CALCUL LITTÉRAL ET ÉQUATIONS

OBJECTIFS

- Effectuer des calculs littéraux mettant en jeu des puissances, des racines carrées, des écritures fractionnaires.
- Utiliser les identités remarquables dans les deux sens.
- Manipuler des exemples simples de calcul expressions algébriques, en particulier sur des expressions fractionnaires.
- Savoir décrire l'ensemble des solutions d'une équation.

I Rappels

1. Règles de base

À RETENIR

Définition

Soient a et b deux nombres réels et soit n un entier naturel.

Opération	**Notation**	**Opération**	**Notation**
$a+a$	$2a$	$a \times a$	a^2
$\underbrace{a+\cdots+a}_{n \text{ fois}}$	na	$\underbrace{a\times\cdots\times a}_{n \text{ fois}}$	a^n
$a \times 2$ ou $2 \times a$	$2a$	$a \times b$ ou $b \times a$	ab

2. Développement

À RETENIR

Définition

Développer une expression littérale, c'est transformer un produit en somme (ou en différence).

EXEMPLE

$$\begin{aligned} 5(3a-1) &= 5 \times 3a + 5 \times (-1) \\ &= 5 \times 3a - 5 \\ &= 15a - 5 \end{aligned}$$

EXEMPLE

$$\begin{aligned} (2x+3)(5x+7) &= 2x \times 5x + 2x \times 7 + 3 \times 5x + 3 \times 7 \\ &= 10x^2 + 14x + 15x + 21 \\ &= 10x^2 + 29x + 21 \end{aligned}$$

EXERCICE 1

Compléter en développant et en réduisant les expressions suivantes.

1. $(2x-1)x =$ ....

2. $(x+3)(x+2) =$ ....

3. $(1+x)(x-9) =$ ....

4. $(-2x+8)(4-x) =$ ....

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/seconde/calcul-litteral-equations/#correction-1.

3. Factorisation

À RETENIR

Définition

Factoriser une expression littérale, c'est transformer une somme (ou une différence) en produit.

EXEMPLE

$$\begin{aligned} 85r + 15r &= (85 + 15)r \\ &= 100r \end{aligned}$$

EXEMPLE

$$\begin{aligned} 57(b+1) - 4(b+1) &= (57-4)(b+1) \\ &= 53(b+1) \end{aligned}$$

EXERCICE 2

Compléter en factorisant les expressions suivantes.

1. $7z + 9z =$ ....

2. $10x - 10y =$ ....

3. $11a + 11b - 11c =$ ....

4. $4x(y-6) + 5(y-6) =$ ....

5. $(x-1)5x + 3(x-1) =$ ....

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/seconde/calcul-litteral-equations/#correction-2.

II Identités remarquables

À RETENIR

Propriété

Soient a et b deux nombres réels. On a les égalités suivantes.

Forme factorisée	Forme développée
$(a+b)^2$	$a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2$	$a^2 - 2ab + b^2$
$(a+b)(a-b)$	$a^2 - b^2$

EXERCICE 3

1. Développer les expressions suivantes.
   a. $(-2x+3)^2 =$ ....
   b. $(3t+2)(3t-2) =$ ....
   c. $5(x-3)^2 =$ ....
2. Factoriser les expressions suivantes.
   a. $16x^2 - 49 =$ ....
   b. $x^2 + 12x + 36 =$ ....
   c. $4a^2 + 4a + 1 =$ ....

Voir la correction : https://mes-cours-de-maths.fr/cours/seconde/calcul-litteral-equations/#correction-3.

III Équations

1. Équations du premier degré

À RETENIR

Méthode

Pour résoudre une équation du premier degré (ie. dont l'exposant de l'inconnue est 1), on isole l'inconnue d'un côté du symbole « = ».

EXEMPLE

On veut résoudre l'équation $2x - 1 = 0$. On isole le x du côté gauche du symbole « = » :

$$\begin{aligned} & 2x - 1 = 0 \\ \iff & 2x = 1 \\ \iff & x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc $\frac{1}{2}$ est la solution de cette équation. On note ceci $\mathscr{S} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

EXERCICE 4

Résoudre les équations suivantes.

1. $-5x+3=-3x+2$.

2. $3(x+4)=-(x+5)+1$.

Voir la correction : `https://mes-cours-de-maths.fr/cours/seconde/calcul-litteral-equations/#correction-4`.

2. Équations « produit nul »

À RETENIR

Propriété

Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

EXEMPLE

On veut résoudre l'équation $(3x+4)(2x-3)=0$. C'est une équation de type « produit nul », qui peut se traduire par :

$$\begin{aligned} & 3x+4=0 \\ \iff & 3x=-4 \\ \iff & x=-\frac{4}{3} \end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} & 2x-3=0 \\ \iff & 2x=3 \\ \iff & x=\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Donc $-\frac{4}{3}$ et $\frac{3}{2}$ sont les solutions de cette équation. On note ceci $\mathscr{S}=\left\{-\frac{4}{3};\frac{3}{2}\right\}$.

EXERCICE 5

Résoudre les équations suivantes.

1. $x(7x+2)=0$.

2. $(x+3)^2=0$.

3. $x^2=2x$.

Voir la correction : `https://mes-cours-de-maths.fr/cours/seconde/calcul-litteral-equations/#correction-5`.

3. Équations du type $x^2 = a$

À RETENIR

Propriété

Les solutions d'une équation du type $x^2 = a$ dépendent du signe de a :

— si $a > 0$, l'équation a deux solutions : $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$;

— si $a = 0$, l'équation a une solution : 0;

— si $a < 0$, l'équation n'a pas de solution.

EXEMPLE

L'équation $x^2 = 9$ a deux solutions : -3 et 3. On a $\mathscr{S} = \{-3; 3\}$.

EXEMPLE

L'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solution. On note ceci $\mathscr{S} = \emptyset$.

EXERCICE 6

Résoudre, si possible, l'équation $-5x^2 = -125$.

Voir la correction : `https://mes-cours-de-maths.fr/cours/seconde/calcul-litteral-equations/#correction-6`.

4. Équations quotient

À RETENIR

Définition

Les valeurs qui annulent le dénominateur d'une expression littérale fractionnaire sont appelées **valeurs interdites**.

À RETENIR

Propriété

Si une fraction $\frac{A}{B}$ est nulle, alors $A = 0$ et $B \neq 0$.

EXEMPLE

On veut résoudre l'équation $\frac{x+3}{x-2} = 0$. Alors 2 est une valeur interdite. Pour $x \neq 2$, on a :

$$\begin{aligned} &\frac{x+3}{x-2} = 0 \\ \iff &x + 3 = 0 \\ \iff &x = -3 \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{S} = \{-3\}$.

EXERCICE 7

Résoudre l'équation $\frac{(3x+1)(1-x)}{x^2-25} = 0$ en précisant la ou les valeurs interdites.

Voir la correction : `https://mes-cours-de-maths.fr/cours/seconde/calcul-litteral-equations/#correction-7`.