DROITES DU PLAN

OBJECTIFS

— Déterminer une équation de droite à partir de deux points, un point et un vecteur directeur ou un point et la pente.
— Déterminer la pente ou un vecteur directeur d'une droite donnée par une équation ou une représentation graphique.
— Tracer une droite connaissant son équation cartésienne ou réduite.
— Déterminer si deux droites sont parallèles ou sécantes.
— Résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues, déterminer le point d'intersection de deux droites sécantes.

I Équations d'une droite

1. Vecteur directeur

À RETENIR

Définition

On appelle **vecteur directeur** d'une droite tout vecteur qui suit la direction de celle-ci.

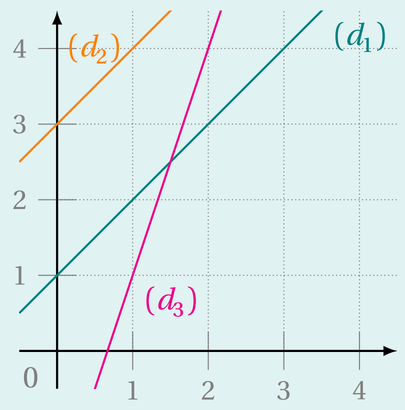
EXERCICE 1

On se place dans le repère cartésien ci-contre. Pour chaque droite, donner les coordonnées d'un vecteur directeur.

1. (d_1) : ....

2. (d_2) : ....

3. (d_3) : ....



Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/seconde/droites/#correction-1.

2. Équation cartésienne

À RETENIR

Définition

Soit (d) une droite dont les coordonnées d'un vecteur directeur sont $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$. Alors, un point de coordonnées $(x; y)$ appartient à (d) si et seulement si on a

$$ax + by + c = 0$$

où $c \in \mathbb{R}$. Cette équation est appelée **équation cartésienne** de (d).

EXEMPLE

Un vecteur directeur de la droite (d_1) de l'exercice précédent est $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Son équation cartésienne est donc de la forme $x - y + c = 0$. Or, le point $A(0;1)$ appartient à cette droite, donc $0 - 1 + c = 0 \iff c = 1$. Une équation cartésienne de (d_1) est donc $x + y + 1 = 0$.

EXERCICE 2

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $A(-1;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$.

   ....

   ....

   ....
2. Le point $B(0;6)$ appartient-il à cette droite ? ....

   ....

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/seconde/droites/#correction-2.

3. Équation réduite

À RETENIR

Définitions

— Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation cartésienne de la forme $y = mx + p$. C'est son **équation réduite**.

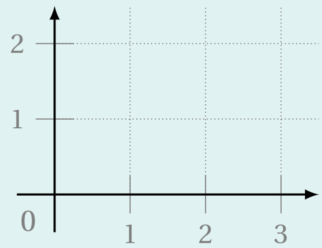
— Dans le cas d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées, son **équation réduite** est de la forme $x = k$.

EXERCICE 3

On considère la droite (d) d'équation réduite $y = -\frac{2}{3}x + 2$.

1. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur de (d). ....

   ....
2. Représenter (d) dans le repère ci-contre.



Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/seconde/droites/#correction-3.

INFORMATION

Remarque

Il y a un lien fort entre ce concept et celui des fonctions affines : la représentation graphique d'une fonction affine $x \mapsto mx + p$ est la droite d'équation réduite $y = mx + p$. Réciproquement, toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine.

À RETENIR

Propriétés

On considère la droite (d) d'équation $y = mx + p$.

1. Le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de cette droite. Ainsi :
   - Si $m > 0$, la droite (d) « monte ».
   - Si $m < 0$, la droite (d) « descend ».
   - Si $m = 0$, la droite (d) est horizontale.
2. Le point d'intersection de (d) avec l'axe des ordonnées a pour coordonnées $(0; p)$. C'est pour cette raison que p est appelé « ordonnée à l'origine ».

EXERCICE 4

On a représenté une droite (d) ci-contre. Déterminer son équation réduite. ....

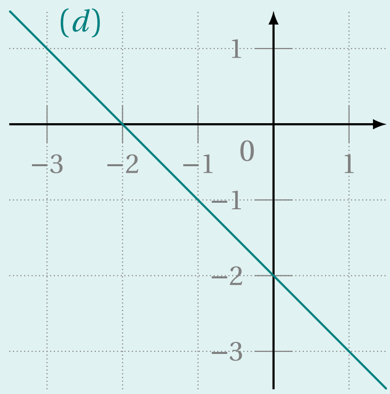
....

....

....

....

....



Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/seconde/droites/#correction-4.

II Intersection de deux droites

1. Parallélisme

À RETENIR

Propriété

Soient (d_1) et (d_2) deux droites. On note :

- $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ une équation cartésienne et $m_1x + p_1 = 0$ une équation réduite de (d_1).
- $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ une équation cartésienne et $m_2x + p_2 = 0$ une équation réduite de (d_2).

On a les relations suivantes.

Position des droites	**Vecteurs directeurs**	**Équations cartésiennes**	**Équations réduites**
Parallèles	Colinéaires	$a_1 = k \times a_2$ et $b_1 = k \times b_2$	$m_1 = m_2$
Confondues	Colinéaires et de même origine	$a_1 = k \times a_2$, $b_1 = k \times b_2$ et $c_1 = k \times c_2$	$m_1 = m_2$ et $p_1 = p_2$
Sécantes	Non colinéaires	Pas de proportionnalité	$m_1 \neq m_2$

EXERCICE 5

Étudier les positions relatives des droites (d_1) et (d_2) d'équations cartésiennes respectives $4x-3y+1=0$ et $-2x+y+3=0$. ....

....

....

....

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/seconde/droites/#correction-5.

2. Coordonnées du point d'intersection

À RETENIR

Définition

On appelle **système linéaire à** 2 **équations en** 2 **inconnues** un ensemble de deux équations de la forme

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$$

où $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ sont des constantes réelles. Une **solution** à ce système est un couple $(x;y)$ qui vérifie les deux équations.

EXERCICE 6

Vérifier que $(-3;5)$ est solution du système

$$\begin{cases} 2x+3y-9=0 \\ -x+2y-13=0 \end{cases}$$

....

....

....

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/seconde/droites/#correction-6.

À RETENIR

Propriété

Soient (d_1) et (d_2) deux droites d'équations cartésiennes respectives $a_1x+b_1y+c_1=0$ et $a_2x+b_2y+c_2=0$.

On considère le système d'équations (S) : $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$.

- (S) admet une unique solution $(x;y)$ si et seulement si (d_1) et (d_2) sont sécantes en le point de coordonnées $(x;y)$.
- (S) n'admet pas de solution si et seulement si (d_1) et (d_2) sont strictement parallèles.
- (S) admet une infinité de solutions si et seulement si (d_1) et (d_2) sont confondues.

EXERCICE 7

Que peut-on dire des droites (d_1) et (d_2) d'équations cartésiennes respectives $2x+3y-9=0$ et $-x+2y-13=0$? ....

....

....

....

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/seconde/droites/#correction-7.

À RETENIR

Méthode

La méthode de résolution par substitution consiste à isoler une des inconnues dans une des équations, puis à remplacer cette expression dans l'autre équation. On obtient alors la valeur d'une inconnue, qu'il suffit de remplacer dans la première équation pour trouver la valeur de la seconde inconnue.

EXERCICE 8

Résoudre le système $\begin{cases} 4x-3y+1=0 \\ -2x+y+3=0 \end{cases}$ par substitution.

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/seconde/droites/#correction-8.

À RETENIR

Méthode

La méthode de résolution par combinaison consiste à multiplier ou à diviser les lignes par des nombres de telle manière qu'en additionnant les équations, une inconnue s'élimine. Pour trouver la seconde inconnue, on peut renouveler la même méthode.

EXERCICE 9

Résoudre le système $\begin{cases} 3x-2y+1=0 \\ -2x+4y=3 \end{cases}$ par combinaison.

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/seconde/droites/#correction-9.