小区间$[x_k,x_{k+1}]$上是关于 x 的三次代数多项式.

称 $I_n(x)$为 $f(x)$的基于结点组 x_k,$k=0,\cdots,n$ 的分段三次 Hermite 插值.若$[a,b]=[0,1]$,$x_k=\frac{k}{n}$,$k=0,1,\cdots,n$,则 $I_n(x)$记为 $H_n(f,x)$,

$$H_n(f,x)=\sum_{j=0}^{n}\left(f(x_j)\alpha_j(x)+f'(x_j)\beta_j(x)\right)\tag{1}$$

其中:

$$\alpha_j(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{x-x_j}{x_j-x_{j-1}}\right)^2\left(1+\dfrac{2(x-x_j)}{x_{j-1}-x_j}\right) & x_{j-1}\leqslant x\leqslant x_j,\ j=1,\cdots,n\\ \left(\dfrac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}}\right)^2\left(1+\dfrac{2(x-x_j)}{x_{j+1}-x_j}\right) & x_j\leqslant x\leqslant x_{j+1},\ j=0,\cdots,n-1\\ 0 & x\notin[x_{j-1},x_{j+1}]\end{cases}\tag{2}$$

$$\beta_j(x)=\begin{cases}(x-x_j)\left(\dfrac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}\right)^2 & x_{j-1}\leqslant x\leqslant x_j,\ j=1,\cdots,n\\ (x-x_j)\left(\dfrac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}}\right)^2 & x_j\leqslant x\leqslant x_{j+1},\ j=0,\cdots,n-1\\ 0 & x\notin[x_{j-1},x_{j+1}]\end{cases}\tag{3}$$

收稿日期:2011-09-25
通信作者:李洪发(1963—),男,讲师,主要从事计算数学及计算机软件方面的研究.

本研究得到：

定理　若 $f(x)\in C^{(2)}[a,b]$，则有

$$\| f''(x)-H''_n(f,x)\|\leqslant\frac{5}{3}\omega\left(f'',\frac{1}{n}\right) \tag{4}$$

$$\| f'(x)-H'_n(f,x)\|\leqslant\frac{5}{6n}\omega\left(f'',\frac{1}{n}\right) \tag{5}$$

$$\| f(x)-H_n(f,x)\|\leqslant\frac{5}{12n^2}\omega\left(f'',\frac{1}{n}\right) \tag{6}$$

其中：$\| f\|$ 表示最大范数；$\omega(f,t)=\sup\limits_{x,\,x+h\in[0,1],\,|h|\leqslant t}|f(x+h)-f(x)|$ 为 $f(x)$ 的连续性模.

证明　由式(1)～式(3)可知，若 $x\in[x_{k-1},x_k]$，则

$$H_n(f,x)=f(x_{k-1})\left(\frac{x-x_k}{x_{k-1}-x_k}\right)^2\left(1+\frac{2(x-x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}\right)+f'(x_{k-1})(x-x_{k-1})\left(\frac{x-x_k}{x_{k-1}-x_k}\right)^2+$$
$$f(x_k)\left(\frac{x-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}\right)^2\left(1+\frac{2(x-x_k)}{x_{k-1}-x_k}\right)+f'(x_k)(x-x_k)\left(\frac{x-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}\right)^2 \tag{7}$$

当 $k=1$ 时，记 $h=\frac{1}{n}$，则

$$H_n(f,x)=\frac{f(0)}{h^2}\left(1+\frac{2x}{h}\right)(x-h)^2+\frac{f'(0)}{h^2}x(x-h)^2+\frac{f(h)}{h^2}x^2\left(3-\frac{2x}{h}\right)+\frac{f'(h)}{h^2}x^2(x-h) \tag{8}$$

对式(8)两边求二阶导数，整理可得

$$\begin{aligned}H''_n(f,x)&=\frac{f(0)}{h^2}\left(\frac{12x}{h}-6\right)+\frac{f'(0)}{h^2}(6x-4h)+\frac{f(h)}{h^2}\left(6-\frac{12x}{h}\right)+\frac{f'(h)}{h^2}(6x-2h)=\\&\frac{6h-12x}{h^3}\int_0^h f'(t)\mathrm{d}t+\frac{f'(0)}{h^2}(6x-4h)+\frac{f'(h)}{h^2}(6x-2h)=\\&\frac{1}{h^3}\int_0^h[(6h-12x)f'(t)+f'(0)(6x-4h)+f'(h)(6x-2h)]\mathrm{d}t=\\&\frac{1}{h^3}\int_0^h(4h-6x)(f'(t)-f(0))\mathrm{d}t+\frac{1}{h^3}\int_0^h(6x-2h)(f'(h)-f'(t))\mathrm{d}t=\\&\frac{4h-6x}{h^3}\int_0^h\mathrm{d}t\int_0^t f''(s)\mathrm{d}s+\frac{6x-2h}{h^3}\int_0^h\mathrm{d}t\int_t^h f''(s)\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{9}$$

利用积分交换顺序可得

$$\int_0^h\mathrm{d}t\int_0^t f''(s)\mathrm{d}s=\int_0^h\mathrm{d}s\int_s^h f''(s)\mathrm{d}t=\int_0^h(h-s)f''(s)\mathrm{d}s \tag{10}$$

类似地有

$$\int_0^h\mathrm{d}t\int_t^h f''(s)\mathrm{d}s=\int_0^h sf''(s)\mathrm{d}s \tag{11}$$

将式(10)和式(11)代入式(9)，整理可得

$$H''_n(f,x)=\frac{1}{h^3}\int_0^h[4h^2-6hs-6xh+12xs]f''(s)\mathrm{d}s \tag{12}$$

直接计算可检验

$$\frac{1}{h^3}\int_0^h[4h^2-6hs-6xh+12xs]\mathrm{d}s=1 \tag{13}$$

由式(12)和式(13)可得

$$H''_n(f,x)-f(x)=\frac{1}{h^3}\int_0^h[4h^2-6hs-6xh+12xs][f''(s)-f''(x)]\mathrm{d}s \tag{14}$$

由于当 $s,x\in[0,h]$时，$|f''(s)-f''(x)|\leqslant\omega(f,h)$，因此

$$|H''_n(f,x)-f(x)|\leqslant\frac{\omega(f'',h)}{h^3}\int_0^h|4h^2-6hs-6xh+12xs|\mathrm{d}s \tag{15}$$

直接计算得

$$\int_0^h |4h^2-6hs-6xh+12xs|\,\mathrm{d}s=\begin{cases}\dfrac{(4h^2-6xh)^2}{6h-12x}-h^3 & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{h}{3}\\ h^3 & \dfrac{h}{3}\leqslant x\leqslant \dfrac{2h}{3}\\ \dfrac{(4h^2-6xh)^2}{12x-6h}+h^3 & \dfrac{2h}{3}\leqslant x\leqslant h\end{cases} \tag{16}$$

由式(16)可得

$$\max_{0\leqslant x\leqslant h}\int_0^h |4h^2-6hs-6xh+12xs|\,\mathrm{d}s=\frac{5h^3}{3} \tag{17}$$

由式(15)和式(17)可得

$$\max_{0\leqslant x\leqslant h}|H_n''(f,\ x)-f''(x)|\leqslant \frac{5}{3}\omega(f'',\ h)$$

类似于式(15)的证明可得

$$\max_{x_k\leqslant x\leqslant x_{k+1}}|H_n''(f,\ x)-f''(x)|\leqslant \frac{5}{3}\omega(f'',\ h)\quad k=1,\ \cdots,\ n-1 \tag{18}$$

由式(17)和式(18)可得式(4).

对于 $x\in[x_k,\ x_k+h/2]$，由分段函数满足的条件 2)可得

$$H_n'(f,\ x)-f'(x)=\int_{x_k}^{x}[H_n''(f,\ t)-f''(t)]\mathrm{d}t \tag{19}$$

对于 $x\in[x_k+h/2,\ x_{k+1}]$，同样可得

$$H_n'(f,\ x)-f'(x)=\int_{x}^{x_{k+1}}[H_n''(f,\ t)-f''(t)]\mathrm{d}t \tag{20}$$

由式(19)和式(20)以及式(4)可得到式(5).

对于 $x\in[x_k,\ x_k+h/2]$，由分段函数满足的条件 2)可得

$$H_n(f,\ x)-f(x)=\int_{x_k}^{x}[H_n'(f,\ t)-f'(t)]\mathrm{d}t \tag{21}$$

对于 $x\in[x_k+h/2,\ x_{k+1}]$，由分段函数满足的条件 1)可得

$$H_n(f,\ x)-f(x)=\int_{x}^{x_{k+1}}[H_n'(f,\ t)-f'(t)]\mathrm{d}t \tag{22}$$

由式(21)和式(22)以及式(5)可得到式(6).

参考文献：

[1] 张文强，杨耀民，许琨. 基于三次样条函数的加 Rife-Vincent(Ⅲ)窗 FFT 插值算法[J]. 电力系统保护与控制，2009，12：36-39.

[2] 王东，陶跃珍. 基于 Matlab 三次样条插值的连杆机构轨迹再现优化设计[J]. 机械传动，2011，35(1)：38-41.

[3] GAO G H，WANG T K. Cubic superconvergent finite volume element method for one-dimensional elliptic and parabolic equations[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics，2010，233：2285-2301.

[4] VERTESI P，XU Y. Mean convergence of Hermite interpolation revisited[J]. Acta Math Hungar，1995，69(2)：185-210.

[5] KIGORE T. An elementary simultaneous polynomials[J]. Proc Amer Math Soc，1993，118：529-536.

[6] 许贵桥. 插值多项式在一重积分 Wiener 空间下的同时逼近平均误差[J]. 中国科学：数学，2011，41(5)：407-426.

（责任编校　马新光）