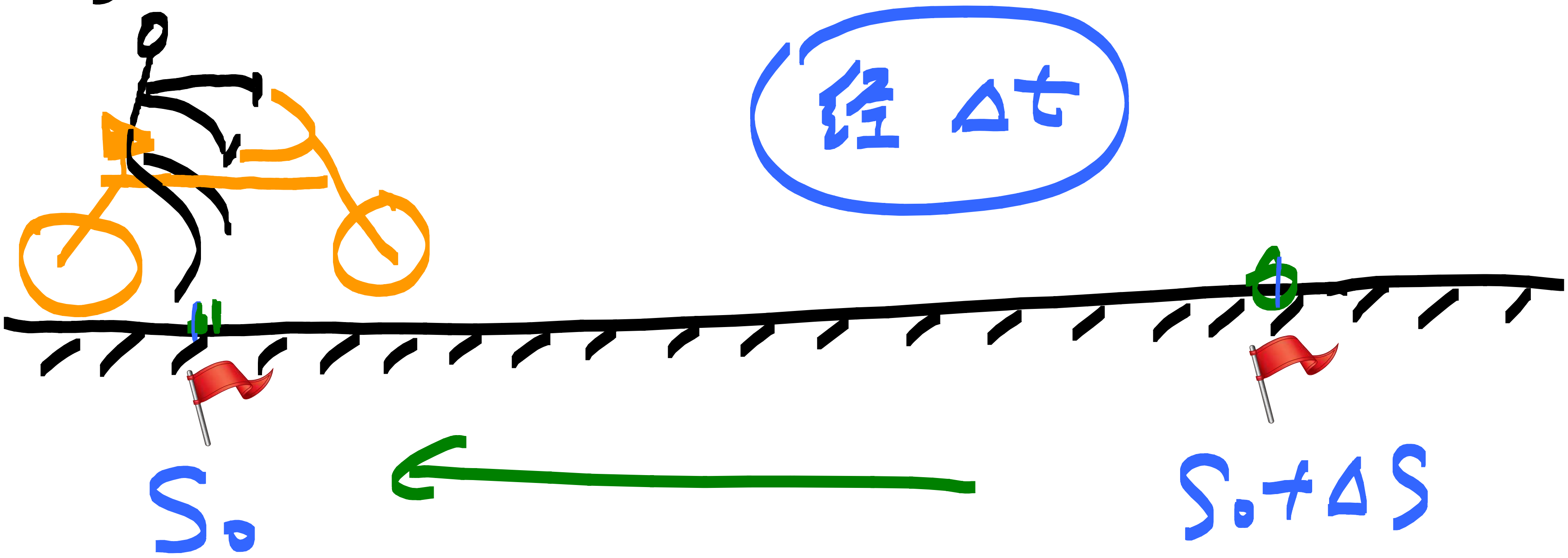
作业：$\boxed{P42.\ 4.\ 6.\ 7(2)}$ 交

练：P42. 4. 5. 6. 7

第3章 导数与微分

§3.1 导数的概念

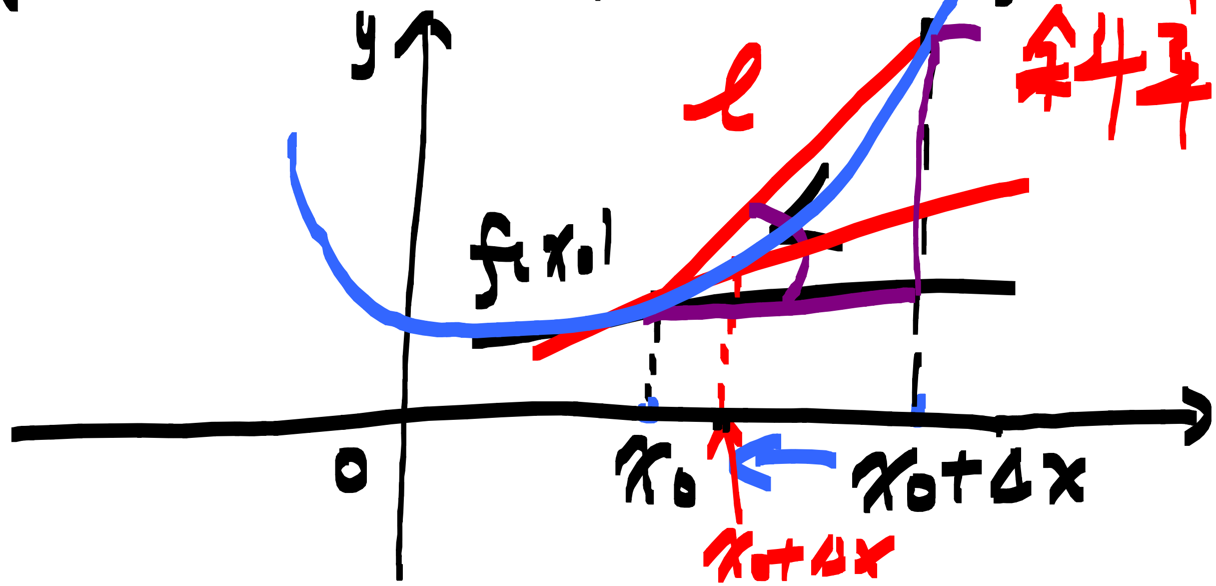
1. 变速直线运动



平均速度 $\bar{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

瞬时速度 $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ 变化率.

2. 曲线的切线斜率



斜率 $k_l = \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

$= \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$= \tan\alpha$

$\Delta x \to 0$. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 指 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 斜率

即 $k' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

变化是 Δy

Δx

3. 导数定义

$f(x)$ 在 $x=x_0$ 的邻域有定义

若 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = A$ $\exists$

则 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，导数 $f'(x_0)=A$ ✓

记：① $\Delta x \to 0$ $\begin{cases} \Delta x \to 0^+ & ✓ \\ \Delta x \to 0^- & ✓ \end{cases}$

② - 动 $f(\underline{x_0+\Delta x})$ - 静 $f(x)$ ✓

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\underline{x_0+\Delta x}) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$x_0 + \Delta x = x$

问：若 $f(x)$ 连续 且

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(2x+0) - f(x+0)}{x} = A \ \exists$$

能否得 $f(0)=A$

否 /

不满足：动一静

导数的表示法 ($y=f(x)$)

$$f'(x_0) = y'\Big|_{x=x_0}$$

$$= \frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0} \xrightarrow{\text{本质}} \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \frac{df}{dx}\Big|_{x=0}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$dy \Leftrightarrow \Delta y \to 0$

$dx \Leftrightarrow \Delta x \to 0$

上述仅针对定点，而导数。

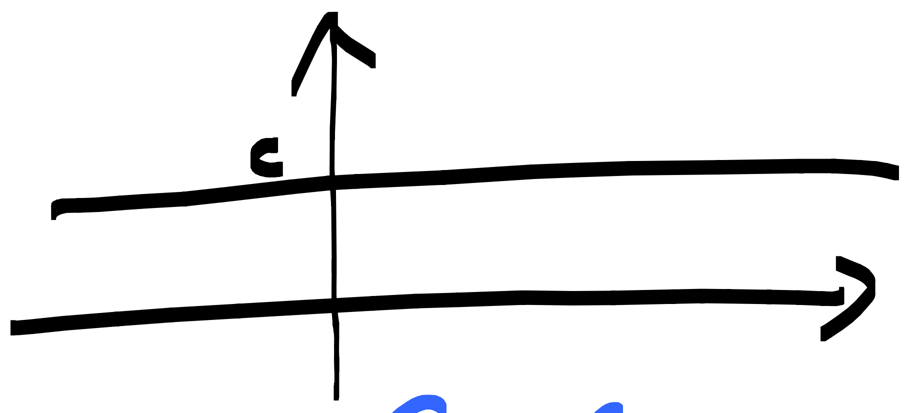
若 $y=f(x)$ 在 $f(x)$ 可导（即 在 $\forall x$，$f(x)$ 可导）

若 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x+t)-f(x)}{t}=A(x)$，$\exists$

$\Rightarrow f'(x)=A(x)$

用定义求函数导数.

例1. $f(x)=c$ 求 $f'(x)$



解: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{c-c}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0}{\Delta x}$

$=0$

$\Rightarrow f'(x) = 0$

结论: ① 若 $y=f(x)$ 对 $\forall x$ 有 $f'(x)=0$ ☆

则 $f(x) = C$ (定值)

② 若 $f(x) = C$ 则 $f'(x) = 0$

例. 证明: $\forall x>0$, $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$

$\forall x<0$, $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$

提示：$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

举一反三： $\forall f(x) > 0$，$\arctan f(x) + \arctan \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{\pi}{2}$

例1. $\arctan e^x + \arctan e^{-x} = \dfrac{\pi}{2}$

例2. $f(x)=\sin x$ 求 $f'(x)$

解: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0}$

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(A+B)&=\sin A\cos B+\sin B\cos A\\ \sin(A-B)&=\sin A\cos B-\sin B\cos A\end{aligned}}$$

$\forall A, B$

$$A = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}$$

$$B = \frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}$$

예) $\lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = f'(x_0)$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\underbrace{\sin\left(\frac{x+x_0}{2} + \frac{x-x_0}{2}\right)}_{A} - \underbrace{\sin\left(\frac{x+x_0}{2} - \frac{x-x_0}{2}\right)}_{B}}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{2 \sin \frac{x-x_0}{2} \cos \frac{x+x_0}{2}}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{2 \cdot \frac{x-x_0}{2} \cdot \cos \frac{x+x_0}{2}}{x-x_0}$$

$$\boxed{= \lim_{x \to x_0} \cos \frac{x+x_0}{2} = \cos x_0}$$

($\cos x$ 连续)

$\therefore \forall x_0$ 均有 $f'(x_0) = \cos x_0$

即 $\forall x$ 有 $f'(x) = \cos x$

\四多| 定义式

$$\lim_{x \to \underline{x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = A \Rightarrow f'(x_0) = A$$

注: ① ②

注2: 若 $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = A \Rightarrow f_+'(x_0) = A$ (右导数)

若 $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = A \Rightarrow f_-'(x_0) = A$ (左导数)

$\Rightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 处可导充要条件

$$\boxed{f'_+(x_0) = f'_-(x_0)} = f'(x_0)$$

注：$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A$ (∃)

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$f(x)$ 在 x_0 处连续

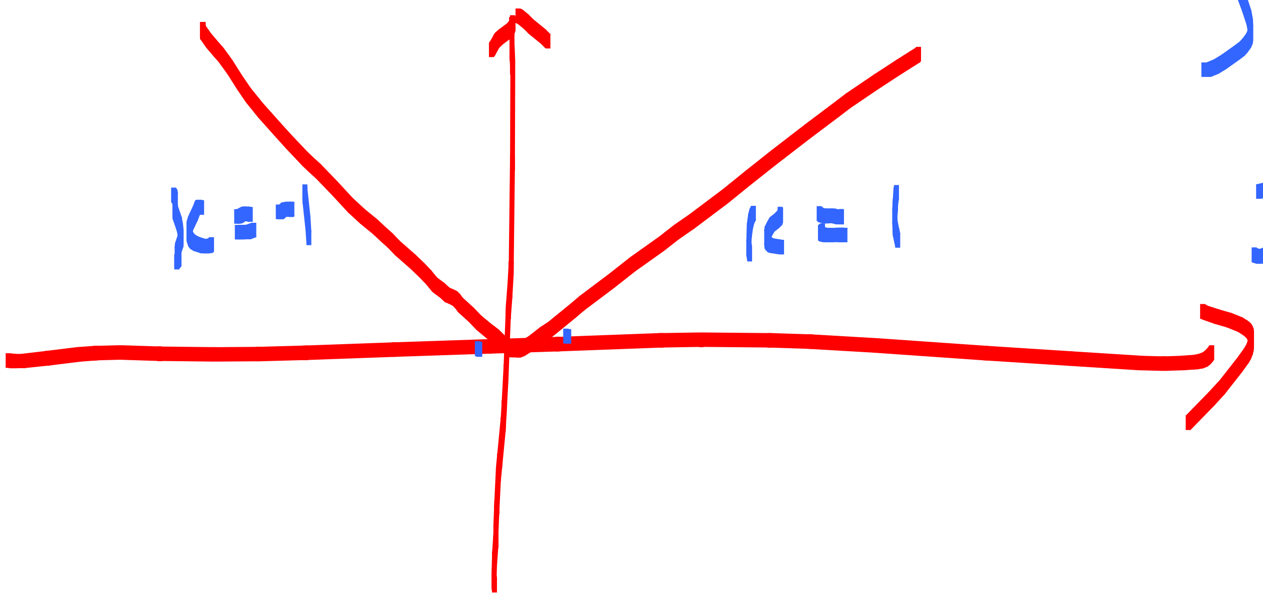
结论：若 $f(x)$ 在 x_0 处可导

则 $f(x)$ 在 x_0 处连续

$y=f(x)$ 在 x_0 处可导 $\Longrightarrow$ $y=f(x)$ 在 x_0 处连续

$\cancel{\Longleftarrow}$

反例：$y=|x|$ 连续



$f_-'(0)=-1$

$f_+'(0)=1$

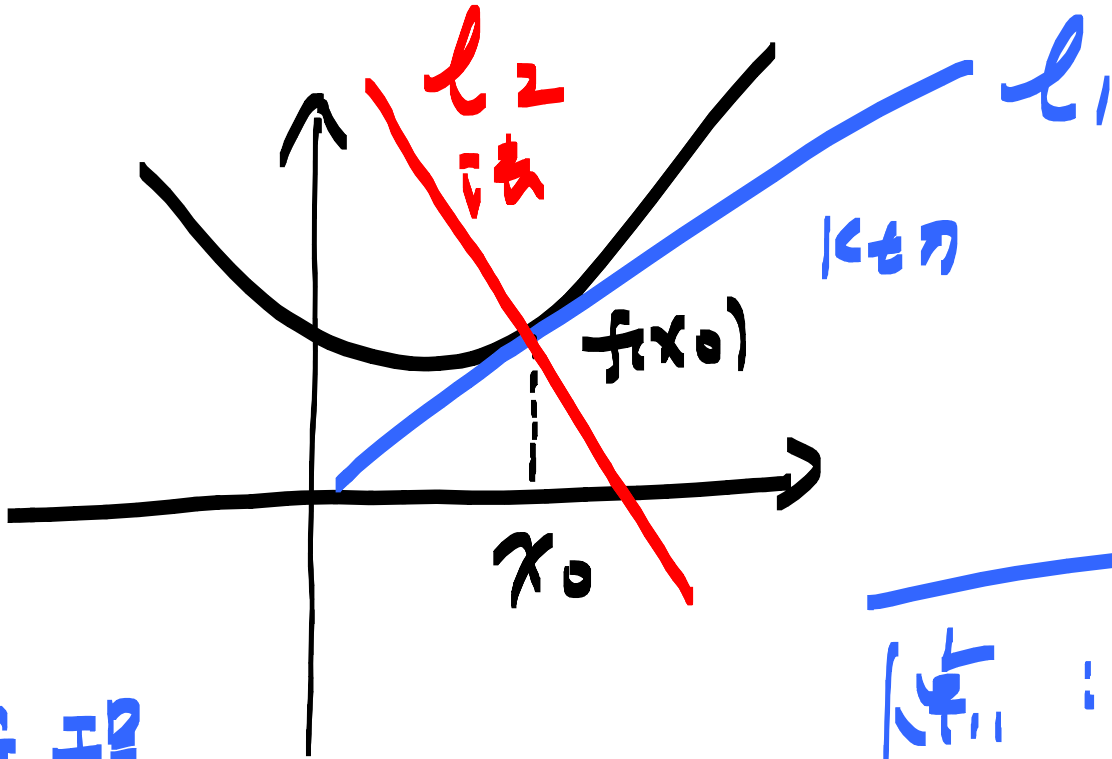
不可导.

$y=f(x)$ 可导： ① 左导 = ② 右导

$\Downarrow \quad \cancel{\Uparrow} \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$

$y=f(x)$ 连续： ① 左连续 　 ② 右连续

补：切线与法线



点斜式方程

$$y-f(x_0)=k_{切}(x-x_0)$$

（切线方程）

点：$(x_0, f(x_0))$

斜：$k_{切}$

注：$k_{切} \cdot k_{法} = -1$

法线方程为：$y - f(x_0) = -\frac{1}{k_{切}}(x - x_0)$

例1. 设 $y = \frac{1}{x}$，在 $(2, \frac{1}{2})$ 处，求其斜率和切线以及法线方程.

$k_{切} \cdot k_{法} = -1$

解：$k = y'|_{x=2} = -\frac{1}{x^2}\Big|_{x=2} = -\frac{1}{4}$

切线：$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x-2)$　　法线：$y - \frac{1}{2} = 4(x-2)$