习题 10.2 （P207）

1. 计算下列二重积分：

（1） $\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为区域：$|x|\le 1$，$|y|\le 2$；

解 $\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}dx\int_{-2}^{2}dy=8$.

（2） $\iint\limits_D \left(1-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为区域：$0\le x\le 1$，$-2\le y\le 2$；

解 $\iint\limits_D \left(1-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 dx\int_{-2}^{2}\left(1-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)dy=\int_0^1\left(y-\frac{x}{2}y-\frac{1}{6}y^2\right)_{-2}^{2}dx=\int_0^1(4-2x)dx$

$=\left(4x-x^2\right)_0^1=3$.

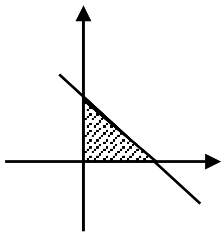
（4） $\iint\limits_D (x^3+3x^2y+y^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D：$0\le x\le 1$，$1\le y\le 2$.

解 $\iint\limits_D (x^3+3x^2y+y^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y==\int_0^1 dx\int_1^2(x^3+3x^2y+y^3)dy=\int_0^1\left(x^3y+\frac{3}{2}x^2y^2+\frac{1}{4}y^4\right)_1^2dx$

$=\int_0^1\left(x^3+\frac{9}{2}x^2+\frac{15}{4}\right)dx=\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^3+\frac{15}{4}x\right)_0^1=\frac{11}{2}$.

2. 画出积分区域，并计算下列二重积分：

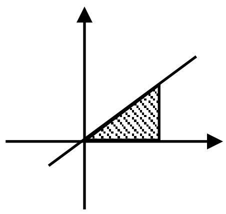
（1） $\iint\limits_D (3x+2y)\mathrm{d}\delta$， 其中 D 是由 $x=0,y=0$ 与直线 $x+y=1$ 所围成；



解 $\iint\limits_D (3x+2y)\mathrm{d}\delta=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(3x+2y)dy=\int_0^1\left(3xy+y^2\right)_0^{1-x}dx$

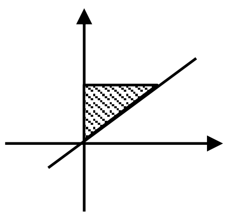
$=\int_0^1\left(1+x-2x^2\right)dx=\left(x+\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3\right)_0^1=1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$.

（2） $\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$， 其中 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le x\}$；



解 $\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 dx\int_0^x xdy=\int_0^1 x(y)_0^x dx=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{1}{3}$.

（3） $\iint\limits_D y\sin\frac{x}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$， 其中 D 由直线 $y=x$， $y=2$ 及 $x=0$ 所围成；

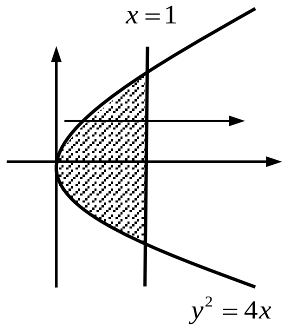


解 $\iint\limits_D y\sin\frac{x}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2 ydy\int_0^y\sin\frac{x}{y}dx=\int_0^2 y^2\left(-\cos\frac{x}{y}\right)_0^y dy$

$=\int_0^2 y^2(1-\cos 1)dy=\left[(1-\cos 1)\frac{1}{3}y^3\right]_0^2=\frac{8}{3}(1-\cos 1)$

（4）$\iint\limits_D xy^2\,\mathrm{d}\delta$，其中 D 是由抛物线 $y^2=4x$ 和直线 $x=1$ 所围成的闭区域；

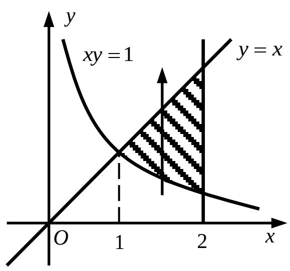
解 $\iint\limits_D xy^2\,\mathrm{d}\delta=\int_0^1 dx\int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} xy^2 dy$（由关于 y 的对称性）



$=2\int_0^1 dx\int_0^{2\sqrt{x}} xy^2 dy=2\int_0^1 x\left(\frac{1}{3}y^3\right)_0^{2\sqrt{x}} dx$

$=\frac{2}{3}\int_0^1 x\left(2\sqrt{x}\right)^3 dx=\frac{16}{3}\int_0^1 x^{\frac{5}{2}}dx=\frac{16}{3}\cdot\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}\Big|_0^1=\frac{32}{21}$.

（6）$\iint\limits_D \frac{x}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 由 $y=x$，$y=\frac{1}{x}$ 及直线 $y=2$ 所围成；



解 $\iint\limits_D \frac{x}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2 dy\int_{\frac{1}{y}}^{y}\frac{x}{y}dx=\int_1^2 dy\int_{\frac{1}{y}}^{y}\left(\frac{1}{2y}x^2\right)dx$

$=\int_1^2\left(\frac{1}{2}y-\frac{1}{2y^3}\right)dy=\frac{1}{4}\left(y^2+\frac{1}{y^2}\right)_1^2=\frac{9}{16}$.

3. 改变下列积分次序：

（1）$\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y$；

解 第一步：写出积分区域 D：$0\le x\le 1,\quad x^3\le y\le x^2$

第二步：画出积分区域的图形

第三步：先对 x 积分，写出不等式：D：$0\le y\le 1,\ \sqrt{y}\le x\le\sqrt[3]{y}$，

第四步：写出先对 x 积分，后对 y 积分的二次积分 $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\mathrm{d}x$

所以 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\mathrm{d}x$.

（2）$\int_0^2\mathrm{d}y\int_{y^2}^{2y} f(x,y)\mathrm{d}x$；

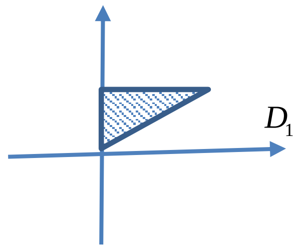
解 同样按上述四个步骤做，$\int_0^2\mathrm{d}y\int_{y^2}^{2y} f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^4\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\mathrm{d}y$.

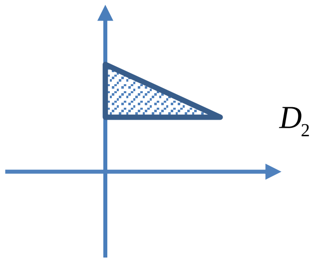
（3）$\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{2y} f(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_1^2\mathrm{d}y\int_0^{4-2y} f(x,y)\,\mathrm{d}x$.（选做）

解 由第一个积分 $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{2y} f(x,y)\,\mathrm{d}x$，写出积分区域 D_1：$0\le y\le 1,\quad 0\le x\le 2y$

由第二个积分 $\int_1^2\mathrm{d}y\int_0^{4-2y} f(x,y)\,\mathrm{d}x$，写出积分区域 D_2：$1\le y\le 2,\quad 0\le x\le 4-2y$

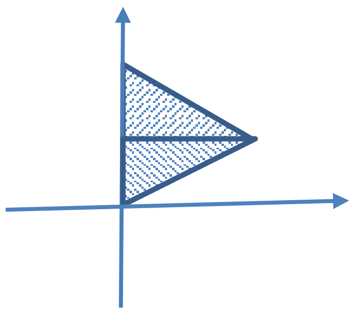
第二步：画出积分区域的图形





合并成一个区域

$D = D_1 \cup D_2$



第三步：先对 y 积分，写出不等式：$D = D_1 \cup D_2$： $0 \le x \le 2,\ \frac{1}{2}x \le y \le 2 - \frac{1}{2}x$，

第四步：写出先对 y 积分，后对 x 积分的二次积分 $\int_0^2 \mathrm{d}x \int_{\frac{1}{2}x}^{2-\frac{1}{2}x} f(x, y)\mathrm{d}y$，

所以 $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{2y} f(x, y)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \mathrm{d}y \int_0^{4-2y} f(x, y)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \mathrm{d}x \int_{\frac{1}{2}x}^{2-\frac{1}{2}x} f(x, y)\mathrm{d}y$.

5. 设 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续，证明：$\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^a (a-x) f(x)\,\mathrm{d}x$.（选做）

证明 等式左边交换积分次序

$$\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^a \mathrm{d}y \int_y^a f(y)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(y)\mathrm{d}y \int_y^a \mathrm{d}x = \int_0^a f(y) x\Big|_y^a \mathrm{d}y$$

$$= \int_0^a (a-y) f(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^a (a-x) f(x)\,\mathrm{d}x .$$