RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE

2nde
AP

À RETENIR

Un **raisonnement par l'absurde** consiste à supposer vrai le contraire de ce que l'on veut prouver, puis à mener un calcul ou un raisonnement mettant en lumière une contradiction (quelque chose de faux).

On dira alors que notre supposition de départ n'est pas correcte, donc que la propriété voulue est vraie.

EXEMPLE

Pour rappel, un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ où a est un nombre entier relatif et n un nombre entier naturel. Par exemple, $1,59$ est un nombre décimal car $1,59 = \frac{159}{100} = \frac{159}{10^2}$. Nous allons prouver que $\frac{1}{9}$ n'est pas un nombre décimal.

Par l'absurde, supposons que $\frac{1}{9}$ est un nombre décimal. On peut donc écrire $\frac{1}{9} = \frac{a}{10^n}$ comme ci-dessus. Or, deux fractions sont égales si et seulement si les produits en croix reliant numérateurs et dénominateurs sont égaux :

$$\frac{1}{9} \times \frac{a}{10^n} \iff 1 \times 10^n = 9 \times a \iff 10^n = 9a$$

Cette condition traduit le fait que 10^n est divisible par 9. Or, un nombre est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9. Mais, la somme des chiffres de 10^n vaut 1 ; qui n'est pas divisible par 9. On obtient une contradiction : $\frac{1}{9}$ n'est pas un nombre décimal.

EXERCICE 1

En raisonnant par l'absurde, montrer que $\frac{10}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

EXERCICE 2

Montrer qu'il y a un nombre infini de nombres pairs.

EXERCICE 3

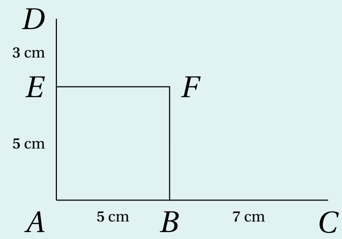
En raisonnant par l'absurde, montrer que le nombre 0 n'a pas d'inverse.

C'est pour cette raison que nous interdisons la division par zéro !

EXERCICE 4

Sur la figure ci-contre, où $ABFE$ est un carré dont chaque côté a pour longueur 5 cm, $E \in [AD]$ avec $DE = 3$ cm et $B \in [AC]$ avec $BC = 7$ cm.

Montrer que les points D, F et C ne sont pas alignés.



EXERCICE 5

Montrer que $\frac{8}{7}$ n'est pas un nombre décimal.

EXERCICE 6

Soit n un nombre entier. Démontrer que si vous rangez $(n+1)$ paires de chaussettes dans n tiroirs distincts, alors il y a au moins un tiroir contenant au moins 2 paires de chaussettes.

C'est le principe des tiroirs.

EXERCICE 7

Le but de cet exercice est de prouver qu'il existe un nombre infini de nombres premiers. Supposons par l'absurde qu'il n'existe qu'un nombre fini n de nombres premiers que l'on note $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

1. On note $N = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n + 1$. Expliquer pourquoi il existe un nombre premier qui divise N. On appelle p ce diviseur.
2. Que vaut $N - p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n$?
3. En déduire que p divise 1.
4. Conclure.

C'est Euclide qui a fourni une première version de cette preuve en 300 *av. J.-C!*