定积分的对称性有很多应用

P103 例 6.11

例6. 11 设 $f(x)$为对称区间$[-a,a]$$(a>0)$上的连续函数，则

(1)当 $f(x)$是奇函数时，$\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$;

(2)当 $f(x)$是偶函数时，$\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

推广：**设 $f(x)$为对称区间$[-a,a]$$(a>0)$上的连续函数，**

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{0}^{a}\left[f(-x)+f(x)\right]dx.$$

这个结论对解决某些对称区间上的积分有用

练习：

1. 若函数 $f(x)$为正值连续函数，且 $f(x)f(-x)=1$，计算

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+f(x)}dx.$$

2. 计算$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x}{1-e^{x}}dx$.