7.6 二阶常系数线性齐次微分方程的解法

要求：理解解的结构定理，会求二阶常系数线性齐次方程通解

一、二阶线性微分方程解的结构

定义：

形如 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的方程称为二阶线性微分方程

二阶线性齐次微分方程： $y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \quad (1)$

二阶线性非齐次微分方程： $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x) \quad (2)$

这里与一阶线性齐次，非齐次方程定义对比

$\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=0$ 称为一阶线性齐次方程；

$\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ 称为一阶线性非齐次方程.

定理1 如果y_1与y_2是方程(1)的两个线性无关特解，则它们的线性组合$y=C_1y_1+C_2y_2$是方程(1)的通解.

二阶线性齐次微分方程：

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \quad (1)$$

证明：因为y_1和y_2是方程(1)的解，则有

$$y_1''+P(x)y_1'+Q(x)y_1=0 \qquad y_2''+P(x)y_2'+Q(x)y_2=0$$

将$y'=C_1y_1'+C_2y_2'$及$y''=C_1y_1''+C_2y_2''$代入方程(1)，有

$$\left(C_1y_1''+C_2y_2''\right)+P(x)\left(C_1y_1'+C_2y_2'\right)+Q(x)(C_1y_1+C_2y_2)$$

$$=C_1\left[y_1''+P(x)y_1'+Q(x)y_1\right]+C_2\left[y_2''+P(x)y_2'+Q(x)y_2\right]=0$$

则$y=C_1y_1+C_2y_2$是二阶线性齐次微分方程(1)的解.

又因y_1和y_2为线性无关，则C_1和C_2为两个独立常量.

故$y=C_1y_1+C_2y_2$为方程(1)的通解.

定理1称为齐次方程解的叠加定理

定理2 设y^*是二阶线性非齐次微分方程(2)的一个特解，而Y为对应齐次方程(1)的通解，则$y = y^* + Y$是方程(2)的通解.

二阶线性齐次微分方程：$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (1)$

二阶线性非齐次微分方程：$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \neq 0 \quad (2)$

定理2的用途：只要求出方程(2)的一个特解y^*，并求出(2)对应齐次的通解Y，则方程(2)的通解为$y = y^* + Y$.

定理2也是解的叠加定理，它是齐次方程与非齐次方程解的叠加

二、二阶常系数线性齐次微分方程的解法

二阶方程 $y''+py'+qy=0$，其中p,q为常数，称为二阶常系数线性齐次微分方程.

分析解的特征：

由于p,q是常数，要满足$y''+py'+qy=0$,

(1) $y=x^n\left(n>1\right)$，$y'=nx^{n-1}, y''=n\left(n-1\right)x^{n-2}$,

$n\left(n-1\right)x^{n-2}+pnx^{n-1}+qx^n\neq 0$ 故幂函数不是解；

(2) $y=\ln x$也不是解；

(3) $y=e^x$, 因为$y^{(n)}=y$, $e^y+pe^y+qe^y=0$有解,

所以猜测$y=e^{rx}$是方程的解；

(4) $y=\sin x$, $y=\cos x$也能满足$y''+py'+qy=0$,

所以正余弦函数可能是解.

推导：设 $y''+py'+qy=0$的解是 $y=e^{rx}$（r是待定常数）

求导：$y'=re^{rx}$, $y''=r^2e^{rx}$　　将 y',y''代入方程，得

$$\left(r^2e^{rx}\right)+p\left(re^{rx}\right)+q\left(e^{rx}\right)=e^{rx}\left(r^2+pr+q\right)=0$$

$\because e^{rx}\neq 0$　$\therefore$必须要求　$r^2+pr+q=0$

方程$r^2+pr+q=0$称为方程$y''+py'+qy=0$的**特征方程**

特征方程$r^2+pr+q=0$的根称为**特征根**

求二阶常系数线性齐次方程的解法称为特征根法

特征方程$r^2+pr+q=0$是一元二次方程，根有三种情况

(1) 有两个不相等的实根；(2) 有两个不相等的实根；(3) 有一对复根

二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的解视特征根的不同有三种情况：

(1) 若 $r_1 \neq r_2$ (实根)， $y_1=e^{r_1x}$, $y_2=e^{r_2x}$ 是两个线性无关的解，

所以方程通解为 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$;

(2) 若 $r_1=r_2=r$， $y_1=e^{rx}$ 是方程的一个解，

可以证明 $y_2=xe^{rx}$ 也是方程的解，且两个解线性无关，

故 方程通解为 $y=C_1e^{rx}+C_2\cdot xe^{rx}=\left(C_1+C_2x\right)e^{rx}$;

证明 $y_2=xe^{rx}$ 是解

求导 $y_2'=\left(xe^{rx}\right)'=e^{rx}+x\left(re^{rx}\right)$ $\quad y_2''=e^{rx}\left(xr^2+2r\right)$

将 y_2', y_2'' 代入方程，得

$$e^{rx}\left(xr^2+2r\right)+pe^{rx}\left(1+xr\right)+qxe^{rx}=0$$

整理 $e^{rx}\left[x\left(r^2+pr+q\right)+\left(2r+p\right)\right]=0$

因为r是特征根，$r^2+pr+q=0$　又由于r是重根，$2r+p=0$

求根公式 $r_{1,2}=\dfrac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$，　由于$r$是重根，$r_1=r_2=r=\dfrac{-p}{2}$，

所以，$y_1=e^{rx}, y_2=xe^{rx}$是两个解.

(3)若$r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$(共轭复根),则方程通解为

$$y=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right)$$

这个问题涉及复数，了解就达到要求，不证明.

例7. 17(p140) 求下列方程的通解：

$(1)\ y''-6y'+5y=0;\quad (2)\ y''+6y'+9y=0;\quad (3)\ y''+2y'+5y=0.$

解(1) 特征方程 $r^2-6r+5=0$ 即$(r-5)(r-1)=0$

求出特征根$r_1=5, r_2=1$

故，所求通解为 $y=C_1e^{5x}+C_2e^{x}.$

(2) 特征方程 $r^2+6r+9=0$ 即$(r+3)^2=0$ 特征重根$r=-3,$

故，所求通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-3x}.$

(3) 特征方程 $r^2+2r+5=0$ 特征根 $r=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2}=-1\pm 2i,$

故，所求通解为$y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$

小结：

二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+py'+qy=0$，其中p,q为常数

特征方程：$r^2+pr+q=0$

特征方程的根	微分方程的通解
两个不相等的实根 $r_1 \neq r_2$	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
两个相等的实根 $r_1=r_2=r$	$y=C_1e^{rx}+C_2\cdot xe^{rx}$
有一对共轭复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	$y=e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x\right)$

练习：

求微分方程的通解

(1) $y''+y'-2y=0$

(2) $y''-4y'=0$

(3) $y''+2y'+y=0$

(4) $y''+6y'+13y=0$

(5) $y''+y=0$

这五题包含了解的全部情况

答案：

(1) $y=C_1e^{x}+C_2e^{-2x}$

(1)两个不相等的实根

(2) $y=C_1+C_2e^{4x}$

(2)两个不相等的实根特例，有一个根为零

(3) $y=\left(C_1+C_2x\right)e^{-x}$

(3)两个相等的实根

(4) $y=e^{-3x}\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right)$

(4)一对复根，实部$\alpha=-3,\ \beta=2$

(5) $y=C_1\cos x+C_2\sin x$

(5)一对复根，特例实部$\alpha=0$

例7.18 (p140)

已知一个二阶常系数线性齐次微分方程的两个特解为 $y_1 = \mathrm{e}^{-3x}, y_2 = \mathrm{e}^{6x}$, 求此微分方程.

分析：已知方程的特解， 由解的结构，可得到特征根

进而推出特征方程，最后求得微分方程.

实际上是求解的逆过程.

解 已知两个解 $y_1 = \mathrm{e}^{-3x}, y_2 = \mathrm{e}^{6x}$ 知，特征根为 $r_1 = -3,\ r_2 = 6$

特征方程：$(r+3)(r-6) = 0$ 整理得 $r^2 - 3r - 18 = 0$

由特征方程可知, 所求的二阶常系数线性齐次微分方程为

$$y'' - 3y' - 18y = 0$$

作业：

$P141$

$3(1)(2)(5)\quad 4(1)\quad 5(1)$

写在草稿纸上：1　2