GÉOMÉTRIE REPÉRÉE

OBJECTIFS

— Connaître la notion de base orthonormée. Savoir y lire les coordonnées d'un vecteur et donner l'expression de la norme d'un vecteur.
— Représenter un vecteur dont on connaît les coordonnées. Lire les coordonnées d'un vecteur.
— Connaître l'expression des coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ en fonction de celles de A et de B.
— Savoir calculer les coordonnées du milieu d'un segment.
— Savoir calculer le déterminant de deux vecteurs dans une base orthonormée, et connaître le lien avec la colinéarité.
— Résoudre des problèmes en utilisant la représentation la plus adaptée des vecteurs.

I Repères du plan

1. Bases du plan

À RETENIR

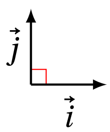
Définitions

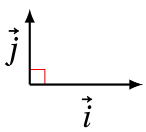
Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires. Le couple $(\vec{i};\vec{j})$ forme une **base** du plan.

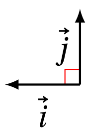
— Si les directions de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont perpendiculaires, la base $(\vec{i};\vec{j})$ est dite **orthogonale**.
— Si de plus $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\|$, la base $(\vec{i};\vec{j})$ est dite **orthonormée**.

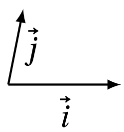
EXERCICE 1

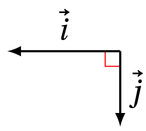
Parmi les bases ci-dessous, dire lesquelles sont orthogonales, orthonormées ou ne le sont pas.

1. 

2. 

3. 

4. 

5. 

....

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/seconde/geometrie-reperee/#correction-1.

2. Coordonnées d'un vecteur

À RETENIR

Propriété

Soit $(\vec{i};\vec{j})$ une base du plan. Tout vecteur $\vec{u}$ du plan se décompose de manière unique sous la forme

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

où x et y sont deux nombres réels. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (parfois également noté $(x;y)$) sont les **coordonnées** de $\vec{u}$. Deux vecteurs sont égaux s'ils ont les mêmes coordonnées.

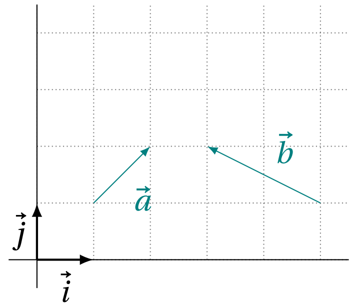
EXERCICE 2

1. Pour chacun des vecteurs ci-dessous, lire ses coordonnées dans la base $(\vec{i};\vec{j})$.

   a. $\vec{a}$: .... **c.** $\vec{i}$: ....

   b. $\vec{b}$: .... **d.** $\vec{j}$: ....

2. Représenter le vecteur $\vec{c}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.



Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/seconde/geometrie-reperee/#correction-2.

3. Coordonnées d'un point

À RETENIR

Définitions

— On appelle **repère cartésien** un triplet $(O;\vec{i};\vec{j})$ constitué par les vecteurs d'une base $(\vec{i};\vec{j})$ et par un point O du plan appelé **origine**.

— Si la base $(\vec{i};\vec{j})$ est orthonormée, le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ est également qualifié d'**orthonormé**.

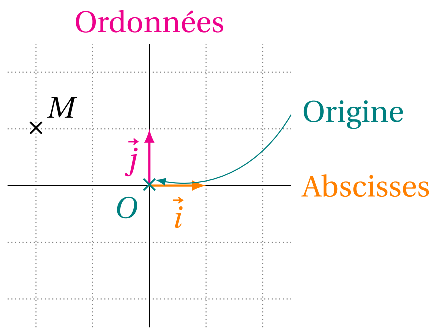
— La droite $(O\vec{i})$ est l'axe des **abscisses** et $(O\vec{j})$ est l'axe des **ordonnées**.

— Les **coordonnées** d'un point M du plan sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{i};\vec{j})$.

Pour toute la suite, sauf mention contraire, on se place dans un repère cartésien $(O;\vec{i};\vec{j})$.

EXEMPLE

Dans le repère orthonormé ci-contre (où l'on a indiqué l'origine, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées), les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sont $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, donc les coordonnées du point M sont $(-2;1)$.



À RETENIR

Propriétés

Soient $A(x_A;x_B)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points du plan.

1. Le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées

$$\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

2. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$$

EXERCICE 3

Soient $A(3;5)$, $B(2;-1)$, $C(-2;-4)$ et $D(-1;2)$.

1. **a.** Calculer les coordonnées de E, milieu de $[AB]$. ....

   ....

   b. Calculer les coordonnées de F, milieu de $[CD]$. ....

   ....

2. Montrer que $EFDA$ est un parallélogramme. ....

   ....

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/seconde/geometrie-reperee/#correction-3.

II Utilisation des coordonnées

1. Opérations sur les vecteurs

À RETENIR

Propriété

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan et k un nombre réel. Les coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$ sont $\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$ et celles de $k\vec{u}$ sont $\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$.

EXERCICE 4

Soient trois vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$. Calculer les coordonnées des vecteurs suivants.

1. $\vec{u}+\vec{v}$: .... **2.** $-2\vec{v}$: .... **3.** $3\vec{w}-2\vec{u}$: ....

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/seconde/geometrie-reperee/#correction-4.

2. Calcul de la norme

À RETENIR

Propriété

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un vecteur du plan. On suppose le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé. Alors,

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$$

EXERCICE 5

Soient deux points $A(-1;1)$ et $B(3;4)$. On suppose le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé. Calculer AB. ....

....

....

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/seconde/geometrie-reperee/#correction-5.

3. Condition de colinéarité

À RETENIR

Définition

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan. On appelle **déterminant** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre

$$\det(\vec{u};\vec{v}) = xy' - x'y$$

EXEMPLE

Par exemple, avec $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$, on a

$$\begin{aligned}\det(\vec{u};\vec{v}) &= \det\left(\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}\right)\\ &= -1\times(-6) - 2\times 3\\ &= 0\end{aligned}$$

Il s'agit d'une sorte de « généralisation » du produit en croix.

À RETENIR

Propriété

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u};\vec{v}) = 0$.

EXERCICE 6

1. Dans le repère ci-contre, placer les points $A(-2;-1)$, $B(2;-3)$, $C(-4;4)$ et $D(4;0)$.
2. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles. ....

   ....

   ....

   ....

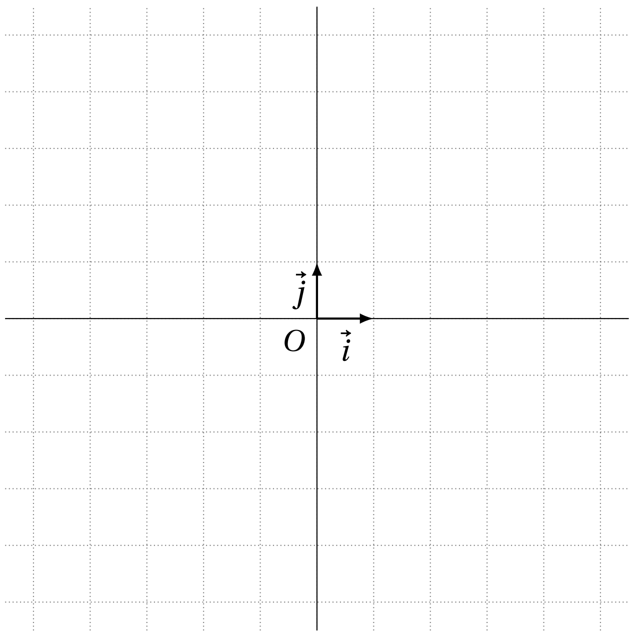
   ....
3. Les points A, B et C sont-ils alignés ? Justifier par un calcul. ....

   ....

   ....

   ....

   ....



Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/seconde/geometrie-reperee/#correction-6.