LOGIQUE ET SYMBOLES

À RETENIR

Définition

Une **proposition** est une phrase avec une affirmation qui peut être vraie ou fausse. Une proposition ne peut jamais être à la fois vraie et fausse.

EXERCICE 1

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

1. 2 est un chiffre pair.
2. 5 est un multiple de 2.

À RETENIR

Méthode

La recherche d'un **contre-exemple** est une méthode utilisée pour prouver que certaines propositions, prétendant à un caractère de généralité (c'est-à-dire les propositions universelles), sont fausses.

Quand un énoncé commence par « Pour tout… » ou « Tous… », il suffit, pour prouver qu'il est faux, de trouver un élément (« Il existe… ») qui vérifie les hypothèses de l'énoncé mais pas sa conclusion.

EXERCICE 2

Indiquer si chaque proposition est vraie ou fausse. Si la proposition est fausse, trouver un contre-exemple.

1. Tous les multiples de 3 sont des multiples de 9.
2. Tous les diviseurs de 12 sont des diviseurs de 36.
3. Tout nombre premier est un nombre impair.
4. Le carré de la somme de deux nombres est égal à la somme des carrés des deux nombres.
5. Un carré est un rectangle.
6. La somme de deux multiples de 5 est un multiple de 5.
7. Pour tout réel x tel que $x^2 > 4$ alors $x > 2$.

À RETENIR

Définition

La **négation** d'une proposition est la proposition obtenue en affirmant son contraire.

EXERCICE 3

Écrire la négation des propositions suivantes.

1. Le triangle ABC est isocèle.
2. Il fait beau tous les jours du mois de septembre.
3. Tous les élèves de Seconde mesurent moins d'un mètre soixante.

À RETENIR

Définition

Soient P et Q deux propositions. La proposition « Si P alors Q » est appelée **implication**. Pour établir que "Si P alors Q" est vraie, on suppose que P est vraie et on démontre qu'alors Q est vraie.

On note ceci $P \implies Q$ ou $Q \impliedby P$.

EXEMPLE

L'implication suivante est vraie : $x > 2 \implies x^2 > 4$.

À RETENIR

Définition

Soient P et Q deux propositions.

- La **réciproque** de « $P \implies Q$ » est « $Q \implies P$ ».
- La **contraposée** de « $P \implies Q$ » est « $\text{non}(Q) \implies \text{non}(P)$ » (où non désigne la négation).

« $P \implies Q$ » est vraie si et seulement la contraposée l'est aussi. Ce n'est pas le cas pour la réciproque. Lorsque $P \implies Q$ et $Q \implies P$, on note $P \iff Q$.

EXERCICE 4

L'énoncé du théorème de Pythagore est :

Si ABC est un triangle rectangle en B alors $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

1. Écrire la réciproque du théorème de Pythagore.
2. Écrire la contraposée du théorème de Pythagore.

À RETENIR

Définition

Soient P et Q deux propositions. En logique, on dispose de deux connecteurs :

- **ET :** La proposition « P **ET** Q » est la proposition qui est vraie uniquement quand les propositions P et Q sont vraies simultanément.
- **OU :** La proposition « P **OU** Q » est la proposition qui est vraie quand la proposition P est vraie ou quand la proposition Q est vraie.

EXERCICE 5

1. Pour chacune des propositions ci-dessous, dire si cette proposition est vraie ou fausse.
2. Énoncer la proposition réciproque et dire si elle est vraie ou fausse.
3. Dire dans quel cas on a une équivalence.

P_1 Si je suis Français, alors je suis Européen.

P_2 Si $x^2 = 4$ alors $x = 2$.

P_3 Si $ab = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$.