二、二元函数的极限

1. 二元函数极限的定义:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\lim_{p\to p_0} f(x,y)=A\left(\text{唯一确定}\right)$$

注意:①二元函数的极限要求$p(x,y)\to p_0(x,y)$ 的方式、方向、路径都是任意的;

②如果有两条不同的路径, 使$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 的极限不相等, 则可以断定

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$不存在。

2. 求二元函数极限的方法

方法一:通过换元$\xrightarrow{\text{转化}}$一元函数求极限

方法二:通过放大缩小, 然后使用夹逼准则(极限为0 时, 此法有效)

方法三:取特殊路径判断下极限的存在性

【例8.1】求下列极限

$(1)\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}(a\neq 0)$　　　$(2)\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{2-e^{xy}}-1}$

$(3)\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{\arcsin(xy)}{y}$　　　$(4)\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$(5)\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2|y|^{\frac{3}{2}}}{x^4+y^2}$　　　$(6)\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

解: $(1)\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left[\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{xy}\right]^{\frac{x^2}{xy(x+y)}}$

其中$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{xy}\xlongequal{\text{令}xy=t}\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{t}=e$

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\frac{x^2}{xy(x+y)}=\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\frac{1}{y\left(1+\frac{y}{x}\right)}=\frac{1}{a}$$

$\therefore$原极限$=e^{\frac{1}{a}}$

$(2)\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{2-e^{xy}}-1}\xlongequal{\text{令}xy=t}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sqrt{2-e^{t}}-1}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\frac{1}{2}\left(1-e^{t}\right)}=-2$

$(3)\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{\arcsin(xy)}{y}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{\arcsin(xy)}{xy}\cdot x=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{\arcsin(xy)}{xy}\xlongequal{\text{令}xy=t}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\arcsin t}{t}=1$

$$(4)\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{x^2+y^2}{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}=0$$

$\therefore$ 原极限 $=0$

$$(5)\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2|y|^{\frac{3}{2}}}{x^4+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}|y|\cdot\frac{x^2|y|^{\frac{1}{2}}}{x^4+y^2}\leqslant\lim_{(x,y)\to(0,0)}|y|\cdot\frac{\frac{x^4+y^2}{2}}{x^4+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{2}|y|$$

$$=0$$

又 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2|y|^{\frac{3}{2}}}{x^4+y^2}\geqslant0\Rightarrow$ 由夹逼准则得 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2|y|^{\frac{3}{2}}}{x^4+y^2}=0$

$(6)\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, 取特殊路径 $y=kx,k\neq0$

则 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=kx}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\dfrac{k^2}{1+k^2}$, 结果随着 k 变化而变化

因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 极限不存在

【例8.2】证明下列极限不存在

$(1)\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$　　　　$(2)\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2+(x-y)^2}$

证明: $(1)\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}\overset{\text{取}y=-x+kx^2,k\neq0}{=\!=\!=}\lim\limits_{x\to0}\left(1-x^2+kx^3\right)^{\frac{1}{kx^2}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(1-x^2+kx^3\right)}{kx^2}}=e^{-\frac{1}{k}}$, 结果随着 k 变化而变化, 故该极限不存在

$(2)\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2+(x-y)^2}\overset{\text{取}y=kx,k\neq0,1}{=\!=\!=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+k^2x^2}{x^2+k^2x^2+(1-k)^2x^2}$

$=\dfrac{1+k^2}{1+k^2+(1-k)^2}$, 结果随着 k 变化而变化, 故该极限不存在

【二元函数极限的求解方法总结】:

①除了一元函数极限中的洛必达法则以外, 其他计算方法与运算法则二元函数极限均可使用.

②求二元函数极限可分三步走:

(a) 若可代换成一元函数极限, 则代换后使用一元函数极限方法求解. 目的在于转化到自己熟悉的领域去求解.

(b) 若代换方法不好使, 则不妨在原极限函数上加上绝对值, 放缩求解一般在极限结果为0时, 使用夹逼准则有效, 若夹逼出非0数, 则得不到极限最终结果.

第二十讲　多元函数的极限、连续、偏导、微分

一、求极限

(1) 利用连续性；(2) 利用两边夹方法；(3) 利用极坐标代换；(4) 转化为一元函数极限；(5) 选择不同的极限路径，证明极限不存在.

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{\sin xy}{x},(a\neq 0)$.

3. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$.

4. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\dfrac{x^2+y^2}{e^{x+y}}$.

5. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$，$a$ 为常数.

6. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

7. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2x^3-3y^4}{3x^2-2xy+y^2}$.

8. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2+y^4}$.

9. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$.

10. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(y-x)^2}$.

11. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3y+xy^4+x^2y}{x+y}$.

二、讨论函数连续性

1. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$.

2. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y^2}} & y\neq 0\\ 0 & y=0\end{cases}$.

3. $f(x,y)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{y} & y\neq 0\\ 0 & y=0\end{cases}$.