§4.3 曲线的单调性与凹凸性

要求：会求曲线的单调区间

中学学过函数的单调性判定，现在问一个问题：

函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 单调增减性的分界点怎么确定？

用导数来判定很简单

函数定义域为 $x\in R$ 且 $x\neq 0$，$f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}$

令 $f'(x)=0$，得 $x=-1$ 或 $x=1$

在 $(-\infty,\ -1)$ 及 $(1,\ \infty)$，$f'>0$，$f(x)$ 单调增加；

在 $(-1,\ 0)$ 及 $(0,\ 1)$ 内，$f'<0$，$f(x)$ 单调减少.

本节将就上述判定方法给予理论上的证明.

一、曲线的单调增减性判定法

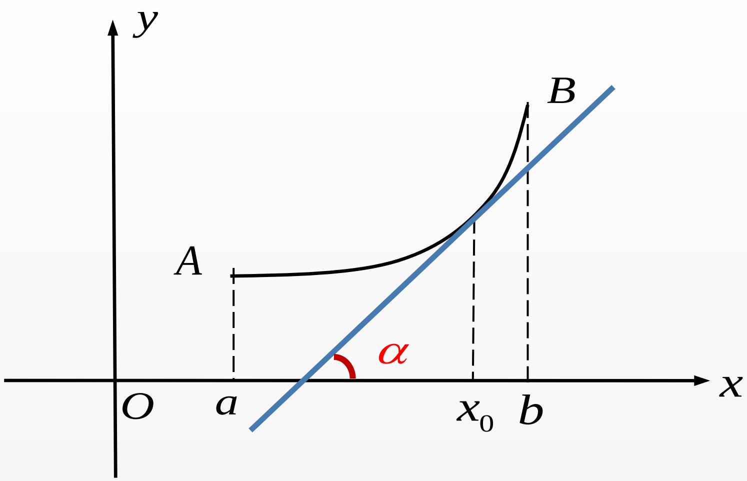


图4.3

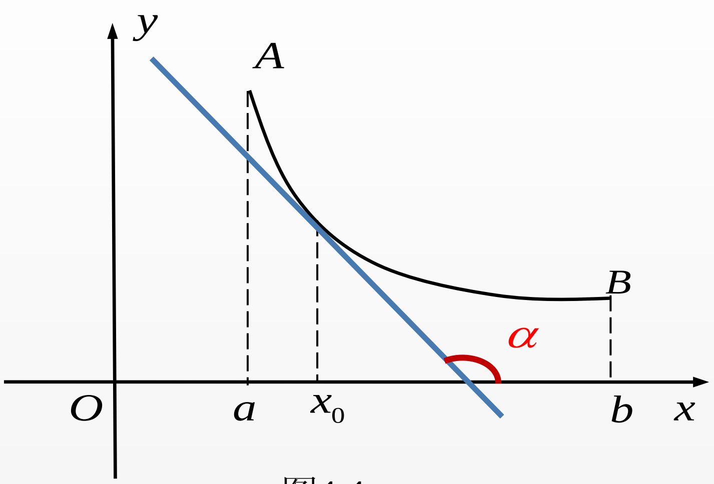


图4.4

若函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内递增，则曲线上任意点处的切线倾斜角 $0<\alpha<90^0$，即 $k=f'(x)=\tan\alpha>0$.

若函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内递减，则曲线上任意点处的切线倾斜角 $90^0<\alpha<180^0$，即 $k=f'(x)=\tan\alpha<0$.

$f'(x)>0 \Rightarrow y=f(x)$ 递增？

$f'(x)<0 \Rightarrow y=f(x)$ 递减？

定理4.5　(P63)

设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，在 (a,b) 内，

(1) 若 $f'(x)>0$, 则 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加；

(2) 若 $f'(x)<0$, 则 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是减函数.

例4.7（P63）求曲线 $f(x)=4x^3+15x^2-18x+1$ 的单调增减区间.

解 函数定义域为 $(-\infty,+\infty)$，又 $f'=12x^2+30x-18=6(2x-1)(x+3)$

令 $f'(x)>0$，得 $x>\frac{1}{2}$ 或 $x<-3$，所以函数 $f(x)$ 的

单调增加区间为 $(-\infty,-3)$ 与 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$；

令 $f'(x)<0$, 得 $-3\le x\le\frac{1}{2}$，

函数在 $[-3,\frac{1}{2}]$ 内单调递减.

要点：在 (a,b) 内，

$f'(x)>0\Rightarrow f(x)$ 是增函数；

$f'(x)<0\Rightarrow f(x)$ 是减函数

求函数单调增减区间步骤：

驻点：见教材P56

使$f'(x)=0$的点称为驻点.

(1)求函数定义域

(2)计算$f'(x)$，求驻点及一阶导数不存在的点

(3)讨论$f'(x)$的符号，确定增减性

补充例题1：求曲线$f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$的单调区间.

解：函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$

$$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$$

解方程$f'(x)=0$，即$6(x-1)(x-2)=0$

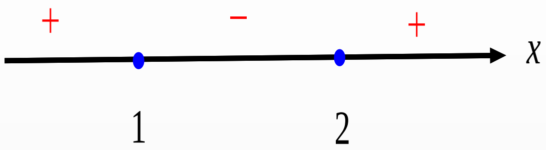
得出它在定义域内的两驻点 $x_1=1, x_2=2$

无一阶导数不存在的点；

这两个驻点把定义域分成三个部分，列表讨论

x	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↗	↘	↗

也可如右图，在数轴上看



故，函数的单调增区间为$(-\infty,1)$与$(2,+\infty)$；单调减区间为$[1,2]$.

例4.8（P64）讨论函数 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 的单调性.

解　函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$　$y'=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}\ (x\neq 0)$

当$x=0$时，导数不存在.

在$(-\infty,0)$内，$y'<0$，函数在该区间内递减；

在$[0,+\infty)$内，$y'>0$，函数在该区间内递增.

例4.8 给出一个函数在导数不存在的点单调性发生改变的例子

补充例题2：讨论函数 $y=x^3$ 的单调性.

解：函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，　$f'(x)=3x^2$，

当 $x=0$ 时，$f'(x)=0$，但在定义域内，$f'(x)\geq 0$，

故函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内恒为增函数.

综上讨论得出：

(1) 导数不存在的点，增减性也可发生改变；如 $y=\sqrt[3]{x^2}$

(2) 导数为零的点，增减性不一定改变；如 $y=x^3$

所以求出导数为零的点及导数不存在的点后一定要进行增减性判定

这类证明题有难度，不要求大家都会.

利用单调性，还可以证明不等式

例4.10 证明，当$x>0$时，$(1+x)\ln(1+x)>\arctan x$.

分析：要证上述不等式，需证明$(1+x)\ln(1+x)-\arctan x>0$

由增函数定义，当$x>0$时，必有$f(x)>f(0)$，需要找一个增函数

证明 令$f(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x$

$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，在$(0,+\infty)$内可导，

$$f'(x)=\ln(1+x)+\frac{x^2}{1+x^2}>0,\quad f(x)\text{是增函数},$$

当$x>0$时，$f(x)>f(0)$，

即 $(1+x)\ln(1+x)-\arctan x>(1+0)\ln(1+0)-\arctan 0=0$

这类题证明要点是两找：找函数，找区间.

课堂练习

求下列函数的单调区间

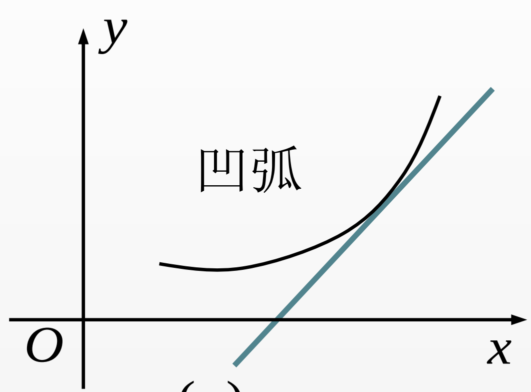
$(1)\ y=2x^3-6x^2-18x-7$　　$(2)\ y=2x+\dfrac{8}{x}\ (x>0)$

答案

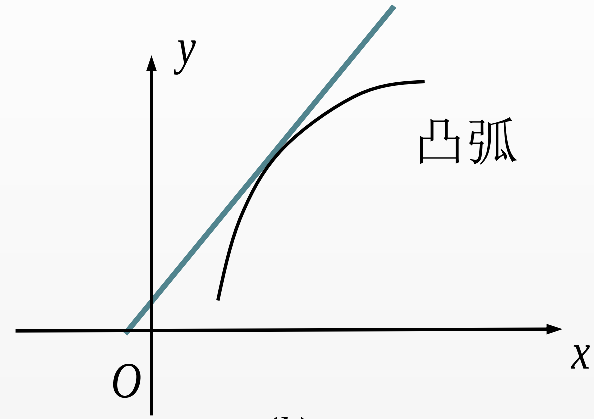
(1) 在$(-\infty,-1)$、$(3,+\infty)$内单调增加，在$[-1,3]$内单调减少

(2) 在$(0,2]$内单调减少，在$(2,+\infty)$内单调增加

二、曲线的凹凸性及拐点



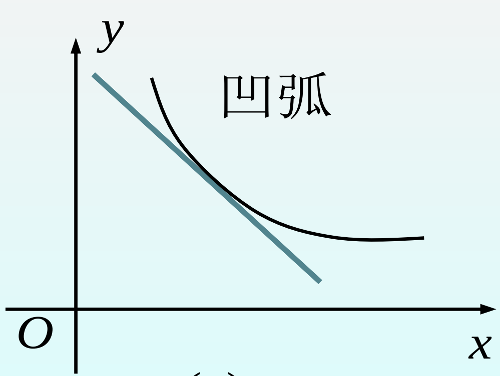
(a)



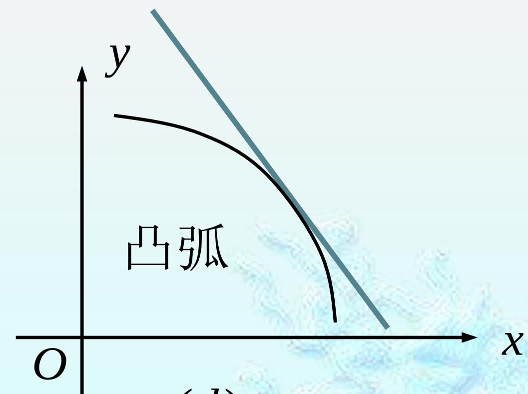
(b)

凹：切线都在曲线下方.

凸：切线都在曲线上方.

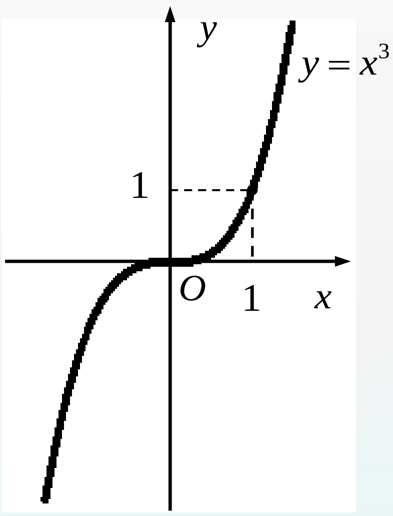


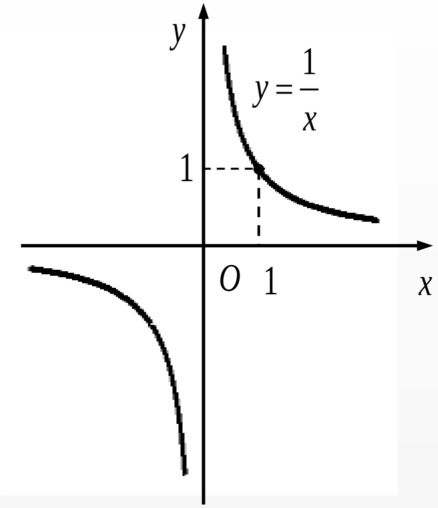
(c)



(d)

$y=x^3$在$(-\infty,0)$内为凸弧，在$(0,+\infty)$为凹弧，$(0,0)$称为**拐点**.





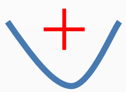
$y=\frac{1}{x}$在$(-\infty,0)$内是凸弧，在$(0,+\infty)$内是凹弧，曲线上**没有拐点**.

曲线上凹弧与凸弧的分界点称为拐点（教材P65）

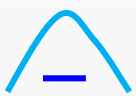
注意：拐点在曲线上，点是二维坐标$(x,f(x))$

定理：设曲线 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有一阶和二阶导数，那么 (a,b) 内，

(1) 若 $f''(x)>0$，则曲线在 (a,b) 内为凹弧；



(2) 若 $f''(x)<0$，则曲线在 (a,b) 内为凸弧.



研究曲线凹凸性步骤：

1.求函数定义域；

2.计算二阶导数，求使二阶导数等于零的点；

3.列表判定曲线凹凸性.

例4.11（P65）求曲线$y=\frac{x^2}{2}+\frac{9}{10}(x-2)^{\frac{5}{3}}$的凹向及拐点.

解：函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$

$$y'=x+\frac{3}{2}(x-2)^{\frac{2}{3}},\quad y''=1+(x-2)^{-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt[3]{x-2}+1}{\sqrt[3]{x-2}}$$

令$y''=0$,求出$x=1$，当$x=2$时，y''不存在，

曲线的凹凸区间列表讨论：

x	$(-\infty,\ 1)$	1	$(1,\ 2)$	2	$(2,\ +\infty)$
y''	+	0	−	不存在	+
凹凸	凹	拐点	凸	拐点	凹

综上所述，曲线在$(-\infty,1)$和$(2,+\infty)$内为凹弧，在$(1,2)$内为凸弧；$\left(1,-\frac{2}{5}\right)$及$(2,3)$是曲线的拐点.

例4. 12 ($P66$) 讨论下列函数的拐点：

(1) $f(x)=x^4$ (2) $y=x^4-2x^3+1$

小结：

1.**单调性判断：在(a,b)内，$f'(x)>0$则$f(x)$递增；**

$f'(x)<0$则$f(x)$递减.

2.**曲线凹凸与拐点：在(a,b)内，$f''(x)>0$则曲线为凹弧；**

$f''(x)>0$则曲线为凸弧.

凹弧与凸弧的分界点为拐点.

作业： **P**67

必做： 2. (1)，(5)

5. (1)

选做： 3. (1)

P66 1. 选择题 写在书上