§3.4 隐函数求导法　相关变化率

要求：必须学会隐函数求导

一、隐函数求导法

前面学过显函数：$y=f(x)$，例如 $y=x^2+1$

现在介绍一种新的函数表达形式

隐函数：以方程 $F(x,y)=0$ 的形式出现的函数 $y=f(x)$ 称为隐函数.

如由方程 $e^{xy}+\sin(x+y)=0$ 确定的函数 $y=f(x)$ 即为隐函数.

有些隐函数与显函数可以相互转换，如

隐函数 $y-3xy+e^{x}=0 \Leftrightarrow$ 显函数 $y=\dfrac{e^{x}}{3x-1}$,

但有些隐函数不能表示成显函数

例如：$e^{2y}-\sin(2x+y)=5 \Leftrightarrow$ 显函数 $y=?$

必须引入新的求导方法来解决这类函数的求导问题

隐函数求导没有引入新的法则，就是利用复合函数求导法则运算.

$F(x,y)=F(x,y(x))=0$, y 是 x 的函数，对 y 求导时必须做个记号，记为 y'

例如：$y+1-x=0$, 看作 $y(x)+1-x=0$,

两边对 x 求导，$y'(x)+0-1=0$ 解得 $y'(x)=1$

如果解成显函数 $y=x-1$, $y'=1$是显而易见的.

隐函数求导举例

补充例题 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $e^{2y}-\sin 2x=5$ 确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解一（用显函数方法求解）

因为 $e^{2y}-\sin 2x=5 \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{2}\ln(5+\sin 2x)$

故，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y'=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{5+\sin 2x}\cdot(5+\sin 2x)'=\dfrac{\cos 2x}{5+\sin 2x}$.

解二（用隐函数方法求解）

方程两边同时对 x 求导：

$$\left(e^{2y}-\sin 2x\right)'=5' \quad \text{即} \left(e^{2y}\right)'-(\sin 2x)'=0$$

$$e^{2y}\cdot(2y)'-2\cos 2x=0 \quad \text{即} \; y'e^{2y}-\cos 2x=0$$

求出 $y'=\dfrac{\cos 2x}{e^{2y}}=\dfrac{\cos 2x}{5+\sin 2x}$.

必须注意：对 y 求导要记 y'，因为没有 y 的表达式，无法计算其导数，故做个记号 y'.

例3. 16　设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y=\sin(x-y)$ 确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　方程两边同时对x求导，得:$y'=\cos(x-y)\cdot(x-y)'$

即　$y'=\cos(x-y)\cdot(1-y')$　求出 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y'=\dfrac{\cos(x-y)}{1+\cos(x-y)}$

练习：求由方程 $e^y+xy-e=0$ 所确定的隐函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$.

解　方程两边对 x 求导，得: $e^y y'+(y+xy')=0$

求出 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y'=-\dfrac{y}{x+e^y}$　$(x+e^y\neq 0)$

补充例题 已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{xy}+\tan xy=y$ 确定，求 $y'\big|_{x=0}$.

解 方程两边对 x 求导，得：$e^{xy}\cdot(xy)'+\sec^2(xy)\cdot(xy)'=y'$

$$\left[e^{xy}+\sec^2(xy)\right](x'y+xy')=y'\cdots\cdots(1)$$

解得 $y'=\dfrac{y(e^{xy}+\sec^2 xy)}{1-x(e^{xy}+\sec^2 xy)}$

由于 y 是隐函数，y' 可以由 x,y 联合表示

$$y'\big|_{x=0}=\frac{y(e^{xy}+\sec^2 xy)}{1-x(e^{xy}+\sec^2 xy)}\bigg|_{x=0}=\frac{2y}{1-0}\bigg|_{x=0}=2y$$

正确做法是将 $x=0$ 代入方程，求出 $y=1$，$x=0$，$y=1$ 都代入算出导数.

解 方程两边对 x 求导，得：$\left[e^{xy}+\sec^2(xy)\right](y+xy')=y'\cdots\cdots(1)$

不必象上面的解法，求出 y'，再计算 $y'\big|_{x=0}$

将 $x=0$ 代入 $e^{xy}+\tan(xy)=y$ 得 $y=1$，将 $x=0,y=1$ 代入 (1)，

$$\left[e^0+\sec^2(0)\right](1+0y')=y'\cdots\cdots(2)$$

求出 $y'\Big|_{\substack{x=0\\y=1}}=2.$

例3. 17 求椭圆$9x^2+4y^2=34$在点$\left(1,\ \frac{5}{2}\right)$处的切线和法线方程.

解　方程两边同时对x求导，$\left(9x^2\right)'+\left(4y^2\right)'=0$

求出$18x+8y\cdot y'=0$，即 $y'=-\frac{9x}{4y}$

则在点$\left(1,\ \frac{5}{2}\right)$处的

切线斜率$k_1=\left(-\frac{9x}{4y}\right)\Big|_{\substack{x=1\\ y=\frac{5}{2}}}=-\frac{9}{10}$，　法线斜率$k_2=\frac{10}{9}$.

所求的切线方程为：$y-\frac{5}{2}=-\frac{9}{10}(x-1)$ 即 $9x+10y-34=0$

法线方程为：$y-\frac{5}{2}=\frac{10}{9}(x-1)$ 即 $20x-18y+25=0$

隐函数求导要理解并记住：

$$\left(y^{n}\right)' = ny^{n-1}y'$$

$$\left(x+y\right)' = 1+y'$$

$$\left(xy\right)' = y+xy'$$

课堂练习

求下列隐函数的导数

$$(1)\ e^{x+y} + xy - e = 0$$

$$(2)\ y + e^{xy} - \sin x - 1 = 0$$

$$(3)\ \frac{x^{2}}{9} + \frac{y^{2}}{16} = 1$$

(3)可以用隐函数求导法，也可以解出显函数来计算导数，请大家都试试.

例3. 18 已知$y=x^{\sin x}\ (x>0)$,求y'.

幂指型函数$y=[u(x)]^{v(x)}$的求导有两种方式：

(1)化为指数函数 $y=[u(x)]^{v(x)}\Rightarrow y=e^{v(x)\ln u(x)}$

(2)化为隐函数

$y=[u(x)]^{v(x)}\Rightarrow \ln y=\ln u^{v}$即$\ln y=v\ln u$

解1 $y'=\left(e^{\ln x^{\sin x}}\right)'=\left(e^{\sin x\cdot\ln x}\right)'$

$$=e^{\sin x\cdot\ln x}\cdot(\sin x\cdot\ln x)'$$

$$=x^{\sin x}\cdot\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$$

解2 $y=x^{\sin x}$两边同时取自然对数，得$\ln y=\ln x^{\sin x}$即$\ln y=\sin x\cdot\ln x$

对x求导，得 $\frac{1}{y}y'=\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}$

求出，$y'=y\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)=x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$

二、参数式函数求导法 （P49）

设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ (t是参数)确定，而且 $x(t)$ 及 $y(t)$ 均可导，则 $f'(x)=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{y'(t)}{x'(t)}}$$

例如 椭圆参数方程为 $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$, 隐函数方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

导数 $$\frac{dy}{dx}=\frac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'}=\frac{b\cos t}{-a\sin t}=-\frac{b}{a}\cot t$$

例3.19 求由方程$\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln\left(1+t^2\right) \end{cases}$所确定的函数$y = f(x)$的导数$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.（P50）

解 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\left[\ln\left(1+t^2\right)\right]'}{(\arctan t)'} = \frac{\dfrac{1}{1+t^2}\cdot 2t}{\dfrac{1}{1+t^2}} = 2t$$

对于参数式函数的二阶导数我们不要求会计算.

课堂练习

求下列参数式函数的导数

$$(1)\ \begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$$

$$(2)\ \begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases}$$

作业　教材P50

写在作业本上　1　(1)，(2)　4　(1)

选做：3(1)　6