LONGUEUR ET PÉRIMÈTRE

I Un nombre irrationnel

À RETENIR

En étudiant un cercle, nous sommes amenés à nous poser différentes questions. En particulier, nous pouvons chercher à mesurer ou à calculer différentes longueurs, parmi lesquelles :

— Son diamètre.

— Sa circonférence (aussi appelée longueur ou périmètre).

Dès l'Antiquité, les mathématiciens se sont rendu compte qu'il y avait un rapport constant entre la valeur du périmètre d'un cercle et celle de son diamètre. Ils se sont ainsi très vite posé la question suivante :

« Combien de fois un cercle est-il plus long que son diamètre ? »

Autrement dit, par quoi faudrait-il multiplier le diamètre d d'un cercle pour trouver son périmètre $\mathscr{P}$? Les premières mesures montrèrent qu'un cercle était environ 3 fois plus long que son diamètre, c'est-à-dire :

$$\mathscr{P} \approx 3 \times d$$

Assez rapidement, nous nous sommes rendu compte qu'il s'agissait d'un peu plus, peut-être $3,1$ ou $3,2$:

$$\mathscr{P} \approx 3,1 \times d$$

Et au cours de l'Histoire, de nombreux mathématiciens se sont penchés sur ce problème pour trouver une approximation toujours plus précise. Ce nombre devenant de plus en plus fascinant (on le retrouve dans de multiples domaines des mathématiques), un nom lui fut trouvé : π. Il s'agit là de la première lettre du mot $\pi\epsilon\rho\iota\mu\epsilon\tau\rho o\xi$ (« périmètre » écrit en grec ancien). Ainsi :

$$\mathscr{P} = \pi \times d$$

Au XVIIIème siècle, les mathématiciens ont montré que ce nombre n'est pas un nombre décimal à proprement parler : il possède un nombre infini de chiffres après la virgule, ces chiffres ne formant même pas une suite logique. On dit que π est un nombre irrationnel.

EXERCICE 1

Aller sur `https://pisearch.joshkeegan.co.uk/`, et entrer votre année de naissance.

1. Quelle est sa (première) position dans les décimales de π ?

2. **a.** Quel chiffre se trouve avant ?
b. Quel chiffre se trouve après ?

3. Combien de fois peut-on trouver votre date de naissance dans les 5 premières milliards de décimales de π ?

II La méthode d'Archimède

Nous allons tenter de faire comme Archimède l'avait fait à l'époque pour trouver des encadrements de π.

EXERCICE 2

Nous allons montrer que π est plus grand que 3.

1. Tracer un segment horizontal $[AB]$ de longueur 2 avec l'outil *Segment de longueur donnée.*
2. Placer C, le milieu de $[AB]$ avec l'outil *Milieu ou centre.*
3. Tracer le cercle de centre C et de rayon CB.
   - **a.** Quelle est la longueur de ce cercle ?
   - **b.** Quelle est la longueur de l'arc de cercle supérieur ?
4. Sélectionner l'outil *Polygone régulier.*
   - **a.** Tracer un triangle équilatéral ACD (en cliquant d'abord sur A, puis sur C, et entrant « 3 » dans la fenêtre qui s'ouvre). Celui-ci devrait être orienté vers le haut.
   - **b.** Tracer de même un triangle équilatéral CBE.
5. Tracer le triangle CED à l'aide de l'outil *Polygone* en cliquant sur les points C, D et E. Celui-ci est également équilatéral.
6. **a.** Quelle est la longueur des côtés des triangles équilatéraux ACD, CBE et CED ?
   - **b.** En déduire la longueur $AD + DE + EB$.
7. Compléter.

   On constate que la longueur de l'arc de cercle supérieur est plus grande que $AD + DE + EB$. Or, la longueur de l'arc de cercle supérieur vaut .... et $AD + DE + EB =$ .... On en déduit que ....

EXERCICE 3

Nous allons maintenant montrer que π est plus petit que 4.

1. Tracer un segment $[AB]$ de longueur 1.
2. **a.** Nous allons tracer un carré un carré $ABCD$. Sélectionner l'outil *Polygone régulier.* Cliquer sur A et B, puis entrer « 4 » dans la fenêtre qui s'ouvre.
   - **b.** Quel est le périmètre $\mathscr{P}$ de ce carré ?
3. **a.** Tracer les diagonales de ce carré avec l'outil *Segment.*
   - **b.** Placer E, le point d'intersection de ces diagonales.
4. En utilisant l'outil *Milieu ou centre*, placer F le milieu de $[AB]$.
5. **a.** Tracer le cercle de centre E et de rayon $[EF]$.
   - **b.** Quelle est la longueur de ce cercle ?

   Compléter.

   On constate que la du cercle est plus petite que le périmètre de $ABCD$. Or, la longueur du cercle vaut .... et $\mathscr{P} =$ .... On en déduit que ....

INFORMATION

C'est en utilisant cette méthode qu'Archimède a pu proposer des encadrements et des approximations du nombre π. Plus précisément, son idée fût d'encadrer le nombre π par les périmètres de polygones inscrits ou circonscrits à un cercle.

C'est d'autant plus remarquable que le papier n'existait pas à l'époque : les figures étaient souvent dessinées sur la pierre ou même sur le sable.

EXERCICE 4

Aller sur `https://geogebra.org/m/GdFsXHXa`.

1. Avec des carrés, que peut-on obtenir comme encadrement de π ?

2. Combien de côtés faut-il pour obtenir un encadrement de π au dixième près ?

III La méthode de Monte-Carlo

INFORMATION

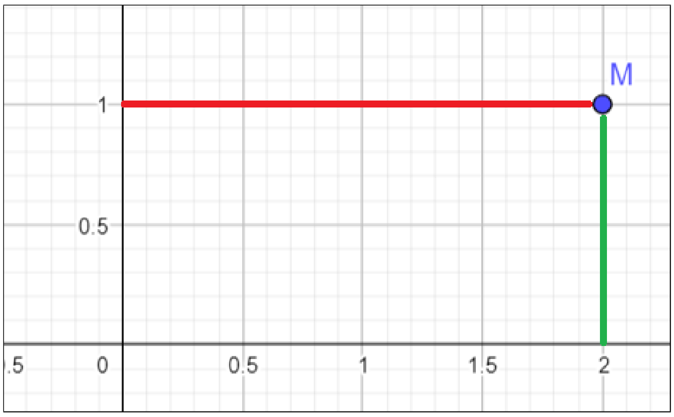
Les méthodes antiques pour approcher π (telles que la méthode d'Archimède) se révèlent coûteuse : il faudrait tracer des polygones d'environ 96 côtés pour obtenir que $\pi \approx 3,1414\ldots$

Nous disposons aujourd'hui de méthodes beaucoup plus efficace, comme la méthode de Monte-Carlo qui repose sur le… hasard ! Ce nom a été donné par John von Neumann et Stanisław Ulam et est une référence directe au casino de Monte-Carlo.

À RETENIR

Dans GeoGebra, on dispose de deux axes : l'axe des **abscisses** (qui est horizontal), et l'axe des **ordonnées** (qui est vertical). Chaque point peut être repéré par ses **coordonnées**. Par exemple, le point M de coordonnées $(2;1)$ sera situé comme ci-contre dans le plan.

Pour placer le point $M(2;1)$, on entre la commande $M = (2,1)$.



EXERCICE 5

1. Placer les points $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(1;1)$ et $D(0;1)$.
2. Avec l'outil *Secteur circulaire (centre-2 points)*, tracer le quart de cercle de centre A et passant par B et D.
3. Tracer le carré $ABCD$ à l'aide de l'outil *Polygone*.
4. Entrer la commande `Séquence(PointAuHasardDans(q1),i,1,1000)`. Cette commande va placer 1 000 points au hasard dans le carré.
5. Entrer la commande `NbSi(EstDansRégion(A,c),A,l1)`. Cette commande va compter le nombre de points qui sont situés dans le quart de cercle.
6. **a.** Combien de points sont situés dans le quart de cercle ?

   b. Diviser le nombre obtenu à la question précédente par 1 000 (cela revient à la multiplier par $0,001$).

   c. Calculer $\frac{\pi}{4}$ avec la calculatrice. Que remarque-t-on ?

   d. Modifier la commande de la question **4.** pour qu'elle place 10 000 points au hasard dans le carré. Que remarque-t-on ?