# 第十二章　无穷级数

- 无穷级数
  - 数项级数
    - 正项级数
    - 任意项级数
  - 函数项级数
    - 幂级数
    - 傅里叶级数

本章基本要求：

1. 理解级数收敛定义及收敛级数的性质
2. 会用比较、比值法判断正项级数的收敛性
3. 会求幂级数的收敛半径及收敛域
4. 能用间接法将函数展开成幂级数

# 第一节

## 级数的基本概念与性质

**要求**：理解级数收敛定义及收敛级数的性质

## 一、级数的基本概念

**定义:** 给定一个数列 $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$ 将各项依次相加, 简记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

称上式为无穷级数, 其中第 $n$ 项 $u_n$ 叫做**级数的一般项**,

级数的前 $n$ 项和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

称为**级数的部分和**.

若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ 存在，则称无穷级数 **收敛**，

并称 $S$ 为级数的和，记作

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在，则称无穷级数 **发散**.

当级数收敛时，称差值

$$r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

为**级数的余项**. 显然

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0$$

例12.1 $(P252)$ 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 的敛散性.

解 $S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$

$=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=1-\frac{1}{n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 收敛.

技巧:

利用 “拆项相消” 求和

重点例题，结论要记住，方法要学会。

例12.2 $(P252)$ 调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散. 记住结论

**练习** 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$ 的敛散性.

**解** $S_n = \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n}$

$$= (\cancel{\ln 2} - \ln 1) + (\cancel{\ln 3} - \cancel{\ln 2}) + \cancel{\cdots\cdots} + [\underline{\ln(n+1)} - \cancel{\ln n}]$$

$$= \ln(n+1)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$$

所以原级数发散.

例12.3 ($P253$) 讨论等比级数 (又称几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots \quad (a \neq 0)$$

( $q$ 称为公比 ) 的敛散性.

解: 1) 若 $q \neq 1$, 则部分和

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1-q}$$

当 $|q| < 1$ 时, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$

因此级数收敛, 其和为 $\frac{a}{1-q}$ ;

当 $|q| > 1$ 时, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$,

因此级数发散 .

2). 若 $|q|=1$，则

当 $q=1$时，$S_n = na \to \infty$，因此级数发散；

当 $q=-1$时，级数成为

$$a - a + a - a + \cdots + (-1)^{n-1} a + \cdots$$

因此 $S_n = \begin{cases} a, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在，因此级数发散.

综合 1)、2)可知，$|q|<1$ 时，等比级数收敛；

$|q| \geq 1$ 时，等比级数发散 .

以上是按定义讨论级数的收敛性，太麻烦，一要求和，二要求极限，我们寻找简便的方法来判定级数的收敛性.

## 二、收敛级数的性质　$P253$

性质12.2. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S，即 $S=\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，则各项乘以常数 $k$ 所得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} k u_n$ 也收敛，其和为 $kS$ .

性质12. 3 设有两个收敛级数

$$S=\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \qquad \sigma=\sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 也收敛，其和为 $S \pm \sigma$ .

**例**12.4 ($P$254) **求级数**$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{3^n}+\frac{2}{n(n+1)}\right]$**的和.**

**解** $\because \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{3^n}+\frac{2}{n(n+1)}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}$

**由等比级数知** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$

**由P252例12. 1知** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{3^n}+\frac{2}{n(n+1)}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$$

例12.4 $(P254)$ 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{3^n}+\frac{2}{n(n+1)}\right]$的和. **重点例题**

解 由等比级数知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$

由P252例12. 1知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{3^n}+\frac{2}{n(n+1)}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$

注意：用性质12.3，级数收敛时才能分开求和

说明:

(1) 性质12.3 表明收敛级数可逐项相加或减.

(2) 若两级数中一个收敛一个发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 必发散.

但若两级数都发散, $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 不一定发散.

例如, 令 $u_n = (-1)^{2n}$, $v_n = (-1)^{2n+1}$, 而 $u_n + v_n = 0$

$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 收敛

性质12.4 改变级数任意有限项(加上或去掉有限项), 不改变级数的敛散性.

性质12.5 收敛级数加括弧后所成的级数仍收敛于原级数的和.

推论: 若加括弧后的级数发散, 则原级数必发散.

注意: 收敛级数去括弧后所成的级数不一定收敛.

例如, $(1-1)+(1-1)+\cdots=0$, 但 $1-1+1-1+\cdots$ 发散.

## 三、级数收敛的必要条件

性质12.1　设收敛级数 $S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，则必有 $\lim_{n\to\infty}u_n=0.$

证明　$u_n=S_n-S_{n-1}$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0$$

可见：若级数的一般项不趋于0或极限不存在，

则级数必发散.

例如，$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\cdots+\frac{n}{n+1}+\cdots$，其一般项为 $u_n=\frac{n}{n+1}$

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$　故级数发散.

应用中常见错误是用该性质来判断级数收敛

常见错误：

调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 收敛

因为 $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，但此级数发散.

注意:

收敛必要条件用于判断级数不收敛.

因为已知条件是级数收敛，结论是一般项趋于零.

我们用定理的逆否命题：

若一般项不趋于零，则级数不收敛.

例如：级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$是发散的，因为$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$

作业： P254

4. (1)、(4)

5.

6. (1)、(2)

预习：第12.2节