7.3 一阶线性微分方程

要求：记住一阶线性方程的标准形式及通解公式

一、一阶线性微分方程

定义： 形如 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ 的方程称为**一阶线性微分方程**,

其中 $P(x),Q(x)$ 均为已知函数.

当 $Q(x)=0$ 时，$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$ 称为一阶线性齐次方程；

当 $Q(x)\neq 0$ 时，$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ 称为一阶线性非齐次方程.

注意：$\frac{dy}{dx}$ 的系数为1时，$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ 称为标准形式.

如：$x\frac{dy}{dx}+x^2y=\ln x$ 是一阶线性非齐次方程.

整理：$\frac{dy}{dx}+xy=\frac{\ln x}{x}$ 是**标准**的一阶线性非齐次方程.

1. 一阶线性齐次微分方程$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$的解法

分离变量，$\frac{1}{y}dy=-P(x)dx,\quad y\neq 0$

两边积分，$\ln|y|=-\int P(x)dx+C_1,\qquad |y|=e^{-\int P(x)dx+C_1},$

整理：$y=e^{-\int P(x)dx}\cdot\left(\pm e^{c_1}\right)$　记 $C=\pm e^{C_1}$　得 $y=Ce^{-\int P(x)dx}$

结论：$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$的通解为 $y=Ce^{-\int P(x)dx}$

例如 $\frac{dy}{dx}-3x^2y=0$　通解：$y=Ce^{-\int(-3x^2)dx}=Ce^{x^3}$

这是P124例7.2的例题，对比看看结果是一样的.

2. 一阶线性非齐次微分方程$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$的解法

推导：$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$，移项$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-P(x)y+Q(x)$

整理$\Rightarrow \frac{1}{y}dy=\left[-P(x)+\frac{Q(x)}{y}\right]dx$

积分$\Rightarrow \ln y=-\int P(x)dx+\int\frac{Q(x)}{y}dx$

化简$\Rightarrow y=e^{-\int P(x)dx+\int\frac{Q(x)}{y}dx}=e^{\int\frac{Q(x)}{y}dx}\cdot e^{-\int P(x)dx}$

$=C(x)e^{-\int P(x)dx}$

记$C(x)=e^{\int\frac{Q(x)}{y}dx}$

第一步：得到

$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$

通解的结构为：

$y=C(x)e^{-\int P(x)dx}$

其中$C(x)$为待定函数.

第二步：再求待定函数$C(x)$

根据$\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$解的结构 $y=C(x)e^{-\int P(x)dx}$

$$y'=\left[C(x)e^{-\int P(x)dx}\right]'=C'(x)e^{-\int P(x)dx}+C(x)e^{-\int P(x)dx}\cdot\left[-\int P(x)dx\right]'$$

$$y'=C'(x)e^{-\int P(x)dx}-P(x)\cdot C(x)e^{-\int P(x)dx}$$

将以上两有色结论代入方程：$\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$，有

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx}-P(x)\cdot C(x)e^{-\int P(x)dx}+P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x)$$

整理得，$C'(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x)$ 即 $C'(x)=Q(x)e^{\int P(x)dx}$

两边积分，求出$C(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C$

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)\text{的通解为}\quad y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$$

一阶线性微分解法一：公式法

例7.7$(P129)$　求下列微分方程的通解

$$(1)\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=x^2 \qquad (2)\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$$

解 (1)已知$P(x)=\dfrac{2}{x}$，$Q(x)=x^2$　**正确写出$P(x),Q(x)$很重要**

由通解公式 $y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$得，

$$y=e^{-\int\frac{2}{x}dx}\left[\int x^2e^{\int\frac{2}{x}dx}dx+C\right]=x^{-2}\left[\int x^2\cdot x^2dx+C\right]=\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{5}x^5+C\right)$$

$$(2)\ \frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$$

解：已知 $P(x)=-\dfrac{2}{x+1},\quad Q(x)=(x+1)^{\frac{5}{2}}$

先算积分 $e^{-\int P(x)dx}=e^{\int\frac{2}{x+1}dx}=e^{2\ln(x+1)}=e^{\ln(x+1)^2}=(x+1)^2$

据公式 $y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$**，所求方程通解为**

$$y=(x+1)^2\left[\int (x+1)^{\frac{5}{2}}\cdot(x+1)^{-2}dx+C\right]$$

$$=(x+1)^2\left[\int (x+1)^{\frac{1}{2}}dx+C\right]$$

$$=(x+1)^2\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C\right]$$

注意：$e^{-\int P(x)dx}$和$e^{\int P(x)dx}$互为倒数.

练习：

$(1)\frac{dy}{dx}+2xy=4x$

$(2)\frac{dy}{dx}+3y=8, y(0)=2$

$(3)\left(x^2-1\right)y'+2xy=\cos x$

$(4)\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+y}$

答案：

$(1)\, y=2+Ce^{-x^2}$

$(2)\, y=\frac{8}{3}+Ce^{-3x}, C=\frac{2}{3}$

特解 $y=\frac{8}{3}+\frac{2}{3}e^{-3x}$

$(3)\, y=\frac{\sin x+C}{x^2-1}$

解(4)将方程分子分母倒过来，将x看作函数，得

$$\frac{dx}{dy}=x+y \quad \text{整理：} \frac{dx}{dy}-x=y$$

通解：$x=e^{\int 1dy}\left[\int ye^{-\int dy}dy+C\right]=e^{y}\left[\int ye^{-y}dy+C\right]$

$$=e^{y}\left[(-y-1)e^{-y}+C\right]=-y-1+Ce^{y}$$

一阶线性微分解法二： 常数变易法

第一步：先求对应齐次方程 $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=0$ 的通解

前面已介绍，通解为 $y=Ce^{-\int P(x)dx}$

第二步：将通解中的常数变成函数 $y=C(x)e^{-\int P(x)dx}$

求导 $y'=C'(x)e^{-\int P(x)dx}-P(x)\cdot C(x)e^{-\int P(x)dx}$

将 y' 及 y 代入原方程，得

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx}-P(x)\cdot C(x)e^{-\int P(x)dx}+P(x)\cdot C(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x)$$

$C'(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x)$ 即 $C'(x)=Q(x)e^{\int P(x)dx}$

积分，$C(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C$

常数变易法实际上是通解推导过程，一般用公式法求解.

故，$\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$的通解为

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$$

例7.7$(P129)$ $(2)\ \dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$

解 第一步：求对应齐次方程通解

$$y=Ce^{-\int P(x)dx}=Ce^{-\int\left(\frac{-2}{x+1}\right)dx}=Ce^{2\ln(x+1)}=C(x+1)^2$$

第二步：将通解中的常数变为x的函数

$$y=C(x)(x+1)^2$$

$$y' = C'(x)(x+1)^2 + C(x)2(x+1) \qquad y = C(x)(x+1)^2$$

将y'及y代入原方程，得

$$C'(x)(x+1)^2 + C(x)2(x+1) - \frac{2}{x+1}C(x)(x+1)^2 = (x+1)^{\frac{5}{2}}$$

$$C'(x)(x+1)^2 \boxed{+C(x)2(x+1) - \frac{2}{x+1}C(x)(x+1)^2} = (x+1)^{\frac{5}{2}}$$

$$C'(x)(x+1)^2 = (x+1)^{\frac{5}{2}} \qquad C'(x) = (x+1)^{\frac{1}{2}} \qquad C(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

通解 $y = (x+1)^2\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C\right]$

这是完整的常数变易法求解过程，实际解题时一般直接套公式

二、伯努利方程

形如 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n\ (n\neq 0,1)$ 的方程称为伯努利方程.

解法: $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n \xRightarrow{\text{除以}y^n} y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)\cdot y^{1-n}=Q(x)$

$$\xRightarrow{\text{令}u=y^{1-n}} \frac{1}{1-n}\cdot\frac{du}{dx}+P(x)u=Q(x)$$

说明：令$u=y^{1-n}$,两边对x求导，有 $\frac{du}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$ 即 $y^{-n}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1-n}\cdot\frac{du}{dx}$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx}+(1-n)P(x)u=(1-n)Q(x)\text{（此为一阶线性微分方程）}$$

$P132$ 3. (1) $\frac{dy}{dx}-3xy=xy^2$

解 两边除以 y^2 得 $\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}-3x\cdot\frac{1}{y}=x$

令 $u=\frac{1}{y}$, 则 $\frac{du}{dx}=-\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}$ 即 $\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}=-\frac{du}{dx}$，代入上式，有

$-\frac{du}{dx}-3xu=x$ 即 $\frac{du}{dx}+3xu=-x$（解此一阶线性微分方程并还原即可）

作业：$P131$

$1(1),(3)\quad 2(1),(3)$

预习：第7.5节