ENSEMBLES DE NOMBRES

ACTIVITÉ

En latin, *ratio* signifie « compter ». Un nombre *rationnel* est donc un nombre « que l'on sait compter » : il est quotient de deux entiers dont l'écriture décimale peut être infinie (mais dans ce cas nécessairement périodique). Par exemple,

$$\frac{2}{7} = 0,\underbrace{285714}\underbrace{285714}\underbrace{285714}\ldots$$

est un nombre rationnel.

L'objectif de cette activité est de démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. On rappelle pour cela que :

— n est un nombre entier pair si et seulement s'il est de la forme $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Par exemple, $4 = 2 \times \underbrace{2}_{k}$, $6 = 2 \times \underbrace{3}_{k}$, …

— n est un nombre entier impair si et seulement s'il est de la forme $n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Par exemple, $7 = 2 \times \underbrace{3}_{k} + 1$, $9 = 2 \times \underbrace{3}_{k} + 1$, …

1. **a.** Soit n un nombre. On suppose n impair. Démontrer que n^2 est impair.
b. Quelle est la contraposée de cette implication ?

2. On suppose par l'absurde que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ où $\frac{p}{q}$ est une fraction irréductible.

a. Démontrer que $2q^2 = p^2$.
b. Que peut-on dire de p^2 ? Et de p ?
c. Démontrer que q^2 est pair.
d. Trouver un diviseur commun à p et q.
e. Conclure.

INFORMATION

Les grecs, et plus particulièrement l'école Pythagoricienne, voyaient en les nombres rationnels l'expression même de la beauté (visuelle comme musicale). Ceux-ci ont d'ailleurs basé leur philosophie dessus : « Tout est nombre ».

Hippase de Métaponte, disciple de Pythagore, montra que la diagonale d'un carré de côté 1 (qui vaut $\sqrt{2}$) ne peut pas s'écrire comme un quotient de deux entiers : il venait de divulguer l'existence des nombres **irrationnels**. La légende raconte que, pour avoir transgressé la doctrine Pythagoricienne, Hippase fut jeté par-dessus bord et noyé dans les eaux de la mer Méditerranée par les autres disciples…