第六章 定积分及其应用

本章基本要求：

1. 了解定积分的实用背景，理解定积分的定义，理解定积分的性质；

2. 熟记牛顿-莱布尼兹公式，掌握定积分的换元积分(主要第一换元积分法)和分部积分法；

3. 理解变积分上、下限函数及其导数；

4. 理解定积分的在几何上的应用，了解定积分在物理学中的应用.

第六章　定积分及其应用

§6.1 定积分概念

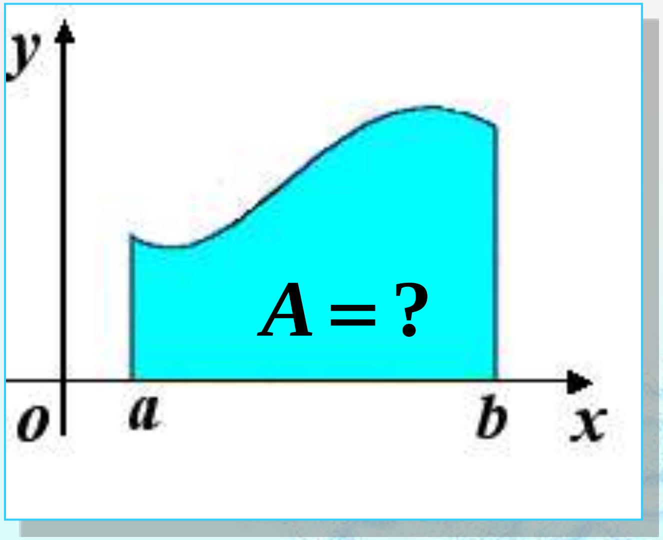
要求：了解定积分的实用背景

一　引例

1、曲边梯形面积

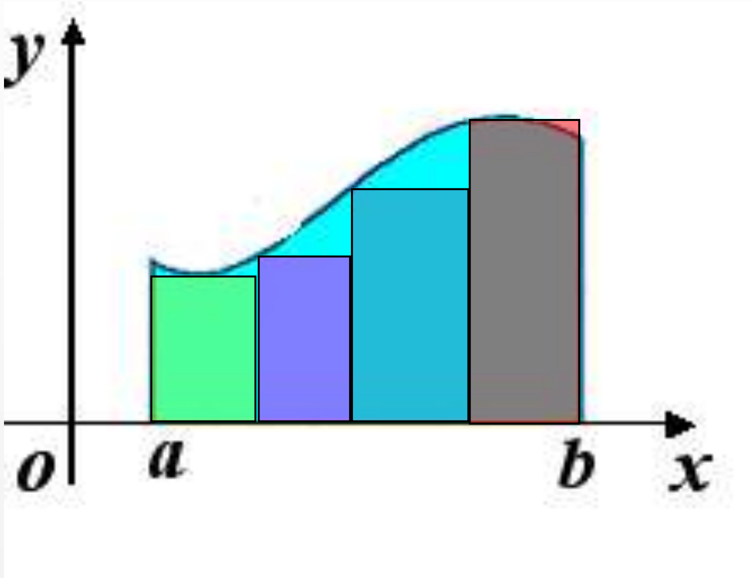
曲边梯形：由曲线 $y = f(x) > 0, x = a, x = b$ 及 x 轴围成的图形称曲边梯形.

它是一个不规则的图形，面积如何求？

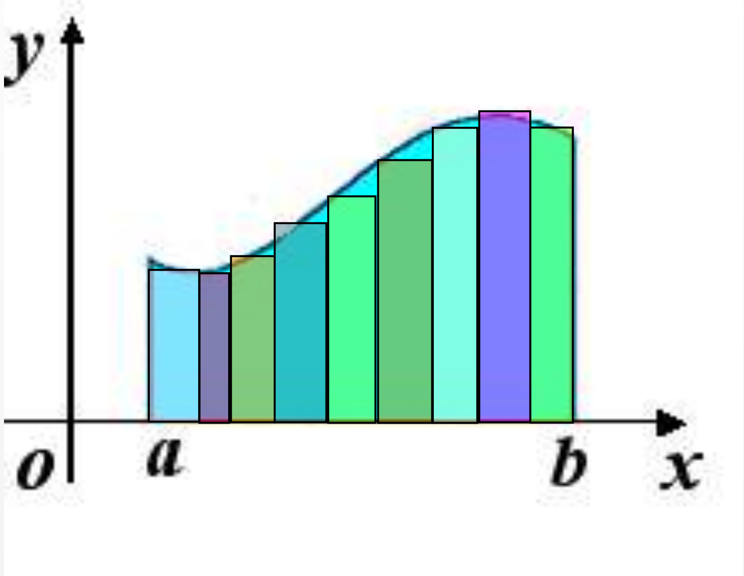


问题求解的基本思想是：用规则的图形近似代替不规则的图形.

用矩形面积近似取代曲边梯形面积



（四个小矩形）



（九个小矩形）

显然，小矩形越多，矩形总面积越接近曲边梯形面积.

设小矩形有n个，如果$n \to \infty$，n个矩形面积的总和是否等于曲边梯形面积？

求由曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=a$，$x=b(a<b)$ 所围成的曲边梯形的面积

(1) 分割：

在 $[a,b]$ 内插入 $n-1$ 个分点 $a=x_0<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，得 n 个小区间 $[x_{i-1},x_i],i=1,2,\cdots,n.$ 记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$

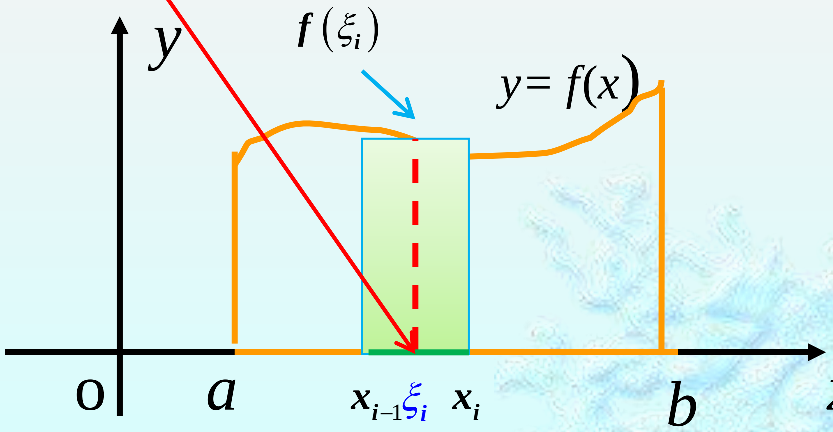
(2) 近似：

任取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ $i=1,2,\cdots,n$ 得第 i 个小曲边梯形面积的近似值

$$\Delta A_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i$$

(3) 求和：

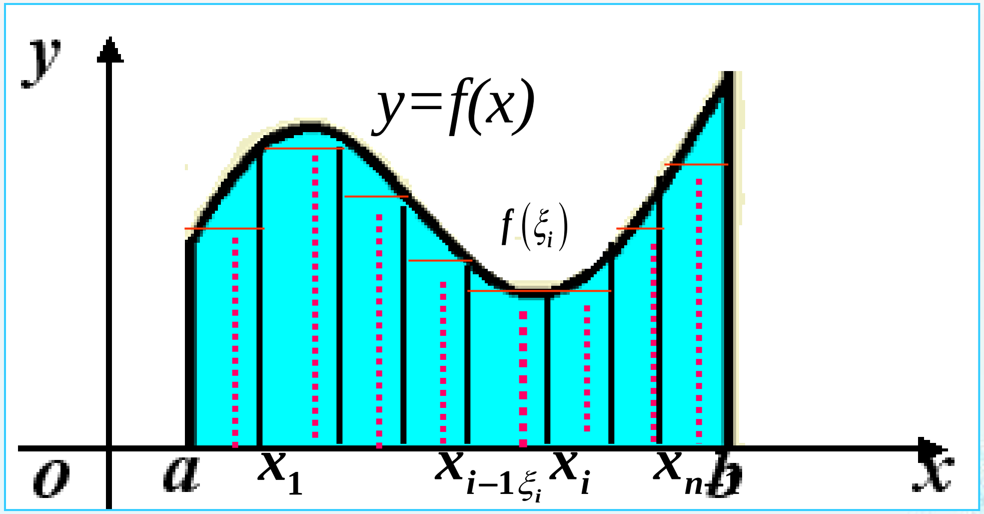
$$A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$



(4) 取极限

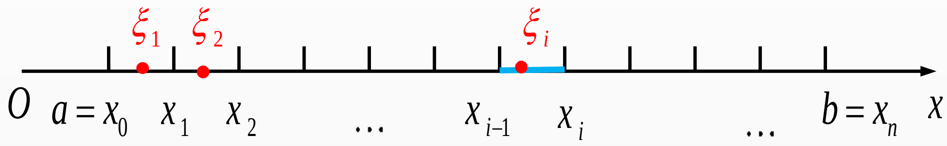
令 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \cdots \Delta x_n\}$，则曲边梯形面积

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$



2.变力沿直线作功问题：

求质点在变力$F=F(x)$的作用下从点a移动到点b时，变力作的功.



已知：常力作功$w=F\cdot s$

定量分析：当位移“足够”小，变力可近似地看成常力.

(1)分割　将$[a,b]$分割为n个小区间(如图),

第i个区间的长度为$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，并在各个小区间内任意取点ξ_i，则在此区间上的力近似为常力$F(\xi_i)$

(2)近似　变力在$[x_{i-1},x_i]$上近似看作常力，所作的功

$$\Delta w_i\approx F(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

(3)求和 $w \approx \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i) \cdot \Delta x_i$

(4)取极限 变力$F = F(x)$将质点沿直线从点a移动到点b处所作的功为

$$w = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i) \cdot \Delta x_i,\ \text{其中}\lambda = \max\{\Delta x_i\}$$

以上两例，虽然它们的实际意义不同，但求解的思想方法是一样的都归结为一类和$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$的极限问题，后面将给这个

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

一个统一的名称：定积分

回看上述两例：

求由曲线$y=f(x)>0,x=a,x=b$及x轴围成平面图形面积的计算过程：

(1)分割近似(计算每小块面积近似值)

$$\Delta s_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$$

(2)求和(总面积近似值)$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

(3)取极限(面积精确值)$S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

变力$F=F(x)$将质点沿直线从$x=a$移动到$x=b$所作的功的计算过程：

(1)分割近似(计算每小段功的近似值)

$$\Delta w_i \approx F(\xi_i)\Delta x_i$$

(2)求和(总作功近似值)$w \approx \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i$

(3)取极限(作功精确值)$w=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i$

使用频率高，应用广泛，计算量大 $\Longrightarrow$ 将$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 记为$\int_a^b f(x)dx$

$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$， $\int_a^b f(x)dx$称为函数$f(x)$在$[a,b]$上的定积分

二　定积分定义

定义6.1　见P96

若 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在，称为函数 $f(x)$在$[a,b]$上的定积分，

记为$\int_a^b f(x)dx$

积分上限

积分下限

$$\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

积分和

被积函数

被积表达式

x称积分变量

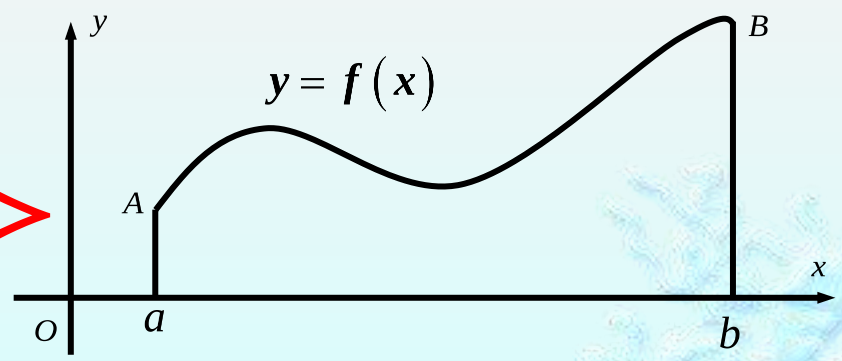
$[a,b]$称为积分区间

定积分的意义：

1　物理意义：变力$F(x)$将质点沿直线从$x=a$移动到$x=b$所作的功$w=\int_a^b F(x)dx$.

2　几何意义：由曲线$y=f(x)>0$，$x=a,x=b$及x轴围成的平面图形的面积为$S=\int_a^b f(x)dx$.

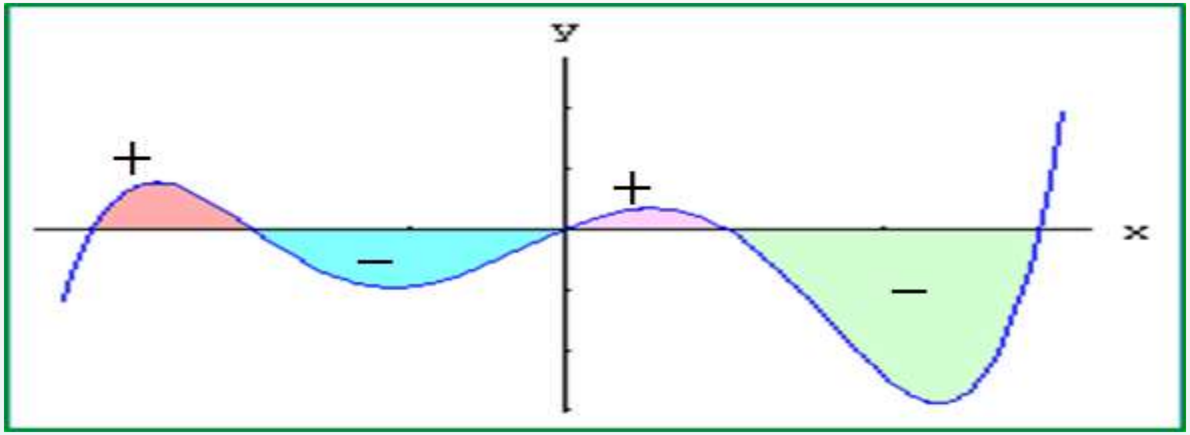
$$S=\int_a^b f(x)dx \Longleftrightarrow$$



由曲线 $y=f(x)$，$x=a$，$x=b$ 及 x 轴围成的平面图形的面积为

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

注意：　围成的是有向面积，在 x 轴上方的面积为正，在 x 轴下方的面积为负.



例如：$\int_0^{\pi}\sin x\,dx=2$, $\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\,dx=-2$

$$\int_0^{2\pi}\sin xdx=\int_0^{\pi}\sin xdx+\int_{\pi}^{2\pi}\sin xdx=2-2=0$$

教材P97

例6.1　　**例6.2**

三、定积分的计算（牛顿–莱布尼兹公式）

设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续，且$F(x)$是 $f(x)$的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

例6. 3　(1) 计算$\int_1^4 \left(3x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$　($P98$)

解 (1) $\int_1^4 \left(3x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \left(x^3 + 2\sqrt{x}\right)_1^4 = (64+4) - (1+2) = 65$

(2) $\int_0^\pi \sin 2x\, dx$

解 (2) $\int_0^\pi \sin 2x\, dx = [-\frac{1}{2}\cos 2x]_0^\pi = -\frac{1}{2}(\cos 2\pi - \cos 0) = 0$

注意：定积分的结果是一个确定的值

教材P98

习题6.1　　1. 2. 3. 4

作业：　P98

必做：3.　$5.(1),(2),(3)$

在草稿纸上演算：1.　2.　4

预习6.2节