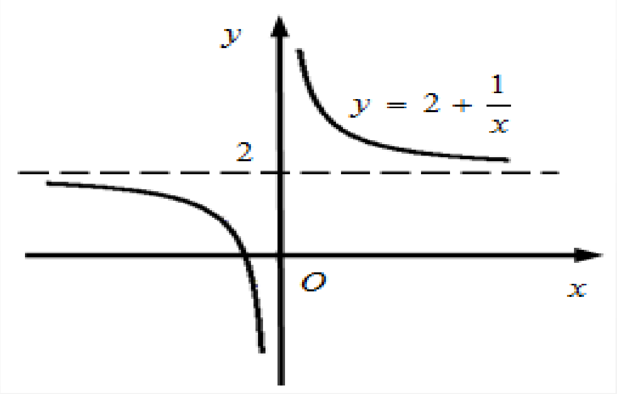
§2.2 函数的极限

要求：理解函数极限概念

函数的极限比数列极限复杂，因为$x \to ?$有六种方式

一、当$x \to \infty$时函数的极限

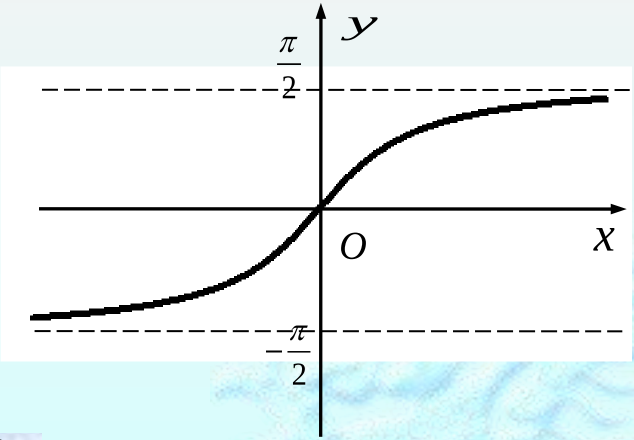
观察 $(1)\ y = 2 + \dfrac{1}{x} \quad x \neq 0 \quad x \to \pm\infty$



不论 $x \to +\infty$ 还是 $x \to -\infty$, $y \to 2$,

所以函数极限存在，且 $\lim\limits_{x \to \infty}\left(2 + \dfrac{1}{x}\right) = 2$

再看 $(2)\ f(x) = \arctan x \quad x \to \pm\infty$



$\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2} \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$

所以 $\lim\limits_{x \to \infty} \arctan x$ 不存在

因为$x \to +\infty$和$x \to -\infty$时，y的趋势不一致.

定义2.3　见教材P20

已知函数 $f(x)$当$x\to\infty$时有定义，当$x\to\infty$时，若 $f(x)\to A$，则称A为当$x\to\infty$时函数的极限，

记为　$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$　或　$f(x)\to A\ (x\to\infty)$

注意：

(1)A唯一确定.（即如果函数有极限，则极限值唯一确定）

(2) $x\to\infty$包括$x\to+\infty$及$x\to-\infty$

看前面的例题 $f(x)=\arctan x$　$x\to\pm\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$　$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$　所以极限不存在

单侧极限概念

记号 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 称为当 $x\to+\infty$ 时函数 $f(x)$ 的右极限，表示当 $x\to+\infty$ 时函数 $f(x)$ 与常数A无限接近.

记号 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$ 称为当 $x\to-\infty$ 时函数 $f(x)$ 的左极限，表示当 $x\to-\infty$ 时函数 $f(x)$ 与常数A无限接近.

这两种极限都称为单侧极限

有结论： $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \iff \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

看前面例题 $y=2+\dfrac{1}{x}$ $x\neq 0$, $x\to\pm\infty$

不论 $x\to+\infty$ 还是 $x\to-\infty$, $y\to 2$,

即 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 所以 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=2$

例2.3 计算下列极限： 见P21

$$(1)\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{3x-1} \qquad (2)\lim_{x\to\infty}\frac{|x|}{x}$$

解 $(1)\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{3x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}}{3-\frac{1}{x}}=\frac{2}{3}$

$(2)\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1,$ 去绝对值：当$x>0$时，$|x|=x$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x}=-1,$ 去绝对值：当$x<0$时，$|x|=-x$

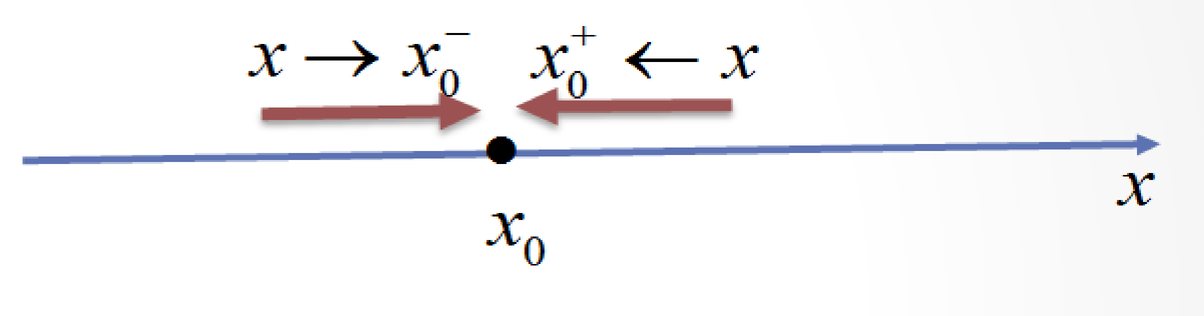
两个单侧极限不相等，故$\lim_{x\to\infty}\frac{|x|}{x}$不存在.

二、当$x \to x_0$时函数的极限

说明：$x \to x_0$ 是指 $x \to x_0^-$ 及 $x \to x_0^+$ 两个方面，

其中 $x \to x_0^-$ 表示自变量 x 从 x_0 的左边无限趋近于x_0；

$x \to x_0^+$ 表示自变量 x 从 x_0 的右边无限趋近于x_0．如下图：



定义2.5 (P21)设函数 $f(x)$在 x_0 的某去心邻域内有定义，当$x \to x_0$时，若 $f(x) \to A$(确定常量)，则称当$x \to x_0$时，函数 $f(x)$的极限值等于A. 记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

例2.4　观察下列函数在给定条件下函数值的变化趋势：(见P21)

$$(1)\lim_{x\to 2}(2x-1)$$

解　当$x\to 2$时，函数值 $f(2)=3$, $f(x)=2x-1$与3无限接近,

$$(2)\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)}{x+1}=-2$$

$$(3)\ f(x)=\begin{cases} x+2 & x\le 1 \\ x^2-1 & x>1 \end{cases}$$

解　分别考虑左右极限

左极限 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+2)=3$ 右极限 $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-1)=0$

所以 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 不存在

补充例题 计算下列函数的极限：

$(1)\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2-5x+2\right)$， $(2)\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4}{x-2}$， $(3)\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

解：$(1)\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2-5x+2\right)=3\times 2^2-5\times 2+2=4$

当 $f(x_0)$ 有意义时，常用代入计算法

$$(2)\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{1^2-4}{1-2}=-3$$

$$(3)\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=4$$

分子分母都是 x 的多项式，当分子分母的极限都为零时，常用因式分解法

三、函数极限的性质

性质1（极限唯一性）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$**，则极限值唯一.**

性质2（局部有界性）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$**，则存在** x_0 **的某个邻域，**

使得 $f(x)$**有界.**

性质3（局部保号性）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0$**（或** <0**），**

则存在 x_0**的某个邻域，使得** $f(x)>0$**或** $f(x)<0$**.**

作业　P22

选做　3^*，4^*

做在草稿纸上　$1^\#$