Densité des polynômes orthogonaux

On montre que la famille des polynômes orthogonaux associée à une fonction poids ρ vérifiant certaines hypothèses forme une base hilbertienne de $L_2(I, \rho)$ (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$).

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids. On considère (P_n) la famille des polynômes orthogonaux associée à ρ sur I. **[BMP]** p. 140

Lemme 1. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $g_n : x \mapsto x^n \in L_1(I, \rho)$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $g_n \in L_2(I, \rho)$. En particulier, l'algorithme de Gram-Schmidt a bien du sens et (P_n) est bien définie.

Démonstration. On a $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\int_I |x^n|^2 \rho(x)\, \mathrm{d}x = \int_I |x^{2n}| \rho(x)\, \mathrm{d}x = \|g_{2n}\|_1 < +\infty$$

□

Théorème 2. On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que

$$\int_I e^{a|x|} \rho(x)\, \mathrm{d}x < +\infty$$

alors (P_n) est une base hilbertienne de $L_2(I, \rho)$ pour la norme $\|.\|_2$.

Démonstration. Soit $f \in \mathrm{Vect}(g_n)^\perp = \mathrm{Vect}(P_n)^\perp$. On définit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \begin{cases} f(x)\rho(x) & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrons que $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$. Remarquons tout d'abord que $\forall t \geq 0$, $t \leq \frac{1+t^2}{2}$. Ainsi, on a

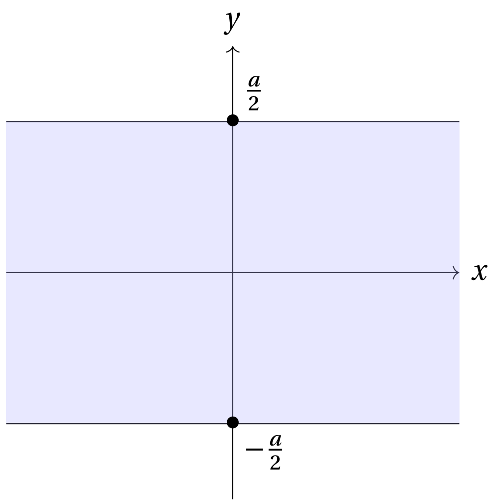
$$\forall x \in I, \quad |f(x)|\rho(x) \leq \frac{1 + |f(x)|^2}{2} \rho(x)$$

Comme ρ et ρf^2 sont intégrables sur I, on en déduit que $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$. On peut donc considérer sa transformée de Fourier

$$\widehat{\varphi} : \xi \mapsto \int_I f(x) e^{-i\xi x} \rho(x)\, \mathrm{d}x$$

Montrons que $\widehat{\varphi}$ se prolonge en une fonction F holomorphe sur

$$B_a = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}(z)| < \frac{a}{2} \right\}$$



Définissons à présent $g : (z,x) \mapsto e^{-izx} f(x)\rho(x)$. Pour $z \in B_a$, on a

$$\int_I |g(z,x)| \, \mathrm{d}x \leq \int_I e^{\frac{a|x|}{2}} |f(x)|\rho(x) \, \mathrm{d}x$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour $\|.\|_2$, on obtient de plus

$$\int_I e^{\frac{a|x|}{2}} |f(x)|\rho(x) \, \mathrm{d}x \leq \left(\int_I e^{a|x|} \rho(x) \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I |f(x)|^2 \rho(x) \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty \tag{$*$}$$

On définit la fonction F par

$$\forall z \in B_a, \quad F(z) = \int_I e^{-izx} f(x)\rho(x) \, \mathrm{d}x = \int_I g(z,x) \, \mathrm{d}x$$

L'inégalité $(*)$ montre que cette fonction est bien définie. De plus :

— $\forall z \in B_a$, $x \mapsto g(z,x)$ est mesurable.

— pp. en $x \in I$, $z \mapsto g(z,x)$ est holomorphe.

— $\forall z \in B_a$, $\forall x \in I$,

$$|g(z,x)| \leq h(x) = e^{\frac{a|x|}{2}} |f(x)|\rho(x)$$

et l'inégalité $(*)$ montre que $h \in L_1(I)$.

Donc par le théorème d'holomorphie sous l'intégrale, la fonction F est holomorphe sur B_a, et coïncide sur $\mathbb{R}$ avec $\widehat{\varphi}$. Ce théorème nous dit de plus que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in B_a, F^{(n)}(z) = (-i)^n \int_I x^n e^{-izx} f(x)\rho(x) \, \mathrm{d}x$$

Ce qui donne, une fois évalué en 0 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, F^{(n)}(0) = (-i)^n \int_I x^n f(x)\rho(x) \, \mathrm{d}x = (-i)^n \langle g_n, f \rangle = 0$$

L'unicité du développement en série entière d'une fonction holomorphe montre que $F = 0$ sur un voisinage de 0. Le théorème du prolongement analytique implique alors que $F = 0$ sur le connexe B_a tout entier, et donc en particulier, sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $\widehat{\varphi} = 0$. Comme φ est une fonction intégrable, l'injectivité de la transformée de Fourier implique que $\varphi = 0$. Comme $\rho(x) > 0$, on en déduit que $f(x) = 0$ pp. en $x \in I$. On vient donc de montrer qu'une fonction orthogonale à tous les polynômes est nulle i.e. $\mathrm{Vect}(g_n)^\perp = \{0\}$. En ajoutant le Lemme 1 à ceci, on a bien que les polynômes orthogonaux forment une base hilbertienne de $L_2(I, \rho)$. □

Contre-exemple 3. On considère, sur $I = \mathbb{R}_*^+$, la fonction poids $\rho : x \mapsto x^{-\ln(x)}$. On pose $\forall x \in I, f(x) = \sin(2\pi \ln(x))$. On calcule

$$\begin{aligned}
\langle f, g_n \rangle &= \int_I x^n \sin(2\pi \ln(x)) x^{-\ln(x)} \,\mathrm{d}x \\
&\overset{y=\ln(x)}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{(n+1)y} \sin(2\pi y) e^{-y^2} \,\mathrm{d}y \\
&= e^{\frac{(n+1)^2}{4}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(y-\frac{n+1}{2}\right)^2} \sin(2\pi y) \,\mathrm{d}y \\
&= (-1)^{n+1} e^{\frac{(n+1)^2}{4}} \int_{\mathbb{R}} \sin(2\pi t) e^{-t^2} \,\mathrm{d}t, \text{ avec } t = y - \frac{n+1}{2} \\
&\overset{f \text{ impaire}}{=} 0
\end{aligned}$$

Ainsi, la famille des g_n n'est pas totale. La famille des polynômes orthogonaux associée à ce poids particulier n'est donc pas totale non plus : ce n'est pas une base hilbertienne.

Bibliographie

Objectif agrégation **[BMP]**

Vincent Beck, Jérome Malick et Gabriel Peyré. *Objectif agrégation.* 2e éd. H&K, 22 août 2005. https://objectifagregation.github.io.