Dual de L_p

Avec les propriétés hilbertiennes de L_2 couplées à certaines propriétés des espaces L_p, on montre que le dual d'un espace L_p est L_q pour $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, dans le cas où $p \in]1,2[$ et où l'espace est de mesure finie.

Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré de mesure finie.

Notation 1. On note $\forall p \in]1,2[$, $L_p = L_p(X, \mathscr{A}, \mu)$.

Lemme 2. Soient $p \in]1,2[$ et $f \in L_2$. Alors $f \in L_p$ telle que $\|f\|_p \leq M \|f\|_2$ où $M \geq 0$.

Démonstration. Comme $p \in]1,2[$, on a $\frac{2}{p} > 1$. Soit r tel que $\frac{p}{2}+\frac{1}{r}=1$. On applique l'inégalité de Hölder à $g = |f|^p \mathbb{1}_X$ de sorte que

$$\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu = \| |f|^p \mathbb{1}_X \|_1 \leq \| |f|^p \|_{\frac{2}{p}} \|\mathbb{1}_X\|_r \leq \mu(X)^{\frac{1}{r}} \|f\|_2^p$$

d'où le résultat. □

Lemme 3. Soit $p \in]1,2[$. Alors L_2 est dense dans L_p pour la norme $\|.\|_p$.

Démonstration. Soit $f \in L_p$. On considère la suite de fonction (f_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \, f_n = f \mathbb{1}_{|f| \leq n}$$

Clairement, (f_n) est une suite de L_2. On va chercher à appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions (g_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $g_n = |f_n - f|^p$:

- $\forall n \in \mathbb{N}$, g_n est mesurable.
- (g_n) converge presque partout vers la fonction nulle.
- Par convexité de la fonction $x \mapsto x^p$, on a

$$|f_n - f|^p = 2^p \left| \frac{f_n}{2} - \frac{f}{2} \right|^p \leq 2^{p-1}(|f|^p + |f_n|^p) \leq 2^p |f|^p \in L_1$$

On peut donc conclure

$$\|f - f_n\|_p^p = \int_X |f - f_n|^p \, \mathrm{d}\mu \longrightarrow 0$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Théorème 4. L'application [Z-Q] p. 222

$$\varphi : \begin{array}{ll} L_q & \to (L_p)' \\ g & \mapsto \left(\varphi_g : f \mapsto \int_X f \overline{g} \, \mathrm{d}\mu\right) \end{array} \qquad \text{où } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

est une isométrie linéaire surjective. C'est donc un isomorphisme isométrique.

Démonstration. Soient $g \in L_q$ et $f \in L_p$. L'inégalité de Hölder donne

$$|\varphi_g(f)| \leq \|g\|_q \|f\|_p$$

donc $\varphi_g \in (L_p)'$ et $|||\varphi_g||| \leq \|g\|_q$. De plus, si $g = 0$, alors $|||\varphi_g||| = \|g\|_q = 0$. On peut donc supposer $g \neq 0$.

Soit u une fonction mesurable de module 1, telle que $g = u|g|$. On pose $h = \overline{u}|g|^{q-1}$. Comme $q = p(q-1)$, on a

$$\int_X |h|^p \, \mathrm{d}\mu = \int_X |g|^{(q-1)p} \, \mathrm{d}\mu = \int_X |g|^q \, \mathrm{d}\mu < +\infty$$

d'où $h \in L_p$ et $\|h\|_p^p = \|g\|_q^q = |\varphi_g(h)|$. Comme, $\frac{|\varphi_g(h)|}{\|h\|_p} \leq |||\varphi_g|||$, on a en particulier,

$$\underbrace{\int_X |g|^q \, \mathrm{d}\mu}_{=|\varphi_g(h)|} \leq |||\varphi_g||| \underbrace{\left(\int_X |g|^q \, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}}_{=\|h\|_p}$$

et ainsi,

$$|||\varphi_g||| \geq \left(\int_X |g|^q \, \mathrm{d}\mu\right)^{1-\frac{1}{p}} = \left(\int_X |g|^q \, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \|g\|_q$$

donc $|||\varphi_g||| = \|g\|_q$ et φ est une isométrie.

Montrons qu'elle est surjective. Soit $\ell \in (L_p)'$. D'après le Lemme 2, on a $L_2 \subseteq L_p$, donc on peut considérer la restriction $\widetilde{\ell} = \ell_{|L_2}$.

$$\forall f \in L_2, \quad |\widetilde{\ell}(f)| \leq |||\ell||| \|f\|_p \leq M \|\ell\| \|f\|_2 \implies \widetilde{\ell} \in (L_2)'$$

Comme L_2 est un espace de Hilbert, on peut appliquer le théorème de représentation de Riesz à $\widetilde{\ell}$. Il existe $g \in L_2$ telle que

$$\forall f \in L_2, \quad \widetilde{\ell}(f) = \int_X f\overline{g} \, \mathrm{d}\mu$$

Pour conclure, il reste à montrer que $g \in L_q$ et que l'égalité précédente est vérifiée sur L_p. Comme précédemment, on considère u de module 1 telle que $g = u|g|$ et on pose $f_n = \overline{u}|g|^{q-1}\mathbb{1}_{|g|\leq n} \in L_\infty \subseteq L_2$. On a

$$\int_X |g|^q \mathbb{1}_{|g|\leq n} \, \mathrm{d}\mu = |\ell(f_n)| \leq \|\ell\| \|f_n\|_p = \|\ell\| \left(\int_X |g|^q \mathbb{1}_{|g|\leq n} \, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

D'où

$$\left(\int_X |g|^q \mathbb{1}_{|g|\leq n} \, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_X |g|^q \mathbb{1}_{|g|\leq n} \, \mathrm{d}\mu\right)^{1-\frac{1}{p}} \leq |||\ell|||$$

D'après le théorème de convergence monotone, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_X |g|^q \mathbb{1}_{|g|\leq n} \, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_X |g|^q \, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} \leq |||\ell|||$$

Et en particulier, $g \in L_q$ de norme inférieure ou égale à $|||\ell|||$. Ainsi, on a $\forall f \in L_2$, $\ell(f) = \varphi_g(f)$. Les applications ℓ et φ_g sont continues sur L_p et L_2 est dense dans L_p (par le Lemme 3), donc on a bien $\ell = \varphi_g = \varphi(g)$. $\square$

Remarque 5. Plus généralement, si l'on identifie g et φ_g :

— L_q est le dual topologique de L_p pour $p \in]1, +\infty[$.

— L_∞ est le dual topologique de L_1 si μ est σ-finie.

[LI] p. 140

Bibliographie

Cours d'analyse fonctionnelle **[LI]**

Daniel LI. *Cours d'analyse fonctionnelle. avec 200 exercices corrigés.* Ellipses, 3 déc. 2013. https://www.editions-ellipses.fr/accueil/6558-cours-danalyse-fonctionnelle-avec-200-exercices-corriges-9782729883058.html.

Analyse pour l'agrégation **[Z-Q]**

Claude ZUILY et Hervé QUEFFÉLEC. *Analyse pour l'agrégation. Agrégation/Master Mathématiques.* 5e éd. Dunod, 26 août 2020. https://www.dunod.com/prepas-concours/analyse-pour-agregation-agregationmaster-mathematiques.