

一、填空题

1. 已知 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$, 函数 $f(x+1)$ 的定义域为_____.
2. 已知函数 $y = x \cos 2x$, 微分 $dy =$ _____.
3. 已知函数 $g(x) = \int_0^x \sin^5 t dt$, 则 $g'(x) =$ _____.
4. 椭圆 $x^2 + 4y^2 = 1$ 所围平面图形面积为_____.
5. 微分方程 $y' = e^{x-2y}$ 满足 $y|_{x=0} = 0$ 的特解为_____.
6. 已知 $f'(e^x) = x$, 且 $f(1) = -1$, 则 $f(x) =$ _____.

二、单项选择题

1. 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \sin x =$ ().
A. 1 B. $+\infty$ C. 0 D. 2
2. 曲线 $y = \cos x$ 上点 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 处的切线方程为 ().
A. $-\frac{1}{2}x + y - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12} = 0$ B. $\frac{1}{2}x + y - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12} = 0$
C. $\frac{1}{2}x - y - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12} = 0$ D. $-\frac{1}{2}x - y - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12} = 0$
3. 函数 $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} (x \geq 0)$ 的极值点和极值分别是 ().
A. 1 和 1 B. 0 和 0 C. 1 和 2 D. 0 和 1
4. 不定积分 $\int \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)} dx =$ ().
A. $\arccos f(x) + C$ B. $\ln f(x) + C$ C. $\arcsin f(x) + C$ D. $\arctan f(x) + C$

三、计算题一

1. 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$.
2. 计算函数 $y = x \arctan x$ 的一阶和二阶导数.
3. 求微分方程 $y'' - 4y' + 5y = 0$ 的通解.

四、计算题二

1. 计算不定积分 $\int x \ln(1+x) dx$.

2. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \sin(x^2) + \cos x - 1}{x^4}$.

五、计算题三

1. 求定积分 $\int_0^{\sqrt{3}} (x + \sqrt{3-x^2}) dx$.

2. 求抛物线 $y^2 = 4x$ 和直线 $x = 1$ 所围平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积.

六、解答题一

1. 求由方程 $x^3 + y^4 - 3xy = 0$ 确定的隐函数的导数 $\frac{dy}{dx}$.

2. 求定积分 $\int_1^e \sin(\ln x) dx$.

七、解答题二

1. 计算无穷积分 $\int_2^{+\infty} x e^{-x^2} dx$.

2. 利用数列极限存在准则, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2} \right)$

八、证明题

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 上可导, 且 $f(0)=0$, 试证在 $(0,1)$ 内至少存

在一点 c , 使得 $f'(c) = \frac{3f(c)}{1-c}$.

这是桂电 2018 级高等数学期末考试题, 可以看看。