## Théorème de Weierstrass (par les probabilités)

On montre le théorème de Weierstrass en faisant un raisonnement sur des variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli.

**Théorème 1** (Bernstein). Soit  $f:[0,1] \to \mathbb{R}$  continue. On note

[**G-K**] p. 195

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, B_n(f) : x \mapsto \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

le n-ième polynôme de Bernstein associé à f. Alors le suite de fonctions  $(B_n(f))$  converge uniformément vers f.

*Démonstration.* Soit  $x \in ]0,1[$ . On se place sur un espace probabilité  $(Ω, \mathscr{A}, \mathbb{P})$  et considère  $(X_k)$  une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi  $\mathscr{B}(x)$ . On note  $∀ n ∈ \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ . Ainsi,  $S_n \sim \mathscr{B}(n,x)$  et donc par la formule de transfert,

$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} = B_n(f)(x)$$

La fonction f est continue sur [0,1] qui est un compact de  $\mathbb{R}$ , donc par le théorème de Heine; elle y est uniformément continue. Soit donc  $\epsilon > 0$ ,

$$\exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in [0, 1], |x - y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

On a,

$$|B_{n}(f)(x) - f(x)| = \left| \mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_{n}}{n}\right) - f(x)\right) \right|$$

$$= \left| \mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_{n}}{n}\right) - f(x)\right) \right|$$

$$\leq \mathbb{E}\left|f\left(\frac{S_{n}}{n}\right) - f(x)\right|$$

$$\leq \mathbb{E}\left(\mathbb{I}_{\left\{\left|\frac{S_{n}}{n} - x\right| < \eta\right\}} \left| f\left(\frac{S_{n}}{n}\right) - f(x)\right|\right) + \mathbb{E}\left(\mathbb{I}_{\left\{\left|\frac{S_{n}}{n} - x\right| \ge \eta\right\}} \left| f\left(\frac{S_{n}}{n}\right) - f(x)\right|\right)$$

$$\leq \mathbb{E}(\epsilon) + 2\|f\|_{\infty} \mathbb{E}\left(\mathbb{I}_{\left\{\left|\frac{S_{n}}{n} - x\right| \ge \eta\right\}}\right)$$

$$= \epsilon + 2\|f\|_{\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_{n}}{n} - x\right| \ge \eta\right) \tag{*}$$

Comme  $\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = x$ , on peut appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \ge \eta\right) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \ge \eta\right) \le \frac{1}{\eta^2} \operatorname{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right)$$

Comme les  $X_k$  sont indépendantes et de même loi :

$$\operatorname{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \operatorname{Var}(S_n) = \frac{1}{n} \operatorname{Var}(X_1) = \frac{x(1-x)}{n} \le \frac{1}{n}$$

En réinjectant cela dans (\*), cela donne

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \le \epsilon + \frac{2\|f\|_{\infty}}{n\eta^2}$$

qui est une majoration indépendante de x. Comme la fonction  $B_n(f) - f$  est continue sur [0,1], on peut passer à la borne supérieure :

$$||B_n(f) - f||_{\infty} = \sup_{x \in [0,1]} |B_n(f)(x) - f(x)| \le \epsilon + \frac{2||f||_{\infty}}{n\eta^2}$$

ce qui donne après un passage à la limite supérieure :

$$\limsup_{n \to +\infty} \|B_n(f) - f\|_{\infty} \le \epsilon$$

$$\stackrel{\epsilon \to 0}{\Longrightarrow} \limsup_{n \to +\infty} \|B_n(f) - f\|_{\infty} = 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} \|B_n(f) - f\|_{\infty} = 0$$

**Théorème 2** (Weierstrass). Toute fonction continue  $f : [a,b] \to \mathbb{R}$  (avec  $a,b \in \mathbb{R}$  tels que  $a \le b$ ) est limite uniforme de fonctions polynômiales sur [a,b].

Démonstration. On va avoir besoin du changement de variable suivant :

$$\varphi: \begin{bmatrix} [0,1] & \to & [a,b] \\ x & \mapsto & a+(b-a)x \end{bmatrix}$$

Par le Théorème 1, la fonction  $f \circ \varphi^{-1}$  est limite uniforme d'une suite de fonctions polynômiales  $(p_n)$ . Donc f est limite uniforme de la suite  $(p_n \circ \varphi)$  où  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $p_n \circ \varphi$  est bien une fonction polynômiale car  $\varphi$  est affine.

## Bibliographie

## De l'intégration aux probabilités

[G-K]

Olivier Garet et Aline Kurtzmann. *De l'intégration aux probabilités*. 2<sup>e</sup> éd. Ellipses, 28 mai 2019. https://www.editions-ellipses.fr/accueil/4593-14919-de-l-integration-aux-probabilites-2e-edition-augmentee-9782340030206.html.