第二章　极限与连续

§2.1 数列的极限

要求：理解极限的思想

什么是数列？　数排成一列称为数列，记号$\{x_n\}$

观察数列：

$(1)\ 1,2,3,\cdots,n,\cdots$　　$(2)\ 1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots,\dfrac{1}{n},\cdots$

$(3)\ 1+(-1)^n\dfrac{1}{n}$　　$(4)\ 1,-1,1,-1,\cdots\cdots$

研究数列的极限，就是研究当$n\to\infty$时，数x_n是怎样变化的？

分析数列：

(1) $1,2,3,\cdots,n,\cdots$ 当 $n\to\infty$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty} n$ 不存在,越来越大

(2) $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

数列变化方式是从大于0的方向单侧趋于0

(3) $1+(-1)^n\frac{1}{n}$ $\lim\limits_{n\to\infty}[1+(-1)^n\frac{1}{n}]=1$

数列变化方式是在1上、下方摆动趋于1

(4) $1,-1,1,-1,\cdots\cdots$

极限不存在，但与(1)不同，是振荡的

一、数列极限

1.通俗定义：已知数列$\{x_n\}$: $x_1, x_2, x_3, \cdots x_n, \cdots$ 当$n \to \infty$时，若其通项 x_n 的值无限地趋近于某一确定常数A，则称A为数列$\{x_n\}$当$n \to \infty$时的极限值，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \quad \text{或} \quad x_n \to A \ (n \to \infty)$$

注：在数学上，"无限趋近于"用符号"$\to$"标记，如$x_n \to A$表示x_n的值无限趋近于A

2.常用结论　见P18

$(1)\lim C = C;$

$(2)\lim \dfrac{\text{有界量}}{\text{无限大}} = 0$

$(3)\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \ \left(|q| < 1\right)$

$(4)\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1\left(a > 0\right)$

记号

lim表示$x \to x_0$

或$x \to \infty$都成立

例2.1 计算下列极限

$$(1)\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1};\qquad (2)\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-3n}{4n^2+9};\qquad (3)\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{4n^2+9};\qquad (4)\lim_{n\to\infty}2n$$

解

$$(1)\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{n}}=2$$

$$(2)\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-3n}{4n^2+9}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{3}{n}}{4+\frac{9}{n^2}}=\frac{1}{4}$$

$$(3)\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{4n^2+9}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{4+\frac{9}{n^2}}=0$$

$$(4)\lim_{n\to\infty}2n=\infty$$

研究数列变化趋势，对收敛数列，写出它们的极限：

(1) $x_n = \frac{1}{2^n}$;　(2) $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$;　(3) $x_n = 2 + \frac{1}{n^2}$;

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$;　(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 0$;　(3) $\lim\limits_{n\to\infty} (2 + \frac{1}{n^2}) = 2$;

(4) $x_n = \frac{n-1}{n+1}$;　(5) $x_n = (-1)^n n$;　(6) $x_n = \frac{2^n - 1}{3^n}$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$;　(5) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n n$ 不存在;　(6) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{3^n} = 0$.

定理2.1（单调有界准则）见P18

单调有界数列必有极限.

二、收敛数列的性质 见P19

1.（唯一性）收敛数列极限必唯一.

2.（有界性）收敛数列必有界.

3.（保号性）

若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A > 0$，则必存在$N$，使得当$n > N$时，有$x_n > 0$;

同理，若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A < 0$，则必存在$N$，使得当$n > N$时，必有$x_n < 0$.

作业　P19

在草稿纸上做　$1^{\#}$，$2^{\#}$　(即不用交)