209 Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications.

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désignera le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I - Approximation par des polynômes

1. Approximation locale

[GOU20] p. 75

Théorème 1 (Formule de Taylor-Lagrange)**.** Soit f une fonction réelle de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle $[a,b]$ telle que $f^{(n+1)}$ existe sur un intervalle $]a,b[$. Alors,

$$\exists c \in]a,b[\text{ tel que } f(b) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k}_{=T_n(b)} + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

Application 2.
— $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.
— $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.
— $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

Proposition 3. En reprenant les notations du Théorème 1, on a

$$\| \exp - T_n \|_\infty \longrightarrow 0$$

sur $[a,b]$.

2. Approximation sur un compact

p. 238

Théorème 4 (Théorèmes de Dini)**.**
(i) Soit (f_n) une suite *croissante* de fonctions réelles *continues* définies sur un segment I de $\mathbb{R}$. Si (f_n) converge simplement vers une fonction *continue* sur I, alors la convergence est uniforme.
(ii) Soit (f_n) une suite de *fonctions croissantes* réelles *continues* définies sur un segment I de $\mathbb{R}$. Si (f_n) converge simplement vers une fonction *continue* sur I, alors la convergence est uniforme.

p. 242

Théorème 5 (Bernstein)**.** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ continue. On note

$$B_n(f) : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

Alors,

$$\|B_n(f) - f\|_\infty \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$$

[DEV] p. 304

Corollaire 6 (Weierstrass)**.** Toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$) est limite uniforme de fonctions polynômiales sur $[a,b]$.

On a une version plus générale de ce théorème.

[LI] p. 46

Théorème 7 (Stone-Weierstrass)**.** Soit K un espace compact et $\mathscr{A}$ une sous-algèbre de l'algèbre de Banach réelle $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$. On suppose de plus que :

(i) $\mathscr{A}$ sépare les points de K (ie. $\forall x \in K, \exists f \in A$ telle que $f(x) \neq f(y)$).

(ii) $\mathscr{A}$ contient les constantes.

Alors $\mathscr{A}$ est dense dans $\mathscr{C}(K,\mathbb{R})$.

Remarque 8. Il existe aussi une version "complexe" de ce théorème, où il faut supposer de plus que $\mathscr{A}$ est stable par conjugaison.

Exemple 9. La suite de polynômes réels (r_n) définie par récurrence par

$$r_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, r_{n+1} : t \mapsto r_n(t) + \frac{1}{2}(t - r_n(t)^2)$$

converge vers $\sqrt{.}$ sur $[0,1]$.

3. Interpolation

Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle $[a,b]$. On se donne $n+1$ points $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$ distincts deux-à-deux. [DEM] p. 21

Définition 10. Pour $i \in [\![0,n]\!]$, on définit le i-ième **polynôme de Lagrange** associé à $x_1, \dots, x_n$ par

$$\ell_i : x \mapsto \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Théorème 11. Il existe une unique fonction polynômiale p_n de degré n telle que $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $p_n(x_i) = f(x_i)$:

$$p_n = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i$$

Théorème 12. On note $\pi_{n+1} : x \mapsto \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$ et on suppose f $n+1$ fois dérivable $[a, b]$. Alors, pour tout $x \in [a, b]$, il existe un réel $\xi_x \in]\min(x, x_i), \max(x, x_i)[$ tel que

$$f(x) - p_n(x) = \frac{\pi_{n+1}(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x)$$

Corollaire 13.

$$\|f - p_n\|_\infty \leq \frac{1}{(n+1)!} \|\pi_{n+1}\|_\infty \|f^{(n+1)}\|_\infty$$

Application 14 (Calculs approchés d'intégrales)**.** On note $I(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. L'objectif est d'approximer $I(f)$ par une expression $P(f)$ et de majorer l'erreur d'approximation $E(f) = |I(f) - P(f)|$. **[DAN]** p. 506

(i) Méthode des rectangles. On suppose f continue. Avec $P(f) = (b-a)f(a)$, on a $E(f) \leq \frac{(b-a)^2}{2} \|f'\|_\infty$.

(ii) Méthode du point milieu. On suppose f de classe $\mathscr{C}^2$. Avec $P(f) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, on a $E(f) \leq \frac{(b-a)^3}{24} \|f''\|_\infty$.

(iii) Méthode des trapèzes. On suppose f de classe $\mathscr{C}^2$. Avec $P(f) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$, on a $E(f) \leq \frac{(b-a)^3}{12} \|f''\|_\infty$.

(iv) Méthode de Simpson. On suppose f de classe $\mathscr{C}^4$. Avec $P(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + f(b) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$, on a $E(f) \leq \frac{(b-a)^3}{2880} \|f^{(4)}\|_\infty$.

II - Approximation dans les espaces de Lebesgue

1. Convolution

Définition 15. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. On dit que **la convolée** (ou **le produit de convolution**) de f et g en $x \in \mathbb{R}$ **existe** si la fonction **[AMR08]** p. 75

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & f(x-t)g(t) \end{array}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}^d$ pour la mesure de Lebesgue. On pose alors :

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Proposition 16. Dans $L_1(\mathbb{R}^d)$, le produit de convolution est commutatif, bilinéaire et associatif.

Théorème 17. Soient $p, q > 0$ et $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L_q(\mathbb{R}^d)$.

(i) Si $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors $(f * g)(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et est uniformément continue. On a, $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$ et, si $p \neq 1, +\infty$, $f * g \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R})$.

(ii) Si $p = 1$ et $q = +\infty$, alors $(f * g)(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $f * g \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R})$.

(iii) Si $p = 1$ et $q \in [1, +\infty[$, alors $(f * g)(x)$ existe pp. en $x \in \mathbb{R}^d$ et $f * g \in L_q(\mathbb{R})$ telle que $\|f * g\|_q \leq \|f\|_1 \|g\|_q$.

(iv) Si $p = 1$ et $q = 1$, alors $(f * g)(x)$ existe pp. en $x \in \mathbb{R}^d$ et $f * g \in L_1(\mathbb{R})$ telle que $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

Exemple 18. Soient $a < b \in \mathbb{R}_*^+$. Alors $\mathbb{1}_{[-a,a]} * \mathbb{1}_{[-b,b]}$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$ et

$$\left(\mathbb{1}_{[-a,a]} * \mathbb{1}_{[-b,b]}\right)(x) = \begin{cases} 2a & \text{si } 0 \leq |x| \leq b-a \\ b+a-|x| & \text{si } b-a \leq |x| \leq b+a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition 19. $L_1(\mathbb{R}^d)$ est une algèbre de Banach pour le produit de convolution. p. 85

Remarque 20. Cette algèbre n'a pas d'élément neutre. Afin de pallier à ce manque, nous allons voir la notion d'approximation de l'identité dans la sous-section suivante.

2. Densité

Définition 21. On appelle **approximation de l'identité** toute suite (ρ_n) de fonctions mesurables de $L_1(\mathbb{R}^d)$ telles que [B-P] p. 306

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_n \,\mathrm{d}\lambda_d = 1$.

(ii) $\sup_{n \geq 1} \|\rho_n\| < +\infty$.

(iii) $\forall \epsilon > 0$, $\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R} \setminus B(0,\epsilon)} \rho_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Remarque 22. Dans la définition précédente, (ii) implique (i) lorsque les fonctions ρ_n sont positives. Plutôt que des suites, on pourra considérer les familles indexées par $\mathbb{R}_*^+$.

Exemple 23. — Noyau de Laplace sur $\mathbb{R}$:

$$\forall t > 0, \rho_t(x) = \frac{1}{2t} e^{-\frac{|x|}{t}}$$

— Noyau de Cauchy sur $\mathbb{R}$:

$$\forall t > 0, \rho_t(x) = \frac{t}{\pi(t^2 + x^2)}$$

— Noyau de Gauss sur $\mathbb{R}$:

$$\forall t > 0, \rho_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{|x|^2}{2t^2}}$$

Théorème 24. Soit (ρ_n) une approximation de l'identité. Soient $p \in [1, +\infty[$ et $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, alors : p. 307

$$\forall n \geq 1, f * \rho_n \in L_p(\mathbb{R}^d) \quad \text{et} \quad \|f * \rho_n - f\|_p \longrightarrow 0$$

Théorème 25. Soient (ρ_n) une approximation de l'identité et $f \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$. Alors :
- Si f est continue en $x_0 \in \mathbb{R}^d$, alors $(f * \rho_n)(x_0) \longrightarrow_{n \to +\infty} f(x_0)$.
- Si f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$, alors $\|f * \rho_n - f\|_\infty \longrightarrow_{n \to +\infty} 0$.
- Si f est continue sur un compact K, alors $\sup_{x \in K} |(f * \rho_n)(x) - f(x)| \longrightarrow_{n \to +\infty} 0$.

Définition 26. On qualifie de **régularisante** toute suite (α_n) d'approximations de l'identité telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \in \mathscr{C}_K^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Exemple 27. Soit $\alpha \in \mathscr{C}_K^\infty(\mathbb{R}^d)$ une densité de probabilité. Alors la suite (α_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\alpha_n : x \mapsto n\alpha(nx)$ est régularisante. p. 274

Application 28. (i) $\mathscr{C}_K^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathscr{C}_K(\mathbb{R}^d)$ pour $\|.\|_\infty$. **[AMR08]** p. 96

(ii) $\mathscr{C}_K^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L_p(\mathbb{R}^d)$ pour $\|.\|_p$ avec $p \in [1, +\infty[$.

III - Approximations de fonctions périodiques

1. Séries de Fourier

Notation 29. — Pour tout $p \in [1, +\infty]$, on note $L_p^{2\pi}$ l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodiques et mesurables, telles que $\|f\|_p < +\infty$. **[Z-Q]** p. 73

— Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note e_n la fonction 2π-périodique définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $e_n(t) = e^{int}$.

Proposition 30. $L_2^{2\pi}$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle .,. \rangle : (f,g) \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\, \mathrm{d}t$$

Définition 31. Soit $f \in L_1^{2\pi}$. On appelle : **[GOU20]** p. 268

— **Coefficients de Fourier complexes**, les complexes définis par

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int}\, \mathrm{d}t = \langle f, e_n \rangle$$

— **Coefficients de Fourier réels**, les complexes définis par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\, \mathrm{d}t \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\, \mathrm{d}t$$

2. Approximation hilbertienne

Théorème 32. Soit H un espace de Hilbert et $(\epsilon_n)_{n \in I}$ une famille orthonormée dénombrable de H. Les propriétés suivantes sont équivalentes : p. 109

(i) La famille orthonormée $(\epsilon_n)_{n \in I}$ est une base hilbertienne de H.

(ii) $\forall x \in H,\ x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, \epsilon_n \rangle \epsilon_n$.

(iii) $\forall x \in H,\ \|x\|_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x, \epsilon_n \rangle|^2$.

Remarque 33. L'égalité du Théorème 1 Théorème 32 est appelée **égalité de Parseval**.

Théorème 34. La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L_2^{2\pi}$. p. 123

Corollaire 35.

$$\forall f \in L_2^{2\pi}, f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n$$

[GOU20] p. 272

Exemple 36. On considère $f : x \mapsto 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi, \pi]$. Alors,

$$\frac{\pi^4}{90} = \|f\|_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$

[BMP] p. 124

Remarque 37. L'égalité du Point (iii) est valable dans $L_2^{2\pi}$, elle signifie donc que

$$\left\| \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n - f \right\|_2 \longrightarrow_{N \to +\infty} 0$$

3. Approximation au sens de Cesàro

[GOU20] p. 269

Définition 38. Soit $f \in L_1^{2\pi}$. On appelle **série de Fourier** associée à f la série $(S_N(f))$ définie par

$$\forall N \in \mathbb{N}, S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n \overset{(*)}{=} \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx))$$

Remarque 39. L'égalité $(*)$ de la définition précédente est justifiée car,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, c_n(f) e^{inx} + c_{-n}(f) e^{-inx} = a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)$$

[AMR08] p. 184

Définition 40. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, la fonction $D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_N$ est appelée **noyau de Dirichlet** d'ordre N.

Proposition 41. Soit $N \in \mathbb{N}$.

(i) D_N est une fonction paire, 2π-périodique, et de norme 1.

(ii)

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, D_N(x) = \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

(iii) Pour tout $f \in L_1^{2\pi}$, $S_N(f) = f * D_N$.

Définition 42. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, la fonction $K_N = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} D_j$ est appelé **noyau de Fejér** d'ordre N.

Notation 43. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on note $\sigma_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_n(f)$ la somme de Cesàro d'ordre N de la série de Fourier d'une fonction $f \in L_1^{2\pi}$.

Proposition 44. Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $f \in L_1^{2\pi}$.

(i) K_N est une fonction positive et de norme 1.

(ii)

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, K_N(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right)^2$$

(iii) $K_N = \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e_n$.

(iv) $\sigma_N(f) = f * K_N$.

[DEV] **Théorème 45** (Fejér)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique. p. 190

(i) Si f est continue, alors $\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et $(\sigma_N(f))$ converge uniformément vers f.

(ii) Si $f \in L_p^{2\pi}$ pour $p \in [1, +\infty[$, alors $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$ et $(\sigma_N(f))$ converge vers f pour $\|.\|_p$.

Corollaire 46. L'espace des polynômes trigonométriques $\{\sum_{n=-N}^{N} c_n e_n \mid (c_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, N \in \mathbb{N}\}$ est dense dans l'espace des fonction continues 2π-périodiques pour $\|.\|_\infty$ et est dense dans $L_p^{2\pi}$ pour $\|.\|_p$ avec $p \in [1, +\infty[$.

Bibliographie

Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels **[AMR08]**

Mohammed El-Amrani. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels. Niveau M1.* Ellipses, 28 août 2008.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3908-14232-analyse-de-fourier-dans-les-espaces-fonctionnels-niveau-m1-9782729839031.html.

Objectif agrégation **[BMP]**

Vincent Beck, Jérome Malick et Gabriel Peyré. *Objectif agrégation.* 2e éd. H&K, 22 août 2005.
https://objectifagregation.github.io.

Analyse **[B-P]**

Marc Briane et Gilles Pages. *Analyse. Théorie de l'intégration.* 8e éd. De Boeck Supérieur, 29 août 2023.
https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807359550-analyse-theorie-de-l-integration.

Mathématiques pour l'agrégation **[DAN]**

Jean-François Dantzer. *Mathématiques pour l'agrégation. Analyse et probabilités.* De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.
https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332904-mathematiques-pour-l-agregation-analyse-et-probabilites.

Analyse numérique et équations différentielles **[DEM]**

Jean-Pierre Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles.* 4e éd. EDP Sciences, 11 mai 2016.
https://www.uga-editions.com/menu-principal/collections-et-revues/collections/grenoble-sciences/analyse-numerique-et-equations-differentielles-239866.kjsp.

Les maths en tête **[GOU20]**

Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Analyse.* 3e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html.

Cours d'analyse fonctionnelle **[LI]**

Daniel Li. *Cours d'analyse fonctionnelle. avec 200 exercices corrigés.* Ellipses, 3 déc. 2013.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/6558-cours-danalyse-fonctionnelle-avec-200-exercices-corriges-9782729883058.html.

Analyse pour l'agrégation **[Z-Q]**

Claude ZUILY et Hervé QUEFFÉLEC. *Analyse pour l'agrégation. Agrégation/Master Mathématiques.* 5e éd. Dunod, 26 août 2020.
https://www.dunod.com/prepas-concours/analyse-pour-agregation-agregationmaster-mathematiques.