第三章　导数与微分

§3.1 导数的概念

要求：理解导数概念，知道导数的几何意义

一、导数概念的引入

1. 几何方面

已知曲线 $y=f(x)$，求曲线在点 (x_0,y_0) 处的切线斜率 k.

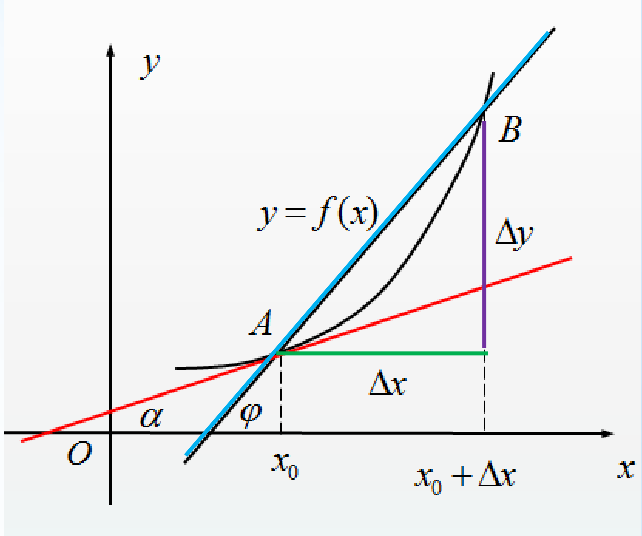


图 3.2

什么线叫切线？

割线 AB 的极限位置就是切线.

割线 AB 的斜率

$$k_{AB}=\tan\varphi=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

当Δx逐渐减小时，直线AB将以A为支点，逐渐向下转动；以至于当$\Delta x\to 0$时，即可得到切线l.

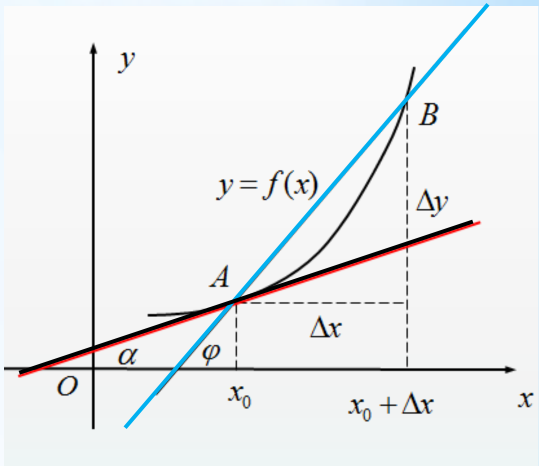


图 3.2

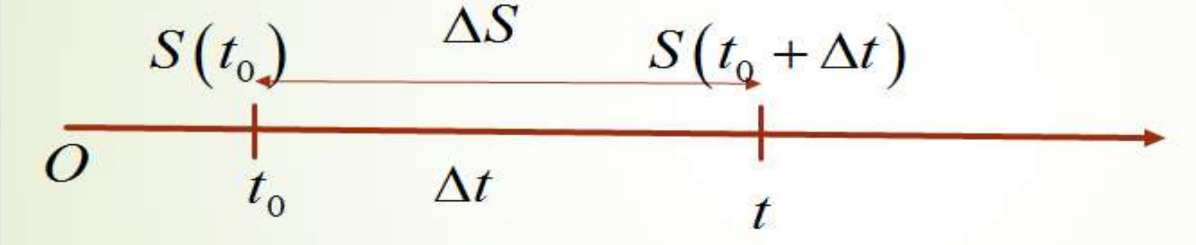
切线 l 的斜率

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}$$

2. 物理方面

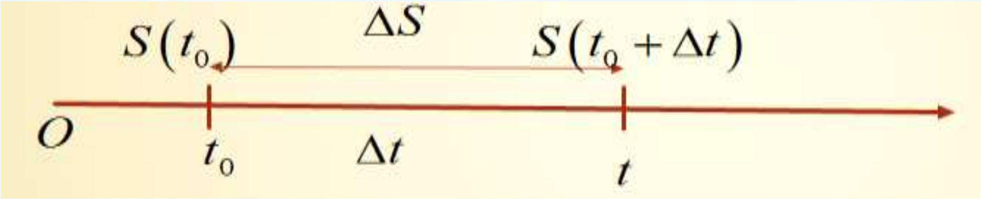
变速直线运动物体的速度问题

求变速直线运动物体 $S=S\left(t\right)$在时刻 t_0 处的速度$v\left(t_0\right)$.



分析： (1)在Δt这段时间内，平均速度

$$\bar{v}(t_0)=\frac{S(t_0+\Delta t)-S(t_0)}{\Delta t}=\frac{\Delta S}{\Delta t}$$



(2)当$\Delta t\to 0$时，平均速度趋于t_0时刻的瞬时速度

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t_0+\Delta t)-S(t_0)}{\Delta t}$$

以上两个问题，虽有不同实用背景，但都属于$\frac{\Delta y}{\Delta x}$(平均变化率)的极限形式$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$，因此，研究$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=?$就成为迫切需要解决的问题.

二、导数定义

定义3.1 (P38) 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，当自变量 x 在 x_0 处有增量 Δx 时，相应地函数 y 有增量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0),$$

若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在，则称此极限为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数值，记为 $f'(x_0)$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$，也可以记为 $y'(x_0)$ 或 $y'\big|_{x=x_0}$ 或 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$ 等.

函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数为

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

令 $\Delta x=x-x_0$，则 $x_0+\Delta x=x$

相应地，函数 $y=f(x)$ 在 x 处的导数为

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

计算函数 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 步骤：

(1)求增量 Δy，(2)算比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$，(3)取极限 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

例3.1 用定义计算下列函数的导数：(P39)

$(1)\ f(x)=C$（常量）

解 $\because \Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)=C-C=0,\ \dfrac{\Delta y}{\Delta x}=0,$

故， $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=0$ **即** $(C)'=0$

$(2)\ f(x)=x^n\left(n\in N^+\right)$

提示：$a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$

解 $\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n$

$$=\left[(x+\Delta x)-x\right]\left[(x+\Delta x)^{n-1}+(x+\Delta x)^{n-2}x+(x+\Delta x)^{n-3}x^2+\cdots+x^{n-1}\right]$$

$$=\Delta x\left[(x+\Delta x)^{n-1}+(x+\Delta x)^{n-2}x+(x+\Delta x)^{n-3}x^2+\cdots+x^{n-1}\right]$$

则$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x\left[(x+\Delta x)^{n-1}+(x+\Delta x)^{n-2}x+(x+\Delta x)^{n-3}x^{2}+\cdots+x^{n-1}\right]}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[(x+\Delta x)^{n-1}+(x+\Delta x)^{n-2}x+(x+\Delta x)^{n-3}x^{2}+\cdots+x^{n-1}\right]$$

$$=nx^{n-1}$$

故，$\left(x^{n}\right)'=nx^{n-1}$

可以证明，对于任意实数α，都有 $\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha x^{\alpha-1}$

例如： $\left(x^{3}\right)'=3x^{2}$， $\left(\sqrt{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$，

$\left(x^{\sqrt{2}}\right)'=\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$ $\quad\left(x^{-0.9}\right)'=-0.9x^{-1.9}$

$(3)\ \boldsymbol{f(x)=\sin x}$ 提示: $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

解 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\sin(x+\Delta x)-\sin x$

$$=2\sin\frac{(x+\Delta x)-x}{2}\cos\frac{(x+\Delta x)+x}{2}=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

则, $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x$$

故 $\boldsymbol{(\sin x)'=\cos x}$ **同理** $\boldsymbol{(\cos x)'=-\sin x}$

$(4)\ f(x)=\ln x$

解 $\Delta y=\ln(x+\Delta x)-\ln x=\ln\left(\dfrac{x+\Delta x}{x}\right)=\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)$

所以，$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\ln\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]^{\frac{1}{x}}=\ln e^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}$$

提示：

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

公式特点：

属于$(1+0)^{\infty}$，括号内变量与指数互为倒数.

故，$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

同理可证 $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$ （其中$a>0$且$a\neq 1$）

三、六类基本初等函数的导数公式（P40）

$(1)\ (c)'=0$　　$(2)\ (x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$　　$(3)\ (a^{x})'=a^{x}\ln a$，特例 $(e^{x})'=e^{x}$

$(4)\ (\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$，　特例 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

$(5)\ (\sin x)'=\cos x$，　　$(\cos x)'=-\sin x$

$(\tan x)'=\sec^2 x$，　　$(\cot x)'=-\csc^2 x$

$(\sec x)'=\sec x\tan x$，　　$(\csc x)'=-\csc x\cot x$

$(6)\ (\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, -1<x<1$　　$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, -1<x<1$　　$(\mathrm{arc}\cot x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

这十六个公式一定要背熟，整个高数的学习都用得着.

补充例题　用求导公式计算下列导数：

$(1)\ y=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$　　$(2)\ y=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2}$　　$(3)\ y=3^x e^x$

这几题的一个共同特点：先化简，后求导

解　$(1)\ y=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}=\left\{x\left[x(x)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{7}{8}}\quad y'=\dfrac{7}{8}x^{-\frac{1}{8}}$

$(2)\ y=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2}=x^{-\frac{5}{3}}\quad y'=-\dfrac{5}{3}x^{-\frac{8}{3}}$

$(3)\ y=3^x e^x=(3e)^x\quad y'=(3e)^x\ln(3e)$

三、六类基本初等函数的导数公式 教材P40

$(1)\ (c)' = 0 \quad (2)\ \left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (3)\ \left(a^{x}\right)' = a^{x}\ln a$，特例 $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$

$(4)\ (\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$，特例 $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

这十六个公式一定要背熟，整个高数的学习和后续一些课程都用得着.

$(5)\ (\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \sec^2 x, \quad (\cot x)' = -\csc^2 x$

$(\sec x)' = \sec x\tan x, \quad (\csc x)' = -\csc x\cot x$

$(6)\ (\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1 \quad (\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1 \quad (\operatorname{arc}\cot x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

四、导数的几何意义与物理意义

1. 导数的几何意义

若曲线 $y=f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 处可导，则曲线在点 x_0 处的切线斜率 $k=f'(x_0)$，且

要点：曲线 $y=f(x)$ 在任意点 (x, y) 处的切线斜率 $k=f'(x)$

切线方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$

法线方程为 $y-y_0=-\frac{1}{k}(x-x_0)$，其中 $k\neq 0$

2. 物理意义

若物体的运动方程 $s=s(t)$ 可导，则物体的运动速度为 $v(t)=s'(t)$，物体运动的加速度为 $a=v'(t)=s''(t)$.

要点：物体运动规律为 $s=s(t)$，则 $v(t)=s'(t)$，$a=v'(t)=s''(t)$

例3.3 (P41) 求双曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 在点 $\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$ 处的切线斜率，并写出曲线在该点处的切线方程及法线方程.

解 由 $k=y'=\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$ 得 曲线在点 $\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$ 处的切线斜率为

$$k_1=\left(-\frac{1}{x^2}\right)\bigg|_{x=2}=-\frac{1}{4},$$ 法线斜率 $k_2=4$

故，所求的切线方程为 $y-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{4}(x-2)$ 即 $x+4y-4=0$

法线方程为 $y-\dfrac{1}{2}=4(x-2)$ 即 $8x-2y-15=0$

例3.2 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2-x & x\ge 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$，求$f'(0)$ **见教材P40，这个例题难.**

解：根据导数定义 $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$

而 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}=-1$ （此结果称为函数在0处的左导数值，记为$f_-'(0)$）

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2-x}{x}=-1$ （此结果称为函数在0处的右导数值，记为$f_+'(0)$）

由 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=-1$ 得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=-1$， 故，$f'(0)=-1$

显然，函数在x_0处可导的充分必要条件是左导数与右导数都存在且相等.

函数在x_0处的左导数$f_-'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$， 右导数$f_+'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

五、可导与连续的关系

可导必连续，连续未必可导，不连续必不可导.

若函数 $y=f(x)$ 在 x 处可导，即 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在，根据极限与无穷小量的关系，有

极限与无穷小量的关系：

$\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$，其中 $\alpha\to 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha\cdots(1),\ 即\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\cdot\Delta x\cdots(2)$$

$(\alpha$为当$\Delta x\to 0$时的无穷小量$)$

上行第(2)式两边取当$\Delta x\to 0$时的极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f'(x)\Delta x+\alpha\cdot\Delta x\right]=0$$

函数连续的两个重要概念：

$(1)\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow y=f(x)$在$x_0$处连续

$(2)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0\Leftrightarrow y=f(x)$在$x$处连续

故，函数在 x 处连续.

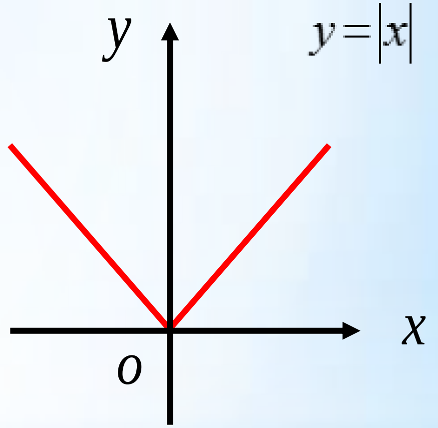
从而也就说明了可导函数必是连续函数.

但连续函数未必是可导函数.

例3.4 (P41) 讨论函数 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

解 因 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}|x|$ 分别讨论： $\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)=0$ $\lim\limits_{x\to 0^+}(x)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}|x|=0=f(0)$, 故 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处连续;



又 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}=-1$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=1$

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在可知, $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在,

即 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导.

可导必连续，连续不一定可导.

小结：

1 导数定义 (1) $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

(2) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

2 导数的意义

(1)物理意义：若运动方程为$s=s(t)$，则$v(t)=s'(t),a=s''(t)$

(2)几何意义：已知曲线$y=f(x)$，则曲线在任意点(x,y)处的切线斜率

$$k=f'(x)$$

3 六类基本初等函数的导数公式要牢记

4 可导与连续的关系　　可导必连续，连续不一定可导.

例如：$y=|x|$，在$x=0$处连续，但导数不存在.

作业　教材P41～42

写在作业本上　　2、4

说明：P41　2. 用公式求下列函数的导数

$$(1)\, y=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} \qquad (2)\, y=\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2} \qquad (3)\, y=3^x e^x$$

不能用后面的求导法则来计算.