# LOI DE BERNOULLI

1ère STMG
Cours

**OBJECTIFS**

- Connaître la notion de loi de Bernoulli (de paramètre $p \in [0;1]$). Connaître son espérance.
- Reconnaître une situation aléatoire modélisée par une loi de Bernoulli.
- Savoir déterminer la probabilité associée à la répétition d'épreuves aléatoires identiques et indépendantes de Bernoulli.
- Représenter par un arbre de probabilités la répétition de $n$ épreuves aléatoires identiques et indépendantes de Bernoulli avec $n \leq 4$ afin de calculer des probabilités.
- Simuler $N$ échantillons de taille $n$ d'une loi de Bernoulli et représenter les fréquences observées des 1 par un histogramme ou un nuage de points.

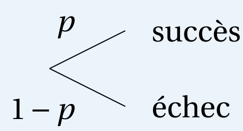
# I Épreuve et loi de Bernoulli

## 1. Épreuve de Bernoulli

**À RETENIR**

### Définition

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire dans laquelle on s'intéresse à la réalisation d'un événement particulier, qu'on appelle le **succès** de probabilité $p$. Sa non-réalisation s'appelle **l'échec**.




**EXEMPLE**

Une personne se présente devant la porte de l'ascenseur à l'entrée d'un immeuble. L'ascenseur peut être au rez-de-chaussée, avec une probabilité de $0,4$. Il pourra utiliser l'ascenseur immédiatement s'il se situe au rez-de-chaussée, il devra attendre dans les autres cas.

On peut définir un événement succès $S$ : « L'ascenseur est au rez-de-chaussée » ; et un événement échec $E$ : « L'ascenseur n'est pas au rez-de-chaussée ». On a bien $E = \overline{S}$, $P(S) = 0,4$ et $P(E) = 1 - 0,4 = 0,6$.

**EXERCICE 1**

Parmi les expériences aléatoires suivantes, indiquer lesquelles sont des épreuves de Bernoulli.

| **Situation** | **Épreuve de Bernoulli** |
|---|---|
| On lance un dé à six faces. On s'intéresse à l'événement "obtenir un nombre pair". | |
| On tire une carte dans un jeu de 52 cartes. On regarde la couleur obtenue. | |
| On interroge une personne dans la rue pour savoir si elle est majeure. | |
| On mesure la taille d'un élève choisi au hasard dans une classe. | |
| On tire une boule dans une urne contenant des boules rouges et bleues. On s'intéresse à l'événement "obtenir une boule rouge". | |
| On joue au loto et on regarde si on a gagné le gros lot. | |
| On lance un dé et on regarde le numéro obtenu. | |

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/loi-bernoulli/#correction-1.

## 2. Loi de Bernoulli

À RETENIR

### Définition

Soient $X$ une variable aléatoire et $p \in [0;1]$. On dit que $X$ suit une **loi de Bernoulli** de paramètre $p$ si elle prend la valeur 1 avec une probabilité $p$ et la valeur 0 avec la probabilité $1-p$.

À RETENIR

### Propriété

Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p$. Alors, la loi de probabilité de $X$ est donnée par le tableau ci-contre. De plus, on a $E(X) = p$.

| $x_i$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $1-p$ | $p$ |

EXERCICE 2

On lance un dé à 10 faces, et on s'intéresse à l'événement « Obtenir 8 ». On suppose qu'on gagne 1 € à chaque fois que cet événement se réalise, et on ne gagne rien sinon.

1. Expliciter l'épreuve de Bernoulli en spécifiant l'événement succès, l'événement échec et les probabilités associées. ..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

2. Soit $X$ la variable aléatoire égale aux gains.
   a. Quelle est la loi de probabilité de $X$ ?

   b. Que vaut $E(X)$ ? ..........................................................................................

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/loi-bernoulli/#correction-2.

# II Simulation et échantillons

## 1. Répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes

À RETENIR

### Définition

La répétition de $n$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes peut être représentée à l'aide d'un arbre de probabilités. On peut ainsi définir une variable aléatoire $N$ qui compte le nombre de succès obtenus lors de cette répétition.

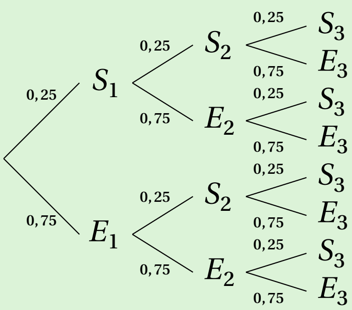
Les $n$ résultats obtenus s'appellent un **échantillon** de taille $n$.

**EXEMPLE**

Un vendeur contacte trois clients successivement. La probabilité qu'un client réponde favorablement à sa demande est égale à $\frac{1}{4}$. On suppose que les réponses des clients sont indépendantes. On note $S_i$ l'événement « Le $i$-ième client répond favorablement » et $E_i = \overline{S_i}$.

On pose $N$ la variable aléatoire qui compte le nombre de réponses favorables. On souhaite déterminer la probabilité de l'événement $\{N = 1\}$.

**Arbre**




| Valeur de $N$ | Probabilité |
|---|---|
| 3 | $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$ |
| 2 | $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{64}$ |
| 2 | $\frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{64}$ |
| 1 | $\frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{64}$ |
| 2 | $\frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{64}$ |
| 1 | $\frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{64}$ |
| 1 | $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{64}$ |
| 0 | $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{27}{64}$ |

D'après l'arbre de probabilités ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} P(N=1) &= \frac{9}{64} + \frac{9}{64} + \frac{9}{64} \\ &= \frac{27}{64} \end{aligned}$$

La probabilité qu'exactement un client réponde favorablement est égale à $\frac{27}{64}$.

**EXERCICE 3**

Un standard téléphonique tente de joindre trois personnes successivement. Pour chaque appel, la probabilité que la personne décroche a été évaluée à $0,3$. On suppose que les appels sont indépendants les uns des autres.

**1.** Représenter la situation dans un arbre de probabilité.

**2.** Quelle est la probabilité que deux personnes décrochent parmi les trois? ........................

..........................................................................................

..........................................................................................

..........................................................................................

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/loi-bernoulli/#correction-3.

## 2. Simulation

À RETENIR

### Remarque

Simuler un échantillon informatiquement permet d'étudier des séries statistiques comportant un très grand nombre de données.

EXEMPLE

Le code ci-contre est composé de deux fonctions.

— `piece()` qui permet de renvoyer aléatoirement 0 (pour Face) ou 1 (pour Pile) afin de simuler un lancer de pièce.

— `echantillon(n)` qui simule $n$ lancers de pièce et renvoie la liste des résultats.

Par exemple, `echantillon(20)` pourra renvoyer la liste

`[0,0,1,1,1,0,0,0,1,0,0,1,0,0,1,1,1,0,0,0]`

qui présente une fréquence de Pile égale à $\frac{8}{20}$.

```python
import random

def piece():
  return random.randint(0, 1)

def echantillon(n):
  L = []
  for i in range(n):
    L.append(piece())
  return L
```

EXERCICE 4

On lance un dé à 6 faces et on s'intéresse à l'événement « Obtenir 6 ».

1. Expliciter l'épreuve de Bernoulli étudiée ici et donner la loi de Bernoulli associée.

2. Écrire une fonction `frequenceDe6(n)` en Python qui construit un échantillon de taille $n$ et qui calcule la fréquence de 6 dans cet échantillon.

3. À quoi sert la fonction `simulation(n, N)` écrite ci-dessous ?

.......................................................................

.......................................................................

.......................................................................

.......................................................................

```python
def simulation(n, N):
  resultat = []
  for i in range(N):
    resultat.append(frequenceDe6(n))
  return resultat
```

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/loi-bernoulli/#correction-4.

# 3. Fluctuation

À RETENIR

## Définition

Si on réalise plusieurs échantillons de même taille, la fréquence du succès observée sur chaque expérience varie. C'est ce qu'on appelle la **fluctuation d'échantillonnage**. Plus la taille des échantillon est grande, plus ce phénomène diminue : les fréquences se rapprochent alors du paramètre $p$ de la loi de Bernoulli associée.

EXEMPLE

On exécute `simulation(1000, 10)` où `simulation(n, N)` est la fonction définie à l'exercice précédent, et on obtient le résultat suivant :

```
[0.164,0.186,0.176,0.154,0.178,0.161,0.159,0.176,0.176,0.167]
```

On constate qu'avec une taille d'échantillon suffisamment élevée (1 000 ici), les fréquences se stabilisent autour de la probabilité de $\frac{1}{6} \approx 0,167$.

À RETENIR

## Propriété

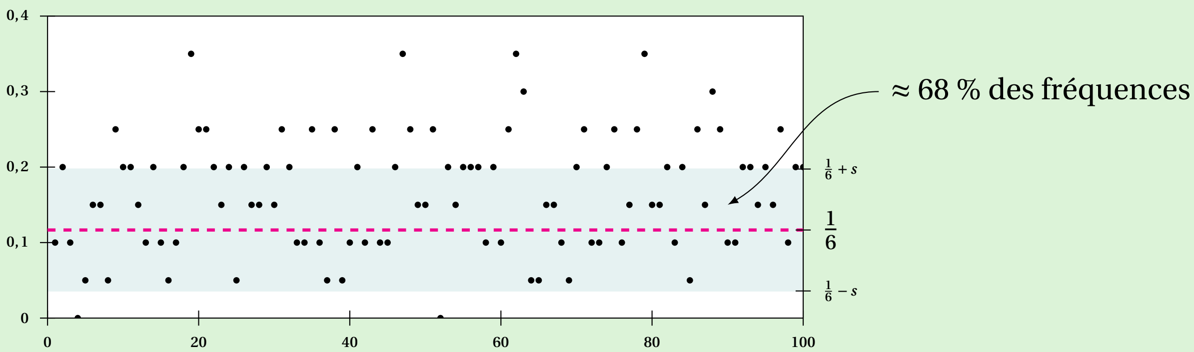
On étudie une simulation de $N$ échantillons de taille $n$ et on note $s$ l'écart type de la série des fréquences obtenues. Soit $p$ le paramètre de la loi de Bernoulli associée.

— En moyenne, 68 % des fréquences sont dans l'intervalle $[p - s; p + s]$.
— En moyenne, 95 % des fréquences sont dans l'intervalle $[p - 2s; p + 2s]$.
— En moyenne, 98 % des fréquences sont dans l'intervalle $[p - 3s; p + 3s]$.

De plus, on a $s \approx \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

EXEMPLE

On exécute `simulation(20, 100)` où `simulation(n, N)` est la fonction définie à l'exercice précédent, et on représente le résultat dans le graphique ci-dessous par un nuage de points.




À partir des fréquences observées, on retrouve également une approximation de la probabilité théorique d'obtenir 6 : $\frac{1}{6}$.