

Formes de Hankel

Le but de ce développement est de construire une forme quadratique permettant de dénombrer les racines réelles distinctes d'un polynôme en fonction de ses racines complexes.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n .

[C-G]
p. 356

Théorème 1 (Formes de Hankel). On note x_1, \dots, x_t les racines complexes de P de multiplis-
cités respectives m_1, \dots, m_t . On pose

$$s_0 = n \text{ et } \forall k \geq 1, s_k = \sum_{i=1}^t m_i x_i^k$$

Alors :

- (i) $\sigma = \sum_{i,j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket} s_{i+j} X_i X_j$ définit une forme quadratique sur \mathbb{C}^n ainsi qu'une forme quadratique $\sigma_{\mathbb{R}}$ sur \mathbb{R}^n .
- (ii) Si on note (p, q) la signature de $\sigma_{\mathbb{R}}$, on a :
 - $t = p + q$.
 - Le nombre de racines réelles distinctes de P est $p - q$.

Démonstration. σ est un polynôme homogène de degré 2 sur \mathbb{C} (car la somme des exposants est 2 pour chacun des monômes), qui définit donc une forme quadratique sur \mathbb{C}^n . De plus, on peut écrire :

$$\forall k \geq 1, s_k = \sum_{\substack{x_i \text{ racine de } P \\ x_i \in \mathbb{R}}} m_i x_i^k + \sum_{\substack{x \text{ racine de } P \\ x_i \in \mathbb{C}}} m_i (x^i + \bar{x}^k)$$

donc $s_k = \overline{s_k}$ ie. $s_k \in \mathbb{R}$. Donc σ définit une forme quadratique $\sigma_{\mathbb{R}}$ sur \mathbb{R}^n . D'où le premier point.

Soit φ_k la forme linéaire sur \mathbb{C}^n définie par le polynôme homogène de degré 1

$$P_k(X_0, \dots, X_{n-1}) = X_0 + x_k X_1 + \dots + x_k^{n-1} X_{n-1}$$

pour $k \in \llbracket 0, t \rrbracket$. Dans la base duale $(e_i^*)_{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ de la base canonique $(e_i)_{i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ de \mathbb{C}^n , on a

$$\varphi_k = e_0^* + x_k e_1^* + \dots + x_k^{n-1} e_{n-1}^*$$

Et comme

$$\det((\varphi_k)_{k \in \llbracket 0, t \rrbracket}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_t \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \dots & x_t^{n-1} \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Vandermonde} \\ \neq 0 \end{matrix}$$

la famille $(\varphi_k)_{k \in \llbracket 0, t \rrbracket}$ est de rang t sur \mathbb{C} . Or, le coefficient de $X_i X_j$ dans $\sum_{k=1}^t m_k P_k^2$ vaut

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^t m_k x_k^{2i} = s_{i+j} & \text{si } i = j \\ \sum_{k=1}^t 2m_k x_k^i x_k^j = \sum_{k=1}^t 2m_k x_k^{i+j} = 2s_{i+j} & \text{sinon} \end{cases}$$

donc, $\sigma = \sum_{k=1}^t m_k \varphi_k^2$. En particulier, $\text{rang}(\sigma) = t$ par indépendance des φ_k . On en déduit,

$$p + q = \text{rang}(\sigma_{\mathbb{R}}) = \text{rang}(\sigma) = t$$

(le rang est invariant par extension de corps).

Soit $k \in \llbracket 0, t \rrbracket$. Calculons la signature de la forme quadratique $\varphi_k^2 + \overline{\varphi_k}^2$:

- Si $x_k \in \mathbb{R}$, on a $\varphi_k^2 + \overline{\varphi_k}^2 = 2\varphi_k^2$, qui est de signature $(1, 0)$ car $\varphi_k \neq 0$.
- Si $x_k \notin \mathbb{R}$, on a $\varphi_k^2 + \overline{\varphi_k}^2 = 2\text{Re}(\varphi_k)^2 - 2\text{Im}(\varphi_k)^2$ qui est bien une forme quadratique réelle. Et $x_k \neq \overline{x_k}$, donc la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_k & \overline{x_k} \\ \vdots & \vdots \\ x_k^{n-1} & \overline{x_k}^{n-1} \end{pmatrix}$$

est de rang 2 (cf. le mineur correspondant aux deux premières lignes). Donc φ_k et $\overline{\varphi_k}$ sont indépendantes. Ainsi, $\text{rang}(\varphi_k^2 + \overline{\varphi_k}^2) = 2$ sur \mathbb{C} , donc sur \mathbb{R} aussi (toujours par invariance du rang par extension de corps). Donc la signature de $\varphi_k^2 + \overline{\varphi_k}^2$ est $(1, 1)$.

Maintenant, regroupons les φ_k conjuguées entre elles lorsqu'elles ne sont pas réelles :

$$\sigma = \sum_{\substack{k=1 \\ x_k \in \mathbb{R}}}^t m_k \varphi_k^2 + \sum_{\substack{k=1 \\ x_k \notin \mathbb{R}}}^t m_k (\varphi_k^2 + \overline{\varphi_k}^2)$$

En passant à la signature, on obtient :

$$(p, q) = (r, 0) + \left(\frac{t-r}{2}, \frac{t-r}{2} \right) = \left(\frac{t+r}{2}, \frac{t-r}{2} \right)$$

où r désigne le nombre de racines réelles distinctes de P . Par unicité de la signature d'une forme quadratique réelle, on a bien $p - q = r$. D'où le point (ii). \square

Remarque 2. Tout l'intérêt de ces formes quadratiques est qu'on peut calculer les s_k par récurrence en utilisant les polynômes symétriques élémentaires, sans avoir besoin des racines.

Proposition 3 (Sommes de Newton). On pose $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. Les sommes de Newton vérifient les relations suivantes :

- (i) $s_0 = n$.
- (ii) $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, s_k = -k a_{n-k} \sum_{i=1}^{k-1} s_i a_{n-k+i}$.
- (iii) $\forall p \in \mathbb{N}, s_{p+n} = \sum_{i=1}^n s_i a_{p+n-i}$.

Bibliographie

Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries

[C-G]

Philippe CALDERO et Jérôme GERMONI. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome 1*. Calvage & Mounet, 13 mai 2017.

<http://www.calvage-et-mounet.fr/2022/05/09/nouvelles-histoires-hedoniste-de-groupes-et-de-geometrie/>.

Les maths en tête

[GOU21]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités*. 3^e éd. Ellipses, 13 juill. 2021.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html>.