

## 264 Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Soient  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une variable aléatoire réelle. On munit  $\mathbb{R}$  de sa tribu borélienne  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

### I - Généralités

#### 1. Définitions

**Définition 1.** — On dit qu'une loi  $\mu$  est **discrète** s'il existe un ensemble  $D$  fini tel que  $\mu(D) = 1$ .

— On dit que la variable aléatoire  $X$  est discrète si sa loi  $\mathbb{P}_X$  est discrète.

[G-K]  
p. 335

*Remarque 2.* Cela revient à dire que  $X(\Omega)$  est fini ou est dénombrable.

[GOU21]  
p. 335

**Exemple 3.** On pose  $\Omega = \{(\omega_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \omega_n \in \{0, 1\} \forall n \in \mathbb{N}\}$  et  $X : (\omega_n) \mapsto \inf\{n \in \mathbb{N} \mid \omega_n = 0\}$ . Alors  $X$  est une variable aléatoire discrète, à valeurs dans  $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ .

**Proposition 4.** Si  $X$  est une variable aléatoire discrète à valeurs dans un ensemble dénombrable  $D$ , alors :

- (i)  $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_X(A) = \sum_{i \in D \cap A} \mathbb{P}(X = i)$ .
- (ii)  $\mathbb{P}_X = \sum_{i \in D} \mathbb{P}(X = i) \delta_i$  où les  $\delta_i$  sont des masses de Dirac (voir Exemple 7).

[G-K]  
p. 131

*Remarque 5.* Si  $D$  est un ensemble fini ou dénombrable et  $(p_i)_{i \in D}$  est une famille de réels positifs de somme égale à 1, alors en posant  $\Omega = D$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(D)$ ,  $X : \omega \mapsto \omega$  et  $\mathbb{P} = \sum_{i \in D} \mathbb{P}(X = i) \delta_i$ , on a construit une variable aléatoire discrète  $X$  sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

#### 2. Lois discrètes usuelles

**Définition 6.** Si  $A \subseteq \Omega$ , l'application  $\mathbb{1}_A$ , appelée **indicatrice** de  $A$  est définie sur  $\Omega$  par

$$\mathbb{1}_A : \begin{array}{ll} \Omega & \rightarrow \{0; 1\} \\ x & \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

p. 137

**Exemple 7** (Mesure de Dirac). Si  $x \in \Omega$ , on pose  $\delta_x : A \mapsto \mathbb{1}_A(x)$ . C'est une loi discrète sur  $\mathcal{P}(\Omega)$ .

**Exemple 8** (Loi uniforme). Soit  $E \subseteq \Omega$  fini. On appelle loi uniforme sur  $E$  la loi discrète définie sur  $\mathcal{P}(\Omega)$  par

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\Omega) &\rightarrow \llbracket 0, 1 \rrbracket \\ A &\mapsto \frac{|A \cap E|}{|E|} \end{aligned}$$

*Remarque 9.* Il s'agit du nombre de cas favorables sur le nombre de cas possibles. Ainsi,  $X$  suit la loi uniforme sur  $E$  si on a  $\forall x \in E, \mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{|E|}$  et  $\forall x \notin E, \mathbb{P}(X = x) = 0$ .

C'est, par exemple, la loi suivie par une variable aléatoire représentant le lancer d'un dé non truqué avec  $E = \llbracket 1, 6 \rrbracket$ .

**Exemple 10** (Loi de Bernoulli).  $X$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p \in [0, 1]$ , notée  $\mathcal{B}(p)$ , si  $\mathbb{P}(X = 1) = p$  et  $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$ . Dans ce cas,  $X$  est bien une loi discrète et on a

$$\mathbb{P}_X = (1 - p)\delta_0 + p\delta_1$$

**Exemple 11** (Loi binomiale).  $X$  suit une loi de binomiale de paramètres  $n \in \mathbb{N}$  et  $p \in [0, 1]$ , notée  $\mathcal{B}(n, p)$ , si  $X$  est la somme de  $n$  variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois de Bernoulli de paramètre  $p$ . Dans ce cas,  $X$  est bien une loi discrète et on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

*Remarque 12.* Il s'agit du nombre de succès pour  $n$  tentatives.

C'est, par exemple, la loi suivie par une variable aléatoire représentant le nombre de "Pile" obtenus lors d'un lancer de pièce équilibrée.

**Exemple 13** (Loi géométrique).  $X$  suit une loi géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1]$ , notée  $\mathcal{G}(p)$ , si l'on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$$

*Remarque 14.* Il s'agit d'une succession de  $k - 1$  échecs consécutifs suivie d'un succès.

C'est, par exemple, la loi suivie par une variable aléatoire représentant le nombre de lancers effectués avant d'obtenir "Pile" lors d'un lancer de pièce équilibrée.

**Exemple 15** (Loi de Poisson).  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ , notée  $\mathcal{P}(\lambda)$ , si l'on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

*Remarque 16.* Cette loi est une bonne modélisation pour le nombre de fois où un événement rare survient (par exemple, un tremblement de terre).

p. 298

## II - Propriétés spécifiques aux variables aléatoires discrètes

### 1. Indépendance

**Définition 17.** On dit que des variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$ , sont **indépendantes** si

$$\mathbb{P}_{(X_1, \dots, X_n)} = \bigotimes_{i=1}^n \mathbb{P}_{X_i}$$

p. 128

**Exemple 18.** Si  $X_1$  et  $X_2$  sont des variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs  $\lambda$  et  $\mu$ , alors  $X_1 + X_2$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda + \mu$ .

p. 238

**Contre-exemple 19.** Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires indépendantes telles que

$$\forall i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket, \mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$$

On pose  $X_3 = X_1 X_2$ . Alors,  $X_2$  et  $X_3$  sont indépendantes,  $X_1$  et  $X_3$  aussi, mais  $X_1, X_2$  et  $X_3$  ne le sont pas.

**Proposition 20.** Des variables aléatoires discrètes  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes si et seulement si

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall x_j \in X_j(\Omega), \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \prod_{j=1}^n \mathbb{P}(X = x_j)$$

[GOU21]  
p. 337

**Proposition 21.** Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires discrètes définies sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ,  $f : X_1(\Omega) \times \dots \times X_m(\Omega) \rightarrow F$  et  $g : X_{m+1}(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega) \rightarrow F'$  deux fonctions. Si  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes, alors il en est de même de  $f(X_1, \dots, X_m)$  et  $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ .

## 2. Espérance

**Définition 22.** — On note  $\mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  (ou simplement  $\mathcal{L}_1(\Omega)$  voire  $\mathcal{L}_1$  s'il n'y a pas d'ambiguïté) l'espace des variables aléatoires intégrables sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

— Si  $X \in \mathcal{L}_1$ , on peut définir son **espérance**

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

[G-K]  
p. 159

**Théorème 23** (Transfert). Si  $X$  est une variable aléatoire dont la loi  $\mathbb{P}_X$  admet une densité  $f$  par rapport à  $\mathbb{P}$  et si  $g$  est une fonction mesurable, alors

$$g(X) \in \mathcal{L}_1 \iff \int_{\mathbb{R}} |g(x)| f(x) d\mathbb{P}(x) < +\infty$$

et dans ce cas,

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x) d\mathbb{P}(x)$$

p. 164

**Corollaire 24.** Soit  $g$  une fonction mesurable. Si  $X$  est une variable aléatoire discrète telle que  $X(\Omega) = D$ , alors

$$g(X) \in \mathcal{L}_1 \iff \sum_{i \in D} |g(i)| \mathbb{P}(X = i) < +\infty$$

et dans ce cas,

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{i \in D} g(i) \mathbb{P}(X = i)$$

*Remarque 25.* En reprenant les notations précédentes, et avec  $g : x \mapsto x$ , on a

$$X \in \mathcal{L}_1 \iff \sum_{i \in D} |i| \mathbb{P}(X = i) < +\infty$$

et dans ce cas,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i \in D} i \mathbb{P}(X = i)$$

**Exemple 26.** —  $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$ .

—  $X \sim \mathcal{B}(n, p) \implies \mathbb{E}(X) = np$ .

—  $X \sim \mathcal{G}(p) \implies \mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$ .

—  $X \sim \mathcal{P}(\lambda) \implies \mathbb{E}(X) = \lambda$ .

p. 187

**Proposition 27.** Si  $X$  est à valeurs dans  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ , alors  $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$ .

p. 171

### 3. Fonctions génératrices

On suppose dans cette sous-section que  $X$  est à valeurs dans  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ .

**Définition 28.** On appelle **fonction génératrice** de  $X$  la fonction

$$G_X: \begin{array}{ll} [-1, 1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ z & \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) z^k \end{array}$$

p. 235

**Exemple 29.** —  $X \sim \mathcal{B}(p) \implies \forall s \in [-1, 1], G_X(s) = (1 - p) + ps$ .

—  $X \sim \mathcal{B}(n, p) \implies \forall s \in [-1, 1], G_X(s) = ((1 - p) + ps)^n$ .

—  $X \sim \mathcal{G}(p) \implies \forall s \in [-1, 1], G_X(s) = \frac{ps}{1 - (1-p)s}$ .

—  $X \sim \mathcal{P}(\lambda) \implies \forall s \in [-1, 1], G_X(s) = e^{-\lambda(1-s)}$ .

**Théorème 30.** Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires indépendantes et  $\mathcal{L}_1$ . Alors,

$$\mathbb{E}(X_1 X_2) = \mathbb{E}(X_1) \mathbb{E}(X_2)$$

**Corollaire 31.** Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . Alors,

$$G_{X_1 X_2} = G_{X_1} + G_{X_2}$$

**Théorème 32.** Sur  $[0, 1]$ , la fonction  $G_X$  est infiniment dérivable et ses dérivées sont toutes positives, avec

$$G_X^{(n)}(s) = \mathbb{E}(X(X-1) \dots (X-n+1) s^{X-n})$$

En particulier,

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$$

ce qui montre que la fonction génératrice caractérise la loi.

**Exemple 33.** Si  $X_1 \sim \mathcal{B}(n, p)$  et  $X_2 \sim \mathcal{B}(m, p)$  sont indépendantes, alors  $X_1 + X_2 \sim \mathcal{B}(n + m, p)$ .

[GOU21]  
p. 346

**Théorème 34.**  $X \in \mathcal{L}_1$  si et seulement si  $G_X$  admet une dérivée à gauche en 1. Dans ce cas,  $G'_X(1) = \mathbb{E}(X)$ .

[G-K]  
p. 238

### III - Application en analyse réelle

**Définition 35.** On dit que  $X$  **admet un moment d'ordre 2** si elle est de carré intégrable, ie.  $X^2 \in \mathcal{L}_1$ . On note  $\mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  (ou simplement  $\mathcal{L}_1(\Omega)$  voire  $\mathcal{L}_1$  s'il n'y a pas d'ambiguïté) l'espace des variables aléatoires de carré intégrable.

p. 171

**Proposition 36.**

$$X_1, X_2 \in \mathcal{L}_2 \implies X_1 X_2 \in \mathcal{L}_1$$

En particulier,  $X_1 \in \mathcal{L}_2 \implies X_1 \in \mathcal{L}_1$ .

**Définition 37.** Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux variables aléatoires admettant chacune un moment d'ordre 2.

— On appelle **covariance** du couple  $(X_1, X_2)$  le réel

$$\text{Covar}(X_1, X_2) = \mathbb{E}((X_1 - \mathbb{E}(X_1))(X_2 - \mathbb{E}(X_2)))$$

— On appelle **variance** de  $X_1$  le réel positif

$$\text{Var}(X_1) = \text{Covar}(X_1, X_1) = \mathbb{E}(X_1 - \mathbb{E}(X_1))^2 = \mathbb{E}(X_1^2) - (\mathbb{E}(X_1))^2$$

**Proposition 38.** Si  $X$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , alors  $X \in \mathcal{L}_2$  si et seulement si  $G_X \in \mathcal{C}^2([0, 1])$ , et dans ce cas,

$$\text{Var}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$$

[GOU21]  
p. 346

**Exemple 39.** —  $\text{Var}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$ .

—  $X \sim \mathcal{B}(n, p) \implies \text{Var}(X) = np(1 - p)$ .

—  $X \sim \mathcal{G}(p) \implies \text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$ .

—  $X \sim \mathcal{P}(\lambda) \implies \text{Var}(X) = \lambda$ .

[G-K]  
p. 186

**Proposition 40** (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev). On suppose  $X \in \mathcal{L}_2$ . Alors,

$$\forall a > 0, \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\text{Var}(X)}{a^2}$$

p. 177

[DEV]

**Théorème 41** (Bernstein). Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue. On note

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, B_n(f) : x \mapsto \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

le  $n$ -ième polynôme de Bernstein associé à  $f$ . Alors la suite de fonctions  $(B_n(f))$  converge uniformément vers  $f$ .

p. 195

**Théorème 42** (Weierstrass). Toute fonction continue  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  (avec  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a \leq b$ ) est limite uniforme de fonctions polynômiales sur  $[a, b]$ .

## IV - Théorèmes limites et d'approximations

### 1. Théorèmes limites

**Théorème 43** (Lévy). Soient  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires réelles et  $X$  une variable aléatoire réelle. Alors :

$$X_n \xrightarrow{(d)} X \iff \phi_{X_n} \text{ converge simplement vers } \phi_X$$

où  $\phi_Y$  désigne la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle  $Y$ .

[Z-Q]  
p. 544

**Théorème 44** (Central limite). Soit  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi admettant un moment d'ordre 2. On note  $m$  l'espérance et  $\sigma^2$  la variance commune à ces variables. On pose  $S_n = X_1 + \dots + X_n - nm$ . Alors,

$$\left( \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right) \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

[G-K]  
p. 307

[DEV]

**Application 45** (Théorème des événements rares de Poisson). Soit  $(N_n)_{n \geq 1}$  une suite d'entiers tendant vers l'infini. On suppose que pour tout  $n$ ,  $A_{n,N_1}, \dots, A_{n,N_n}$  sont des événements indépendants avec  $\mathbb{P}(A_{n,N_k}) = p_{n,k}$ . On suppose également que :

$$(i) \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lambda > 0 \text{ où } \forall n \in \mathbb{N}, s_n = \sum_{k=1}^{N_n} p_{n,k}.$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k \in \llbracket 1, N_n \rrbracket} p_{n,k} = 0.$$

Alors, la suite de variables aléatoires  $(S_n)$  définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_{n,k}}$$

p. 390

converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .

**Théorème 46** (Loi faible des grands nombres). Soit  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes de même loi et  $\mathcal{L}_1$ . On pose  $M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ . Alors,

$$M_n \xrightarrow{(p)} \mathbb{E}(X_1)$$

p. 270

**Théorème 47** (Loi forte des grands nombres). Soit  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi. On pose  $M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ . Alors,

$$X_1 \in \mathcal{L}_1 \iff M_n \xrightarrow{(ps.)} \ell \in \mathbb{R}$$

[Z-Q]  
p. 532

Dans ce cas, on a  $\ell = \mathbb{E}(X_1)$ .

## 2. Approximation d'une loi normale

**Théorème 48** (Moivre-Laplace). Soit  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi  $\mathcal{B}(p)$ . Alors,

[G-K]  
p. 308

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k - np}{\sqrt{n}} \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0, p(1-p))$$

## 3. Approximation d'une loi de Poisson

**Théorème 49.** Soit, pour  $n \geq 1$ , une variable aléatoire  $X_n$  suivant la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p_n$ . On suppose que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda > 0$ . Alors,

p. 297

$$X_n \xrightarrow{(d)} \mathcal{P}(\lambda)$$

*Remarque 50.* En pratique, pour  $n \geq 30$  et  $np \leq 10$ , on a une “bonne” approximation de  $\mathcal{P}(\lambda)$ .

**Exemple 51.** Si chaque seconde, il y a une probabilité  $p = \frac{1}{600}$  qu'un client entre dans un magasin, le nombre de clients qui entrent sur un intervalle d'une heure suit approximativement une loi de Poisson de paramètre  $\lambda = 3600p = 6$ .

[GOU21]  
p. 343

Pour cette raison, on appelle parfois cette loi la *loi des événements rares*.

[G-K]  
p. 297



**Application 52** (Nombre de dérangements). Soit  $\sigma_n$  une permutation aléatoire suivant la loi uniforme sur  $S_n$ . Si on note  $D_n$  le nombre de points fixes de  $\sigma_n$ , on a

$$\mathbb{P}(D_n = k) = \frac{1}{k!} \frac{d_{n-k}}{(n-k)!}$$

où  $d_n$  est le nombre de permutations de  $S_n$  sans point fixe. En particulier, comme  $d_n \sim \frac{1}{e} n!$ , on a

$$D_n \xrightarrow{(d)} \mathcal{P}(1)$$

# Bibliographie

## **De l'intégration aux probabilités**

**[G-K]**

Olivier GARET et Aline KURTZMANN. *De l'intégration aux probabilités*. 2<sup>e</sup> éd. Ellipses, 28 mai 2019.  
<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/4593-14919-de-l-integration-aux-probabilites-2e-edition-augmentee-9782340030206.html>.

## **Les maths en tête**

**[GOU21]**

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités*. 3<sup>e</sup> éd. Ellipses, 13 juill. 2021.  
<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html>.

## **Analyse pour l'agrégation**

**[Z-Q]**

Claude ZUILY et Hervé QUEFFÉLEC. *Analyse pour l'agrégation. Agrégation/Master Mathématiques*. 5<sup>e</sup> éd. Dunod, 26 août 2020.  
<https://www.dunod.com/prepas-concours/analyse-pour-agregation-agregationmaster-mathematiques>.