Caractérisation réelle de la fonction Γ

On montre que la fonction Γ d'Euler est la seule fonction log-convexe sur $\mathbb{R}^+$ prenant la valeur 1 en 1 et vérifiant $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.

[ROM19-1] p. 364

Lemme 1. La fonction Γ définie pour tout $x > 0$ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t$ vérifie :

(i) $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(ii) $\Gamma(1) = 1$.

(iii) Γ est log-convexe sur $\mathbb{R}_*^+$.

Démonstration. (i) Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. Alors :

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} \, \mathrm{d}t \\ &= \left[-e^{-t} t^x\right]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t \\ &= x\Gamma(x) \end{aligned}$$

(ii) Comme $t \mapsto e^{-t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$ est la densité de probabilité d'une loi exponentielle de paramètre 1, on a

$$\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-t} \, \mathrm{d}t}_{=\Gamma(1)} = 1$$

(iii) Soient $x, y \in \mathbb{R}_*^+$ et $\lambda \in]0,1[$. On applique l'inégalité de Hölder en posant $\lambda = \frac{1}{p}$ et $1 - \lambda = \frac{1}{q}$:

$$\begin{aligned} \Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\lambda x} t^{(1-\lambda)y} \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} (e^{-t} t^{x-1})^{\frac{1}{p}} (e^{-t} t^{y-1})^{\frac{1}{q}} \, \mathrm{d}t \\ &\leq \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{y-1}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \Gamma(x)^\lambda \Gamma(y)^{1-\lambda} \end{aligned}$$

Donc $\ln \circ \Gamma$ vérifie bien l'inégalité de convexité sur $\mathbb{R}_*^+$ et ainsi, Γ est log-convexe.

□

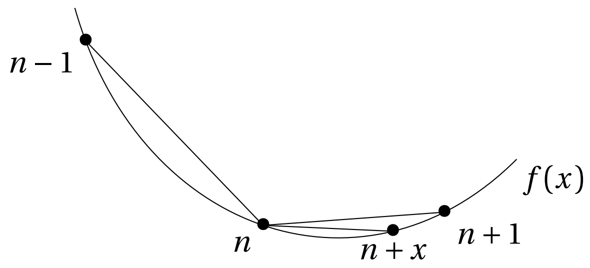
Théorème 2 (Bohr-Mollerup)**.** Soit $f : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}^+$ vérifiant le Point (i), le Point (ii) et le Point (iii) du Lemme 1. Alors $f = \Gamma$.

Démonstration. Par récurrence, on a d'après le Point (i) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0,1], f(x+n) = (x+n-1)\dots(x+1)xf(x) \qquad (*)$$

Donc les valeurs prises par f sur $\mathbb{R}_*^+$ sont entièrement déterminées par ses valeurs prises sur $]0,1]$. Ainsi, pour démontrer le théorème, il suffit de vérifier $\forall x \in]0,1]$, $f(x) = \Gamma(x)$.

Soient donc $x \in]0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$; on applique le lemme des trois pentes à la fonction convexe $\ln \circ f$ (d'après le Point (iii) appliqué aux points $n-1$, n, $n+x$ et $n+1$:



$$\frac{(\ln \circ f)(n) - (\ln \circ f)(n-1)}{n-(n-1)} \leq \frac{(\ln \circ f)(n+x) - (\ln \circ f)(n)}{n+x-n} \leq \frac{(\ln \circ f)(n+1) - (\ln \circ f)(n)}{n+1-n}$$

Mais, d'après $(*)$ et le Point (ii), on a $f(n) = (n-1)!$. D'où :

$$\begin{aligned}
&\ln(n-1) \leq \frac{(\ln \circ f)(n+x) - \ln((n-1)!)}{x} \leq \ln(n) \\
\Longrightarrow\ &\ln((n-1)^x) \leq (\ln \circ f)(n+x) - \ln((n-1)!) \leq \ln(n^x) \\
\Longrightarrow\ &\ln((n-1)^x(n-1)!) \leq (\ln \circ f)(n+x) \leq \ln(n^x(n-1)!)
\end{aligned}$$

Par croissance de la fonction ln, cela donne :

$$(n-1)^x(n-1)! \leq f(n+x) \leq n^x(n-1)!$$

Et en appliquant $(*)$, on obtient :

$$\frac{(n-1)^x(n-1)!}{(x+n-1)\dots(x+1)x} \leq f(x) \leq \frac{n^x(n-1)!}{(x+n-1)\dots(x+1)x}$$

En ne considérant que la première inégalité, on peut remplacer n par $n+1$ (car les deux inégalités sont vraies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) :

$$\frac{n^x n!}{(x+n)\dots(x+1)x} \leq f(x)$$

Or, $\frac{n^x(n-1)!}{(x+n-1)\dots(x+1)x} = \frac{n^x n!}{(x+n)\dots(x+1)x} \frac{x+n}{n}$, donc :

$$\begin{aligned}
&\frac{n^x n!}{(x+n)\dots(x+1)x} \leq f(x) \leq \frac{n^x n!}{(x+n)\dots(x+1)x}\frac{x+n}{n} \\
\Longrightarrow\ &f(x)\frac{n}{x+n} \leq \frac{n^x n!}{(x+n)\dots(x+1)x} \leq f(x) \\
\Longrightarrow\ &f(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^x n!}{(x+n)\dots(x+1)x}
\end{aligned}$$

en faisant $n \longrightarrow +\infty$ dans la deuxième implication. Comme Γ vérifie le Point (i), le Point (ii), et le

Point (iii) ; le raisonnement précédent est a fortiori vrai aussi pour Γ. Donc

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^x n!}{(x+n)\dots(x+1)x} = f(x)$$

ie. f et Γ coïncident bien sur $]0,1]$. □

Remarque 3. À la fin de la preuve, on obtient une formule due à Gauss :

$$\forall x \in]0,1], \Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^x n!}{(x+n)\dots(x+1)x}$$

que l'on peut aisément étendre à $\mathbb{R}_*^+$ entier.

La preuve, telle qu'elle est écrite ici, est issue d'un livre de Walter Rudin. Elle est également disponible (sous une forme un peu différente) comme l'indique la référence, dans **[ROM19-1]**.

Bibliographie

Éléments d'analyse réelle **[ROM19-1]**

Jean-Étienne Rombaldi. *Éléments d'analyse réelle.* 2e éd. EDP Sciences, 6 juin 2019. https://laboutique.edpsciences.fr/produit/1082/9782759823789/elements-d-analyse-reelle.