230 Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

I - Séries réelles et complexes

1. Notion de série et convergence

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Muni de sa norme usuelle $|.|$, $\mathbb{K}$ est un espace de Banach.

[GOU20] p. 208

Définition 1. Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$.

— On appelle **série** de terme général u_n la suite (S_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = u_0 + \cdots + u_n$$

On note cette série $\sum u_n$.

— u_n s'appelle le **terme** d'indice n.

— S_n s'appelle la **somme partielle** d'indice n.

Définition 2. En reprenant les notations précédentes, on dit que $\sum u_n$ **converge** si la suite (S_n) converge. Dans ce cas, la limite s'appelle la **somme** de la série, et on la note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Définition 3. On appelle **reste** d'ordre n d'une série convergente $\sum u_n$ l'élément R_n défini par

$$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Exemple 4. Soit $q \in \mathbb{C}$. Alors $\sum q^n$ converge $\iff |q| < 1$. Dans ce cas :

— La somme partielle d'indice n est égale à $\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

— La somme de la série est égale à $\frac{1}{1-q}$.

— Le reste d'ordre n de $\sum q^n$ est égal à $\frac{q^n}{1-q}$.

[AMR11] p. 81

Proposition 5. Si $\sum u_n$ converge, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Contre-exemple 6. La réciproque est fausse, par exemple en considérant la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \ln(1 + \frac{1}{n})$, on a $\sum_{k=1}^{n} u_k = \ln(n+1) \longrightarrow_{n\to+\infty} +\infty$.

Proposition 7. Muni des opérations :

— $\forall (u_n), (v_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \sum u_n + \sum v_n = \sum (u_n + v_n)$,

— $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \lambda \sum u_n = \sum (\lambda u_n)$,

l'ensemble des séries numériques est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ dont l'ensemble des séries convergentes est un sous-espace vectoriel.

Proposition 8 (Critère de Cauchy pour les séries)**.** Une série $\sum u_n$ converge si et seulement si [GOU20] p. 209

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=0}^{p} u_{n+k} \right| < \epsilon$$

Définition 9. On dit que $\sum u_n$ est **absolument convergente** si $\sum |u_n|$ est convergente.

Théorème 10. Tout série à valeurs dans $\mathbb{K}$ absolument convergente est convergente.

Ce dernier théorème justifie de s'intéresser plus particulièrement aux séries à termes positifs.

2. Séries à termes positifs

a. Comparaison

Proposition 11. Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.

Corollaire 12. On considère deux séries réelles $\sum u_n$ et $\sum v_n$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n$. Alors :

(i) Si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ converge.

(ii) Si $\sum u_n$ diverge, $\sum v_n$ diverge.

Proposition 13. On considère deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à termes positifs.

(i) Si $v_n = O(u_n)$ et si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge.

(ii) Si $u_n \sim v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

— En cas de convergence, les restes vérifient $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$.

— En cas de divergence, les sommes partielles vérifient $\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$.

p. 219

Application 14 (Formule de Stirling)**.**

$$\exists k > 0 \text{ tel que } n! \sim k\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

p. 228

Application 15 (Développement asymptotique de la suite des sinus itérés)**.** Soit (u_n) une suite vérifiant

$$u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)$$

Alors

$$u_n = \sqrt{\frac{3}{n}} - \frac{3\sqrt{3}}{10}\frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}\right)$$

p. 211

Proposition 16 (Comparaison série - intégrale)**.** Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction positive, continue par morceaux et décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Alors la suite (U_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

est convergente. En particulier, la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Exemple 17. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exemple 18. La série de Bertrand $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou si $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

[I-P]
p. 380

Lemme 19. Soit $\alpha > 1$. Lorsque n tend vers $+\infty$, on a

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha - 1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

[DEV]

Application 20 (Développement asymptotique de la série harmonique)**.** On note $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Alors, quand n tend vers $+\infty$,

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

[AMR11]
p. 109

Proposition 21. Soit $\sum f(n)$ une série relevant d'une comparaison série - intégrale. On note

R_n le reste d'ordre n de cette série. Alors,

$$\forall n \geq 1, \int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leq |R_n| \leq \int_{n}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple 22. La somme $\sum_{n=1}^{20} \frac{1}{n^3}$ donne une approximation de $\zeta(3) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ à moins de 125×10^{-5} près.

Proposition 23. Soient deux séries réelles $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à termes strictement positifs telles que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ à partir d'un certain rang. Alors : [GOU20] p. 213

(i) Si $\sum u_n$ converge, $\sum v_n$ converge.

(ii) Si $\sum v_n$ diverge, $\sum u_n$ diverge.

b. Critères

Proposition 24 (Règle de d'Alembert)**.** Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda \in [0, +\infty]$$

Alors :

(i) Si $\lambda < 1$, $\sum u_n$ converge.

(ii) Si $\lambda > 1$, $\sum u_n$ diverge.

Exemple 25. $\sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ converge. [AMR11] p. 94

Proposition 26. Soit $\sum u_n$ une série relevant de la règle de D'Alembert. On note R_n le reste d'ordre n de cette série. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in]0, 1[$ tels que p. 108

$$\forall n \geq N, |R_n| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

Exemple 27. $\sum_{k=0}^{10} \frac{1}{n!}$ donne une valeur approchée de e à moins de 3×10^{-8} près par défaut.

Proposition 28 (Règle de Cauchy)**.** Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs telle que [GOU20] p. 214

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda \in [0, +\infty]$$

Alors :

(i) Si $\lambda < 1$, $\sum u_n$ converge.

(ii) Si $\lambda > 1$, $\sum u_n$ diverge.

Exemple 29. $\sum \left(\frac{4n+1}{3n+2}\right)^n$ converge. [AMR11] p. 112

Proposition 30. Soit $\sum u_n$ une série relevant de la règle de Cauchy. On note R_n le reste d'ordre n de cette série. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in]0,1[$ tels que p. 107

$$\forall n \geq N, |R_n| \leq \frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

Exemple 31. En reprenant les notations précédentes, pour $u_n = n^{-n}$, on a $R_4 < 0,00035$.

3. Séries semi-convergentes

Définition 32. On appelle **séries semi-convergentes** les séries convergentes mais non absolument convergentes. p. 214

Théorème 33 (Critère de Leibniz)**.** Soit (a_n) une suite à termes positifs, décroissantes, tendant vers 0. Alors

$$\sum (-1)^n a_n \text{ converge} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, |R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k \right| \leq a_{n+1}$$

Exemple 34. La série $\sum (-1)^{n-1} n^{-\alpha}$ est convergente pour $\alpha > 0$. De plus, les restes R_n vérifient p. 97

$$|R_n| \leq \frac{1}{(n+1)^\alpha}$$

Proposition 35 (Transformation d'Abel)**.** Soit une série $\sum u_n$ où $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha_n v_n$. On note $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n v_k$. Alors, [GOU20] p. 215

$$\sum_{k=0}^n u_k = \alpha_n S_n + \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) S_k$$

Corollaire 36 (Critère d'Abel)**.** Soit une série $\sum u_n$ où $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha_n v_n$. On suppose : [AMR11] p. 99

— (α_n) est une suite réelle positive, décroissante et qui tend vers 0.

— La série $\sum v_n$ est bornée par une constante M.

Alors $\sum u_n$ est convergente, et les restes R_n vérifient $\forall n \in \mathbb{N}$, $|R_n| \leq M a_{n+1}$.

Remarque 37. En reprenant les notations précédentes, avec $v_n = (-1)^n$, on retrouve le critère de Leibniz. [GOU20] p. 216

Exemple 38. La série $\sum \frac{e^{ni\theta}}{n^\alpha}$ converge pour tout $\alpha > 0, \theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

II - Calcul de sommes

1. Séries de Fourier

Définition 39. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On appelle **coefficients de Fourier** de f les nombres complexes définis par p. 267

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) = \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int}\, \mathrm{d}t$$

La **série de Fourier** associée à f est

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$$

Théorème 40 (Parseval)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors la série de Fourier de f est convergente et,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|\, \mathrm{d}t$$

Exemple 41. Avec $f : x \mapsto 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$, on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Théorème 42 (Jordan-Dirichlet)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application 2π-périodique et $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors la série de Fourier de f est convergente en tout point $x \in \mathbb{R}$ et sa somme en ce point vaut

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

Exemple 43. Toujours avec $f : x \mapsto 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$, on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

2. Séries entières

Définition 44. On appelle **série entière** toute série de fonctions de la forme $\sum a_n z^n$ où z est une variable complexe et où (a_n) est une suite complexe. p. 247

Lemme 45 (Abel)**.** Soient $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ tels que $(a_n z_0^n)$ soit bornée. Alors :

(i) $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, $\sum a_n z^n$ converge absolument.

(ii) $\forall r \in]0, |z_0|[$, $\sum a_n z^n$ converge normalement dans $\overline{D}(0,r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$.

Définition 46. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Le nombre

$$R = \sup\{r \geq 0 \mid (|a_n| r^n) \text{ est bornée}\}$$

est le **rayon de convergence** de $\sum a_n z^n$. On a :

— $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, $\sum a_n z^n$ converge absolument.

— $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$, $\sum a_n z^n$ diverge.

— $\forall r \in [0, R[$, $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0,r)$.

Le disque $D(0,R)$ est le **disque de convergence** de la série, le cercle $C(0,R)$ est le **cercle d'incertitude**.

Exemple 47. $\sum \frac{z^n}{n!}$ est une série entière de rayon de convergence infini.

[DEV] **Théorème 48** (Nombres de Bell)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n le nombre de partitions de $[\![1, n]\!]$. Par convention on pose $B_0 = 1$. Alors, [GOU21] p. 314

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, B_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!}$$

Théorème 49 (Abel angulaire)**.** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 telle que $\sum a_n$ converge. On note f la somme de cette série sur le disque unité D de $\mathbb{C}$. On fixe $\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et on pose $\Delta_{\theta_0} = \{z \in D \mid \exists \rho > 0 \text{ et } \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0] \text{ tels que } z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$. [GOU20] p. 263

Alors $\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Application 50.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} = \frac{\pi}{4}$$

Application 51.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$$

Contre-exemple 52. La réciproque est fausse :

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ |z|<1}} (-1)^n z^n = \lim_{\substack{z\to 1\\ |z|<1}} \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}$$

Théorème 53 (Taubérien faible)**.** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On note f la somme de cette série sur $D(0,1)$. On suppose que

$$\exists S \in \mathbb{C} \text{ tel que } \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = S$$

Si $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors $\sum a_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.

Remarque 54. Ce dernier résultat est une réciproque partielle du Théorème 49. Il reste vrai en supposant $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ (c'est le théorème Taubérien fort).

Annexes

[GOU20]
p. 263

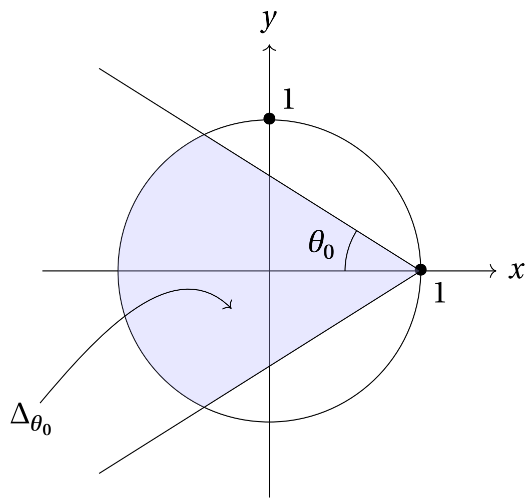

FIGURE 1 – Illustration du théorème d'Abel angulaire.