PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

OBJECTIFS

— Découvrir la notion de probabilité conditionnelle.
— Calculer des probabilités conditionnelles lorsque les événements sont présentés sous forme de tableau croisé d'effectifs.
— Travailler avec la probabilité associée à une expérience aléatoire à deux épreuves indépendantes.
— Représenter par un arbre de probabilités une expérience aléatoire à deux épreuves indépendantes et déterminer les probabilités des événements associés aux différents chemins.

I Probabilités

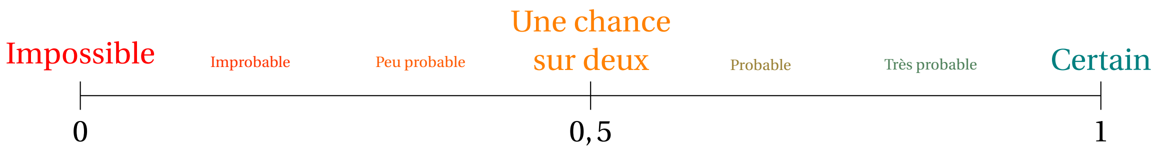
1. Vocabulaire

À RETENIR

Définitions

— Une **expérience aléatoire** est une expérience dont les différents résultats possibles appelés **issues** sont connus mais dont on ne sait pas, a priori, lequel va se produire. L'ensemble des issues forme **l'univers** de l'expérience.

— La **probabilité d'une issue** est un nombre compris entre 0 et 1, qui peut s'interpréter comme « la proportion de chances » d'obtenir cette issue.



On dit que les issues d'une expérience sont **équiprobables** si elles ont la même probabilité.

— Un **événement** désigne un ensemble d'issues. Si le résultat de l'expérience aléatoire est une des issues de l'événement, on dit que l'événement est **réalisé**. La **probabilité d'un événement** est la somme des probabilités des issues qui le réalisent.

EXEMPLE

On lance un dé équilibré à 6 faces. Les issues sont :

— « Obtenir 1 » ; — « Obtenir 2 » ; — « Obtenir 3 » ; — « Obtenir 4 » ; — « Obtenir 5 » ; — « Obtenir 6 ».

Chacune de ces issues à une probabilité de $\frac{1}{6}$ de se produire : il s'agit donc d'une situation d'équiprobabilité. Soit A l'événement « Obtenir un nombre pair ». Alors, on peut calculer la probabilité de A, notée $P(A)$:

$$\begin{aligned} P(A) &= \overbrace{\frac{1}{6}}^{\text{Probabilité d'obtenir 2}} + \overbrace{\frac{1}{6}}^{\text{Probabilité d'obtenir 4}} + \overbrace{\frac{1}{6}}^{\text{Probabilité d'obtenir 6}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

EXERCICE 1

Dans un sac se trouvent trois boules : une blanche, une bleue et une rouge. On en tire une au hasard.

1. Compléter le tableau ci-dessous en écrivant les issues possibles dans la première colonne et la probabilité correspondante dans la deuxième.

Issue	**Probabilité**

2. A-t-on une situation d'équiprobabilité ? ....
3. Que vaut la somme des probabilités de la deuxième colonne ? ....
4. Quelle est la probabilité de l'événement « Tirer une boule colorée » ? ....

....

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/probabilites-conditionnelles/#correction-1.

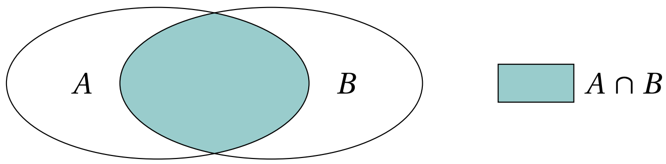
2. Union et intersection d'événements

À RETENIR

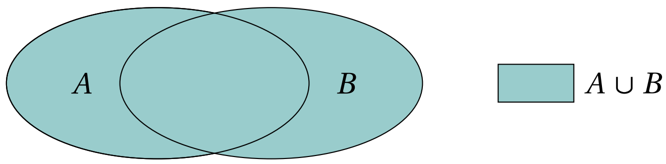
Définitions

Soient A et B deux événements.

— L'événement constitué des issues appartenant à A et à B est noté $A \cap B$.



— L'événement constitué des issues appartenant à A ou à B est noté $A \cup B$.



À RETENIR

Propriété

Soient A et B deux événements. Alors,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

EXERCICE 2

Un vendeur ambulant vend des fleurs rouges et jaunes de deux sortes. Il dispose de 15 roses rouges et 12 jaunes ainsi que de 20 tulipes rouges et 22 jaunes. Il propose au hasard une fleur à un client. On considère les événements suivants :

— J : « La fleur proposée est jaune » ;

— T : « La fleur proposée est une tulipe ».

1. Déterminer les probabilités suivantes.

a. $P(J) =$ .... **b.** $P(T) =$ .... **c.** $P(\bar{J}) =$ .... **d.** $P(\overline{T}) =$ ....

2. Décrire les événements $T \cap J$ et $T \cup J$, puis déterminer leur probabilité. ....

....

....

....

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/probabilites-conditionnelles/#correction-2.

3. Événement contraire

À RETENIR

Définition

Soit A un événement. On appelle **événement contraire** de A, l'événement constitué des issues n'appartenant pas à A. On le note $\overline{A}$.

À RETENIR

Propriété

Soit A un événement. Alors,

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

EXERCICE 3

Le jeu de cartes français est un jeu de 54 cartes organisées en quatre couleurs : trèfle, carreau, cœur et pique. Il comporte 52 cartes à jouer réparties en quatre familles de treize, plus deux jokers.

On dispose d'un tel jeu, et on tire au hasard une carte.

1. Quelle est la probabilité que cette carte soit un Roi ? ....

2. Quelle est la probabilité que cette carte ne soit pas un cœur ? ....

....

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/probabilites-conditionnelles/#correction-3.

II Conditionnement

1. Probabilité conditionnelle

À RETENIR

Définition

Soient A et B deux événements. On suppose A non vide. $P_A(B)$ désigne la probabilité que l'événement B soit réalisé sachant que A est réalisé. On dit que c'est une **probabilité conditionnelle**.

INFORMATION

Remarque

Il faut faire attention, à bien faire la distinction entre une probabilité conditionnelle (ie. « Sachant qu'on a A, quelle est la probabilité d'avoir B ? ») et une intersection (ie. « Quelle est la probabilité d'avoir A et B à la fois ? »).

À RETENIR

Propriété

Soient A et B deux événements. On note $\text{card}(A)$ le nombre d'issues qui réalisent l'événement A. Alors, on a

$$P_A(B) = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(A)}$$

EXERCICE 4

On donne ci-dessous la répartition des spectateurs sur une journée dans une salle de cinéma selon les séances et le tarif.

$(X;Y)$	Plein tarif	Demi tarif	**Total**
Séance du matin	103	91	204
Séance du soir	280	26	306
Total	383	117	500

On choisit un de ces spectateurs au hasard et on considère les événements :

— M : « La personne a assisté à la séance du matin » ;

— D : « La personne a payé demi-tarif ».

1. Déterminer $P_{\overline{D}}(M)$. ....

2. Déterminer $P_M(\overline{D})$. ....

3. Donner une interprétation de ces deux probabilités dans le contexte de l'exercice. ....

....

....

....

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/probabilites-conditionnelles/#correction-4.

2. Indépendance

À RETENIR

Définition

On dit que deux événements A et B sont **indépendants** si $P(B) = P_A(B)$. En réalisant successivement deux expériences aléatoires telles que les événements associés à la première soient indépendants des événements associés à la seconde, on dit que l'on réalise une **expérience aléatoire à deux épreuves indépendantes**.

INFORMATION

Concrètement, la définition précédente signifie que :

— deux événements sont indépendants si la réalisation de l'un n'a pas d'influence sur celle de l'autre ;

— deux épreuves sont indépendantes si le résultat de l'une n'a pas d'influence sur celui de l'autre.

EXEMPLE

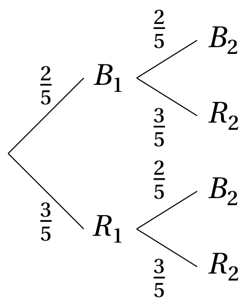
Une urne contient deux boules blanches et trois boules rouges. On tire une première boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne. On en fait de même avec une deuxième boule.

On note :

— B_1 l'événement « La première boule est blanche » et B_2 l'événement « La deuxième boule est blanche ». On a donc $P(B_1) = P(B_2) = \frac{2}{5}$.

— R_1 l'événement « La première boule est rouge » et R_2 l'événement « La deuxième boule est rouge ». On a donc $P(R_1) = P(R_2) = \frac{3}{5}$.

C'est une expérience aléatoire à deux épreuves indépendantes que l'on peut représenter par l'arbre ci-contre.



La probabilité de tirer deux boules blanches est donnée en suivant les branches de l'arbre, et en multipliant les probabilités rencontrées : $P(B_1 \cap B_2) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$.

EXERCICE 5

On lance une pièce équilibrée deux fois de suite. On note P_i l'événement « Obtenir Pile au i-ième lancer », et F_i l'événement « Obtenir Face au i-ième lancer ».

1. Représenter cette expérience aléatoire dans un arbre de probabilités.

2. Quelle est la probabilité d'obtenir une fois Face et une fois Pile ? ....

....

3. **a.** Quelle est la probabilité d'obtenir Pile au deuxième lancer sachant qu'on a déjà obtenu Pile ? ...

....

b. A-t-on indépendance ? ....

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/probabilites-conditionnelles/#correction-5.