第四章 测验答案

一. 选择题

(1) 因为 $X \sim B(16, 0.5)$, 所以 $DX = 16 \times 0.5 \times 0.5 = 4$; （C）

而 $Y \sim p(9)$, 则 $DY = 9$, 故 $D(X-2Y+1) = DX + 4DY = 40$

(2) 因为 $\frac{1}{4} + p + \frac{1}{4} = 1$, 故 $p = \frac{1}{2}$, （B）

又 $EX = (-2) \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + x \times \frac{1}{4} = 1$, 故 $x = \frac{1}{4}$

(3) $EX = \frac{1}{3}$, $EY = \frac{1}{3}$, $EXY = 0$, 则 （A）

$Cov(X,Y) = EXY - EX \cdot EY = -\frac{1}{9}$

(4) $E(X-C)^2 - E(X-\mu)^2 = E(X^2 - 2CX - C^2) - E(X^2 - 2\mu X + \mu^2)$ （D）

$= (\mu - c)^2 \geq 0$

(5) 若X与Y相互独立, 则X与Y不相关, 反之不然! （C）

即X与Y不相关时, X与Y未必相互独立,

当X与Y服从二维正态分布时, X与Y相互独立和X与Y

不相关等价, 但题中仅知X与Y服从G态分布.

二. 填空题

(6) $E(3X^2-2) = 3E(X^2) - 2 = 3[DX + (EX)^2] - 2 = 3[3+(-1)^2] - 2 = \underline{10}$.

(7) $Cov(X_1 + 2X_2, Y) = Cov(X_1, Y) + 2Cov(X_2, Y) = -1 + 2 \times 3 = \underline{5}$.

(8) 由题意得 $X \sim B(10, 0.4)$, 于是 $EX = 10 \times 0.4 = 4$

$DX = 10 \times 0.4 \times (1 - 0.4) = 2.4$, 故 $E(X^2) = DX + (EX)^2 = 2.4 + 4^2 = \underline{18.4}$.

(9) 因为X的pdf为: $f(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{8}{x^3}, & x \geq 2 \\ 0, & x < 2, \end{cases}$, 所以

$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_{2}^{+\infty} \frac{8}{x^2}\,dx = \underline{4}$.

(10) $EY = \frac{1}{3}(EX_1 + EX_2 + EX_3) = \lambda$, $DY = \frac{1}{9}(DX_1 + DX_2 + DX_3) = \frac{\lambda}{3}$.

故 $EY^2 = (EY)^2 + DY = \underline{\lambda^2 + \frac{\lambda}{3}}$.

三. 解答题

(11) 解：(I) 因为 $\sum_i\sum_j p_{ij}=1$，所以 $\alpha+\beta+0.6=1$，即 $\alpha+\beta=0.4$；

又 $EY=1$，即 $(\alpha+0.2)\times1+(\beta+0.1)\times2=1$，所以 $\alpha=\beta=0.2$.

(II) $E(XY)=\sum_i\sum_j x_iy_jp_{ij}=1\times0.2+2\times0.2=0.6$.

(III) $EX=\sum_i\sum_j x_ip_{ij}$ (或 $\sum_i x_ip_{i\cdot}$) $=1\times0.6=0.6$.

(12) 解：(I) $EZ=\frac{1}{3}EX+\frac{1}{2}EY=\frac{1}{3}+\frac{0}{2}=\frac{1}{3}$.

$$DZ=\frac{1}{9}DX+\frac{1}{4}DY+2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}Cov(X,Y)$$
$$=\frac{1}{9}DX+\frac{1}{4}DY+\frac{1}{3}\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}$$
$$=\frac{3^2}{9}+\frac{4^2}{4}+\frac{1}{3}\times(-\frac{1}{2})\times3\times4=1+4-2=3.$$

(II) $$Cov(X,Z)=\frac{1}{3}Cov(X,X)+\frac{1}{2}Cov(X,Y)$$
$$=\frac{1}{3}\times3^2+\frac{1}{2}\times(-\frac{1}{2})\times3\times4=0$$

所以 $\rho_{XZ}=\dfrac{Cov(X,Z)}{\sqrt{DX}\sqrt{DZ}}=0$.

(13) 解法一：因为 X,Y 相互独立，故利用期望性质

$E(XY)=EX\cdot EY=\int_0^1 x\cdot2x\,dx\cdot\int_5^{+\infty}y\cdot e^{-(y-5)}dy=4$.

解法二：$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf_X(x)f_Y(y)dy=\int_0^1\int_5^{+\infty}xy\cdot2x\cdot e^{-(y-5)}dxdy=4$.

(14) 解法一：按一维随机变量函数来做.

令 $Z=X-Y$，由于 $X\sim N(0,(\frac{1}{\sqrt2})^2)$，$Y\sim N(0,(\frac{1}{\sqrt2})^2)$ 且 X 和 Y 相互独立.

故 $Z\sim N(0,1)$. 因为 $D(|X-Y|)=D(|Z|)=E(|Z|^2)-[E(|Z|)]^2$

$=E(Z^2)-[E(|Z|)]^2$

而 $E(Z^2)=(EZ)^2+DZ=0^2+1=1$

$E(|Z|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}ze^{-\frac{z^2}{2}}dz=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

所以 $D(|X-Y|)=1-\frac{2}{\pi}$.

(14) 解法二：按二维随机变量函数来做

$$E(|X-Y|)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|x-y|\,f(x,y)\,dx\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|x-y|\cdot\frac{1}{\pi}e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$$

令 $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|\cos\theta-\sin\theta|\,d\theta\int_0^{+\infty}e^{-\rho^2}\rho^2\,d\rho$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot 4\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{4}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$E(|X-Y|^2)=E[(X-Y)^2]=D(X-Y)+[E(X-Y)]^2$$

$$=DX+DY+(EX-EY)^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-0^2=1.$$

故 $D(|X-Y|)=E(|X-Y|^2)-[E(|X-Y|)]^2=1-\frac{2}{\pi}$.

(15) 解：设 X 表示一周5天内机器发生故障的天数，则 $X\sim B(5,0.2)$

$P\{X=0\}=0.8^5=0.328$，$P\{X=1\}=C_5^1\times0.2\times0.8^4=0.4096$

$P\{X=2\}=C_5^2\times0.2^2\times0.8^3=0.2048$，$P\{X\geq3\}=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}=0.0576$

则利润 Y 的分布律为

Y	10	5	0	-2
P	0.328	0.4096	0.2048	0.0576

故

$EY=5.2128$

(16) 解：已知 (X,Y) 的联合密度为 $f(x,y)=\begin{cases}ye^{-(x+y)}, & x,y>0\\ 0, & 其他\end{cases}$

所以 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\,dx\,dy=\int_0^{+\infty}dy\int_0^{+\infty}xy\,e^{-(x+y)}dx=1$

$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\,dx\,dy=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty}y^2e^{-(x+y)}dy=2$

$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^{+\infty}dy\int_0^{+\infty}x^2ye^{-(x+y)}dx=2$,

$EY^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty}y^2\cdot ye^{-(x+y)}dy=6$,

故 $DX=EX^2-(EX)^2=1$，$DY=EY^2-(EY)^2=2$.

$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\,dx\,dy=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}xye^{-(x+y)}dx\,dy=2$

故 $cov(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY=0$，从而 $\rho_{XY}=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=0$，因此 X 与 Y 不相关

又 $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\leq0\end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases}ye^{-y}, & y>0\\ 0, & y\leq0\end{cases}$，所以 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$，故 X 与 Y 相互独立