课前复习 求积分的方法

1 直接积分法(要求熟记基本积分公式);

2 凑微分法：当被积函数中同时出现$\varphi(x)$及$\varphi'(x)$时考虑；

3 第二换元积分法：被积函数中含有根号时考虑，换元的目的是消除根号

这三种方法求积分也有局限性，$\int x\cos x dx$这个积分就无法用上述方法求解

还需要进一步研讨求积分方法

§5.3 分部积分法

要求：熟练掌握分部积分法，能正确选择$u(x),v(x)$

分部积分法 定理 设$u(x)$和$v(x)$都是可导函数，则

$$\int u dv = uv - \int v du$$

分析：在求导法则中有：$(uv)' = u'v + uv'$

微分法则有：$d(uv) = udv + vdu$

微分法则变形：$udv = d(uv) - vdu$

两边积分 $\int udv = \int d(uv) - \int vdu = uv - \int vdu$

这种积分方法称为分部积分法，先求出部分原函数，再积分求出另一部分原函数.

例5.10（P91） $(2)\int x\cos x\,dx=\int x\cos x\,dx=\int x\,d(\sin x)$

分部积分公式： $\boxed{\int u\,dv=uv-\int v\,du}$ $\quad u=x \quad v=\sin x$

$$=x\sin x-\int\sin x\,dx=x\sin x+\cos x+c$$

验证： $(x\sin x+\cos x+c)'=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$

满足不定积分定义： $F'(x)=f(x)$，则 $\int f(x)dx=F(x)+c$

补充例题： $\int x\ln x\,dx=\int\ln x\,(x\,dx)=\frac{1}{2}\int\ln x\,dx^2=\frac{1}{2}\left(x^2\ln x-\int x^2 d\ln x\right)$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+c$$

对比两例，被积函数都是 x 与另一函数相乘，但凑微分方法不一样，需要找规律.

分部积分公式 $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

用分部积分法计算积分要理解：

(1)目的：化难为易，部分解决；

(2)关键：正确选择u，dv;

(3)原则：$\int v\,du$比$\int u\,dv$好计算，dv易求.

即等式右边的积分比等式左边的积分好计算

如何选择u？一般情况按“反、对、幂、三、指”的顺序

补充例题：$\int xe^x dx$，被积函数是幂函数与指数函数的乘积，幂函数选作u，指数函数凑微分，求出v

解 $\int xe^x dx \underset{\text{整理}}{=} \int x(e^x dx) \underset{\text{凑微分}}{=} \int x\,d\left(e^x\right) \underset{\text{用公式}}{=} xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$

例5. 10 $(1)\int \ln x dx$ $(P91)$

$\int u dv = uv - \int v du$

解 $\int \underbrace{\ln x}_{u}(\underbrace{dx}_{dv}) = \ln x \cdot x - \int x d(\ln x) = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx$

一定要把微分算出来，$d(\ln x) = \frac{1}{x}dx$

$$= x\ln x - \int 1 dx = x\ln x - x + C$$

说明:(1)积分$\int \ln x dx$已经给出了$u = \ln x$, $v = x$

(2)对照公式$\int u dv = uv - \int v du$,

$\int u dv = \int \ln x dx$, $\int v du = \int 1 dx$, 满足$\int u dv$比$\int v du$好计算

例5. 10 (3) $\int x\arctan x dx$

$u=\arctan x$　　$v=\frac{1}{2}x^2$

解 $\int x\arctan x dx=\int \arctan x(xdx)=\int \arctan x d\left(\frac{1}{2}x^2\right)$

$\boxed{\int udv=uv-\int vdu}$

$$=\arctan x\cdot\frac{1}{2}x^2-\int \frac{1}{2}x^2 d(\arctan x)$$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int x^2\left(\frac{1}{1+x^2}dx\right)$$

计算微分

$d(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2}dx$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}(x-\arctan x)+C$$

加一减一法

$$\frac{x^2}{1+x^2}=\frac{x^2+1-1}{1+x^2}=1-\frac{1}{1+x^2}$$

补充例题 $\int x^2 \cos x dx$

选这一例题目的：要做两次分部积分，有难度，不要求每个同学都会做.

解 $\int x^2 \cos x dx = \int x^2 (\cos x dx) = \int x^2 d(\sin x)$

$$= x^2 \sin x - \int \sin x d(x^2)$$

$$= x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx$$

$$= x^2 \sin x - 2\int x d(-\cos x)$$

$$= x^2 \sin x - 2\left[x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx\right]$$

$$= x^2 \sin x - 2(-x\cos x + \sin x) + C$$

$$= (x^2 - 2)\sin x + 2x\cos x + C$$

补充例题 $\int e^{-\sqrt{x}}dx$

这题也有难度，不是单纯用分部积分法能够解决. 要先作一个变量代换，再用分部积分法求解.

解：令$t=\sqrt{x}$, 则$x=t^2, dx=2tdt$

$$\int e^{-\sqrt{x}}dx=2\int te^{-t}dt$$

$$=2\int t\left(e^{-t}dt\right)=2\int td\left(-e^{-t}\right)$$

$$=2\left(-te^{-t}+\int e^{-t}dt\right)$$

$$=2\left(-te^{-t}-e^{-t}\right)+C$$

$$=-2e^{-\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}+1\right)+C$$

分部积分题型分类：

1^0 $\int x^n e^x dx, \int x^n \sin x dx, \int x^n \cos x dx$

共同点：选$u = x^n$

例如：$\int xe^x dx,\ \int x\sin x dx,\ \int x^2 \cos x dx$ 等等

2^0 $\int x^n \ln x dx,\ \int x^n \arctan x dx,\ \int x^n \arcsin x dx$

共同点：选 $x^n dx = dv,\ v = \dfrac{1}{n+1} x^{n+1}$

例如：$\int x \arctan x dx,\ \int \ln x dx$

重点把第一种学好就行了.

练习

$(1) \int x\sin x\,dx$

$(2) \int xe^{-x}\,dx$

$(3) \int x\ln x\,dx$

$(4) \int \arctan x\,dx$

作业：　　$P92$

必做：$2.(1),(3),(7),(10)$

预习　　6. 1节