第三节

任意常数项级数及其审敛法

要求：理解绝对收敛，条件收敛概念，
会判断交错级数的收敛性

12.3.1 交错级数及其审敛法 P260

定义12.6 设 $u_n > 0, n = 1, 2, \cdots$, 则各项符号正负相间的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - \cdots + (-1)^{n-1}u_n + \cdots$$

称为**交错级数**.

定理12.6（**莱布尼茨定理**） 若交错级数满足条件:

1) $u_n \geq u_{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots)$; 2) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$,

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛, 且其和 $S \leq u_1$, 其余项满足

$$|r_n| \leq u_{n+1}.$$

定理的证明 见教材P261，我们仅要求会用结论

用莱布尼茨定理判别下列级数的敛散性:

1) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right|$ 级数发散

解 $u_n=\frac{1}{n}$, 满足 1) $\frac{1}{n}\geq\frac{1}{n+1}$; 2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, 级数收敛;

2) $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}+\cdots$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n!}\right|$ 级数收敛

解 $u_n=\frac{1}{n!}$, 显然满足定理的两个条件, 级数收敛;

3) $\frac{1}{10}-\frac{2}{10^2}+\frac{3}{10^3}-\frac{4}{10^4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n}{10^n}+\cdots$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}n}{10^n}\right|$ 级数收敛

解 $u_n=\frac{n}{10^n}$, 级数收敛.

由此引入一个新概念

问题：上述级数各项取绝对值后所成的级数是否收敛？

12.3.2 绝对收敛与条件收敛

定义: 对任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则称原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **绝对收敛**;

若原级数收敛, 但取绝对值以后的级数发散, 则称原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **条件收敛**.

例如: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 为条件收敛.

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{10^n}$ 均为绝对收敛.

定理12.7 绝对收敛的级数一定收敛.

证 设 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，令

$$v_n=\frac{1}{2}(u_n+|u_n|)\ \ (n=1,2,\cdots)$$

显然 $v_n\geq 0$，且 $v_n\leq|u_n|$，根据比较审敛法 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛,

$$u_n=2v_n-|u_n|$$

$$\big\downarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}|u_n|,\ \sum_{n=1}^{\infty}2v_n\ \text{收敛}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛

定理12.7告诉我们，当加绝对值形成的正项级数收敛时，任意项级数是绝对收敛的.

补充例题：

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ 当 $p>1$ 时绝对收敛；当 $0<p\le 1$ 时条件收敛.

解 (1) 先讨论加绝对值的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^p}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$，$p>1$ 时收敛，

所以，当 $p>1$ 时收敛，级数绝对收敛；

(2) 再讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}(0<p\le 1)$ 的收敛情况

这是个交错级数，$u_n=\frac{1}{n^p}$ 满足 1) $\frac{1}{n^p}\ge\frac{1}{(n+1)^p}$，2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0$

由莱布尼茨定理，级数收敛.

所以，当 $0<p\le 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ 条件收敛.

判断级数敛散性，收敛时指出是绝对收敛还是条件收敛.

$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 条件收敛

$(2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ 绝对收敛

$(3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ 绝对收敛

$(4)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}$ 绝对收敛

$(5)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2n+1}$ 发散

$(6)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln n}$ 条件收敛

(1)、(2) 参考$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$的收敛情况

$(5)\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$, 不满足收敛必要条件

作业： P262

2. (1) (2)

预习 第12.4节