

## 250 Transformation de Fourier. Applications.

### I - Transformation de Fourier dans $L_1(\mathbb{R}^d)$

#### 1. Définitions et premières propriétés

**Définition 1.** Soit  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction mesurable. On définit, lorsque cela a un sens, sa **transformée de Fourier**, notée  $\widehat{f}$  par

$$\widehat{f} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \rightarrow & \mathbb{C} \\ \xi & \mapsto & \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx \end{array}$$

[AMR08]  
p. 109

**Exemple 2** (Densité de Poisson). On pose  $\forall x \in \mathbb{R}, p(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$ . Alors  $p \in L_1(\mathbb{R})$  et,  $\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{p}(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2}$ .

**Exemple 3** (Transformée de Fourier d'une gaussienne). On définit  $\forall a \in \mathbb{R}_*^+$ ,

$$\gamma_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-ax^2} \end{array}$$

Alors,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{\gamma_a}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$$

p. 156

**Lemme 4** (Riemann-Lebesgue). Soit  $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ ,  $\widehat{f}$  existe et

$$\lim_{\|\xi\| \rightarrow +\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$$

p. 109

*Remarque 5.* La transformée de Fourier d'une fonction intégrable n'est pas forcément intégrable.

**Théorème 6.**  $\forall f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ ,  $\widehat{f}$  est continue, bornée par  $\|f\|_1$ . Donc la **transformation de Fourier**

$$\mathcal{F} : \begin{array}{ccc} L_1(\mathbb{R}^d) & \rightarrow & \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d) \\ f & \mapsto & \widehat{f} \end{array}$$

est bien définie.

**Corollaire 7.** La transformation de Fourier  $\mathcal{F} : L_1(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$  est une application linéaire continue.

**Proposition 8.** Soit  $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ . Alors :

- (i)  $\mathcal{F}(x \mapsto f(-x)) = \xi \mapsto \mathcal{F}(f)(-\xi)$ .
- (ii)  $\mathcal{F}(\bar{f}) = \xi \mapsto \overline{\mathcal{F}(f)(-\xi)}$ .
- (iii) Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}_*$ , et  $\xi \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\mathcal{F}(x \mapsto f(\lambda x)) = \frac{1}{|\lambda|^d} \mathcal{F}(f)\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$$

- (iv) Pour tout  $a \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\mathcal{F}(x \mapsto f(x - a)) = e^{-i\langle a, \xi \rangle} \mathcal{F}(f) \text{ et } \mathcal{F}(x \mapsto e^{-i\langle a, \xi \rangle} f(x)) = \xi \mapsto \mathcal{F}(f)(\xi - a)$$

**Proposition 9.** Soit  $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ .

- (i) On suppose  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$  et  $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_1(\mathbb{R}^d)$ . Alors,

$$\forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d, \quad \widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) = i\xi_j \widehat{f}(\xi)$$

- (ii) On suppose  $y_j f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ . Alors, la  $j$ -ième dérivée partielle de  $\widehat{f}$  existe, et,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_j}(\xi) = -i(\widehat{y_j f})(\xi)$$

p. 120

**Application 10.** On considère  $f : x \mapsto e^{-\alpha x^2}$  pour  $\alpha > 0$ . Alors,  $f$  vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{i\xi} f(\xi)$$

ce qui permet de retrouver l'Exemple 3.

[GOU20]  
p. 169

## 2. Convolution

[AMR08]  
p. 75

**Définition 11.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}$ . On dit que **la convolée** (ou **le produit de convolution**) de  $f$  et  $g$  en  $x \in \mathbb{R}$  **existe** si la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto f(x-t)g(t) \end{aligned}$$

est intégrable sur  $\mathbb{R}^d$  pour la mesure de Lebesgue. On pose alors :

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t) dt$$

**Exemple 12.** Soient  $a < b \in \mathbb{R}_*^+$ . Alors  $\mathbb{1}_{[-a,a]} * \mathbb{1}_{[-b,b]}$  existe pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et

$$(\mathbb{1}_{[-a,a]} * \mathbb{1}_{[-b,b]})(x) = \begin{cases} 2a & \text{si } 0 \leq |x| \leq b-a \\ b+a-|x| & \text{si } b-a \leq |x| \leq b+a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Proposition 13.** Dans  $L_1(\mathbb{R}^d)$ , dès qu'il a un sens, le produit de convolution de deux fonctions est commutatif, bilinéaire et associatif.

**Théorème 14** (Convolution dans  $L_1(\mathbb{R}^d)$ ). Soient  $f, g \in L_1(\mathbb{R}^d)$ . Alors :

- (i) pp. en  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $t \mapsto f(x-t)g(t)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^d$ .
- (ii)  $f * g$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^d$ .
- (iii)  $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ .
- (iv) L'espace vectoriel normé  $(L_1(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_1)$  muni de  $*$  est une algèbre de Banach commutative.

**Proposition 15.**

$$\forall f, g \in L_1(\mathbb{R}^d), \widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$$

ie.  $\mathcal{F} : (L_1(\mathbb{R}^d), +, *, \cdot) \rightarrow (\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d), +, \times, \cdot)$  est un morphisme d'algèbres.

p. 114

**Corollaire 16.** L'algèbre  $(L_1(\mathbb{R}^d), +, *, \cdot)$  n'a pas d'élément unité.

**Application 17.**

$$f * f = f \iff f = 0$$

**Théorème 18** (Formule de dualité).

$$\forall f, g \in L_1(\mathbb{R}^d), \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \widehat{g}(t) dt = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t) g(t) dt$$

### 3. Inversion

**Théorème 19** (Formule d'inversion de Fourier). Si  $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$  est telle que  $\widehat{f} \in L_1(\mathbb{R}^d)$ , alors

$$\widehat{\widehat{f}}(x) = (2\pi)^d f(x) \text{ pp. en } x \in \mathbb{R}^d$$

**Exemple 20.** Une solution de l'équation intégrale d'inconnue  $y$  :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{y(t)}{(x-t)^2 + a^2} dt = \frac{1}{x^2 + b^2}$$

est  $x \mapsto \frac{a(b-a)}{b\pi(x^2 + (b-a)^2)}$  pour  $0 < a < b$ .

**Corollaire 21.** La transformation de Fourier  $\mathcal{F} : L_1(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$  est une application injective.

**Proposition 22.** Soient  $g \in L_1(\mathbb{R}^d)$  et  $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$  telle que  $\widehat{f} \in L_1(\mathbb{R}^d)$ , alors

$$\widehat{fg} = \frac{1}{(2\pi)^d} \widehat{f} * \widehat{g}$$

## II - Transformation de Fourier dans d'autres espaces

### 1. Dans $L_2(\mathbb{R}^d)$

**Théorème 23** (Plancherel-Parseval).

$$\forall f \in L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_2(\mathbb{R}^d), \|\widehat{f}\|_2^2 = (2\pi)^d \|f\|_2^2$$

p. 122

*Remarque 24.* En termes de produit scalaire, la formule précédente s'écrit

$$\forall f, g \in L_2(\mathbb{R}^d), \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)} d\xi = (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{g(x)} dx$$

**Théorème 25.** Soit  $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$ . Alors :

- (i) Il existe une suite  $(f_n)$  de  $L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_2(\mathbb{R}^d)$  qui converge vers  $f$  dans  $L_2(\mathbb{R}^d)$ .
- (ii) Pour une telle suite  $(f_n)$ , la suite  $(\widehat{f_n})$  converge dans  $L_2(\mathbb{R}^d)$  vers une limite  $\tilde{f}$  indépendante de la suite choisie.

**Définition 26.** La limite  $\tilde{f}$  est la **transformée de Fourier** de  $f$  dans  $L_2(\mathbb{R}^d)$ .

**Proposition 27.** Les transformations de Fourier  $L_1(\mathbb{R}^d)$  et  $L_2(\mathbb{R}^d)$  coïncident sur  $L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_2(\mathbb{R}^d)$ .

*Remarque 28.* On a prolongé  $\mathcal{F}$  à  $L_2(\mathbb{R}^d)$ , mais il faut prendre garde au fait que  $\mathcal{F}$  désigne deux applications distinctes :  $\mathcal{F} : L_1(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$  et  $\mathcal{F} : L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$ , ces deux applications ne coïncidant que sur  $L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_2(\mathbb{R}^d)$ .

**Proposition 29.** Soit  $f \in L_2(\mathbb{R})$ . On a les relations suivantes :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \|\varphi_A - f\|_2 = 0 \text{ et } \lim_{A \rightarrow +\infty} \|\psi_A - f\|_2 = 0$$

où

$$\varphi_A(\xi) = \int_{-A}^A f(x) e^{-ix\xi} dx \text{ et } \psi_A(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \widehat{f}(\xi) e^{-ix\xi} d\xi$$

**Corollaire 30.** Lorsque  $f \in L_2(\mathbb{R})$  et  $\widehat{f} \in L_1(\mathbb{R})$ , on a

$$\text{pp. en } x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{-ix\xi} d\xi$$

**Théorème 31** (Formule d'inversion de Fourier-Plancherel). **L'opérateur de Fourier-Plancherel**

$$\mathcal{P} : \begin{array}{ccc} L_2(\mathbb{R}^d) & \rightarrow & L_2(\mathbb{R}^d) \\ f & \mapsto & \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d} \mathcal{F}(f) \end{array}$$

est un automorphisme d'inverse  $\mathcal{P}^{-1} = \overline{\mathcal{P}}$ .

**Exemple 32.** On pose  $f = \mathbb{1}_{[-a,a]}$  et on a  $\forall \xi \neq 0, \widehat{f}(\xi) = \frac{2\sin(a\xi)}{\xi}$ . Or,  $\widehat{f} \in L_2(\mathbb{R}) \setminus L_1(\mathbb{R})$ . On peut calculer sa transformée de Fourier dans  $L_2(\mathbb{R})$  :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \widehat{\widehat{f}}(x) = \widehat{(\widehat{f})}(x) = f(-x) = \mathbb{1}_{[-a,a]}(x)$$

## 2. Dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

**Définition 33.** Une fonction  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  est dite **à décroissance rapide** si

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} |x^\alpha f(x)| = 0$$

où  $(x_1, \dots, x_d)^{(\alpha_1, \dots, \alpha_d)} = x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}$ .

[AMR08]  
p. 133

**Exemple 34.**  $x \mapsto e^{-|x|}$  est à décroissance rapide sur  $\mathbb{R}$ .

**Définition 35.** On appelle **classe de Schwartz**, noté  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ , l'espaces des fonctions de  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  telles que :

- $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ .
- $f$  est à décroissance rapide ainsi que toutes ses dérivées.

**Proposition 36.**  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  est un espace vectoriel stable par dérivation, par multiplication par un polynôme, par produit, par conjugaison et par translation.

**Théorème 37.** (i)  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subseteq L_1(\mathbb{R}^d)$ .

(ii)  $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ .

**Théorème 38.**  $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  est un automorphisme bicontinu de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  dont l'inverse est donné par

$$\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{(2\pi)^d} \overline{F}$$

## III - Applications

### 1. Séries de fonctions

**Théorème 39** (Formule sommatoire de Poisson). Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$  et  $f'(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$  quand  $|x| \rightarrow +\infty$ . Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi n) e^{2i\pi n x}$$

[GOU20]  
p. 284

**Application 40** (Identité de Jacobi).

$$\forall s > 0, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{s}}$$

## 2. Bases hilbertiennes

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On pose  $\forall n \in \mathbb{N}, g_n : x \mapsto x^n$ .

[BMP]  
p. 110

**Définition 41.** On appelle **fonction poids** une fonction  $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable, positive et telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, \rho g_n \in L_1(I)$ .

Soit  $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction poids.

**Notation 42.** On note  $L_2(I, \rho)$  l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité  $\rho$  par rapport à la mesure de Lebesgue.

**Proposition 43.** Muni de

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : (f, g) \mapsto \int_I f(x) \overline{g(x)} \rho(x) dx$$

$L_2(I, \rho)$  est un espace de Hilbert.

**Théorème 44.** Il existe une unique famille  $(P_n)$  de polynômes unitaires orthogonaux deux-à-deux telle que  $\deg(P_n) = n$  pour tout entier  $n$ . C'est la famille de **polynômes orthogonaux** associée à  $\rho$  sur  $I$ .

**Exemple 45** (Polynômes de Hermite). Si  $\forall x \in I, \rho(x) = e^{-x^2}$ , alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \frac{\partial}{\partial x^n} (e^{-x^2})$$

**Lemme 46.** On suppose que  $\forall n \in \mathbb{N}, g_n \in L_1(I, \rho)$  et on considère  $(P_n)$  la famille des polynômes orthogonaux associée à  $\rho$  sur  $I$ . Alors  $\forall n \in \mathbb{N}, g_n \in L_2(I, \rho)$ . En particulier, l'algorithme de Gram-Schmidt a bien du sens et  $(P_n)$  est bien définie.

p. 140

[DEV]

**Application 47.** On considère  $(P_n)$  la famille des polynômes orthogonaux associée à  $\rho$  sur  $I$  et on suppose qu'il existe  $a > 0$  tel que

$$\int_I e^{a|x|} \rho(x) dx < +\infty$$

alors  $(P_n)$  est une base hilbertienne de  $L_2(I, \rho)$  pour la norme  $\|\cdot\|_2$ .

**Contre-exemple 48.** On considère, sur  $I = \mathbb{R}_*^+$ , la fonction poids  $\rho : x \mapsto x^{-\ln(x)}$ . Alors, la famille des  $g_n$  n'est pas totale. La famille des polynômes orthogonaux associée à ce poids particulier n'est donc pas totale non plus : ce n'est pas une base hilbertienne.

### 3. En probabilités

Soit  $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$  un vecteur aléatoire.

[G-K]  
p. 239

**Définition 49.** On appelle **fonction caractéristique** de  $X$ , notée  $\phi_X$ , la transformée de Fourier de la loi  $\mathbb{P}_X$  (définie à un signe près) :

$$\phi_X : t \mapsto \mathbb{E}(e^{i\langle t, x \rangle})$$

*Remarque 50.* Si  $X$  est un vecteur aléatoire réel admettant  $f$  pour densité, alors

p. 165

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \phi_X(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t, x \rangle} f(x) d\mathbb{P}(x)$$

**Théorème 51.** Soient  $X$  et  $Y$  deux vecteurs aléatoires réels. Alors,

p. 239

$$\phi_X = \phi_Y \iff \mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$$

**Exemple 52.** —  $X \sim \mathcal{U}([-1, 1]) \iff \forall t \in \mathbb{R}, \phi_X(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

—  $X \sim \mathcal{E}(\lambda) \iff \forall t \in \mathbb{R}, \phi_X(t) = \frac{\lambda}{1 - it}$ .

—  $X(\Omega) \subseteq \mathbb{N} \implies \forall t \in \mathbb{R}, \phi_X(t) = G_X(e^{it})$  où  $G_X$  est la fonction génératrice de  $X$ .

**Théorème 53.** Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ , alors dans pour une variable aléatoire réelle,

$$\mathbb{E}(|X|^N) < +\infty \implies \phi_X \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$$

**Corollaire 54.** On se place dans le cadre du théorème précédent. On a :

$$\forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket, \phi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}(X^k)$$



**Théorème 55.** Si  $X$  et  $Y$  sont deux vecteurs aléatoires réels indépendants :

(i)  $\phi_{X+Y} = \phi_X \phi_Y$ .

(ii)  $\forall s, t \in \mathbb{R}^d, \phi_{(X,Y)}(s, t) = \phi_X(s) \phi_Y(t)$ .

# Bibliographie

## **Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels**

**[AMR08]**

Mohammed EL-AMRANI. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels. Niveau M1*. Ellipses, 28 août 2008.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3908-14232-analyse-de-fourier-dans-les-espaces-fonctionnels-niveau-m1-9782729839031.html>.

## **Objectif agrégation**

**[BMP]**

Vincent BECK, Jérôme MALICK et Gabriel PEYRÉ. *Objectif agrégation*. 2<sup>e</sup> éd. H&K, 22 août 2005.

<https://objectifagregation.github.io>.

## **Leçons pour l'agrégation de mathématiques**

**[D-L]**

Maximilien DREVETON et Joachim LHABOUZ. *Leçons pour l'agrégation de mathématiques. Préparation à l'oral*. Ellipses, 28 mai 2019.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3543-13866-lecons-pour-lagregation-de-mathematiques-preparation-a-loral-9782340030183.html>.

## **De l'intégration aux probabilités**

**[G-K]**

Olivier GARET et Aline KURTZMANN. *De l'intégration aux probabilités*. 2<sup>e</sup> éd. Ellipses, 28 mai 2019.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/4593-14919-de-l-integration-aux-probabilites-2e-edition-augmentee-9782340030206.html>.

## **Les maths en tête**

**[GOU20]**

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3<sup>e</sup> éd. Ellipses, 21 avr. 2020.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.