课前复习：基本积分公式, 以下u都是x的函数, 即$u=u(x)$

(1) $\int kdu = ku + C$

(2) $\int u^{\alpha}du = \dfrac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1,$　　当$\alpha=-1$时, $\int \dfrac{1}{u}du = \ln|u| + C$

(3) $\int a^{u}du = \dfrac{a^{u}}{\ln a} + C, a>0$且$a\neq 1$　　特别$\int e^{u}\mathrm{d}u = e^{u} + C$

(4) $\int \sin udu = -\cos u + C$　　$\int \cos udu = \sin u + C$

$\int \tan udu = -\ln|\cos u| + C$　　$\int \cot udu = \ln|\sin u| + C$

$\int \sec^2 udu = \tan u + C$　　$\int \csc^2 udu = -\cot u + C$

$\int \sec u \tan udu = \sec u + C$　　$\int \csc u \cot udu = -\csc u + C$

(5) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}du = \arcsin u + C$　　$\int \dfrac{1}{1+u^2}du = \arctan u + C$

§5.2 换元积分法

要求：熟练掌握第一类换元积分(凑微分)法

一　第一类换元积分法(凑微分法)

我们已学会计算$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$，那$\int \sin 2x\,dx = ?$

试着用复合函数求导的方法反过来想：$(?)' = \sin 2x$

$$(-\cos 2x)' = 2\sin 2x，所以\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)' = \sin 2x$$

由此得出：$\int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + c$

但复杂一些的积分不能总是反过来用导数来推测，必须有新的方法.

定理5.1 （**见P84**）

若$\int f(x)dx = F(x)+c$，$u=\varphi(x)$可导，则$\int f(u)du = F(u)+c$.

公式更详细的写成

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) = \int f(u)du = F(u)+c = F[\varphi(x)]+c$$

凑微分　　换元：$u=\varphi(x)$　　套公式　　还原

例5.5 $\displaystyle\int \frac{1}{3x-1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{3x-1}d(3x-1) = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{3}\ln|u|+c = \frac{1}{3}\ln|3x-1|+c$

令 $u=3x-1$

对于简单的第一换元积分，都可按这四步完成.

凑微分法公式的使用要点：

注：$d\varphi(x)=\varphi'(x)dx$

$$\int \underline{f[\varphi(x)]\varphi'(x)}dx=\int f[\varphi(x)]d\varphi(x)$$

题目特点：

$\varphi(x)$与$\varphi'(x)$同时出现

$$\overset{令u=\varphi(x)}{=\!=\!=}\int f(u)du=F(u)+C=F[\varphi(x)]+C$$

例5.5 （2）$\int x^2\sin x^3dx \underset{整理}{=} \int \sin x^3(x^2dx) \underset{凑微分}{=} \int \sin x^3\frac{1}{3}dx^3 \underset{换元}{=} \frac{1}{3}\int \sin u du$

$\underset{套公式}{=} -\frac{1}{3}\cos u+c \underset{还原}{=} -\frac{1}{3}\cos x^3+c$

多一步整理

是便于凑微分

常见凑微分法形式

(1) $x^{\alpha+1}$和x^{α}同时出现；　　$\int xe^{x^2}dx$

(2) $\ln x$和$\frac{1}{x}$同时出现；　　$\int \frac{1}{x\ln x}dx$

(3) $\sqrt{x}$和$\frac{1}{\sqrt{x}}$同时出现；　　$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

(4) $\frac{1}{x}$和$\frac{1}{x^2}$同时出现；　　$\int \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx$

(5) 三角函数及其导数同时出现；　　$\int \sin x\cos^3 xdx$

还有很多，大家要在实践中总结，灵活应用.

例5.5（3） $\int xe^{-x^2}dx$

解 $I=\int e^{-x^2}\left(xdx\right)=\int e^{-x^2}\frac{1}{2}dx^2$ 凑微分

$$=-\frac{1}{2}\int e^{-x^2}d\left(-x^2\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\int e^{u}d\left(u\right)$$ 换元: $u=-x^2$

$$=-\frac{1}{2}e^{u}+c$$ 用公式 $\int e^{u}dx=e^{u}+c$

$$=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+c$$ 还原: $u=-x^2$

练习： $(1)\int xe^{3x^2}dx$ $(2)\int x\left(x^2+1\right)^4dx$

当我们对凑微分方法及熟记基本积分公式后可以简化步骤

例5.5 (4) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$

解 $I = \int \arctan x \left(\frac{1}{1+x^2}dx \right)$

$= \int \arctan x \, d(\arctan x)$

$= \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + c$

例5.5 (6) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \cos\sqrt{x}\, dx$

解 $I = \int \cos\sqrt{x} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} dx \right)$

$= \int \cos\sqrt{x}\, d\left(2\sqrt{x}\right)$

$= 2\sin\sqrt{x} + c$

省去了换元、还原两个步骤

练习：(1) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arccot} x}}{1+x^2}dx$ (2) $\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

带三角函数的积分有难度

例5.6 (1) $\int \tan x\,dx$

解 $I=\int \frac{\sin xdx}{\cos x}$

$$=-\int \frac{1}{\cos x}d(\cos x)$$

$$=-\ln|\cos x|+c$$

练习：(1) $\int \sin x\cos^3 x\,dx$

(2) $\int \cot x\,dx$

(3) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$

例5.6 (3) $\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx$

解 $I=\int \sin^2 x\cos^2 x\cdot\cos xdx$

$$=\int \sin^2 x\left(1-\sin^2 x\right)d\sin x$$

$$=\int\left(\sin^2 x-\sin^4 x\right)d\sin x$$

$$=\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+C$$

注意： $\sin xdx=d(-\cos x)$,

$\cos xdx=d\sin x$,

选用哪个公式，要看被积函数中的其它函数.

补充有点难度的例题：

$$(1)\ \int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}dx$$

令$t=\frac{x}{a}$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{a}\arctan t + c$$

$$= \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c$$

$$(2)\ \int \frac{e^x}{1+e^x}dx = \int \frac{1}{1+e^x}de^x = \int \frac{1}{1+e^x}d(1+e^x) = \ln\left(1+e^x\right)+c$$

练习：$(1)\int \frac{1}{4+x^2}dx \quad (2)\int \frac{1}{1-e^x}dx$

例5.7 $(1)\int\frac{1}{x^2-a^2}dx \quad (P86)$

$$=\int\frac{1}{(x-a)(x+a)}dx \quad =\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2a}[\ln|x-a|-\ln|x+a|]+c \quad =\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c$$

练习：$\int\frac{1}{x^2+4x-5}dx=\frac{1}{6}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+5}\right)dx \quad =\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+5}\right|+c$

通过这两例，介绍一种积分方法：**拆分**

这类题目有难度，每位同学根据自己的学习情况决定是否要学会.

学习归类比较

(1) $\int \sin x \, dx$

(2) $\int \sin^2 x \, dx$

(3) $\int \sin^3 x \, dx$

(1) $\int \frac{1}{1+x^2} dx$

(2) $\int \frac{x}{1+x^2} dx$

(3) $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$

(1) $\int \sin x \cos x \, dx$

(2) $\int \sin^2 x \cos x \, dx$

(3) $\int \sin x \cos^2 x \, dx$

(4) $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$

(5) $\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx$

把解题方法想明白，能够举一反三

课堂练习：

$$(1)\int x\left(x^2+1\right)^3 dx$$

$$(2)\int \frac{1}{x(1+2\ln x)}dx$$

$$(3)\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$$

$$(4)\int \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx$$

$$(5)\int \tan x dx$$

$$(6)\int e^x \cos e^x dx$$

$$(7)\int (x+2)^3 dx$$

$$(8)\int \frac{1}{3+2x}dx$$

$$(9)\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$$

$$(10)\int \tan^2 x dx$$

作业：　P89

写在书上　1，3

必做题： 4.(1)(2)

5.(1)(6)(7)(10)(15)(16)