2015 级高等数学 II 试卷

一、填空题与选择（每小空 3 分，共 18 分）

1 设向量$\vec{a}=(-2,3,1)$，$\vec{b}=(o,-1,5)$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=$ ＿＿＿＿＿＿，$\vec{a}\times\vec{b}=$ ＿＿＿＿＿＿。

2 微分方程$y''=x^2-e^x$的通解是 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

3 设函数$f(x,y)=\frac{3xy}{x^2+y^2}$，则$f(-1,1)=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿。

4 若$z=y^2 sinx$，则$\frac{\partial z}{\partial x}=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿ ，$\frac{\partial z}{\partial x}=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿。

5 设$z=x^4+y^4-x^2y^2$，则$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$=(　　　)

A　$4xy$　　　B　$-4xy$　　　C　$-4x$　　　D　$4y$

6 若积分区域 D 为$x^2+y^2\le a^2$，则二重积分$\iint_D dxdy=$（　　　）

A　πa^2　　　B　$2\pi a$　　　C　$2\pi a^2$　　　D　a^2

二、计算与求解题（每小题 8 分，共 72 分）

7　求微分方程 $(x^2y+y)dy-(x+xy^2)dx=0$ 满足初始条件$y(0)=1$的特解。

8　设$z=z^2\sin(x-y)$，求函数的一阶偏导数。

9　设若$z=e^{xy^2}$，求全微分dz。

10 计算二重积分$\iint_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$，其中 D 是由双曲线$xy=1$，直线$x=2$和$y=x$围成的区域。

11 计算对坐标的曲线积分$\int_L (x+y)dx+(y-x)\mathrm{d}y$，其中积分路径 L 为从(0,0)到(2 ,4)的直线段。

12 计算三重积分$\iiint_G x^3\,y^2zdxdydz$，

$$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,0\le x\le 1,\ -1\le y\le 2,\ 0\le z\le 3\}$$

13 计算曲线积分$\int_L \sqrt{y}\,ds$，其中 L 为抛物线$y=x^2$上点(0,0)到点(2 ,4)的一段。

14 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}$的敛散性，如果收敛，请求其和。

15 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{2^n\sqrt{n}}$的收敛域。

三 应用题(10 分)

16 求由圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$和旋转抛物面$z=6-x^2-y^2$所围成的立体体积。

四、（附加题）（8 分）

17 设$2\,sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$，证明：$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$。

桂林电子科技大学信息科技学院试卷答案

2015－2016 学年第二学期试卷答案　　　　课程名称:《高等数学 II》A 卷

一、填空题与选择（每小空 3 分，共 18 分）

1.　2、(16,10,2)　　2.　$y=\frac{1}{12}x^4-e^x+C_1x+C_2$　　3.　$-\frac{3}{2}$　　4.　$y^2\cos x$ 、$2y\sin x$

5.　B　　6.　A

二、计算与求解题（每小题 8 分，共 72 分）

7. (8 分) 解：分离变量：$\frac{y}{1+y^2}dy=\frac{x}{1+x^2}dx$　　（3 分）

两边积分得：$\ln(1+y^2)=\ln(1+x^2)+\ln C$　　（5 分）

求出：
$$1+y^2=C(1+x^2)$$
$$y^2=C(1+x^2)-1$$
（6 分）

将 $y(0)=1$　代入上式，解出　$C=2$

故　$y^2=2(1+x^2)-1=2x^2+1$　　（8 分）

8. (8 分)

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\sin(x-y)+x^2\cos(x-y)$　　（4 分）

$\frac{\partial z}{\partial y}=-x^2\cos(x-y)$

（8 分）

9.(8 分)

解：因 $\frac{\partial z}{\partial x}=y^2e^{xy^2}$　　（3 分）

$\frac{\partial z}{\partial y}=2xye^{xy^2}$　　（6 分）

故：$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$

$=y^2e^{xy^2}dx+2xye^{xy^2}dy$　　（8 分）

10(8 分) 解：由题意知 $1\le x\le 2$, $\frac{1}{x}\le y\le x$,　　（3 分）

故：$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}dy$

$$=\int_1^2 (x^3-x)dx \qquad （6 分）$$

$$=(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2)\Big|_1^2 \quad =\frac{9}{4} \qquad （8 分）$$

11. (8 分) 解：由 L 经过（0,0)，(2,4）得 $y=2x$ ，$0\le x\le 2$ （2 分）

令 $\begin{cases} x=t \\ y=2t \end{cases}$ $\quad 0\le t\le 2$ （4 分）

故：$\int_L (x+y)dx+(y-x)dy=\int_0^2 (3tdt+2tdt)$ （6 分）

$$=\int_0^2 5tdt \quad =10 \qquad （8 分）$$

12. (8 分) 解：

$$\iiint_G x^3y^2zdxdydz=\int_0^1 x^3dx\int_{-1}^2 y^2dy\int_0^3 zdz \qquad （4 分）$$

$$=\frac{1}{4}x^4\Big|_0^1\cdot\frac{1}{3}y^3\Big|_{-1}^2\cdot\frac{1}{2}z^2\Big|_0^3 \qquad （6 分）$$

$$=\frac{1}{4}\times 3\times\frac{9}{2}=\frac{27}{8} \qquad （8 分）$$

13.(8 分) 解：

令 $\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \end{cases}$ $\quad 0\le t\le 2$ （2 分）

则 $\int_L \sqrt{y}ds=\int_0^2 t\sqrt{1+4t^2}dt$ （4 分）

$$=\frac{1}{8}\int_0^2 \sqrt{1+4t^2}d(1+4t^2)$$

$$=\frac{1}{12}(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 \qquad （6 分）$$

$$=\frac{17\sqrt{17}-1}{12} \qquad （8 分）$$

14.(8 分) 解：由于

$$s_n=\frac{2}{1\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{2}{n\cdot(n+1)} \qquad （2 分）$$

$$=2\left[(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})\right] \qquad （4 分）$$

$=2(1-\frac{1}{n+1})$ （6 分）

由 $\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}2(1-\frac{1}{n+1})=2$ 可知，所给级数收敛，其和为 2. （8 分）

15. (8 分)解： 令 $t=x+3$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{2^n\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{2^n\sqrt{n}}$， （2 分）

由于 $\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n+1}\sqrt{n+1}}\times 2^n\sqrt{n}=\frac{1}{2}$， （4 分）

则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{2^n\sqrt{n}}$ 的收敛半径 $R=2$， （5 分）

当 $t=2$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{2^n\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散， （6 分）

当 $t=-2$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{2^n\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛， （7 分）

所以 $-2\le x+3<2$，即 $-5\le x<-1$ 为原级数的收敛域. （8 分）

三、应用题（10 分）

16. (10 分)解：

根据两曲面可以确定积分区域 D： $x^2+y^2\le 4$

令 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ $0\le\theta\le 2\pi$，$0\le r\le 2$，则 （3 分）

则 $V=\iint\limits_D(6-x^2-y^2-\sqrt{x^2+y^2})dxdy$ （5 分）

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(6-r^2-r)rdr$ （6 分）

$=\int_0^{2\pi}\frac{16}{3}d\theta=\frac{32}{3}\pi$ （8 分）

五、（附加题）（8 分）

17. (8 分)解：令 $F(x,y,z)=2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z$，则 （2 分）

$F_x=2\cos(x+2y-3z)-1$、$F_y=4\cos(x+2y-3z)-2$、$F_z=-6\cos(x+2y-3z)+3$

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{2\cos(x+2y-3z)-1}{6\cos(x+2y-3z)-3}$、$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{4\cos(x+2y-3z)-2}{6\cos(x+2y-3z)-3}$ （6 分）

故有 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2\cos(x+2y-3z)-1}{6\cos(x+2y-3z)-3}+\dfrac{4\cos(x+2y-3z)-2}{6\cos(x+2y-3z)-3}=1$ （8 分）