§ 9.4 多元复合函数求导法

要求：熟练掌握复合函数求导链式法则

一元复合函数 $y = f(u)$，$u = \varphi(x)$，求导 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

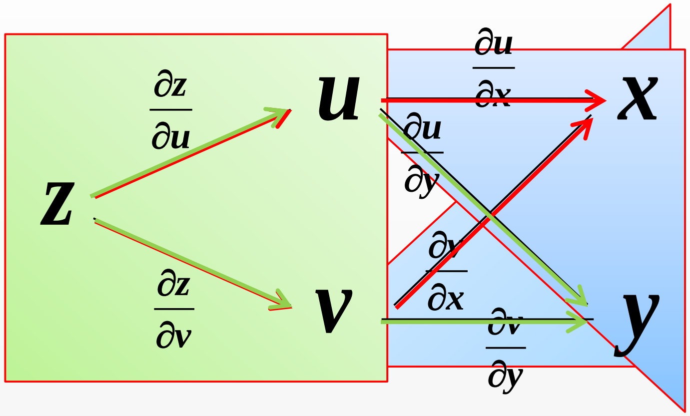
复合关系图 $y \xrightarrow{\quad} u \xrightarrow{\quad} x$

$\dfrac{dy}{du}$ $\dfrac{du}{dx}$

如果函数 $u = \varphi(x, y)$ 及 $v = \psi(x, y)$ 都在点 (x, y) 具有对 x 及对 y 的偏导数，函数 $z = f(u, v)$ 在对应点 (u, v) 具有连续偏导数，则复合函数 $z = f[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$ 在点 (x, y) 的两个偏导数存在，且有

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}} \qquad \boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}}$$

二元函数也有复合关系图



$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

类似地，画出z经u, v到达y的路径，可得到对y的偏导公式

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

这就是复合函数求导的链式法则，要求**理解关系结构，会计算**.

复合函数求偏导

例9.11 (P184) 设 $z=e^u\sin v$， $u=x+y$， $v=xy$， 求一阶偏导数.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial u}=e^u\sin v$， $\dfrac{\partial z}{\partial v}=e^u\cos v$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=1$， $\dfrac{\partial v}{\partial x}=y$

$$
\begin{tikzcd}
 & u \arrow[r] \arrow[dr, dash] & x \\
z \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & v \arrow[uur] \arrow[r, dash] & y
\end{tikzcd}
$$

由链式法则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^u\sin v\cdot 1+e^u\cos v\cdot y$

$$=e^{x+y}\left(\sin xy+y\cos xy\right)$$

最终结果只能用自变量表示

同理可求得： $\dfrac{\partial z}{\partial y}=e^u\sin v\cdot 1+e^u\cos v\cdot x$

$$=e^{x+y}\left(\sin xy+x\cos xy\right)$$

例9.11 设 $z = e^u \sin v$, $u = x + y$, $v = xy$, 求一阶偏导数.

解法二 消去中间变量，$z = e^{x+y} \sin xy$ 化为二元函数求偏导计算

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(e^{x+y}\right)_x \sin xy + e^{x+y} \left(\sin xy\right)_x$$

$$= e^{x+y} \cdot \sin xy + e^{x+y} \cdot \cos xy \cdot \left(xy\right)_x$$

$$= e^{x+y} \left(\sin xy + y \cos xy\right)$$

比较两种求解方法，显然第二种方法简单.

练习

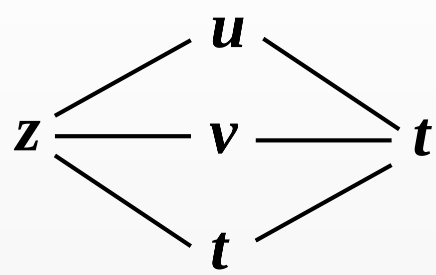
求下列复合函数的一阶偏导数：

(1) $z = u^2 \ln v$, $u = x + y$, $v = x - y$ (1)消去中间变量求导方便

(2) $z = u^v$, $u = x + y$, $v = x$ (2)用链式法则求导容易

例9.13 (P185) 设$z=uv+\cos t$， 而$u=e^t$， $v=\sin t$， 求$\dfrac{dz}{dt}$.

先分析复合结构，画出关系图



$z=f(u,v,t)=f[u(t),v(t),t]$

最终z是关于变量t的一元函数，故求的是导数，在多元函数这一章中称为全导数.

还是有两种计算方法　解法一：利用链式法则

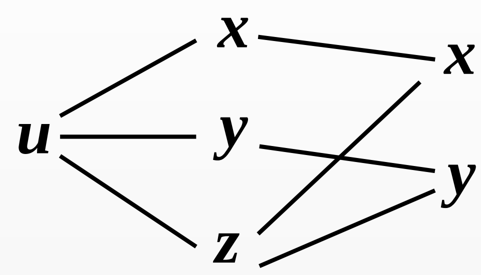
解法二：消去中间变量，直接求导

解 $z=uv+\cos t=e^t\sin t+\cos t$

$$\frac{dz}{dt}=\left[\left(e^t\right)'\cdot\sin t+e^t\left(\sin t\right)'\right]+\left(\cos t\right)'=e^t\left(\sin t+\cos t\right)-\sin t$$

例9.12 设 $u = e^{x^2+y^2+z^2}$，而 $z = y^2 \sin x$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$.

先分析复合结构，画出关系图



$$u = f(x,y,z) = f[x,y,z(x,y)]$$

最终 u 是关于变量 x,y 的二元函数，故求的是偏导数.

书上的记号难理解，短时间内讲不明白，还是用简单的方法

解 消去中间变量 $u = e^{x^2+y^2+y^4\sin^2 x}$

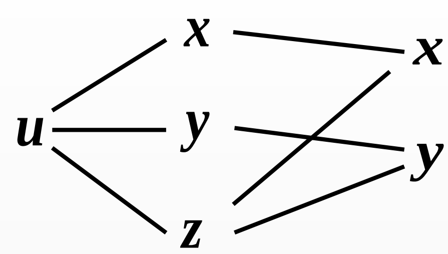
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(e^{x^2+y^2+y^4\sin^2 x}\right)_x = e^{x^2+y^2+y^4\sin^2 x}\left(x^2+y^2+y^4\sin^2 x\right)_x$$

$$= e^{x^2+y^2+y^4\sin^2 x}\left(2x+2y^4\sin x\cos x\right)$$

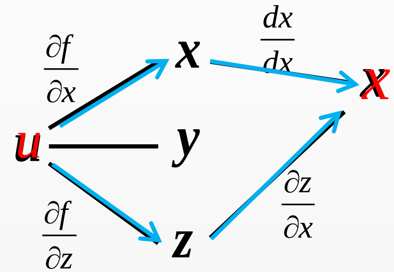
书上的答案应消去中间变量 z，我这里的答案是标准答案.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{x^2+y^2+y^4\sin^2 x}\left(2y+4y^3\sin^2 x\right)$$

例9.12 设$u=e^{x^2+y^2+z^2}$， 而$z=y^2\sin x$， 求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$.

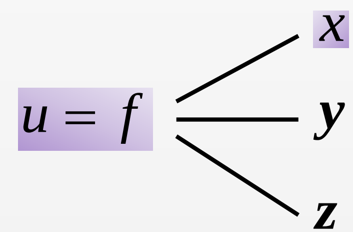


按书上的计算讲，这里很重要的是正确理解记号.



解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$

左边$\frac{\partial u}{\partial x}$是函数$u$对最终自变量$x$求偏导



右边$\frac{\partial f}{\partial x}$是三元函数$u=f(x,y,z)$对第一个自变量$x$求偏导

分清记号$\frac{\partial u}{\partial x}$与$\frac{\partial f}{\partial x}$代表的意义，是能正确计算的关键.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\left(e^{x^2+y^2+z^2}\right)_x=e^{x^2+y^2+z^2}\left(x^2+y^2+z^2\right)_x=\boxed{(2x+0+0)e^{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\left(e^{x^2+y^2+z^2}\right)_z=\boxed{(0+0+2z)e^{x^2+y^2+z^2}} \qquad \boxed{\frac{\partial z}{\partial x}=y^2\cos x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xe^{x^2+y^2+z^2}+2ze^{x^2+y^2+z^2}\cdot y^2\cos x=e^{x^2+y^2+y^4\sin^2 x}\left(2x+y^4 2\sin x\cos x\right)$$

练习

(1) 设 $z = e^{x-2y}$, $x = \sin t$, $y = t^3$, 求 $\dfrac{dz}{dt}$

(2) 设 $u = x^2 \sin y + e^z$, $z = xy$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$

答案:

(1) $z = e^{\sin t - 2t^3}$, $\dfrac{dz}{dt} = e^{\sin t - 2t^3} \cdot \left(\cos t - 6t^2\right)$

(2) $u = x^2 \sin y + e^{xy}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x \sin y + ye^{xy}$

作业：

***P*185** **1.**

3.

4. (1)

预习 9.5节