在介绍二阶方程求解之前，先复习学过的一阶方程的内容

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$$ 可分离变量的微分方程.

解法： 分离变量，两边积分

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$ 一阶线性微分方程.

解法： 公式法

通解公式 $$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$$

一阶微分方程一定要会解这两类

7.5 可降阶的三种特殊微分方程

要求：记住三种方程的特点，选择正确的解法

可降阶的三种特殊微分方程

$$(1)\, y'' = f(x)$$

特征：方程一端仅含x　**解法**：直接积分

$$(2)\, y'' = f(x, y')$$

特征：不显含y

解法：令 $y' = p, y'' = p'$，方程降为一阶 $p' = f(x, p)$

$$(3)\, y'' = f(y, y')$$

特征：不显含x

解法：令 $y' = p, y'' = p\dfrac{dp}{dy}$，方程降为一阶 $p\dfrac{dp}{dy} = f(y, p)$

$(1)\ y'' = f(x)$

例1. 求微分方程$y'' = e^{-2x} + \cos 3x$

特征：方程一端仅含x　　解法：直接积分

$$解：y' = \int \left(e^{-2x} + \cos 3x\right)dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{3}\sin 3x + C_1$$

$$y = \int \left(-\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{3}\sin 3x + C_1\right)dx = \frac{1}{4}e^{-2x} - \frac{1}{9}\cos 3x + C_1 x + C_2$$

注意：两次积分，每次都要加常数

练习：(1) $y'' = e^{-x} + x$　(2) $y'' = e^{ax} + \sin x$

例2. 列车在平直的路线上以$64m/s$的速度行驶；当制动时列车获得的加速度为$-0.8m/s^2$,问开始制动后多少时间列车才能停住？以及列车在这段时间里行驶了多少路程？

解：依题意有，$s''(t)=-0.8$, 且$s(0)=0$, $v(t)=s'(t)=64$

对$s''(t)=-0.8$两次积分，$v(t)=s'(t)=-0.8t+C_1$, $s(t)=-0.4t^2+C_1t+C_2$

将初始条件代入以上两式，有

$$\begin{cases} s'(t)=-0.8\times 0+C_1=64 \\ s(0)=-0.4\times 0+C_1\times 0+C_2=0 \end{cases}，求出 C_1=64, C_2=0$$

则, 路程与时间的关系为$s(t)=-0.4t^2+64t$;其运行速度$v(t)=-0.8t+64$

令$v(t)=-0.8t+64=0$,求出列车从制动到停住所需的时间为$t=80s$,

在$t=80$的时间里列车行驶的路程为$s(80)=-0.4\times 80^2+64\times 80=2560m$.

$(2)\ y'' = f(x, y')$

例3. 求微分方程$(1+x^2)y''+2xy'=1$的通解.

特征：不显含y

解法：令 $y'=p, y''=p'$, 方程降为一阶 $p'=f(x,p)$

解：令$y'=p$, 原方程化为$(1+x^2)p'+2xp=1$ 即 $p'+\frac{2x}{1+x^2}p=\frac{1}{1+x^2}$

解关于未知函数 p的一阶线性方程,

$$p=e^{-\int\frac{2x}{1+x^2}dx}\left[\int\frac{1}{1+x^2}e^{\int\frac{2x}{1+x^2}dx}dx+C_1\right]=(1+x^2)^{-1}(x+C_1)=\frac{x}{1+x^2}+\frac{C_1}{1+x^2}$$

上式积分，得

$$y=\int\frac{x}{1+x^2}dx+\int\frac{C_1}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1\arctan x+C_2$$

练习：求解方程 $y'' = \frac{2x}{1+x^2} y'$

解：令$y' = p,\ y'' = p'$ 代入原方程，得

$$p'\left(1+x^2\right) = 2xp \quad \text{即} \frac{1}{p}dp = \frac{2x}{1+x^2}dx$$

积分，得 $\ln p = \ln\left(1+x^2\right) + \ln C_1$ 即 $p = C_1\left(1+x^2\right) = y'$

再次积分，求出**通解** $y = C_1\int\left(1+x^2\right)dx = C_1\left(x+\frac{1}{3}x^3\right)+C_2$

若给出初始条件 $y(0)=1, y'(0)=3$，求特解

$y'(0)=C_1\left(1+0^2\right)=3$，$y(0)=C_1(0+0)+C_2=1$，求出 $C_1=3, C_2=1$

故，所求**特解**为$y=3x+x^3+1$

$(3)\ y'' = f(y, y')$

特征：不显含x

解法：令 $y' = p,\ y'' = p\dfrac{dp}{dy}$，方程降为一阶 $p\dfrac{dp}{dy} = f(y, p)$

解法推导：令 $y' = p$，　则 $y'' = \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dp}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx} = p\dfrac{dp}{dy}$

因为方程中不显含x,若不转化，则原方程化为$\dfrac{dp}{dx} = f(y, p)$，方程中出现 x, p, y 三个变量而无法计算积分

原方程(二阶)降为关于p的**一阶**方程 $p\dfrac{dp}{dy} = f(y, p)$,

解此微分方程并注意还原，然后再次积分.

$(3)\ y''=f(y,y')$

例4 求 $y\,y''-(y')^2=0$ 的通解. (教材P137)

特征：不显含 x

解法：令 $y'=p,\ y''=p\dfrac{dp}{dy}$, 方程降为一阶 $p\dfrac{dp}{dy}=f(y,p)$

解 第一步 降阶 令 $y'=p$, 则 $y''=\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{dp}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=p\dfrac{dp}{dy}$,

原方程化为 $yp\dfrac{dp}{dy}-p^2=0$ 即 $y\dfrac{dp}{dy}=p$ 或 $p=0$

第二步 解关于 p 的一阶方程 $y\dfrac{dp}{dy}=p$ 化为 $\dfrac{1}{p}dp=\dfrac{1}{y}dy$,

积分求出 $\ln p=\ln y+\ln C_1$ 即 $p=C_1y$

第三步 再解关于 y 的一阶方程 由 $p=c_1y$ 表成 $y'=c_1y$

分离变量 $\frac{1}{y}dy=C_1dx$

再次积分，得 $\ln y=C_1x+\ln C_2$ 即 $y=C_2e^{C_1x}$

第四步 补解 由 $p=0$ 即 $\frac{dy}{dx}=0$ 得 $y=C$，此解包含于 $y=C_2e^{C_1x}$ 中

综上所述，原微分方程的通解为 $y=C_2e^{C_1x}$.

第三类 $y''=f(y,y')$ 方程求解过程较繁，建议先掌握好前两类，再研究第三类方程的解法.

练习：

求解下列微分方程：

(1) $y'' = xe^x$

(2) $y'' = y' + x$

解 (1) $y'' = xe^x$

$$y' = (x-1)e^x + c_1$$

$$y = (x-2)e^x + c_1 x + c_2$$

解 (2) $y'' = y' + x$

令 $y' = p$，$y'' = p'$

方程化为 $p' - p = x$

$$y' = p = -x - 1 + c_1 e^x$$

再积分

$$y = -\frac{1}{2}x^2 - x + c_1 e^x + c_2$$

作业：

P137 1(1) (4)

2(1)

预习：7.6节