习题 11.3　（P240）

1. 利用格林公式计算下列曲线积分：

（1）$\oint_L (xy-x^2)\,\mathrm{d}x+(2x+y^2)\,\mathrm{d}y$，其中 L 是由抛物线 $y=x^2$ 和 $y^2=x$ 所围成的区域的正向边界曲线；

解　已知 $P(x,y)=xy-x^2$，$Q(x,y)=2x+y^2$，$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2-x$，由格林公式

$$\oint_L (xy-x^2)\,\mathrm{d}x+(2x+y^2)\,\mathrm{d}y=\iint_D (2-x)dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(2-x)dy=\int_0^1(2-x)\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx$$

$$=\int_0^1\left(2\sqrt{x}-2x^2-x^{\frac{3}{2}}+x^3\right)dx=\left(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{4}x^4\right)_0^1=\frac{31}{60}.$$

（2）$\oint_L (2x+y)\,\mathrm{d}x+(x+2y)\,\mathrm{d}y$，其中 L 是逆时针方向沿坐标轴与直线 $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ 构成的三角形边界绕行一周；

解　已知 $P(x,y)=2x+y$，$Q(x,y)=x+2y$，$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1-1=0$，由格林公式

$$\oint_L (2x+y)\,\mathrm{d}x+(x+2y)\,\mathrm{d}y=\iint_D 0\,dxdy=0$$

4. 验证下列各曲线积分在整个 xOy 平面内与路径无关，并计算其值：

（2）$\int_{(1,2)}^{(3,4)}(6xy^2-y^3)\,\mathrm{d}x+(6x^2y-3xy^2)\,\mathrm{d}y$；

解　已知 $P(x,y)=6xy^2-y^3$，$Q(x,y)=6x^2y-3xy^2$，

$\frac{\partial P}{\partial y}=12xy-3y^3$，$\frac{\partial Q}{\partial x}=12xy-3y^3$，$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，曲线积分与路径无关，可选择

$A(1,2)\to B(3,2)\to C(3,4)$ 的折线段积分，

$$\int_{(1,2)}^{(3,4)}(6xy^2-y^3)\,\mathrm{d}x+(6x^2y-3xy^2)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{AB}(6xy^2-y^3)\,\mathrm{d}x+(6x^2y-3xy^2)\,\mathrm{d}y+\int_{BC}(6xy^2-y^3)\,\mathrm{d}x+(6x^2y-3xy^2)\,\mathrm{d}y$$

分别计算

直线 AB：参数方程 $\begin{cases}x=x\\y=2\end{cases}$，$x$ 从 1 到 3，$dx=dx$，$dy=d2=0$，

$$\int_{AB}(6xy^2-y^3)\,\mathrm{d}x+(6x^2y-3xy^2)\,\mathrm{d}y=\int_1^3(6x2^2-2^3)\,\mathrm{d}x+0=\int_1^3(24x-8)\,\mathrm{d}x=\left(12x^2-8x\right)_1^3=80;$$

直线 BC：参数方程 $\begin{cases}x=3\\y=y\end{cases}$，$y$ 从 2 到 4，$dx=d3=0$，$dy=dy$，

$$\int_{BC}(6xy^2-y^3)\,\mathrm{d}x+(6x^2y-3xy^2)\,\mathrm{d}y=\int_2^4 0+\left(6\cdot3^2y-3\cdot3y^2\right)dy=\int_2^4\left(54y-9y^2\right)dy$$

$$=\left(27y^2-3y^3\right)_2^4=156$$

所以 $\int_{(1,2)}^{(3,4)}(6xy^2-y^3)\,\mathrm{d}x+(6x^2y-3xy^2)\,\mathrm{d}y=80+156=236$.

7. 利用格林公式计算$\oint_L xy^2\,\mathrm{d}y-x^2y\mathrm{d}x$，其中 L 为 $x^2+y^2=a^2$ 的正向圆周.

解　已知 $P(x,y)=-x^2y$， $Q(x,y)=xy^2$， $\frac{\partial P}{\partial y}=-x^2$， $\frac{\partial Q}{\partial x}=y^2$， 由格林公式

$\oint_L xy^2\,\mathrm{d}y-x^2y\mathrm{d}x=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint\limits_D\left(y^2+x^2\right)dxdy$， 而 D 为圆域： $x^2+y^2\le a^2$

计算二重积分： $\iint\limits_D\left(y^2+x^2\right)dxdy=\iint\limits_D r^2\cdot rdrd\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a r^3dr=2\pi\cdot\frac{1}{4}r^4\Big|_0^a=\frac{1}{2}\pi a^4$，

所以 $\oint_L xy^2\,\mathrm{d}y-x^2y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\pi a^4$.