

OBJECTIFS

- Être en mesure de vérifier qu'une valeur conjecturée est racine d'un polynôme de degré 3.
- Utiliser la forme factorisée (en produit de facteurs du premier degré) d'un polynôme de degré 3 pour trouver ses racines et étudier son signe.
- Savoir résoudre des équations de la forme $x^3 = c$ avec c positif.

I Racine cubique

1. Rappels

À RETENIR

Définition

La **fonction cube** est la fonction définie sur \mathbb{R} par $x \mapsto x^3$.

EXERCICE 1

Effectuer les calculs suivants.

1. $2^3 = \dots\dots\dots$ 2. $-2^3 = \dots\dots\dots$ 3. $(-3)^3 = \dots\dots\dots$ 4. $5^3 = \dots\dots\dots$

☛ Voir la correction : <https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/fonctions-troisieme-degre/#correction-1>.

À RETENIR

Propriétés

1. La fonction cube est une fonction impaire.
2. Tout nombre a admet un unique antécédent par la fonction cube : c'est sa **racine cubique**, notée $\sqrt[3]{a}$.

EXERCICE 2

Effectuer les calculs de racines cubiques suivants.

1. $\sqrt[3]{125} = \dots\dots\dots$ 2. $\sqrt[3]{-8} = \dots\dots\dots$ 3. $\sqrt[3]{-1} = \dots\dots\dots$ 4. $\sqrt[3]{27} = \dots\dots\dots$

☛ Voir la correction : <https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/fonctions-troisieme-degre/#correction-2>.

2. Équations $x^3 = c$

À RETENIR

Propriété

On considère un nombre réel c positif. Alors, l'équation $x^3 = c$ admet une unique solution, qui est $\sqrt[3]{c}$.

EXERCICE 3

Résoudre l'équation $x^3 + x - 2 = x$

.....

☛ Voir la correction : <https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/fonctions-troisieme-degre/#correction-3>.

II Définitions

1. Fonction du troisième degré

À RETENIR

Définition

On appelle **fonction polynômiale du troisième degré** (ou **fonction du troisième degré** pour abréger) toute fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$.

L'expression littérale $ax^3 + bx^2 + cx + d$ est un **polynôme de degré 3**.

EXEMPLE

La fonction cube $x \mapsto x^3$ est une fonction du troisième degré.

2. Racines

À RETENIR

Définition

Soit f une fonction du troisième degré. On appelle **racine** de f , tout nombre x vérifiant $f(x) = 0$. Une fonction du troisième degré admet au plus troisième racines distinctes dans \mathbb{R} .

EXERCICE 4

Combien de racines distinctes la fonction $f : x \mapsto x^3 - 1$ possède-t-elle dans \mathbb{R} ?

.....

☛ Voir la correction : <https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/fonctions-troisieme-degre/#correction-4>.

3. Forme développée, forme factorisée

À RETENIR

Définitions

Soit $f : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ une fonction du troisième degré.

- La forme $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ est appelée **forme développée** de f .
- Si f admet trois racines x_1, x_2 et x_3 , alors on peut écrire $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$. Cette dernière expression est appelée **forme factorisée** de f .

EXEMPLE

On définit une fonction f sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. C'est une fonction du troisième degré (avec $a = 1$, $b = -6$, $c = 11$ et $d = -6$). Comme $f(1) = f(2) = f(3) = 0$, on a :

- La forme factorisée de f : $f(x) = (x - 3)(x - 2)(x - 1)$.
- La forme développée de f : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

EXERCICE 5

- Déterminer la forme développée de la fonction du troisième degré $f : x \mapsto (x - 1)(x^2 + x + 1)$
- Admet-elle une forme factorisée?

☛ Voir la correction : <https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/fonctions-troisieme-degre/#correction-5>.

III Courbe représentative

1. Fonctions $x \mapsto ax^3 + d$

À RETENIR

Propriété

Soit $f : x \mapsto ax^3 + d$ une fonction du troisième degré (notons que les coefficients b et c sont nuls).

Propriété	Illustration
Le centre de symétrie de f est le point de coordonnées $(0; d)$. Plus a est proche de zéro, plus la courbe « s'écarte ». À l'inverse, plus le coefficient a s'éloigne de zéro, plus la courbe « se contracte ».	
La courbe représentative de $x \mapsto ax^3$ est symétrique à celle de $x \mapsto -ax^3$ par rapport à l'axe des abscisses.	
La courbe représentative de f est la même que celle de $x \mapsto ax^3$, mais translatée de d unités de longueur vers le haut.	

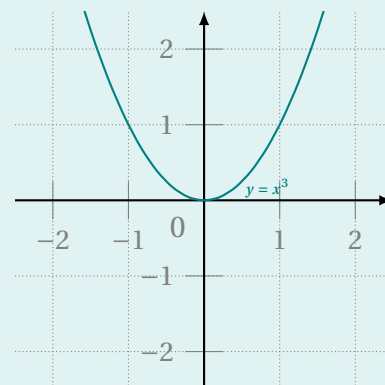
EXERCICE 6

On a tracé ci-contre la courbe représentative de la fonction carré $x \mapsto x^2$. Tracer à main levée l'allure de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto -3x^3 + 0,5$. Décrire les différentes étapes.

Étape 1.

Étape 2.

Étape 3.



Voir la correction : <https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/fonctions-troisieme-degre/#correction-6>.

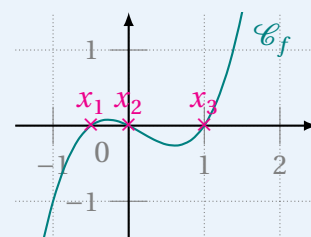
2. Lien avec les racines

À RETENIR

Propriété

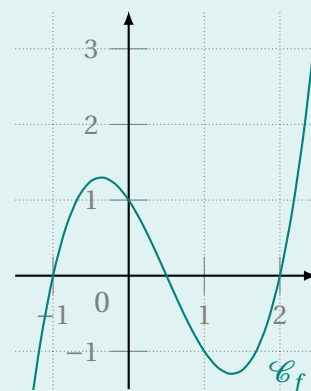
Soit $f : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ une fonction du troisième degré. Alors, f admet trois racines x_1 , x_2 et x_3 si et seulement si \mathcal{C}_f admet trois points d'intersection avec l'axe des abscisses.

Dans ce cas, les coordonnées de ces points d'intersection sont $(x_1; 0)$, $(x_2; 0)$ et $(x_3; 0)$.



EXERCICE 7

On a tracé ci-contre la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x^3 - 1,5x^2 - 1,5x + 1$. Déterminer sa forme factorisée.



Voir la correction : <https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/fonctions-troisieme-degre/#correction-7>.