

## 214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Illustrations en analyse et en géométrie.

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach et  $U \subseteq E$  un ouvert.

### I - Théorème d'inversion locale

#### 1. Difféomorphisme

Pour une fonction réelle  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , on sait que si  $f'(x) \neq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , alors  $f$  admet un inverse global  $f^{-1}$  qui vérifie

[GOU20]  
p. 341

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

L'objectif ici va être de généraliser ce résultat.

**Définition 1.** Soit  $f : U \rightarrow F$ . On dit que  $f$  est un **difféomorphisme** de classe  $\mathcal{C}^k$  de  $U$  sur  $V = f(U)$  si  $f$  et  $f^{-1}$  sont bijectives et de classe  $\mathcal{C}^k$  respectivement sur  $U$  et  $V$ .

[ROU]  
p. 54

**Proposition 2.** On se place dans le cas où  $E = \mathbb{R}^n$  et  $F = \mathbb{R}^p$ . Soit  $f : U \rightarrow F$  un difféomorphisme. Alors :

(i) Pour tout  $x \in U$ , en posant  $y = f(x)$ ,

$$d(f^{-1})_y \circ df_x = \text{id}$$

(ii)  $n = p$ .

**Exemple 3.**  $x \mapsto x^3$  est un homéomorphisme de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^1$ , mais n'est pas un difféomorphisme.

#### 2. Énoncé

**Théorème 4** (Inversion locale). Soit  $f : U \rightarrow F$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . On suppose qu'il existe  $a \in U$  tel que  $df_a$  est inversible.

[GOU20]  
p. 341

Alors, il existe  $V$  voisinage de  $a$  et  $W$  voisinage de  $f(a)$  tels que  $f|_V$  soit un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $V$  sur  $W$ .

**Remarque 5.** Si  $E = F = \mathbb{R}^n$ ,  $df_a$  est inversible si et seulement si le jacobien de  $f$  en  $a$ ,  $\det \text{Jac}(f)_a$ , est non nul.

**Corollaire 6.** Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . On suppose que pour tout  $a \in U$ ,  $df_a$  est inversible. Alors  $f$  est une application ouverte.

**Exemple 7.** L'application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par  $(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, xy)$  est un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^\infty$  en tout point de  $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ .

p. 347

**Application 8.** Soit  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^1$ . Alors,  $V = \varphi(U)$  est mesurable et toute fonction  $f$  appartient à  $L_1$  si et seulement si  $|\det \text{Jac}(\varphi)_a| f \circ \varphi$  appartient à  $L_1$ . Dans ce cas,

[BMP]  
p. 9

$$\int_V f(x) dx = \int_U |\det \text{Jac}(\varphi)_a| f(\varphi(y)) dy$$

**Exemple 9.** En passant en coordonnées polaires,

[GOU20]  
p. 355

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

**Application 10.** Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $k$  un entier. Alors, si  $A$  est suffisamment proche de l'identité  $I_n$ ,  $A$  est une racine  $k$ -ième (ie.  $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $B^k = A$ ).

[BMP]  
p. 9

### 3. Généralisation

**Théorème 11** (Inversion globale). Soit  $f : U \rightarrow F$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Alors,  $f$  est un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $U$  sur  $V = f(U)$  si et seulement si  $f$  est injective sur  $U$  et  $df_a$  est un isomorphisme pour tout  $a \in U$ .

p. 13

**Exemple 12.** L'application de l'Exemple 7 n'est pas un difféomorphisme global.

[GOU20]  
p. 347

**Remarque 13.** Il existe une version holomorphe de ce théorème :

Soient  $U$  un ouvert connexe de  $\mathbb{C}$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe sur  $U$ . On suppose  $f$  injective sur  $U$ . Alors,  $V = f(U)$  est un ouvert (connexe) de  $\mathbb{C}$  et  $f$  est un difféomorphisme holomorphe de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $U$  sur  $V$ .

[ROU]  
p. 191

Remarquons que seule l'injectivité de  $f$  suffit.

p. 231

**Théorème 14** (du rang constant). On se place dans le cas où  $E = \mathbb{R}^n$  et  $F = \mathbb{R}^p$ . Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . On suppose que le rang de  $df_x$  est constant égal à  $r \leq n$  pour tout  $x \in U$ . Soit  $a \in U$ . Alors, il existe  $V$  voisinage de  $a$ ,  $W$  voisinage de  $f(a)$  et deux difféomorphismes  $\phi : V \rightarrow V$  et  $\psi : W \rightarrow W$  tels que

$$\phi \circ f \circ \psi = \pi_r$$

où  $\pi_r$  désigne la projection de  $\mathbb{R}^n$  sur  $\mathbb{R}^r : \pi_r : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{r-1}, x_r, 0, \dots, 0)$ .

## II - Théorème des fonctions implicites

### 1. Énoncé

**Définition 15.** Soient  $E_1, \dots, E_n, F$  des espaces de Banach,  $\Omega \subseteq E$  un ouvert où  $E = E_1 \times \dots \times E_n$  et  $a = (a_1, \dots, a_n) \in E$ . Soit  $f : \Omega \rightarrow F$ . Alors, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $f_i : x \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$  est définie sur un voisinage de  $a_i$  dans  $E_i$ . Si elle est différentiable en  $a_i$ , on dit que  $f$  admet une **différentielle partielle** d'indice  $i$  en  $a$ , et on note celle-ci  $\partial_i f_a$ .

[GOU20]  
p. 344

*Remarque 16.* En reprenant les notations précédentes :

- Si pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $E_i = \mathbb{R}$  et  $F = E = \mathbb{R}^n$ , alors  $\partial_i f_a = h \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ .
- Si  $f$  est différentiable en  $a$ , alors pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\partial_i f_a$  existe et

$$\forall h = (h_1, \dots, h_n) \in E, df_a(h) = \sum_{i=1}^n \partial_i f_a(h_i)$$

**Théorème 17** (des fonctions implicites). Soient  $E, F, G$  trois espaces de Banach. Soient  $U \times V \subseteq E \times F$  où  $U$  et  $V$  sont des ouvertes. Soit  $f : U \times V \rightarrow G$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . On suppose qu'il existe  $(a, b) \in U \times V$  tel que  $f(a, b) = 0$  et  $\partial_2 f_{(a,b)} : F \rightarrow G$  est un isomorphisme. Alors, il existe :

- Un voisinage ouvert  $U_0$  de  $a$  dans  $U$ .
- Un voisinage ouvert  $W$  de  $f(a, b)$ .
- Un voisinage ouvert  $\Omega$  de  $(a, b)$  dans  $U \times V$ .
- Une fonction  $\varphi : U_0 \times W \rightarrow V$  de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Vérifiant :

$$\forall x \in U_0, \forall z \in W, \exists! y \in V \text{ tel que } f(x, y) = z \text{ avec } (x, y) \in \Omega \text{ et } y = \varphi(x, z)$$

En particulier,

$$\forall (x, z) \in U_0 \times W, f(x, \varphi(x, z)) = z$$

**Remarque 18.** Avec les notations précédentes, si  $E = F = \mathbb{R}$ , on peut choisir n'importe quelle variable pour obtenir

$$y = \varphi(x) \text{ si } \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0 \text{ ou } x = \varphi(y) \text{ si } \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \neq 0$$

[BMP]  
p. 11

**Remarque 19.** La signification de ce théorème est que la surface définie implicitement par l'équation  $f(x, y) = 0$  peut, au moins localement, être vue comme le graphe d'une fonction  $\varphi$ .

[ROU]  
p. 193

**Proposition 20.** Avec les notations précédentes, la différentielle de la fonction implicite  $\varphi$  est donnée par :

$$d\varphi_x = -(\partial_2 f_{(x, \varphi(x))})^{-1} \circ (\partial_1 f_{(x, \varphi(x))})$$

## 2. Exemples

**Exemple 21.** Pour l'équation  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ , on a  $\partial_2 f_{(x, y)} = 2y$ . On exclut les points où  $y = 0$ . En prenant  $(0, 1)$  et  $(0, -1)$  pour points de départ, on a deux fonctions implicites qui correspondent aux demi-cercles supérieur et inférieur :

$$— y = \varphi_1(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

$$— y = \varphi_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}.$$

De plus, en dérivant par rapport à  $x$  :  $2x + 2yy' = 0$  et,  $y' = \varphi_1'(x) = \frac{-x}{y}$ .

**Exemple 22** (Folium de Descartes). Soit  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + y^3 - 3xy = 0\}$ . En tout point  $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0), (2^{\frac{2}{3}}, 2^{\frac{1}{3}})\}$ ,  $C$  peut être vu comme le graphe d'une fonction  $\varphi$  telle que

$$\varphi'(a) = \frac{a^2 - b}{a - b^2}$$

p. 237

**Exemple 23.** Soit  $f : (x, y) \mapsto \sin(y) + xy^4 + x^2$ . Alors, il existe  $U, V$  deux voisinages ouverts de 0 dans  $\mathbb{R}$ ,  $y = \varphi(x) \in V$  est l'unique solution de  $f(x, y) = 0$ . De plus, on a un développement limité de  $\varphi$  :

$$\varphi(x) = -x^2 - \frac{x^6}{6} - x^9 - \frac{x^{10}}{40} + o(x^{11})$$

[GOU20]  
p. 348

### III - Applications

#### 1. Homéomorphismes

**Lemme 24.** Soit  $A_0 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  inversible. Alors il existe un voisinage  $V$  de  $A_0$  dans  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et une application  $\psi : V \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que

$$\forall A \in V, A = {}^t\psi(A)A_0\psi(A)$$

[ROU]  
p. 209

**Lemme 25 (Morse).** Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^3$  (où  $U$  désigne un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  contenant l'origine). On suppose :

- $df_0 = 0$ .
- La matrice symétrique  $\text{Hess}(f)_0$  est inversible.
- La signature de  $\text{Hess}(f)_0$  est  $(p, n - p)$ .

Alors il existe un difféomorphisme  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$  de classe  $\mathcal{C}^1$  entre deux voisinage de l'origine de  $\mathbb{R}^n$   $V \subseteq U$  et  $W$  tel que  $\phi(0) = 0$  et

$$\forall x \in U, f(x) - f(0) = \sum_{k=1}^p \phi_k^2(x) - \sum_{k=p+1}^n \phi_k^2(x)$$

p. 354

**Exemple 26.** On considère  $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2 + \frac{y^4}{4}$ . La courbe d'équation

$$f(x, y) = 0$$

est (au changement près du nom des coordonnées) une projection de l'intersection d'un cylindre et d'une sphère tangents. On a

$$f = u^2 - v^2$$

avec  $u : (x, y) \mapsto x$  et  $v : (x, y) \mapsto y\sqrt{1 - \frac{y^2}{4}}$ .

p. 334

**Application 27.** Soit  $S$  la surface d'équation  $z = f(x, y)$  où  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^3$  au voisinage de l'origine. On suppose la forme quadratique  $d^2f_0$  non dégénérée. Alors, en notant  $P$  le plan tangent à  $S$  en 0 :

- (i) Si  $d^2f_0$  est de signature  $(2, 0)$ , alors  $S$  est au-dessus de  $P$  au voisinage de 0.
- (ii) Si  $d^2f_0$  est de signature  $(0, 2)$ , alors  $S$  est en-dessous de  $P$  au voisinage de 0.
- (iii) Si  $d^2f_0$  est de signature  $(1, 1)$ , alors  $S$  traverse  $P$  selon une courbe admettant un point double en  $(0, f(0))$ .

p. 341

[BMP]  
p. 15

**Application 28.** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^3$  telle que  $df_0 = 0$  et  $d^2f_0$  est définie positive. Alors 0 est un minimum local (strict) de  $f$ .

## 2. Optimisation

**Théorème 29** (Extrema liés). Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et soient  $f, g_1, \dots, g_r : U \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ . On note  $\Gamma = \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$ . Si  $f|_\Gamma$  admet un extremum relatif en  $a \in \Gamma$  et si les formes linéaires  $d(g_1)_a, \dots, d(g_r)_a$  sont linéairement indépendantes, alors il existe des uniques  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  tels que

$$df_a = \lambda_1 d(g_1)_a + \dots + \lambda_r d(g_r)_a$$

[GOU20]  
p. 337

**Définition 30.** Les  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  du théorème précédent sont appelés **multiplicateurs de Lagrange**.

*Remarque 31.* La relation finale du Théorème 29 équivaut à

$$\bigcap_{i=1}^n \text{Ker}(d(g_i)_a) \subseteq \text{Ker}(df_a)$$

et elle exprime que  $df_a$  est nulle sur l'espace tangent à  $\Gamma$  en  $a$  (ie.  $\nabla f_a$  est orthogonal à l'espace tangent à  $\Gamma$  en  $a$ ).

[BMP]  
p. 21

**Contre-exemple 32.** On pose  $g : (x, y) \mapsto x^3 - y^2$  et on considère  $f : (x, y) \mapsto x + y^2$ . On cherche à minimiser  $f$  sous la contrainte  $g(x, y) = 0$ .

Alors, le minimum (global) de  $f$  sous cette contrainte est atteint en  $(0, 0)$ , la différentielle de  $g$  en  $(0, 0)$  est nulle et la relation finale du Théorème 29 n'est pas vraie.

**Application 33** (Théorème spectral). Tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien se diagonalise dans une base orthonormée.

**Application 34.**

$$\text{SO}_n(\mathbb{R}) = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \|M\|^2 = \inf_{P \in \text{SL}_n(\mathbb{R})} \|P\|^2 \right\}$$

où  $\|\cdot\| : M \mapsto \sqrt{\text{trace}({}^t M M)}$  (ie.  $\text{SO}_n(\mathbb{R})$  est l'ensemble des matrices de  $\text{SL}_n(\mathbb{R})$  qui minimisent la norme euclidienne canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ).

p. 35

[GOU20]  
p. 339

**Application 35** (Inégalité arithmético-géométrique).

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n, \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

**Application 36** (Inégalité d'Hadamard).

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \det(x_1, \dots, x_n) \leq \|x_1\| \dots \|x_n\|$$

avec égalité si et seulement si  $(x_1, \dots, x_n)$  est une base orthogonale de  $\mathbb{R}^n$ .

[ROU]  
p. 409

### 3. Régularité des racines d'un polynôme

**Proposition 37.** Soient  $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$  et  $x_0 \in \mathbb{R}$  une racine simple de  $P_0$ . Alors, il existe  $\varphi$  une application  $\mathcal{C}^\infty$  définie sur un voisinage  $U$  de  $P_0$  dans  $\mathbb{R}_n[X]$  à valeurs dans un voisinage  $V$  de  $x_0$  telle que

$$\forall P \in U, \forall x \in V, x = \varphi(P) \iff P(x) = 0$$

[BMP]  
p. 11

**Application 38.** Soit  $\mathcal{S}_{rs}$  l'ensemble des polynômes de  $\mathbb{R}_n[X]$  scindés à racines simples. Alors,  $\mathcal{S}_{rs}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

### 4. Surjectivité de l'exponentielle matricielle

**Lemme 39.** (i) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Alors  $\exp(A) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ .

(ii)  $\exp$  est différentiable en 0 et  $d\exp_0 = \mathrm{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$ .

(iii) Soit  $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ . Alors  $M^{-1} \in \mathbb{C}[M]$ .

[I-P]  
p. 396

**Théorème 40.**  $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  est surjective.

**Application 41.**  $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^2$ , où  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^2$  désigne les carrés de  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ .

[DEV]

## Annexes

[BMP]  
p. 10

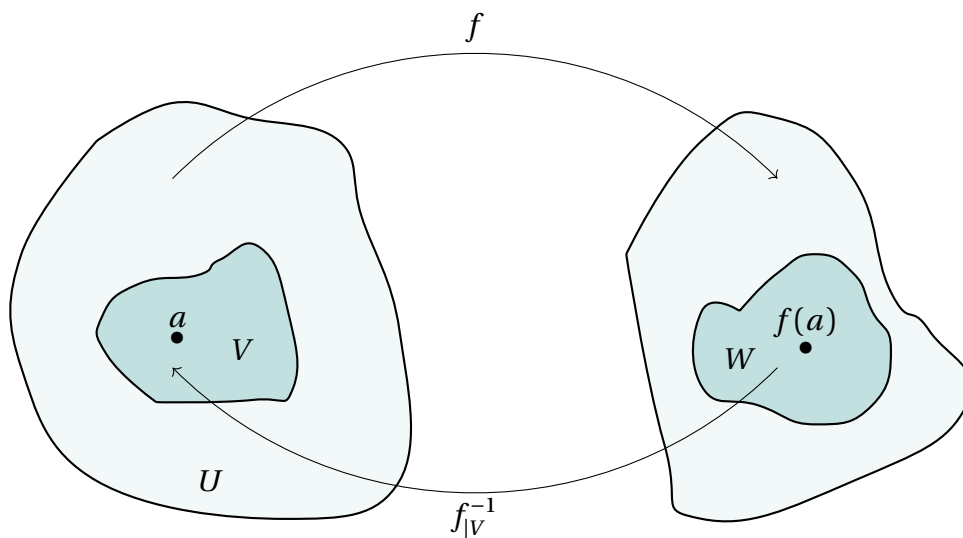


FIGURE 1 – Inversion locale.

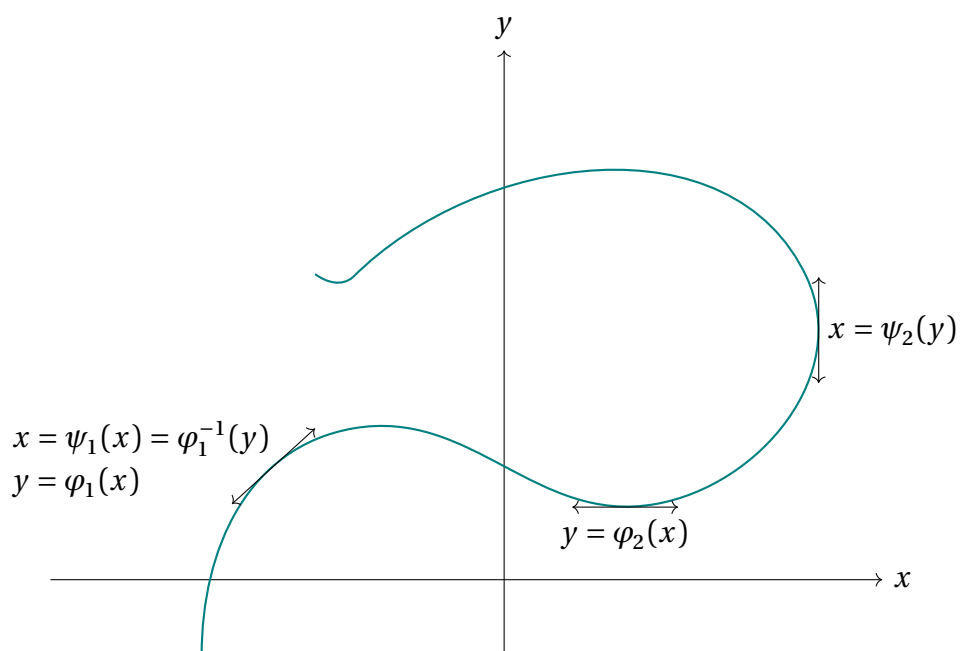


FIGURE 2 – Fonctions implicites.



# Bibliographie

## Objectif agrégation

[BMP]

Vincent BECK, Jérôme MALICK et Gabriel PEYRÉ. *Objectif agrégation*. 2<sup>e</sup> éd. H&K, 22 août 2005.

<https://objectifagregation.github.io>.

## Les maths en tête

[GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3<sup>e</sup> éd. Ellipses, 21 avr. 2020.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.

## L'oral à l'agrégation de mathématiques

[I-P]

Lucas ISENMANN et Timothée PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques. Une sélection de développements*. 2<sup>e</sup> éd. Ellipses, 26 mars 2024.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html>.

## Petit guide de calcul différentiel

[ROU]

François ROUVIÈRE. *Petit guide de calcul différentiel. à l'usage de la licence et de l'agrégation*. 4<sup>e</sup> éd. Cassini, 27 fév. 2015.

<https://store.cassini.fr/fr/enseignement-des-mathematiques/94-petit-guide-de-calcul-differentiel-4e-ed.html>.