本章主要掌握以下四种微分方程的解法：

(1)定义：形如$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$的方程称为可分离变量的微分方程.

解法：分离变量，两边积分

(2)定义：形如$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$的方程称为一阶线性微分方程,

其中$P(x),Q(x)$均为已知函数.

解法：公式法 通解 $y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right]$

(3)可降阶的三种特殊微分方程

$y''=f(x)$，$y''=f(x,y')$，$y''=f(y,y')$的解；

$y''=f(x)$，**解法**：直接积分.

注意：两次积分，有两个独立的任意常数.

$y''=f(x,y')$，**解法**：降阶

令 $y'=p$，$y''=p'$，方程降为一阶 $p'=f(x,p)$

$y''=f(y,y')$，**解法**：降阶　　要求：了解该类方程

令 $y'=p$，$y''=p\dfrac{dp}{dy}$，方程降为一阶 $p\dfrac{dp}{dy}=f(y,p)$

(4)二阶常系数齐次线性微分方程$y''+py'+qy=0$的解.

二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+py'+qy=0$，其中p,q为常数

特征方程： $r^2+pr+q=0$

特征方程的根	微分方程的通解
两个不相等的实根 $r_1\neq r_2$	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
两个相等的实根 $r_1=r_2=r$	$y=C_1e^{rx}+C_2\cdot xe^{rx}$
有一对共轭复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	$y=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right)$

一、求下列微分方程的通解

(1) $xy' - y\ln y = 0$ (2) $\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x$ (3) $xydx + \sqrt{1-x^2}dy = 0$

(4) $\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$ (5) $y'' = x - e^x$ (6) $y'' = 3x^2 - 2$

(7) $y'' - 9y' = 0$ (8) $y'' + y' - 2y = 0$ (9) $y'' - 4y' + 5y = 0$

二、求下列微分方程的特解

(1) $(x^2y + y)dy - (x + xy^2)dx = 0$，初始条件 $y(2) = 3$;

(2) $xdy + 2ydx = 0$，初始条件 $y(2) = 1$;

(3) $\frac{x}{1+y}dx - \frac{y}{1+x}dy = 0$，初始条件 $y(0) = 0$.

三、若 $y=y_1(x)$ 是线性齐次方程 $y'+p(x)y=0$ 的解，$y=y^*(x)$ 是 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的解. 证明：$y=cy_1(x)+y^*(x)$ (c 是任意常数)是 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的解.

四、求微分方程 $y''-2y'+y=0$ 的一个解，使该曲线过点 $(0,2)$ 且在该点有水平切线.

五、写出以函数 $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$ (其中 c_1，c_2 为任意常数)为通解的微分方程.