

OBJECTIFS

- Connaître la notion de loi de Bernoulli (de paramètre $p \in [0; 1]$). Connaître son espérance.
- Reconnaître une situation aléatoire modélisée par une loi de Bernoulli.
- Savoir déterminer la probabilité associée à la répétition d'épreuves aléatoires identiques et indépendantes de Bernoulli.
- Représenter par un arbre de probabilités la répétition de n épreuves aléatoires identiques et indépendantes de Bernoulli avec $n \leq 4$ afin de calculer des probabilités.
- Simuler N échantillons de taille n d'une loi de Bernoulli et représenter les fréquences observées des 1 par un histogramme ou un nuage de points.

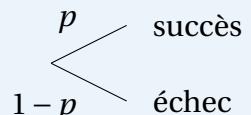
I Épreuve et loi de Bernoulli

1. Épreuve de Bernoulli

À RETENIR

Définition

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire dans laquelle on s'intéresse à la réalisation d'un événement particulier, qu'on appelle le **succès** de probabilité p . Sa non-réalisation s'appelle l'**échec**.


EXEMPLE

Une personne se présente devant la porte de l'ascenseur à l'entrée d'un immeuble. L'ascenseur peut être au rez-de-chaussée, avec une probabilité de 0,4. Il pourra utiliser l'ascenseur immédiatement s'il se situe au rez-de-chaussée, il devra attendre dans les autres cas.

On peut définir un événement succès S : « L'ascenseur est au rez-de-chaussée »; et un événement échec E : « L'ascenseur n'est pas au rez-de-chaussée ». On a bien $E = \bar{S}$, $P(S) = 0,4$ et $P(E) = 1 - 0,4 = 0,6$.

EXERCICE 1

Parmi les expériences aléatoires suivantes, indiquer lesquelles sont des épreuves de Bernoulli.

| Situation | Épreuve de Bernoulli |
|--|----------------------|
| On lance un dé à six faces. On s'intéresse à l'événement "obtenir un nombre pair". | |
| On tire une carte dans un jeu de 52 cartes. On regarde la couleur obtenue. | |
| On interroge une personne dans la rue pour savoir si elle est majeure. | |
| On mesure la taille d'un élève choisi au hasard dans une classe. | |
| On tire une boule dans une urne contenant des boules rouges et bleues. On s'intéresse à l'événement "obtenir une boule rouge". | |
| On joue au loto et on regarde si on a gagné le gros lot. | |
| On lance un dé et on regarde le numéro obtenu. | |



2. Loi de Bernoulli

À RETENIR ☀

Définition

Soient X une variable aléatoire et $p \in [0; 1]$. On dit que X suit une **loi de Bernoulli** de paramètre p si elle prend la valeur 1 avec une probabilité p et la valeur 0 avec la probabilité $1 - p$.

À RETENIR ☀

Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p . Alors, la loi de probabilité de X est donnée par le tableau ci-contre. De plus, on a $E(X) = p$.

| | | |
|--------------|---------|-----|
| x_i | 0 | 1 |
| $P(X = x_i)$ | $1 - p$ | p |

EXERCICE 2 

On lance un dé à 10 faces, et on s'intéresse à l'événement « Obtenir 8 ». On suppose qu'on gagne 1 € à chaque fois que cet événement se réalise, et on ne gagne rien sinon.

1. Expliciter l'épreuve de Bernoulli en spécifiant l'événement succès, l'événement échec et les probabilités associées.
.....
.....
.....
2. Soit X la variable aléatoire égale aux gains.
 - a. Quelle est la loi de probabilité de X ?
 - b. Que vaut $E(X)$?

👉 Voir la correction : <https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/loi-bernoulli/#correction-2>.

II Simulation et échantillons

1. Répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes

À RETENIR ☀

Définition

La répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes peut être représentée à l'aide d'un arbre de probabilités. On peut ainsi définir une variable aléatoire N qui compte le nombre de succès obtenus lors de cette répétition.

Les n résultats obtenus s'appellent un **échantillon** de taille n .

EXEMPLE

Un vendeur contacte trois clients successivement. La probabilité qu'un client réponde favorablement à sa demande est égale à $\frac{1}{4}$. On suppose que les réponses des clients sont indépendantes. On note S_i l'événement « Le i -ième client répond favorablement » et $E_i = \overline{S_i}$.

On pose N la variable aléatoire qui compte le nombre de réponses favorables. On souhaite déterminer la probabilité de l'événement $\{N = 1\}$.

| Arbre | Valeur de N | Probabilité |
|-------|---------------|---|
| | 3 | $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$ |
| | 2 | $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{64}$ |
| | 2 | $\frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{64}$ |
| | 1 | $\frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{64}$ |
| | 2 | $\frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{64}$ |
| | 1 | $\frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{64}$ |
| | 1 | $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{64}$ |
| | 0 | $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{27}{64}$ |

D'après l'arbre de probabilités ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} P(N = 1) &= \frac{9}{64} + \frac{9}{64} + \frac{9}{64} \\ &= \frac{27}{64} \end{aligned}$$

La probabilité qu'exactement un client réponde favorablement est égale à $\frac{27}{64}$.

EXERCICE 3

Un standard téléphonique tente de joindre trois personnes successivement. Pour chaque appel, la probabilité que la personne décroche a été évaluée à 0,3. On suppose que les appels sont indépendants les uns des autres.

1. Représenter la situation dans un arbre de probabilité.

2. Quelle est la probabilité que deux personnes décrochent parmi les trois?

.....
.....
.....



2. Simulation

À RETENIR ☀

Remarque

Simuler un échantillon informatiquement permet d'étudier des séries statistiques comportant un très grand nombre de données.

EXEMPLE💡

Le code ci-contre est composé de deux fonctions.

- `piece()` qui permet de renvoyer aléatoirement 0 (pour Face) ou 1 (pour Pile) afin de simuler un lancer de pièce.
- `echantillon(n)` qui simule n lancers de pièce et renvoie la liste des résultats.

Par exemple, `echantillon(20)` pourra renvoyer la liste

`[0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0]`

qui présente une fréquence de Pile égale à $\frac{8}{20}$.



```
import random

def piece():
    return random.randint(0, 1)

def echantillon(n):
    L = []
    for i in range(n):
        L.append(piece())
    return L
```

EXERCICE 4 📝

On lance un dé à 6 faces et on s'intéresse à l'événement « Obtenir 6 ».

1. Expliciter l'épreuve de Bernoulli étudiée ici et donner la loi de Bernoulli associée.
2. Écrire une fonction `frequenceDe6(n)` en Python qui construit un échantillon de taille n et qui calcule la fréquence de 6 dans cet échantillon.
3. À quoi sert la fonction `simulation(n, N)` écrite ci-dessous?

.....
.....
.....
.....
.....



```
def simulation(n, N):
    resultat = []
    for i in range(N):
        resultat.append(frequenceDe6(n))
    return resultat
```

👉 Voir la correction : <https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/loi-bernoulli/#correction-4>.

3. Fluctuation

À RETENIR ☀

Définition

Si on réalise plusieurs échantillons de même taille, la fréquence du succès observée sur chaque expérience varie. C'est ce qu'on appelle la **fluctuation d'échantillonnage**. Plus la taille des échantillon est grande, plus ce phénomène diminue : les fréquences se rapprochent alors du paramètre p de la loi de Bernoulli associée.

EXEMPLE ☀

On exécute `simulation(1000, 10)` où `simulation(n, N)` est la fonction définie à l'exercice précédent, et on obtient le résultat suivant :

[0.164, 0.186, 0.176, 0.154, 0.178, 0.161, 0.159, 0.176, 0.176, 0.167]

On constate qu'avec une taille d'échantillon suffisamment élevée (1 000 ici), les fréquences se stabilisent autour de la probabilité de $\frac{1}{6} \approx 0,167$.

À RETENIR ☀

Propriété

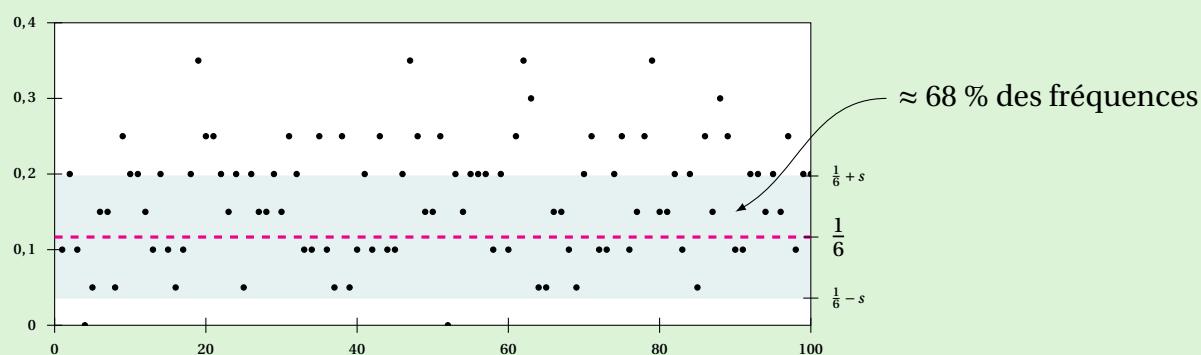
On étudie une simulation de N échantillons de taille n et on note s l'écart type de la série des fréquences obtenues. Soit p le paramètre de la loi de Bernoulli associée.

- En moyenne, 68 % des fréquences sont dans l'intervalle $[p - s; p + s]$.
- En moyenne, 95 % des fréquences sont dans l'intervalle $[p - 2s; p + 2s]$.
- En moyenne, 98 % des fréquences sont dans l'intervalle $[p - 3s; p + 3s]$.

De plus, on a $s \approx \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

EXEMPLE ☀

On exécute `simulation(20, 100)` où `simulation(n, N)` est la fonction définie à l'exercice précédent, et on représente le résultat dans le graphique ci-dessous par un nuage de points.



À partir des fréquences observées, on retrouve également une approximation de la probabilité théorique d'obtenir 6 : $\frac{1}{6}$.