

《高等数学》(II) 第一次测试 (闭卷)

题号	一	二	三	四	五	六 (附加)	总分
满分	12	8	24	40	16	16	100
得分							
评卷人							

一、(4 小题, 共 12 分)

设向量 $\mathbf{a} = (0, -3, 4)$, $\mathbf{b} = (-4, 1, -3)$, 求

- (1) $|2\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ (2) 与 \mathbf{a} 同向的单位向量;
 (3) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$; (4) 同时与 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 垂直的向量.

二、(2 小题, 共 8 分)

- (1) 两向量 $\mathbf{a} = (3, -1, 8)$, $\mathbf{b} = (x, 2, y)$ 相互平行, 求 x 和 y ;
 (2) 设 $z = x^3 + xy - y^2$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

三、计算下列各题 (3 小题, 共 24 分)

- (1) 设 $z = u^2 + v^2$, 而 $u = x + y$, $v = x - y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$.
 (2) 写出过点 $M(2, -3, 4)$ 且与平面 $2x - 3y + 5z - 3 = 0$ 垂直的直线点向式 (对称式) 方程, 并将直线方程化为参数式方程.
 (3) 设 $A(1, -2, 4)$, $B(-3, 6, 2)$, 求过点 A 且与 AB 垂直的平面方程, 并将方程化为截距式方程.

四、求下列微分方程的通解或特解: (5 小题, 共 40 分)

- (1) 一曲线经过点 $(1, 2)$, 且在曲线上任一点 $M(x, y)$ 处的切线斜率为 $2x$, 求此曲线方程.
 (2) $(x^2 y - y)dy - (xy^2 + x)dx = 0$, $y(0) = 1$;
 (3) $y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$;
 (4) $\frac{d^2 y}{dx^2} = x^2$;
 (5) $y'' - 6y' + 5y = 0$.

五、计算下列各题（2 小题，共 16 分）

(1) 设 $z = \frac{\cos x^2}{y}$ ，求 dz 。

(2) 设 $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}$ ，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ ， $\frac{\partial z}{\partial y}$ 。

六、（每小题 8 分，共 16 分）（附加题，可计入总分，但总分最高分为 100 分）

(1) 求曲面 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 和 $z = x^2 + y^2$ 围成的空间体在 xoy 平面上的投影方程。

(2) 设 $z = \frac{y}{f(x^2 - y^2)}$ ，其中 $f(u)$ 为可导函数，验证

$$\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$