

## 四. 导数的应用 (一)

### 一. 零点定理与拉格朗日中值定理的理解与运用

(1).零点定理的应用

1.证明:方程  $x^5 - 5x + 1 = 0$  有且仅有一个小于1的正实根.

2. 判断方程  $2x + 1 - e^x = 0$  在区间(1,2)内根的个数.

3. 设  $f(x) = x + x^2 + \cdots + x^n - 1$ , (注:  $n \geq 2$ ) 判断  $f(x) = 0$  在  $(0, 1)$  上根的个数并给出过程.

4. 讨论  $k$  的值, 判断  $k \arctan x - x = 0$  根的个数.

(2).拉格朗日中值定理的应用

5.求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^x}{\tan x - x}$

6.极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^x}{\tan(\tan x) - \tan x}$

7. 极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$

8. 设函数  $f(x)$  在  $[0,1]$  上连续, 在  $(0,1)$  内可导, 且  $f(0)=0, f(1)=1$

证明: ① 存在  $c \in (0,1)$ , 使得  $f(c) = \frac{1}{2}$ ;

② 存在  $\xi, \eta \in (0,1)$ , 使得  $\frac{1}{f'(\xi)} + \frac{1}{f'(\eta)} = 2$

