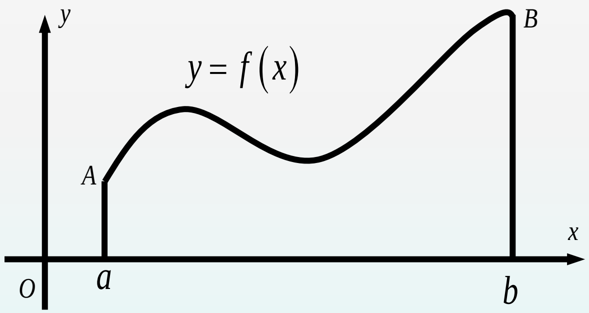
课前复习

定积分的意义：

1　物理意义：变力$F(x)$将质点沿直线从$x=a$移动到$x=b$所作的功$w=\int_a^b F(x)dx$

2　几何意义：由曲线$y=f(x)>0$，$x=a$, $x=b$及x轴围成平面图形面积$S=\int_a^b f(x)dx$

$$S=\int_a^b f(x)dx \quad \Leftrightarrow$$



牛顿–莱布尼兹公式

设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$$

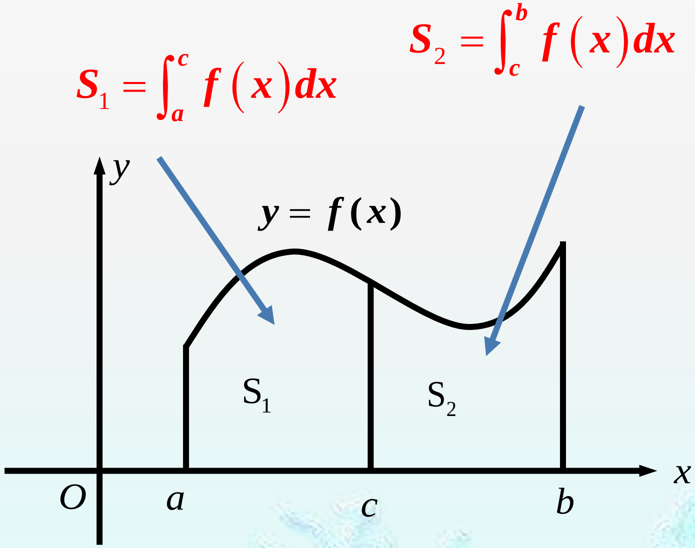
§6.2 定积分的性质

要求：理解定积分的性质

性质1（线性运算）$\int_a^b [k\, f(x)+\lambda\, g(x)]\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \lambda\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

性质2（可加性）若$a \le c \le b$,

则$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$



性质3（保号性）在$[a,b]$上，若 $f(x) \ge 0$,

则$\int_a^b f(x)dx \ge 0$

推论：在$[a,b]$上若 $f(x) \le g(x)$

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

性质4 $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

性质5（估值定理）在$[a,b]$上，若$m \le f(x) \le M$,则

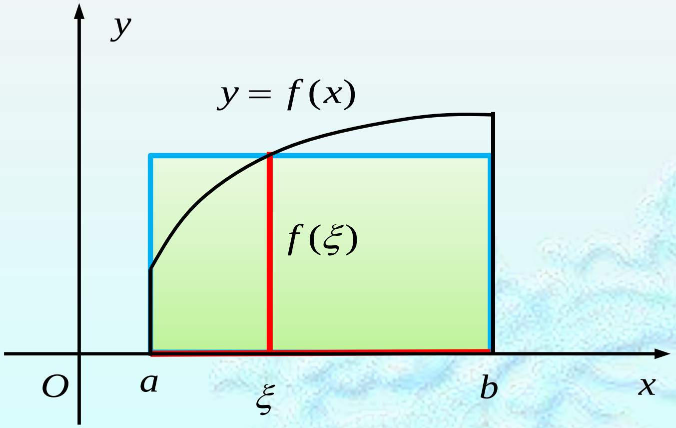
$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

这个性质重要，本教材没把它当性质来讲. 应该写出来

性质6（积分中值定理）设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，

则在(a,b)内至少有一点ξ使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a),\ (a<\xi<b)$$



除了以上主要性质外，以下结论也常用：

$(1)\int_a^b 1dx = b-a;$　这是一个矩形，高为1，底边长为$(b-a)$

$(2)\int_a^a f(x)dx = 0;$

这是个曲边梯形，曲边为 $f(x)$，底边长为$(a-a)=0$，故面积为0;

$(3)\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

交换定积分的上下限时，定积分的绝对值不变而符号相反；

(4) 定积分的值与积分变量无关，即$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$

定积分结果是一个确定的数值，它与被积函数有关，与积分区间有关，与积分变量有什么字母表示无关.

例6. 4 计算下列定积分：$(P100)$

$$(1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sin x+3\cos x-1)\,\mathrm{d}x \qquad (2)\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

解 $$(1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sin x+3\cos x-1)\,\mathrm{d}x=\left(-2\cos x+3\sin x-x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left(0+3-\frac{\pi}{2}\right)-\left(-2+0-0\right)=5-\frac{\pi}{2}$$

$$(2)\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx=\int_{-1}^{1}\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

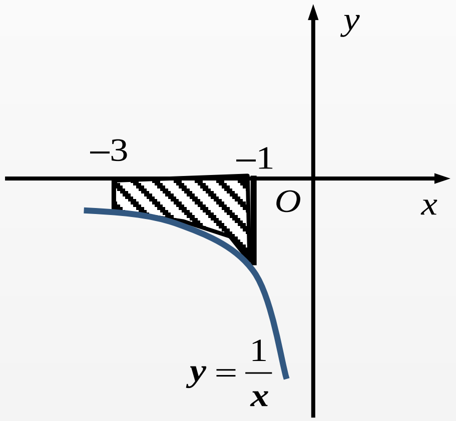
$$=\left(x-\arctan x\right)\Big|_{-1}^{1}=\left(1-\frac{\pi}{4}\right)-\left(-1+\frac{\pi}{4}\right)=2-\frac{\pi}{2}$$

讲例6. 4目的：常规计算，熟悉牛顿一莱布尼兹公式.

例6. 5 计算由 $y=\frac{1}{x}, x=-3, x=-1$ 及 x 轴围成平面图形的面积.

解 曲线围成的面积如右图，由定积分的几何意义知

积分 $\int_{-3}^{-1}\frac{1}{x}dx$ 为负值，（围成的面积在x轴下方）



所以所求面积为

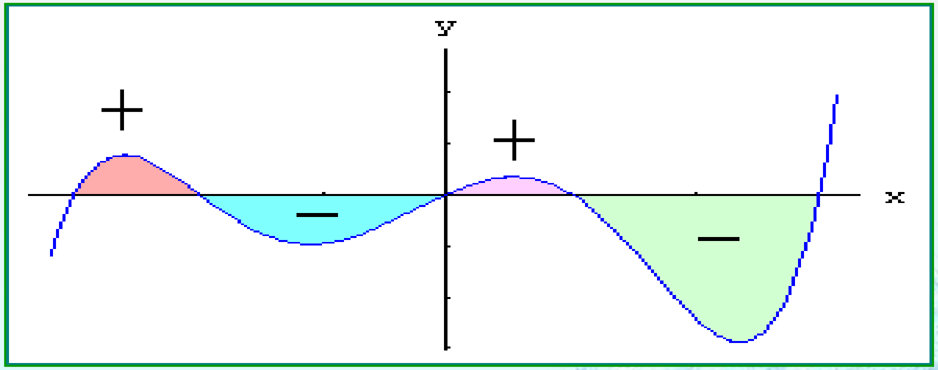
$$S=-\int_{-3}^{-1}\frac{1}{x}dx=-\left(\ln|x|\right)_{-3}^{-1}=\ln 3-\ln 1=\ln 3$$

讲例6. 5目的：

熟悉定积分几何意义，

在 x 轴上方的面积为正，

在 x 轴下方的面积为负.



例6. 6 设 $f(x)=\begin{cases}2x+1 & -1\le x\le 0\\ e^{x} & x>0\end{cases}$，求 $\int_{-1}^{1} f(x)dx$

解 由定积分的可加性，对于分段函数，要分段积分

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{0}(2x+1)dx+\int_{0}^{1}e^{x}dx=(x^{2}+x)_{-1}^{0}+(e^{x})_{0}^{1}=e-1$$

讲例6. 6目的：

熟悉定积分的可加性，对于分段函数，一定要分段积分.

类似例题：$f(x)=\begin{cases}x+1 & -2\le x<0\\ \sin x & 0\le x\le 2\pi\end{cases}$，计算 $\int_{-1}^{\pi} f(x)dx$

例6.7 计算定积分$\int_0^2 |2x-1|\,\mathrm{d}x$

解　被积函数在给出的积分区间上变号，故要分段积分.

去绝对值符号， $|2x-1| = \begin{cases} 1-2x & x < \dfrac{1}{2} \\ 2x-1 & x \ge \dfrac{1}{2} \end{cases}$

$$\int_0^2 |2x-1|dx = \int_0^{\frac{1}{2}}(1-2x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 (2x-1)dx = (x-x^2)\Big|_0^{\frac{1}{2}} + (x^2-x)\Big|_{\frac{1}{2}}^2 = \frac{5}{2}$$

讲例6.7目的：去绝对值积分.

注意：本学期介绍的求极限、求导数、求积分等运算从来不带绝对值运算，一定要先去绝对值，后计算.

例6.8　估计定积分$\int_0^1 e^{x^2}dx$取值范围.

解　由性质5估值定理，

先算出e^{x^2}在积分区间[0, 1]上的最大，最小值

因为函数e^{x^2}在$[0,1]$上是增函数，得 $m=e^0=1, M=e^1=e$

所以，$1(1-0)\le\int_0^1 e^{x^2}dx\le e(1-0),$

即　$1\le\int_0^1 e^{x^2}dx\le e$

类似的练习见P102

讲例6.8目的：熟悉定积分性质

作业：　　**P**102

必做：3. (1), (3), (7), (9)

写在草稿纸上：1, 2