复习

第一章　主要掌握

(1)求函数定义域；

(2)函数的性质；

(3)基本初等函数的图形.

第二章

第一、二节，了解极限概念就行了

§2.3 无穷小量 极限的运算法则

要求：理解无穷小量概念，会求函数的极限

无穷小量是一个很重要的概念，用来求极限很方便

一、无穷小量与无穷大量

定义2.7　见P23

以零为极限的量称为无穷小量；

极限值为无穷大的量称为无穷大量.

如果 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$，则称 $\alpha(x)$ 当 $x \to x_0$ 时是无穷小量

例如：$\lim\limits_{x \to 2}(x-2)=0$，称当 $x \to 2$ 时，$x-2$ 为无穷小量；

如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$，则称 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时是无穷大量

例如：$\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$，称当 $x \to 1$ 时，$\dfrac{1}{x-1}$ 为无穷大量；

问：$y=\frac{1}{x}$是无穷大量还是无穷小量？

如果函数$f(x)$当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时的极限为零，则称函数$f(x)$当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时的无穷小量.

这里强调变量的变化过程

所以函数 $y=\frac{1}{x}$

当 $x\to\infty$ 时是无穷小量

当 $x\to 0$ 时是无穷大量

问：当$x\to 1$时是什么量？

$\because \lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x}=1$，所以既不是无穷小，也不是无穷大.

无穷大量与无穷小量的关系　见P24

无穷大量的倒数是无穷小量，反之亦然

例如： $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{1-x} = \infty$, $\lim\limits_{x \to 1}(1-x)=0.$

定理2.2 **(P24)**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha, \text{ 其中 } \lim_{x \to x_0} \alpha(x)=0$$

二、无穷小量的性质

性质2.7　两个无穷小量的代数和仍是无穷小量.

性质2.8　有界乘无穷小还是无穷小.

性质2.9　两个无穷小之积仍是无穷小.

注意：两个无穷小之商的结果不确定.

三、极限的四则运算法则　见P24

定理的前提条件：两个函数的极限都存在

定理2.3　设 $\lim f(x)=A,\ \lim g(x)=B$，则

$$(1)\ \lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B=\lim f(x)\pm\lim g(x)$$

$$(2)\ \lim f(x)g(x)=AB=\lim f(x)\lim g(x)$$

特别地　$\lim\left[cf(x)\right]=c\lim f(x)$

$$\lim[f(x)]^n=\left[\lim f(x)\right]^n$$

$$(3)\ \lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)},\ (B\neq 0)$$

实际应用中常犯的错误就是定理的前提条件不满足

求极限例题

例2. 5 求下列函数的极限：(P24)

$$(1)\ \lim_{x\to 1}\left(x^2-3x+2\right) \qquad \text{补充}\ (2)\ \lim_{x\to 1}\frac{3x-1}{x^2+x-6}$$

解 $(1)\ \lim_{x\to 1}\left(x^2-3x+2\right)=\lim_{x\to 1}x^2-3\lim_{x\to 1}x+\lim_{x\to 1}2 = 1-3+2=0$

解 (2) 分子 $\lim_{x\to 1}(3x-1)=2,$ 分母 $\lim_{x\to 1}\left(x^2+x-6\right)=-4,$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{3x-1}{x^2+x-6}=\frac{\lim_{x\to 1}(3x-1)}{\lim_{x\to 1}\left(x^2+x-6\right)}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}$$

求极限方法一：**用四则运算法则**

用法则 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)},\ (B\neq 0)$时

注意：分子，分母极限都存在，且分母的极限不为零.

例2.5　（2）$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x-1}{x^2+x-6}$　　补充　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\cos x$

解 (2) $\because \lim\limits_{x\to 2}(3x-1)=5$, 而 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+x-6)=0$

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x-6}{3x-1}=0$　根据无穷小与无穷大的关系 (P24)

$$\therefore \lim_{x\to -1}\frac{3x-1}{x^2+x-6}=\infty$$

补充 $\because \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$　$|\cos x|\le 1$　根据无穷小的性质2.8 (P24)

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cos x=0$$

求极限方法二：用无穷小的运算法则

例2. 6 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^3-1}$ (P25)

解 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x+1)}{(x^2+x+1)}=\frac{2}{3}$

这类题型特点：分子分母极限都是零，且它们都是多项式时，通常采用因式分解的方法.

求极限方法三：因式分解，约去零因子

练习： $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3+x^2-2x}{x^2-1}$

解 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3+x^2-2x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x(x^2+x-2)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{x(x+2)}{(x+1)}=\frac{3}{2}$

补充例题： $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x-1}$

解 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(2-\sqrt{x+3})(2+\sqrt{x+3})}{(x-1)(2+\sqrt{x+3})}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{4-(x+3)}{(x-1)(2+\sqrt{x+3})}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1-x}{(x-1)(2+\sqrt{x+3})}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-1}{(2+\sqrt{x+3})}=\frac{-1}{4}$$

这类题型特点：分子分母极限都是零，但带有根式，通常采用分子分母同乘共轭根式的方法.

求极限方法四：去根号

求极限方法五：用公式

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots}=\begin{cases}0 & n<m\\ \dfrac{a_0}{b_0} & n=m\\ \infty & n>m\end{cases}$$

这类题型特点：分子分母极限都是无穷大，变量 $x\to\infty$

通常分子分母同时除以 x的最高次幂.

前面2.1节例题 $(1)\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n+1}$; $(2)\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-3n}{4n^2+9}$; $(3)\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{4n^2+9}$

答案： $(1)\ 2$ $(2)\ \dfrac{1}{4}$ $(3)\ 0$

补充例题 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2}{x^2+2x-1}$ (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-2}{x^3+x^2-1}$ (3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+5}{x^2-1}$

解 (1) $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2}{x^2+2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{2}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=3$$

(2) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-2}{x^3+x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}}{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}}=\frac{0}{1}=0$$

(当$x\to\infty$时,$\dfrac{1}{x}\to 0$)

(3) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+5}{x^2-1}=(\text{分子分母同除以}x^2)\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+\dfrac{5}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}}=\frac{\infty}{1}=\infty$$

练习：

$$(1)\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-7x+9}{6x^2+10x-6} \qquad (2)\lim_{x\to\infty}\frac{(3x-2)(2x+1)(5x-4)}{2x^3+3x-2}$$

解 (1) $$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-7x+9}{6x^2+10x-6}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{7}{x}+\frac{9}{x^2}}{6+\frac{10}{x}-\frac{6}{x^2}}=\frac{5}{6}$$

解 (2) $$\lim_{x\to\infty}\frac{(3x-2)(2x+1)(5x-4)}{2x^3+3x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(3-\frac{2}{x}\right)\left(2+\frac{1}{x}\right)\left(5-\frac{4}{x}\right)}{2+\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}}$$

$$=\frac{3\times2\times5}{2}=15$$

例2.8 $\lim\limits_{x\to-1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}\right)$ $(P25)$

复习公式：$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$

解 $\lim\limits_{x\to-1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}\right)=\lim\limits_{x\to-1}\frac{\left(x^2-x+1\right)-3}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}=\lim_{x\to-1}\frac{x-2}{x^2-x+1}=-1$$

求极限方法六：先通分，再求极限

练习 $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)=\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1+x}{(1-x)(1+x)}-\frac{2}{1-x^2}\right)$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{1-x^2}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(1-x)(1+x)}=-\frac{1}{2}$$

例2.9 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$ (P25)

复习等比数列求和公式 $a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}=a\frac{1-q^n}{1-q}$

所以，原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=2$

求极限方法七：先求和，再求极限

这种求极限的方法比较难，了解即可. 有兴趣的同学深入思考.

复习　P20单侧极限概念

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A$$

其中，$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$称为函数$f(x)$在$x_0$处的左极限；

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$称为函数$f(x)$在$x_0$处的右极限.

例2.10 设函数$f(x)=\begin{cases} x^2-x+1, & x>0 \\ 2, & x=0 \\ e^x, & x<0 \end{cases}$，求$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.（P25）

解 因 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} e^x=1,$

而 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2-x+1\right)=1$

故$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$

求极限方法八：

对于分段函数，要分别求左、右极限

求极限要求掌握前五种方法就行了

求极限练习

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}=-\dfrac{1}{2}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-1}=\dfrac{1}{2}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin 2x=0$

(4) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\dfrac{1}{4}$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-1)^{30}(3x-2)^{20}}{(2x+1)^{50}}=\dfrac{2^{30}\times3^{20}}{2^{50}}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{20}$

有兴趣的同学针对以下求极限的方法写出典型例题

求极限方法一：用四则运算法则

求极限方法二：用无穷小的运算法则

求极限方法三：因式分解，约去零因子

求极限方法四：去根号

求极限方法五：用公式

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots}=\begin{cases}0 & n<m\\ \dfrac{a_0}{b_0} & n=m\\ \infty & n>m\end{cases}$$

作业　P26

写在作业本上

$4(3)\quad 5(2),(8),(9)\qquad 6(1),(4)$

选做　9^{*}

预习：§2.4 两个重要　无穷小量的阶的比较