§3.5 函数的微分

要求：了解微分定义，熟练掌握求微分运算

一、微分概念

增量　自变量的增量$\Delta x = x - x_0$

函数值的增量$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

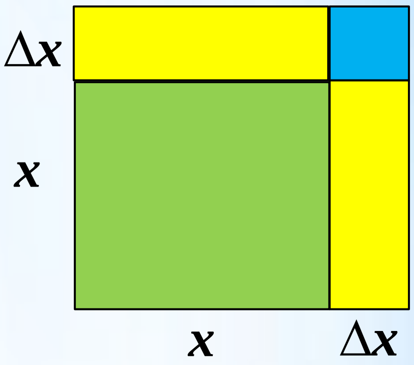
微分主要研究**函数增量**与**自变量增量**之间的关系

换一句话说，对于一个函数$y = f(x)$, 当x有一个增量Δx时，即自变量从x变到$x + \Delta x$时，函数y的增量Δy有什么变化？

我们来看一个例子

一个边长为x的正方形，面积$S=x^2$，当边长增加Δx时，面积增加了多少？即$\Delta S=$？

$$\Delta S=(x+\Delta x)^2-x^2=\boxed{2x\Delta x}+(\Delta x)^2\cdots\cdots(1)$$



ΔS为两个长方形和一个小正方形

公式(1)对于任何的$x(\geq 0)$和$\Delta x(\geq 0)$都成立.

但是当Δx相对较小时，我们发现一个特征：

例如，令$x=10$，$\Delta x=0.01$，则

$$\Delta S=(10+0.01)^2-10^2=2\times10\times0.01+(0.01)^2$$
$$=0.2+0.0001$$

容易看出$2\times10\times0.01$是ΔS的主要部分，而0.0001可忽略不计

对应公式(1) $\Delta S=2x\Delta x+(\Delta x)^2$，可知$2x\Delta x$是$\Delta S$的主要部分

这个主要部分就称函数的微分

微分定义（P52）

设函数 $y=f(x)$ 可导，自变量在点 x 处有增量 Δx，则称 $f'(x)\Delta x$ 为函数在点 x 处的**微分**或函数在点 x 处**可微**，记为 dy，即 $dy=f'(x)\Delta x$.

习惯上把函数的微分 $dy=f'(x)\Delta x$ 记为 $dy=f'(x)dx$.

二、微分的计算

由微分公式 $dy=f'(x)dx$ 可知，函数可导与可微等价.

导数公式与微分公式可以互相转化即由导数公式

$$\frac{dy}{dx}=f'(x) \text{ 得到微分公式 } dy=f'(x)dx$$

导数又叫“微商”，是 dy 与 dx 两个微分之商.

基本公式： $\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x$

$$d(x^{\alpha}) = \alpha x^{\alpha-1}dx \qquad d(a^{x}) = a^{x}\ln a dx (a>0, a\neq 1)$$

$$d(e^{x}) = e^{x}dx \quad d(\log_a x) = \frac{1}{x\ln a}dx (a>0, a\neq 1) \quad d(\ln x) = \frac{1}{x}dx$$

$$d(\sin x) = \cos x dx \qquad d(\cos x) = -\sin x dx \qquad d(\tan x) = \sec^2 x dx$$

……**不一一写出，自己看书，也是要求熟记。**

运算法则：

$$(1) d(u\pm v) = du \pm dv \qquad (2) d(uv) = du\cdot v \pm u\cdot dv$$

$$(3) d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du\cdot v - u\cdot dv}{v^2} \qquad (v\neq 0)$$

例3.21　计算下列函数的微分：（P52）

$(1)\ y=x^4e^{3x}$　　　　复习微分公式：$dy=f'(x)dx$

解　$dy=\left(x^4e^{3x}\right)'dx=\left(4x^3e^{3x}+x^4e^{3x}\cdot 3\right)dx=x^3e^{3x}\left(4+3x\right)dx$

$(2)\ y=\left[x\left(1+\sin 3x\right)\right]^2$

解　对于这样的复合函数求微分，最好先计算导数$f'(x)$

$$y'=2\left[x\left(1+\sin 3x\right)\right]^{2-1}\cdot\left[x\left(1+\sin 3x\right)\right]'$$

$$=2\left[x\left(1+\sin 3x\right)\right]\cdot\left[x'\left(1+\sin 3x\right)+x\left(1+\sin 3x\right)'\right]$$

$$=2\left[x\left(1+\sin 3x\right)\right]\cdot\left[\left(1+\sin 3x\right)+x\left(\cos 3x\right)\cdot 3\right]$$

$$=2\left[x\left(1+\sin 3x\right)\right]\cdot\left[1+\sin 3x+3x\cos 3x\right]$$

所以，$dy=2\left[x\left(1+\sin 3x\right)\right]\cdot\left[1+\sin 3x+3x\cos 3x\right]dx$

练习：计算下列函数的微分

$(1)\ y=\sin(2x+1)$　　$(2)\ y=e^{\cos 2x}$　　$(3)\ y=x^5\ln 3x$

$(4)\ y=\left[x(1-\sin 3x)\right]^3$　　$(5)\ y=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

解 $(1)\ dy=[\sin(2x+1)]'dx=2\cos(2x+1)dx$

解 $(3)\ dy=(x^5\ln 3x)'dx=(5x^4\ln 3x+x^5\dfrac{1}{3x}3)dx$

$=(5x^4\ln 3x+x^4)dx$

解 $(5)\ dy=\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)'dx=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-x\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}dx=\dfrac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$

例3. 22 已知函数$y=f(x)$由方程$e^{xy}+\tan(xy)=y$确定，求$\mathrm{d}y\big|_{x=0}$.

$(P52)$ 前面已讲过求导数，这里求微分自己看.

解（由隐函数求导法，先求出导数）两边对x求导，得

$$e^{xy}(y+xy')+\sec^2(xy)(x+xy')=y'\cdots\cdots(1)$$

将$x=0$代入方程$e^{xy}+\tan xy=y$，求得$y=1$

再将$x=0, y=1$代入(1)中，解出$y'=2$.

即$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}=2$，　　所以$dy\big|_{\substack{x=0\\y=1}}=2dx$

注意：本题仅要求计算当$x=0$时的微分值，并没有要求计算函数的微分，所以不用写出$dy=?$

课堂练习

一　求下列函数的微分

$(1)\ y=e^{\sin 2x}$

$(2)\ y=\ln\left(1+x^2\right)$

$(3)\ y=\dfrac{1}{x}+2\sqrt{x}$

$(1)\ dy=2\cos 2xe^{\sin 2x}dx$

$(2)\ dy=\dfrac{2x}{1+x^2}dx$

$(3)\ dy=\left(-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

二　将适当的函数填入括号内，使等式成立：

$(1)\ d(2x)=2dx$　$(2)\ d(\sin x)=\cos x dx$　$(3)\ d(2\sqrt{x})=\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$

$(4)\ d(\ln(1+x))=\dfrac{1}{1+x}dx$　$(5)\ d\left(\dfrac{1}{3}\tan 3x\right)=\sec^2 3x dx$

作业

写在作业本上　教材P53

2　$(1),(2),(3),(10)$

3　$(1),(3),(4),(10)$

4　**写在书上**