§6.5　广义积分

定积分$\int_a^b f(x)dx$是有界函数在有限区间上计算积分，现在我们将其推广到更宽的范围内使用.

一、无限区间上的有界函数的积分

形如$\int_a^{+\infty} f(x)dx,\ \int_{-\infty}^{b} f(x)dx,\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$均称为无限区间上的广义积分.

广义积分怎么计算?

定义6.2　(见P109)

设$f(x)$在所给的区间上连续，如果$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(x)dx$存在，则称此极限为函数$f(x)$在无穷区间$[a,+\infty)$上的广义积分. 记作$\int_a^{+\infty} f(x)dx$

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(x)dx$$

积分区间:$[a,+\infty)$无限

积分区间有限:$[a,x]$

如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(x)dx$存在，则称广义积分收敛，

否则称广义积分发散.

思想方法：化无为有，用极限解决

介绍记号：

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a) = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a)$$

记号$F(+\infty)$实际上是个极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

例6. 17　(1) 计算 $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$ (P109)

解 $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx=\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\sin\frac{1}{x}d\left(-\frac{1}{x}\right)=-\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}\sin\frac{1}{x}d\left(\frac{1}{x}\right)$

$=\left(\cos\frac{1}{x}\right)\Big|_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\frac{1}{x}-\cos\frac{\pi}{2}=1$　所以，广义积分收敛.

当广义积分为 $\int_{-\infty}^{b}f(x)dx,\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$时，类似的有

$$\int_{-\infty}^{b}f(x)dx=F(x)\Big|_{-\infty}^{b}=F(b)-F(-\infty)=F(b)-\lim_{x\to-\infty}F(x)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=F(+\infty)-F(-\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)-\lim_{x\to-\infty}F(x)$$

(2) $\int_{-\infty}^{0} e^{x}dx = \left[e^{x}\right]_{-\infty}^{0} = e^{0} - \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 1$ 广义积分收敛

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^{2}}dx = \left[\arctan x\right]_{-\infty}^{+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x - \lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x$

$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ 广义积分收敛

例6. 18 判断广义积分$\int_{0}^{+\infty} \cos x dx$的收敛性.（P109）

解：$\int_{0}^{+\infty} \cos x dx = (\sin x)_{0}^{+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$ 振荡无极限

因为上述极限不存在，故广义积分$\int_{0}^{+\infty} \cos x dx$ 发散.

二、有限区间上的无界函数的积分

定义6.3 若 $f(x)$ 在 (a, b] 上连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$，则称 $\int_a^b f(x)dx$ 为有限区间上的无界函数的广义积分.

计算方法与无限区间上积分一样

思想方法：化无为有，用极限解决

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{x\to a^+}\int_x^b f(x)dx$$

函数在a点无界

函数在$[x,b]$上有界

$\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{x\to a^+}\int_x^b f(x)dx$，如果极限存在，称积分收敛，否则称发散.

例6.19 计算广义积分 $(1)\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx$ (P110)

解 $x=3$是函数$\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$的间断点，根据广义积分的计算

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx=\int_0^3 \frac{1}{3\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}dx=\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}d\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$=\left(\arcsin\frac{x}{3}\right)_0^3=\lim_{x\to 3^-}\arcsin\frac{x}{3}-\arcsin 0=\frac{\pi}{3}$$

广义积分收敛于$\frac{\pi}{2}$.

(2) $$\int_1^2 \frac{1}{x\ln x}dx = \int_1^2 \frac{1}{\ln x}\left(\frac{1}{x}dx\right) = \int_1^2 \frac{1}{\ln x}d(\ln x)$$

$$= \left[\ln|\ln x|\right]_1^2 = \ln|\ln 2| - \lim_{x\to 1^+}\ln|\ln x| = +\infty$$ 广义积分发散.

补充例题 $$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx = \int_{-1}^{0}\frac{1}{x^2}dx + \int_{0}^{1}\frac{1}{x^2}dx = \left(\frac{1}{x}\right)_{-1}^{0} + \left(\frac{1}{x}\right)_{0}^{1}$$

$$= \left[\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} - (-1)\right] + \left[1 - \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\right] = -\infty$$ 广义积分发散.

两种广义积分，重点掌握无限区间上的广义积分

作业：　$\boldsymbol{P}110$

必做：　1.$(1),(2),(4)$

选做：　2.$(2),(3)$