

UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE



MASTER 1 MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

Processus Markoviens déterministes par morceaux et Couplage (sujet 1)

Auteurs :

Frédéric FRANCINE
Nicolas DARBOUX
Bill MEKIE BODO SANI

Professeur encadrant :

Djalil CHAFAI

8 mai 2020

Résumé

Dans ce document, on observe deux exemples particuliers de processus Markovien déterministes par morceaux. En amont, on étudie la technique de couplage qu'on utilise pour obtenir des propriétés sur les processus Markovien choisis. Le premier processus étudié est le processus TCP Window size en liaison avec un processus de Poisson homogène. Le deuxième processus est un billard stochastique dans un disque, modèle abordé dans [Fé19], et dont on explicite des propriétés sur la mesure invariante.

Remerciement

Nous tenons à remercier Monsieur Djalil Chafai pour sa bienveillance et ses nombreux conseils durant le déroulement de ce mémoire.

Table des matières

Introduction	3
Un peu d'histoire	3
Plan du rapport	6
1 Couplage	6
1.1 Quelques généralités sur le couplage	6
1.2 Le couplage γ	8
2 Le processus TCP Window size	9
2.1 Notation	9
2.2 Quelques résultats de convergence	10
2.2.1 Cas où $Q = \delta_0$	10
2.2.2 Cas où $Q = \delta_q$ avec $0 < q < 1$	12
2.3 Couplage et vitesse de convergence	13
2.3.1 Introduction de la distance de Wasserstein	13
2.3.2 Couplage de deux variables aléatoires	14
3 Billard stochastique sur le disque	15
3.1 Description	15
3.2 La chaîne de Markov incluse	16
3.2.1 Mesure invariante associée	18
3.3 Le processus continu	24
3.3.1 Existence	25
3.3.2 Unicité	25
4 Problèmes ouverts	26
4.1 Mesure invariante du processus continu	26
4.2 Billard stochastique dans un polygone	28
4.3 Une normale quotientée tendrait vers une uniforme	29
A Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	31
A.1 Recherche de la mesure invariante	31
Bibliographie	33

Introduction

Un peu d'histoire

Les **processus Markovien déterministes par morceaux** (*Piecewise Deterministic Markovian Process*, **PDMP** en anglais) sont des processus stochastiques servant pour modéliser des phénomènes naturels ou de la vie courante. Étudiés par Davis dans [Dav84], il s'agit de processus, dont les trajectoires sont déterministes par morceaux. L'aléa figure principalement dans les temps de saut, mais aussi sur la condition initiale. On dénote l'aspect markovien, dans l'évolution déterministe où le processus "n'a pas besoin de ses valeurs passées". De plus, si on conserve uniquement les sauts, on peut considérer une chaîne de Markov discrète. Ce qui nous permet de retrouver certaines caractéristiques associées à ce processus.

De cette définition, plusieurs processus se révèlent. On peut notamment les citer **processus de Poisson**, qui sont bien en accord avec ce qui a été énoncé précédemment et qui ont de vastes applications dans la vie courante tel que dans la théorie des files d'attente dont on peut se reporter aux exemples présents dans [Dur12].

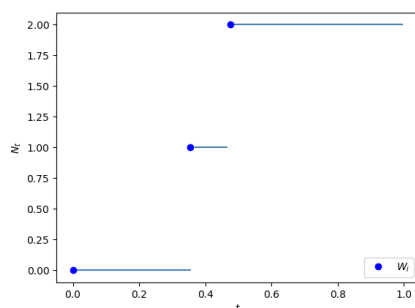


FIGURE 1 – Un processus de Poisson (N_t)

Comme nous l'illustrer, la figure ci-dessus, le processus de Poisson est constant entre les sauts, puis augmente de 1, au moment du saut.

De même, introduisons les processus **AIMD** (*Additive Increase Multiplicative Decrease*). Comme son nom l'indique, ils augmentent de manière linéaire, puis au temps de saut, ils baissent subitement selon un facteur de démultiplication. On peut modéliser diverses situations de la vie quotidienne, en voici quelques exemples :

- (i) À l'échelle microscopique, dans le cycle d'une cellule, il y a l'étape importante de **mitose** qui peut être modélisée par un AIMD. En effet, une cellule se duplique, puis à un moment arbitraire, elle va se diviser en deux cellules, et ces deux cellules vont elles aussi se dupliquer et se diviser.

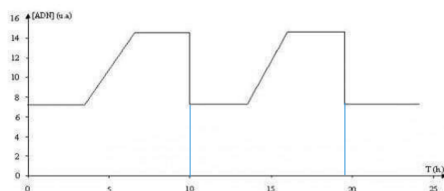


FIGURE 2 – Une mitose

Comme on peut le voir, dans la figure ci-dessus, la quantité d'ADN part d'une quantité initiale q et augmente progressivement vers une quantité $2q$, mais il arrive un moment aléatoire (représenté par les traits bleus), où la quantité revient à une quantité d'ADN valant q , cette action là correspond à la mitose. Pour avoir plus de détail, on peut se référer à [Clo11].

- (ii) À l'instar de l'exemple biologique énoncé précédemment, on peut modéliser un phénomène physique à l'aide de ce processus, il s'agit de la taille des polymères dans le temps, dont on illustrera lors de l'étude du processus AIMD.
- (iii) Enfin, il s'agit du cas pour lequel ce processus est le plus connu, l'AIMD associe au problème du trafic internet. La communication en réseau utilise principalement le protocole **TCP** (*Transmission Control Protocol*). À l'aide de ce protocole, on envoie des données, sous forme de paquet d'une taille fixée. On augmente linéairement le débit instantané maximal, mais lorsqu'on détecte qu'un paquet n'a pas été envoyé, on réduit le débit instantané maximal. On nomme ce processus **TCP Window Size**, en référant au fait que le débit maximal est appelé **taille de la fenêtre de congestion**. Pour plus d'informations, on peut citer [OKM04], [OS06], [DGR02], qui font office de références sur ce sujet.

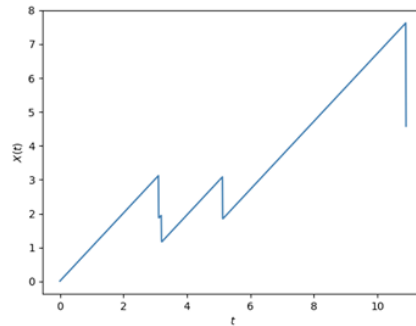
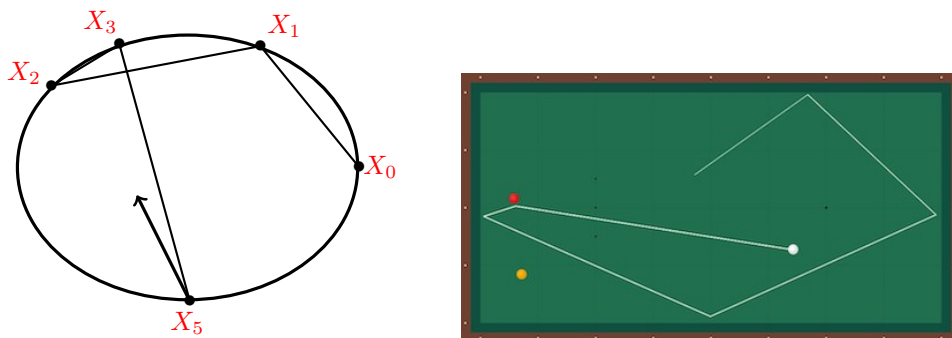


FIGURE 3 – Le processus TCP Window Size

Enfin, le dernier PDMP qu'on va évoquer est celui du **billard stochastique**. On peut dire que c'est un système dynamique, puisqu'en effet, on s'intéresse à la position d'une particule dans une surface. La particule avance, avec une vitesse constante, de manière déterministe dans la surface jusqu'à qu'elle percute la frontière de cette surface. Une fois que la particule a touché le bord, elle est réfléchié selon une direction arbitraire, et avance selon cette direction jusqu'à qu'elle percute de nouveau le bord, ce qui correspond bien à la définition d'un PDMP. Cet objet mathématique rappelle le jeu du billard, d'où son appellation.



(a) Billard stochastique dans une ellipse

(b) Trajectoire dans un billard

FIGURE 4 – Billards

Contrairement aux exemples précédent, le **billard stochastique** n'a pas d'applications célèbres. On pourrait certainement modéliser la trajectoire d'un rayon lumineux dans une surface transparente mais dans quel but. Cependant, il a un intérêt de simulation lié aux techniques de **MCMC** (*Monte Carlo Markov Chain*). Les techniques de *Monte Carlo Markov Chain* ont révolutionné le 20^{ième} siècle. Il est question de techniques probabilistes, on cherche à mettre notre problème sous la forme d'une espérance d'une variable aléatoire X à calculer, et ensuite on applique la *loi des grands nombres* à des variables indépendantes et identiquement distribuées de même loi que X :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathbb{E}[f(X_1)].$$

Ces techniques sont nommées, ainsi à l'initiative de Nicholas Metropolis pour se référer au célèbre casino de *Monte Carlo* où les jeux de hasards y sont maîtres, c'était aussi un nom de code pour le projet gouvernemental mené par Von Neuman et Ulam durant la Seconde Guerre Mondiale. Ces techniques ont grandement servi dans le cadre du **Projet Manhattan** et sont toujours utiles à nos jours. De plus, quelques années plus tard, les techniques de Monte Carlo couplées avec les chaînes de Markov (*MCMC*) sont devenues un grand outil de simulation. En effet, on cherche à simuler une certaine mesure de probabilité, or une chaîne de Markov, sous quelques propriétés, convergent vers une mesure de probabilité, d'où en se servant de cette chaîne de Markov spécifique, on peut l'utiliser dans nos techniques de *Monte Carlo*. Pour avoir plus de renseignement sur ces techniques, on peut citer [CR04].

À l'aide du billard stochastique, on peut simuler la loi uniforme sur la frontière de région convexe. On peut se référer à [Boe+91] qui emploie un algorithme appelé "shake and bake". Ici, on se penchera sur le billard stochastique dans un disque, dont la frontière est le cercle.

Enfin, parlons du dernier élément du titre qui est **couplage**. Mise en lumière par Torgny Lindwall dans [Lin91], il s'agit d'un outil probabiliste avec de nombreuses applications que cela soit dans les chaînes de Markov pour démontrer leur convergence ou leur récurrence, mais aussi en théorie de renouvellement, où il existe une preuve élégante du célèbre théorème de Blackwell. Pour avoir plus d'exemple d'application, on peut voir [Tho00] qui regorge d'applications de cette méthode. Grossièrement, il s'agit d'établir des propriétés sur un processus en considérant un couple de variables aléatoires mais le couplage sera expliqué en détail dans la première section.

Plan du rapport

Tout d'abord, on expliquera ce qu'est un **couplage** de manière formelle. On introduira deux distances, la **distance de Wasserstein** et la **distance en variation totale** et quelques propriétés. Dans cette section, on s'inspirera beaucoup de [Tho00] pour ses applications mais aussi [Lin91] pour les propriétés.

Puis une fois ces notions dévoilées, nous verrons son application sur deux PMDP en particulier. Le premier étant un **processus AIMD**. Tout d'abord, on observe la convergence d'un cas particulier de ce processus, qui nous servira d'illustration de la taille d'une polymère au cours du temps. Ce PDMP a la particularité de faire intervenir un processus de Poisson d'intensité λ . Ici, le couplage fait intervenir la distance de Wasserstein, qui nous permettra d'établir les propriétés d'unicité de mesure invariante et de vitesse de convergence du processus vers celle-ci.

Le deuxième processus étudié sera celui du **billard stochastique** dans une surface bien précise qui est celle d'un disque. Comme énoncé ci-dessus, on s'intéresse à la position d'une particule dans une surface, donc on s'apparente à un processus à temps et à espace continu. Toutefois on peut extraire de ce processus continu, un processus markovien à temps discret mais à espace continu si on s'intéresse seulement aux positions où la particule est à la frontière du disque, soit ici un cercle, cela nous donne des propriétés géométriques non négligeables. De cette première chaîne de Markov, on étudiera la convergence mais aussi sa vitesse de convergence. Une fois cette étude réalisée, on retournera au cas de la position de la bille dans le disque, pour analyser de nouveau la convergence et la vitesse de convergence. Dans [Fé19], il est question de convergence vers la loi uniforme du disque à condition que la loi de réflexion soit de loi du cosinus surélevé, mais à partir de nos simulations, on peut dire que cela marche avec une loi de réflexion uniforme. Pour le couplage sur le billard, on utilisera la distance en variation totale, qui est beaucoup plus simple à utiliser dans le cas présent.

Enfin, on finit par diverses pistes qu'on a examiné mais qu'on n'a pas pu conclure. Le premier étant de confirmer la mesure invariante du processus continu est bien la mesure uniforme du disque. Dans [Com+07], on fait mention d'une convergence vers cette mesure si l'angle de réflexion suit la loi du cosinus surélevé. Ici, on observe de manière informatique ce qu'il se passe pour un angle de réflexion suivant une loi uniforme sur $[0; 2\pi]$. Ensuite, on simule le billard stochastique dans un polygone convexe pour étudier sa mesure invariante mais on se heurte au même problème que précédemment. On traite ce cas, car on l'avait exclu dans [Fé19]. Enfin, à la suite de la définition de la chaîne de Markov incluse au processus continu, on s'intéresse à la loi d'une normale qu'on tronque modulo 2π .

1 Couplage

1.1 Quelques généralités sur le couplage

Comme il était dit, un **couplage** consiste à travailler sur une loi jointe spécifique entre deux ou plus de variables aléatoires qui nous permettrait de déduire des propriétés sur une variable aléatoire en particulier ou une relation entre des variables aléatoires. On couple des lois de probabilité. Le but du couplage est d'étudier la mesure de probabilité définie sur l'espace produit.

Définition 1.1. Soit (E, \mathcal{E}, μ) et (F, \mathcal{F}, ν) deux espaces probabilisés, dont les mesures de probabilité sont proscrites. Un **couplage** η entre μ et ν consiste donc à trouver une mesure de probabilité sur l'espace produit $(E \times F, \mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$ dont les mesures marginales sont μ et ν .

Dans le cadre de notre étude, où les espaces sur lesquels on couple peuvent tout à fait être différents, la loi sur l'espace produit est la loi d'une trajectoire et nous permet d'avoir accès à

des lois marginales de trajectoires. On a en particulier :

$$\eta(E \times B) = \nu(B) \quad \text{et} \quad \eta(A \times F) = \mu(A),$$

avec $A \in \mathcal{E}$ et $B \in \mathcal{F}$.

Définition 1.2. Soit μ, ν deux lois sur l'espace E .

- * La **distance de Wasserstein**, W_p , qui est la distance la plus générale et qui requiert que μ et ν possèdent un moment d'ordre $p \geq 1$:

$$W_p(\mu, \nu) = \inf_{\substack{(X,Y) \\ X \sim \mu, Y \sim \nu}} \mathbb{E}[d(X, Y)^p]^{1/p}$$

avec d une distance pour les variables aléatoires.

- * La **distance en variation totale** définie et notée par :

$$d_{TV}(\mu, \nu) = \inf_{\substack{(X,Y) \\ X \sim \mu, Y \sim \nu}} P(X \neq Y)$$

La distance en variation totale est un cas particulier de la distance de Wasserstein. Pour s'en convaincre, il suffit de prendre $d(x, y) = \mathbb{1}_{x \neq y}$ dans la définition de la distance de Wasserstein.

Définition 1.3. Il existe une autre définition permettant parfois de mieux visualiser la distance en variation totale qui est la suivante :

$$d_{TV}(\mu, \nu) = \sup(|\mu(A) - \nu(A)|, A \in \mathcal{E})$$

Définition 1.4 (Temps de coalescence). Soit $(Y_t)_{t \geq 0}$ et $(\tilde{Y}_t)_{t \geq 0}$, deux processus de Markov. On définit le **temps de coalescence** de ces deux processus par :

$$T_c = \inf\{t \geq 0, Y_t = \tilde{Y}_t\}.$$

On va désormais, pour le besoin de l'étude qui suivra, relier le temps de couplage à la distance en variation totale entre les deux mesures de probabilités.

Proposition 1.5. Soit $(Y_t)_{t \geq 0}$ de mesure de probabilité μ_t et $(\tilde{Y}_t)_{t \geq 0}$ ayant $\tilde{\mu}_t$ comme mesure de probabilité. Alors, on a l'inégalité fondamentale suivante :

$$d_{TV}(\mu_t, \tilde{\mu}_t) \leq P(T_c > t)$$

Démonstration. Cela découle de la définition de la distance en variation totale. En effet, comme :

$$\begin{aligned} d_{TV}(\mu_t, \tilde{\mu}_t) &= \inf_{\substack{(X,Y) \\ X \sim \mu_t, Y \sim \tilde{\mu}_t}} P(X \neq Y) \\ &\leq P(Y_t \neq \tilde{Y}_t) \\ &\leq P(T_c > t) \end{aligned}$$

par définition du temps de couplage.

□

1.2 Le couplage γ

On va expliciter un couplage spécifique, qu'on utilisera lors de notre étude du billard stochastique. Appelé de cette manière dans [Lin91], nous reprenons aussi ces notations. Posons :

$$\lambda = P + P', \quad g = \frac{dP}{d\lambda}, \quad g' = \frac{dP'}{d\lambda}.$$

Proposition 1.6. *On a :*

$$d_{TV}(P, P') = 2(1 - \int \min(g, g') d\lambda).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} d_{TV}(P, P') &= \sup_{|f| \leq 1, f \in \mathcal{E}} \left| \int (g - g') f d\lambda \right| \\ &= \int_{g \geq g'} (g - g') d\lambda + \int_{g < g'} (g' - g) d\lambda \\ &= \int |g - g'| d\lambda \\ &= \int (g - \min(g, g')) d\lambda + \int (g' - \min(g, g')) d\lambda \\ &= \int (g + g') d\lambda - 2 \int \min(g, g') d\lambda \\ &= \int dP + \int dP' - 2 \int \min(g, g') d\lambda \\ &= 2(1 - \int \min(g, g') d\lambda). \end{aligned}$$

Pour obtenir l'égalité dans 1.5, il faudrait donc pouvoir produire un couplage (Z, Z') tel que :

$$P(Z \neq Z') = 1 - \int \min(g, g') d\lambda.$$

□

Autrement dit,

$$P(Z = Z') = 1.$$

On est donc à la recherche d'un couplage \hat{P} de P et de P' tel que :

$$\hat{P}(\Delta) = \gamma \quad \text{où} \quad \Delta = \{(x, x') \mid x = x'\}$$

et γ , la masse de $dQ = \min(g, g') d\lambda$.

On se restreint au cas $\gamma < 1$. Le cas $\gamma = 1$ ne présente pas d'intérêt puisqu'il suffirait de prendre $Z = Z'$.

Notons :

$$\Phi : E \rightarrow E^2, \quad x \mapsto (x, x)$$

Par ailleurs, réciproquement, on a :

$$\Phi^{-1} : E^2 \rightarrow E, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x = y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Posons $\hat{Q} = Q\Phi^{-1}$. Dès lors, on a $\hat{Q}(\Delta) = \gamma = \hat{Q}(E^2)$. Soient $\nu = P - Q$ et $\nu' = P' - Q'$. Remarquons que :

$$\begin{aligned}\nu(E) &= P(E) - Q(E) \\ &= 1 - \gamma.\end{aligned}$$

De même, on a $\nu'(E) = 1 - \gamma$.

Posons maintenant $\hat{P} = \frac{\nu \times \nu'}{1 - \gamma} + \hat{Q}$. Vérifions qu'il s'agit bien d'un couplage, d'une part on a :

$$\begin{aligned}\hat{P}(A \times E) &= \frac{\nu(A) \times \nu'(E) + \hat{Q}(A \times E)}{1 - \gamma} \\ &= \nu(A) + Q(A) \\ &= P(A).\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\hat{P}(E \times A) &= \frac{\nu(E) \times \nu'(A) + \hat{Q}(E \times A)}{1 - \gamma} \\ &= \nu'(A) + Q'(A) \\ &= P'(A).\end{aligned}$$

D'où \hat{P} est un couplage tel que $\hat{P}(\Delta) = Q(\Delta) = \gamma$. En particulier, on a ce corollaire qu'on utilise dans le couplage associé au billard stochastique.

Corollaire 1.7. *Soient P_1, \tilde{P}_1 deux mesures de probabilités sur \mathbb{R} avec comme densités respectives f_1 et \tilde{f}_1 . Notons :*

$$\gamma_1 = \int \min(f_1, \tilde{f}_1)(y) dy$$

Alors il existe un couplage P de P_1 et de \tilde{P}_1 tel que $P(\Delta) \geq \gamma_1$.

Démonstration. On utilise le résultat précédent en prenant $dQ = \min(f_1, \tilde{f}_1)d\lambda$ et en posant le même \hat{P} . D'où $P(\Delta) \geq \hat{Q}(\Delta) = \gamma_1$. \square

2 Le processus TCP Window size

2.1 Notation

Comme suggéré en amont le processus TCP Window size, s'intéresse initialement au débit instantané maximal sortant d'un ordinateur connecté au réseau TCP, mais peuvent se généraliser à plusieurs phénomènes. En particulier, on va illustrer notre processus AIMD par le biais des polymères. En effet, la longueur d'un polymère croît jusqu'à un certain stade où la polymère se disloque. Sa taille est donc subitement réduite. Cependant, sa vie ne s'arrête pas là, puisqu'elle va croître de nouveau et encore se disloquer et ainsi de suite.

On considère donc un processus de Poisson $N = (N_t)$ issu de 0 et d'intensité λ qui représente le nombre de dislocations ayant eu lieu à l'instant t . La suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ représentant, quand à elle, les différents temps auxquels ont lieu les dislocations de notre polymère. On pose $T_0 = 0$

En posant les temps d'inter-arrivées $\eta_n = T_n - T_{n-1}$, on remarque que $T_n = \delta_1 + \dots + \delta_n$ où η_n suit une loi exponentielle de paramètre λ . De plus, on se munit d'une suite de variables

aléatoires (Q_n) , décrivant la dislocation de notre polymère à chaque saut T_n . Il est clair que (Q_n) est à valeurs dans $[0; 1[$.

On définit alors le processus AIMD suivant :

$$X_t = \begin{cases} X_{T_n} + t - T_n & \text{si } T_n \leq t < T_{n+1} \\ Q_{n+1}(X_{T_n} + T_{n+1} - T_n) & \text{si } t = T_{n+1} \end{cases}$$

avec $X_0 = x$.

Le processus a donc bien des trajectoires affines par morceaux de pente 1 entre chaque instant T_n et T_{n+1} comme nous le montre les figures ci-dessous.

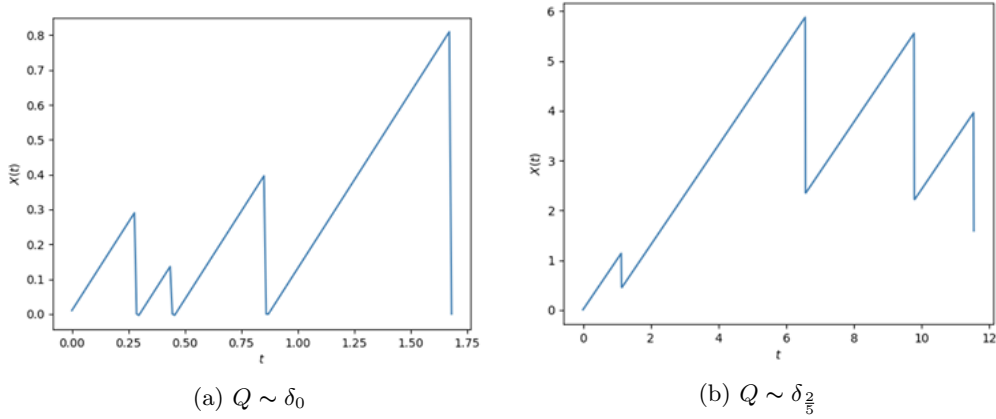


FIGURE 5 – Le processus TCP

2.2 Quelques résultats de convergence

On se place d'abord dans le cas où $Q = (Q_n)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

2.2.1 Cas où $Q = \delta_0$

Ce cas représente le cas où notre polymère reprend sa construction à zéro à chaque fois. Ce cas n'étant pas nécessairement le plus intéressant à étudier dans la pratique, nous cherchons à l'éliminer afin d'étudier un cas un peu plus général par la suite.

On va montrer que :

$$X_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mu.$$

où μ est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ .

Remarquons tout d'abord que :

- (i) $T_n \sim \Gamma(n, \lambda)$
- (ii) $X_{T_n} = 0, \forall n > 0$

On introduit tout d'abord la notion de générateur infinitésimal :

Définition 2.1. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 à valeurs dans \mathbb{R} . On définit le *générateur infinitésimal* du processus X_t pour tout $x > 0$ par :

$$L(f)(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}[f(X_t) | X_0 = x] - f(x)}{t}.$$

De [CM16], on sait que ce processus AIMD a un générateur infinitésimal spécifique. En effet, on peut citer la proposition suivante

Proposition 2.2. *On a :*

$$L(f)(x) = f'(x) + \lambda \int_0^1 (f(qx) - f(x)) \mathcal{Q}(dq).$$

Pour tout $t \geq 0$, on définit l'opérateur linéaire suivant :

$$P_t(f(x)) = \mathbb{E}[f(X_t)|X_0 = x].$$

Théorème 2.3 (Équations de Chapman-Kolmogorov). *L'opérateur linéaire P_t vérifie les équations suivantes :*

(i) *l'équation progressive :*

$$\partial_t P_t(f) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} P_t \left(\frac{P_\epsilon f - f}{t} \right) = P_t(Lf).$$

(ii) *l'équation rétrograde :*

$$\partial_t P_t(f) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{P_\epsilon(P_t f) - P_t f}{t} \right) = L(P_t(f)).$$

Proposition 2.4. *On a, dans le cas où $Q = \delta_0$:*

$$\mathbb{E}[X_t^n | X_0 = x] = \frac{n!}{\lambda^n}$$

Démonstration. Posons $g_n(t) = P_t(f_n)(x)$, où $f_n(x) = x^n$. D'après le théorème précédent, on a $\forall n > 0$,

$$L(f_n)(x) = n f_{n-1}(x) - \lambda f_n(x)$$

Puis en utilisant la première équation de Chapman-Kolmogorov, on a :

$$\begin{aligned} g'_n(t) &= \partial_t P_t(f_n)(x) \\ &= P_t(L(f_n))(x) \\ &= P_t(n f_{n-1} - \lambda f_n)(x) \\ &= n g_{n-1}(t) - \lambda g_n(t) \end{aligned}$$

On remarque facilement que $g_0(t) = 1$. Puis on prouve par récurrence que $g_n(t) = \frac{n!}{\lambda^n}$. \square

On remarque que ces moments sont en réalité les moments d'une loi exponentielle de paramètre λ . On en déduit donc que :

$$X_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mu.$$

On peut vérifier ce résultat, à l'aide d'histogramme et de la courbe de la densité de la loi exponentielle de paramètre λ , on a la figure suivante :

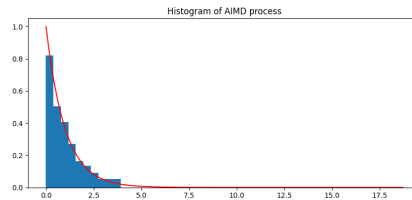


FIGURE 6 – Histogramme du processus AIMD avec 20 sauts et $\lambda = 1$

2.2.2 Cas où $Q = \delta_q$ avec $0 < q < 1$

Nous allons essayer dans un premier temps de voir, que vaut X_t sous l'évènement $\{N_t = n\}$. On a la proposition suivante :

Proposition 2.5. *Sous l'évènement $\{N_t = n\}$, on a :*

$$X_t = \begin{cases} x + t & \text{si } n = 0 \\ q^n x + \sum_{k=1}^{n+1} q^{n-k+1} (U_k - U_{k-1}) & \text{sinon} \end{cases}$$

Avec (U_n) la statistique d'ordre associée à des variables de loi uniformes sur $[0; t]$.

Démonstration. Comme (N_t) est un processus de Poisson, on a :

$$\{N_t = n\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\}.$$

Observons tout d'abord, la valeur prise par X_t sous $\{N_t = 0\}$, soit sous $\{T_0 \leq t < T_1\}$:

$$\begin{aligned} X_t &= X_{T_0} + t - T_0 \\ &= X_0 + t \\ &= x + t. \end{aligned}$$

D'où, il s'ensuit :

$$\mathcal{L}(X_t | N_t = 0) = \delta_{x+t}.$$

Nous allons à présent établir par récurrence le cas pour $n > 0$.

Notons que sous l'évènement $\{N_t = n\}$, le vecteur (T_1, \dots, T_n) coïncide avec la statistique d'ordre associée à des variables de lois uniformes sur $[0; t]$.

Pour $n = 1$, on a :

$$\begin{aligned} X_t &= X_{T_1} + t - T_1 \\ &= q(x + T_1 - T_0) + t - T_1 \\ &= qx + q(T_1 - T_0) \\ &= q^1 x + q(U_1 - U_0) \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $n = 1$. Supposons maintenant que la propriété soit vraie pour un certain $n > 0$ fixé, on a :

$$\begin{aligned} X_t &= X_{T_{n+1}} + t - T_{n+1} \\ &= q(X_{T_n} + T_{n+1} - T_n) + t - T_{n+1} \\ &= q(q^n x + \sum_{k=1}^n q^{n-k+1} (T_k - T_{k-1}) + T_{n+1} - T_n) + t - T_{n+1} \\ &= q^{n+1} x + \sum_{k=1}^n q^{n-k+2} (T_k - T_{k-1}) + q(T_{n+1} - T_n) + t - T_{n+1} \\ &= q^{n+1} x + \sum_{k=1}^{n+2} q^{n-k+2} (U_k - U_{k-1}) \end{aligned}$$

La propriété étant vraie au rang $n = 1$ et étant héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n > 0$. □

On a donc, sachant que les U_i sont continues, $\mathcal{L}(X_t|N_t = n)$ qui est une loi sans atomes, portée par $[q^n x, q^n x + t]$. On en déduit donc que : $\mu_t = \mathcal{L}(X_t|N_t > 0)$ est une loi sans atomes, portée par $[0, qx + t]$. En particulier, il s'ensuit que $\mathcal{L}(X_t|N_t > 0)$ est une loi sans atomes portée par $[0, qx + t]$. De la proposition, on peut établir que :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(X_t) &= \mathcal{L}(X_t|N_t = 0)P(N_t = 0) + \mu_t P(N_t > 0) \\ &= \delta_{x+t} e^{-\lambda t} + (1 - e^{-\lambda t})\mu_t\end{aligned}$$

On en conclut donc que le processus X_t entre dans tout intervalle fini avec probabilité positive. Autrement formulé, sa trajectoire passe par tout axe horizontal avec une probabilité non nulle. Ainsi, dans l'exemple de la polymère, nous sommes donc sûrs qu'avec une probabilité positive, la polymère passera par toutes les tailles possibles.

Ces résultats nous permettent néanmoins de nuancer cela en donnant la taille moyenne au bout de laquelle la polymère se disloque (qui n'est pas la même suivant le type de dislocation modélisé).

2.3 Couplage et vitesse de convergence

2.3.1 Introduction de la distance de Wasserstein

En se référant à la définition du couplage 1.1, dans le cadre de l'étude du processus TCP Window Size, $E = F$. La proposition suivante, nous renseigne sur une condition suffisante à vérifier pour montrer que μ admet des moments d'ordre p fini (à savoir que $\forall x \in E, \int d(x, y)^p \mu(dy) < \infty$). De ce fait, on pourra utiliser la distance de Wasserstein pendant notre étude. Il en est de même pour ν .

Proposition 2.6. *La quantité $\int d(x, y)^p \mu(dy)$ est soit finie pour tout $x \in E$, soit infinie.*

Démonstration. Supposons qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\int d(x_0, y)^p \mu(dy) < \infty$.

Par inégalité triangulaire, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}d(x, y) &\leq d(x, x_0) + d(x_0, y) \\ \frac{1}{2}d(x, y) &\leq \frac{1}{2}d(x, x_0) + \frac{1}{2}d(x_0, y) \\ \left(\frac{1}{2}d(x, y)\right)^p &\leq \left(\frac{1}{2}d(x, x_0)^p + \frac{1}{2}d(x_0, y)^p\right) \quad \text{pour } p \geq 1\end{aligned}$$

On obtient la dernière ligne par convexité de la fonction $f : x \mapsto x^p$, puisqu'on a pour $t \in [0; 1]$ et $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$$

Pour notre cas, il suffit de prendre $t = \frac{1}{2}$, $x = d(x, x_0)$, $y = d(x_0, y)$.

$$\begin{aligned}\int d(x, y)^p \mu(dy) &= 2^p \int \left(\frac{d(x, y)}{2}\right)^p \mu(dy) \\ &\leq 2^p \left(\frac{1}{2} \int d(x, x_0)^p \mu(dy) + \frac{1}{2} \int d(x_0, y)^p \mu(dy)\right)\end{aligned}$$

Comme on a $2^{p-1} \int d(x, x_0)^p \mu(dy) \leq \infty$ et $2^{p-1} \int d(x_0, y)^p \mu(dy) \leq \infty$.

Il s'ensuit qu'on a :

$$\int d(x, y)^p \mu(dy) \leq \infty.$$

Par contraposée, on a alors :

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}, \int d(x_0, y)^p \mu(dy) = \infty \implies \forall x \in \mathbb{R}, \int d(x, y)^p \mu(dy) = \infty.$$

□

Si μ et ν admettent des moments d'ordre p fini, alors la distance de Wasserstein est finie, on a :

$$W_p = \left(\inf_{\pi \in \mathcal{C}(\mu, \nu)} \int_{E \times E} d(x, y)^p \pi(dx, dy) \right)^{\frac{1}{p}},$$

avec $\mathcal{C}(\mu, \nu)$ l'ensemble des fonctions convexes des lois sur $E \times E$ qui ont pour lois marginales μ et ν .

2.3.2 Couplage de deux variables aléatoires

On considère désormais un couple (X, Y) où X et Y sont deux processus AIMD qui partent respectivement de x et de y tout en ayant le même N et le même Q .

Pour tout $k \leq t < T_1$, on définit : $|X_t - Y_t| = |x - y|$.

On rappelle qu'on a : $X_{T_1} = Q(x + T_1)$ et $Y_{T_1} = Q(y + T_1)$

D'où, on obtient $|X_{T_1} - Y_{T_1}| = Q|x - y|$ et si on généralise tout cela, on a :

$$|X_t - Y_t| = \begin{cases} Q^n Q_n & \text{si } T_n \leq t < T_{n+1} \\ Q^n Q_{n+1} |x - y| & \text{si } t = T_{n+1} \end{cases}$$

Proposition 2.7. *Le processus AIMD converge exponentiellement vers sa mesure invariante, en particulier on a :*

$$W_p(\mathcal{L}(X_t), \mathcal{L}(Y_t))^p \leq W_p(\mathcal{L}(X_0), \mathcal{L}(Y_0)) \exp\left(\frac{-\theta_p t}{p}\right),$$

avec $\theta_p = \lambda(1 - \mathbb{E}[Q_1]^p)$.

Démonstration. De la définition précédente de $|X_t - Y_t|$, on a :

$$|X_t - Y_t|^p = \sum_{n=0}^{+\infty} |X_t - Y_t|^p \mathbf{1}_{N_t=n}.$$

Autrement dit, en espérance on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|X_t - Y_t|^p] &= \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\prod_{j=1}^n Q_j\right) |x - y|^p \mathbb{1}_{N_t=n}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^n Q_j \mathbb{1}_{N_t=n}\right] \\
&= |x - y|^p \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}[Q_1]^{pn} P(N_t = n) \\
&= |x - y|^p \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\mathbb{E}[Q_1]^p \lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \\
&= |x - y|^p \exp(\lambda t (\mathbb{E}[Q_1]^p - 1)).
\end{aligned}$$

On pose $\theta_p = \lambda(1 - \mathbb{E}[Q_1]^p)$ Si $X_0 \sim \mathcal{L}(X_0)$ et $Y_0 \sim \mathcal{L}(Y_0)$

En particulier, on a :

$$|X_t - Y_t|^p = \int_{\pi \in \mathcal{C}(\mathcal{L}(X_0), \mathcal{L}(Y_0))} |x - y|^p e^{-\theta_p t} \pi(dx, dy)$$

Puis

$$\begin{aligned}
W_p(\mathcal{L}(X_t), \mathcal{L}(Y_t)) &\leq \inf_{(X, Y) \in \mathcal{C}(\mathcal{L}(X_t), \mathcal{L}(Y_t))} \mathbb{E}[|X_t - Y_t|^p] \\
&\leq e^{\theta_p t} \int |x - y|^p \pi(dx, dy)
\end{aligned}$$

On a :

$$W_p(\mathcal{L}(X_t), \mathcal{L}(Y_t))^p \leq e^{\theta_p t} \int_{\pi \in \mathcal{C}(\mathcal{L}(X_0), \mathcal{L}(Y_0))} |x - y|^p \pi(dx, dy).$$

D'où finalement, on obtient :

$$W_p(\mathcal{L}(X_t), \mathcal{L}(Y_t))^p \leq W_p(\mathcal{L}(X_0), \mathcal{L}(Y_0))^p \exp\left(\frac{-\theta_p t}{p}\right).$$

Autrement dit, on vient de prouver que deux trajectoires issues de conditions initiales différentes se rapprochent exponentiellement vite au cours de temps. On en déduit donc que le processus déterministe par morceaux convergera "exponentiellement" vite vers son unique mesure invariante pour la distance de Wasserstein. \square

3 Billard stochastique sur le disque

On reprendra la même description présente dans [Fé19].

3.1 Description

Comme on l'a dit lors de l'introduction, il s'agit d'un processus qui s'intéresse à la position d'une particule en mouvement dans une surface qu'on appellera D . Dans notre cas, D est un disque. On considère comme loi de réflexion ρ , une loi à valeurs dans $[0; \pi]$. On commencera le cas pour ρ , la mesure uniforme sur $[0; \pi]$.

- On part d'un point $X_0 = x_0$ appartenant au cercle. Selon la valeur de ρ , on obtient un vecteur V_0 donnant la direction selon laquelle la particule se déplace dans D .
- On définit $\tau_1 = \inf\{t > 0, x_0 + \tau_1 V_0 \notin D\}$. Cela correspond à notre premier saut qu'on note $T_1 = \tau_1$, on note alors :

$$X_t = \begin{cases} x_0 + \tau V_0, & V_t = V_0 & \text{pour } t \in [0, T_1[\\ x_0 + \tau_1 V_0 & & \text{pour } t = T_1 \end{cases}$$

Et au temps t , on prend une nouvelle direction selon encore ρ . On obtient de nouveau un vecteur V_1 qui donne la nouvelle direction selon laquelle la bille va se diriger dans D .

- Et ainsi de suite

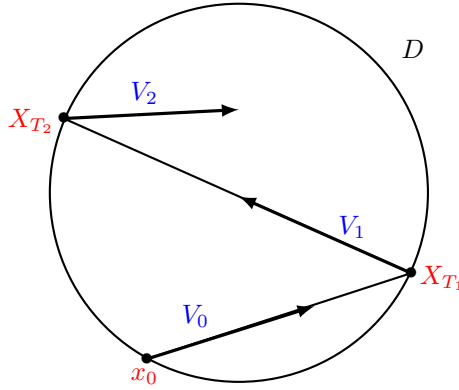


FIGURE 7 – Un billard stochastique dans un disque

Par ailleurs, on se munit d'une hypothèse pour la loi de réflexion :

Hypothèse. La loi de réflexion ρ admet un minimum pour sa densité, on le notera ρ_{\min} .

De plus, pour réaliser notre couplage, on doit se munir d'une hypothèse de plus :

Hypothèse. Les variables aléatoires (ε_n) , représentant l'angle de réflexion, possèdent une densité f , en accord avec la mesure de Lebesgue sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Ces variables vérifient la propriété suivante :

$$\exists f_{\min} > 0, \theta^* \in]\frac{2\pi}{3}; \pi[\implies f(\theta) \geq f_{\min},$$

pour $\theta \in [-\frac{\theta^*}{2}; \frac{\theta^*}{2}]$.

3.2 La chaîne de Markov incluse

Pour cette étude, on a la position du point sur le cercle à l'aide de ses coordonnées polaires, on a donc :

$$X_n = r(\cos(\theta_n) + i\sin(\theta_n))$$

avec $r > 0$ et pour tout $n \geq 0$ $\theta_n \in [0; 2\pi]$. Sans perte de généralités, travaillons sur le cercle unité, d'où on peut identifier X_n uniquement par son angle θ_n . Ainsi, dans l'intégrité du mémoire, lorsqu'on parle d'une variable aléatoire uniforme sur S^1 , on fait référence à une variable aléatoire uniforme sur $[0; 2\pi]$. On a la proposition suivante :

Proposition 3.1. On a :

$$\theta_{n+1} = \theta_n + 2\varepsilon_{n+1} \mod 2\pi$$

avec (ε_i) des variables indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{U}([0; \pi])$.

Démonstration. La preuve est essentiellement géométrique, nous allons utiliser la figure ci-dessous pour illustrer les variables mises en jeu.

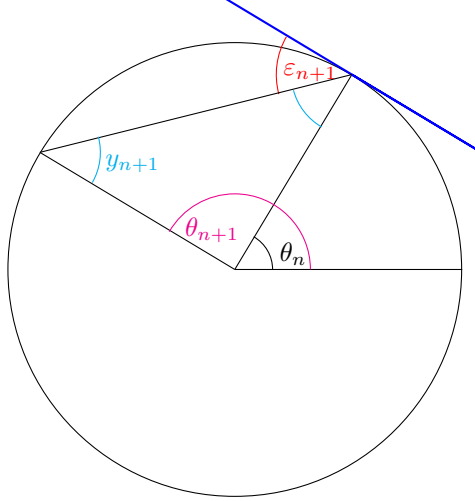


FIGURE 8 – Illustration des variables

De la figure, on a :

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \pi - 2y_{n+1}.$$

Or graphiquement, on voit que :

$$y_{n+1} = \pi - \varepsilon_{n+1} - \frac{\pi}{2}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} &= \theta_n + \pi - 2\left(\pi - \varepsilon_{n+1} - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \theta_n + \pi - \pi + 2\varepsilon_{n+1} \\ &= \theta_n + 2\varepsilon_{n+1}. \end{aligned}$$

□

Remarque 3.2.

- On remarque qu'on a une récurrence aléatoire d'où le processus θ_n est une chaîne de Markov, en particulier, il s'agit d'un **processus autorégressif d'ordre 1 (AR(1))**.
- Par ailleurs, en itérant la relation 3.1, on a :

$$\theta_n = \theta_0 + 2 \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \mod (2\pi)..$$

De cette définition récurrente, conjecturons la loi de θ_n à l'aide d'un langage de programmation, on obtient les figures suivantes avec Python.

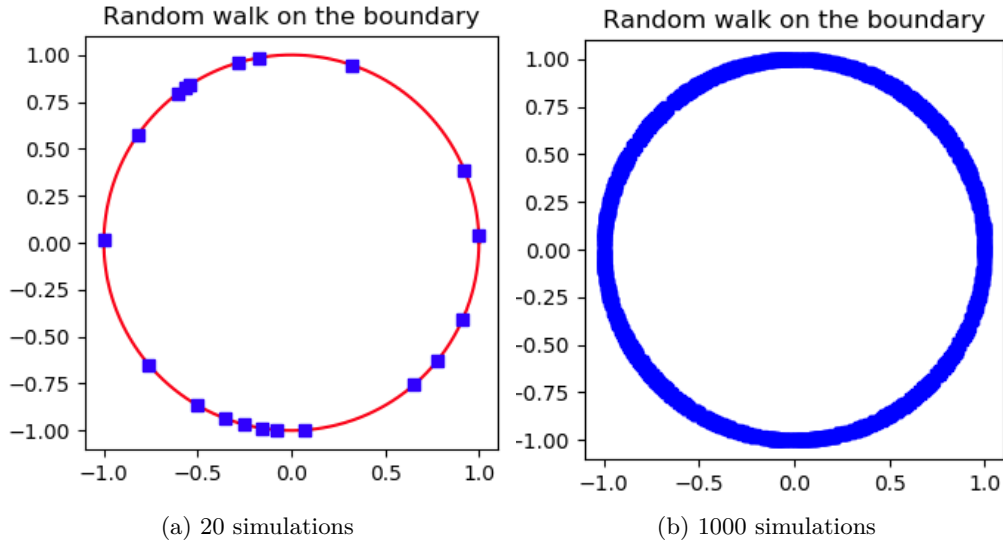


FIGURE 9 – Chaîne de Markov sur le cercle

3.2.1 Mesure invariante associée

Sur l'exemple ci-dessus, on a simulé jusqu'à θ_{1000} . On peut remarquer que l'ensemble du cercle a été "visité", on pourrait supposer que la chaîne de Markov sur le cercle suit une loi uniforme sur $[0; 2\pi]$. Vérifions cela à l'aide d'histogrammes.

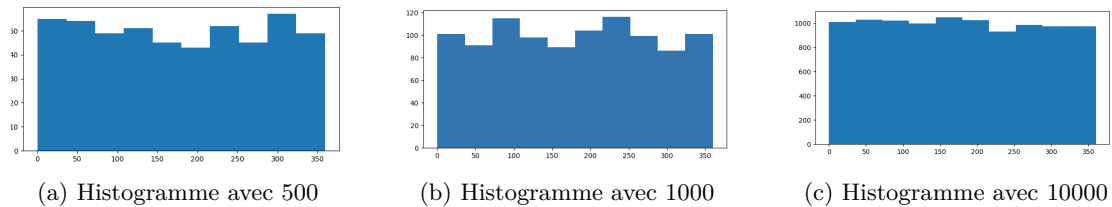


FIGURE 10 – Histogrammes

Les histogrammes confirment bien l'hypothèse.

Nous allons montrer de trois manières différentes l'existence d'une mesure de probabilité invariante pour la chaîne de Markov sur le cercle. La première en utilisant des caractéristiques relatifs au cercle, la deuxième de manière probabiliste à l'aide du noyau de transition. La troisième, plus générale et facile à vérifier nous permettra d'établir l'existence (sans la trouver) de cette mesure invariante via le théorème d'analyse de Krylov-Bogoliubov.

Lemme 3.3 (Invariance par translation de la loi uniforme sur S^1). *Soit $X \sim \mathcal{U}(S^1)$, et $\theta \in S^1$ alors :*

$$X + \theta \sim \mathcal{U}(S^1)$$

Démonstration. Soit $X \sim \mathcal{U}(S^1)$, $\theta \in S^1$ et A un borélien de S^1 . Notons $A = [a; b] \subset [0; 2\pi]$ et $A' = [a'; b']$ avec $a' = a + \theta \mod (2\pi)$ et $b' = b + \theta \mod (2\pi)$. Il est clair que $A' \subset [0; 2\pi]$.

D'une part, on a :

$$P(X \in A) = \frac{b - a}{2\pi},$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} b' - a' &= b + \theta - a - \theta \mod (2\pi) \\ &= b - a \mod (2\pi). \end{aligned}$$

Comme $[a; b] \subset [0; 2\pi]$, il s'ensuit que A et A' sont de même longueurs donc on a :

$$\begin{aligned} P(X + \theta \in A') &= P(X + \theta \in A) \\ &= \frac{b + \theta - a - \theta}{2\pi} \\ &= \frac{b - a}{2\pi} \\ &= P(X \in A), \end{aligned}$$

ce qui montre la propriété voulue. □

Théorème 3.4. Soit $X \sim \mathcal{U}(S^1)$ et $Y \in S^1$ indépendant de X alors $X + Y \sim \mathcal{U}(S^1)$

Démonstration. Soit A un borélien de S^1 , calculons :

$$\begin{aligned} P(X + Y \in A) &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_A(X + Y)] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{1}_A(X + Y)]|Y] \\ &= \mathbb{E}[\phi(Y)] \end{aligned}$$

Avec $\phi(y) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A(X + y)]$

Or, par le lemme précédent $X + y \sim \mathcal{U}[S^1]$, d'où on a le résultat. □

Par (θ_n) , on désigne la chaîne définie en 3.1, on a les propriétés suivantes :

Corollaire 3.5. Si $\theta_0 \in \mathcal{U}(S^1)$, alors $\theta_n \in \mathcal{U}(S^1)$.

Cette démonstration nous montre que si l'on choisit θ_0 uniformément sur le cercle, alors il suivra toujours au temps n (conséquence d'une somme de facteurs d'innovations indépendants) une loi uniforme sur ce même cercle. Ce qui confirme que la mesure uniforme est bien une mesure de probabilité invariante sur le cercle.

Remarque 3.6. Ce qu'on vient d'observer est une propriété particulière relatif au cercle faisant intervenir la notion plus général de **groupe**. En effet, un groupe est ensemble qu'on munit d'une application spécifique dont l'image de deux éléments du groupe par cette application reste dans le groupe. Ici, si on se trouve sur un point du cercle, en appliquant une rotation par rapport au centre du cercle, on sera toujours sur le cercle. Ceci est représenté par le modulo 2π qui nous permet de rester sur le cercle.

Essayons de nous en convaincre via d'autres notions, comme celles du noyau de transition, plus utiles car plus générales.

Définition 3.7.

- On appelle **noyau de transition** sur M une famille de probabilités $P = (P_x)_{x \in M}$ sur M telle que pour tout borélien $G \in \mathcal{B}(M)$, l'application :

$$\mathcal{B}(M) \rightarrow [0; 1], \quad x \mapsto P_x(G)$$

est mesurable, avec $x \in M$.

- Le noyau de transition transforme une mesure positive μ sur M en une mesure positive μP définie par :

$$\mu P(G) = \int_M P_x(G) \mu(dx).$$

En particulier, on dit que la mesure μ est **invariante** pour le noyau de transition si on a pour tout borélien G de M , on a :

$$\mu P(G) = \mu(G).$$

- Enfin, on définit pour toute fonctions f bornées de M à valeurs réelles, le **produit à droite** :

$$Pf(x) = \int_M f(y) P_x(y) dy$$

Ici, on note $P(x, A) = P(\theta_{n+1} \in A | \theta_n = x)$, le noyau de transition associé à la chaîne θ_n , où A est un compact inclus dans $[0, 2\pi]$.

Proposition 3.8. *La mesure de probabilité uniforme sur $[0; 2\pi]$ est une mesure invariante de la chaîne θ_n .*

Démonstration. Montrons que pour tout $A = [a_n; b_n]$, on a $\mu P(A) = \mu(A)$, avec μ est la mesure de probabilité uniforme.

Par définition, on a

$$\mu(dx) = \frac{dx}{2\pi} \mathbb{1}_{0 \leq x \leq 2\pi}.$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \int_A \frac{dx}{2\pi} \\ &= \frac{b_n - a_n}{2\pi} \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \{\theta_{n+1} \in A | \theta_n = x\} &= \{a_n \leq \theta_{n+1} \leq b_n | \theta_n = x\} \\ &= \left\{ \frac{a_n - x}{2} \leq \varepsilon_{n+1} \leq \frac{b_n - x}{2} \right\}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\mu P(A) &= \int_0^{2\pi} P(\theta_{n+1} \in A | \theta_n = x) \mu(dx) \\
&= \int_0^{2\pi} P\left(\frac{a_n - x}{2} \leq \epsilon_{n+1} \leq \frac{b_n - x}{2}\right) \frac{dx}{2\pi} \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{b_n - x}{2\pi} - \frac{a_n - x}{2\pi} \frac{dx}{2\pi} \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{b_n - a_n}{2\pi} \frac{dx}{2\pi} \\
&= \frac{b_n - a_n}{2\pi} \\
&= \mu(A).
\end{aligned}$$

□

La mesure uniforme est donc bien une mesure invariante pour la chaîne de Markov qu'on a définie sur le cercle. Une autre manière de démontrer l'existence d'une telle mesure eut été d'utiliser le théorème Krylov-Bogolyubov que nous explicitons dans l'annexe ??.

Une question légitime qu'on peut se poser est si la mesure uniforme reste invariante si les (ϵ_i) ne sont pas des variables uniformes sur $[0; 2\pi]$. Pour cela, on va dire que les (ϵ_i) suivent la loi du cosinus surélevé de densité :

$$f_{\mu,s}(x) = \frac{1}{2s} \left(1 + \cos\left(\frac{x - \mu}{s}\pi\right) \right) \mathbb{1}_{[\mu-s, \mu+s]}.$$

Comme on veut que l'angle de réflexion soit dans l'intervalle $[0; 2\pi]$, on prend $s = \mu = \frac{\pi}{2}$.

Proposition 3.9. *La mesure de probabilité uniforme sur $[0; 2\pi]$ reste une mesure invariante de la chaîne θ_n , même si les (ϵ_i) suivent la loi du cosinus surélevé de paramètres $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.*

Démonstration. Tout d'abord, notons que la fonction de répartition du cosinus surélevé pour $\mu = s = \frac{\pi}{2}$ est :

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2x}{\pi} - 1 - \frac{\sin(2x)}{\pi} \right) \\
&= \frac{x}{\pi} - \frac{\sin(2x)}{2\pi}.
\end{aligned}$$

Soit $A = [a_n; b_n] \subseteq [0; 2\pi]$. On a :

$$\mu(A) = \frac{b_n - a_n}{2\pi}.$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
\mu P(A) &= \int_0^{2\pi} P(\theta_{n+1} \in A | \theta_n = x) \mu(dx) \\
&= \int_0^{2\pi} P\left(\frac{a_n - x}{2} \leq \epsilon_{n+1} \leq \frac{b_n - x}{2}\right) \frac{dx}{2\pi} \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{b_n - a_n}{2\pi} - \frac{\sin(b_n - x) - \sin(a_n - x)}{2\pi} \right) \frac{dx}{2\pi}.
\end{aligned}$$

Soit $p, q \in \mathbb{R}$, on remarque que :

$$\sin(p) - \sin(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

D'où on a :

$$\sin(b_n - x) - \sin(a_n - x) = 2 \cos\left(\frac{a_n + b_n}{2} - x\right) \sin\left(\frac{b_n - a_n}{2}\right)$$

Soit :

$$\begin{aligned}\mu P(A) &= \frac{b_n - a_n}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \sin\left(\frac{b_n - a_n}{2}\right) \int_0^{2\pi} \cos\left(\frac{a_n + b_n}{2} - x\right) dx \\ &= \frac{b_n - a_n}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \sin\left(\frac{b_n - a_n}{2}\right) \left[-\sin\left(\frac{a_n + b_n}{2} - x\right) \right]_0^{2\pi}.\end{aligned}$$

D'où finalement $\mu P(A) = \mu(A)$.

Une dernière manière de faire, consiste à faire appel à un théorème d'analyse, le théorème de Krylov-Bogoliubov [KB37]. En effet, ce théorème garantit l'existence d'une mesure invariante pour certaines applications et sur des espaces spécifiques dont on explicite ici.

Définition 3.10. En topologie, un espace **séparable** est un espace topologique contenant un sous ensemble dense et au plus dénombrable. En particulier, on appelle **espace Polonais**, un espace métrique complet séparable.

Exemple 3.11. Voici quelques exemples connus d'espaces Polonais.

- Tout espace de Banach séparable
- La droite des réels
- L'espace de Cantor, soit $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$

On rappelle aussi la propriété de Feller, on reprend la définition de [Low10].

Définition 3.12 (Propriété de Feller). Soit M , un espace de Banach compact, on note $\mathcal{C}_0(M)$, l'ensemble des fonctions continues $f : M \mapsto \mathbb{R}$ qui "disparaissent à l'infini", c'est à dire $\lim f(x) = 0$ pour $\|x\| \rightarrow 0$. Un noyau de transition (P_t) vérifie la **propriété de Feller** si pour tout $f \in \mathcal{C}_0(M)$, on a :

- (i) $P_t f \in \mathcal{C}_0(M)$
- (ii) $P_t f(x) \xrightarrow{t \rightarrow 0} f(x)$ pour $x \in M$

Soit X , un espace Polonais et $(P_t)_{t \geq 0}$ les probabilités de transition pour une chaîne de Markov à espace continue sur X , autrement dit :

$$P(X_t \in A | X_0 = x) = P_t(x, A)$$

Théorème 3.13 (Krylov Bogolyunov). *S'il existe un point x de X dont la famille de mesure de probabilités $\{P_t(x, \cdot | t > 0)\}$ est **uniformément tendue** et le semi-groupe (P_t) satisfait la **propriété de Feller**, alors il existe au moins une mesure de probabilité invariante.*

Appliquons ce théorème pour notre billard stochastique. D'une part, on remarque que le cercle est un espace Polonais, car il s'agit d'un espace de Banach et séparable. En effet, $]0, 2\pi[\supset]0, 2\pi[\cap \mathbb{Q}$, où $]0, 2\pi[\cap \mathbb{Q}$ est dense dans $]0, 2\pi[$ et au plus dénombrable. Donc l'intervalle $]0, 2\pi[$ est bien séparable.

Afin de satisfaire les hypothèses du théorème de Krylov-Bogoliubov, il faut tout d'abord vérifier que la famille de probabilités $P_t(x, \cdot)$ est uniformément tendue pour tout $x \in E$.

Or, comme $E = [0, 2\pi]$ est compact, on a bien :

$$P_t(x, [0, 2\pi]) = 1 > 1 - \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$$

Donc le caractère uniformément tendue est vraie. On admet la propriété de Feller, toutefois une intuition de la preuve de la propriété de Feller serait :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} P_t f(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{[0, 2\pi]} P_t(x, z) f(z) dz \\ &= \int_{[0, 2\pi]} \lim_{t \rightarrow 0} P_t(x, z) f(z) dz \\ &= \int_{[0, 2\pi]} \delta_x(z) f(z) dz \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Et comme $P_t f \in \mathcal{C}_0(M)$, alors la propriété de Feller est vérifiée.

En réalité, la compacité aide ici beaucoup à établir la preuve de l'existence d'une mesure invariante grâce au théorème de Krylov-Bogoliubov.

Maintenant on peut se demander si cette mesure invariante est unique, pour cela nous allons faire appel à la notion de couplage pour les processus stochastiques qui nous donnera l'unicité mais aussi la vitesse de convergence.

Théorème 3.14. Si $\theta^* > \frac{\pi}{2}$, $\forall n \geq 0$, alors :

$$d_{TV}(P(\theta_n \in \cdot), \nu) \leq (1 - f_{\min}(2\theta^* - \pi))^n.$$

Démonstration. Dans un premier temps, montrons l'unicité de la mesure invariante par un argument de couplage. Soient $(\theta_n, \varepsilon_n)$ et $(\tilde{\theta}_n, \tilde{\varepsilon}_n)$ deux versions du processus décrit à la section 1.2 où $\tilde{\theta}_n$ suit la mesure invariante uniforme.

D'après [Fé19], pour coupler les deux processus, il faut montrer que $I_n \cap \tilde{I}_n \neq \emptyset$, avec

$$I_n = [(n-1)\pi - n\theta^* + \theta_0 + (n-1)\varepsilon; (n-1)\pi - n\theta^* + \theta_0 - (n-1)\varepsilon] \quad \text{pour } \varepsilon \in]0; \theta^*[.$$

Tout d'abord, remarquons qu'on a $|I_1| = |\tilde{I}_1| = 2\theta^* > \pi$. On peut donc construire un couplage $(\theta_1, \tilde{\theta}_1)$ tel que :

$$P(\theta_1 = \tilde{\theta}_1) \geq \gamma_1$$

D'après le lemme 1.7 avec :

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \int_{I_1 \cap \tilde{I}_1} \min(f_{\theta_1}, f_{\tilde{\theta}_1}(u)) du \\ &\geq \frac{f_{\min}}{2} |I_1 \cap \tilde{I}_1|. \end{aligned}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned} P(\theta_1 = \tilde{\theta}_1) &\geq \frac{f_{\min}}{2} |I_1 \cap \tilde{I}_1| \\ &\geq \frac{f_{\min}}{2} 2(2\theta^* - \pi) \\ &\geq f_{\min}(2\theta^* - \pi). \end{aligned}$$

D'où, on a :

$$\begin{aligned} d_{TV}(P(\theta_n \in \cdot), \nu') &\leq P(\theta_n \neq \tilde{\theta}_n) \\ &\leq P(T > n) \quad \forall n \geq 0 \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} d_{TV}(P(\theta_n \in \cdot), \nu) &\leq P(T > n) \\ &\leq (1 - f_{\min}(2\theta^* - \pi))^n \end{aligned}$$

De ce fait, (θ_n) converge vers l'unique¹ mesure de probabilité invariante (qui est la mesure uniforme) à une vitesse exponentielle.

Or $P(T > n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

D'où finalement $P = \nu$. □

3.3 Le processus continu

Nous avons étudié en amont la chaîne de Markov incluse, maintenant on va se focaliser sur le processus continu 3.1. Le but ici est d'établir une estimation de la vitesse de convergence de la particule vers son unique mesure invariante sur le disque D . Comme auparavant, l'unicité de la mesure invariante se montre par couplage. On fait un résumé du couplage réalisé dans [Fé19], car le recopier ici ne présente aucun intérêt. Le couplage se déroule en deux temps. En un premier temps, on couple les deux processus sur leur temps afin que les deux processus arrivent à un point du cercle en même temps, et dans un second temps on réalise un couplage sur la position, et après deux sauts, les deux processus se croiseront à la même position et au même moment.

Toutefois, même si on ne donne pas l'estimation de la vitesse de convergence, on montre la nécessité d'attendre deux rebonds pour coupler et pas uniquement un seul rebond après avoir couplé en temps. En effet, ce détail n'était pas mentionné et si un seul rebond suffisait alors on la vitesse de convergence en aurait été amélioré, cependant ce n'est pas le cas et on va voir cela.

On note T_n le temps où le billard atteint la frontière du disque après n sauts. C'est à dire que X_{T_n} correspond au n -ième point du billard sur le cercle. On va établir donc des propriétés pour T_1 et montrer en quoi cette dernière n'est pas avantageuse pour le couplage à la différence de T_2 . Enfin on rajoute cette définition, utilisé dans le couplage :

Définition 3.15. Soit un compact convexe $K \subset \mathbb{R}^2$. On dit qu'un couple de variable aléatoire (X, T) à valeur dans $\partial K \times \mathbb{R}^+$ est α -continu dans l'ensemble $A \times B \subset \partial K \times \mathbb{R}^+$ si pour $A_1 \subset A$, $B_1 \subset B$, on a :

$$P(X \in A_1, T \in B_1) \geq \alpha |A_1| |B_1|.$$

1. l'unicité vient en réalité de l'équation 1.5.

3.3.1 Existence

De nouveau, on peut utiliser le théorème de Krylov-Bogolyubov 3.13 puisque les conditions d'utilisation y sont vérifiées. En effet, du fait que le disque \mathcal{D} soit un compact, il s'ensuit qu'on se retrouve avec un espace Polonais.

De plus, la famille de proba (P_t) vérifie :

$$P_t(x, \mathcal{D}) = 1 > 1 - \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Donc, il s'agit d'une famille de probabilités uniformément tendue. La propriété de Feller se montre de manière analogue, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} P_t f(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_D P_t(x, z) f(z) dz \\ &= \int_D \lim_{t \rightarrow 0} P_t(x, z) f(z) dz \\ &= \int_D P(\lim_{t \rightarrow 0} X_0 + tV_0 = z | X_0 = x) f(z) dz \\ &= \int_D \delta_x(z) f(z) dz \\ &= f(x) \end{aligned}$$

et il est clair que $P_t f \in \mathcal{C}(M)$. D'où, en utilisant le théorème de Krylov-Bogolyubov, on a donc l'existence d'une mesure invariante pour le processus de Markov.

3.3.2 Unicité

Montrons l'unicité la nécessité d'attendre ce qu'il se passe après deux rebonds et non pas un. Nous allons voir que le principal problème avec le couplage avec T_1 est un problème de support. Remarquons déjà que sur $[-\frac{\theta^*}{2}; \frac{\theta^*}{2}]$,

Proposition 3.16. Sur $[-\frac{\theta^*}{2}; \frac{\theta^*}{2}]$, on a :

$$f_{T_1} \geq \frac{f_{\min}}{r \sin(\frac{\theta}{2})}$$

On définit par la suite $f_{\min(1)} := \frac{f_{\min}}{r \sin(\frac{\theta^*}{2})}$.

Démonstration. On sait que ε_1 vérifie l'hypothèse 3.1. Autrement dit, pour $x \in [-\frac{\theta^*}{2}; \frac{\theta^*}{2}]$, on a $f_{\varepsilon_1}(x) \geq f_{\min}$ avec $\theta^* \in [\frac{2\pi}{3}; \pi[$. On a $T_1 = 2r \cos(\varepsilon_1)$, alors on a :

$$2r \cos\left(\frac{\theta^*}{2}\right) \leq T_1 \leq 2r.$$

Minorons f_{T_1} , prenons g , une fonction mesurable bornée, alors on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(T_1)] &= \mathbb{E}[g(2r \cos(\varepsilon_1))] \\ &\geq f_{\min} \int_{-\frac{\theta^*}{2}}^{\frac{\theta^*}{2}} g(2r \cos(u)) du \\ &= 2f_{\min} \int_0^{\frac{\theta^*}{2}} g(2r \cos(u)) du. \end{aligned}$$

Effectuons un changement de variable. Posons $x = 2r \cos(u)$, soit $u = \arccos(\frac{x}{2r})$. On a alors $du = \frac{-dx}{2r\sqrt{1-(\frac{x}{2r})^2}}$. D'où :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g(T_1)] &\geq \frac{-f_{\min}}{r} \int_{2r}^{2r \cos(\frac{\theta^*}{2})} \frac{g(x)}{\sqrt{1-(\frac{x}{2r})^2}} dx \\ &= \int_{2r \cos(\frac{\theta^*}{2})}^{2r} g(x) \frac{f_{\min}}{r\sqrt{1-(\frac{x}{2r})^2}} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \frac{f_{\min}}{r\sqrt{1-(\frac{x}{2r})^2}} \mathbb{1}_{[2r \cos(\frac{\theta^*}{2}); 2r]}(x) dx.\end{aligned}$$

D'où finalement :

$$f_{T_1}(x) \geq \frac{f_{\min}}{r\sqrt{1-\cos^2(\frac{\theta^*}{2})}}.$$

Ce qu'il fallait démontrer. □

Donc T_1^w est $f_{\min(1)}$ -continue sur $[2r \cos(\frac{\theta^*}{2}); 2r]$, On a remarqué que pour établir l'égalité de couplage, il fallait que si on considérait deux variables $T_0 + T_1$ et $\hat{T}_0 + \hat{T}_1$ alors leur intersection devait être nul ([F619], cf Embedded Markov Chain).

Autrement dit :

$$[T_0 + 2r \cos\left(\frac{\theta^*}{2}\right); T_0 + 2r] \cap [\hat{T}_0 + 2r \cos\left(\frac{\theta^*}{2}\right); \hat{T}_0 + 2r] \neq \emptyset.$$

Or dans le cas $\hat{T}_0 = T - 0 + 2r$, on a :

$$\hat{T}_0 + 2r \cos\left(\frac{\theta^*}{2}\right) - (T_0 + 2r) = 2r \cos\left(\frac{\theta^*}{2}\right) > 0 \quad \text{avec} \quad \theta^* \in]0; \pi[.$$

Il s'ensuit alors que l'intersection est vide, ce qui nous permet donc pas de réaliser un couplage des deux processus stochastiques. À l'inverse, ce problème ne se pose pas pour T_2 .

4 Problèmes ouverts

Dans cette section, on met les divers pistes qu'on a exploré.

4.1 Mesure invariante du processus continu

Ici, on s'intéresse à comment montrer de manière informatique que la mesure invariante du processus continu dans le disque est la mesure uniforme du disque. En rajoutant, les trajectoires entre chaque point de la frontière, on obtient ces figures suivantes :

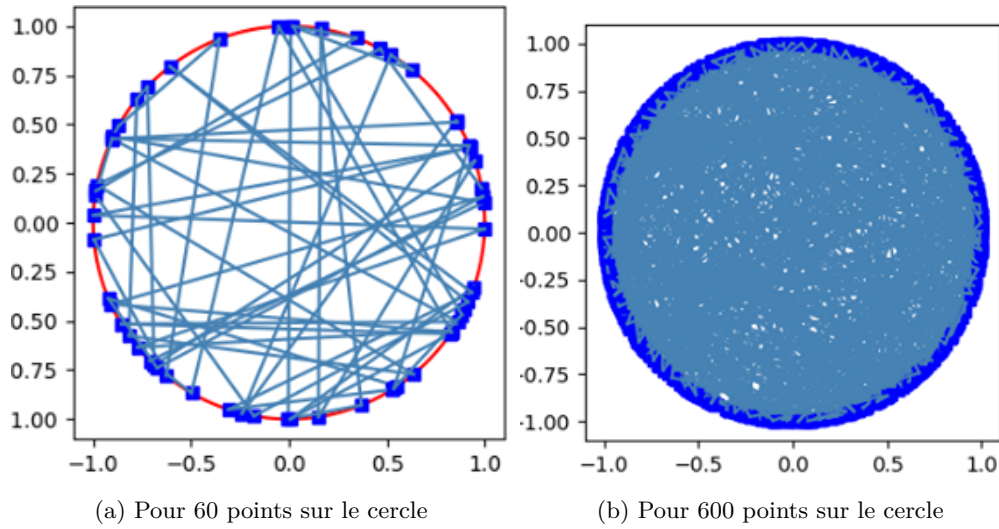


FIGURE 11 – Trajectoires du billard stochastique

Comme attendu, il semblerait que le processus continu visite chaque point du disque. Mais peut-on dire que le processus converge vers la mesure uniforme du disque. On va de nouveau utiliser des histogrammes pour montrer ce point.

Contrairement à notre première application des histogrammes, ici on fait face à un obstacle. En effet, comment répartit-on les points du disque ? On a pensé, à découper de manière uniforme le disque, comme ci-dessous :

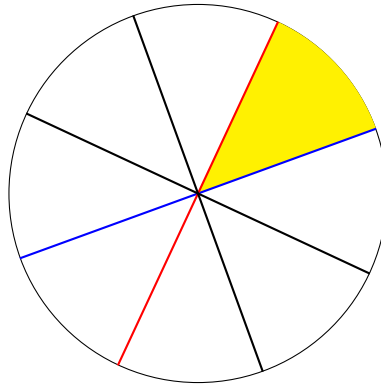


FIGURE 12 – Découpage uniforme du disque

Ainsi de cette manière, si on obtient un amont similaire de point pour chaque région, on pourra en déduire qu'on a une mesure uniforme sur le disque. Pour savoir, si un point appartient à une part spécifique du disque, il suffit de remarquer que chaque part est une intersection de condition unique. En effet, concentrons nous sur la part jaune.

Notons f_1 et f_2 les fonctions affines associées respectivement à la droite bleue et la droite rouge et \mathcal{D} le disque. La part jaune correspond à :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad y \leq f_1(x) \cap y \geq f_2(x) \cap (x, y) \in \mathcal{D}.$$

Comme les points de la trajectoire sont des points du disque, l'appartenance à une région se fait uniquement par le biais d'intersection de régions créées par des droites.

En appliquant ce principe, on obtient les histogrammes suivants :

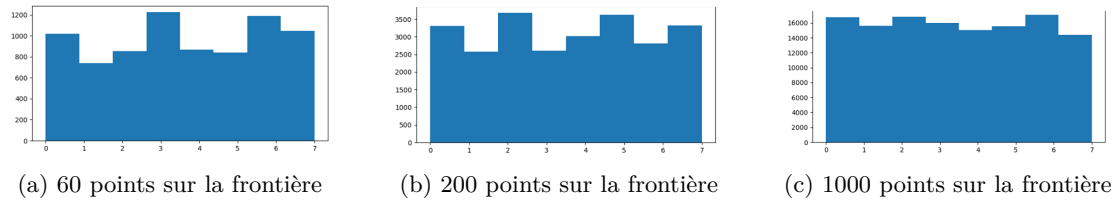


FIGURE 13 – Histogrammes

Toutefois ce découpage du disque ne suffit pas pour affirmer que le processus continu admet comme mesure invariante la mesure uniforme sur le disque. En effet, de ce découpage, on ne peut pas décerner si le processus se répartit uniformément dans le disque. En effet, le billard stochastique peut très bien se répartir plus sur le centre du disque et non dans l'ensemble du disque. En fait, les histogrammes décrivent plus un phénomène d'invariance de la position de la particule à un instant t du disque.

4.2 Billard stochastique dans un polygone

Dans [Fé19], à la suite du billard stochastique dans un disque, il y a une étude du billard stochastique dans un cadre plus général : celui des surfaces convexes à courbure bornée. Toutefois, les polygones convexes ne rentrent pas dans cette classe, car que l'on a donc souhaité d'observer. Contrairement au billard stochastique dans le disque, on ne dispose pas de propriétés géométriques nous permettant d'avoir la chaîne de Markov incluse. Toutefois, on a réussi à simuler le billard stochastique.

En effet, un polygone peut être représenté comme l'intersection des régions relatives aux droites partant des sommets du polygone. D'où comme précédemment, on peut définir une fonction qui nous indiquera si un point est dans le polygone.

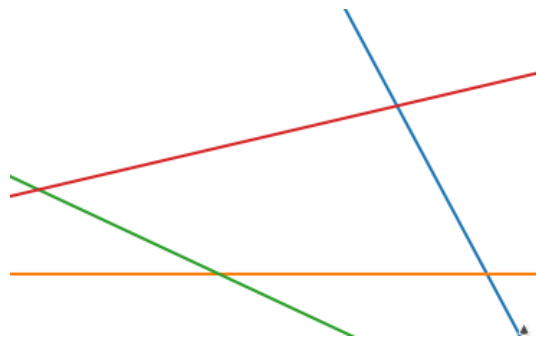


FIGURE 14 – Quadrilatère formé d'une intersection de droite

Maintenant qu'on dispose de cette fonction, nous allons pouvoir effectuer une dichotomie. Effectivement, on va choisir une direction, toujours selon un angle dans $[0; \pi]$, puis on va effectuer le principe de dichotomie pour se rapprocher le plus possible du point de la frontière. On obtient les figures suivantes :

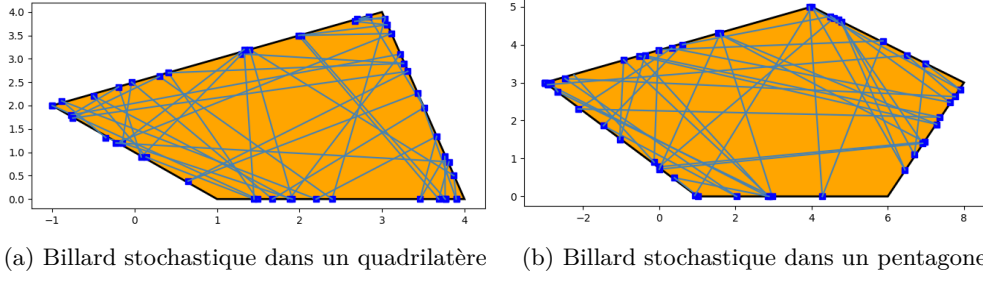


FIGURE 15 – Billards stochastique

Par ailleurs, comme il s'agit d'une dichotomie, le programme informatique ne permet pas d'être sur la frontière de manière précise. En effet, si on se focalise sur un point en particulier, on voit que le point est soit dans le polygone, soit à l'extérieur du polygone.

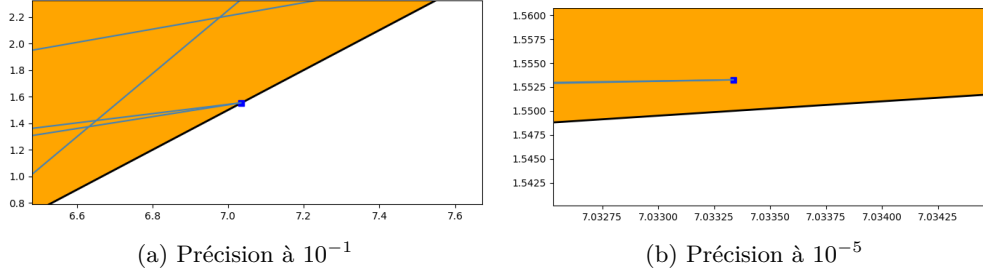


FIGURE 16 – Précision

4.3 Une normale quotientée tendrait vers une uniforme

À partir du deuxième item dans 3.2. On s'intéresse à la somme des (ε_i) qui se comporterait comme une normale via le théorème centrale limite, cependant ici on la tronque par le modulo 2π , on a essayé de montrer la conjecture suivante en utilisant [Cha20] et [Tuc38] :

Conjecture. On a :

$$Y_n = 2 \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \mod (2\pi) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{D}} \mathcal{U}([0; 2\pi])$$

De [Tuc38], il est question d'une partie fractionnaire d'un nombre. On a l'équivalent suivant pour le modulo 2π :

Lemme 4.1. Notons $\mu = \mathbb{E}[\varepsilon_i]$ et $\text{Var}[\varepsilon_i] = \sigma^2$. On a alors :

$$\varepsilon_i \mod (2\pi) = \varepsilon_i - 2\pi \times \left\lfloor \frac{\varepsilon_i}{2\pi} \right\rfloor.$$

Idée de preuve de la conjecture :

Soit $[a; b] \subset [0; 2\pi]$ un segment. Posons $Y_n = Z_n \bmod (2\pi)$ et notons, pour $n > 0$, F_n la fonction de répartition associée à la variable aléatoire Z_n . On a :

$$\begin{aligned} P(Y_n \in [a; b]) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} P(Z_n \in [2m\pi + a; 2m\pi + b]) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} (F_n(2m\pi + b) - F_n(2m\pi + a)) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_a^b F'_n(2m\pi + x) dx. \end{aligned}$$

Considérons désormais deux intervalles $[a, b]$ et $[a'; b']$ de même longueurs, c'est à dire tels que $b - a = b' - a'$. Alors on a :

$$\begin{aligned} \int_a^b F'_n(2m\pi + x) dx &= \int_a^{b' - a' + a} F'_n(2m\pi + x - a + a') dx \\ &= \int_a^b F'_n(2m\pi + x - a + a') dx. \end{aligned}$$

D'où on a :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b F'_n(2m\pi + x) dx - \int_{a'}^{b'} F'_n(2m\pi + x) dx \right| &\leq \int_a^b |F'_n(2m\pi + x) - F'_n(2m\pi + x - a + a')| dx \\ &= \int_{2m\pi + a}^{2m\pi + b} |F'_n(x) - F'_n(x + a' - a)| dx. \end{aligned}$$

Puis :

$$\begin{aligned} P(Y_n \in [a; b]) - P(Y_n \in [a'; b']) &\leq \sum_{m \in [-n; n]} \int_{2m\pi + a}^{2m\pi + b} |F'_n(x) - F'_n(x + a' - a)| dx \\ &= \|F'_n(\cdot) - F'_n(\cdot + a' - a)\|_{L^1}. \end{aligned}$$

On a l'intuition, via le théorème centrale limite que

$$Z_n \underset{n \rightarrow \infty}{\overset{\mathcal{D}}{\sim}} \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2).$$

Comme $F'_n(x) \underset{n \rightarrow \infty}{\overset{\mathcal{D}}{\sim}} f_n(x)$, on a alors :

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{1}{n\sigma^2 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - n\mu)^2}{2n\sigma^2}} \\ &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$P(Y_n \in [a; b]) - P(Y_n \in [a'; b']) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

D'ou finalement, on a :

$$2 \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \bmod (2\pi) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{D}} \mathcal{U}([0; 2\pi]).$$

Remarque 4.2. Nous avons essayé d'utiliser l'inégalité de Berry-Essen pour exprimer l'idée de que Z_n "se rapprochait d'une loi normale avec une grande variance" pour n tendant vers l'infini. Seulement la majoration dans la somme de la différence $(|Z_n| - \phi(nm + \sigma\sqrt{n}x))$ par un $\mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{n}})$ ne nous permettant point de conclure. Nous avons été contraint d'abandonner l'initiative. Nous nous sommes donc contentés d'intuiter un résultat faisant suite à une démonstration s'étant inspirée du travail de [Tuc38] concernant la dilatation.

A Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

On met en annexe, cette étude de marche aléatoire non biaisée ($p \neq \frac{1}{2}$) sur l'ensemble discret qu'est \mathbb{Z}/\mathbb{Z} , car on pouvait représenter ces éléments par les racine nième de l'unité qui se placent dans le cercle. Ainsi on observe la trajectoire de la bille, en partant d'un de ces points.

A.1 Recherche de la mesure invariante

On étudie la matrice de transition suivante : On cherche à savoir le comportement de P^n pour $n \rightarrow +\infty$ Notons J la matrice ci-dessous : On a $J^n = I_n$ et $P = \frac{1}{2}J + \frac{1}{2}J^{n-1} = \frac{1}{2}(J + J^{-1})$

Définition A.1. Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que P est une matrice **circulante** si P s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & & & p_{n-1} \\ p_{n-1} & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & p_2 \\ & & & \ddots & \ddots & p_1 \\ p_1 & & & & p_{n-1} & p_0 \end{pmatrix}$$

On la note : $P = P(p_0, \dots, p_{n-1})$

Dans notre cas, on a $p_1 = p_{n-1} = \frac{1}{2}$.

$$p_i = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } i = 1 \text{ ou } i = n - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Autrement dit, avec les notations on a $P = P(0, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$. On cherche à diagonaliser P

Notons ω_n^k les racines n-ièmes de l'unité.

Proposition A.2 (admis). *Les valeurs propres de P , une matrice circulante sont les*

$$\lambda_k = \sum_{j=0}^{n-1} p_j (\omega_n^k)^j$$

En particulier, on a

$$\lambda_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

Lemme A.3 (admis). *Il existe $U, \Omega \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que : $P = U\Omega U^{-1}$ avec*

$$U = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & \omega & & & & \omega^{n-1} \\ \vdots & & \ddots & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 1 & \omega^{n-1} & \dots & \dots & \dots & \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix} \text{ et } \Omega = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \lambda_{n-1} \end{pmatrix}$$

Il s'ensuit qu'on a $P^n = U\Omega^n U^{-1}$

Or on a :

$$(\lambda_k)^m = \left(\cos \left(\frac{2k\pi}{n} \right) \right)^m$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

D'où

$$\Omega^n \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Par la formule d'interversion de la transformée de Fourier, on a :

$$p_k^m = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (\lambda_j)^m (\omega^k)^{-j} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}$$

D'où $P^m \rightarrow P(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$ La mesure de probabilité invariante recherchée est donc :

$$\pi = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right)$$

Références

- [Boe+91] BOENDE et al. “Shake-And-Bake Algorithms for Generating Uniform Points on the Boundary of Bounded Polyhedra”. In : *Operations Research* (1991).
- [Cha20] Djalil CHAFAI. *Uniformization by dilation and truncation*. 2020.
- [Clo11] Bertrand CLOEZ. *Processus Markovien déterministe par morceaux*. 2011.
- [CM16] Djalil CHAFAI et Florent MALRIEU. *Recueil de modèles aléatoires*. Springer, 2016.
- [Com+07] Francis COMETS et al. *Billiards in a general domain with random reflections*. 2007.
- [CR04] Georges CASELLA et Christian ROBERT. *Monte Carlo Statistical Methods*. Springer Texts in Statistic, 2004.
- [Dav84] M.H.A DAVIS. “Piecewise-Deterministic Markov Processes : A General Class of Non-Diffusion Stochastic Models”. In : *Journal of the Royal Statistical Society* (1984).
- [DGR02] Vincent DUMAS, Fabrice GUILLEMIN et Phillipe ROBERT. “A Markovian Analysis of Additive-Increase Multiplicative-Decrease Algorithms”. In : (2002).
- [Dur12] Richard DURETT. *Essential of Stochastic Process*. Springer Texts in Statistics, 2012.
- [Fé19] Ninon FÉTIQUE. *Explicit speed of convergence of the stochastic billiard in a convex set*. 2019.
- [KB37] Nicolas KRYLOV et Nicolas BOGOLYUBOV. “La théorie générale de la mesure dans son application à l’étude des systèmes dynamiques de la mécanique non linéaire”. In : *Mathematics Department, Princeton University* (1937).
- [Lin91] Torgny LINDVALL. *Lectures on the Coupling Method*. Dover, 1991.
- [Low10] George LOWTHER. *Feller Process*. 2010.
- [OKM04] OTT, KEMPERMAN et MATHIS. “The stationary behavior of ideal TCP congestion avoidance”. 2004.
- [OS06] OTT et SWANSON. *Asymptotic Behavior of a Generalized TCP Congestion Avoidance Algorithm*. 2006.
- [Tho00] Hermann THORISSON. *Coupling, Stationarity, and Regeneration*. Springer, 2000.
- [Tuc38] John Wider TUCKEY. *On the distribution of the fractional part of a statistical variable*. 1938.