1 Teori

Fluider består af utallige enkelte molekyler med hver deres position, hastighed, rotation, etc. En fluid kan beskrives ved at holde styr på alle partiklerne og deres interaktioner, men for systemer med mere end blot få partikler bliver dette hurtigt umuligt. Makroskopiske systemer kan i stedet beskrives som et kontinuum med densitet, temperatur og tryk, statistiske fænomener som opstår fra partiklernes fordeling, energi og kollisioner [Citation needed].

Bruges disse makroskopiske størrelser, kan fluider modelleres som en samling af felter der fylder rummet og udvikler sig i tid. Der er et felt for temperatur, for tryk, for densitet, specifik energi, hastighed, etc. Samlet kaldes felterne for strømningsfeltet (se stikordsregister med engelske ækvivalenter i bilag A). Nogle af disse felter, som f.eks tryk, densitet og temperatur, er skalarfelter. De associerer et enkelt tal med hvert punkt i rummet. Hastighed er et vektorfelt, som associerer en vektor, gassens hastighed, med hvert punkt i rummet. Disse felter kan udvikle sig i tid: vinden kan ændre retning, det kan blive varmere og koldere, trykket kan ændre sig, etc. Derfor skrives felterne som funktioner af de rumlige dimensioner og tid. Hastighed og temperatur er f.eks:

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$$
$$T = T(x, y, z, t)$$

Fluidmekanikkens opgave er at beskrive hvordan disse felter opfører sig, for at engienører og videnskabsfolk kan forudsige hvordan fluider interagerer med f.eks fly, både og raketter og hvordan de opfører sig inde i dampturbiner, raket- og jetmotorer.
Fluidmekanikkens fundamentale ligninger tager masse-, impuls- og energibevarelse og anvender dem på disse felter. De resulterende ligninger kan så anvendes på konkrete problemer.

1.1 Forskellige perspektiver

Fluidmekanikkens ligninger findes på forskellige former, som udledes på lidt forskellige måder. Den generelle fremgangsmåde er at forestille et kontrolvolumen i strømningsfeltet, og opstille en ligning der beskriver bevarelse af de forskellige størrelser i dette volumen. Volumenet kan være et fast område af rummet som ikke flytter sig, hvorigennem fluiden flyder. Det kan være også et volumen som flyder med strømmen, hvor overfladen følger hastighedsfeltet sådan at volumenet hele tiden indeholder den samme fluid. Ved brug af kontrolvoumener bliver konserveringsligningerne en sum af diverse overflade- og volumenintegraler. Denne form kaldes integral form. Ved at lade størrelsen af disse kontrolvolumener gå imod 0 kan ligningerne fås på differential form, skrevet som summe af diverse differentialkvotienter og divergenser. I dette projekt anvendes primært ligningerne for energi- og massebevarelse i et fast, endeligt kontrolvolumen.

1.2 Massebevarelse

Et fast kontrolvolumen V af vilkårlig form forestilles i et strømningsfelt. Volumenet er afgrænset af overfladen S, og indeholder massen m. Masse flyder konstant ind og ud af volumenet, trukket med af hastighedsfeltet. Det ønskes at opstille et udtryk for raten af masseændring inde i kontrolvolumet, $\frac{\partial m}{\partial t}$. Da masse er bevaret, må denne være lig netto-indstrømningen $\dot{m}$ af masse, skrevet generelt som:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \dot{m} \tag{1}$$

Der bruges en partiel afledt, da massen både er en funktion af tid og position. Massen inde i kontrolvolumenet kan også skrives som et volumenintegral af densiteten, over hele volumenet:

$$m = \iiint_V \rho \, dV$$

Så Ligning 1 kan omskrives

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \, dV = \dot{m} \tag{2}$$

Det ønskes at finde massestrømmen igennem overfladen af kontrolvolumenet. Forestilles en flad overflade, men den samme hastighed og densitet over hele overfladen, kan massestrømmen igennem denne skrives:

$$\dot{m} = -\rho A \vec{v} \cdot \hat{n}$$

[Figure needed]
$\hat{n}$ er overfladenormalen, som peger ud af overfladen, hastigheden prikkes med denne da hastighed på tværs af overfladen ikke bidrager til massestrømningen. Da normalen peger ud af overfladen, vil en hastighed ind i overfladen give et negativt resultat i prikproduktet. Derfor er der tilføjet et minus i ligningen. Ganges arealet med dette prikprodukt fås volumenstrømmen igennem overfladen, og med densiteten fås så massestrømmen.
Kontrolvolumenets overflade deles op i infinitessimale overfladeelementer, hver med areal dA, og normalvektor $\hat{n}$. Densiteten og hastigheden kan antages at være konstante over disse elementer, så hver infinitessimale massestrømning bliver:

$$d\dot{m} = -\rho \vec{v} \cdot \hat{n} dA \tag{3}$$

Overfladenormalen er en enhedsvektor, så et notationstrik der ofte bruges er at kombinere den med arealet, og få en slags arealvektor hvis længde er lig arealet af overfladeelementet, og retning er normalen:

$$d\vec{S} = \hat{n} dA$$

Denne indsættes i Ligning 3, og alle de små arealer integreres over kontrolvolumenets overflade:

$$\dot{m} = -\oiint_S \rho\vec{v} \cdot d\vec{S}$$

Cirklen i integraltegnet betyder at det er et lukket overfladeintegral. Overfladen må altså ikke have nogle "huller". Læg mærke til at $\cdot$ er prikproduktet mellem hastigheden og den infinitessimale "areal-normal-vektor".
Denne ligning kan nu indsættes i 2 for at få den endelige massebevarelsesligning:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho \, dV = -\oiint_S \rho\vec{v} \cdot d\vec{S} \tag{4}$$

Denne ligning gælder helt generelt for alting der bevæger sig igennem rummet, om det er gas, væske, fast eller en blanding.

1.3 Energi

Udledningen af energibevarelsesligningen følger samme fremgangsmåde som massebevarelsen, men da energi kan flytte sig på mange måder bliver den endelige ligning noget længere. Først opskrives den helt overordnede ligning:

$$\frac{dE}{dt} = Q + A + M \tag{5}$$

Dette er varmelærnes første lov, med et ekstra term. Ændringen af energi i et system, er lig varmen tilføjet til systemet Q, plus arbejdet udført på systemet A, plus den kinetiske og interne energi ført ind i systemet af massen der flyder igennem grænsen. I denne udledning ignoreres varmeledning og diffusion, så varmen tilført systemet opsummeres i en enkelt variabel $\dot{q}$ som repræsenterer effekten tilført pr. masse i hvert punkt igennem f.eks absorption af stråling (som i en mikrobølgeovn). Dette felt integreres over hele volumenet for at få den samlede varmeeffekt tilført:

$$Q = \iiint_V \dot{q}\rho dV \tag{6}$$

Arbejdet udført på systemet kommer fra to kræfter:

$$A = A_V + A_O \tag{7}$$

A_V repræsenterer arbejdet udført af volumenkræfter inde i kontrolvolumenet. Dette er kræfter som virker over lang afstand, f.eks tyngdekraft.
A_O repræsenterer arbejdet udført af overfladekræfter. Dette er kræfter som virker på overfladen af kontrolvolumenet, f.eks tryk og viskøse kræfter. I dette projekt undlades viskøse kræfter dog. Volumenkræfterne samles bare i en variabel $\vec{f}$, som er et vektorfelt der repræsenterer kraften pr. masseenhed til alle

punkter i volumenet. Effekt er kraft prikket med hastighed, så den samlede effekt fra volumenkræfter på kontrolvolumenet er:

$$A_V = \iiint_V \rho\vec{f}\cdot\vec{v}dV \tag{8}$$

Den infinitessimale kraft fra omgivelsernes tryk, på et af kontrolvolumenets overfladeelementer er

$$dF = -pd\vec{S}$$

Hvor $d\vec{S}$ igen er "areal-normal-vektoren".
Igennem dette areal flyder masse med hastighed $\vec{v}$. Igen er effekt lig kraft prikket med hastighed, så den samlede effekt fra omgivelserne på kontrolvolumenet er

$$A_O = -\oiint_S p\vec{v}\cdot d\vec{S} \tag{9}$$

Ligning 7, 8 og 9 kombineres for at få det endelige udtryk for A:

$$A = \iiint_V \rho\vec{f}\cdot\vec{v}dV - \oiint_S p\vec{v}\cdot d\vec{S} \tag{10}$$

Så kigges på det sidste led, M. Dette repræsenterer den interne og kinetiske energi som strømmen af masse tager med sig ind og ud af kontrolvolumenet. Det er givet ved:

$$M = -\oiint_S \left(e + \frac{v^2}{2}\right)\rho\vec{v}\cdot d\vec{S} \tag{11}$$

Ledene inde i parenteserne repræsenterer den samlede interne og kinetiske energi, pr. masseenhed. $-\rho\vec{v}\cdot d\vec{S}$ er massestrømningen igennem overfladeelementet, så til sammen giver det energistrømningen over overfladen.
Til sidst kan den samlede energi i systemet, ligesom med massen, skrives som et volumenintegral af intensive egenskaber, over hele systemet:

$$E = \iiint_V \rho\left(e + \frac{v^2}{2}\right)dV \tag{12}$$

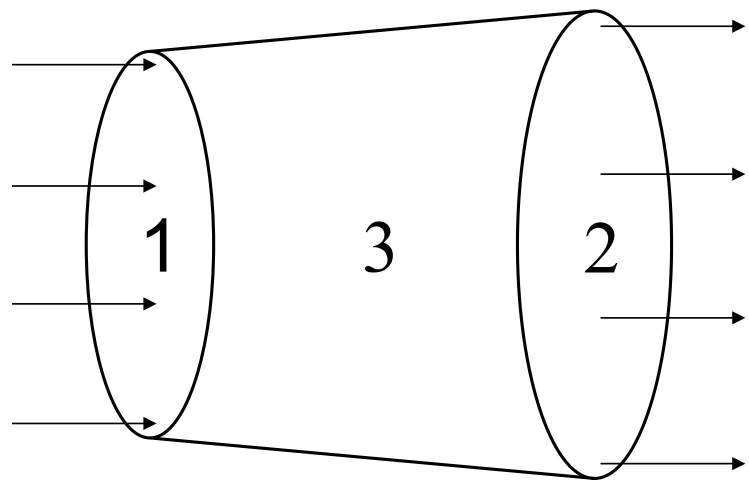
Endelig kan Ligning 12, 11, 10 og 5 kombineres, for at få den endelige ligning for energibevarelse:

$$\frac{d}{dt}\iiint_V \rho\left(e + \frac{v^2}{2}\right)dV = \iiint_V \dot{q}\rho dV +$$
$$\iiint_V \rho\vec{f}\cdot\vec{v}dV - \oiint_S p\vec{v}\cdot d\vec{S} - \oiint_S \left(e + \frac{v^2}{2}\right)\rho\vec{v}\cdot d\vec{S}$$

For at opsummere antager denne ligning at der ikke sker noget varmeledning eller diffusion, men ellers kan den benyttes i mange forskellige situationer.

2 Konstant Kvasi-1D strømning

Masse- og energibevarelsesligningerne udledt i forrige sektion er meget generelle, men for at få noget ud af dem skal de benyttes på specifikke problemer. I dette afsnit benyttes ligningerne på interne strømninger med varierende tværsnitsareal. Dette er f.eks relevant for rør, vindtuneller og raketdyser.



Figur 1: Et kontrolvolumen som repræsenterer kvasi-1D strømning.

På Figur 1 ses et kontrolvolumen bestående af 3 overflader. Fluiden løber ind i overflade 1, og ud af overflade 2. Overflade 3 er en væg, og fluiden kan ikke løbe igennem her. Det antages at alle strømningsvariablerne kun er en funktion af x (imod højre på figuren), men at tværsnitsarealet godt kan ændre sig, deraf kvasi-1D. I de to næste underafsnit udledes nogle mere brugbare former af bevarelsesligningerne ved at benytte dem på dette kontrolvolumen. Det antages at strømningen har fået tid til at stabilisere sig, sådan at strømningsfeltet ikke ændrer sig længere, og alle tidsafledte derved forsvinder. Dette kaldes konstant strømning.

2.1 Konstant Kvasi-1D Massebevarelse

Massebevarelsesligningen (4) er gentaget her for bekvemmelighedens skyld:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho \, dV = -\oiint_S \rho\vec{v}\cdot d\vec{S}$$

Denne bruges på kontrolvolumenet i Figur 1.
Overfladeintegralet på højre side kan brydes op i 3 integraler, 1 for hver over-

flade:

$$\oiint_S \rho\vec{v}\cdot d\vec{S} = \iint_1 \rho\vec{v}\cdot d\vec{S} + \iint_2 \rho\vec{v}\cdot d\vec{S}$$

Da der ikke kan løbe fluid igennem overflade 3 bliver prikproduktet mellem hastigheden og normalen 0. Det bidrager altså ikke, og er derfor udeladt.
Da strømningen er konstant sættes venstre side af massebevarelsesligningen til 0. Derved fås

$$\iint_1 \rho\vec{v}\cdot\hat{n}dA + \iint_2 \rho\vec{v}\cdot\hat{n}dA = 0$$

$d\vec{S}$'erne er blevet brudt ned igen. Da strømningsvariablerne kun er funktioner af x, og overflade 1 og 2 står lodret på denne og er helt flade, varierer hverken tryk, hastighed eller overfladenormal igennem integralet, og disse kan derfor flyttes ud foran.

$$\rho_1\vec{v}\cdot\hat{n}_1\iint_1 dA + \rho_2\vec{v}\cdot\hat{n}_2\iint_2 dA = 0$$

Integralerne bliver nu blot til arealerne af de respektive overflader. Overfladearealen og hastigheden peger begge langs x-aksen, så deres prikprodukt reduceres til produktet af vektorernes respektive x-komposanter. De to overfladenormaler peger dog i hver deres retning. For overflade 1 er normalens x-komposant -1, mens overflade 2's er 1. Den endelige ligning bliver derved:

$$\rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2 \tag{13}$$

Hastigheden er blevet skrevet som blot sin x-komposant u, og det ene led er flyttet til den anden side. Produktet at densitet, hastighed og tværsnitsareal er massestrømningen, så ligningen siger at massestrømningen ind og ud af kontrolvolumenet er den samme. Der bygges altså ikke masse op inde i det.

2.2 Konstant adiabatisk Kvasi-1D energibevarelse

Energibevarelsesligningen (13) gentages her for bekvemmelighedens skyld:

$$\frac{d}{dt}\iiint_V \rho\left(e+\frac{v^2}{2}\right)dV = \iiint_V \dot{q}\rho dV +$$
$$\iiint_V \rho\vec{f}\cdot\vec{v}dV - \oiint_S p\vec{v}\cdot d\vec{S} - \oiint_S \left(e+\frac{v^2}{2}\right)\rho\vec{v}\cdot d\vec{S}$$

Denne benyttes på kontrolvolumenet i Figur 1.
Igen er strømningen konstant, så alle tidsafledte fjernes. Det antages desuden at strømningen er adiabatisk, der tilføjes altså ikke varme, og der er ingen volumenkræfter som f.eks tyngdekraft. Derved bliver $\dot{q} = 0$ og $\vec{f} = 0$, og integralerne der indeholder disse kan også fjernes. Tilbage er

$$\oiint_S \left(e+\frac{v^2}{2}\right)\rho\vec{v}\cdot d\vec{S} = -\oiint_S p\vec{v}\cdot d\vec{S}$$

Leddet på venstre side kan brydes op i den energi som flyder ind, og den som flyder ud. Det er altså hvor meget energi der tilføres til fluiden imens det er i kontrolvolumenet. Højre side er trykkets samlede arbejde på volumenet. Ligningen siger altså at en fluids energi kun kan ændre sig pga. trykkets arbejde på den.
Ligesom med massebevarelse deles hver af integralerne op i 3, 1 for hver overflade. Integralerne for overflade 3 kan ligeledes fjernes:

$$\iint_1 \left(e + \frac{v^2}{2}\right)\rho\vec{v}\cdot d\vec{S} + \iint_2 \left(e + \frac{v^2}{2}\right)\rho\vec{v}\cdot d\vec{S} = -\iint_1 p\vec{v}\cdot d\vec{S} - \iint_2 p\vec{v}\cdot d\vec{S}$$

Variablerne er konstant på tværs af alle overfladerne, så de trækkes udenfor, og integralerne erstattes med arealer:

$$\left(e_1 + \frac{v_1^2}{2}\right)\rho_1 A_1 \vec{v}_1 \cdot \hat{n}_1 + \left(e_2 + \frac{v_2^2}{2}\right)\rho_2 A_2 \vec{v}_2 \cdot \hat{n}_2 = -p_1 A_1 \vec{v}_1 \cdot \hat{n}_1 - p_2 A_2 \vec{v}_2 \cdot \hat{n}_2$$

Ligesom før simplificeres prikprodukterne:

$$-\left(e_1 + \frac{u_1^2}{2}\right)\rho_1 A_1 u_1 + \left(e_2 + \frac{u_2^2}{2}\right)\rho_2 A_2 u_2 = p_1 A_1 u_1 - p_2 A_2 u_2$$

Til sidst grupperes de led der har med den samme overflade at gøre på hver sin side:

$$\left(e_1 + \frac{u_1^2}{2}\right)\rho_1 A_1 u_1 + p_1 A_1 u_1 = \left(e_2 + \frac{u_2^2}{2}\right)\rho_2 A_2 u_2 + p_2 A_2 u_2 \tag{14}$$

Dette er den generelle energibevarelsesligning for konstant, adiabatisk strømning.

3 Bernoullis princip

Nu hvor energi- og massebevarelsesligningerne er udledt, kan en model for ukomprimerbart flow igennem et rør opstilles. I denne udledning antages at fluidens densitet forbliver konstant i både tid og rum:

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho$$

Dette er en meget god tilnærmelse for væsker, og som det skal ses passer det også nogenlunde for gasser ved lavere hastigheder. Sættes dette ind i massebevarelsesligningen fås:

$$\rho u_1 A_1 = \rho u_2 A_2 \Rightarrow$$
$$u_1 A_1 = u_2 A_2$$

Farten gange tværsnitsarealet er volumenstrømningen, denne er altså konstant igennem et ukomprimerbart flow. Dette resultat kan bruges på energibevarelsesligningen, da der er et $A \cdot u$ term i hvert led som kan fjernes. Desuden kan kan densiteterne også sættes lig hinanden:

$$\left(e_1 + \frac{u_1^2}{2}\right)\rho + p_1 = \left(e_2 + \frac{u_2^2}{2}\right)\rho + p_2 \Rightarrow \tag{15}$$

$$e_1 + \frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = e_2 + \frac{u_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} \tag{16}$$

For at simplificere yderligere tages et lille sidespor til termodynamikken.

Den første lov siger at ændringen i intern energi af et system er arbejdet udført på systemet, plus varmen tilført:

$$\Delta e = w + q$$

Da processen er adiabatisk tilføres ikke varme, altså $q = 0$. Da fluidens densitet er konstant kan dens volumen ikke ændre sig, og der kan ikke udføres arbejde på den. Forestilles at systemet er en kube i det frie rum (som på en eller anden måde hænger sammen når der røres ved den), kan systemet godt gives en samlet kinetisk energi ved at skubbe på det, men selve partiklerne inde i har ikke ændret energi i forhold til hinanden. Den interne energi er derfor uændret:

$$\Delta e = 0$$

Det leder til at de to energi i ligningen er ens (og som konsekvens at temperaturen også er konstant), og kan trækkes fra på hver side. Tilbage er Bernoullis ligning:

$$\frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{u_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} \tag{17}$$

4 Relationerne for komprimerbart flow

Nu kigges i stedet på en gas, hvor densiteten godt kan ændre sig. Derfor må vi gå tilbage til Ligning 14, gentaget her for bekvemmelighed:

$$\left(e_1 + \frac{u_1^2}{2}\right)\rho_1 A_1 u_1 + p_1 A_1 u_1 = \left(e_2 + \frac{u_2^2}{2}\right)\rho_2 A_2 u_2 + p_2 A_2 u_2$$

$A \cdot u$ termerne kan ikke længere kombineres, men to af ledene indeholder også ρ, så vis det er muligt at få et ρ ind i de to andre kan ligningen måske simplificeres. Heldigvis er fluiden nu en gas, så den den ideelle gaslov holder

A Stikordsregister

Dansk	Engelsk	Forklaring
strømning, -strøm	flow	Fluid i bevægelse
fluid	fluid	Eksempelvis væske, gas og plasma. Stof der tager form efter sin beholder, og evt. fylder den ud.
massestrøm	mass flow rate	en masseflux igennem et areal pr. tid
volumenstrøm	volumetric flow rate	en volumenflux igennem et areal pr. tid

Tabel 1: Caption