Connexité des valeurs d'adhérence d'une suite dans un compact

On montre que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite d'un espace métrique compact est connexe en raisonnant par l'absurde, puis on utilise ce résultat pour démontrer le lemme des grenouilles.

Soit (E, d) un espace métrique.

[I-P] p. 116

Théorème 1. On suppose E compact. Soit (u_n) une suite de E telle que $d(u_n, u_{n-1}) \longrightarrow 0$. Alors l'ensemble Γ des valeurs d'adhérence de (u_n) est connexe.

Démonstration. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $A_p = \{u_n \mid n \geq p\}$. On a $\Gamma = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \overline{A_p}$. Γ est fermé (en tant qu'intersection de fermés) dans E qui est compact, donc Γ est compact. Supposons que Γ soit non connexe ; on peut alors écrire $\Gamma = A \sqcup B$, où A et B sont deux fermés disjoints de Γ. Comme Γ est compact, A et B le sont aussi. Notons $\alpha = d(A, B) > 0$ (car $A \cap B = \emptyset$). Posons :

$$A' = \left\{x \in E \mid d(x, A) < \frac{\alpha}{3}\right\} \text{ et } B' = \left\{x \in E \mid d(x, B) < \frac{\alpha}{3}\right\}$$

A' et B' sont ouverts (en tant qu'images réciproques d'ouverts par des application continues), donc $K = E \smallsetminus (A' \cup B')$ est fermé dans E, donc compact.

Montrons que (u_n) admet une valeur d'adhérence dans K, ce qui serait absurde car $\Gamma \cap K = \emptyset$. Comme $\lim_{n\to+\infty} d(u_n, u_{n-1}) = 0$,

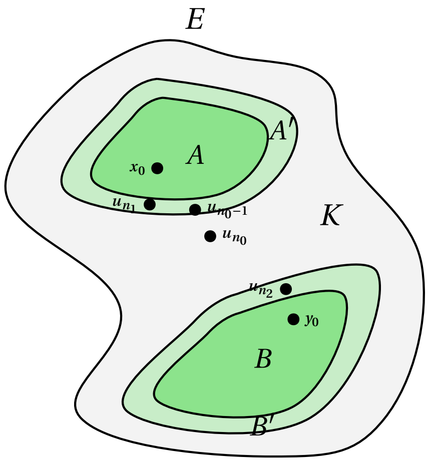
$$\exists N_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N_0,\ d(u_n, u_{n-1}) < \frac{\alpha}{3} \tag{$*$}$$

Soit $N \geq N_0$.

— Soit $x_0 \in A$. Comme x_0 est valeur d'adhérence de (u_n), $\exists n_1 > N$ tel que $d(x_0, u_{n_1}) < \frac{\alpha}{3}$. Donc $u_{n_1} \in A'$.

— Soit $y_0 \in B$. De même, $\exists n_2 > n_1$ tel que $d(y_0, u_{n_2}) < \frac{\alpha}{3}$. Donc $u_{n_2} \in B'$.

Soit maintenant n_0 le premier entier supérieur à n_1 tel que $u_{n_0} \notin A'$ (un tel entier existe car $u_{n_2} \notin A'$). On a alors $u_{n_0-1} \in A'$.



D'après ($*$), en appliquant l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} d(u_{n_0}, B) &\geq d(u_{n_0-1}, B) - d(u_{n_0-1}, u_{n_0}) \\ &\geq d(A, B) - d(u_{n_0-1}, A) - d(u_{n_0-1}, u_{n_0}) \\ &> \frac{\alpha}{3} \end{aligned}$$

ce qui prouve que $u_{n_0} \notin B'$. Comme $u_{n_0} \notin A'$, on a $u_{n_0} \in K$. On vient de montrer que,

$$\forall N \geq N_0, \exists n_0 \geq N \text{ tel que } u_{n_0} \in K$$

On peut créer comme cela une sous-suite de (u_n) dans K. Or K est compact, donc (u_n) admet une valeur d'adhérence dans K. □

Application 2 (Lemme de la grenouille)**.** Soient $f : [0,1] \to [0,1]$ continue et (x_n) une suite de $[0,1]$ telle que

$$\begin{cases} x_0 \in [0,1] \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

Alors (x_n) converge si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} - x_n = 0$.

Démonstration. Le sens direct est évident. Montrons la réciproque. On suppose donc que $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} - x_n = 0$ et on note Γ l'ensemble des valeurs d'adhérence de (x_n). Γ est non vide (car (x_n) est bornée, donc admet une valeur d'adhérence par le théorème de Bolzano-Weierstrass) et est un connexe de $\mathbb{R}$ (par le Théorème 1), donc Γ est un intervalle non vide.

Soit $a \in \Gamma$. Il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante (on dit que φ est une extractrice) telle que $x_{\varphi(n)} \longrightarrow a$. Mais alors,

$$x_{\varphi(n)+1} - x_{\varphi(n)} = f(x_{\varphi(n)}) - x_{\varphi(n)} \longrightarrow f(a) - a$$

et par hypothèse, le membre de gauche converge vers 0. Donc $f(a) - a = 0$ ie. a est un point fixe de f.

Supposons par l'absurde que (x_n) diverge. Alors Γ n'est pas un singleton, donc est un intervalle d'intérieur non vide : on peut trouver $c \in \Gamma$ et $h > 0$ tel que $[c-h, c+h] \subseteq \Gamma$.

Or, $c \in \Gamma$, donc

$$\exists N \geq 0 \text{ tel que } |x_N - c| \leq \frac{h}{2} \implies x_N \in \Gamma$$

et en particulier, x_N est un point fixe de f. Ainsi, $x_{n+1} = f(x_n) = x_n$ pour tout $n \geq N$: absurde. $\square$

Bibliographie

L’oral à l’agrégation de mathématiques **[I-P]**

Lucas ISENMANN et Timothée PECATTE. *L’oral à l’agrégation de mathématiques. Une sélection de développements*. 2e éd. Ellipses, 26 mars 2024.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html.