VARIATIONS D'UNE FONCTION

OBJECTIFS

— Connaître les notions de (dé)croissance, monotonie et extrema d'une fonction définie sur un intervalle. Savoir les repérer graphiquement et les relier à un tableau de variations.
— Pour une fonction affine, connaître le lien entre ses variations et le signe de son coefficient directeur.
— Connaître les variations des fonctions usuelles.

I Variations

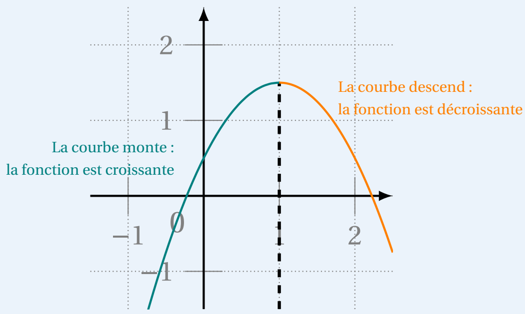
1. Croissance, décroissance

À RETENIR

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. f est dite :

— **croissante** sur I si, pour tout $x, y \in I$, $x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$ (ie. lorsque x augmente, alors $f(x)$ augmente) ;
— **décroissante** sur I si, pour tout $x, y \in I$, $x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$ (ie. lorsque x augmente, alors $f(x)$ diminue) ;
— **constante** sur I si elle garde la même valeur sur I ;
— **monotone** sur I si f est croissante ou décroissante sur I.



Étudier les variations de f revient à déterminer comment f croît ou décroît sur I. On présente souvent ces résultats dans un **tableau de variations**.

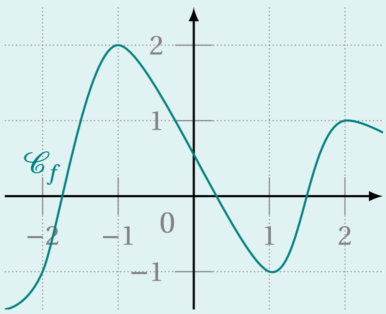
EXEMPLE

La fonction f est décroissante sur $[0;1] \cup [3;4]$, et croissante sur $[1;3]$. On peut regrouper cela dans le tableau de variations ci-dessous.

Valeur de x	0		1		3		4
Variations de f	2	↘	0	↗	1	↘	0

EXERCICE 1

On a tracé la courbe représentative d'une fonction f ci-contre.



1. Dresser son tableau de variations sur l'intervalle $[-2;2]$.

2. Comparer les nombres $f(1)$ et $f(1,2)$ en justifiant. ....

....

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/seconde/variations-fonctions/#correction-1.

2. Extrema

À RETENIR

Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- S'il existe $M \in \mathbb{R}$ et $a \in I$ tels que $f(a) = M$ et $f(x) \leq M$ pour tout $x \in I$, on dit que f a un **maximum** en a sur I. Ce maximum vaut alors M.
- S'il existe $m \in \mathbb{R}$ et $b \in I$ tels que $f(b) = m$ et $f(x) \geq M$ pour tout $x \in I$, on dit que f a un **minimum** en a sur I. Ce maximum vaut alors M.

INFORMATION

Ainsi, le maximum de f est la plus grande valeur atteinte par cette fonction sur I ; et le minimum de f est la plus petite valeur atteinte par cette fonction sur I.

EXERCICE 2

Déterminer le maximum de la fonction f de l'exercice précédent sur $[-2;2]$. ....

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/seconde/variations-fonctions/#correction-2.

II Fonctions usuelles

1. Fonctions affines

À RETENIR

Propriété

Soit $f : x \longmapsto ax + b$ une fonction affine telle que $a \neq 0$. Alors le tableau de variations de f dépend du signe de a.

Si $a > 0$:

Valeur de x	$-\infty$		$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Si $a < 0$:

Valeur de x	$-\infty$		$+\infty$
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

EXERCICE 3

Établir le tableau de variations de la fonction $f : x \longmapsto 5(x-1)$ sur $[1;10]$.

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/seconde/variations-fonctions/#correction-3.

2. Fonctions carré, cube, racine carrée, inverse

À RETENIR

Propriétés

1. La fonction carré est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$. Elle admet un minimum en 0, qui vaut 0.

Valeur de x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de $x \mapsto x^2$	$-\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$. Elle n'a ni minimum, ni maximum sur $\mathbb{R}$.

Valeur de x	$-\infty$		$+\infty$
Variations de $x \mapsto x^3$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3. La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et aussi décroissante sur $]0; +\infty[$. Elle n'a ni minimum, ni maximum sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

Valeur de x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de $x \mapsto \frac{1}{x}$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

4. La fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$. Elle admet un minimum en 0, qui vaut 0.

Valeur de x	0		$+\infty$
Variations de $x \mapsto \sqrt{x}$	0	$\nearrow$	$+\infty$

EXERCICE 4

1. Déterminer les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 4$.

2. Même question pour la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = -3\sqrt{x} + 1$.

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/seconde/variations-fonctions/#correction-4.

EXERCICE 5

L'objectif de cet exercice est de démontrer que la fonction racine carrée est croissante. Soient x et y deux nombres positifs tels que $x \leq y$. Il s'agit de montrer que $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$.

1. Démontrer que $\sqrt{y} - \sqrt{x} = \frac{y-x}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.

2. Que peut-on dire du signe de $y - x$? Et du signe de $\sqrt{x} + \sqrt{y}$? ....

....

3. Montrer que $\sqrt{y} - \sqrt{x} \geq 0$, puis conclure. ....

....

....

....

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/seconde/variations-fonctions/#correction-5.