二、第二类换元积分法

注：第二类换元积分法学习有难度，了解就行，有兴趣的同学自己进一步看书，个别讨论.

当被积函数含有根号时，可考虑用换元积分法，换元的目的是消除根号，常用的有如下两种类型：

1. $\sqrt[n]{ax+b}$型：

令 $t=\sqrt[n]{ax+b}$ 得 $x=\dfrac{t^n-b}{a}$，则$dx=\dfrac{1}{a}\cdot nt^{n-1}dt$，并代入计算.

例5. 8 $\displaystyle\int\frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$ $(P87)$

$$=\int\frac{1}{1+t}dt^2=\int\frac{2t}{1+t}dt=2\int\frac{(t+1)-1}{1+t}dt=2(t-\ln|1+t|)+c$$

$$=2\sqrt{x}-2\ln\left|1+\sqrt{x}\right|+c$$

换元：令$t=\sqrt{x}$ 还原：$t=\sqrt{x}$

例5.8（2）$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}$ (*P*87)

解：令 $x=t^6$, 则 $dx=\left(t^6\right)' dt=6t^5dt$,

变换 $x=t^6$，目的是同时去掉两个根号 $\sqrt{x}$ 和 $\sqrt[3]{x}$

所以 $$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}=\int \frac{6t^5dt}{t^3\left(1+t^2\right)}=6\int \frac{t^2}{1+t^2}dt$$

$$=6\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt=6\int \left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt=6\left(t-\arctan t\right)+C$$

$$=6\left(\sqrt[6]{x}+\arctan\sqrt[6]{x}\right)+C$$

2 第二种类型如$\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$, $\sqrt{x^2+a^2}$或$\left(x^2+a^2\right)^n$,其中$a>0$.

常用的方法：用“三角变换”将根号消除.

(1)$\sqrt{a^2-x^2}$　令 $x=a\sin t$, 则$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\cos t$,

由公式$\sin^2 x+\cos^2 x=1\to a^2-(a\sin t)^2=(a\cos t)^2$

(2)$\sqrt{x^2-a^2}$　令 $x=a\sec t$, 则$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2\sec^2 t-a^2}=a\tan t$,

由公式$1+\tan^2 x=\sec^2 x\to(a\sec t)^2-a^2=(a\tan t)^2$

(3)$\sqrt{x^2+a^2}$　令 $x=a\tan t$, 则$\sqrt{x^2+a^2}=\sqrt{a^2\tan^2 t+a^2}=a\sec t$.

由公式$1+\tan^2 x=\sec^2 x\to(a\tan t)^2+a^2=(a\sec t)^2$

注：因为换元后都要还原，故可不考虑t的取值范围.

例5.9 求下列不定积分：（P88）

$$(1)\int \sqrt{a^2-x^2}dx \ \ (a>0) \qquad\qquad (2)\int \frac{dx}{\left(x^2+4\right)^2}$$

解 (1)令$x=a\sin t$, 则$dx=(a\sin t)'dt=a\cos tdt$

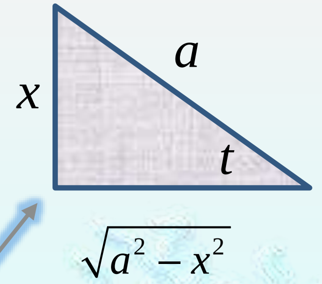
$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx=\int \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos tdt$$

$$=\int a^2\cos^2 tdt=a^2\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{a^2}{2}\int (1+\cos 2t)dt$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=\frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)+C$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a^2}\right)+C$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$$



直角三角形还原法

$$(2)\int \frac{dx}{\left(x^2+4\right)^2}$$

解　令 $x=2\tan t$, 则 $dx=\left(2\tan t\right)' dt=2\sec^2 t dt$

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+4\right)^2}=\int \frac{2\sec^2 t dt}{\left(4\tan^2 t+4\right)^2}=\int \frac{2\sec^2 t dt}{16\sec^4 t}$$

$$=\frac{1}{8}\int \cos^2 t dt=\frac{1}{16}[t+\frac{1}{2}\sin 2t]+C$$

$$=\frac{1}{16}\arctan\frac{x}{2}+\frac{x}{8(x^2+4)}+C$$

还原　$x=2\tan t,\ t=\arctan\frac{x}{2}$

小结：求不定积分的方法

1.直接积分法：熟记基本积分公式，观察与题目类型相近的公式，化简为公式的结构.

2.凑微分法（第一类换元积分法）

3.换元积分法（第二类换元积分法）

4.分部积分法（待续）

作业： P89

4.(6)(8)　5.(2)(5)(11)

选做：第二类换元积分　P90

7(3)，8(2)