Formule sommatoire de Poisson

On démontre la formule sommatoire de Poisson en utilisant principalement la théorie des séries de Fourier.

[GOU20] p. 284

Théorème 1 (Formule sommatoire de Poisson)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $f'(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ quand $|x| \longrightarrow +\infty$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(2\pi n) e^{2i\pi n x}$$

où $\widehat{f}$ désigne la transformée de Fourier de f.

Démonstration. Comme $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$, il existe $M > 0$ et $A > 0$ tel que

$$\forall |x| > A, |f(x)| \leq \frac{M}{x^2} \tag{$*$}$$

Soit $K > 0$. On a $\forall x \in [-K, K]$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ tel que $|n| > K + A$:

$$|f(x+n)| \overset{(*)}{\leq} \frac{M}{(x+n)^2} \leq \frac{M}{(|n|-|x|)^2} \leq \frac{M}{(|n|-K)^2}$$

Donc $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$ donc converge simplement sur $\mathbb{R}$. On note F la limite simple en question.

On montre de même que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f'(x+n)$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$. Donc par le théorème de dérivation des suites de fonctions, F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment de $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}$ tout entier (la continuité et la dérivabilité sont des propriétés locales).

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=-N}^{N} f(x+1+n) &= \sum_{n=-N-1}^{N+1} f(x+n) \\ \overset{N \longrightarrow +\infty}{\Longrightarrow} F(x+1) = F(x) \end{aligned}$$

ie. F est 1-périodique. On peut calculer ses coefficients de Fourier. $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n(F) = \int_0^1 F(t) e^{-2i\pi n t} \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t+n) e^{-2i\pi n t} \, \mathrm{d}t$$

Par convergence uniforme sur un segment, on peut échanger somme et intégrale :

$$c_n(F) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(t) e^{-2i\pi n t} \, \mathrm{d}t$$

Or, la transformée de Fourier d'une fonction L_1 est convergente. On peut donc écrire :

$$c_n(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi n t} \, \mathrm{d}t = \widehat{f}(2\pi n)$$

Comme F est de classe $\mathscr{C}^1$, sa série de Fourier converge uniformément vers F. D'où le résultat. □

Application 2 (Identité de Jacobi)**.**

$$\forall s > 0, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{s}}$$

Démonstration. Soit $\alpha > 0$. On définit $G_\alpha : x \mapsto e^{-\alpha x^2}$ et on connaît sa transformée de Fourier :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{G_\alpha}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}$$

Soit $s > 0$. Appliquons le Théorème 1 à la fonction $G_{\pi s}$:

$$\begin{aligned} & \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi s (x+n)^2} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{(2\pi n)^2}{4\pi s}} e^{2i\pi n x} \\ \overset{x=0}{\Longrightarrow} & \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi s n^2} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi n^2}{s}} \end{aligned}$$

□

Bibliographie

Les maths en tête **[GOU20]**

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse.* 3e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html.