第十一章

习题 11.1　（P229）

2. 计算下列对弧长的曲线积分：

（1） $\int_L xy\,\mathrm{ds}$ **, 其中** L **为圆心在原点, 半径为** a **的第Ⅰ象限部分；**

解　第一步　曲线的参数方程为 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$，参数的变化范围：$0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$，

第二步　变换弧长元素　$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt = a\,dt$

第三步　确定积分限，化为定积分

$$\int_L xy\,\mathrm{ds} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\sin t)(a\cos t)adt = a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos tdt = a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin td\sin t = a^3\frac{1}{2}\sin^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^3}{2}.$$

（2） $\int_L \sqrt{y}\,\mathrm{ds}$ **, 其中** L **是抛物线** $y = x^2$ **上由点** $(0, 0)$ **到点** $(1, 1)$ **的一段弧；**

解　曲线的参数方程为 $\begin{cases} x = x \\ y = x^2 \end{cases}$，$x$ 作参数，变化范围：$0 \le x \le 1$，

$ds = \sqrt{1 + (2x)^2}dx = \sqrt{1 + 4x^2}dx$，

$$\int_L \sqrt{y}\,\mathrm{ds} = \int_0^1 x\sqrt{1 + 4x^2}dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\frac{1}{8}d\left(1 + 4x^2\right) = \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\left(1 + 4x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{5\sqrt{5} - 1}{12}.$$

（3） $\int_L \dfrac{1}{x - y}\,\mathrm{ds}$, 其中 L 为从点 $(0, -2)$ 到点 $(4, 0)$ 的线段.

（4） $\int_L (x^2 + y^2)\,\mathrm{ds}$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$；

（5） $\int_L y^2\,\mathrm{ds}$, 其中 L 为摆线 $x = a(t - \sin t)$，$y = a(1 - \cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$；

（6） $\int_L (x + y)\,\mathrm{ds}$, 其中 L 为以 $(0, 0)$，$(1, 1)$ 和 $(0, 1)$ 为顶点的三角形周界；

（7） $\int_L z\,\mathrm{ds}$, 其中 L 为螺线 $x = t\cos t$，$y = t\sin t$，$z = t$ $(0 \le t \le \pi)$.

（8） $\oint_L \mathrm{e}^{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\mathrm{ds}$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$, 直线 $y = x$ 及 x 轴在第一象限内所围成的扇形的整个边界；

（9）$\int_L \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{ds}$，其中 L 为曲线 $x=\mathrm{e}^t\cos t$，$y=\mathrm{e}^t\sin t$，$z=\mathrm{e}^t$ 上相应于 t 从 0 变到 2.

解　曲线参数方程已给出，$ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt$

$$=\sqrt{\left(e^t\cos t-e^t\sin t\right)^2+\left(e^t\sin t+e^t\cos t\right)^2+\left(e^t\right)^2}\,dt == \sqrt{3}e^t dt,$$

$$\int_L \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{ds}=\int_0^2 \frac{1}{\left(e^t\cos t\right)^2+\left(e^t\sin t\right)^2+\left(e^t\right)^2}\sqrt{3}e^t dt=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^2 e^{-t}dt=-\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-t}\Big|_0^2$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-e^{-2}\right).$$

习题 11.2　（P233）

1. 计算曲线积分 $\int_L (x+y)\mathrm{dx}+(y-x)\mathrm{dy}$，其中 L 为：

（1）抛物线 $y^2=x$ 上从点 $(1,1)$ 到点 $(4,2)$ 的一段弧；

（2）从点 $(1,1)$ 到 $(4,2)$ 的直线段；

（3）先沿直线从 $(1,1)$ 到 $(4,1)$，再沿直线到 $(4,2)$ 的折线；

解　由于 L 的表达式不一样，要分 $A(1,1)$ 到 $B(4,1)$ 及 $B(4,1)$ 到 $C(4,2)$ 两段直线来计算

$$\int_L (x+y)\mathrm{dx}+(y-x)\mathrm{dy}=\int_{AB}(x+y)\mathrm{dx}+(y-x)\mathrm{dy}+\int_{BC}(x+y)\mathrm{dx}+(y-x)\mathrm{dy}$$

① $\int_{AB}(x+y)\mathrm{dx}+(y-x)\mathrm{dy}=\int_1^4 (x+1)dx+0=\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)_1^4=12-\frac{3}{2}$；

说明：$AB:\begin{cases}x=x\\ y=1\end{cases}$，$x$ 从 0 到 1，$dx=dx$，$dy=d1=0$，

② $\int_{BC}(x+y)\mathrm{dx}+(y-x)\mathrm{dy}=\int_1^2 0+(y-4)\mathrm{dy}=\left(\frac{1}{2}y^2-4y\right)_1^2=-6+\frac{7}{2}$

说明：$BC:\begin{cases}x=4\\ y=y\end{cases}$，$y$ 从 1 到 2，$dx=d4=0$，$dy=dy$，

所以　$\int_L (x+y)\mathrm{dx}+(y-x)\mathrm{dy}=\left(12-\frac{3}{2}\right)+\left(-6+\frac{7}{2}\right)=8$.

（4）曲线 $x=2t^2+t+1$，$y=t^2+1$ 上从点 $(1,1)$ 到点 $(4,2)$ 的一段弧.

解　参数式已知，求解本题关键在确定积分限，

积分起点 $(1,1)$ 代入参数式中 $\begin{cases}1=2t^2+t+1\\ 1=t^2+1\end{cases}$ 算出对应的参数值为：$t=0$，

再将积分终点 $(4,2)$ 代入参数式中 $\begin{cases}4=2t^2+t+1\\2=t^2+1\end{cases}$ 算出对应的参数值为： $t=1$，

所以 $\displaystyle\int_L (x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y$

$$=\int\left[\left(2t^2+t+1\right)+\left(t^2+1\right)\right]\cdot\left(4t+1\right)dt+\left[\left(t^2+1\right)-\left(2t^2+t+1\right)\right]\cdot\left(2t\right)dt$$

$$=\int_0^1\left(10t^3+5t^2+9t+2\right)dt=\left(\frac{5}{2}t^4+\frac{5}{3}t^3+\frac{9}{2}t^2+2t\right)\Bigg|_0^1=\text{—}.$$

3. 计算曲线积分 $\int_L y\,\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=R^2$ 上对应于点 $(R,0)$ 到 $(0,R)$ 上的一段弧.

解　曲线的参数方程 $\begin{cases}x=R\cos t\\y=R\sin t\end{cases}$，参数 t 从 0 到 $\dfrac{\pi}{2}$，

$$\int_L y\,\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(R\sin t\right)d\left(R\cos t\right)+\left(R\cos t\right)d\left(R\sin t\right)=R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\sin^2 t+\cos t\right)dt$$

$$=R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t dt=\frac{1}{2}R^2\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}R^2\left(\sin\pi-\sin 0\right)=0.$$