复习直角坐标系中计算三重积分

计算 $\iiint\limits_{G}(x+y)dxdydz$，其中$G$是由$x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+2z=1$

围成的立体.

$$\iiint\limits_{G}(x+y)dxdydz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{\frac{1}{2}(1-x-y)}(x+y)dz$$

§10.6 三重积分及其计算(二)

一、利用柱面坐标系计算三重积分

柱面坐标系实际上是平面极坐标加上z轴构成

空间直角坐标与柱坐标的关系：

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

体积元素：$dv = rdrd\theta dz$

在极坐标系中 $dxdy = rdrd\theta$

$$dv = dxdydz = rdrd\theta dz$$

则 $$\iiint\limits_G f(x,y,z)dv = \iiint\limits_G f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)rdrd\theta dz$$

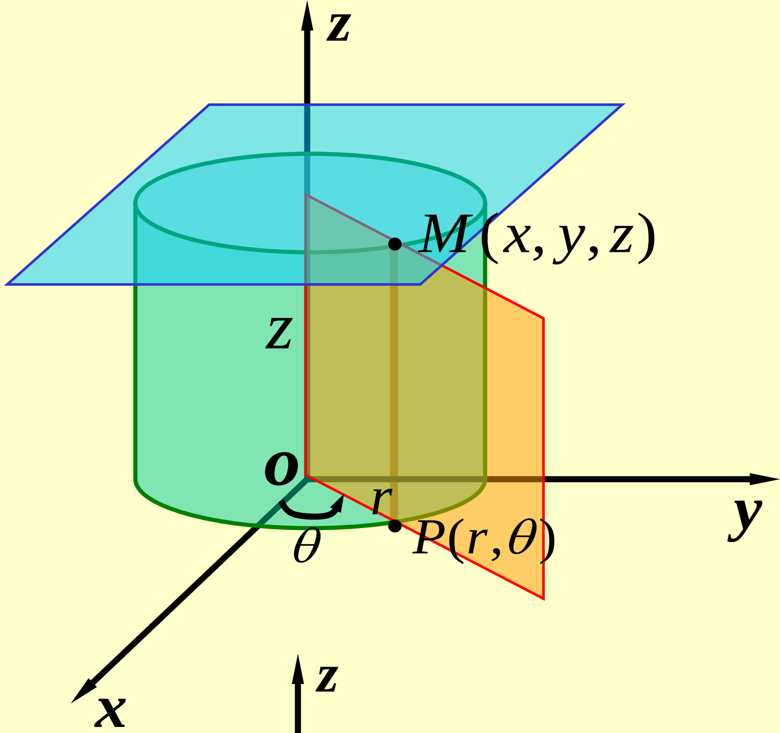
柱坐标系中寻找r, θ的取值范围也与极坐标中方法相同.

以上变换方法在三重积分中称为柱面坐标变换.

r为常数 $\Longrightarrow$ 圆柱面

θ 为常数 $\Longrightarrow$ 半平面

z 为常数 $\Longrightarrow$ 平　面

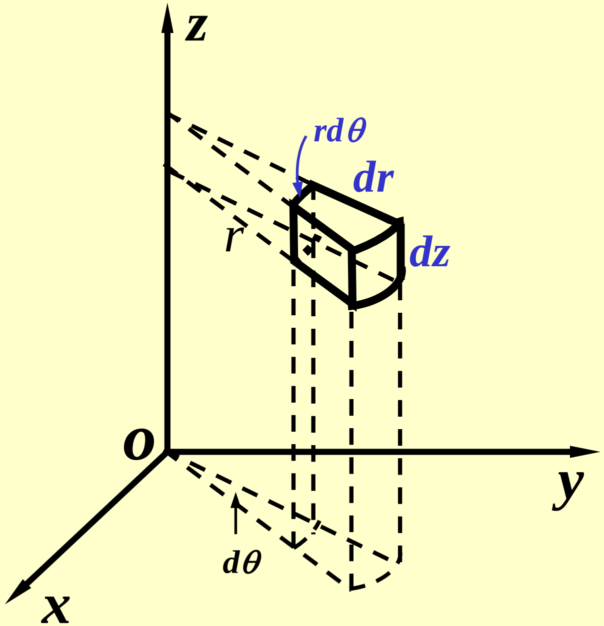


如图，柱面坐标系中的体积元

$$dv = r dr d\theta dz,$$

$$\therefore \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$$

$$= \iiint_{\Omega} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r dr d\theta dz.$$



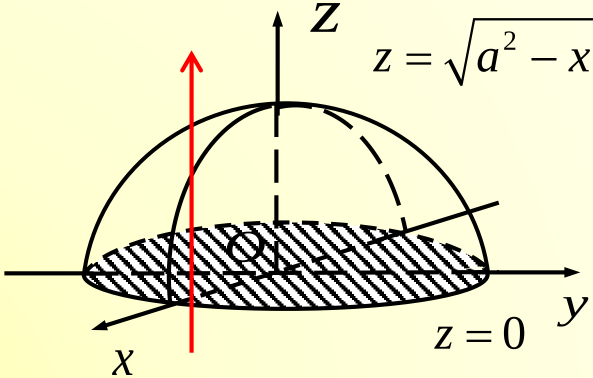
再将其化为三次积分计算

一般先z，次r，最后对θ积分

积分限是根据 r, θ, z 在积分区域中的变化范围来确定

(P221) 例11.19 计算三重积分$I=\iiint\limits_G zdv$,其中G是以原点为中心,

a为半径的上半个球体.



z的变化范围:大于坐标平面$z=0$,

小于球面$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

$0\le z\le\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

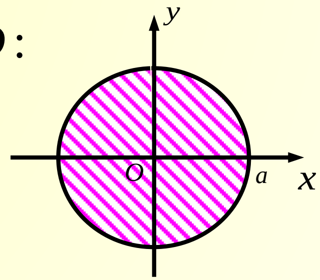
即$0\le z\le\sqrt{a^2-r^2}$, $(x,y)\in D$

G: $0\le\theta\le 2\pi$

$0\le r\le a$

$0\le z\le\sqrt{a^2-r^2}$

投影区域D:



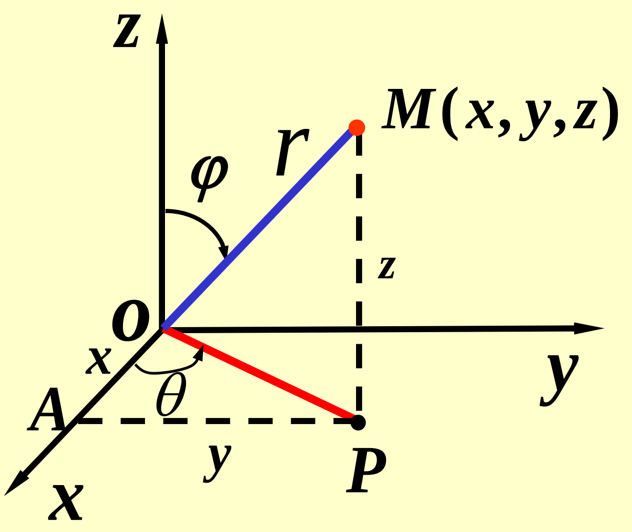
D: $0\le\theta\le 2\pi$, $0\le r\le a$

$$I=\iiint\limits_G zdv=\iiint\limits_G zrdrd\theta dz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a rdr\int_0^{\sqrt{a^2-r^2}}zdz$$

二、利用球面坐标系计算三重积分

直角坐标与球坐标的关系

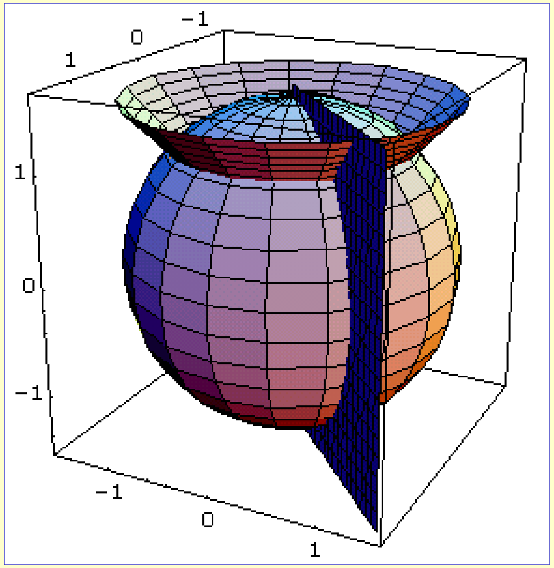


$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\varphi. \end{cases}$$

规定 $0 \le r < +\infty$

$0 \le \varphi \le \pi$

$0 \le \theta \le 2\pi$



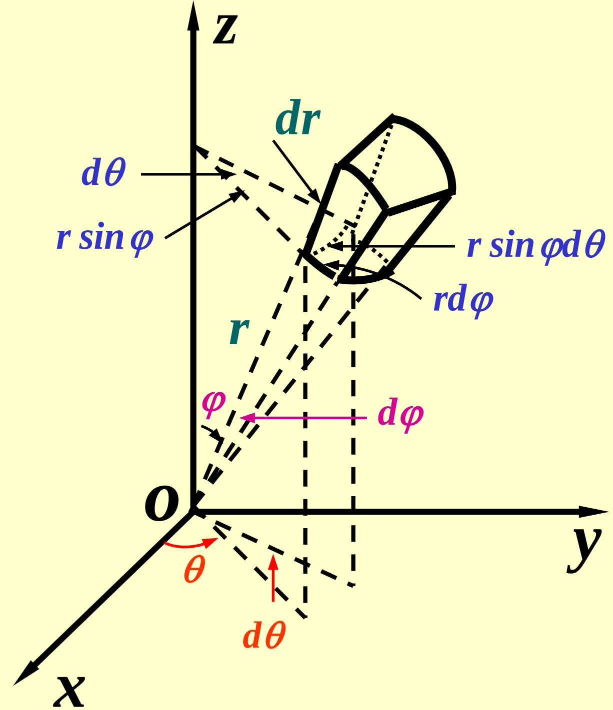
r 为常数 $\Longrightarrow$ 球 面

φ 为常数 $\Longrightarrow$ 圆锥面

θ 为常数 $\Longrightarrow$ 半平面

如图，球面坐标系中的体积元素为

$$dv = r^2 \sin\varphi dr d\varphi d\theta,$$



$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz =$$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) r^2 \sin\varphi dr d\varphi d\theta.$$

然后把它化成对 r,θ,φ 的三次积分

具体计算时需要将 Ω 用球坐标系下的不等式组表示

积分次序通常是 先r次φ后θ

补充：利用对称性简化三重积分计算

使用对称性时应注意：

1、积分区域关于坐标面的对称性；

2、被积函数在积分区域上的关于三个坐标轴的奇偶性

一般地，当积分区域Ω关于xoy平面对称，且被积函数$f(x,y,z)$是关于z的奇函数，则三重积分为零，若被积函数$f(x,y,z)$是关于z的偶函数，则三重积分为Ω在xoy平面上方的半个闭区域的三重积分的两倍.

“你对称，我奇偶”

对 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$

① 若Ω 关于 xoy 面对称

(1) 当 $f(x,y,-z)=-f(x,y,z,)$时 $I=0$

(2) 当 $f(x,y,-z)=f(x,y,z)$时

$$I=2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)dv$$

$$\Omega_1=\{(x,y,z)\,|\,(x,y,z)\in\Omega,z\geq 0\}$$

② 若Ω 关于 xoz 面对称

(1) 当 $f(x,-y,z)=-f(x,y,z)$时 $I=0$

(2) 当 $f(x,-y,z)=f(x,y,z)$时

$$I = 2\iiint\limits_{\Omega_2} f(x, y, z)dv$$

$$\Omega_2 = \{(x, y, z) \mid (x, y, z \in \Omega, y \geq 0)\}$$

③ 若Ω 关于 yoz 面对称

(1) 当 $f(-x, y, z) = -f(x, y, z)$ 时 $I = 0$

(2) 当 $f(-x, y, z) = f(x, y, z)$ 时

$$I = 2\iiint\limits_{\Omega_3} f(x, y, z)dv$$

$$\Omega_3 = \{(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \Omega, x \geq 0\}$$

第十章 重积分小结

一、二重积分计算

(1) 直角坐标系　(2) 极坐标系

两种坐标系中计算二重积分都要熟练

二、三重积分

(1) 直角坐标　(2) 柱面坐标　(3) 球面坐标

重点掌握在直角坐标系中计算，且积分区域 G 是一个六面体，即三个变量的积分限都是常数的类型

三、重积分应用

会求平面区域的面积，立体的体积

作业：

***P*216　2. 5**

选做　*P*224　1 (1).　(4)

预习：第11. 1节