FONCTIONS POLYNÔMIALES DU TROISIÈME DEGRÉ

OBJECTIFS

— Être en mesure de vérifier qu'une valeur conjecturée est racine d'un polynôme de degré 3.
— Utiliser la forme factorisée (en produit de facteurs du premier degré) d'un polynôme de degré 3 pour trouver ses racines et étudier son signe.
— Savoir résoudre des équations de la forme $x^3 = c$ avec c positif.

I Racine cubique

1. Rappels

À RETENIR

Définition

La **fonction cube** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto x^3$.

EXERCICE 1

Effectuer les calculs suivants.

1. $2^3 =$ .... **2.** $-2^3 =$ .... **3.** $(-3)^3 =$ .... **4.** $5^3 =$ ....

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/fonctions-troisieme-degre/#correction-1.

À RETENIR

Propriétés

1. La fonction cube est une fonction impaire.

2. Tout nombre a admet un unique antécédent par la fonction cube : c'est sa **racine cubique**, notée $\sqrt[3]{a}$.

EXERCICE 2

Effectuer les calculs de racines cubiques suivants.

1. $\sqrt[3]{125} =$ .... **2.** $\sqrt[3]{-8} =$ .... **3.** $\sqrt[3]{-1} =$ .... **4.** $\sqrt[3]{27} =$ ....

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/fonctions-troisieme-degre/#correction-2.

2. Équations $x^3 = c$

À RETENIR

Propriété

On considère un nombre réel c positif. Alors, l'équation $x^3 = c$ admet une unique solution, qui est $\sqrt[3]{c}$.

EXERCICE 3

Résoudre l'équation $x^3 + x - 2 = x$. ....

....

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/fonctions-troisieme-degre/#correction-3.

II Définitions

1. Fonction du troisième degré

À RETENIR

Définition

On appelle **fonction polynômiale du troisième degré** (ou **fonction du troisième degré** pour abréger) toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$.

L'expression littérale $ax^3 + bx^2 + cx + d$ est un **polynôme de degré** 3.

EXEMPLE

La fonction cube $x \mapsto x^3$ est une fonction du troisième degré.

2. Racines

À RETENIR

Définition

Soit f une fonction du troisième degré. On appelle **racine** de f, tout nombre x vérifiant $f(x) = 0$. Une fonction du troisième degré admet au plus troisième racines distinctes dans $\mathbb{R}$.

EXERCICE 4

Combien de racines distinctes la fonction $f : x \mapsto x^3 - 1$ possède-t-elle dans $\mathbb{R}$? ....

....

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/fonctions-troisieme-degre/#correction-4.

3. Forme développée, forme factorisée

À RETENIR

Définitions

Soit $f : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ une fonction du troisième degré.

- La forme $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ est appelée **forme développée** de f.
- Si f admet trois racines x_1, x_2 et x_3, alors on peut écrire $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$. Cette dernière expression est appelée **forme factorisée** de f.

EXEMPLE

On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. C'est une fonction du troisième degré (avec $a = 1$, $b = -6$, $c = 11$ et $d = -6$). Comme $f(1) = f(2) = f(3) = 0$, on a :

— La forme factorisée de f : $f(x) = (x-3)(x-2)(x-1)$.

— La forme développée de f : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

EXERCICE 5

1. Déterminer la forme développée de la fonction du troisième degré $f : x \longmapsto (x-1)(x^2+x+1)$. ......

....

....

2. Admet-elle une forme factorisée ? ....

....

....

....

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/fonctions-troisieme-degre/#correction-5.

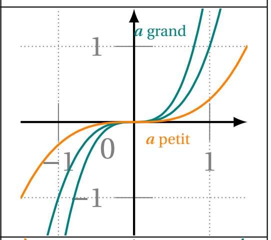
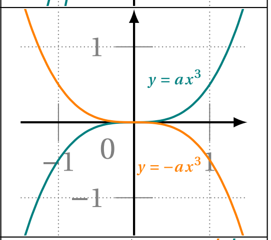
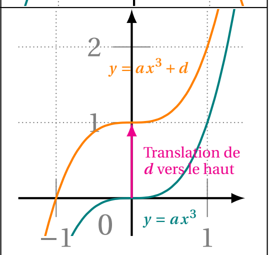
III Courbe représentative

1. Fonctions $x \longmapsto ax^3 + d$

À RETENIR

Propriété

Soit $f : x \longmapsto ax^3 + d$ une fonction du troisième degré (notons que les coefficients b et c sont nuls).

Propriété	Illustration
Le centre de symétrie de f est le point de coordonnées $(0; d)$. Plus a est proche de zéro, plus la courbe « s'écarte ». À l'inverse, plus le coefficient a s'éloigne de zéro, plus la courbe « se contracte ».	
La courbe représentative de $x \longmapsto ax^3$ est symétrique à celle de $x \longmapsto -ax^3$ par rapport à l'axe des abscisses.	
La courbe représentative de f est la même que celle de $x \longmapsto ax^3$, mais translatée de d unités de longueur vers le haut.	

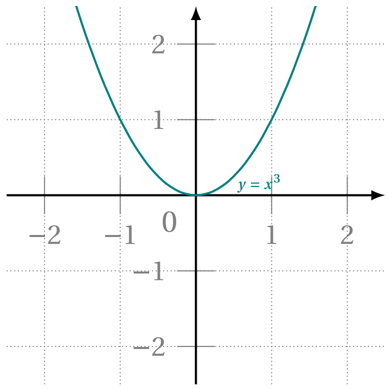
EXERCICE 6

On a tracé ci-contre la courbe représentative de la fonction carré $x \mapsto x^3$. Tracer à main levée l'allure de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto -3x^3 + 0,5$. Décrire les différentes étapes.

Étape 1. ....

Étape 2. ....

Étape 3. ....



Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/fonctions-troisieme-degre/#correction-6.

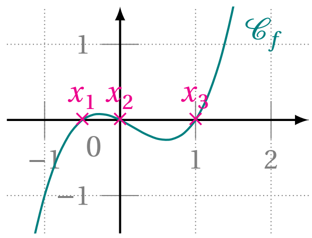
2. Lien avec les racines

À RETENIR

Propriété

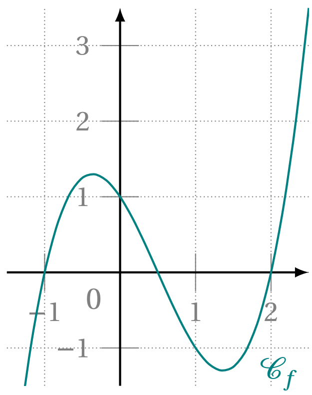
Soit $f : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ une fonction du troisième degré. Alors, f admet trois racines x_1, x_2 et x_3 si et seulement si $\mathscr{C}_f$ admet trois points d'intersection avec l'axe des abscisses.

Dans ce cas, les coordonnées de ces points d'intersection sont $(x_1;0)$, $(x_2;0)$ et $(x_3;0)$.



EXERCICE 7

On a tracé ci-contre la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x^3 - 1,5x^2 - 1,5x + 1$. Déterminer sa forme factorisée.



Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/premiere-stmg/fonctions-troisieme-degre/#correction-7.