## 笔记前言：

本笔记的内容是去掉步骤的概述后，视频的所有内容。

本猴觉得，自己的步骤概述写的太啰嗦，大家自己做笔记时，应该每个人都有自己的最舒服最简练的写法，所以没给大家写。再是本猴觉得，不给大家写这个概述的话，大家会记忆的更深，掌握的更好！

所以老铁！一定要过呀！不要辜负本猴的心意！~~~

【祝逢考必过，心想事成~~~~】

【一定能过！！！！！！】

# 概率论第一课

## 一、无放回类题目

**例 1：盒子中有 4 红 3 白共 7 个球，不用眼瞅，七个球摸起来是一样的，现无放回的摸 4 次，那摸出两个红球两个白球的概率是多少？**

$$P=\frac{C_{条件一总}^{条件一取}\times C_{条件二总}^{条件二取}}{C_{总}^{取}}$$

$$P=\frac{C_4^2\times C_3^2}{C_7^4}$$

**例 2：隔壁山头共有 11 只母猴儿，其中有 5 只美猴儿、6 只丑猴儿，在大黑天看起来是一样的。今儿月黑风高，我小弟冒死为我掳来 5 只，问天亮后，发现有 2 只美猴儿、3 只丑猴儿的概率是多少？**

$$P=\frac{C_{条件一总}^{条件一取}\times C_{条件二总}^{条件二取}}{C_{总}^{取}}$$

$$P=\frac{C_5^2\times C_6^3}{C_{11}^5}$$

## 二、有放回类题目

**例 1：盒子中有 5 红 6 白共 11 个球，不用眼瞅，11 个球摸起来是一样的，现有放回的摸 5 次，那摸出两个红球三个白球的概率是多少？**

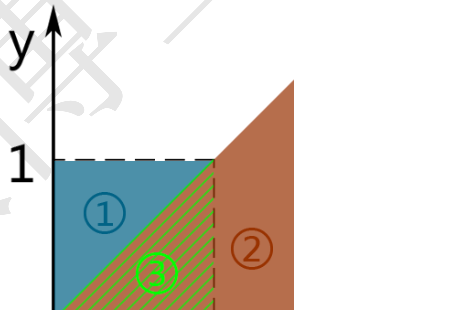
$$P=\frac{(2+3)!}{2!3!}\left(\frac{5}{11}\right)^2\left(\frac{6}{11}\right)^3$$

**例 2：在小弟为我抓回的 5 只母猴儿中，有 2 美 3 丑，每天我都随机挑一只母猴儿来，为她抓虱子。就这样，过去了 101 天，抓了 101 次虱子，问这 101 次中，为美猴儿服务 50 次、丑猴儿服务 51 次的概率是多少？**

$$P=\frac{(50+51)!}{50!51!}\left(\frac{2}{5}\right)^{50}\left(\frac{3}{5}\right)^{51}$$

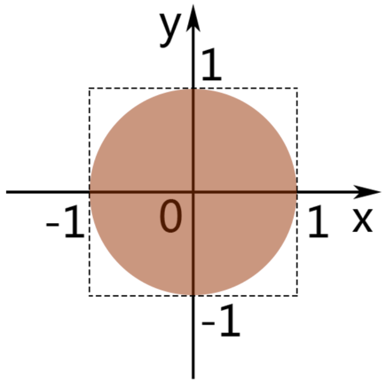
## 三、需要画图的题目

**例 1：已知 $0<x<1$，$0<y<1$，求 $x>y$ 的概率是多少？**




$$P(x>y)=\frac{③}{①}=\frac{1}{2}$$

**例 2：已知$-1<x<1$，$-1<y<1$，求 $x^2+y^2<1$ 的概率是多少？**




$P(x^2+y^2<1)=\frac{S_{圆}}{S_{正}}=\frac{\pi\times1^2}{4}=\frac{\pi}{4}$

## 四、条件概率

**例 1：小明概率论考试得 80 分以上的概率是 80%，得 60 分以上的概率是 85%，已知这次考试小明概率论没挂，那么小明得 80 分以上的概率是多少？**

设事件 A：得 60 分以上，事件 B：得 80 分以上

$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{80\%}{85\%}=\frac{16}{17}$

**例 2：某地区今年会发生洪水的概率是 80%，今明两年至少有一年会发生洪水的概率是 85%，假如今年没有发生洪水，那么明年发生洪水的概率是多少？**

事件 A：今年没有发生洪水

事件 B：明年发生洪水

P(B|A)：今年没有发生洪水的情况下，明年发洪水的概率

P(AB)：今年没有发生洪水，明年发生洪水的概率

今年发了，明年也发了　　今年发80%
今年发了，明年没发
今年没发，明年发了　　至少有一年发85%
今年没发，明年也没发

$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{85\%-80\%}{1-80\%}=\frac{5\%}{20\%}=\frac{1}{4}$

## 五、全概率公式

**例 1：某高速公路上客车中有 20%是高速客车，80%是普通客车，假设高速客车发生故障的概率是 0.002，普通客车发生故障的概率是 0.01。求该高速公路上有客车发生故障的概率。**

P(有客车发生故障)

=P(高速车出现)·P(高速车故障)+P(普通车出现)·P(普通车故障)

=20%×0.002+80%×0.01

=0.0084

**例 2：猴博士公司有猴博士与傻狍子两个员工，老板要抽其中一个考核，抽中猴博士与傻狍子的概率都是 50%，猴博士考核通过的概率是 100%，傻狍子考核通过的概率是 1%，那么抽中的员工通过考核的概率是多少？**

P(抽中的员工通过考核)

=P(猴博士出现)·P(猴博士通过)+P(傻狍子出现)·P(傻狍子通过)

=50％×100％+50％×1％

=50.5％

## 六、贝叶斯公式

**例 1：某高速公路上客车中有 20%是高速客车，80%是普通客车，假设高速客车发生故障的概率是 0.002，普通客车发生故障的概率是 0.01。求该高速公路上有客车发生故障时，故障的是高速客车的概率。**

P(有客车发生故障)

=P(高速车出现)·P(高速车故障)+P(普通车出现)·P(普通车故障)

=20%×0.002+80%×0.01

=0.0084

P(已知有客车发生故障，是高速客车发生的)

$$=\frac{\text{P(高速客车出现)·P(高速客车故障)}}{\text{P(有客车故障)}}$$

$=\frac{20\%\cdot 0.002}{0.0084}$

$=\frac{1}{21}$

**例 2：猴博士公司有猴博士与傻狍子两个员工，老板要抽其中一个考核，抽中猴博士与傻狍子的概率都是 50%，猴博士考核通过的概率是 100%，傻狍子考核通过的概率是 1%，求抽中的员工通过考核时，被抽中的员工是傻狍子的概率。**

P(抽中的员工通过考核)

=P(猴博士出现)·P(猴博士通过)+P(傻狍子出现)·P(傻狍子通过)

$=50\%\times 100\%+50\%\times 1\%$

$=50.5\%$

P(已知有员工通过考核，是傻狍子通过的)

$=\frac{\text{P(傻狍子出现)}\cdot\text{P(傻狍子通过)}}{\text{P(抽中的员工通过考核)}}$

$=\frac{50\%\cdot 1\%}{50.5\%}$

$=\frac{1}{101}$

# 概率论第二课

## 一、已知 $F_X(x)$与 $f_X(x)$中的一项，求另一项

**例 1：设 X 的分布函数 $F_X(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ \ln x, & 1\le x<e\\ 1, & x\ge e\end{cases}$，求 X 的密度函数 $f_X(x)$。**

$$f_X(x)=F_X'(x)=\begin{cases}0', & x<1\\ (\ln x)', & 1\le x<e\\ 1', & x\ge e\end{cases}=\begin{cases}0, & x<1\\ \frac{1}{x}, & 1\le x<e\\ 0, & x\ge e\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 1\le x<e\\ 0, & 其他\end{cases}$$

**例 2：设 X 的密度函数 $f_X(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x+1, & 0\le x\le 2\\ 0, & 其他\end{cases}$，求 X 的分布函数 $F_X(x)$。**

$$f_X(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x+1, & 0\le x\le 2\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}0, & x<0\\ -\frac{1}{2}x+1, & 0\le x\le 2\\ 0, & x>2\end{cases}$$

当 x>2 时，

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{0}f_X(x)dx+\int_{0}^{2}f_X(x)dx+\int_{2}^{x}f_X(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{2}\left(-\frac{1}{2}x+1\right)dx+\int_{2}^{x}0dx$$

$$=0+1+0$$

$$=1$$

当 0≤x≤2 时，

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{0} f_X(x)dx+\int_{0}^{x} f_X(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{x}\left(-\frac{1}{2}x+1\right)dx$$

$$=-\frac{x^2}{4}+x$$

当 $x<0$ 时，$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{x} 0dx=0$

$$F_X(x)=\begin{cases}0，x<0\\ -\frac{x^2}{4}+x，0\le x\le 2\\ 1，x>2\end{cases}$$

## 二、已知 $F_X(x)$与 $f_X(x)$中的一种，求 P

**例 1：设 X 的分布函数**$F_X(x)=\begin{cases}0，x<1\\ \ln x，1\le x<e\\ 1，x\ge e\end{cases}$**，求概率** $P(x^2<4)$

$$P(x^2<4)=P(-2<x<2)$$

$$=F_X(2)-F_X(-2)$$

$$=\ln 2-0$$

$$=\ln 2$$

**例 2：设 X 的密度函数**$f_X(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x+1，0\le x\le 2\\ 0，其他\end{cases}$**，求概率**

**$P(-1<x<2)$**

$P(-1<x<2)=\int_{-1}^{2} f_X(x)dx$

$=\int_{-1}^{0} f_X(x)dx+\int_{0}^{2} f_X(x)dx$

$=\int_{-1}^{0} 0dx+\int_{0}^{2}(-\frac{1}{2}x+1)dx$

$=0+1$

$=1$

## 三、$F_X(x)$或 $f_X(x)$含未知数，求未知数

**例 1：设 X 的分布函数 $F_X(x)=\begin{cases}0，x\le 0\\ a+be^{-\lambda x}，x>0\end{cases}$(λ>0)，求 a 和 b。**

$F_X(+\infty)=1 \Rightarrow a+be^{-\lambda\cdot(+\infty)}=1$

$\Rightarrow a+be^{-\infty}=1 \Rightarrow a+\frac{b}{e^{+\infty}}=1 \Rightarrow a=1$

$F_{上}(0)=F_{下}(0) \Rightarrow 0=a+be^{-\lambda\cdot(0)} \Rightarrow 0=a+be^{0} \Rightarrow a+b=0$

$\begin{cases}a=1\\ a+b=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=1\\ b=-1\end{cases}$

**例 2：设 X 的密度函数 $f_X(x)=\begin{cases}ax+1，0\le x\le 2\\ 0，其他\end{cases}$，求常数 a。**

$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx=1$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{0} f_X(x)dx+\int_{0}^{2} f_X(x)dx+\int_{2}^{+\infty} f_X(x)dx=1$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{2}(ax+1)dx+\int_{2}^{+\infty} 0dx=1$

$\Rightarrow 0+2a+2+0=1$

解得 $a=-\frac{1}{2}$

## 四、求分布律

**例 1：从编号为 1、2、3、4、5、6 的 6 只球中任取 3 只，用 X 表示从中取出的最大号码，求其分布律。**

X 可能的取值为 3，4，5，6

$P(X=3)=\frac{C_2^2C_1^1C_3^0}{C_6^3}=\frac{1}{20}$

$P(X=4)=\frac{C_3^2C_1^1C_2^0}{C_6^3}=\frac{3}{20}$

$P(X=5)=\frac{C_4^2C_1^1C_1^0}{C_6^3}=\frac{3}{10}$

$P(X=6)=\frac{C_5^2C_1^1}{C_6^3}=\frac{1}{2}$

分布列：

| X | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| P | $\frac{1}{20}$ | $\frac{3}{20}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{2}$ |



## 五、已知含有未知数的分布列，求未知数

**例 1：已知分布列如下，求 k 的值。**

| X | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| P | $\frac{1}{20}$ | $\frac{3}{20}$ | $\frac{3}{10}$ | k |

$\frac{1}{20}+\frac{3}{20}+\frac{3}{10}+k=1$

解得 $k=\frac{1}{2}$

# 概率论第三课

## 一、已知 X 分布列，求 Y 分布列

**例 1：已知 X 的分布列，求 $Y=X^2+1$ 的分布列。**

| **X** | **$-2$** | **0** | **2** |
|---|---|---|---|
| **P** | **0.4** | **0.3** | **0.3** |

根据 X 的所有取值，计算 Y 的所有取值

$Y=(-2)^2+1=5$

$Y=0^2+1=1$

$Y=2^2+1=5$

将表格里 X 那一列对应换成 Y

| Y | 5 | 1 | 5 |
|---|---|---|---|
| P | 0.4 | 0.3 | 0.3 |

化简一下：

| Y | 1 | 5 |
|---|---|---|
| P | 0.3 | 0.7 |

**例 2：已知 X 的分布列，求 $Y=2X-1$ 的分布列。**

| X | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| P | $\frac{1}{20}$ | $\frac{3}{20}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{2}$ |

根据 X 的所有取值，计算 Y 的所有取值

$Y=2\times3-1=5$

$Y=2\times4-1=7$

$Y=2\times5-1=9$

$Y=2\times6-1=11$

将表格里 X 那一列对应换成 Y

| X | 5 | 7 | 9 | 11 |
|---|---|---|---|---|
| P | $\frac{1}{20}$ | $\frac{3}{20}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{2}$ |

也可以表示成：

$$Y\sim\begin{pmatrix}5 & 7 & 9 & 11\\ \frac{1}{20} & \frac{3}{20} & \frac{3}{10} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

## 二、已知 $F_X(x)$，求 $F_Y(y)$

**例 1：设 X 的分布函数为 $F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x^2, & 0<x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$，求 Y=2X 的分布函数。**

$Y=2X\Rightarrow X=\frac{Y}{2}$

$$F_X\left(\frac{y}{2}\right)=\begin{cases}0，\frac{y}{2}\leq 0\\ \left(\frac{y}{2}\right)^2，0<\frac{y}{2}<1\\ 1，\frac{y}{2}\geq 1\end{cases}$$

$$F_Y(y)=F_X\left(\frac{y}{2}\right)=\begin{cases}0，y\leq 0\\ \frac{y^2}{4}，0<y<2\\ 1，y\geq 2\end{cases}$$

**例 2：设 X 的分布函数为 $F_X(x)=\begin{cases}0，x\leq 0\\ x^2，0<x<1\\ 1，x\geq 1\end{cases}$，求 Y=−X 的分布函数。**

$Y=-X \Rightarrow X=-Y$

$$F_X(-y)=\begin{cases}0，-y\leq 0\\ (-y)^2，0<-y<1\\ 1，-y\geq 1\end{cases}$$

$$F_Y(y)=1-F_X(-y)=\begin{cases}1，y\geq 0\\ 1-y^2，-1<y<0\\ 0，y\leq -1\end{cases}$$

## 三、已知 $\mathbf{f_X(x)}$，求 $\mathbf{f_Y(y)}$

**例 1：设 X 的密度函数为 $\mathbf{f_X(x)=\begin{cases}1，0<x<1\\0，其他\end{cases}}$，求 Y=2X 的密度函数。**

$$Y=2X \Rightarrow X=\frac{Y}{2}$$

$$f_X\left(\frac{y}{2}\right)=\begin{cases}1，0<y<2\\0，其他\end{cases}$$

$$f_Y=\left(\frac{y}{2}\right)'\cdot f_X\left(\frac{y}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot f_X\left(\frac{y}{2}\right)=\begin{cases}\frac{1}{2}，0<y<2\\0，其他\end{cases}$$

$$f_Y(y)=f_Y=\begin{cases}\frac{1}{2}，0<y<2\\0，其他\end{cases}$$

# 概率论第四课

## 一、符合均匀分布，求概率

**例 1：设 X 在[2,5]上服从均匀分布，求 X 的取值大于 3 的概率。**

$P_{X\text{的取值大于}3}=\frac{2}{3}$

**例 2：设 X 在[2,5]上服从均匀分布，求 X 的取值小于 3 的概率。**

$P_{X\text{的取值小于}3}=\frac{1}{3}$

## 二、符合泊松分布，求概率

**例 1：某电话交换台每分钟接到的呼叫数服从参数为 5 的泊松分布。求在一分钟内呼叫次数为 2 次的概率。**

X 表示一分钟内接到呼叫的次数

$P(X=2)=\frac{5^2}{2!}e^{-5}=0.0842$

**例 2：某电话交换台每分钟接到的呼叫数服从参数为 5 的泊松分布。求在一分钟内呼叫次数不超过 6 次的概率。**

X 表示一分钟内接到呼叫的次数

$$P(X\le 6)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)$$

$$=\frac{5^0}{0!}e^{-5}+\frac{5^1}{1!}e^{-5}+\frac{5^2}{2!}e^{-5}+\frac{5^3}{3!}e^{-5}+\frac{5^4}{4!}e^{-5}+\frac{5^5}{5!}e^{-5}+\frac{5^6}{6!}e^{-5}$$

$$=0.7622$$

## 三、符合二项分布，求概率

**例 1：重复投 5 次硬币，求正面朝上次数为 3 次的概率。**

$$P(X=3)=C_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^3(1-\frac{1}{2})^{5-3}=\frac{5}{16}$$

**例 2：在二红一绿三个球中有放回地摸 3 次，求摸到红球次数为 2 次的概率。**

$$P(X=2)=C_3^2\left(\frac{2}{3}\right)^2(1-\frac{2}{3})^{3-2}=\frac{4}{9}$$

## 四、符合指数分布，求概率

**例 1：某种电子元件的使用寿命 X (单位:小时)服从 $\lambda=\frac{1}{2000}$ 的指数分布。**

**求：(1)一个元件能正常使用 1000 小时以上的概率；**

**(2)一个元件能正常使用 1000 小时到 2000 小时之间的概率。**

X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2000}e^{-\frac{x}{2000}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

(1)$P(X>1000)=\int_{1000}^{+\infty}f(x)dx=\int_{1000}^{+\infty}\frac{1}{2000}e^{-\frac{x}{2000}}dx=e^{-0.5}$

(2)$P(1000<X<2000)=\int_{1000}^{2000}f(x)dx=\int_{1000}^{2000}\frac{1}{2000}e^{-\frac{x}{2000}}dx$

$=-e^{-1}+e^{-0.5}$

## 五、符合正态分布，求概率

**例 1：设随机变量 X 服从正态分布 N(1.5,4)，求：**

**(1)P(1.5<X<3.5)；(2)P(X<3.5)。**

**[其中：Φ(0)=0.5，Φ(0.75)=0.7734，Φ(1)=0.8413，Φ(2.25)=0.9878]**

$\mu=1.5$，$\sigma=\sqrt{4}=2$

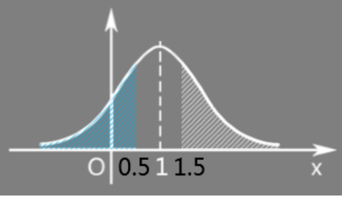
(1)$P(1.5<X<3.5)=\Phi(\frac{3.5-1.5}{2})-\Phi(\frac{1.5-1.5}{2})=\Phi(1)-\Phi(0)=0.3413$

(2)$P(X<3.5)=\Phi(\frac{3.5-1.5}{2})=\Phi(1)=0.8413$

## 六、正态分布图像

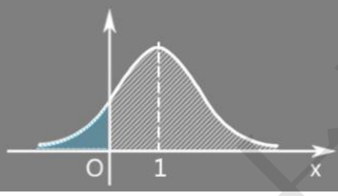
**例 1：**

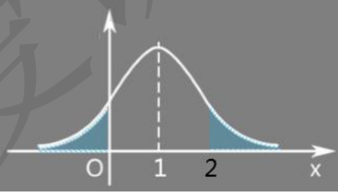
设X服从$N(1, \sigma^2)$，已知$P(X>1.5)=a$，则$P(X<0.5)=$__a__




例 2：

设X服从$N(1, \sigma^2)$，已知$P(X>0)=b$，则$P(X>2)=$__1−b__

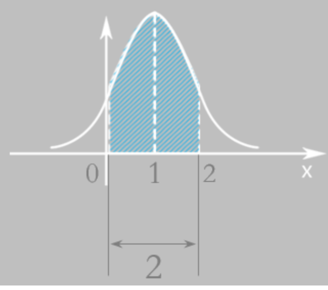


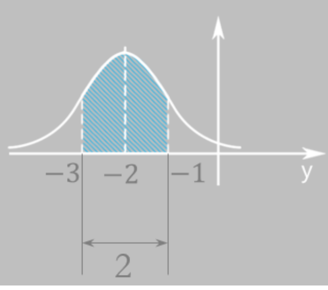




例 3：

设X服从$N(1, \sigma_1^2)$，Y服从$N(-2, \sigma_2^2)$

若$P(0<X<2) > P(-3<Y<-1)$，则$\sigma_1$ __$\le$__ $\sigma_2$（填>、<或=）



**常见分布的其他表示方法**

均匀分布　$U[a,b]$

二项分布　$B[n,p]$

指数分布　$E(\lambda)$

正态分布　$N(\mu,\sigma^2)$

# 概率论第五课

## 一、已知二维离散型分布律，求???

**例 1：已知二维随机变量 X，Y 的分布律如下表：**

| X \ Y | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.2 | 0.1 | 0.1 |
| 1 | 0.3 | 0.2 | 0.1 |

**求：(1)P(X=0)，P(Y=2)**

**(2)P(X<1，Y≤2)**

**(3)P(X+Y=2)**

**(4)X，Y 的分布律**

**(5)Z=X+Y 的分布律**

解：(1)$P(X=0)=0.2+0.1+0.1=0.4$

$P(Y=2)=0.1+0.2=0.3$

(2)$P(X<1，Y\leq 2)=0.2+0.1=0.3$

(3)$P(X+Y=2)=0.1+0.3=0.4$

(4)

| X | 0 | 1 |
|---|---|---|
| P | 0.4 | 0.6 |

| Y | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| P | 0.5 | 0.3 | 0.2 |

(5)$P(Z=1)=P(X=0,Y=1)=0.2$

$P(Z=2)=P(X=0,Y=2)+P(X=1,Y=1)=0.1+0.3=0.4$

$P(Z=3)=P(X=0,Y=3)+P(X=1,Y=2)=0.1+0.2=0.3$

$P(Z=4)=P(X=1,Y=3)=0.1$

| Z | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| P | 0.2 | 0.4 | 0.3 | 0.1 |

## 二、已知二维离散型分布律，判断独立性

**例 1：已知二维随机变量 X，Y 的分布律如下表：**

| X \ Y | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.2 | 0.1 | 0.1 |
| 1 | 0.3 | 0.2 | 0.1 |

**请判断 X、Y 的独立性。**

$P(X=0\,,Y=3)\qquad P(X=0)\cdot P(Y=3)$

$\qquad 0.1 \qquad\qquad 0.4\ \times\ 0.2$

$\qquad 0.1 \qquad \neq \qquad 0.08$

$\therefore$ X、Y 不相互独立

**例 2：已知二维随机变量 X，Y 的分布律如下表：**

| X \ Y | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{18}$ |
| 2 | $\frac{1}{3}$ | $\alpha$ | $\beta$ |

**X、Y 是相互独立的，求 α、β 的值。**

$$P(X=1,Y=2)=P(X=1)\cdot P(Y=2)$$

$$\frac{1}{9}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{9}+\alpha\right)\Rightarrow\alpha=\frac{2}{9}$$

$$P(X=1,Y=3)=P(X=1)\cdot P(Y=3)$$

$$\frac{1}{18}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{18}+\beta\right)\Rightarrow\beta=\frac{1}{9}$$

## 三、已知 F(x,y)，求 f(x,y)

**例 1：**

已知二维随机变量的联合分布函数 $F(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2 & 0<x<1，0<y<1\\ \frac{1}{2}y+\frac{1}{2}y^2 & x\geq 1，0<y<1\\ \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x & 0<x<1，y\geq 1\\ 1 & x\geq 1，y\geq 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$ 求 f(x,y)

① 当 0<x<1 0<y<1 时，$f(x,y)=\frac{\partial^2\left(\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2\right)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial\left[\frac{\partial\left(\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2\right)}{\partial x}\right]}{\partial y}=\frac{\partial\left(xy+\frac{1}{2}y^2\right)}{\partial y}=x+y$

② 当 x≥1 0<y<1 时，$f(x,y)=\frac{\partial^2\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}y^2\right)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial\left[\frac{\partial\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}y^2\right)}{\partial x}\right]}{\partial y}=\frac{\partial 0}{\partial y}=0$

③ 当 0<x<1 y≥1 时，$f(x,y)=\frac{\partial^2\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial\left[\frac{\partial\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x\right)}{\partial x}\right]}{\partial y}=\frac{\partial\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\partial y}=0$

④ 当 x≥1 y≥1 时， $f(x,y)=\frac{\partial^2(1)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial\left[\frac{\partial(1)}{\partial x}\right]}{\partial y}=\frac{\partial(0)}{\partial y}=0$

⑤ 当 x 、y 属于其他情况时， $f(x,y)=\frac{\partial^2(0)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial\left[\frac{\partial(0)}{\partial x}\right]}{\partial y}=\frac{\partial(0)}{\partial y}=0$

综上所述

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y & 0<x<1，0<y<1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

## 四、已知 f(x,y)，求 F(x,y)

**例 1:已知二维随机变量的联合密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{21}{4}x^2y，x^2\le y\le 1\\ 0，其他\end{cases}$**

**求 F(x,y)。**

第一步：找出 f(x,y) 不等于零时 x 的范围和 y 的范围

x 的范围：$x^2\le y \Rightarrow -\sqrt{y}\le x\le\sqrt{y}$

y 的范围：$x^2\le y\le 1$

第二步：计算 $\int_{g_1(y)}^{x} du \int_{h_1(u)}^{y} f(u,v)dv$　结果记为 ①

$$\left(\begin{array}{l} g_1(y) \text{ 为 } x \text{ 的左边界} \\ h_1(u) \text{ 为将 } y \text{ 的下边界中的 } x \text{ 替换为 } u \text{ 后的式子} \\ f(u,v) \text{ 为将 } f(x,y) \text{ 中的 } x \text{ 替换为 } u\text{、}y \text{ 替换为 } v \text{ 后的式子} \end{array}\right)$$

$g_1(y)=-\sqrt{y}$　　$h_1(u)=u^2$　　$f(u,v)=\frac{21}{4}u^2v$

$① = \int_{-\sqrt{y}}^{x} du \int_{u^2}^{y} \frac{21}{4}u^2 v dv = \frac{7}{8}x^3y^2 - \frac{3}{8}x^7 + \frac{1}{2}y^{\frac{7}{2}}$

第三步：将 $x=g_2(y)$、$y=h_2(x)$ 分别代入 ① 中

结果依次记为 ②、③

$$\left(\begin{array}{l} g_2(y) \text{ 为 } x \text{ 的右边界} \\ h_2(x) \text{ 为 } y \text{ 的上边界} \end{array}\right)$$

$g_2(y)=\sqrt{y}$

将 $x=\sqrt{y}$ 代入 ① 中

则得 $② = \frac{7}{8}(\sqrt{y})^3y^2 - \frac{3}{8}(\sqrt{y})^7 + \frac{1}{2}y^{\frac{7}{2}}$

$② = y^{\frac{7}{2}}$

$h_2(x)=1$

将 $y=1$ 代入 ① 中

则得 $③ = \frac{7}{8}x^3 \cdot 1^2 - \frac{3}{8}x^7 + \frac{1}{2} \cdot 1^{\frac{7}{2}}$

$③ = \frac{7}{8}x^3 - \frac{3}{8}x^7 + \frac{1}{2}$

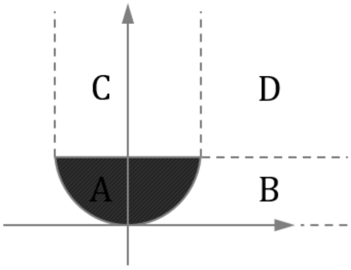
第四步：画出 $f(x,y)$ 不等于零的区域，记为区域 A

A 右侧的区域记为 B

A 上侧的区域记为 C

A 右上方的区域记为 D

$$\text{则 } F(x,y) = \begin{cases} ① & \text{A 区域} \\ ② & \text{B 区域} \\ ③ & \text{C 区域} \\ 1 & \text{D 区域} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$




A 区域： $x^2 \le y \le 1$

B 区域： $x > \sqrt{y}$ ， $0 \le y \le 1$

C 区域： $-1 \le x \le 1$ ， $y > 1$

D 区域： $x > 1$ ， $y > 1$

$$F(x,y)=\begin{cases} \frac{7}{8}x^3y^2-\frac{3}{8}x^7+\frac{1}{2}y^{\frac{7}{2}} & x^2 \le y \le 1 \\ y^{\frac{7}{2}} & x > \sqrt{y}\text{，}0 \le y \le 1 \\ \frac{7}{8}x^3-\frac{3}{8}x^7+\frac{1}{2} & -1 \le x \le 1\text{，}y > 1 \\ 1 & x > 1\text{，}y > 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

**例 2：已知二维随机变量的联合密度函数为：**

$$\mathbf{f(x,y)=\begin{cases} x+y\text{，}0<x<1\text{，}0<y<1 \\ 0\text{，其他} \end{cases}}\text{，求 }\mathbf{F(x,y)}\text{。}$$

第一步：找出 f(x,y) 不等于零时 x 的范围和 y 的范围

x 的范围：$0<x<1$

y 的范围：$0<y<1$

第二步：计算 $\int_{g_1(y)}^{x}du\int_{h_1(u)}^{y}f(u,v)dv$ 结果记为 ①

$$\left(\begin{array}{l} g_1(y)\text{ 为 x 的左边界} \\ h_1(u)\text{ 为将 y 的下边界中的 x 替换为 u 后的式子} \\ f(u,v)\text{ 为将 f(x,y) 中的 x 替换为 u 、y 替换为 v 后的式子} \end{array}\right)$$

$g_1(y)=0$　　　　$h_1(u)=0$　　　　$f(u,v)=u+v$

$①=\int_0^x du\int_0^y(u+v)dv=\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2$

第三步：将 $x=g_2(y)$ 、 $y=h_2(x)$ 分别代入 ① 中

结果依次记为 ②、③

$$\begin{pmatrix} g_2(y) \text{ 为 } x \text{ 的右边界} \\ h_2(x) \text{ 为 } y \text{ 的上边界} \end{pmatrix}$$

$g_2(y)=1$

将 $x=1$ 代入 ① 中

则得 ②$=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot y+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot y^2$

②$=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}y^2$

$h_2(x)=1$

将 $y=1$ 代入 ① 中

则得 ③$=\frac{1}{2}x^2\cdot 1+\frac{1}{2}x\cdot 1^2$

③$=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$

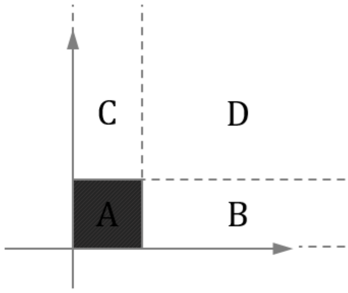
第四步：画出 $f(x,y)$ 不等于零的区域，记为区域 A

A 右侧的区域记为 B

A 上侧的区域记为 C

A 右上方的区域记为 D

$$\text{则 } F(x,y)=\begin{cases} ① & A \text{ 区域} \\ ② & B \text{ 区域} \\ ③ & C \text{ 区域} \\ 1 & D \text{ 区域} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$




A 区域：$0<x<1$，$0<y<1$

B 区域：$x\geq 1$，$0<y<1$

C 区域：$0<x<1$，$y\geq 1$

D 区域：$x\geq 1$，$y\geq 1$

$$F(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2 & 0<x<1,\ 0<y<1\\ \frac{1}{2}y+\frac{1}{2}y^2 & x\geq 1,\ 0<y<1\\ \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x & 0<x<1,\ y\geq 1\\ 1 & x\geq 1,\ y\geq 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

## 五、已知 F(x,y)，求 P

### 例 1：

已知二维随机变量的联合分布函数 $F(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2 & 0<x<1,\ 0<y<1\\ \frac{1}{2}y+\frac{1}{2}y^2 & x\geq 1,\ 0<y<1\\ \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x & 0<x<1,\ y\geq 1\\ 1 & x\geq 1,\ y\geq 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

求 $P(X\leq\frac{1}{2},Y>\frac{1}{2})$

$\because\ P(X\leq\frac{1}{2})=P(X\leq\frac{1}{2},Y>\frac{1}{2})+P(X\leq\frac{1}{2},Y\leq\frac{1}{2})$

$\therefore\ P(X\leq\frac{1}{2},Y>\frac{1}{2})=P(X\leq\frac{1}{2})-P(X\leq\frac{1}{2},Y\leq\frac{1}{2})$

$=P(X\leq\frac{1}{2},Y\leq+\infty)-P(X\leq\frac{1}{2},Y\leq\frac{1}{2})$

$=F(\frac{1}{2},+\infty)-F(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

$=\left[\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right]-\left[\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]$

$=\frac{3}{8}-\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$

# 六、已知 f(x,y)，求 P

## 例 1：

已知二维随机变量的联合密度函数 f(x,y)= $\begin{cases} 6xy，0 \le x \le 1，x^2 \le y \le 1 \\ 0，其他 \end{cases}$ 求 P(X≥Y)

第一步：找出 f(x,y) 不等于零时 x 的范围和 y 的范围

x 的范围：$0 \le x \le 1$

y 的范围：$x^2 \le y \le 1$

第二步：找出要求概率的范围，添到上一步的范围里

(要保证至少有一个未知数的上下限都是纯数字)

x 的范围：$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x \ge y \end{cases} \Rightarrow y \le x \le 1$

y 的范围：$x^2 \le y \le 1$

没有上下限都是纯数字

P(X≥Y) ⇒ P(Y≤X)

x 的范围：$\underset{a}{0} \le x \le \underset{b}{1}$

y 的范围：$\begin{cases} x^2 \le y \le 1 \\ y \le x \end{cases} \Rightarrow \underset{c}{x^2} \le y \le \underset{d}{x}$

第三步：如果 x 的上下限都是纯数字

则 $P=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$

如果 y 的上下限都是纯数字

则 $P=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$

$P(X\geq Y)=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} 6xy\,dy$

$=\frac{1}{4}$

## 例 2：

已知二维随机变量的联合密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\ 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$ 求 $P(X\leq\frac{1}{2},Y\leq\frac{1}{3})$

第一步：找出 f(x,y) 不等于零时 x 的范围和 y 的范围

x 的范围：$0<x<1$

y 的范围：$0<y<1$

第二步：找出要求概率的范围，添到上一步的范围里

(要保证至少有一个未知数的上下限都是纯数字)

x 的范围：$\begin{cases}0<x<1\\ x\leq\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow \underset{a}{0}<x\leq\underset{b}{\frac{1}{2}}$

y 的范围：$\begin{cases}0<y<1\\ y\leq\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow \underset{c}{0}<y\leq\underset{d}{\frac{1}{3}}$

第三步：如果 x 的上下限都是纯数字

则 $P=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$

如果 y 的上下限都是纯数字

则 $P=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$

$P(X\le\frac{1}{2},Y\le\frac{1}{3})=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_0^{\frac{1}{3}}1\,dy$

$=\frac{1}{6}$

## 七、求 F(x,y)或 f(x,y)中含有的未知数

### 例 1：

设二维随机变量的联合分布函数为 $F(x,y)=a(b+\arctan x)(c+\arctan 2y)$

求 a 、b 、c

$$\begin{cases}F(+\infty,+\infty)=1\Rightarrow a[b+\arctan(+\infty)][c+\arctan 2(+\infty)]=a(b+\frac{\pi}{2})(c+\frac{\pi}{2})=1\\F(-\infty,-\infty)=0\Rightarrow a[b+\arctan(-\infty)][c+\arctan 2(-\infty)]=a(b-\frac{\pi}{2})(c-\frac{\pi}{2})=0\\F(x,-\infty)=0\quad\Rightarrow a[b+\arctan x][c+\arctan 2(-\infty)]=a(b+\arctan x)(c-\frac{\pi}{2})=0\\F(-\infty,y)=0\quad\Rightarrow a[b+\arctan(-\infty)][c+\arctan 2y]=a(b-\frac{\pi}{2})(c+\arctan 2y)=0\end{cases}$$

解得 $a=\frac{1}{\pi^2}$ $b=\frac{\pi}{2}$ $c=\frac{\pi}{2}$

### 例 2：

设二维随机变量的联合密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}kxy,\ 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le 1\\0,\ 其他\end{cases}$

求 k

由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$ 可得

$\int_0^1\int_{x^2}^1 kxy\,dxdy=1$

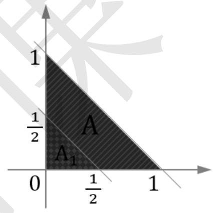
$\Rightarrow k=6$

# 八、求均匀分布的 f(x,y)与 P

## 例 1：

设二维随机变量 (x , y) 在区域 D={(x , y)|x≥0，y≥0，x+y≤1} 上服从均匀分布
求密度函数 f(x , y) 、$P(X+Y\le\frac{1}{2})$

$A=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$ $A_1=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$




$$f(x,y)=\begin{cases}2，当 (x , y)\in D\\0，其他\end{cases}$$

$$P(X+Y\le\frac{1}{2})=\frac{A_1}{A}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$$

# 概率论第六课

## 一、求边缘分布函数

**例 1：设随机变量 (X,Y) 的分布函数为 $F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan 2y\right)$，求边缘分布函数 $F_X(x)$、$F_Y(y)$。**

$F_X(x)=F(x,+\infty)$

$$=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x\right)\left[\frac{\pi}{2}+\arctan 2(+\infty)\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan x$$

$F_Y(y)=F(+\infty,y)$

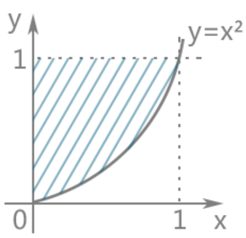
$$=\frac{1}{\pi^2}\left[\frac{\pi}{2}+\arctan(+\infty)\right]\left(\frac{\pi}{2}+\arctan 2y\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan 2y$$

## 二、求边缘密度函数

**例 1：设二维随机变量的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}6xy，0\le x\le 1，x^2\le y\le 1\\ 0，其他\end{cases}$，求边缘密度函数 $f_X(x)$、$f_Y(y)$。**

将 f(x,y) 非零的区域画在坐标系上




左边界 $x=0$　右边界 $x=\sqrt{y}$　上边界 $y=1$　下边界 $y=x^2$

$f_X(x)=\int_{x^2}^{1} 6xy\,dy=3x-3x^5$

$f_Y(y)=\int_{0}^{\sqrt{y}} 6xy\,dx=3y^2$

$f_X(x)=\begin{cases}3x-3x^5，0\le x\le 1\\ 0，其他\end{cases}$

$f_Y(y)=\begin{cases}3y^2，0\le y\le 1\\ 0，其他\end{cases}$

## 三、判断连续型二维变量的独立性

**例 1：设二维随机变量的联合密度函数为**

**$f(x,y)=\begin{cases}6xy，0\le x\le 1，x^2\le y\le 1\\ 0，其他\end{cases}$，判断 f(x,y)的独立性**

$f_X(x)=\begin{cases}3x-3x^5，0\le x\le 1\\ 0，其他\end{cases}$

$f_Y(y)=\begin{cases}3y^2，0\le y\le 1\\ 0，其他\end{cases}$

$f_X(x)\cdot f_Y(y)=(3x-3x^5)\cdot 3y^2=9xy^2-9x^5y^2\neq f(x,y)$

$\therefore$ X、Y 相互不独立

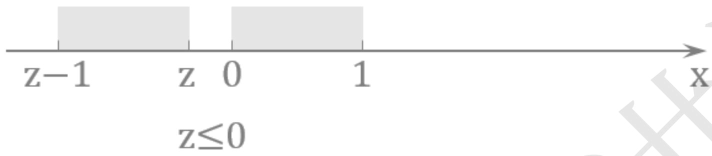
## 四、已知 f(x,y)，Z=X+Y，求$f_Z(z)$

**例 1：设二维随机变量(X,Y)的密度函数为 f(x,y)=**

**$\begin{cases} 2-x-y，0<x<1，0<y<1 \\ 0，其他 \end{cases}$，求 Z=X+Y 的密度函数$f_Z(z)$。**

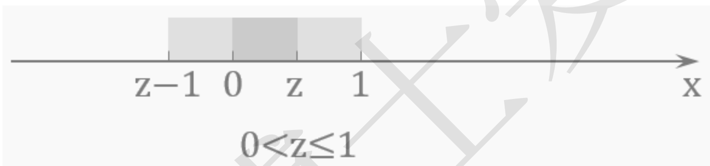
$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx$

$f(x,z-x)=\begin{cases} 2-z，0<x<1，z-1<x<z \\ 0，其他 \end{cases}$



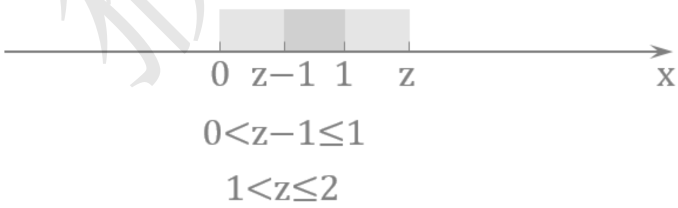

当 z≤0 时，f(x,z−x)=0

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} 0dx=0$$




当 0<z≤1 时，$f(x,z-x)=\begin{cases} 2-z，0<x<z \\ 0，其他 \end{cases}$

$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx=\int_0^z(2-z)dx=z(2-z)$




当 1<z≤2 时，$f_Z(z)=\int_{z-1}^{1}(2-z)dx=(2-z)^2$


1<z−1

2<z

当 z>2 时，f(x,z−x)=0

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} 0dx=0$$

$$f_Z(z)=\begin{cases} z(2-z)，0<z\leq 1 \\ (2-z)^2，1<z\leq 2 \\ 0，其他 \end{cases}$$

## 五、已知 f(x,y)，$Z=\frac{X}{Y}$，求 $f_Z(z)$

**例 1：设二维随机变量(X,Y)的密度函数为 f(x,y)=**

$$\begin{cases} \frac{10^6}{x^2y^2}，x>1000 且 y>1000 \\ 0，其他 \end{cases}$$**，求 $Z=\frac{X}{Y}$的密度函数$f_Z(z)$。**

$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(yz,y)\cdot|y|\,dy$ $\qquad f(yz,y)=\begin{cases} \frac{10^6}{y^4z^2}，yz>1000 且 y>1000 \\ 0，其他 \end{cases}$

当 z≤0 时，$\begin{cases} yz>1000 \\ y>1000 \end{cases}$ 无解 $\Rightarrow$ f(yz,y)=0 $\Rightarrow$ $f_Z(z)=0$

当 0<z≤1 时，$\begin{cases} yz>1000 \\ y>1000 \end{cases} \Rightarrow y>\frac{1000}{z} \Rightarrow f(yz,y)=\begin{cases} \frac{10^6}{y^4z^2}，y>\frac{1000}{z} \\ 0，其他 \end{cases} \Rightarrow f_Z(z)=\int_{\frac{1000}{z}}^{+\infty}\frac{10^6}{y^4z^2}\cdot y\,dy=\frac{1}{2}$

当 z>1 时，$\begin{cases} yz>1000 \\ y>1000 \end{cases} \Rightarrow y>1000 \Rightarrow f(yz,y)=\begin{cases} \frac{10^6}{y^4z^2}，y>1000 \\ 0，其他 \end{cases} \Rightarrow f_Z(z)=\int_{1000}^{+\infty}\frac{10^6}{y^4z^2}\cdot y\,dy=\frac{1}{2z^2}$

$$f_Z(z)=\begin{cases} 0，z\leq 0 \\ \frac{1}{2}，0<z\leq 1 \\ \frac{1}{2z^2}，z>1 \end{cases}$$

## 六、题干给出 F，且 X,Y 相互独立，Z=max(X,Y)，求$F_Z(z)$

**例 1：设随机变量 X，Y 独立同分布，且 X 的分布函数为$x^3+2x$，求 Z=max(X,Y)的分布函数。**

$F_X(x)=x^3+2x$

$\therefore F_X(z)=z^3+2z$

$\because$ X、Y 同分布

$\therefore F_Y(y)=y^3+2y$

$\therefore F_Y(z)=z^3+2z$

$\therefore F_Z(z)=F_X(z)\cdot F_Y(z)=(z^3+2z)\cdot(z^3+2z)$

## 七、题干给出 F，且 X,Y 相互独立，Z=min(X,Y)，求$F_Z(z)$

**例 1：设随机变量 X，Y 独立同分布，且 X 的分布函数为 $x^3+2x$，求 Z=min{X,Y}的分布函数。**

$F_X(x)=x^3+2x$

$\therefore F_X(z)=z^3+2z$

$\because$ X、Y 同分布

$\therefore F_Y(y)=y^3+2y$

$\therefore F_Y(z)=z^3+2z$

$\therefore F_Z(z)=1-[1-(z^3+2z)]\cdot[1-(z^3+2z)]$

# 概率论第七课

## 一、求离散型的期望 E(X)

**例 1：已知一个工厂一周获利 10 万元的概率为 0.2，获利 5 万元的概率为 0.3，亏损 2 万元的概率为 0.5，该工厂一周内利润的期望是多少？**

| X | 10 | 5 | $-2$ |
|---|---|---|---|
| P | 0.2 | 0.3 | 0.5 |

$$E(X)=\sum x_i p_i = 10\times 0.2+5\times 0.3+(-2)\times 0.5=2.5\text{（万元）}$$

## 二、求连续型的期望 E(X)

**例 1：设随机变量 X 的密度函数为 f(x)=$\begin{cases}0，x<0\\4x^3，0\le x\le 1\\0，x>1\end{cases}$，求 E(X)**

$$\begin{aligned}E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{0} x\cdot 0\,dx+\int_{0}^{1} x\cdot 4x^3\,dx+\int_{1}^{+\infty} x\cdot 0\,dx\\ &= 0+\frac{4}{5}+0\\ &=\frac{4}{5}\end{aligned}$$

## 三、已知 $Y=g(x)$，求 $E(Y)$

**例 1：已知随机变量 X 的分布列为：**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **X** | **0** | **1** | **2** | **3** |
| **P** | **0.1** | **0.2** | **0.3** | **0.4** |

**求 $Y=2X-1$ 的期望。**

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= \sum g(x_i)p_i \\
&= \sum (2x_i-1)p_i \\
&= (2\times 0-1)\times 0.1+(2\times 1-1)\times 0.2+(2\times 2-1)\times 0.3+(2\times 3-1)\times 0.4 \\
&= 3
\end{aligned}
$$

**例 2：设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 4x^3, & 0\le x\le 1 \\ 0, & x>1 \end{cases}$，**

**$Y=X^2$，求 $E(Y)$。**

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\cdot f(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} x^2\cdot 0\,dx + \int_{0}^{1} x^2\cdot 4x^3\,dx + \int_{1}^{+\infty} x^2\cdot 0\,dx \\
&= \quad 0 \quad + \quad \frac{2}{3} \quad + \quad 0 \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

## 四、求方差 D(X)

**例 1：已知随机变量 X 的分布列为：**

| X | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| P | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 |

**求 D(X)。**

方法一：$E(X)=\sum x_i p_i=0\times0.1+1\times0.2+2\times0.3+3\times0.4=2$

$D(X)=\sum[x_i-E(X)]^2\cdot p_i$

$=(0-2)^2\cdot0.1+(1-2)^2\cdot0.2+(2-2)^2\cdot0.3+(3-2)^2\cdot0.4=1$

方法二：

| $X^2$ | 0 | 1 | 4 | 9 |
|---|---|---|---|---|
| P | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 |

$E(X^2)=0\times0.1+1\times0.2+4\times0.3+9\times0.4=5$

$E(X)=\sum x_i p_i=0\times0.1+1\times0.2+2\times0.3+3\times0.4=2$

$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=5-2^2=1$

**例 2：设随机变量 X 的密度函数为** $f(x)=\begin{cases}0，x<0\\4x^3，0\le x\le1，\\0，x>1\end{cases}$

**求 D(X)。**

$$E(x^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\cdot f(x)\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x)\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{0} x^2\cdot 0\,dx+\int_{0}^{1} x^2\cdot 4x^3\,dx+\int_{1}^{+\infty} x^2\cdot 0\,dx$$

$$=\quad 0 \quad + \quad \frac{2}{3} \quad + \quad 0$$

$$=\frac{2}{3}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0} x\cdot 0\,dx+\int_{0}^{1} x\cdot 4x^3\,dx+\int_{1}^{+\infty} x\cdot 0\,dx$$

$$=\quad 0 \quad + \quad \frac{4}{5} \quad + \quad 0$$

$$=\frac{4}{5}$$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{2}{3}-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{2}{75}$$

## 五、根据 E(X)、D(X) 的性质进行复杂运算

| | E | D |
|---|---|---|
| 性质 | $E(C)=C$ | $D(C)=0$ |
| | $E(CX)=CE(X)$ | $D(CX)=C^2D(X)$ |
| | $E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$ | $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$（X、Y 相互独立时） |
| | $E(XY)=E(X)E(Y)$（X、Y相互独立时） | |
| | $D(X)=E(X^2)-E^2(X)$ | |

**例 1：** 已知

| X | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| P | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 |

**求 $E(2X^2-5)$、$D(\sqrt{7}X-5)$。**

$E(X)=\sum x_i p_i=0\times0.1+1\times0.2+2\times0.3+3\times0.4=2$

$D(X)=(0-2)^2\cdot0.1+(1-2)^2\cdot0.2+(2-2)^2\cdot0.3+(3-2)^2\cdot0.4=1$

$E(2X^2-5)=E(2X^2)-E(5)=2E(X^2)-5=2\times[E^2(X)+D(X)]-5=2\times(2^2+1)-5=5$

$D(\sqrt{7}X-5)=D(\sqrt{7}X)+D(5)=7D(X)+0=7\times1+0=7$

## 六、E(X)、D(X) 与各种分布的综合题

| X 服从的分布 | E(X) | D(X) | P |
|---|---|---|---|
| 二项分布 $B(n,p)$ | $np$ | $np(1-p)$ | $P(X=d)=C_n^d p^d(1-p)^{n-d}$ |
| 泊松分布 $P(\lambda)$ | $\lambda$ | $\lambda$ | $P(X=d)=\frac{\lambda^d}{d!}e^{-\lambda}$ |
| 均匀分布 $U[a,b]$ | $\frac{a+b}{2}$ | $\frac{(b-a)^2}{12}$ | $P(c\le X\le d)=\frac{d-c}{b-a}$ |
| 指数分布 $E(\lambda)$ | $\frac{1}{\lambda}$ | $\frac{1}{\lambda^2}$ | $P(c\le X\le d)=\frac{1}{e^{c\lambda}}-\frac{1}{e^{d\lambda}}$ |
| 正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ | $\mu$ | $\sigma^2$ | $P(c\le X\le d)=\Phi\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{c-\mu}{\sigma}\right)$ |

<table>
<tr><th></th><th>E</th><th>D</th></tr>
<tr><td rowspan="5">性质</td><td>$E(C)=C$</td><td>$D(C)=0$</td></tr>
<tr><td>$E(CX)=CE(X)$</td><td>$D(CX)=C^2D(X)$</td></tr>
<tr><td>$E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$</td><td rowspan="2">$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$<br>（X、Y相互独立时）</td></tr>
<tr><td>$E(XY)=E(X)E(Y)$<br>（X、Y相互独立时）</td></tr>
<tr><td colspan="2">$D(X)=E(X^2)-E^2(X)$</td></tr>
</table>

**例 1：随机变量 X 服从二项分布，且$E(X)=6$，$D(X)=3$，求 P(X=1)**

$$\begin{cases}E(X)=6=np\\ D(X)=3=np(1-p)\end{cases}\Rightarrow\quad n=12\quad p=0.5$$

$$P(X=d)=C_n^d p^d(1-p)^{n-d}$$

$$P(X=1)=C_{12}^1(0.5)^1(1-0.5)^{12-1}=3\times2^{-10}$$

**例 2：已知 X 服从$\boldsymbol{\lambda=1}$的泊松分布，求 $\mathbf{P[X=E(X^2)]}$**

$E(X)=1 \qquad D(X)=1$

$E(X^2)=E^2(X)+D(X)=1^2+1=2$

$P[X=E(X^2)]=P(X=2)=\frac{1^2}{2!}e^{-1}=\frac{1}{2e}$

$$P(X=d)=\frac{\lambda^d}{d!}e^{-\lambda}$$

# 概率论第八课

## 一、Cov、$\rho_{XY}$、D 相关类题目

| | |
|---|---|
| Cov 协方差 | $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)$ |
| | $Cov(X,X)=D(X)$ |
| | $Cov(X,Y)=0$ (X、Y相互独立时) |
| | $Cov(X,Y)=\rho_{XY}\cdot\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}$ |
| | $Cov(aX+b,cY+d)=acCov(X,Y)$ |
| | $Cov(X_1\pm X_2,Y)=Cov(X_1,Y)\pm Cov(X_2,Y)$ |
| | $Cov(X,Y_1\pm Y_2)=Cov(X,Y_1)\pm Cov(X,Y_2)$ |
| $\rho_{XY}$ 相关系数 | $\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}}$ |
| | $\rho_{XY}=0$ (X、Y相互独立时) |
| D 方差 | $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2Cov(X,Y)$ |

**例 1：已知 A=2X+Y，B=2X−Y，X 与 Y 相互独立，D(X)=D(Y)=1，试求 Cov(A,B)。**

$$
\begin{aligned}
Cov(A,B)&=Cov(2X+Y,2X-Y)\\
&=Cov(2X,2X-Y)+Cov(Y,2X-Y)\\
&=Cov(2X,2X)-Cov(2X,Y)+Cov(Y,2X)-Cov(Y,Y)\\
&=4Cov(X,X)-2Cov(X,Y)+2Cov(Y,X)-Cov(Y,Y)\\
&=4Cov(X,X)-0+0-Cov(Y,Y)\\
&=4D(X)-0+0-D(Y)\\
&=4-1\\
&=3
\end{aligned}
$$

**例 2：已知 D(X)=1，D(Y)=4，$\rho_{XY}=-0.5$，试求 D(X+Y)。**

$$\begin{aligned}D(X+Y)&=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)\\&=1+4+2Cov(X,Y)\\&=5+2Cov(X,Y)\\&=5+2\cdot\rho_{XY}\cdot\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}\\&=5+2\cdot(-0.5)\cdot\sqrt{1}\cdot\sqrt{4}\\&=3\end{aligned}$$

## 二、利用切比雪夫不等式求概率

**例 1：设随机变量 X 的方差为 16，试求 P[|X−E(X)|<10]。**

$$P[|X-E(X)|\geq 10]\leq\frac{D(X)}{10^2}=\frac{16}{100}=0.16$$

$$\therefore P[|X-E(X)|<10]=1-P[|X-E(X)|\geq 10]\geq 0.84$$

## 三、多项独立同分布，求总和怎样的概率

**例 1：某商店出售一种商品，该商品周销量的期望是 1，方差是 1，假设各周的销量是相互独立的，求该商品的年销量(1 年=52 周)在 50 件到 70 件之间的概率。　　　　(结果用 Φ(X)表示)**

共 52 项（n=52），总销量为 Y

E(X)=1，D(X)=1

$\therefore P(50\leq Y\leq 70)=\Phi\left(\frac{70-52\times 1}{\sqrt{52\times 1}}\right)-\Phi\left(\frac{50-52\times 1}{\sqrt{52\times 1}}\right)$

$=\Phi(2.5)-\Phi(-0.28)$

**例 2：一个工厂每箱产品的质量独立同分布，假设每箱平均重 50kg，标准差为 5kg。若用最大载重量 5000kg 的汽车承运，那么每辆车最多可以装多少箱，才能保证不超载的概率大于 0.977?**

**$(\Phi(2)=0.977)$**

共 n 箱，总重量为 Y

$E(X)=50 \qquad D(X)=5^2=25$

$P(Y\leq 5000)=\Phi\left(\frac{5000-n\times 50}{\sqrt{n\times 25}}\right)=\Phi\left(\frac{5000-50n}{5\sqrt{n}}\right)$

$\because P(Y\leq 5000)>0.977=\Phi(2)$

$\therefore \Phi\left(\frac{5000-50n}{5\sqrt{n}}\right)>\Phi(2)$

$\frac{5000-50n}{5\sqrt{n}}>2 \Rightarrow n<98.02$

∴ 最多可装 98 箱