ARITHMÉTIQUE

OBJECTIFS

— Connaître les notations de $\mathbb{N}$ pour les nombres entiers naturels et de $\mathbb{Z}$ pour les nombres entiers relatifs.
— Définition des notions de multiple, de diviseur, de nombre pair, de nombre impair.
— Modéliser et résoudre des problèmes mobilisant les notions de multiple, de diviseur, de nombre pair, de nombre impair, de nombre premier.
— Présenter les résultats fractionnaires sous forme irréductible.

I Divisibilité

1. Multiples et diviseurs

À RETENIR

Définition

Soient $a, b \in \mathbb{N}$. On dit que a est un **multiple** de b s'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que

$$a = bq$$

On dit également que b est un **diviseur** de a. Cela revient à dire que a est dans la table de multiplication de b.

Dans la définition, on peut aisément remplacer $\mathbb{N}$ par $\mathbb{Z}$. Mais, pour simplifier les choses dans la suite, on ne considérera que les multiples et diviseurs positifs.

EXERCICE 1

Soit n un nombre entier. Montrer que la somme de deux multiples de n est un multiple de n.

. . . .

. . . .

. . . .

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/seconde/arithmetique/#correction-1.

À RETENIR

Méthode

Pour trouver tous les diviseurs d'un nombre entier n, on teste la divisibilité de n par tous les nombres inférieurs ou égaux à $\sqrt{n}$.

EXERCICE 2

Dresser la liste des diviseurs des nombres suivants.

1. 21 : . . . .
2. 6 : . . . .
3. 15 : . . . .
4. 11 : . . . .

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/seconde/arithmetique/#correction-2.

À RETENIR

Propriété

Tout nombre entier est divisible par 1 et par lui-même.

2. Nombres pairs, nombres impairs

À RETENIR

Définitions

Soit n un nombre entier.

— On dit que n est **pair** s'il existe un entier k tel que $n = 2k$. Autrement dit, n est pair s'il est divisible par 2.

— On dit que n est **impair** s'il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$. Autrement dit, n est impair s'il n'est pas divisible par 2.

EXEMPLE

Par exemple, 66 est pair car $66 = 2 \times 33$, mais 17 est impair car $17 = 2 \times 8 + 1$.

EXERCICE 3

Montrer que le carré de tout nombre pair est pair.

....

....

....

Voir la correction : `https://mes-cours-de-maths.fr/cours/seconde/arithmetique/#correction-3`.

3. Nombres premiers

À RETENIR

Définition

Un **nombre premier** est un nombre entier plus grand que 1 qui n'est divisible que par 1 et par lui-même.

EXERCICE 4

Donner 4 nombres premiers inférieurs à 100.

1. .... **2.** .... **3.** .... **4.** ....

Voir la correction : `https://mes-cours-de-maths.fr/cours/seconde/arithmetique/#correction-4`.

À RETENIR

Méthode

Pour montrer qu'un entier naturel n est premier, on vérifie qu'il ne possède aucun diviseur inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.

EXERCICE 5

1. Montrer que 23 est un nombre premier.

   ....

2. Montrer que 12 345 678 n'est pas un nombre premier.

   ....

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/seconde/arithmetique/#correction-5.

À RETENIR

Propriété

Il existe une infinité de nombres premiers.

4. Décomposition en produit de facteurs premiers

À RETENIR

Théorème fondamental de l'arithmétique

Tout nombre entier plus grand que 1 peut s'écrire comme produit de nombres premiers. Il s'agit de la **décomposition en produit de facteurs premiers** de ce nombre.

De plus, cette décomposition est unique (si l'on ne tient pas compte de l'ordre des facteurs).

EXERCICE 6

Décomposer les nombres entiers suivants en produit de facteurs premiers.

1. 360 = ...
2. 1 515 = ...

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/seconde/arithmetique/#correction-6.

II Fractions irréductibles

À RETENIR

Définition

Deux nombres entiers sont dits **premiers entre eux** s'ils n'admettent aucun diviseur commun hormis 1.

EXERCICE 7

Est-ce que 5 et 11 sont premiers entre eux? ....

....

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/seconde/arithmetique/#correction-7.

À RETENIR

Méthode

Pour montrer que deux nombres sont premiers entre eux, on vérifie qu'ils n'ont aucun facteur commun dans leur décomposition en produit de facteurs premiers.

EXEMPLE

46 et 5 460 ne sont pas premiers entre eux car $46 = \mathbf{2} \times 23$ et $5\,460 = \mathbf{2}^2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$.

À RETENIR

Définition

Une fraction est **irréductible** lorsque l'on ne peut plus la simplifier (ie. l'écrire avec un numérateur et un dénominateur plus petits).

EXEMPLE

$\frac{3}{4}$ est une fraction irréductible mais $\frac{5}{10}$ ne l'est pas (car $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$).

À RETENIR

Propriété

Une fraction est irréductible si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

EXERCICE 8

Dire si les fractions suivantes sont irréductibles. Les réduire dans le cas contraire.

1. $\frac{10}{14}$: .... **2.** $\frac{55}{35}$: .... **3.** $\frac{23}{3}$: ....

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/seconde/arithmetique/#correction-8.