浙江海洋大学 2019–2020 学年第 一 学期

《概率统计 A》 第三章试卷（A 卷）

（适用班级 经管类 ）　　　　　　　　　　考试时间：100 分钟

一	二	三	总　　分

一、单选题 (共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分)

1. 设 (X,Y) 的联合分布律为

$X \backslash Y$	1	2	3
1	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$
2	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

, 则 $P\{XY=2\}=$ （ C ）

(A) $\frac{1}{5}$;　(B) $\frac{3}{10}$;　(C) $\frac{1}{2}$;　(D) $\frac{3}{5}$.

2. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度 $f(x,y)=\begin{cases}4xy, 0\leqslant x\leqslant 1, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$,

则当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时, (X,Y) 关于 X 的边缘概率密度为 $f_X(x)=$ （ B ）

(A) $\frac{1}{2x}$;　(B) $2x$;　(C) $\frac{1}{2y}$;　(D) $2y$.

3. 二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数是 $f(x,y)$, 分布函数是 $F(x,y)$, 关于 X, Y 的边缘分布函数是 $F_X(x)$, $F_Y(y)$, 则 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$, $\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$, $\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ 分别为 （ D ）

(A) 0, $F_X(x)$, $F_Y(y)$　(B) 1, $F_Y(x)$, $F(x,y)$

(C) $f(x,y)$, $F(x,y)$, $F_Y(y)$　(D) 1, $F_X(x)$, $F(x,y)$

4. 设随机变量 X, Y 独立同分布且 X 的分布函数为 $F(x)$, 则 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为 （ A ）

(A) $F(z)^2$;　(B) $F(x)F(y)$;

(C) $1-[1-F(z)]^2$;　(D) $[1-F(x)][1-F(y)]$.

5. 设 $X\sim N(-1,2)$, $Y\sim N(1,3)$, 且 X 与 Y 相互独立, 则 $X+2Y\sim$ （ B ）

(A) $N(1,8)$;　(B) $N(1,14)$;　(C) $N(1,22)$;　(D) $N(1,40)$.

二、填空题 (共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分)

1. 设 X 和 Y 为两个随机变量, 且 $P\{X\geqslant 0, Y\geqslant 0\}=\frac{3}{7}$, $P\{X\geqslant 0\}=P\{Y\geqslant 0\}=\frac{4}{7}$, 则 $P\{\max\{X,Y\}\geqslant 0\}=$ $\underline{\frac{5}{7}}$.

学院：　专业：　班级：　姓名：　学号：

装　订　线

2. 设随机变量 $X_i \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, $(i = 1,2)$, 且满足 $P\{X_1X_2 = 0\} = 1$, 则 $P\{X_1 = X_2\} =$ <u>0</u> .

3. 设平面区域 D 由曲线 $y = \frac{1}{x}$ 及直线 $y = 0$, $x = 1$, $x = \mathrm{e}^2$ 所围成. 二维随机变量 (X, Y) 在区域 D 上服从均匀分布, 则 (X, Y) 关于 X 的边缘概率密度在 $x = 2$ 处的值为 <u>$\frac{1}{4}$</u> .

4. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且均服从区间 $[0, 3]$ 上的均匀分布, 则 $P\{\max\{X, Y\} \leqslant 1\} =$ <u>$\frac{1}{9}$</u> .

5. 设随机变量 $(X, Y) \sim N(0, 2^2, 1, 3^2, 0)$, 则 $P\{|2X - Y| \geqslant 1\} =$ <u>0.8446</u> .

三、解答题 (共 6 小题，每小题 10 分，共 60 分．要求写出详细步骤)

1. 已知随机变量 X 和 Y 的联合概率密度函数为 $f(x, y) = \begin{cases} 4xy, & 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$

求 X 和 Y 的联合分布函数 $F(x, y)$.

解 当 $x < 0$ 或 $y < 0$ 时, $F(x, y) = P\{X \leqslant x, Y \leqslant y\} = 0$;

当 $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$ 时, $F(x, y) = 4\int_1^x \int_0^t uv\mathrm{d}u\mathrm{d}v = x^2y^2$;

当 $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$ 时, $F(x, y) = 4\int_1^x \int_0^t uv\mathrm{d}u\mathrm{d}v = x^2y^2$;

故 X 和 Y 的联合分布函数为 $F(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{或} y < 0 \\ x^2y^2, & 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ x^2, & 0 \leqslant x \leqslant 1, y > 1, \\ y^2, & x > 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 1, & x > 1, y > 1. \end{cases}$

2. 袋中有 1 个红球, 2 个黑球, 3 个白球, 现有放回地从袋中取球两次, 每次取一球, 以 X, Y, Z 分别表示两次取到的红、黑、白球的个数.

(I) 求 $P\{X = 1 \mid Z = 0\}$; (II) 求二维随机变量 (X, Y) 的联合分布律.

解 (I) 在没有取白球的情况下取了一次红球, 利用样本空间的缩减法, 相当于只有 1 个红球, 2 个黑球放回摸两次, 其中摸一个红球的概率, 所以

$$P\{X = 1 \mid Z = 0\} = \frac{C_2^1 \times 2}{3^2} = \frac{4}{9};$$

(II) X, Y 的可能取值均为 0,1,2, 故

$P\{X = 0, Y = 0\} = \frac{C_3^1 \times C_3^1}{6^2} = \frac{1}{4}$, $P\{X = 1, Y = 0\} = \frac{2 \times C_3^1}{6^2} = \frac{1}{6}$,

$P\{X = 2, Y = 0\} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$, $P\{X = 0, Y = 1\} = \frac{2 \times C_2^1 \times C_3^1}{6^2} = \frac{1}{3}$,

$P\{X = 1, Y = 1\} = \frac{2 \times C_2^1}{6^2} = \frac{1}{9}$, $P\{X = 0, Y = 2\} = \frac{C_2^1 \times C_2^1}{6^2} = \frac{1}{9}$,

$P\{X = 2, Y = 1\} = 0$, $P\{X = 1, Y = 2\} = 0$, $P\{X = 2, Y = 2\} = 0$,

即 (X,Y) 的联合分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	0
2	$\frac{1}{36}$	0	0

。

3. 设 (X, Y) 的联合分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$

求 (I) X, Y 的边缘分布律; (II) $Z = X + Y$ 的分布律.

解 (I) 由于

$X \backslash Y$	0	1	2	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{13}{24}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{11}{24}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{5}{24}$	1

,

故 X 与 Y 的边缘分布律分别为

X	0	1
P	$\frac{13}{24}$	$\frac{11}{24}$

,

Y	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{5}{24}$

.

(II) $Z = X + Y$ 的取值为 0,1,2,3.

$$P\{Z=0\} = P\{X=0, Y=0\} = \tfrac{1}{4},$$
$$P\{Z=1\} = P\{X=0, Y=1\} + P\{X=1, Y=0\} = \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{5}{12},$$
$$P\{Z=2\} = P\{X=0, Y=2\} + P\{X=1, Y=1\} = \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{4},$$
$$P\{Z=3\} = P\{X=2, Y=2\} = \tfrac{1}{12},$$

故 Z 的分布律为:

Z	0	1	2	3
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

.

4. 设随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} Axy^2, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$

求 (I) 常数 A; (II) 证明 X 与 Y 相互独立.

解 (I) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = A\int_0^1\int_0^1 xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{A}{6} = 1$ 得 $A = 6$.

(II) 边缘密度为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

$$f_Y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}x = \begin{cases} 3y^2, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

显然, $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$, 故 X 与 Y 相互独立.

5. 设 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0\leqslant x\leqslant y, 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$ 求 $P\{X\leqslant \frac{1}{2}\}$.

解 $P\{X\leqslant \frac{1}{2}\}=\iint_{x\leqslant\frac{1}{2}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_x^1 8xy\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{2}}4x(1-x^2)\mathrm{d}x=\frac{7}{16}$.

另解

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_x^1 8xy\mathrm{d}y, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}=\begin{cases}4x-4x^3, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

则 $P\{X\leqslant\frac{1}{2}\}=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}}f_X(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}(4x-4x^3)\mathrm{d}x=\frac{7}{16}$.

6. 设 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & 0\leqslant x\leqslant 1, y\geqslant 0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$ 求 $Z=2X+Y$ 的密度函数 $f_Z(z)$.

解 法一：公式法

利用分布函数法可得 $f_Z(z)$ 的计算公式为 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-2x)\mathrm{d}x$, 所以

$$f_Z(z)=\begin{cases}0, & \frac{z}{2}<0\\ \int_0^{\frac{z}{2}}\mathrm{e}^{-(z-2x)}\mathrm{d}x, & 0\leqslant\frac{z}{2}\leqslant 1\\ \int_0^1\mathrm{e}^{-(z-2x)}\mathrm{d}x, & \frac{z}{2}>1\end{cases}=\begin{cases}0, & z<0,\\ \frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-z}), & 0\leqslant z\leqslant 2,\\ \frac{1}{2}(\mathrm{e}^2-1)\mathrm{e}^{-z}, & z>2.\end{cases}$$

法二：分布函数法

先求 $F_Z(z)$, 根据 $F_Z(z)$ 的定义, 用二重积分计算求出.

$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{2X+Y\leqslant z\}=\iint_{2x+y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

当 $z<0$ 时, $F_Z(z)=0$;

当 $0\leqslant z\leqslant 2$ 时, $F_Z(z)=\int_0^{\frac{z}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{z-2x}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}(z-1+\mathrm{e}^{-z}$;

当 $z>2$ 时, $F_Z(z)=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{z-2x}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=1+\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^2)\mathrm{e}^{-z}$.

即 $F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \frac{1}{2}(z-1+\mathrm{e}^{-z}), & 0\leqslant z\leqslant 2,\\ 1+\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^2)\mathrm{e}^{-z}, & z>2.\end{cases}$

再求 $f_Z(z)$.

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-z}), & 0\leqslant z\leqslant 2,\\ \frac{1}{2}(\mathrm{e}^2-1)\mathrm{e}^{-z}, & z>2.\end{cases}$$