复习上节课讲过的主要的求极限方法

求极限方法一：用四则运算法则

求极限方法二：用无穷小的运算法则

求极限方法三：因式分解，约去零因子

求极限方法四：去根号

求极限方法五：用公式

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots}=\begin{cases}0 & n<m\\ \dfrac{a_0}{b_0} & n=m\\ \infty & n>m\end{cases}$$

本节将继续介绍求极限的方法

§2.4 两个重要极限 无穷小量的阶的比较

要求：会用两个重要极限求其他函数的极限

一、极限存在准则

准则 (夹逼准则 P27)

定理 在 x_0 的某个去心邻域内，$f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 满足如下关系

$$g(x) \le f(x) \le h(x)$$

若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A,$ 则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$

例如：在 (0, 1) 上， $0 \le \sin x \le x$

已知 $\lim\limits_{x\to 0} 0 = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$ 所以 $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$

夹逼准则不仅在数学上有用，在日常推理中也有应用.

二、两个重要极限　　1 第一个重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

证明思路：利用面积大小关系构造不等式，用夹逼准则

作一单位圆，如图2.5，取角$x\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$，

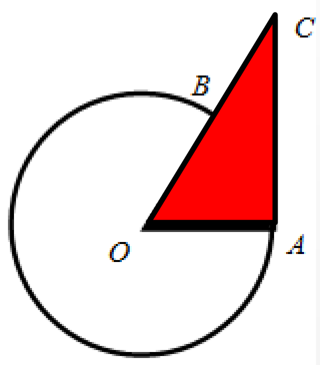

图2.5

显然 $S_{\Delta AOB}<S_{扇AOB}<S_{\Delta AOC}$

$$即\frac{1}{2}OA\cdot OB\cdot\sin x<\frac{1}{2}x\cdot OA^2<\frac{1}{2}OA\cdot AC$$

因为 $OA=OB=1$　　整理得　$\sin x<x<\tan x$

上式两边同时除以$\sin x$,得　　$1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}$　　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1$

根据夹逼准则，有 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\sin x}=1$，从而 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$

同理可证明 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{x}=1$，故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

以上公式的一般形式：$\lim\limits_{f(x)\to 0}\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}=1$

例2.11 计算下列极限：(P28)

$(1)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$ $\quad(2)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$ $\quad(3)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

令 $t=2x\to 0$

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(2\cdot\dfrac{\sin 2x}{2x}\right)=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}=2\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=2$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1$

注意等式成立条件

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\sin^2\frac{x}{2}\Big/\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

以上公式的一般形式：$\lim\limits_{f(x)\to 0}\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}=1$

补充例题 计算下列极限：

$(1)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{nx}\ (n\neq 0)$ $(2)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x}{\sin 4x}$ $(3)\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{x}$

解：$(1)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{nx}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin mx}{mx}\cdot\dfrac{m}{n}\right)=\dfrac{m}{n}$

$(2)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x}{\sin 4x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan 5x}{5x}\cdot\dfrac{4x}{\sin 4x}\cdot\dfrac{5x}{4x}\right)=\dfrac{5}{4}$

$(3)\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{2}{\pi}$

注意：这里$x\to\dfrac{\pi}{2}$

课堂练习

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\omega x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\omega\sin\omega x}{\omega x}=\omega\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}(t=\omega x)=\omega$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan 3x}{x}=3$

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}=1$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

2 第二个重要极限

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \text{ 或 } \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

一般地 $$\lim_{f(x)\to\infty}\left[1+\frac{1}{f(x)}\right]^{f(x)}=e \text{ 或 } \lim_{f(x)\to 0}\left[1+f(x)\right]^{\frac{1}{f(x)}}=e$$

公式特点:

(1) 属于$(1+0)^{\infty}$, 其结果是不确定的.

(2) 括号内的变量与指数互为倒数.

常见错误:

$$\lim_{f(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=(1+0)^{\infty}=1$$

如 $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=(1-0)^{\infty}=1$ ×

如 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{K}{x}\right)^{x}=(1-0)^{\infty}=1$ ×

例2.12 计算下列极限：（P29）

$$(1)\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}} \qquad (2)\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+5} \qquad (3)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x}$$

解 (1) $\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}[(1-2x)^{\frac{1}{-2x}}]^{-2}=[\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{-2x}}]^{-2}=e^{-2}$

$$(2)\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+5}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5}$$

$$\lim_{f(x)\to 0}\left[1+f(x)\right]^{\frac{1}{f(x)}}=e$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5}=e\cdot 1^{5}=e$$

$$\lim_{f(x)\to\infty}\left[1+\frac{1}{f(x)}\right]^{f(x)}=e$$

$$(3)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right)^{x}=\frac{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}{\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}}=\frac{e}{e^{-1}}=e^{2}$$

补充例题 计算下列极限：

$$(1)\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x} \qquad (2)\lim_{x\to 0}(1-5x)^{\frac{1}{x}} \qquad (3)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{x}$$

解 $(1)\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{3}=e^{3}$

$$(2)\lim_{x\to 0}(1-5x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}[1+(-5x)]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[1+(-5x)\right]^{\frac{1}{-5x}\cdot(-5)}=e^{-5}$$

$$(3)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x}}{\left(1+\frac{3}{-2x}\right)^{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x\cdot\frac{1}{2}}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{-2x}\right)^{\frac{-2x}{3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}}=\frac{e^{\frac{1}{2}}}{e^{-\frac{3}{2}}}=e^{2}$$

求极限方法九：利用两个重要求极限

课堂练习

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{k}{x})^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{\frac{1}{k}x})^{\frac{x}{k}\cdot k}=[\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{\frac{1}{k}x})^{\frac{1}{k}x}]^{k}=e^{k}$

(2) $\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\frac{3}{x}}=\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\frac{1}{-2x}\cdot3\cdot(-2)}$

$=[\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\frac{1}{-2x}}]^{-6}=e^{-6}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\frac{1}{\sqrt{x}})^{\sqrt{x}}(1+\frac{1}{\sqrt{x}})^{\sqrt{x}}$

$=e^{-1}\cdot e=1$

作业　P30

必做：1　(1)(2)(6)

2　(1)(3)(8)