复习：　　设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$

向量运算

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

向量关系：

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$$

$$\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$$

8.4 空间平面及其方程

要求：

1. 熟记**平面点法式方程**的形式
   掌握用点法式求解平面方程的方法
2. 熟记**平面一般方程**的形式
   掌握求解有特殊位置的平面方程的方法
3. 熟记**平面截距式方程**的形式
   掌握用截距式求解平面方程的方法
4. 熟记**点到平面的距离**的公式
   掌握用距离公式求解点到平面的距离

8.4 空间平面及其方程

启示：解析几何的核心思想是**用代数方程来表示几何图形**

这一节要学习的内容是：**用方程来表示空间平面**

问题：在空间直角坐标系中用方程可以表示无穷多个平面，如何确定我们要表示的具体平面？

答案：确定一个平面需要两个条件

（1）平面上的一个点；（2）垂直于该平面的向量

方法：这一节介绍用方程表示空间平面的三种方法

（1）**点法式**；（2）**一般式**；（3）**截距式**

8.4.1 平面的点法式方程

解释：点法式是指用平面上一个**点**和一个**法向量**来求解平面方程

法向量：非零向量 $\vec{n}=(A,B,C)$，若 $\vec{n}$ 与平面 α **垂直**，称 $\vec{n}$ 为平面 α 的法向量.

注意：法向量有无穷多个，它们之间是平行的.

问题：已知平面 α 上的一个点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 及法向量 $\vec{n}=(A,B,C)$，怎样写出平面方程呢？

答案：（1）写出平面上经过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的一个向量；

取平面上任意一点 $M(x,y,z)$，则 $\overrightarrow{M_0M}$ 为所求向量

（2）写出平面向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 与其法向量 $\vec{n}$ 的关系式；

因为 $\vec{n}\perp\overrightarrow{M_0M}$，所以有 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$

（3）用坐标形式表示$\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$;

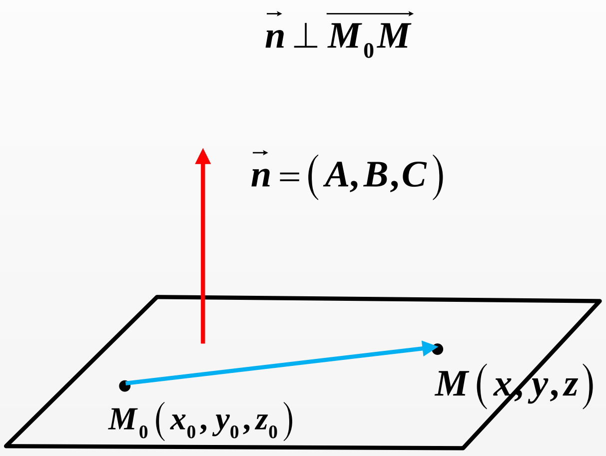
因为 $\vec{n}$ 的坐标为(A,B,C),

$\overrightarrow{M_0M}$的坐标为$(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)$,

所以根据向量点积的坐标表示法,

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$可表示为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$



这就是过点$M_0(x_0,y_0,z_0)$且

垂直于向量$\vec{n}=(A,B,C)$的平面方程

这个方程也称为平面的点法式方程

---

* 点法式方程的应用

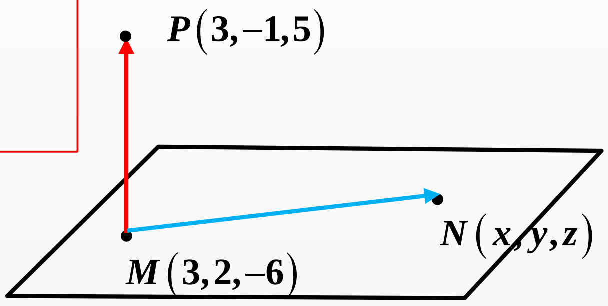
任务：根据已知条件用点法式写出平面方程

步骤：（1）找出平面上已知点M的坐标

（2）写出平面上经过点M的向量的坐标

（3）写出平面法向量的坐标

（4）写出平面方程



例 8.15 (P161) 求过点$M(3,2,-6)$且与M和$P(3,-1,5)$的连线垂直的平面方程.

解：(1) 平面上已知点M的坐标为$(3,2,-6)$

(2) 任取平面上点$N(x,y,z)$，则$\overrightarrow{MN}$的坐标为$(x-3,y-2,z+6)$

(3) 平面法向量$\overrightarrow{MP}$的坐标为$(3-3,-1-2,5-(-6))=(0,-3,11)$

(4) 写出平面方程，由$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MN}=0$得

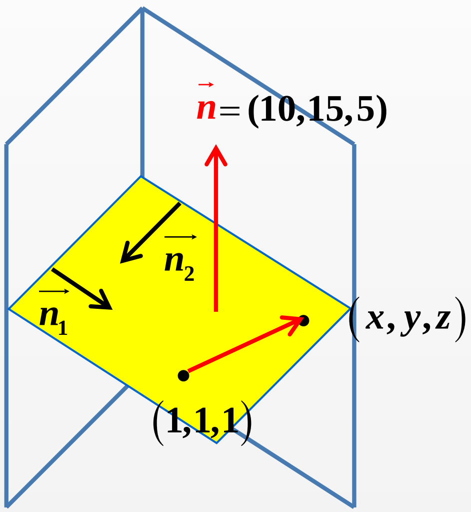
$$0(x-3)-3(y-2)+11(z+6)=0$$

整理得 $3y-11z-72=0$

例 8.16 (P161) 求过点(1,1,1)且垂直于平面 $x-y+z=7$ 和 $3x+2y-12z+5=0$ 的平面方程.

解：(1) 平面上已知点的坐标为(1,1,1),

(2) 平面上经过点(1,1,1)的向量坐标为 $(x-1,\ y-1,\ z-1)$,



(3) 求平面的法向量：题目给出的两个已知平面的法向量分别为

$\vec{n_1}=(1,-1,1),\ \vec{n_2}=(3,2,-12)$, 因此

所求平面法向量 $\vec{n}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -12 \end{vmatrix}=10i+15j+5k$

(4) 写出平面方程 $10(x-1)+15(y-1)+5(z-1)=0$

整理得 $2x+3y+z-6=0$

二、平面的一般式方程

由点法式 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

整理 $Ax+By+Cz+D=0$ 记 $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$

方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 称平面的**一般式方程**.

从一般方程的特点可知平面的特殊位置

(1) $Ax+By+Cz=0,$

方程特点：无常数项 平面位置：过坐标原点

(2) $By+Cz+D=0,$

方程特点：无变量 x 平面位置：平行于 x 轴

同理，方程无变量 y 或 z，平面位置自己思考.

(3) $By+Cz=0$

同时具有(1),(2)的特点，平面位置：通过 x 轴.

(4) $x=a$

平面同时平行 y 轴，z 轴，与 x 轴相交，交点 $(a,0,0)$.

由一般式写平面方程通常是根据已知条件确定A,B,C,D.

例 8.17 (P162) 求通过 y 轴和点$(-3,2,1)$的平面方程.

解 平面的一般式为 $Ax+By+Cz+D=0$

已知平面过 y 轴，方程中不出现变量 y, 则$B=0$

平面既然过 y 轴，则原点在平面上，有$D=0$;

所以平面方程为$Ax+Cz=0$

已知点$(-3,2,1)$在平面上，满足平面方程，得$-3A+C=0$

即 $C=3A$

代入方程$Ax+Cz=0$中，$Ax+3Az=0$

最终方程 $x+3z=0 \quad (A\neq 0)$

所求平面有特殊位置(如过原点或平行某坐标轴)时，常用一般式得到平面方程.

三、平面的截距式方程

设平面不过原点，又不与任何一条坐标轴平行，可以由一般式变形得到一种新的形式

由 $Ax+By+Cz+D=0$ 移项 $Ax+By+Cz=-D$

整理 $\dfrac{x}{\frac{-D}{A}}+\dfrac{y}{\frac{-D}{B}}+\dfrac{z}{\frac{-D}{C}}=1,$ （此时A,B,C,D均不为零） ?

记 $a=-\dfrac{D}{A},\ b=-\dfrac{D}{B},\ c=-\dfrac{D}{C}$ 方程表示为 $\boxed{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1,}$

称为平面的截距式方程，a,b,c分别是三条坐标轴上的截距.

即平面经过$(a,0,0)$，$(0,b,0)$，$(0,0,c)$三点

例 8.18 自学

补充例题：画出平面 $2x+3y+4z-12=0$ 的图形.

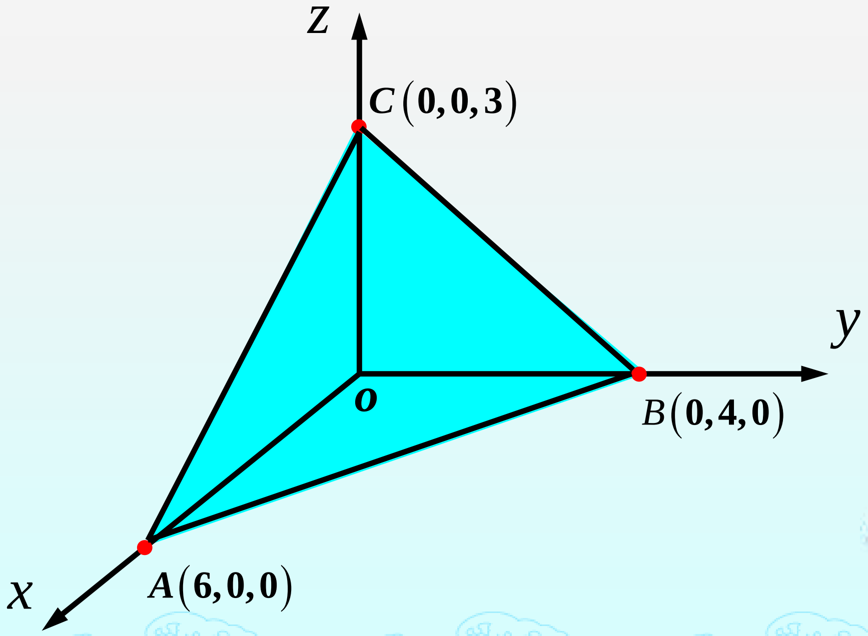
解 将平面方程的一般式化为截距式，得

$$2x+3y+4z=12 \quad \Rightarrow \frac{x}{6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=1$$

它在三个坐标轴上的截距分别为 $6, 4, 3$

平面的图形为

用截距式画平面图形比较方便.



回顾：

前面介绍了平面的三种形式

(1) 点法式：已知平面上的一点及法向量

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

(2) 一般式：由点法式整理得到

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$$

(3) 截距式：由一般式整理得到(此时A,B,C,D均不为零)

或已知平面与三条坐标轴的交点$P(a,0,0)$, $Q(0,b,0)$, $R(0,0,c)$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

点法式是最常用的平面方程

练习

写出满足下列条件的平面方程

(1)过点$M(1,1,1)$且平行于平面$-2x+y-z+1=0$;

(1) $2x-y+z-2=0$

(2)过点$M_1(1,2,0)$和$M_2(-2,-2,2)$且垂直于平面$y-x-1=0$;

(2) $2x+2y+7z-6=0$

(3)过点$M_1(1,1,-1)$, $M_2(-2,-2,2)$和$M_3(1,-2,2)$三点;

(3) $y+z=0$

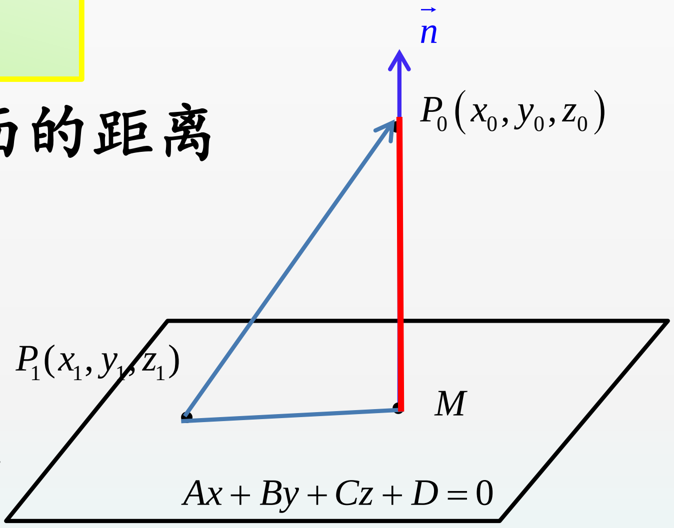
(4)过点$M(-2,5,-3)$且平行于yoz面.

(4) $x+2=0$

四、点到平面的距离

空间中点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离公式

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$



已知平面外一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，求 P_0 到平面的距离

设过点 P_0 的法向量与平面交于点 M，

在平面上另取一点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$

ΔP_0P_1M 为直角三角形，$\overrightarrow{P_1P_0}$ 在 n 上的投影

即为点 P_0 到平面的距离

由投影的计算公式

$$d=\left|\overrightarrow{P_1P_0}\right|\cos\theta=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_1P_0}\right|}{|\vec{n}|}=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

空间中点$P_0(x_0,y_0,z_0)$到平面$Ax+By+Cz+D=0$的距离公式

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

例如 点$(1,-2,3)$到平面$x-y+2z-5=0$的距离

$$d=\frac{|1-(-2)+2\times 3-5|}{\sqrt{1+(-1)^2+2^2}}=\frac{4}{\sqrt{6}}$$

点$(1,-2,1)$到平面$x-y+2z-5=0$的距离

$$d=\frac{|1-(-2)+2\times 1-5|}{\sqrt{1+(-1)^2+2^2}}=0$$ 即点在平面上

作业：

***P*164　5，7，8，11**

预习 8.5节

特殊情形

- 当 $D=0$ 时, $Ax+By+Cz=0$ 通过原点的平面;
- 当 $A=0$ 时, $By+Cz+D=0$ 的法向量

  $\vec{n}=(0,B,C)\perp\vec{i}$, 平行于 x 轴的平面;
- $Ax+Cz+D=0$ 表示 平行于 y 轴的平面;
- $Ax+By+D=0$ 表示 平行于 z 轴的平面;

- $By+Cz=0$ 表示 通过 x 轴的平面;
- $Ax+Cz=0$ 表示 通过 y 轴的平面;
- $Ax+By=0$ 表示 通过 z 轴的平面;

特殊情形

- $Cz + D = 0$ 表示 平行于 *xoy* 面 的平面;

  垂直于*z*轴

- $Ax + D = 0$ 表示 平行于 *yoz* 面 的平面;

  垂直于*x* 轴

- $By + D = 0$ 表示 平行于 *zox* 面 的平面.

  垂直于*y* 轴