102 Groupe des nombres complexes de module 1. Racines de l'unité. Applications.

I - Nombres complexes de module 1

1. Le groupe $\mathbb{U}$

Définition 1. On définit
$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$
le groupe abélien des nombres complexes de module 1.

[ROM21] p. 36

Proposition 2. L'application
$$\exp(i\theta) \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$
(où exp est définie dans la sous-section suivante) définit un isomorphisme de $\mathbb{U}$ dans $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.

Proposition 3. Un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ est soit dense dans $\mathbb{R}$, soit de la forme $n\mathbb{Z}$.

[FGN3] p. 51

Corollaire 4. Un sous-groupe de $\mathbb{U}$ est soit fini, soit dense dans $\mathbb{U}$.

Corollaire 5. Soit $\theta \notin 2\pi\mathbb{Q}$. $\{e^{in\theta} \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{U}$.

Application 6. $\{\sin(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

Proposition 7. $\mathbb{U}$ est un sous-groupe compact et connexe de $\mathbb{C}^*$.

[GOU20] p. 44

Application 8. Soit $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ continue. Alors il existe deux points diamétralement opposés de $\mathbb{U}$ qui ont la même image par f.

2. L'exponentielle complexe

Définition 9. On définit la fonction **exponentielle complexe** pour tout $z \in \mathbb{C}$ par [QUE] p. 4

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

on note cette somme e^z ou parfois $\exp(z)$.

Remarque 10. Cette somme est bien définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ d'après le critère de d'Alembert.

Proposition 11. (i) $\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.

(ii) exp est holomorphe sur $\mathbb{C}$, de dérivée elle-même.

(iii) exp ne s'annule jamais.

Proposition 12. La fonction $\varphi : t \mapsto e^{it}$ est un morphisme surjectif de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{U}$.

Proposition 13. En reprenant les notations précédentes, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$, de la forme $\mathrm{Ker}(\varphi) = a\mathbb{Z}$. On note $a = 2\pi$.

3. Trigonométrie

Définition 14. Les fonctions sin et cos sont définies sur $\mathbb{R}$ par

— $\cos(t) = \mathrm{Re}(e^{it}) = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}$.

— $\sin(t) = \mathrm{Im}(e^{it}) = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Proposition 15. Ces fonctions sont réelles, 2π-périodiques, et admettent un développement en série entière de rayon de convergence infini. On peut en particulier les prolonger sur le plan complexe entier.

Proposition 16. Tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ peut s'écrire de la manière suivante : [R-R] p. 259

$$z = |z|e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Proposition 17 (Formule de Moivre)**.**

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

[GOU20] p. 271

Application 18 (Calcul du noyau de Dirichlet)**.**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \sum_{k=-n}^{n} \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

II - Le groupe des racines de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Racines n-ièmes de l'unité

[R-R] p. 259

Définition 19. Étant donnés $\alpha \in \mathbb{C}$, on appelle :

— **Racine n-ième de α** tout nombre $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n = \alpha$.

— **Racine n-ième de l'unité** toute racine n-ième de 1. On note μ_n cet ensemble.

Exemple 20. Les racines cubiques de l'unité sont 1, $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\overline{j}$.

Proposition 21. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il y a n racines n-ièmes de l'unité, données par

$$e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \cos\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)$$

où k parcourt les entiers de 0 à $n-1$.

Corollaire 22. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{\frac{2ik\pi}{n}})$$

Corollaire 23. Tout nombre complexe non nul α écrit $\alpha = re^{i\theta}$ admet exactement n racines n-ièmes données par

$$\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}}e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$

où k parcourt les entiers de 0 à $n-1$.

[GOZ] p. 67

Proposition 24. μ_n est un groupe, et l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \to & \mu_n \\ k & \mapsto & e^{\frac{2ik\pi}{n}} \end{array}$$

est un isomorphisme.

Proposition 25. $\mathbb{C}^*$ admet exactement un sous-groupe d'ordre n : μ_n. [ROM21] p. 36

2. Générateurs et polynômes cyclotomiques

Définition 26. L'ensemble des générateurs de μ_n, noté μ_n^*, est formé des **racines primitives n-ièmes de l'unité**. [GOZ] p. 67

Proposition 27. (i) $\mu_n^* = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in [\![0, n-1]\!], \operatorname{pgcd}(k, m) = 1\}$.

(ii) $|\mu_n^*| = \varphi(n)$, où φ désigne l'indicatrice d'Euler.

Définition 28. On appelle **n-ième polynôme cyclotomique** le polynôme

$$\Phi_n = \prod_{\xi \in \mu_n^*} (X - \xi)$$

Théorème 29. (i) $X^n - 1 = \prod_{d \mid n} \Phi_d$.

(ii) $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$.

(iii) Φ_n est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

Corollaire 30. Le polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$ de tout élément ξ de μ_n^* est Φ_n. En particulier,

$$[\mathbb{Q}(\xi) : \mathbb{Q}] = \varphi(m)$$

Application 31 (Théorème de Wedderburn)**.** Tout corps fini est commutatif.

[DEV] **Application 32** (Dirichlet faible)**.** Pour tout entier n, il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo n. [GOU21] p. 99

III - Applications en algèbre

1. Une application géométrique

p. 153

Proposition 33 (Déterminant circulant)**.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Alors

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1} P(\omega^j)$$

où $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

[I-P] p. 389

Application 34 (Suite de polygones)**.** Soit P_0 un polygone dont les sommets sont $\{z_{0,1}, \dots, z_{0,n}\}$. On définit la suite de polygones (P_k) par récurrence en disant que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, les sommets de P_{k+1} sont les milieux des arêtes de P_k.

Alors la suite (P_k) converge vers l'isobarycentre de P_0.

2. Racines de polynômes

[DEV] p. 279

Théorème 35 (Kronecker)**.** Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire tel que toutes ses racines complexes appartiennent au disque unité épointé en l'origine (que l'on note D). Alors toutes ses racines sont des racines de l'unité.

Corollaire 36. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire et irréductible sur $\mathbb{Q}$ tel que toutes ses racines complexes soient de module inférieur ou égal à 1. Alors $P = X$ ou P est un polynôme cyclotomique.

3. Dual d'un groupe

Soit G un groupe fini de cardinal n.

[PEY] p. 2

Définition 37. Un **caractère** est un morphisme de G dans $\mathbb{C}^*$. On note $\widehat{G}$ l'ensemble des caractères, qu'on appelle **dual** de G.

Proposition 38. $\widehat{G}$ est un groupe pour la multiplication.

Proposition 39. (i) $\widehat{G}$ est constitué des morphismes de G dans μ_n.

(ii) $\forall g \in G, |\chi(g)| = 1$.

(iii) $\forall g \in G, \chi(g^{-1}) = \chi(g)^{-1} = \overline{\chi(g)}$.

Proposition 40. Si $G = \langle g_0 \rangle$, en notant ω une racine primitive n-ième de l'unité, les éléments de $\widehat{G}$ sont de la forme $g_0^k \mapsto (\omega^j)^k$ pour $j \in [\![0, n-1]\!]$.

Corollaire 41. Si G est cyclique, $G \cong \widehat{G}$.

4. Transformée de Fourier discrète

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. p. 64

Notation 42. Soit f un vecteur de $\mathbb{C}^N$. On note $f[k]$ sa k-ième composante pour tout $k \in [\![1, N]\!]$.

Définition 43. Soit f un vecteur de $\mathbb{C}^N$. La **transformée de Fourier discrète** de f est

$$\widehat{f} = \sum_{n=0}^{N-1} f[n]\omega_N^{-nk}$$

pour $k \in [\![0, N-1]\!]$ où l'on a noté $\omega_N = e^{\frac{2i\pi}{N}}$ une racine primitive N-ième de l'unité. On note

$$\mathscr{F} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^N & \rightarrow & \mathbb{C}^N \\ f & \mapsto & \widehat{f} \end{array}$$

Proposition 44 (Transformée de Fourier inverse)**.**

$$\forall n \in [\![0, N-1]\!], f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{f}[k]\omega_N^{nk}$$

Corollaire 45. Soit f un vecteur de $\mathbb{C}^N$. En notant f_1 le vecteur défini par

$$f_1[0] = \frac{1}{N} f[0] \text{ et } \forall n \in [\![1, \dots, N-1]\!], f_1[n] = \frac{1}{N} f[N-n]$$

on a

$$\mathscr{F}^{-1}(f) = \mathscr{F}(f_1)$$

Annexes

[I-P] p. 389

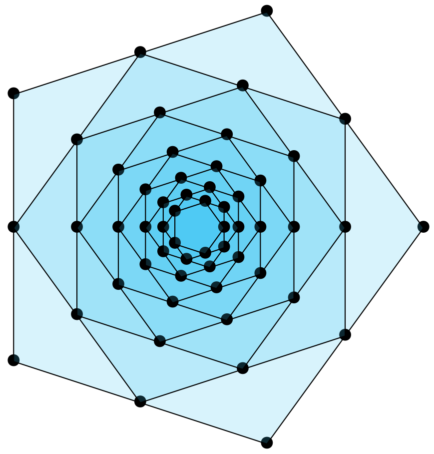

FIGURE 1 – La suite de polygones.

Bibliographie

Oraux X-ENS Mathématiques **[FGN3]**

Serge FRANCINOU, Hervé GIANELLA et Serge NICOLAS. *Oraux X-ENS Mathématiques. Volume 3.* 3e éd. Cassini, 27 mai 2020.
https://store.cassini.fr/fr/enseignement-des-mathematiques/103-oraux-x-ens-mathematiques-nouvelle-serie-vol-3.html.

Les maths en tête **[GOU20]**

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse.* 3e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html.

Les maths en tête **[GOU21]**

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités.* 3e éd. Ellipses, 13 juill. 2021.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html.

Théorie de Galois **[GOZ]**

Ivan GOZARD. *Théorie de Galois. Niveau L3-M1.* 2e éd. Ellipses, 1er avr. 2009.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/4897-15223-theorie-de-galois-niveau-l3-m1-2e-edition-9782729842772.html.

L'oral à l'agrégation de mathématiques **[I-P]**

Lucas ISENMANN et Timothée PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques. Une sélection de développements.* 2e éd. Ellipses, 26 mars 2024.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html.

L'algèbre discrète de la transformée de Fourier **[PEY]**

Gabriel PEYRÉ. *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier. Niveau M1.* Ellipses, 15 jan. 2004.
https://adtf-livre.github.io.

Analyse complexe et applications **[QUE]**

Martine QUEFFÉLLEC et Hervé QUEFFÉLEC. *Analyse complexe et applications. Nouveau tirage.* Calvage & Mounet, 13 mai 2017.
http://www.calvage-et-mounet.fr/2022/05/09/analyse-complexe-et-applications/.

Formulaire de maths **[R-R]**

Olivier Rodot et Jean-Étienne Rombaldi. *Formulaire de maths. Avec résumés de cours.* De Boeck Supérieur, 30 août 2022.
https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807339880-formulaire-de-maths.

Mathématiques pour l'agrégation **[ROM21]**

Jean-Étienne Rombaldi. *Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et géométrie.* 2e éd. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.
https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332201-mathematiques-pour-l-agregation-algebre-et-geometrie.