

OBJECTIFS

- Être en mesure de vérifier qu'une valeur conjecturée est racine d'un polynôme de degré 2.
- Savoir factoriser, dans des cas simples, une expression du second degré.
- Utiliser la forme factorisée (en produit de facteurs du premier degré) d'un polynôme de degré 2 pour trouver ses racines et étudier son signe.
- Déterminer des éléments caractéristiques de la fonction $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ (signe, extremum, allure de la courbe, axe de symétrie...).
- Savoir associer une parabole à une expression algébrique de degré 2, pour les fonctions de la forme $x \mapsto ax^2$, $x \mapsto ax^2 + c$ et $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$.

I Définitions

1. Fonction du second degré

À RETENIR

Définition

On appelle **fonction polynomiale du second degré** (ou **fonction du second degré** pour abréger) toute fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$.

L'expression littérale $ax^2 + bx + c$ est un **polynôme de degré 2**.

EXEMPLE

La fonction carré $x \mapsto x^2$ est une fonction du second degré.

2. Racines

À RETENIR

Définition

Soit f une fonction du second degré. On appelle **racine** de f , tout nombre x vérifiant $f(x) = 0$. Une fonction du second degré admet au plus deux racines distinctes dans \mathbb{R} .

EXERCICE 1

Combien de racines distinctes la fonction $f : x \mapsto x^2 + 1$ possède-t-elle dans \mathbb{R} ?

.....

☞ Voir la correction : <https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/fonctions-second-degre/#correction-1>.

3. Forme développée, forme factorisée

À RETENIR ∞

Définitions

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction du second degré.

- La forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ est appelée **forme développée** de f .
- Si f admet deux racines x_1 et x_2 , alors on peut écrire $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Cette dernière expression est appelée **forme factorisée** de f .

EXEMPLE 📌

On définit une fonction f sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + 2x + 1$. C'est une fonction du second degré (avec $a = 1$, $b = 2$ et $c = 1$). Comme $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$, on a :

- La forme factorisée de $f : f(x) = (x + 1)^2 = (x + 1)(x + 1)$.
- La forme développée de $f : f(x) = x^2 + 2x + 1$.

EXERCICE 2 📌

On définit une fonction f du second degré sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 - 4$.

1. Factoriser $f(x)$
2. Quelles sont les racines de f ?
3. En déduire formes développées et factorisées de f .
a. Forme factorisée de f : b. Forme développée de f :

👉 Voir la correction : <https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/fonctions-second-degre/#correction-2>.

II Courbe représentative

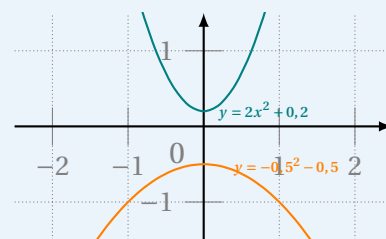
1. Orientation de la parabole

À RETENIR ∞

Définition

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction du second degré. La courbe représentative de f , notée \mathcal{C}_f , est une **parabole**.

- Lorsque $a > 0$, on dit que la parabole \mathcal{C}_f est **tournée vers le haut** : elle forme un « sourire ».
- Lorsque $a < 0$, on dit que la parabole \mathcal{C}_f est **tournée vers le bas** : elle forme un « sourire inversé ».



EXERCICE 3 📌

Pour chacune des fonctions du second degré ci-dessous, donner l'orientation de sa courbe représentative.

1. $f : x \mapsto 3x^2 + 2x + 1$:
2. $g : x \mapsto 1 - x^2$:
3. $h : x \mapsto (1 - x)^2$:

👉 Voir la correction : <https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/fonctions-second-degre/#correction-3>.

2. Sommet, axe de symétrie

À RETENIR ∞

Propriétés

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction du second degré.

1. Le sommet de la parabole \mathcal{C}_f a pour coordonnées $(\alpha; \beta)$ où $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.
2. La parabole \mathcal{C}_f admet un axe de symétrie vertical d'équation $x = -\frac{b}{2a}$.

EXERCICE 4

Après avoir esquissé la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto 4x^2 + 8x + 1$, déterminer le tableau de variation de f .

 Voir la correction : <https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/fonctions-second-degre/#correction-4>.



3. Fonctions $x \mapsto ax^2 + c$

À RETENIR

Propriété

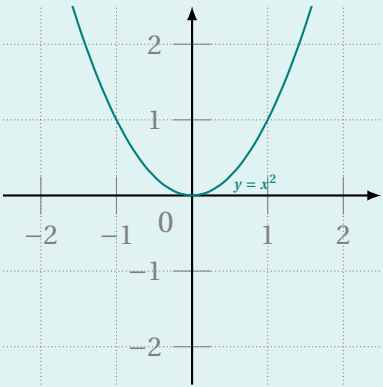
Soit $f : x \mapsto ax^2 + c$ une fonction du second degré (notons que le coefficient b est nul).

Propriété	Illustration
L'axe de symétrie de f est la droite d'équation $x = 0$. Plus a est proche de zéro, plus la courbe « s'écarte ». À l'inverse, plus le coefficient a s'éloigne de zéro, plus la courbe « se contracte ».	
La courbe représentative de $x \mapsto ax^2$ est symétrique à celle de $x \mapsto -ax^2$ par rapport à l'axe des abscisses.	
La courbe représentative de f est la même que celle de $x \mapsto ax^2$, mais translatée de c unités de longueur vers le haut.	

EXERCICE 5

On a tracé ci-contre la courbe représentative de la fonction carré $x \mapsto x^2$. Tracer à main levée l'allure de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto -3x^2 - 0,5$. Décrire les différentes étapes.

- Étape 1.
- Étape 2.
- Étape 3.



Voir la correction : <https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/fonctions-second-degre/#correction-5>.

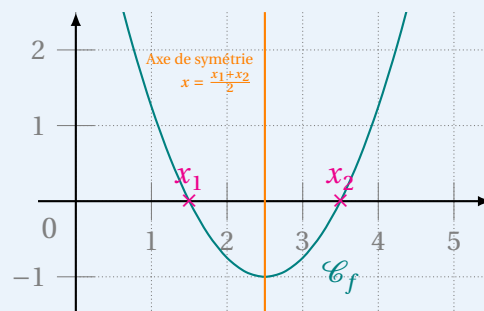
4. Lien avec les racines

À RETENIR

Propriété

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction du second degré. Alors, f admet deux racines x_1 et x_2 si et seulement si \mathcal{C}_f admet deux points d'intersection avec l'axe des abscisses.

Dans ce cas, les coordonnées de ces points d'intersection sont $(x_1; 0)$ et $(x_2; 0)$. De plus, l'axe de symétrie vertical de f a pour équation $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.



EXERCICE 6

On définit une fonction f du second degré sur \mathbb{R} par $f(x) = 3x^2 - 9x - 30$.

1. Vérifier que -2 et 5 sont les racines de f
2. En déduire la forme factorisée de f
3. Donner les tableaux de signes et de variation de f .

☞ Voir la correction : <https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/fonctions-second-degre/#correction-6>.