

## 215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ . Exemples et applications.

Sauf mention contraire, nous travaillerons sur l'espace vectoriel normé  $\mathbb{R}^n$  pour  $n \geq 1$ . Soient  $F$  un espace vectoriel normé sur  $\mathbb{R}$  et  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  un ouvert.

### I - Généralisation de la notion de dérivée

#### 1. Différentielle

**Définition 1.** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé sur  $\mathbb{R}$ . Soient  $U \subseteq E$  ouvert et  $f : U \rightarrow F$  une application de  $U$  dans  $F$ .  $f$  est dite **différentiable** en un point  $a$  de  $U$  s'il existe  $\ell_a \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que

$$f(a+h) = f(a) + \ell_a(h) + o(\|h\|) \text{ quand } h \rightarrow 0$$

Si  $\ell_a$  existe, alors elle est unique et on la note  $df_a$  : c'est la **différentielle** de  $f$  en  $a$ .

[GOU20]  
p. 323

*Remarque 2.* — En dimension quelconque  $df_a$  dépend a priori des normes choisies sur  $E$  et  $F$ . Cependant, en dimension finie, l'équivalence des normes implique que l'existence et la valeur de  $df_a$  ne dépend pas des normes choisies.

- La définition demande à  $\ell_a$  d'être continue. En dimension finie, le problème ne se pose donc pas.
- Une fonction réelle est différentiable en  $a$  si et seulement si elle est dérivable en  $a$ . Dans ce cas, on a  $df_a : h \mapsto f'(a)h$ .

**Exemple 3.** Si  $f$  est linéaire et continue, alors  $df_a = f$  pour tout  $a \in E$ .

**Proposition 4.** Une fonction différentiable en un point et continue en ce point.

**Proposition 5.** Soit  $V \subseteq F$  un ouvert. Soit  $f : U \rightarrow F$  différentiable en un point  $a$  de  $U$ .

- (i)  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda f$  est différentiable en  $a$ , et  $d(\lambda f)_a = \lambda df_a$ .
- (ii) Si  $g : U \rightarrow F$  est différentiable en  $a$ , alors  $f + g$  l'est aussi, et  $d(f + g)_a = df_a + dg_a$ .
- (iii) Soit  $g : V \rightarrow G$ . On suppose  $f(U) \subseteq V$  et  $g$  différentiable en  $f(a)$ . Alors  $g \circ f$  est différentiable en  $a$  et,  $d(f \circ g)_a = dg_{f(a)} \circ df_a$ .

## 2. Dérivée selon un vecteur

**Définition 6.** Soit  $a \in U$ .

p. 324

- Soit  $v \in \mathbb{R}^n$ . Si la fonction de la variable réelle  $\varphi : t \mapsto f(a + tv)$  est dérivable en 0, on dit que  $f$  est **dérivable en  $a$  selon le vecteur  $v$** . On note alors

$$f'_v(a) = \varphi'(0)$$

- Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On dit que  $f$  admet une  **$i$ -ième dérivée partielle en  $a$**  si  $f$  est dérivable en  $a$  selon le vecteur  $e_i$ . On note alors

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f'_{e_i}(a)$$

*Remarque 7.* Soient  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ . La dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$  est aussi la dérivée de l'application partielle  $t \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_n)$  en  $t = 0$ .

**Proposition 8.** Une fonction différentiable en un point est dérivable selon tout vecteur en ce point.

**Contre-exemple 9.** La fonction

p. 329

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

est dérivable selon tout vecteur au point  $(0, 0)$  mais n'est pas continue en  $(0, 0)$ .

**Théorème 10.** Si toutes les dérivées partielles de  $f$  existent et si elles sont continues en un point  $a$  de  $U$ , alors  $f$  est différentiable en  $a$  et on a

p. 325

$$df_a = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i^*$$

où  $(e_i^*)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  est la base duale de la base canonique  $(e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  de  $\mathbb{R}^n$ .

**Contre-exemple 11.** La fonction

$$f : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{matrix}$$

est différentiable en 0, mais  $f'$  n'est pas continue en 0.

**Corollaire 12.** Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  différentiable en un point  $a \in \mathbb{R}^n$ . On note par  $f_i$  la  $i$ -ième coordonnée de  $f \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ . Alors la matrice de l'application linéaire  $df_a$  dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^m$  est

$$\text{Jac}(f)_a = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i \in \llbracket 1, m \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, n \rrbracket}}$$

p. 327

**Définition 13.** Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  différentiable en un point  $a \in \mathbb{R}^n$ . La matrice  $\text{Jac}(f)_a$  est la **jacobienne** de  $f$  en  $a$ . Son déterminant est le **jacobien** de  $f$  en  $a$ .

**Exemple 14.** Soit  $f : (r, \theta) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ , alors  $\det(\text{Jac}(f)_{(r, \theta)}) = r$ .

p. 354

**Théorème 15** (Inégalité des accroissements finis). Soit  $f : U \rightarrow F$  continue sur un segment  $[a, b] \subseteq U$  et différentiable sur  $]a, b[$ . On suppose qu'il existe  $M > 0$  tel que  $\|df_c\| \leq M$  pour tout  $c \in ]a, b[$ . Alors,

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M \|b - a\| \quad (*)$$

p. 327

**Corollaire 16.** En reprenant les notations du théorème précédent :

- (i) Si  $U$  est convexe, si  $f$  est différentiable sur  $U$  et si  $\|df_c\| \leq M$  pour tout  $c \in U$ , alors l'inégalité (\*) précédente est vraie pour tout  $a, b \in U$ .
- (ii) Si  $U$  est un ouvert connexe et  $df_c = 0$  pour tout  $c \in U$ , alors  $f$  est constante.

### 3. Différentielle itérée

**Définition 17.** Soit  $f : U \rightarrow F$ . Sous réserve d'existence, on peut définir par récurrence sur  $p$  une dérivée partielle d'ordre  $p$  par la relation

$$\frac{\partial^p}{\partial x_{i_p} \dots \partial x_{i_1}} f = \frac{\partial}{\partial x_{i_p}} \left( \frac{\partial^{p-1}}{\partial x_{i_{p-1}} \dots \partial x_{i_1}} f \right)$$

$f$  est alors dite de classe  $\mathcal{C}^p$  si toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre  $p$  existent et sont

continues sur  $U$ .

**Exemple 18.** La fonction

$$x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est  $\mathcal{C}^\infty$ .

p. 79

**Théorème 19** (Schwarz). On se place dans le cas  $n = 2$ . Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  qui admet des dérivées partielles sur  $U$ , continues en  $a \in U$ . Alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$$

p. 326

**Corollaire 20.** Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  de classe  $\mathcal{C}^p$ . Alors les dérivées partielles jusqu'à l'ordre  $p$  ne dépendent pas de l'ordre de dérivation.

**Notation 21.** Soient  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $U$  et  $n \in \llbracket 1, k \rrbracket$ . Par analogie avec

$$\forall (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m, (a_1 + \dots + a_m)^n = \sum_{i_1 + \dots + i_m = n} \frac{n!}{i_1! \dots i_m!} a_1^{i_1} \dots a_m^{i_m}$$

on note

$$\left( \sum_{i=1}^m h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right)^{(n)} = \sum_{i_1 + \dots + i_m = n} \frac{n!}{i_1! \dots i_m!} h_1^{i_1} \dots h_m^{i_m} \frac{\partial^n f}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_m^{i_m}}(a)$$

**Théorème 22** (Formule de Taylor-Lagrange). Soient  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $U$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$  tels que  $[x, x+h] \subseteq U$ . Alors,  $\exists \theta \in ]0, 1[$  tel que

$$f(x+h) = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{j!} \left( \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right)^{(j)} + \frac{1}{p!} \left( \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta h) \right)^{(p)}$$

**Exemple 23.** Pour  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ , pour  $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ , il existe  $\theta \in ]0, 1[$  tel que

$$\begin{aligned} f(h, k) &= f(0, 0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \\ &+ \frac{1}{2} \left( h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} f(\theta h, \theta k) + h k \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} f(\theta h, \theta k) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} f(\theta h, \theta k) \right) \\ &+ o(\|(h, k)\|^2) \end{aligned}$$

**Théorème 24** (Formule de Taylor avec reste intégral). Soient  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $U$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$  tels que  $[x, x+h] \subseteq U$ . Alors,

$$f(x+h) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} \left( \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right)^{(j)} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} \left( \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+th) \right)^{(k)} dt$$

**Théorème 25** (Formule de Taylor-Young). Soient  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $U$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$  tels que  $[x, x+h] \subseteq U$ . Alors,

$$f(x+h) = \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} \left( \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right)^{(j)} + o(\|h\|^k)$$

**Application 26** (Lemme d'Hadamard). Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . On suppose  $f$  différentiable en 0 avec  $df_0 = 0$  et  $f(0) = 0$ . Alors,

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j h_{i,j}(x_1, \dots, x_n)$$

où  $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $h_{i,j} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est  $\mathcal{C}^\infty$ .

## II - Théorèmes fondamentaux

### 1. Inversion locale

**Définition 27.** Soit  $f : U \rightarrow F$ . On dit que  $f$  est un **difféomorphisme** de classe  $\mathcal{C}^k$  de  $U$  sur  $V = f(U)$  si  $f$  et  $f^{-1}$  sont bijectives et de classe  $\mathcal{C}^k$  respectivement sur  $U$  et  $V$ .

[ROU]  
p. 54

**Exemple 28.**  $x \mapsto x^3$  est un homéomorphisme de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^1$ , mais n'est pas un difféomorphisme.

**Théorème 29** (Inversion locale). Soit  $f : U \rightarrow F$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . On suppose qu'il existe  $a \in U$  tel que  $df_a$  est inversible.

Alors, il existe  $V$  voisinage de  $a$  et  $W$  voisinage de  $f(a)$  tels que  $f|_V$  soit un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $V$  sur  $W$ .

[GOU20]  
p. 341

**Remarque 30.** Si  $F = \mathbb{R}^n$ ,  $df_a$  est inversible si et seulement si le jacobien de  $f$  en  $a$ ,  $\det \text{Jac}(f)_a$ , est non nul.

**Corollaire 31.** Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . On suppose que pour tout  $a \in U$ ,  $df_a$  est inversible. Alors  $f$  est une application ouverte.

**Exemple 32.** L'application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par  $(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, xy)$  est un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^\infty$  en tout point de  $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ .

p. 347

**Application 33.** Soit  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^1$ . Alors,  $V = \varphi(U)$  est mesurable et toute fonction  $f$  appartient à  $L_1$  si et seulement si  $|\det \text{Jac}(\varphi)_a| f \circ \varphi$  appartient à  $L_1$ . Dans ce cas,

[BMP]  
p. 9

$$\int_V f(x) dx = \int_U |\det \text{Jac}(\varphi)_a| f(\varphi(y)) dy$$

**Exemple 34.** En passant en coordonnées polaires,

[GOU20]  
p. 355

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

**Application 35.** Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $k$  un entier. Alors, si  $A$  est suffisamment proche de l'identité  $I_n$ ,  $A$  est une racine  $k$ -ième (ie.  $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $B^k = A$ ).

[BMP]  
p. 9

**Lemme 36.** (i) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Alors  $\exp(A) \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ .

(ii)  $\exp$  est différentiable en 0 et  $d\exp_0 = \text{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$ .

(iii) Soit  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ . Alors  $M^{-1} \in \mathbb{C}[M]$ .

[I-P]  
p. 396

**Théorème 37.**  $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$  est surjective.

**Application 38.**  $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \text{GL}_n(\mathbb{R})^2$ , où  $\text{GL}_n(\mathbb{R})^2$  désigne les carrés de  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ .

## 2. Fonctions implicites

**Définition 39.** Soient  $E_1, \dots, E_n, F$  des espaces de Banach,  $\Omega \subseteq E$  un ouvert où  $E = E_1 \times \dots \times E_n$  et  $a = (a_1, \dots, a_n) \in E$ . Soit  $f : \Omega \rightarrow F$ . Alors, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $f_i : x \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$  est définie sur un voisinage de  $a_i$  dans  $E_i$ . Si elle est différentiable en  $a_i$ , on dit que  $f$  admet une **différentielle partielle** d'indice  $i$  en  $a$ , et on note celle-ci  $\partial_i f_a$ .

[GOU20]  
p. 344

[DEV]

**Remarque 40.** En reprenant les notations précédentes :

- Si pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $E_i = \mathbb{R}$  et  $F = E = \mathbb{R}^n$ , alors  $\partial_i f_a = h \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ .
- Si  $f$  est différentiable en  $a$ , alors pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\partial_i f_a$  existe et

$$\forall h = (h_1, \dots, h_n) \in E, df_a(h) = \sum_{i=1}^n \partial_i f_a(h_i)$$

**Théorème 41** (des fonctions implicites). Soient  $U \times V \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  où  $U$  et  $V$  sont des ouverts. Soit  $f : U \times V \rightarrow F$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . On suppose qu'il existe  $(a, b) \in U \times V$  tel que  $f(a, b) = 0$  et  $\partial_2 f_{(a,b)} : \mathbb{R}^m \rightarrow F$  est un isomorphisme. Alors, il existe :

- Un voisinage ouvert  $U_0$  de  $a$  dans  $U$ .
- Un voisinage ouvert  $W$  de  $f(a, b)$ .
- Un voisinage ouvert  $\Omega$  de  $(a, b)$  dans  $U \times V$ .
- Une fonction  $\varphi : U_0 \times W \rightarrow V$  de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Vérifiant :

$$\forall x \in U_0, \forall z \in W, \exists! y \in V \text{ tel que } f(x, y) = z \text{ avec } (x, y) \in \Omega \text{ et } y = \varphi(x, z)$$

En particulier,

$$\forall (x, z) \in U_0 \times W, f(x, \varphi(x, z)) = z$$

**Remarque 42.** Avec les notations précédentes, si  $E = F = \mathbb{R}$ , on peut choisir n'importe quelle variable pour obtenir

$$y = \varphi(x) \text{ si } \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0 \text{ ou } x = \varphi(y) \text{ si } \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \neq 0$$

[BMP]  
p. 11

**Remarque 43.** La signification de ce théorème est que la surface définie implicitement par l'équation  $f(x, y) = 0$  peut, au moins localement, être vue comme le graphe d'une fonction  $\varphi$ .

[ROU]  
p. 193

**Proposition 44.** Avec les notations précédentes, la différentielle de la fonction implicite  $\varphi$  est donnée par :

$$d\varphi_x = -(\partial_2 f_{(x, \varphi(x))})^{-1} \circ (\partial_1 f_{(x, \varphi(x))})$$

**Exemple 45.** Pour l'équation  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ , on a  $\partial_2 f_{(x,y)} = 2y$ . On exclue les points où  $y = 0$ . En prenant  $(0, 1)$  et  $(0, -1)$  pour points de départ, on a deux fonctions implicites qui correspondent aux demi-cercles supérieur et inférieur :

$$— y = \varphi_1(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

$$— y = \varphi_2(x) = -\sqrt{1-x^2}.$$

De plus, en dérivant par rapport à  $x$  :  $2x + 2yy' = 0$  et,  $y' = \varphi_1'(x) = \frac{-x}{y}$ .

### III - Application aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$

#### 1. Gradient, hessienne

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une application différentiable en un point  $a$  de  $U$ .

[GOU20]  
p. 324

**Définition 46.**  $df_a$  est une forme linéaire, et le théorème de représentation de Riesz donne l'existence d'un unique vecteur  $v$  de  $\mathbb{R}^n$  tel que

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, df_a(h) = \langle v, h \rangle$$

Le vecteur  $v$  s'appelle **gradient** de  $f$ , et est noté  $\nabla f_a$ .

**Proposition 47.**  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  existe pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et,

$$\nabla f_a = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i$$

où  $(e_1, \dots, e_n)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

On suppose pour la suite  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$ .

p. 336

**Définition 48.** La matrice **hessienne** de  $f$  en  $a$ , notée  $\text{Hess}(f)_a$ , est définie par

$$\text{Hess}(f)_a = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$$

*Remarque 49.* Pour  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$ ,  $\text{Hess}(f)_a$  est symétrique.

**Théorème 50.** On suppose  $df_a = 0$  ( $a$  est un **point critique** de  $f$ ). Alors :

- (i) Si  $f$  admet un minimum (resp. maximum) relatif en  $a$ ,  $\text{Hess}(f)_a$  est positive (resp. négative).
- (ii) Si  $\text{Hess}(f)_a$  définit une forme quadratique définie positive (resp. définie négative),  $f$  admet un minimum (resp. maximum) relatif en  $a$ .



**Exemple 51.** On suppose  $df_a = 0$ . On pose  $(r, s, t) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f \right)_{i+j=2}$ . Alors :

- (i) Si  $rt - s^2 > 0$  et  $r > 0$  (resp.  $r < 0$ ),  $f$  admet un minimum (resp. maximum) relatif en  $a$ .
- (ii) Si  $rt - s^2 < 0$ ,  $f$  n'a pas d'extremum en  $a$ .
- (iii) Si  $rt - s^2 = 0$ , on ne peut rien conclure.

**Exemple 52.** La fonction  $(x, y) \mapsto x^4 + y^2 - 2(x - y)^2$  a trois points critiques qui sont des minimum locaux :  $(0, 0)$ ,  $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  et  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ .

**Contre-exemple 53.**  $x \mapsto x^3$  a sa hessienne positive en 0, mais n'a pas d'extremum en 0.

## 2. Homéomorphismes

**Lemme 54.** Soit  $A_0 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  inversible. Alors il existe un voisinage  $V$  de  $A_0$  dans  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et une application  $\psi : V \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que

$$\forall A \in V, A = {}^t\psi(A)A_0\psi(A)$$

[ROU]  
p. 209

**Lemme 55 (Morse).** Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^3$  (où  $U$  désigne un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  contenant l'origine). On suppose :

- $df_0 = 0$ .
- La matrice symétrique  $H(f)_0$  est inversible.
- La signature de  $H(f)_0$  est  $(p, n - p)$ .

Alors il existe un difféomorphisme  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$  de classe  $\mathcal{C}^1$  entre deux voisinage de l'origine de  $\mathbb{R}^n$   $V \subseteq U$  et  $W$  tel que  $\phi(0) = 0$  et

$$\forall x \in U, f(x) - f(0) = \sum_{k=1}^p \phi_k^2(x) - \sum_{k=p+1}^n \phi_k^2(x)$$

p. 354

**Exemple 56.** On considère  $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2 + \frac{y^4}{4}$ . La courbe d'équation

$$f(x, y) = 0$$

est (au changement près du nom des coordonnées) une projection de l'intersection d'un cylindre et d'une sphère tangents. On a

$$f = u^2 - v^2$$

p. 334

avec  $u : (x, y) \mapsto x$  et  $v : (x, y) \mapsto y\sqrt{1 - \frac{y^2}{4}}$ .

### 3. Optimisation

**Théorème 57** (Extrema liés). Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et soient  $f, g_1, \dots, g_r : U \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ . On note  $\Gamma = \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$ . Si  $f|_{\Gamma}$  admet un extremum relatif en  $a \in \Gamma$  et si les formes linéaires  $d(g_1)_a, \dots, d(g_r)_a$  sont linéairement indépendantes, alors il existe des uniques  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  tels que

$$df_a = \lambda_1 d(g_1)_a + \dots + \lambda_r d(g_r)_a$$

[GOU20]  
p. 337

**Définition 58.** Les  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  du théorème précédent sont appelés **multiplicateurs de Lagrange**.

*Remarque 59.* La relation finale du Théorème 57 équivaut à

$$\bigcap_{i=1}^n \text{Ker}(d(g_i)_a) \subseteq \text{Ker}(df_a)$$

et elle exprime que  $df_a$  est nulle sur l'espace tangent à  $\Gamma$  en  $a$  (ie.  $\nabla f_a$  est orthogonal à l'espace tangent à  $\Gamma$  en  $a$ ).

[BMP]  
p. 21

**Contre-exemple 60.** On pose  $g : (x, y) \mapsto x^3 - y^2$  et on considère  $f : (x, y) \mapsto x + y^2$ . On cherche à minimiser  $f$  sous la contrainte  $g(x, y) = 0$ .

Alors, le minimum (global) de  $f$  sous cette contrainte est atteint en  $(0, 0)$ , la différentielle de  $g$  en  $(0, 0)$  est nulle et la relation finale du Théorème 57 n'est pas vraie.

**Application 61** (Théorème spectral). Tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien se diagonalise dans une base orthonormée.

**Application 62.**

$$\text{SO}_n(\mathbb{R}) = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \|M\|^2 = \inf_{P \in \text{SL}_n(\mathbb{R})} \|P\|^2 \right\}$$

où  $\|\cdot\| : M \mapsto \sqrt{\text{trace}({}^t M M)}$  (ie.  $\text{SO}_n(\mathbb{R})$  est l'ensemble des matrices de  $\text{SL}_n(\mathbb{R})$  qui minimisent la norme euclidienne canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ).

p. 35

[GOU20]  
p. 339

**Application 63** (Inégalité arithmético-géométrique).

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n, \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

**Application 64** (Inégalité d'Hadamard).

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \det(x_1, \dots, x_n) \leq \|x_1\| \dots \|x_n\|$$

avec égalité si et seulement si  $(x_1, \dots, x_n)$  est une base orthogonale de  $\mathbb{R}^n$ .

[ROU]  
p. 409

## Annexes

[BMP]  
p. 10

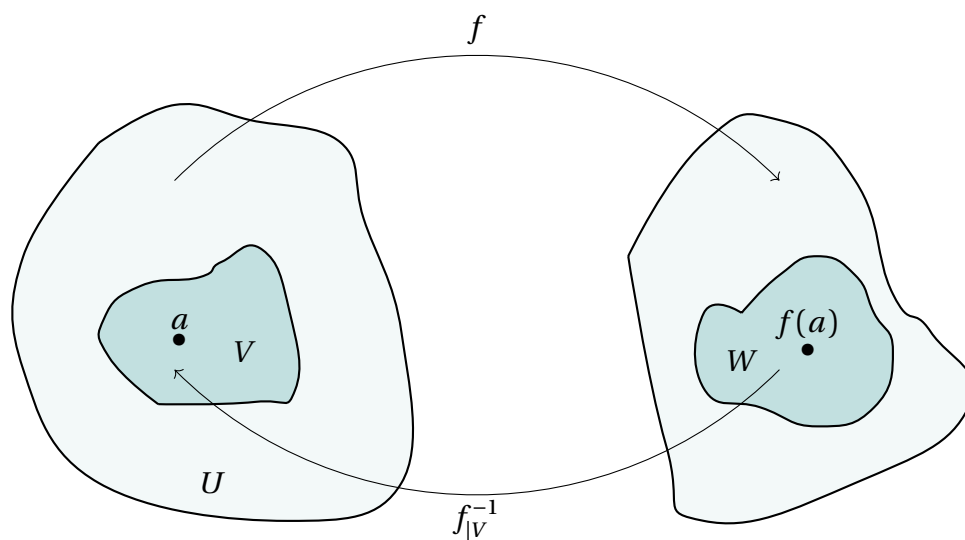


FIGURE 1 – Inversion locale.

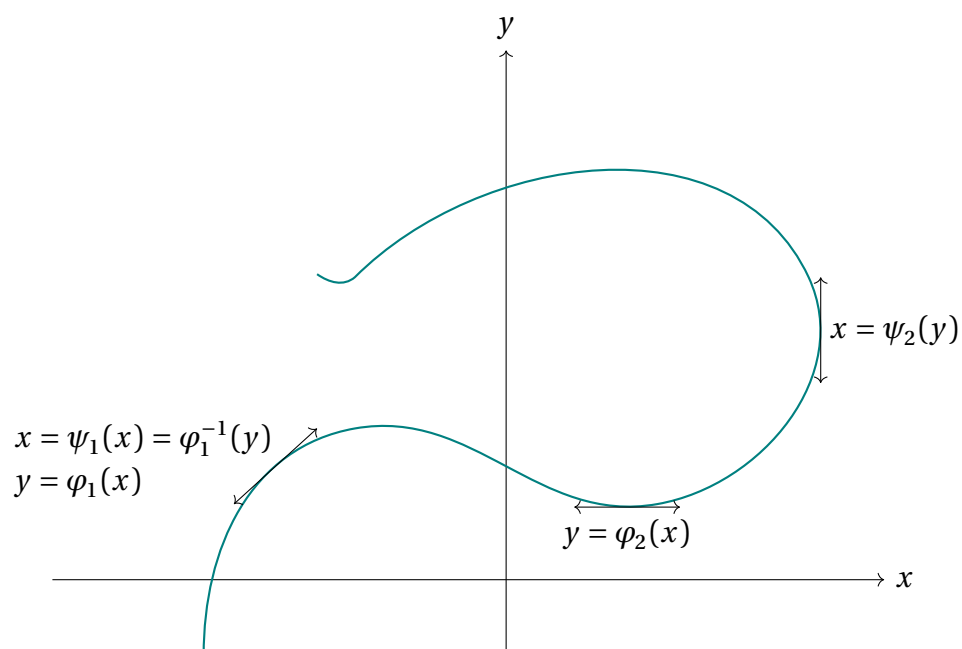


FIGURE 2 – Fonctions implicites.

# Bibliographie

## Objectif agrégation

[BMP]

Vincent BECK, Jérôme MALICK et Gabriel PEYRÉ. *Objectif agrégation*. 2<sup>e</sup> éd. H&K, 22 août 2005.

<https://objectifagregation.github.io>.

## Les maths en tête

[GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3<sup>e</sup> éd. Ellipses, 21 avr. 2020.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.

## L'oral à l'agrégation de mathématiques

[I-P]

Lucas ISENMANN et Timothée PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques. Une sélection de développements*. 2<sup>e</sup> éd. Ellipses, 26 mars 2024.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html>.

## Petit guide de calcul différentiel

[ROU]

François ROUVIÈRE. *Petit guide de calcul différentiel. à l'usage de la licence et de l'agrégation*. 4<sup>e</sup> éd. Cassini, 27 fév. 2015.

<https://store.cassini.fr/fr/enseignement-des-mathematiques/94-petit-guide-de-calcul-differentiel-4e-ed.html>.