目 录

第一天

【习题】

1、已知 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，则 $\varphi(x)=$______.

2、设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求 $f(x)$.

3、设 $f(x)=\begin{cases}0, x<0\\ 1, x\geqslant 0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}2-x2, |x|<1\\ |x|-2, |x|\geqslant 1\end{cases}$，试求 $g[f(x)]$.

4、求函数 $f(x)=\begin{cases}x, x<1\\ x^2, 1\leqslant x\leqslant 4\\ 2^x, x>4\end{cases}$，求 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$.

5、设函数 $f(x)=x\tan x\cdot \mathrm{e}^{\cos x}$，则 $f(x)$ 是（ ）.

（A）偶函数 （B）有界函数 （C）周期函数 （D）单调函数

6、设函数 $f(x)$ 的奇函数，且是周期为 4 的周期函数.已知当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=x^2-2x$，求 $f(x)$ 在 $[2,4]$ 上的解析式.

第二天

【习题】

1、设 $f(x)=\begin{cases}2x-1,x>0\\0,x=0\\1+x^2,x<0\end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 为（ ）

（A）不存在 （B）-1 （C）0 （D）1

2、求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4^{-x}+(x^2+\ln|x|+1)^{10}}{2^{1-2x}+x^{1000}}$

3、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-1}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}$

4、求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{(1-\cos\sqrt{x})\arctan\dfrac{x}{2}}$

5、求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)^{10}}{(2x^3+1)^2(x^2+1)^2}$

6、求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$

第三天

【习题】

1、求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x+x^3}{3^{x+1}-x^{10}+\ln(x^{100}+1)}$

2、求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2+1}-\mathrm{e}}{\ln\cos x}$

3、求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{\tan x}-\mathrm{e}^{\sin x}}{\ln(1-x^3)}$

4、求极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{\dfrac{1+2x}{2+x}}-1}{\ln x}$

5、求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^2}{1+x}\arcsin\dfrac{x^2+1}{(2x+1)^3}$

6、求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$

第四天

【习题】

1、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}$

2、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-2x}{\arcsin\left(\dfrac{x}{6}\right)\ln(1+x^2)}$

3、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln\cos x}{\arctan x-x}$

4、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x-x}{1-\sqrt[3]{1-\sin^2 x}}$

5、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$

6、求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(x-x^2\ln(1+\dfrac{1}{x}))$

第五天

【习题】

1、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(x+\mathrm{e}^x)^{\frac{1}{x}}$

2、求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}$

3、求极限 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$

4、求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+x^2}{1-2x+x^2}\right)^x$

5、求极限 $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+\mathrm{e}^x)^{\frac{1}{x}}$

6、求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}$

第六天

【习题】

1、当 $x\to 0$ 时，无穷小量 $\sin 2x-2\sin x$ 是 x^2 的（　）无穷小.

（A）高阶　（B）低阶　（C）等价　（D）同阶但非等价

2、$x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是 $x\sin x^n$ 的高价无穷小，而 $x\sin x^n$ 是 $e^{x^2}-1$ 的高价无穷小，则正整数 n 等于（　）

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4

3、$x\to 0^+$ 时，下列无穷小量中与 $\sqrt{x}$ 等价的是（　）

（A）$1-e^{\sqrt{x}}$　（B）$\ln(1+\sqrt{x})$　C）$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　（D）$1-\cos\sqrt{x}$

4、下面哪个函数在其定义域内不连续（　）

（A）$f(x)=\begin{cases}x+1,x>0\\x-1,x<0\end{cases}$　（B）$f(x)=\begin{cases}2x-1,x>1\\x^2,x\leqslant 1\end{cases}$

（C）$f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+x}$　（D）$f(x)=\begin{cases}e^x-1,x>0\\x^2+1,x\leqslant 0\end{cases}$

5、讨论 $f(x)=\begin{cases}|x-1|,|x|>1\\\cos\dfrac{\pi x}{2},|x|\leqslant 1\end{cases}$ 的连续性.

6、补充定义 $f(0)$ 使得函数 $f(x)=(1+mx)^{\frac{n}{x}}(m,n>0)$ 在 $x=0$ 处连续.

第七天

【习题】

1、设函数 $f(x)=\begin{cases} a+bx^2, x\leqslant 0 \\ \dfrac{\sin bx}{x}, x>0 \end{cases}$ 在 R 上连续，求 a， b 应该满足的关系.

2、设函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}, x<0 \\ b, x=0 \\ \dfrac{a+\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}, x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a， b .

3、设函数 $f(x)=\dfrac{x}{a+\mathrm{e}^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$，则常数 a， b 应满足（　）

（A） $a<0$， $b<0$.　（B）（B） $a>0$， $b>0$.

（C） $a\leqslant 0$， $b>0$.　（D） $a\geqslant 0$， $b<0$.

4、设函数 $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（　）

（A）可去间断点　（B）跳跃间断点

（C）无穷间断点　（D）振荡间断点

5、设函数 $f(x)=[x]\sin\dfrac{1}{x}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（　）

（A）可去间断点　（B）跳跃间断点

（C）无穷间断点　（D）振荡间断点

6、找出函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ $(x>-1)$ 的间断点，并说明其类型

第八天

【习题】

1、利用定义计算 $f(x)=\sqrt{x}$（$x>0$）的导数

2、利用定义计算 $f(x)=\cos x$ 在 $x=0$ 处的导数

3、根据导数的定义，求 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的导数.

4、求 $f(x)=|\sin x|$ 在 $x=0$ 处的左右导数

5、求 $f(x)=\sqrt{1-\cos x}$ 在 $x=0$ 处的左右导数

6、求 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x}, x>0\\ \dfrac{e^{-x}+1}{2}, x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的左右导数

第九天

【习题】

1、已知 $f(x)=\begin{cases}|x|^{1+a}\sin\dfrac{1}{x},x\neq 0\\ 0,x=0\end{cases}$，其中 $a>0$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　　）

（A）极限不存在　　（B）极限存在但不连续

（C）连续但不可导　　（D）可导

2、$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$，$f(x)$ 在 $x=0$ 处（　　）

（A）极限不存在　　（B）极限存在但不连续

（C）连续但不可导　　（D）可导

3、$f(x)=\begin{cases}x^2,x>0\\ ax+b,x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，求 a，b.

4、已知 $f(x)=\begin{cases}xe^x,x>0\\ ax^2,x\leqslant 0\end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　　）

（A）不连续　　（B）左右导数都存在但不相等

（C）可导　　（D）可导性与 a 的取值有关

5、函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x},x>0\\ ae^x+b,x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，求 a，b.

6、设 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=2$，$f'(2)=$______.

第十天

【习题】

1、$y=f(\frac{x-2}{3x+2})$，$f'(x)=\arctan x^2$，则$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=$（　）

（A）π　（B）$\frac{\pi}{3}$　（C）$\frac{\pi}{2}$　（D）$\frac{\pi}{4}$

2、已知$f'(x)=\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$，则$\mathrm{d}f(\sqrt{1-x^2})=$（　）

（A）$-2x\mathrm{d}x$　（B）$-\frac{2x}{|x|}\mathrm{d}x$　（C）$-\frac{1}{\sqrt{1-x2}}\mathrm{d}x$　（D）$\frac{2}{\sqrt{1-x2}}\mathrm{d}x$

3、设$y=(\sin x)^{\cos^2 x}$，则$y'=$

4、设$y=\mathrm{e}^{3u}$，$u=f(t)$，$t=\ln x$，其中$f(u)$可微，则$\mathrm{d}y=$

5、设$y\sin x-\cos(x-y)=0$，则$\mathrm{d}y=$

6、由方程$x^y=y^x$确定$x=x(y)$，则$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=$

第十一天

【习题】

1、求导数 $y=\arcsin(x^2)$

2、求导数 $y=(1+\sin x)^x$

3、求导数 $y=(x+\cos x)^{\arctan x}$

4、求导数 $y=\cos^x x$

5、求导数 $y=\sin(x^{\sqrt{x}})$

6、设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^y+xy=\mathrm{e}$ 所确定，求 $y''(0)$.

第十二天

【习题】

1、设$\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$，求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

2、设$\begin{cases} x=t^2+1 \\ y=\cos t \end{cases}$，求$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

3、设$\begin{cases} x=\ln\sqrt{1+t^2} \\ y=\arctan t \end{cases}$，求$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

4、设$f(t)$三阶可导，$f''(t)\neq 0$，设$\begin{cases} x=f'(t) \\ y=tf'(t)-f(t) \end{cases}$，试求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$，$\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}$.

5、设函数$y=\dfrac{1}{2x+3}$，则$y^{(n)}(0)=$

6、设$f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求$f^{(n)}(x)$.

启航龍图 SAILING EDUCATION GROUP

第十三天

【习题】

1、求不定积分$\int(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x3}-1)\mathrm{d}x$

2、求不定积分$\int\frac{1+x^2+x}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$

3、求不定积分$\int\left(2\mathrm{e}^x+\frac{3}{x}\right)\mathrm{d}x$

4、求不定积分$\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x$

5、求不定积分$\int\frac{x-\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

6、求不定积分$\int\frac{\mathrm{e}^{3x}+1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$

第十四天

【习题】

1、求不定积分$\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\mathrm{d}x$

2、求不定积分$\int \frac{x}{4+x^4}\mathrm{d}x$

3、求不定积分$\int \frac{x^3}{x^8-2}\mathrm{d}x$

4、求不定积分$\int \sin\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$

5、求不定积分$\int \frac{1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$

6、求不定积分$\int \frac{1}{x\ln x\ln\ln x}\mathrm{d}x$

第十五天

【习题】

1、求不定积分 $\int \sin^5 x \cos x \mathrm{d}x$

2、求不定积分 $\int \cot x \mathrm{d}x$

3、求不定积分 $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} \mathrm{d}x$，（$|a| \neq |b|$）

4、求不定积分 $\int \sin^4 x \mathrm{d}x$

5、求不定积分 $\int \tan^3 x \mathrm{d}x$

6、求不定积分 $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} \mathrm{d}x$

参考答案

第一天

1【答案】$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$ （$x\leqslant 0$）

【解析】由由已知 $e^{\varphi(x)^2}=1-x$，所以 $\varphi(x)^2=\ln(1-x)$

.又 $\varphi(x)\geqslant 0$，则 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$ （$x\leqslant 0$）

2【答案】$f(x)=x^2-2$

【解析】令 $t=x+\frac{1}{x}$，则 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$ 可以表示为 $f(t)=t^2-2$

3【答案】$g\left[f(x)\right]=\begin{cases}2,x<0\\-1,x\geqslant 0\end{cases}$

【解析】当 $g(x)<0$，$f\left[g(x)\right]=0$，此时 $1\leqslant|x|<2$；当 $g(x)\geqslant 0$，$f\left[g(x)\right]=1$，此时 $|x|<1$ 或 $|x|\geqslant 2$.

当 $x<0$，$|f(x)|=0$，则 $g\left[f(x)\right]=2-x^2=2$；当 $x\geqslant 0$，$|f(x)|=1$，则 $g\left[f(x)\right]=|x|-2=1$.

4【答案】$f^{-1}(x)=\begin{cases}x,x<1\\\sqrt{x},1\leqslant x\leqslant 16\\\frac{\ln x}{\ln 2},x>16\end{cases}$

【解析】当 $x<1$ 时，$y<1$；$1\leqslant x\leqslant 4$ 时，$1\leqslant y\leqslant 16$；$x>4$ 时，$y>16$；故反函数为：$x<1$ 时，$f^{-1}(x)=x$；$1\leqslant x\leqslant 16$ 时，$f^{-1}(x)=\sqrt{x}$；$x>16$ 时，$f^{-1}(x)=\frac{\ln x}{\ln 2}$.

5【答案】（A）.

【解析】$f(-x)=(-x)\tan(-x)e^{\cos(-x)}=x\tan xe^{\cos x}=f(x)$，为偶函数.

6【答案】$f(x)=-x^2+6x-8$

【解析】$f(x)$ 为奇函数，$f(-x)=-f(x)$.当 $x\in\left[-2,0\right]$ 时，$-x\in\left[0,2\right]$，

$f(-x)=(-x)^2-2(-x)=x^2+2x$，则 $f(x)=-x^2-2x$.又 $f(x)$ 周期为 4，当 $x\in\left[2,4\right]$ 时，$x-4\in\left[-2,0\right]$，$f(x)=f(x-4)=-(x-4)^2-2(x-4)=-x^2+6x-8$.

第二天

1【答案】（A）

【解析】$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}2x-1=-1$；$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}1+x^2=1$，左右极限不等.

2【答案】$\dfrac{1}{2}$

【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4^{-x}+(x^2+\ln|x|+1)^{10}}{2^{1-2x}+x^{1000}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4^{-x}}{2^{1-2x}}=\dfrac{1}{2}$

3【答案】6

【解析】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^3}-1}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3}{\frac{1}{3}x^2\cdot\frac{1}{2}\sin x}=6$

4【答案】1

【解析】$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{(1-\cos\sqrt{x})\arctan\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\sqrt{1+\cos x-1}}{(1-\cos\sqrt{x})\arctan\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{x^2}{4}}{\frac{(\sqrt{x})^2}{2}\cdot\frac{x}{2}}=1$

5【答案】$\dfrac{1}{4}$

【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)^{10}}{(2x^3+1)^2(x^2+1)^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{10}}{(2x^3)^2(x^2)^2}=\dfrac{1}{4}$

6【答案】$\dfrac{1}{2}$

【解析】$\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+x}=\dfrac{1}{2}$

第三天

1【答案】$\frac{1}{3}$

【解析】$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^x+x^3}{3^{x+1}-x^{10}+\ln(x^{100}+1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^x}{3^{x+1}}=\frac{1}{3}$

2【答案】$-2\mathrm{e}$

【解析】$\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{x^2+1}-\mathrm{e}}{\ln\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}(\mathrm{e}^{x^2}-1)}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}\cdot x^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-2\mathrm{e}$

3【答案】$-\frac{1}{2}$

【解析】$\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{\tan x}-\mathrm{e}^{\sin x}}{\ln(1-x^3)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}(\mathrm{e}^{\tan x-\sin x}-1)}{-x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{-x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{-x^3}=-\frac{1}{2}$

4【答案】$\frac{1}{6}$

【解析】$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{\frac{1+2x}{2+x}}-1}{\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{1+\frac{x-1}{2+x}}-1}{\ln(1+x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{2+x}}{x-1}=\frac{1}{6}$

5【答案】$\frac{1}{8}$

【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x^2}{1+x}\arcsin\frac{x^2+1}{(2x+1)^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x^2}{1+x}\cdot\frac{x^2+1}{(2x+1)^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x}\cdot\frac{x^2}{(2x)^3}=\frac{1}{8}$

6【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}$

第四天

1【答案】1

【解析】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\cos x(\sec^2 x-1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\cos x\tan^2 x}=1$

2【答案】-8

【解析】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x-2x}{\arcsin\left(\dfrac{x}{6}\right)\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\dfrac{(2x)^3}{6}}{\dfrac{x}{6}\cdot x^2}=-8$

3【答案】$\dfrac{3}{2}$

【解析】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln\cos x}{\arctan x-x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(\cos x-1)}{\arctan x-x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\dfrac{1}{2}x^3}{\arctan x-x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\dfrac{3}{2}x^2}{\dfrac{1}{1+x^2}-1}=\dfrac{3}{2}$

4【答案】3

【解析】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-\cos x-x}{1\sqrt[3]{1-\sin^2 x}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-\cos x-x}{\dfrac{1}{3}x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+\sin x-1}{\dfrac{2}{3}x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+\cos x}{\dfrac{2}{3}}=3$

5【答案】$\dfrac{1}{6}$

【解析】$\lim\limits_{x\to0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x}{\sin x}\cdot\dfrac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{6}x^3}{x^3}=\dfrac{1}{6}$

6【答案】$\dfrac{1}{2}$

【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}(x-x^2\ln(1+\dfrac{1}{x}))=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{1-\dfrac{1}{1+t}}{2t}=\dfrac{1}{2}$

第五天

1【答案】e^2

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{x+e^x-1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{1+\frac{e^x-1}{x}}=e^2$

2【答案】$e^{\frac{\pi}{2}}$

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\pi(\cos\sqrt{x}-1)}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\pi(-\frac{x}{2})}{x}}=e^{\frac{\pi}{2}}$

3【答案】e^{-1}

【解析】$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}e^{\tan 2x(\tan x-1)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}e^{\sin 2x\frac{(\tan x-1)}{\cos 2x}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}e^{\frac{\sec^2 x}{-2\sin 2x}}=e^{-1}$

4【答案】e^2

【解析】$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+x^2}{1-2x+x^2}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2x+1}{1-2x+x^2}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}e^{x\frac{2x+1}{(x-1)^2}}=e^2$

5【答案】e

【解析】$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln(x+e^x)}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{e^x+1}{e^x+x}}=e$

6【答案】1

【解析】$\lim\limits_{x\to 0^+}(\dfrac{1}{\sqrt{x}})^{\tan x}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\tan x\ln(\frac{1}{\sqrt{x}})}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{x(-\frac{1}{2}\ln x)}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{-\frac{1}{2}\ln x}{\frac{1}{x}}}=1$

第六天

1【答案】（A）

【解析】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin x(\cos x-1)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x^3}{x^2}=0$

2【答案】（B）

【解析】$1-\cos x\sim x^2$，$\ln(1+x^2)\sim x^2$，$x\sin x^n\sim x^{n+1}$，$e^{x^2}-1\sim x^2$，故$2<n+1<4$.

3【答案】（B）

【解析】$1-e^{\sqrt{x}}\sim-\sqrt{x}$，$\ln(1+\sqrt{x})\sim\sqrt{x}$，$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1\sim\dfrac{1}{2}\sqrt{x}$，$1-\cos\sqrt{x}\sim\dfrac{1}{2}x$.

4【答案】（D）

【解析】选项（A）：当$x>0$时，$f(x)$为初等函数，连续；当$x>0$时，亦然.

选项（B）：$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}x^2=1$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}2x-1=1$，连续.

选项（C）：$f(x)$为初等函数，初等函数在其定义域内连续.

选项（D）：$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}x^2+1=1$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}e^x-1=0$.

5【答案】$x=1$为连续点；$x=-1$为跳跃间断点

【解析】$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\cos\dfrac{\pi x}{2}=0$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}|x-1|=0$，$x=1$为连续点；

$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}|x-1|=2$，$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\cos\dfrac{\pi x}{2}=0$，$x=-1$为跳跃间断点.

6【答案】e^{mn}

【解析】$f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}(1+mx)^{\frac{n}{x}}=\lim\limits_{x\to0}(1+mx)^{\frac{1}{mx}mn}=e^{mn}$

第七天

1【答案】$a=b$

【解析】$f(x)$ 在 R 上连续，只需保证在 $x=0$ 处连续即可，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}a+bx^2=a$，

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin bx}{x}=b$. $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)=a$，即 $a=b$.

2【答案】$a=b=0$

【解析】$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^2}{x}\sin\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{a+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}=a$，

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)=b$，即 $a=b=0$.

3【答案】（D）

【解析】因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，$f(x)$ 要有意义，即 $a+e^{bx}$ 恒不为 0，

又因 $e^{bx}>0$ 则 $a\geqslant0$.又 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，所以当 $x\to-\infty$ 时，$a+e^{bx}$ 极限应为无穷，则 $b<0$.

4【答案】（B）

【解析】$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=-1$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}}{2^{\frac{1}{x}}}=1$

5【答案】（D）

【解析】$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}[x]\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}-\sin\dfrac{1}{x}$，极限不存在.

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}[x]\sin\dfrac{1}{x}=0$

6【答案】$x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点.

【解析】可疑点 $x=0$，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}=e$

第八天

1【答案】$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

【解析】$f(x)$ 在 x_0 的导数为 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$，

则 $f(x)$ 在点 x 处的导数为 $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

2【答案】0

【解析】$f(x)$ 在点 $x=0$ 处的导数为：$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x}=0$.

3【答案】$-\frac{1}{x^2}$

【解析】$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{\Delta x(x+\Delta x)x}=-\frac{1}{x^2}$

4【答案】$f'_-(0)=-1$，$f'_+(0)=1$

【解析】$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|\sin x|-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-\sin x}{x}=-1$，$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|\sin x|-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$.

5【答案】$f'_-(0)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$f'_+(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\cos x}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{\frac{1}{2}x^2}}{x}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$；

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-\cos x}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{\frac{1}{2}x^2}}{x}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6【答案】$f'_-(0)=f'_+(0)=-\frac{1}{2}$

【解析】左导数为 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{e^{-x}+1}{2}-1}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{2}\cdot\frac{-x}{x}=-\frac{1}{2}$；

右导数为 $f'_{+}(0)=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{\dfrac{\ln(1+x)}{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^{2}}=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{\dfrac{1}{1+x}-1}{2x}=-\dfrac{1}{2}$

第九天

1【答案】（D）

【解析】因为 $a>0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}|x|^{1+a}=0$.当 $x\to 0$ 时，$\sin\dfrac{1}{x}$ 为有界量.

所以 $\lim\limits_{x\to 0}|x|^{1+a}\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. $f(x)$ 在 $x=0$ 处左、右导数分别为：

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}-|x|^a\sin\dfrac{1}{x}=0$，$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}|x|^a\sin\dfrac{1}{x}=0$，

$f'_-(0)=f'_+(0)$，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

2【答案】（C）

【解析】由于 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. $f(x)$ 在 $x=0$ 处导数分别为：

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$（不存在），故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

3【答案】$a=b=0$.

【解析】$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}ax+b=b$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x^2=0$，故 $b=0$.又 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=a$；$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$，所以 $a=0$.

4【答案】（B）.

【解析】因为 $f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

又 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{ax^2}{x}=0$，$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{xe^x}{x}=1$，

左右导数都存在，但不相等，选（B）.

5【答案】$a=-\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{3}{2}$.

【解析】因 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}ae^x+b=a+b$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.故 $a+b=1$，

又 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=a$，$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$，

所以 $a=-\dfrac{1}{2}$，$b=1-a=\dfrac{3}{2}$.

6【答案】$f'(2)=2$

【解析】因为 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续，$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=2$，所以可得

$$f(2)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x-2}(x-2)=0\text{ . }f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=2\text{ .}$$

第十天

1【答案】（C）

【解析】由复合函数求异法则得 $y'=\arctan\left(\dfrac{x-2}{3x+2}\right)^2\cdot\dfrac{8}{(3x+2)^2}$， $y'(0)=\dfrac{\pi}{2}$，

所以 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\dfrac{\pi}{2}$.

2【答案】（B）

【解析】因为 $f'(\sqrt{1-x^2})=\dfrac{2\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x^2}}\cdot(\sqrt{1-x^2})=\dfrac{-2x}{|x|}$，即 $df(\sqrt{1-x^2})=-\dfrac{2x}{|x|}dx$.

3【答案】 $y'=(\sin x)^{\cos^2 x}\left[-\sin(2x)\ln(\sin x)+\dfrac{\cos^3 x}{\sin x}\right]$

【解析】因为 $y=\exp\left[\cos^2 x\cdot\ln(\sin x)\right]$，即

$$y'=(\sin x)^{\cos^2 x}\left[-\sin(2x)\ln(\sin x)+\frac{\cos^3 x}{\sin x}\right].$$

4【答案】 $dy=\dfrac{3}{x}f'(x)e^{3f(\ln x)}dx$

【解析】 $dy=3e^{3u}du=3e^{3u}f'(t)dt=3e^{3u}f'(t)\dfrac{1}{x}dx=\dfrac{3}{x}f'(x)e^{3f(\ln x)}dx$.

5【答案】 $dy=\dfrac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}dx$

【解析】两边关于 x 求异得： $y'\sin x+y\cos x+\sin(x-y)\cdot(1-y')=0$，解得

$y'=\dfrac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}$，从而 $dy=\dfrac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}dx$.

6【答案】 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{\ln x-\dfrac{x}{y}}{\ln y-\dfrac{y}{x}}$

【解析】由解得： $e^{y\ln x}=e^{x\ln y}$，即 $y\ln x=x\ln y$，两边关于 y 求异得：

$$\ln x+\frac{y}{x}\frac{dx}{dy}=\frac{dx}{dy}\ln y+\frac{x}{y}，\text{从而}\frac{dx}{dy}=\frac{\ln x-\dfrac{x}{y}}{\ln y-\dfrac{y}{x}}.$$

第十一天

1【答案】 $y'=\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$.

【解析】 $y'=\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$.

2【答案】 $y'=(1+\sin x)^x\left[\ln(1+\sin x)+\dfrac{x\cdot\cos x}{1+\sin x}\right]$

【解析】因为 $y=(1+\sin x)^x=e^{x\ln(1+\sin x)}$，所以

$y'=(1+\sin x)^x\left[\ln(1+\sin x)+\dfrac{x\cdot\cos x}{1+\sin x}\right]$.

3【答案】 $y'=(x+\cos x)^{\arctan x}\left[\dfrac{\ln(x+\cos x)}{1+x^2}+\arctan x\dfrac{1-\sin x}{x+\cos x}\right]$

【解析】 $y'=e^{[\arctan x\ln(x+\cos x)]}\left[\arctan x\ln(x+\cos x)\right]'$

$=(x+\cos x)^{\arctan x}\left[\dfrac{1}{1+x^2}\ln(x+\cos x)+\arctan x\dfrac{1-\sin x}{x+\cos x}\right]+(\ln x)^{\ln x}\left[\dfrac{\ln(\ln x)}{x}+\dfrac{1}{x}\right]$.

4【答案】 $y'=(\ln\cos x-x\tan x)\cos^x x$

【解析】 $y'=(\cos^x x)'=(e^{x\ln\cos x})'=\cos^x x(\ln\cos x-x\tan x)$.

5【答案】 $y'=\dfrac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}x^{\sqrt{x}}\cos x^{\sqrt{x}}$

【解析】 $y'=\left[\sin(e^{\sqrt{x}\ln x})\right]=\dfrac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}(x^{\sqrt{x}})\cos(x^{\sqrt{x}})$.

6【答案】 $y''(0)=\dfrac{1}{e^2}$

【解析】对方程分别关于 x 求一阶导和二阶导，得方程：

$$\begin{cases} e^y y'+y+xy'=0 \\ e^y(y')^2+e^y y''+2y''+xy''=0 \end{cases}$$

由方程也可得： $x=0$， $y=1$，代入方程组得： $y'(0)=-\dfrac{1}{e}$， $y''=\dfrac{1}{e^2}$.

第十二天

1【答案】$\frac{t}{2}$

【解析】$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{t}{2}$.

2【答案】$\frac{\sin t-t\cos t}{4t^3}$

【解析】由题 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{-\sin t}{2t}$，则 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\sin t-t\cos t}{4t^3}$.

3【答案】$-\frac{1+t^2}{t^3}$

【解析】$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{1}{t}$，则 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\frac{1+t^2}{t^3}$.

4【答案】t，$\frac{1}{f''(t)}$，$-\frac{f'''(t)}{[f''(t)]^3}$

【解析】$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{tf''(t)+f(t)-f(t)}{f''(t)}=t$，则 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{f''(t)}$，

$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\frac{f'''(t)}{[f''(t)]^3}$.

5【答案】$\frac{(-1)^n2^n2n!}{3^{n+1}}$

【解析】因为 $y^{(n)}(x)=(-1)^n2^nn!(2x+3)^{-(n+1)}$，所以 $y^{(n)}(0)=\frac{(-1)^n2^nn!}{3^{n+1}}$.

6【答案】$\frac{2(-1)^nn!}{(1+x)^{n+1}}$

【解析】因为 $f(x)=\frac{-(1+x)+2}{1+x}=-1+\frac{2}{1+x}$，所以 $f^{(n)}(x)=\frac{2(-1)^nn!}{(1+x)^{n+1}}$.

第十三天

1【答案】$\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x+C$

【解析】原式$=\int\left(x^2+x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}-1\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x+C$.

2【答案】$\ln|x|+\arctan x+C$

【解析】原式$=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\ln|x|+\arctan x+C$.

3【答案】$2\mathrm{e}^x+3\ln|x|+C$

【解析】原式$=\int 2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\int\frac{3}{x}\mathrm{d}x=2\mathrm{e}^x+3\ln|x|+C$.

4【答案】$\sin x-\cos x+C$

【解析】原式$=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x=\int\cos x+\sin x\mathrm{d}x=\sin x-\cos x+C$.

5【答案】$\arcsin x-\ln|x|+C$

【解析】原式$=\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\arcsin x-\ln|x|+C$.

6【答案】$\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+x+C$

【解析】原式$=\int\frac{(\mathrm{e}^x+1)(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+1)}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x=\int(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+x+C$.

第十四天

1【答案】$\frac{1}{4}\left(1+x^3\right)^{\frac{4}{3}}+C$

【解析】原式$=\int(1+x^3)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}\frac{x^3}{3}=\frac{1}{4}(1+x^3)^{\frac{4}{3}}+C$.

2【答案】$\frac{1}{4}\arctan\frac{x^2}{2}+C$

【解析】原式$=\frac{1}{4}\int\left(1+\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2\right)^{-1}\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2\right)=\frac{1}{4}\arctan\frac{x^2}{2}+C$.

3【答案】$\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right|+C$

【解析】原式$=\frac{1}{4}\int\frac{1}{(x^4)^2-2}\mathrm{d}(x^4)=\frac{1}{8\sqrt{2}}\int\frac{1}{x^4-\sqrt{2}}-\frac{1}{x4+\sqrt{2}}d(x^4)$

$=\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right|+C$.

4【答案】$\cos\frac{1}{x}+C$

【解析】$=\frac{1}{4}\int\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x}\right)=\cos\frac{1}{x}+C$.

5【答案】$\arctan(\mathrm{e}^x)+C$

【解析】原式$=\int\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}=\arctan\mathrm{e}^x+C$.

6【答案】$\ln|\ln\ln x|+C$

【解析】$=\int\frac{1}{\ln x\ln(\ln x)}\mathrm{d}\ln x=\int\frac{1}{\ln(\ln x)}\mathrm{d}\ln(\ln x)=\ln|\ln(\ln x)|+C$.

第十五天

1【答案】$\frac{1}{6}\sin^6 x+C$

【解析】原式$=\int \sin^5 x\mathrm{d}\sin x=\frac{\sin^6 x}{6}+C$.

2【答案】$\ln|\sin x|+C$

【解析】原式$=\int \frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C$.

3【答案】$\frac{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}{a^2-b^2}+C$

【解析】原式$=\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}\mathrm{d}\sin^2 x=\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{b^2+(a^2-b^2)\sin^2 x}}\mathrm{d}\sin^2 x$

$=\frac{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}{a^2-b^2}+C$.

4【答案】$\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$

【解析】$=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\int \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 x}{4}\mathrm{d}x=\int \frac{3}{8}-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 4x\mathrm{d}x$

$=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$.

5【答案】$\frac{1}{2}\tan^2 x+\ln|\cos x|+C$（或者$\frac{1}{2}\sec^2 x+\ln|\cos x|+C$）

【解析】原式$=\int \tan x(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x=\int \tan x\sec^2 x\mathrm{d}x-\int \tan x\mathrm{d}x$

$=\int \tan x\mathrm{d}\tan x-\int \tan x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\tan^2 x+\ln|\cos x|+C$.

6【答案】$-\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|+C$（或者$\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right|+C$）

【解析】原式$=\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x-2}}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\sqrt{1+x^{-2}}}\mathrm{d}(-x^{-1})=\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right|+C=-\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|+C$.