本章基本要求：

1. 理解二重积分的实用背景，理解“微元法”思想

2. 掌握直角坐标、极坐标系中计算二重积分

3. 理解三重积分的实用背景，会在空间直角坐标系中计算三重积分，了解柱面坐标系

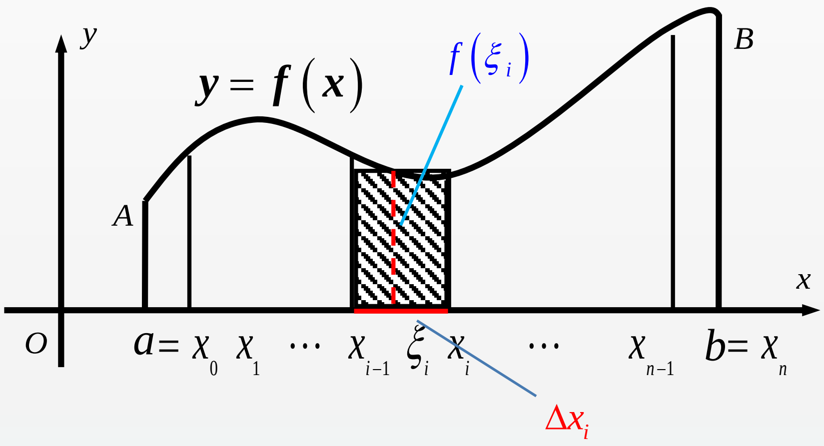
4. 掌握简单的几何、物理应用

§10.1 二重积分的概念和性质

要求：理解二重积分概念

10.1.1 二重积分的实用背景和概念

一元函数 $y = f(x)$ 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的几何意义：由曲线 $y = f(x)$，$x = a$，$x = b$ 及 x 轴围成的曲边梯形的面积.



用微元法求曲边梯形面积

$$S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

$$\lambda = \max(\Delta x_i)$$

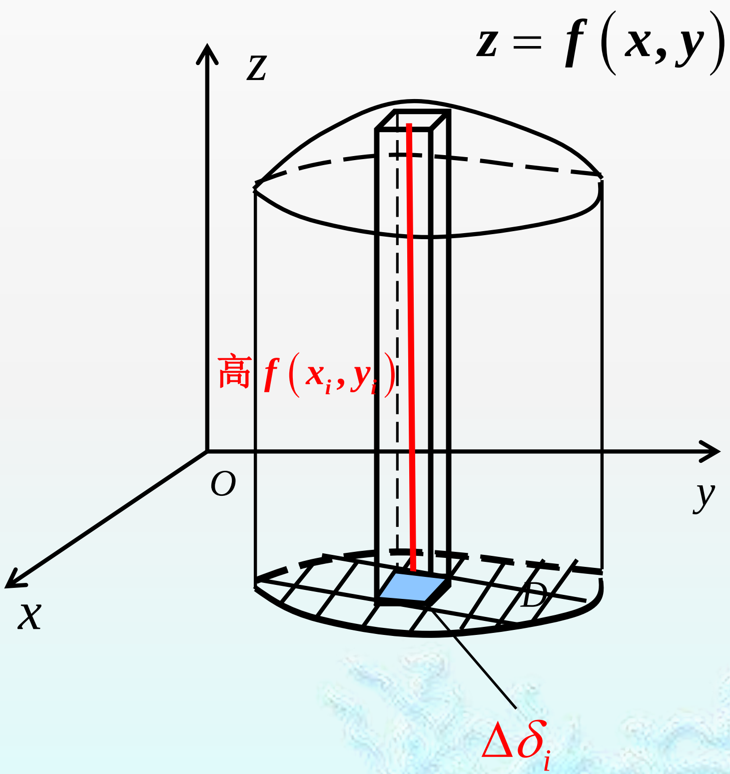
现在把问题推广到二元函数$z=f(x,y)$

设$z=f(x,y)$在区域D上连续，且$z=f(x,y)\geq 0$，求以曲面$z=f(x,y)$为顶，xoy上的闭区域D为底的曲顶柱体的体积(如图).

利用“微元法”的思想方法，求出曲顶柱体的体积：

$$V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\cdot\Delta\delta_i$$

$$=\iint_D f(x,y)d\delta$$



λ是n个小闭区域的直径中的最大者

二重积分的定义：$p201$

设 $z=f(x,y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数，如果

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i,y_i\right)\cdot\Delta\delta_i$$

存在，则称此极限值为函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上的二重积分，

记为 $$\iint_D f\left(x,y\right)d\delta$$

即 $$\iint_{\boxed{D}} \boxed{\boxed{f\left(x,y\right)}\,\boxed{d\delta}} = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i,y_i\right)\cdot\Delta\delta_i$$

积分区域

被积函数

被积表达式

面积元素

几何应用：

以$z=f(x,y)\geq 0$为顶，以D为底的曲顶柱体体积

$$V=\iint_D f(x,y)d\delta$$

物理应用：

平面薄板在xoy平面上占有区域D，其面密度函数为$\rho=\rho(x,y)$，平面薄板的质量

$$M=\iint_D \rho(x,y)d\delta$$

注意：二重积分$\iint_D f(x,y)d\delta$是一个确定的数值，与$f(x,y)$有关，与D有关，与积分变量字母无关.

即

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D f(u,v)dudv$$

10.1.2 二重积分的性质

二重积分是定积分的推广，因此也具有与定积分类似的性质：

性质1　设k是常量，则$\iint\limits_D kf(x,y)d\delta = k\iint\limits_D f(x,y)d\delta$

性质2（可加性）若D分为两个子域D_1和D_2，即$D = D_1 + D_2$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\delta = \iint\limits_{D_1} f(x,y)d\delta + \iint\limits_{D_2} f(x,y)d\delta$$

性质3 (保号性) 在区域D内，若$f(x,y) \le g(x,y)$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\delta \le \iint\limits_D g(x,y)d\delta$$

性质4 (估值定理) 在区域D内，如果$m \le f(x,y) \le M$，则

$$mS \le \iint\limits_D f(x,y)d\delta \le MS$$

其中，S是区域D的面积.

性质5 (积分中值定理) 如果函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，则在 D 上至少有一点 (ξ,η)，使得

$$\iint_D f(x,y)d\delta = f(\xi,\eta)S.$$

特别地，如果在 D 上，$f(x,y)=1$，则 $\iint_D 1 d\delta = S\times 1 = S.$

高为1的平顶柱体体积在数值上等于底面积.

课堂练习：*p*202

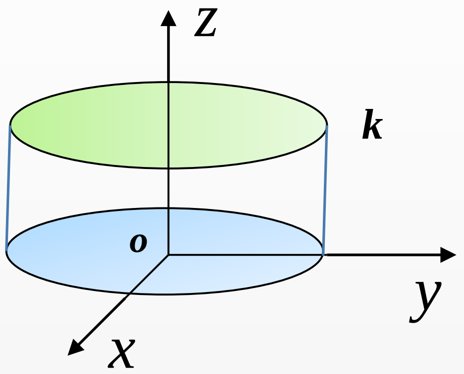
1. $\iint_D \rho(x,y)d\delta = M$

2. (1) $V=\iint_D (1-x-y)d\delta \quad D: x+y\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0$

   (2) $V=\iint_D f_1(x,y)d\delta - \iint_D f_2(x,y)d\delta$

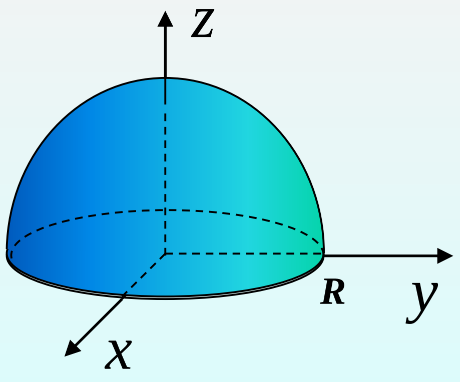
3. (1) $\iint\limits_{D} k\,d\delta = kS$,

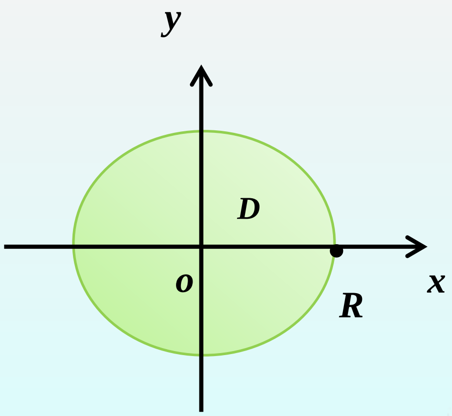
这是一个平顶柱体，高为k，底面积为S



(2) $\iint\limits_{D} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,d\delta = \frac{2}{3}\pi R^3$,

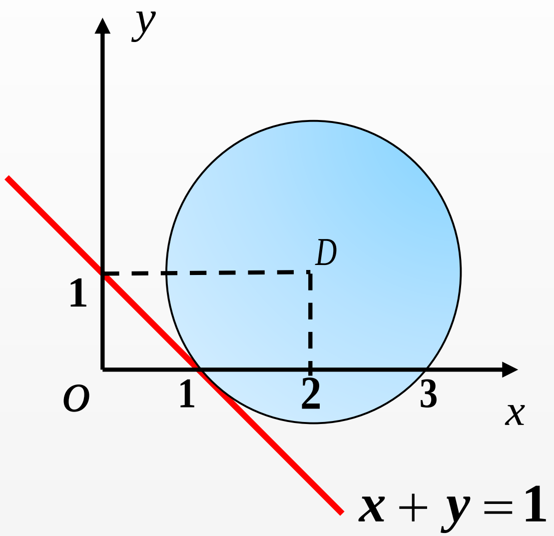
这个体积是上半球，顶$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$，底为$xoy$面上的圆$x^2 + y^2 \le R^2$





4. 利用二重积分性质比较积分大小

(1) $\iint_D (x+y)^2 \,\mathrm{d}\delta$, $\iint_D (x+y)^3 \,\mathrm{d}\delta$



其中，$D:(x-2)^2+(y-1)^2 \le 2$

解　积分域 D 的边界为圆周

$$(x-2)^2+(y-1)^2=2$$

圆周与直线 $x+y=1$ 相切，积分区域 D 位于直线上方

区域 D 内的点均满足 $x+y \ge 1$

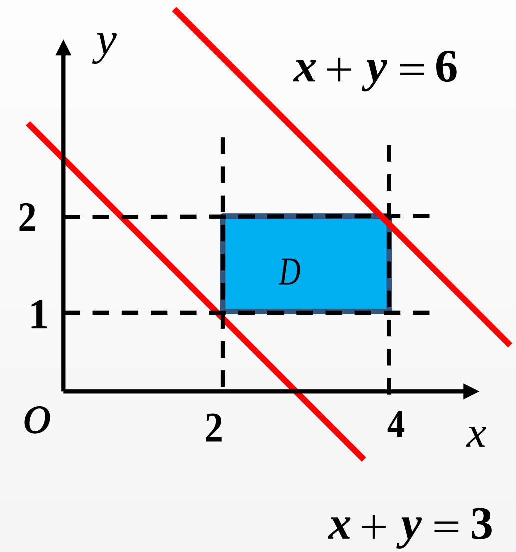
故 $(x+y)^2 \le (x+y)^3$

由保号性　$\iint_D (x+y)^2 \,\mathrm{d}\delta \le \iint_D (x+y)^3 \,\mathrm{d}\delta$

4. 利用二重积分性质比较积分大小

(2) $\iint_D \ln(x+y)\,\mathrm{d}\delta$, $\iint_D [\ln(x+y)]^2\,\mathrm{d}\delta$

其中，D为矩形区域：$2 \le x \le 4, 1 \le y \le 2.$



解　在积分域D内，恒有

$3 \le x+y \le 6$　　　$1 \le \ln 3 \le \ln(x+y)$

区域D内的点均满足 $\ln(x+y) \ge \ln 3 \ge 1$

故 $\ln(x+y) \le [\ln(x+y)]^2$

由保号性 $\iint_D \ln(x+y)\,\mathrm{d}\delta \le \iint_D \ln(x+y)^2\,\mathrm{d}\delta$

作业：

预习 10.2节