FONCTION DÉRIVÉE

1ère STMG
Cours

OBJECTIFS

- Connaître la notion de fonction dérivée.
- Connaître les formules pour dériver les fonctions puissances ainsi que les sommes et les produits de fonctions puissances par un nombre.
- Savoir calculer la dérivée d'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à trois.
- Connaître le lien entre la dérivée d'une fonction et son sens de variation.
- Déterminer le sens de variation et les extremums d'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

I Dérivée d'une fonction

1. Nombre dérivé, fonction dérivée

À RETENIR

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Soit $a \in I$. On dit que f est **dérivable** *en* a si le nombre $f'(a)$ existe.
- On dit que f est **dérivable** *sur* I si $f'(a)$ existe quelque soit $a \in I$.

Dans ce dernier cas, on appelle f' la fonction qui a tout $x \in I$ associe le nombre dérivé $f'(x)$: c'est la **fonction dérivée** (ou plus simplement **dérivée**) de f.

INFORMATION

Remarque

Si f est une fonction dérivable en $a \in \mathbb{R}$, $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente en a (lorsqu'elle existe). C'est par conséquent la « limite » du taux de variation $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ lorsque b « tend » vers a.

En faisant le changement de variable $b = a + h$, on obtient que $f'(a)$ est la « limite » du taux de variation $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque h « tend » vers 0.

EXERCICE 1

Soit f la fonction constante égale à 3. Soit $h \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$.

   a. Pour $h = 1$: .... b. Pour $h = 0,1$: .... c. Pour $h = 0,01$: ....

2. Conjecturer la valeur de $f'(0)$. ....
3. Conjecturer la valeur de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. ....

   ....

   ....

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/fonction-derivee/#correction-1.

2. Dérivées usuelles

À RETENIR

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, $x \mapsto x^n$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $x \mapsto nx^{n-1}$. En particulier, on a les formules suivantes.

Fonction	**Dérivée**
$x \mapsto 1$	$x \mapsto 0$
$x \mapsto x$	$x \mapsto 1$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto 2x$
$x \mapsto x^3$	$x \mapsto 3x^2$

EXERCICE 2

Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto x^4$: .... **2.** $x \mapsto x^7$: .... **3.** $x \mapsto x^{101}$: ....

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/fonction-derivee/#correction-2.

3. Opérations sur les dérivées

À RETENIR

Propriétés

1. Toutes les fonctions polynômiales sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.
2. Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un même intervalle I. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Fonction	**Dérivée**
$u + v$	$u' + v'$
λu	$\lambda u'$

EXERCICE 3

Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto x^3 + x$: ....

   ....
2. $g : x \mapsto 7x^2$: ....

   ....
3. $h : x \mapsto \frac{2}{3}x^3 - 4x$: ....

   ....
4. $i : x \mapsto 4x^3 - x^2 + 3x - 5$: ....

   ....

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/fonction-derivee/#correction-3.

II Études de fonctions

1. Lien entre dérivée et variations d'une fonction

À RETENIR

Théorème

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. On a les relations suivantes.

Signe de la dérivée	**Variation de la fonction**
$f'(x) > 0$	f est strictement croissante
$f'(x) \geq 0$	f est croissante
$f'(x) < 0$	f est strictement décroissante
$f'(x) \leq 0$	f est décroissante
$f'(x) = 0$	f est constante

EXEMPLE

La fonction f du premier exercice est constante et de dérivée nulle.

EXERCICE 4

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 + 4,5x^2 - 12x + 0,5$, définie et dérivable sur $[-5;4]$.

1. Montrer que $f'(x) = 3(x-1)(x+4)$ pour tout $x \in [-5;4]$.

2. Étudier les variations de f sur $[-5;4]$.

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/fonction-derivee/#correction-4.

2. Extrema

À RETENIR

Propriété

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Soit $c \in I$. Si $f'(c) = 0$ et si f' change de signe de part et d'autre de c, alors $f(c)$ est un extremum (local) de f. On a deux situation possibles :

Valeur de x		c	
Signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$
Variations de f	$\searrow$	$f(c)$	$\nearrow$

Valeur de x		c	
Signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$
Variations de f	$\nearrow$	$f(c)$	$\searrow$

EXERCICE 5

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - 16x$, définie et dérivable sur $[-6;6]$.

1. Étudier les variations de f sur $[-6;6]$.

2. En déduire les extrema de f sur $[-6;6]$. ....
....
....

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/fonction-derivee/#correction-5.