

四. 导数的应用（二）（加难）

1.证明: $x \in (0,1)$ 时, $\frac{1}{\ln 2} - 1 < \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$

2.证明: $\forall x > 0$ 有 $x - \frac{1}{2}x^2 < \ln(1+x) < x$

3. 设若方程 $kx + \frac{1}{x^2} = 1$ 有且仅有一个解, 求 k 的取值范围

4. 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上二阶可导且 $f''(x) \leq 0$, x_1, x_2 是区间 $[a, b]$ 上的任意两点, 证明: $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$

5. 设 $f(x) = x^3 - px + q$, q, p 为实数, 且 $p > 0$

(1) 求函数的极值.

(3) 求方程 $x^3 - px + q = 0$ 有三个实根的条件.

6. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导且 $\max_{x \in (0, 1)} f'(x) = \frac{1}{4}$, $|f''(x)| \leq 1$, 证明: $|f(0)| + |f(1)| < 1$

7.求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - e^x}{\sin x - x \cos x}$

8.设函数 $f(x)$ 对实数 R 上的任意点 x 满足 $|f(x)| \leq -\cos x$, 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(\ln x)}{1-x}$