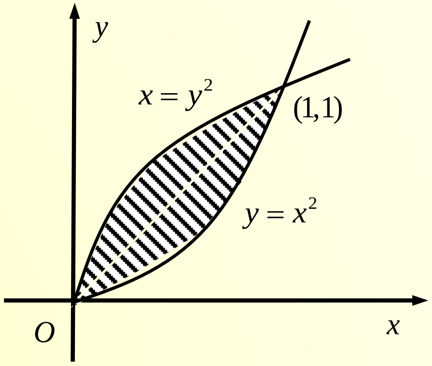
第10.4节 重积分应用 这里仅介绍重积分的几何应用

1、平面区域的面积



二重积分性质，在 D 上 $f(x, y) = 1$，则

$$\iint_D 1 d\delta = D \text{ 的面积}$$

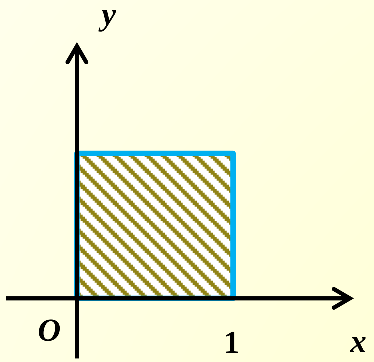
例1 求由 $y = x^2$， $x = y^2$ 围成平面图形的面积.

解

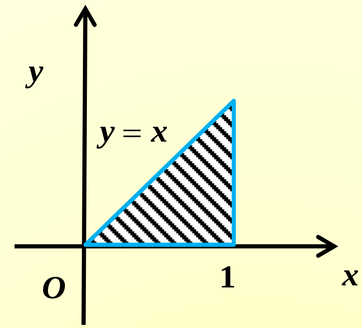
$$\iint_D d\delta = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy = \int_0^1 y \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx$$

$$= \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^3\right)_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

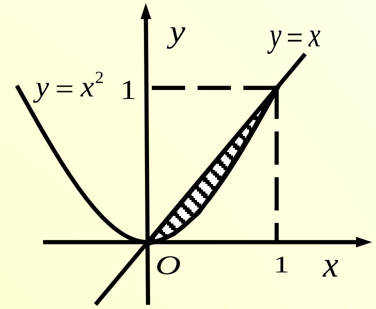
平面区域的面积还可以用定积分来计算(上学期介绍的内容)



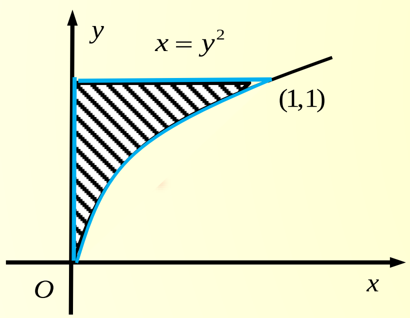
面积 $S=1$



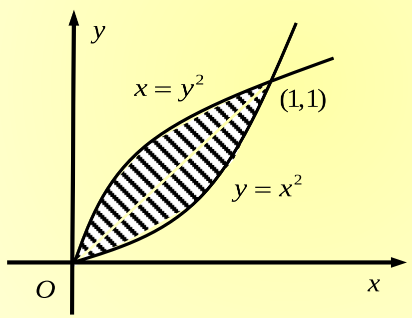
面积 $S=\frac{1}{2}$



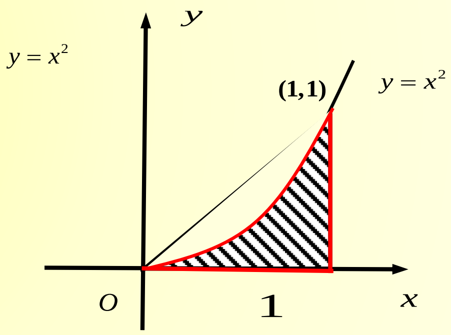
面积 $S=\frac{1}{6}$



面积 $S=\frac{1}{3}$



面积 $S=\frac{1}{3}$



面积 $S=\frac{1}{3}$

记住这些图形由哪几条曲线围成，面积是多少.

二、立体的体积

二重积分几何意义 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 是以 $f(x,y)$ 为顶，以 D 为底的曲顶柱体体积.

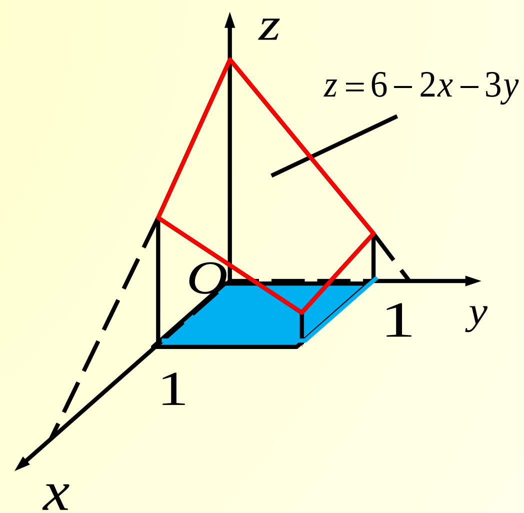
实际应用中，根据题目给出的条件，需找“顶”(即被积函数 $f(x,y)$)，还要确定“底”(即积分区域 D)

(P212） 例10. 11 计算由四个平面 $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及 $2x+3y+z=6$ 截得的立体的体积.

由上面的分析，根据题目所给条件

顶 $f(x,y)=6-2x-3y$ 底 D: $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$

解 $V=\iint\limits_D (6-2x-3y)\,dxdy=\int_0^1 dx\int_0^1(6-2x-3y)\,dy$



物理应用有兴趣的同学自学

§10.5 三重积分及其计算(一)

要求：会计算简单的三重积分

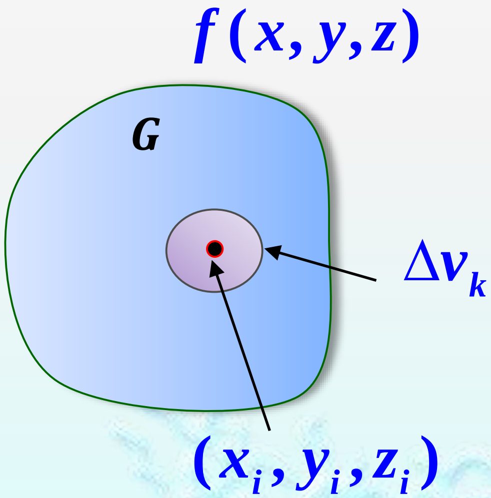
二重积分是化为两个定积分来计算. 那么三重积分怎么计算?

猜想三重积分是化为三个定积分来计算? 答案：正确

问题：怎样化为三次积分? 积分限如何确定?

以求非均匀物体的质量为例

- 分割： 把G分为 $\Delta v_1, \Delta v_2, \cdots, \Delta v_i, \cdots, \Delta v_n$
- 近似： $\Delta M_i \approx f(x_i, y_i, z_i)\Delta v_i$
- 求和： $M \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta v_i$
- 取极限： $M = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta v_i$

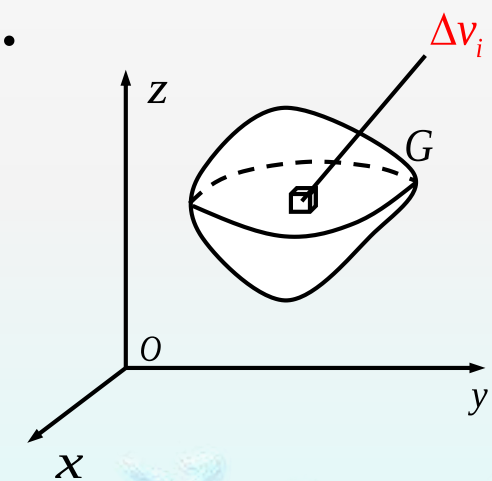


一、三重积分定义 (*P*217)

设 $f(x,y,z)$为空间有界闭区域G上的有界函数，将G分割成n个小闭区域$\Delta v_i\ (i=1,2,\cdots n)$，并在$\Delta v_i$内任取一点$(x_i,y_i,z_i)$，

约定
$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\cdot\Delta v_i = \iiint\limits_{G} f(x,y,z)dv$$

上式右端称为函数 $f(x,y,z)$在G上的三重积分.



$$\iiint\limits_{\underbrace{G}_{\text{积分区域}}} \underbrace{\underbrace{f(x,y,z)}_{\text{被积函数}}\ \underbrace{dv}_{\text{体积元素}}}_{\text{被积表达式}}$$

三重积分物理意义：空间体 G 的质量 M

设连续函数 $f(x,y,z)$ 表示某物体在点 (x,y,z) 处的密度，G 是该物体所占有的空间闭区域，则该物体的质量

$$M = \iiint_G f(x,y,z)dv$$

三重积分没有几何意义

三重积分的计算方法较多，有

1. 直角坐标计算

2. 柱坐标计算

3. 球坐标计算

我们主要介绍直角坐标计算，且空间区域 G 较简单

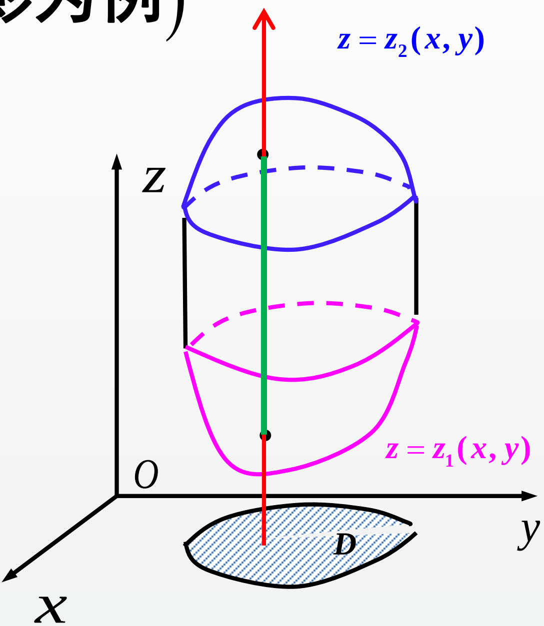
在直角坐标系中，体积元素 $dv = dxdydz$

二、直角坐标系中计算三重积分

1. 投影法(先单后重)：(以G向xoy平面上投影为例)

用平行于z轴的有方向的直线穿过空间体G，直线与G的边界曲面相交不多于两点

$$z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)$$



把G投影到xoy面，得到平面区域D

$$G=\left\{(x,y,z)\middle| z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y),\quad (x,y)\in D\right\}$$

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dv = \iint_D \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right] d\delta$$

这就是所谓的**先单后重**法：先做一个定积分，后做一个二重积分

投影法指的是空间区域G向坐标面投影

约定记号

$$\iint\limits_{D}\left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right]d\delta = \iint\limits_{D} d\delta\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

(*P*218) 例10.17 计算三重积分$I=\iiint\limits_{G} xydv$，其中G为由平面

$x+y+z=1$三个坐标面围成的闭区域.

分析：用先单后重法，先对z积分

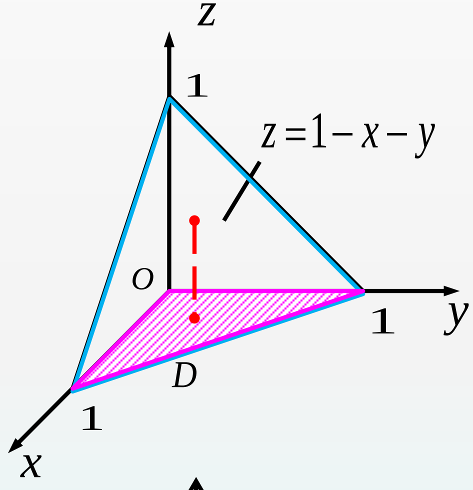
z的变化范围：$0\le z\le 1-x-y,\ (x,y)\in D$

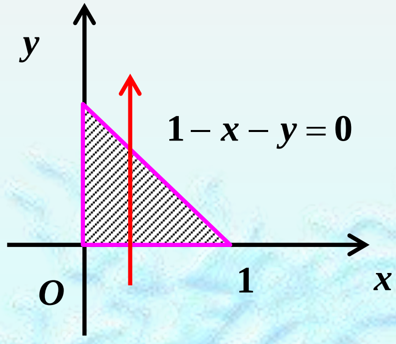
将G投影到xoy面，投影区域为D

$D:\ 0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 1-x$

$G:\ 0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 1-x,\quad 0\le z\le 1-x-y$

$$I=\iiint\limits_{G} xydv=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}xydz$$





补充例题

计算 $I=\iiint\limits_G x\cos y\,dv,\ G=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,0\le x\le 1,0\le y\le\frac{\pi}{2},-1\le z\le 1\right\}$

解 $I=\int_0^1 dx\int_0^{\frac{\pi}{2}} dy\int_{-1}^1 x\cos y\,dz$

$$=\boxed{\int_0^1 x\,dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos y\,dy\int_{-1}^1 dz}$$

变量放到相应的积分号下

$$=\boxed{\left(\frac{1}{2}x^2\right)_0^1}\times\boxed{(\sin y)_0^{\frac{\pi}{2}}}\times\boxed{(z)_{-1}^1}$$

看作三个定积分相乘

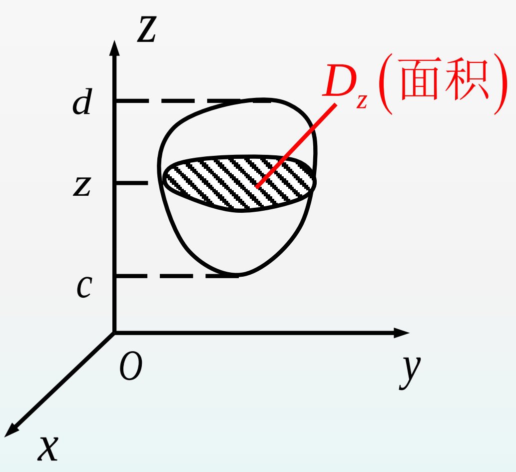
$$=\frac{1}{2}\times1\times2=1$$

2.平行截面法（先重后单）

下面利用计算空间体质量为例说明平行截面法(先重后单).

当被积函数（空间体G的体密度）只与x, y, z中的某一变量有关时，如$f(x,y,z)=\varphi(z)$,可考虑用“先重后单”计算三重积分.

根据“微元法”的思想，在任意的z处切出一小片，其体积近似为$D_z \cdot dz$,



其质量元素为

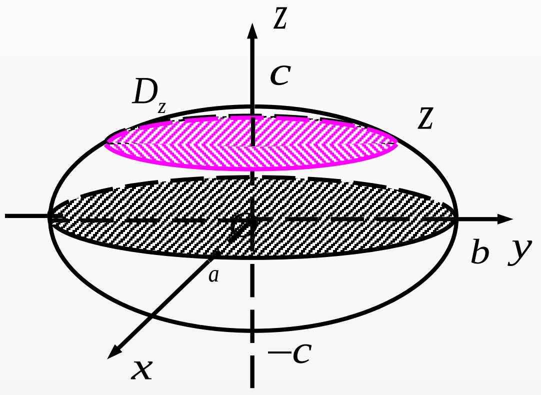
$$dM = f(x,y,z)\cdot D_z \cdot dz = \varphi(z)\cdot D_z \cdot dz$$

从而所求空间体的质量为$M=\int_c^d \varphi(z) D_z dz$

需要先求出任意z处的截面D_z的面积

例10.18　计算三重积分$\iiint\limits_{G} z^2 dxdydz$，其中$G$是由椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$所围成的空间闭区域.

解　用平行截面法(先重后单)求解



在$-c\le z\le c$ 范围内，用平行于xoy的平面截椭球面，截面D_z，方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{z^2}{c^2}$

椭圆 $\dfrac{x^2}{A^2}+\dfrac{y^2}{B^2}=1$ 的面积为πAB

D_z的面积为$\pi ab(1-\dfrac{z^2}{c^2})$

方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{z^2}{c^2}$

整理为标准形式

$$\frac{x^2}{\left(\underbrace{a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}}_{A}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\underbrace{b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}}_{B}\right)^2}=1$$

$$I=\iiint\limits_{G} z^2 dxdydz=\int_{-c}^{c} z^2 dz\iint\limits_{D_z} dxdy$$

$$=\int_{-c}^{c} z^2 D_z dz=\int_{-c}^{c} z^2 \pi ab(1-\frac{z^2}{c^2})dz$$

作业：

$P216$　2. 5.

作业：$P219$

必做　2. (1), (2), (3)

预习：　第10.6节