学号：＿＿＿＿ 姓名：＿＿＿＿ 班级：＿＿＿＿ 专业：＿＿＿＿ 学院：＿＿＿＿

装 订 线

浙江海洋大学 2019–2020 学年第 一 学期

《概率统计 A》 第二章试卷（A 卷）

（适用班级 经管类 ）　　　　考试时间：100 分钟

一	二	三	总　分

一、单选题 (共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分)

1. 设随机变量 $X \sim B(4, 0.2)$, 则 $P\{X > 3\} =$ (A)

(A) 0.0016;　(B) 0.0272;　(C) 0.4096;　(D) 0.8192.

2. 设随机变量 X 的分布函数 $F(x)$, 下列结论不一定成立的是 (D)

(A) $F(+\infty) = 1$;　(B) $F(-\infty) = 0$;

(C) $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$;　(D) $F(x)$ 为连续函数.

3. 设随机变量 X 的取值范围是 $(-1, 1)$, 以下可以作为 X 的概率密度的是 (A)

(A) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & -1 < x < 1, \\ 0, & 其它; \end{cases}$　(B) $f(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x < 1, \\ 0, & 其它; \end{cases}$

(C) $f(x) = \begin{cases} x, & -1 < x < 1, \\ 0, & 其它; \end{cases}$　(D) $f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 < x < 1, \\ 0, & 其它. \end{cases}$

4. 已知随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)$, 则 $Y = -2X$ 的概率密度为 (D)

(A) $2f_X(-2y)$;　(B) $f_X\left(-\dfrac{y}{2}\right)$;　(C) $-\dfrac{1}{2}f_X\left(-\dfrac{y}{2}\right)$;　(D) $\dfrac{1}{2}f_X\left(-\dfrac{y}{2}\right)$.

5. 设随机变量 $X \sim N(\mu, 2^2)$, $Y \sim N(\mu, 3^2)$ 记 $p_1 = P\{X \leqslant \mu - 2\}$, $p_2 = P\{Y \geqslant \mu + 3\}$, (A)

(A) 对任意实数 μ, 有 $p_1 = p_2$;　(B) 对任意实数 μ, 有 $p_1 < p_2$;

(C) 对任意实数 μ, 有 $p_1 > p_2$;　(D) 对 μ 的个别值, 有 $p_1 = p_2$.

二、填空题 (共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分)

1. 设离散型随机随机变量 X 的分布律为 $\begin{array}{c|ccc} X & -1 & 0 & 1 \\ \hline P & 2c & 0.4 & c \end{array}$, 则常数 $c =$ 0.2 .

2. 已知随机变量 X 的分布函数为 $\begin{cases} 0, & x \leqslant -6, \\ \dfrac{x+6}{12}, & -6 < x < 6, \\ 1, & x \geqslant 6, \end{cases}$ 则当 $-6 < x < 6$ 时, X

的概率密度为 $f(x)=$ $\underline{\frac{1}{12}}$.

3. 设随机随机变量 X 的分布律为

X	-1	0	1	2
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{7}{16}$

, 且 $Y=X^2$, 记随机变量 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$, 则 $F_Y(3)=$ $\underline{\frac{9}{16}}$.

4. 已知随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 且 $P\{X=0\}=\mathrm{e}^{-1}$, 则 $\lambda=$ $\underline{1}$.

5. 设 $X\sim N(5,3^2)$, 且 $P\{X\geqslant c\}=P\{X\leqslant c\}$, 则常数 $c=$ $\underline{5}$.

三、**解答题** (共 6 小题，每小题 10 分，共 60 分．要求写出详细步骤)

1. 已知连续型随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{c}{\sqrt{1-x^2}}, & 0<x<1,\\ 0, 其它.\end{cases}$ 求

(I) 常数 c; (II) 随机变量 X 的分布函数; (III) 计算 $P\left\{-1\leqslant X\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

解 (I) 由 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 c\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=c\cdot\arcsin x|_0^1=\dfrac{\pi}{2}c=1$,, 得 $c=\dfrac{2}{\pi}$.

(II) $F(x)=\int_{\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ \int_0^x\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t, & 0<x<1,\\ 1, & x\geqslant 1,\end{cases}=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{2}{\pi}\arcsin x, & 0<x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

(III) $P\left\{-1\leqslant X\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}=F\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)-F(-1)=\dfrac{1}{2}$.

2. 已知 X 的分布律为:

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

, 求 $Y=(X-2)^2$ 的分布律.

解 记 $g(x)=(x-2)^2$. 由于 $g(0)=g(4)=4$, $g(1)=g(3)=1$, $g(2)=0$, $g(5)=9$. 因此

$$P\{Y=0\}=P\{X=2\}=\tfrac{1}{3},$$
$$P\{Y=1\}=P\{X=1\}+P\{X=3\}=\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{12}=\tfrac{1}{4},$$
$$P\{Y=4\}=P\{X=0\}+P\{X=4\}=\tfrac{1}{12}+\tfrac{2}{9}=\tfrac{11}{36},$$
$$P\{Y=9\}=P\{X=5\}=\tfrac{1}{9}.$$

故 Y 的分布律为:

Y	0	1	4	9
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{9}$

3. 设有 10 件产品, 其中有 2 件次品, 从中任取 3 件, 设取到的次品数为 X, 求 X 的分布律及分布函数.

解 X 的可能取值为 0, 1, 2, $P\{X=0\}=\dfrac{C_8^3}{C_{10}^3}=\dfrac{7}{15}$, $P\{X=1\}=\dfrac{C_2^1C_8^2}{C_{10}^3}=\dfrac{7}{15}$, $P\{X=2\}=\dfrac{C_2^2C_8^1}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{15}$, 故 X 的分布律为:

X	0	1	2
P	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$

X 的分布函数 $F(x)=P\{X\leqslant x\}=\sum\limits_{x_k\leqslant x}p_k$, 故

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{7}{15}, & 0\leqslant x<1,\\ \frac{7}{15}+\frac{7}{15}, & 1\leqslant x<2,\\ \frac{7}{15}+\frac{7}{15}+\frac{1}{15}, & x\geqslant 2.\end{cases}=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{7}{15}, & 0\leqslant x<1,\\ \frac{14}{15}, & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

4. 现有同型设备 300 台, 各台设备的工作是相互独立的, 发生故障的概率都是 0.01. 设一台设备的故障可由一名维修工人处理, 问至少需配备多少名维修工人, 才能保证设备发生故障但不能及时维修的概率小于 0.01?

解 设需要配备 N 名工人, X 为同一时刻发生故障的设备的台数, 则 $X\sim B(300,0.01)$. 所需解决的问题是确定 N 的最小值, 使 $P\{X\leqslant N\}\geqslant 0.99$.

(I) 利用二项分布作精确计算.

$$P\{X\leqslant N\}\approx\sum_{k=0}^{N}C_N^k 0.01^k(1-0.01)^{N-k},$$

故问题转化为求 N 的最小值, 使 $\sum\limits_{k=0}^{N}C_N^k 0.01^k(1-0.01)^{N-k}\geqslant 0.99$,

利用 Matlab 中的 binoinv(0.99,300,0.01) 可求得, 当 $N\geqslant 8$ 时, 上式成立. 因此, 为达到上述要求, 至少需配备 8 名维修工人.

(II) 利用泊松定理作近似计算. 因 $np=\lambda=3$, 由泊松定理

$$P\{X>N\}\approx\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{3^k}{k!}\mathrm{e}^{-3},$$

故问题转化为求 N 的最小值, 使 $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty}\dfrac{3^k}{k!}\mathrm{e}^{-3}<0.01$,

查泊松分布表可利用 Matlab 中的 poissinv(0.99,300,0.01) 可求得, 当 $N\geqslant 8$ 时, 上式成立. 因此, 为达到上述要求, 至少需配备 8 名维修工人.

5. 设打一次电话所用时间 X (分钟) 服从参数为 $\lambda = 0.1$ 的指数分布, 如某人刚好在你前面走进电话间, 求你等待的时间:

(I) 超过 10 分钟的概率; (II) 在 10 分钟到 20 分钟之间的概率.

解 因为 $X \sim E(0.1)$, 则

X 的 pdf 为: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}\mathrm{e}^{-\frac{x}{10}}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases}$ X 的 cdf 为: $F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{10}}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases}$

故

(I) $P\{X > 10\} = 1 - F(10) = \mathrm{e}^{-1}$. 或 $P\{X > 10\} = \int_{10}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-1}$.

(II) $P\{10 < X < 20\} = F(20) - F(10) = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-2}$. 或 $P\{10 < X < 20\} = \int_{10}^{20} f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-2}$.

6. 设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, 求随机变量 $Y = \mathrm{e}^X$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

解 $F_Y(y) = P\{Y \leqslant y\} = P\{\mathrm{e}^X \leqslant y\}$

$$= \begin{cases} 0, & y < 0, \\ P\{X \leqslant \ln y\}, & y \geqslant 0. \end{cases} = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ F_X(\ln y), & y \geqslant 0. \end{cases},$$

因此, $f_Y(y) = F_Y'(y)$

$$= \begin{cases} 0, & y < 0, \\ f_X(\ln y)(\ln y)', & y \geqslant 0. \end{cases} = \begin{cases} 0, & y < 1, \\ \mathrm{e}^{(-\ln y)}(\ln y)', & y \geqslant 1. \end{cases} = \begin{cases} 0, & y < 1, \\ \dfrac{1}{y^2}, & y \geqslant 1. \end{cases}$$