Décomposition de Dunford

On démontre l'existence et l'unicité de la décomposition de Dunford pour tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif $\mathbb{K}$. **[GOU21]** p. 203

Théorème 1 (Décomposition de Dunford)**.** Soit $f \in E$ un endomorphisme tel que son polynôme minimal π_f soit scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique couple d'endomorphismes (d, n) tel que :

— $f = d + n$.

— d est diagonalisable et n est nilpotent.

— $d \circ n = n \circ d$.

Démonstration. On écrit $\pi_f = (-1)^n \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et pour tout i, on note $N_i = \operatorname{Ker}((f - \lambda_i \operatorname{id}_E)^{\alpha_i})$ le i-ième sous-espace caractéristique de f.

Construction : Comme $E = N_1 \oplus \cdots \oplus N_s$, il suffit de définir d et n sur chaque N_i. On les définit pour tout i et pour tout $x \in N_i$ comme tels :

— $d(x) = \lambda_i x \implies d_{|N_i} = \lambda_i \operatorname{id}_{N_i}$

— $n(x) = f(x) - \lambda_i x = f(x) - d(x) \implies n = f - d$.

Vérification :

— Les restrictions de d et n à N_i sont bien des endomorphismes car les espaces N_i sont stables par f et par d (cf. définition de d), donc aussi par $n = f - d$.

— d est diagonalisable et pour tout i, $n_{|N_i}^{\alpha_i} = 0$ (car $\forall x \in N_i$, $(f - \lambda_i)^{\alpha_i}(x) = 0$ par définition de N_i). On pose donc $\alpha = \max_i \{\alpha_i\}$ et on a $n_{|N_i}^{\alpha} = 0$ pour tout i, donc $n^\alpha = 0$ par somme directe. Ainsi, n est nilpotent.

— Pour tout i, on a $d_{|N_i} = \lambda_i \operatorname{id}_E$, donc $n_{|N_i} \circ d_{|N_i} = d_{|N_i} \circ n_{|N_i}$ i.e. d et n commutent sur chaque N_i donc sur E tout entier.

Unicité : Soit (d', n') un autre couple d'endomorphismes de E vérifiant les hypothèses. On remarque d'abord que d' et f commutent (car d' commute avec d' et n', donc avec $f = d' + n'$ aussi). Pour tout i, N_i est stable par d' (car $\forall x \in N_i$, $(f - \lambda_i \operatorname{id}_E)^{\alpha_i}(d'(x)) = d' \circ (f - \lambda_i \operatorname{id}_E)^{\alpha_i}(x) = 0$). Comme $d_{|N_i} = \lambda_i \operatorname{id}_{N_i}$, on en déduit que $d \circ d' = d' \circ d$ sur N_i. Donc c'est également vrai sur E tout entier. Ainsi, d et d' sont diagonalisables dans une même base, donc $d - d'$ est diagonalisable.

D'autre part, comme $n = f - d$, $n' = f - d'$ et que d et d' commutent, n et n' commutent. Si on choisit p et q tels que $n^p = n'^q = 0$, alors :

$$(n - n')^{p+q} = \sum_{i=0}^{p+q} \binom{p+q}{i} n^i (-1)^{p+q-i} n'^{p+q-i} = 0$$

(dans chaque terme de la somme, soit $i \geq p$, soit $p + q - i \geq q$). Donc $n - n' = d' - d$ est nilpotent. Or nous avions montré que $d' - d$ est diagonalisable, donc $d' - d = 0$. Finalement, on a $d = d'$ et $n = n'$. $\square$

Remarque 2. On peut démontrer que les endomorphismes d et n sont des polynômes en f. En effet, si on note p_i la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{s} N_j$, alors, le lemme des noyaux nous indique que p_i est la restriction à N_i d'un endomorphisme en f. Comme $d = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i p_i$, d est également un polynôme en f ; et $n = f - d$ aussi.

Bibliographie

Les maths en tête **[GOU21]**

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités.* 3e éd. Ellipses, 13 juill. 2021. https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html.