ENSEMBLES DE NOMBRES

OBJECTIFS

— Reconnaître les ensembles usuels vus par le passé ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$).
— Découvrir les nombres irrationnels et apprivoiser l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, avec sa représentation sous forme de droite numérique.
— Connaître les différents intervalles de $\mathbb{R}$ avec les notations $-\infty$ et $+\infty$.
— Savoir utiliser la valeur absolue et sa caractérisation en tant que distance.
— Représenter l'intervalle $[a-r; a+r]$ et utiliser sa caractérisation par la condition $|x-a| \leq r$.

I Ensembles usuels

1. Ensembles déjà connus

À RETENIR

Définitions

— L'ensemble des **nombres entiers naturels**, noté $\mathbb{N}$, est l'ensemble des nombres entiers positifs : $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; \ldots\}$.
— L'ensemble des **nombres entiers relatifs**, noté $\mathbb{Z}$, est l'ensemble des nombres entiers positifs ou négatifs : $\mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$.
— L'ensemble des **nombres décimaux**, noté $\mathbb{D}$, est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ (ie. $\mathbb{D}$ est l'ensemble des nombres à virgule ayant un nombre fini de chiffres après la virgule).
— L'ensemble des **nombres rationnels**, noté $\mathbb{Q}$, est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire $\frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$ et $b \neq 0$.

EXERCICE 1

On souhaite démontrer que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal. Nous allons procéder *par l'absurde*.

1. Supposons que $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $10^n = 3a$. .....
.....
.....
2. Est-ce que 10^n peut être un multiple de 3 ? Justifier. .....
.....
.....
3. Conclure. .....
.....
.....

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/seconde/ensembles-de-nombres/#correction-1.

2. Nombres réels

À RETENIR

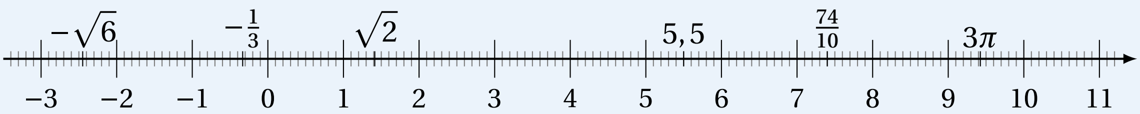
Définitions

On appelle :

— **nombre irrationnel**, un nombre qui n'est pas rationnel ;

— **nombre réel**, un nombre rationnel ou irrationnel.

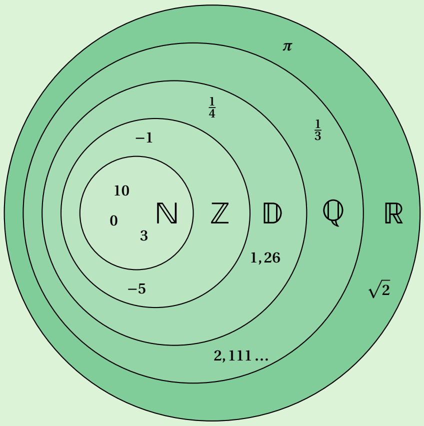
On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels : c'est l'ensemble des nombres que l'on peut placer sur une droite graduée.



EXEMPLE

Les ensembles vus depuis le début sont inclus les uns dans les autres :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



On a, par exemple :

— $5 \in \mathbb{N}$, donc $5 \in \mathbb{Z}$.

— $5,2 = \frac{52}{10}$, donc $5,2 \in \mathbb{D}$ et ainsi $5,2 \in \mathbb{Q}$.

— $-14 \notin \mathbb{N}$, mais $-14 \in \mathbb{Z}$.

— $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$, mais $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$.

— π est irrationnel : $\pi \notin \mathbb{Q}$.

— $0 \in \mathbb{N}$, donc $0 \in \mathbb{Z}$, $0 \in \mathbb{D}$, $0 \in \mathbb{Q}$ et $0 \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 2

Compléter le tableau suivant avec $\in$ ou $\notin$.

Nombre	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
3					
$\frac{18}{3}$					
2×10^{-2}					
$-\frac{9}{11}$					
$\frac{\pi^2}{6}$					
$\sqrt{1,44}$					
$-\sqrt{64}$					

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/seconde/ensembles-de-nombres/#correction-2.

II Intervalles

1. Définition

À RETENIR

Définitions

L'ensemble des nombres réels compris entre a et b (inclus) est appelé **intervalle** et se note $[a;b]$. a et b sont les **bornes** de l'intervalle. On peut définir d'autres types d'intervalle.

Intervalle	Signification	Représentation
$[a;b]$	Les nombres compris entre a inclus et b inclus	
$]a;b]$	Les nombres compris entre a exclu et b inclus	
$[a;b[$	Les nombres compris entre a inclus et b exclu	
$]a;b[$	Les nombres compris entre a exclu et b exclu	
$[a;+\infty[$	Les nombres supérieurs à a	
$]a;+\infty[$	Les nombres strictement supérieurs à a	
$]-\infty;b]$	Les nombres inférieurs à b	
$]-\infty;b[$	Les nombres strictement inférieurs à b	

Quand le crochet est **fermé** (orienté vers la borne), la borne est incluse ; quand il est **ouvert** (non orienté vers la borne), la borne est exclue. À noter que le crochet est toujours ouvert en $-\infty$ et $+\infty$. On note généralement $\mathbb{R}^+ = [0,+\infty[$ et $\mathbb{R}^- = [0,+\infty[$.

EXERCICE 3

1. Écrire sous forme d'intervalle l'ensemble des nombres réels x tels que $-3 \leq x < 4$. Puis, le représenter sur une droite graduée. ....

2. Écrire sous forme d'intervalle l'ensemble des nombres strictement supérieurs à $\frac{1}{5}$. Puis, le représenter sur une droite graduée. ....

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/seconde/ensembles-de-nombres/#correction-3.

2. Union, intersection

À RETENIR

Définitions

Soient I et J deux intervalles.

— L'**intersection** de I et J, noté $I \cap J$, est l'ensemble des nombres qui appartiennent à la fois à I et à J.

— La **réunion** de I et J, noté $I \cup J$, est l'ensemble des nombres qui appartiennent à I ou à J (ou aux deux).

EXEMPLE

Par exemple, $\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+$.

EXERCICE 4

Écrire les intersections et les réunions suivantes sous la forme d'un seul intervalle.

1. $[-4;5] \cup [0;10] =$ ....
2. $]0;5] \cap [-2;3] =$ ....
3. $[0;4[\cap [4;+\infty[=$ ....
4. $[-10;5] \cup [4;12] =$ ....
5. $[1;2] \cup [2;3] \cup [2;4] =$ ......
6. $\mathbb{R}^- \cap \mathbb{R}^+ =$ ....

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/seconde/ensembles-de-nombres/#correction-4.

III Inégalités et inéquations

1. Manipulation d'inégalités

À RETENIR

Propriétés

1. Ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres d'une inégalité **conserve** l'ordre de l'inégalité.
2. Multiplier ou diviser par un même nombre strictement positif les deux membres d'une inégalité **conserve** l'ordre de l'inégalité. Mais, multiplier ou diviser par un même nombre strictement négatif les deux membres d'une inégalité **change** l'ordre de l'inégalité.

EXEMPLE

$$3x + 8 < 7 \iff 3x < -1$$

L'ordre ne change pas car on soustrait 8.

EXEMPLE

$$2x > 8 \iff x > 4$$

L'ordre ne change pas car on divise par 2.

EXEMPLE

$$-3x < 18 \iff x > -6$$

L'ordre change car on divise par -3.

EXERCICE 5

Compléter par le symbole « $<$ », « $\leq$ », « $>$ » ou « $\geq$ ».

1. $x + 2 > 0 \iff x \ldots\ldots -2$.
2. $a < 10 \iff -6a \ldots\ldots -60$.
3. $y \geq 4 \iff y - 4 \ldots\ldots 0$.
4. $3c \leq 4 \iff -12c \ldots\ldots -16$.

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/seconde/ensembles-de-nombres/#correction-5.

2. Résolution d'inéquations

À RETENIR

Définition

Une **inéquation** est une inégalité dans laquelle est présente une inconnue (ou des inconnues). Résoudre une inéquation revient à déterminer l'ensemble de toutes les valeurs de l'inconnue qui vérifient l'inégalité.

EXERCICE 6

Parmi les inéquations suivantes, lesquelles acceptent le nombre 9 comme solution ?

1. $-3x + 2 \geq 0$: ....
2. $5(x-9) > 0$: ....
3. $2x < 1$: ....
4. $\frac{x+1}{4} \geq (-3) \times \frac{x-2}{3}$: ....

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/seconde/ensembles-de-nombres/#correction-6.

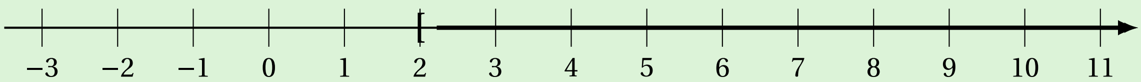
À RETENIR

Méthode

Pour résoudre une inéquation du premier degré, on procède comme pour une équation, en isolant l'inconnue d'un côté du symbole de comparaison (« < », « > », « ≤ » ou « ≥ »). Cependant, la solution se donne sous la forme d'un intervalle.

EXEMPLE

$$
\begin{aligned}
& 2x + 4 \geq 8 \\
\iff & 2x \geq 4 \\
\iff & x \geq 2
\end{aligned}
$$



L'ensemble solution est $\mathscr{S} = [2; +\infty[$.

À RETENIR

Propriété

Lorsque les symboles « < » ou « > » sont dans l'énoncé, les crochets doivent être ouverts. Mais, lorsque les symboles « ≤ » ou « ≥ » sont dans l'énoncé, les crochets doivent être fermés.

EXEMPLE

Dans l'inéquation précédente, le crochet enferme la valeur 2 car dans l'énoncé, le symbole « ≥ » est utilisé.

EXERCICE 7

Résoudre l'inéquation $-x + 1 < 2x + 10$.

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/seconde/ensembles-de-nombres/#correction-7.

3. Valeur absolue

À RETENIR

Définition

Soit x un nombre réel. On appelle **valeur absolue** de x, notée $|x|$, le nombre défini par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$$

EXERCICE 8

Déterminer les valeurs absolues suivantes.

1. $|-8| =$ . . . .

2. $|5| =$ . . . .

3. $|1-3| =$ . . . .

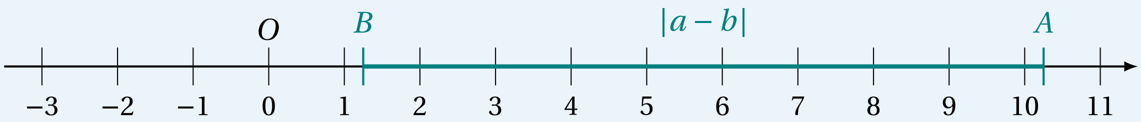
4. $|3-1| =$ . . . .

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/seconde/ensembles-de-nombres/#correction-8.

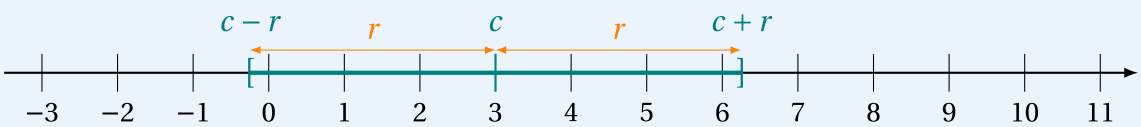
À RETENIR

Propriétés

1. Soit une droite graduée d'origine O. Sur cette droite, on considère le point A d'abscisse a et le point B d'abscisse b. Alors, $AB = |a-b| = |b-a|$.



2. Soient c un nombre réel et r un nombre réel strictement positif. Alors, $x \in [c-r\,;c+r]$ si et seulement si $|x-c| \leq r$.



EXERCICE 9

1. Déterminer sous forme d'intervalle l'ensemble des nombres réels x tels que $|x-4| \leq 3$.

. . . .

2. On considère l'intervalle $I = [8;20]$. Écrire une inégalité sous la forme $|x-c| \leq r$ (où c et r sont deux nombres réels à déterminer) vérifiée par tous les nombres appartenant à I.

. . . .

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/seconde/ensembles-de-nombres/#correction-9.