2018-2019（下）高数 II 期末复习题（答案）

第七章
1、可分离变量的微分方程求特解
2、二阶常系数线性齐次微分方程
第八章
3、向量点积、叉积运算；
4、写平面方程.
第九章
5、求二元函数定义域；
6、一阶偏导数计算；
7、二阶偏导数计算；
8、二元函数计算全微分.
第十章
9、直角坐标系中计算二重积分；（积分区域由直线，抛物线，双曲线中的若干条曲线围成）
10、三重积分计算
11、求立体体积.
第十一章
12、曲线积分
13、对弧长的曲线积分；
14、对坐标的曲线积分；（曲线积分路径 ①直线，②抛物线等）
第十二章
15、级数收敛判定
16、用比较审敛法判定级数收敛性；
17、幂级数求收敛域.
第七、八章 17 分，第九、十章 41 分，第十一、十二章 42 分.
附加题：知识的综合运用

1.求微分方程 $(x+xy^2)dx+(y-x^2y)dy=0$ 的通解,满足条件 y(0)=0 的特解。

解：原式可化为：$\frac{y}{1+y^2}dy=\frac{x}{x^2-1}dx$（2 分）

两边同时积分，$\int\frac{y}{1+y^2}dy=\int\frac{x}{x^2-1}dx$，得

$$\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+y^2}d(y^2)=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2-1}d(x^2)$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+y^2}d(1+y^2)=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2-1}d(x^2-1)$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=\frac{1}{2}\ln(x^2-1)+\frac{1}{2}\ln C$$

$\ln(1+y^2)=\ln(x^2-1)+\ln C$（4 分）

$$1+y^2=C(x^2-1)$$

通解为：$y^2=C(x^2-1)-1$

代入初值 $y(0)=0$，$0=C(0^2-1)-1$，得 $C=-1$（6 分）

故所求的特解为 $y^2=-(x^2-1)-1=x$,即 $y^2=-x^2$（8 分）

2.求微分方程 $y''=4x^3-x$ 的通解。

解：$y'=x^4-\frac{1}{2}x^2+C_1$ ，$y=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{6}x^3+C_1x+C_2$

3. 求通解(1) $y''-2y'-3y=0$；(2) $y''-2y'+y=0$ (3) $y''+2y'+5y=0$

(4)求通解为 $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{5x}$ 的二阶常系数齐次线性微分方程。

解：(1) $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$；(2) $y=(C_1+C_2x)e^x$；(3) $y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$

解：(4) 方程 的两个特征根为：$r_1=-3, r_2=5$

特征方程为：(r+3)(r-5)=0 即 $r^2-2r-15=0$

对应的二阶常系数齐次线性微分方程为：$y''-2y'-15y=0$

4. 设 $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$，$\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$__ ，$\vec{a}\times\vec{b}$=____

解：-3，(-1, 7, 5)

5. (1)过点（1，-2，－3）并且与直线 $\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-4}$ 垂直的平面，**点法式**平面方程为________________

解：直线 $\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-4}$ 的方向向量为：$\vec{a}=(3,2,-4)$，由已知，所求平面的法向量平行于已知直线的方向向量，

取所求平面的法向量为：$\vec{n}=\vec{a}=(3,2,-4)$，代入平面方程的点法式方程：

3（x-1）+2(y+2)-4(x+3)=0

(2)求过点(1,1,1)且与平面 π_1 :x-y+z=7 和 π_2：3x+2y-12z+5=0 垂直的平面方程。(答案：2x+3y+z=6)

解：π_1 :x-y+z=7 的法向量：$\vec{n_1}=(1,-1,1)$　　π_2：3x+2y-12z+5=0 的法向量：$\vec{n_2}=(3,2,-12)$

取所求平面的法向量：$\vec{n}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}$=（10，15，6）代入平面点法式，然后再化为一般式：2x+3y+z=6

6. 函数 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$ 的定义域为_______.

{（x，y）| $1<x^2+y^2\le 4$ }

7. 设 $z=e^x+x^4-5xy^3$，求 Z 的二阶偏导数(4 个)

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^x+4x^3-5y^3$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-15xy^2$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial^2 x}=e^x+12x^2$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial^2 y}=-30xy$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-15y^2$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-15y^2$

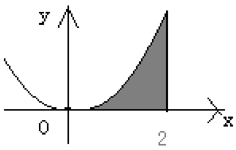
8.求 $z=x^2e^y+y^3\ln 2x$ 的全微分 dz.

$dz=(2xe^y+\dfrac{y^3}{X})dx+(x^2e^y+3y^2\ln 2x)dy.$

9. 若平面区域 $D=\{(x,y)\|0\le x\le 1,0\le y\le 3\}$，则 $\iint\limits_D d\sigma$ = _____。利用二重积分的几何意义，计算 $\iint\limits_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx$，其中积分区域 D 为 $x^2+y^2\leqslant a^2$.

3， $\dfrac{2}{3}\pi a^3$

10. 计算 $\iint\limits_D(14x^2y-10y)dxdy$，其中 D 是由抛物线 $y=x^2$ 与 x=2,x 轴所围成的闭区域.



解： 积分区域 D： $0\le x\le 2,0\le y\le x^2$（3 分） $\iint\limits_D(14x^2y-10y)dxdy=\int_0^2 dx\int_0^{x^2}(14x^2y-10y)dy$（5 分）$=\int_0^2(7x^6-5x^4)dx$（6 分）$=96$（8 分）

11. 计算 $\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)dxdy$，其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=\pi^2$ 所围成的闭区域。

解： 设极坐标变化：$\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$ 积分区域 D： $0\le\theta\le 2\pi,0\le r\le\pi$（3 分） $\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\cos(r^2)\cdot rdr$（5 分）$=2\pi\cdot\dfrac{1}{2}\sin(r^2)\Big\|_0^{\pi}=\pi\sin\pi^2$（8 分）

12.计算 $\iiint\limits_\Omega xy^2z^3dxdydz$，其中 $\Omega=\{(x,y,z)\|0\le x\le 1,0\le y\le 1,0\le z\le 2\}$.

解： $I=\iiint\limits_G xy^2z^3dxdy=(\int_0^1 xdx)(\int_0^1 y^2dy)(\int_0^2 z^3dz)$ （2 分） $=\dfrac{1}{2}x^2\Big\|_0^1\times\dfrac{1}{3}y^3\Big\|_0^1\times\dfrac{1}{4}z^4\Big\|_0^2$ （5 分） $=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2^4}{4}=\dfrac{2}{3}$ （8 分）

13. 求由圆锥面 $z=x^2+y^2$ 和旋转抛物面 $z=8-x^2-y^2$ 所围成的立体体积。

解：方法一：投影区域为 $x^2+y^2\le 4$（2 分）；进行极坐标变换 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$，$0\le\theta\le 2\pi, 0\le r\le 2$（4 分）

$V=\iint\limits_D\left[8-x^2-y^2-(x^2+y^2)\right]dxdy=\iint\limits_D\left[8-2\left(x^2+y^2\right)\right]dxdy$（6 分）

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(8-2r^2)rdr=16\pi$（8 分）

方法二：利用三重积分平行截面法，体积由两部分构成，其中 G_1 为由 $z=x^2+y^2$ 与 $z=4$ 围成；G_2 为由 $z=8-x^2-y^2$ 与 $z=4$ 围成（3 分）；则

$V=V_1+V_2=\iiint\limits_{G_1}dxdydz+\iiint\limits_{G_2}dxdydz$（5 分）$=\int_0^4\pi zdz+\int_4^8\pi(8-z)dz$ （7 分）$=16\pi$（8 分）

14．L 为圆周 $x^2+y^2=1$，则 $\int\limits_L(x^2+y^2)ds=$ ___。在对坐标的曲线积分中，若积分路径 L⊥x 轴，则 $\int\limits_L P(x,y)dx=$ ____，同理，若积分路径 L⊥y 轴，由 $\int\limits_L Q(x,y)dy=$ ________

$2\pi, 0, 0$

15．求 $\int_L(x+y)ds$，其中 L 为直线就是 y=3x+1 上点（0，1）到（2，7）上的一段.

解：$L:\begin{cases}x=x\\ y=3x+1\end{cases}, 0\le x\le 2.$（3 分） **（提示：此为对弧长的曲线积分，L 是曲线段）**

$dx=dx$

$dy=d(3x+1)=3dx$

$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{1^2+3^2}dx=\sqrt{10}dx$（5 分）

$\int_L(x+y)ds=\int_0^2(4x+1)\sqrt{10}dx$ (7 分) $=\sqrt{10}(2x^2+x)\Big|_0^2=10\sqrt{10}$（9 分）

16．求质点在力 $\vec{F}=x^2\vec{i}-xy\vec{j}$ 作用下沿曲线 L: $y=x^2$ 从点 A(0,0)移动到点 B(2,4)所作的功

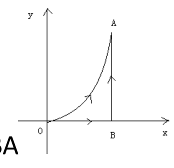
解：物体所做的总功是，$\int_L x^2dx+(-xy)dy$（1 分）

$L:\begin{cases}x=x\\ y=x^2\end{cases}, x:0\to 2 \quad dx=dx, dy=2xdx$

$\int_L x^2dx+(-xy)dy==\int_0^2[x^2+(-x\bullet x^2)2x]dx=\int_0^2(x^2-2x^4)dx=(\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{5}x^5)\Big|_0^2=\frac{152}{15}$

17．计算 $\int_L(2x-6xy^3)dx+(2y-9x^2y^2)dy$，其中积分路径 L 从 $O(0,0)$ 沿曲线 $y=x^2$ 到点 $A(1,1)$.

解：$\boxed{\text{法一}}$：$P=2x-6xy^3, Q=2y-9x^2y^2$，因 $\frac{\partial Q}{\partial x}=-18xy^2=\frac{\partial P}{\partial y}$，则积分与路径无关；（3 分）



改变积分路径为折线段：OBA **（提示：此为对坐标的曲线积分，L 是有方向的）**

$\overline{OB}:\begin{cases}x=x\\ y=0\end{cases}, x:0\to 1$，$\overline{BA}:\begin{cases}x=1\\ y=y\end{cases}, y:0\to 1$

$\int_L(2x-6xy^3)dx+(2y-9x^2y^2)dy=\int_{\overline{OB}}+\int_{\overline{BA}}=\int_0^1 2xdx+\int_0^1(2y-9y^2)dy$（6 分）$=x^2\Big|_0^1+(y^2-3y^3)\Big|_0^1=-1$（9 分）

法二：$L:\begin{cases}x=x\\y=x^2\end{cases},x:0\to1$，$dy=2x\,dx$（3 分）

$$\int_L(2x-6xy^3)dx+(2y-9x^2y^2)dy=\int_0^1[(2x-6x^7)+(2x^2-9x^6)\cdot2x]dx=\int_0^1(2x+4x^3-24x^7)dx$$（6 分）

$$=(x^2+x^4-3x^8)\Big|_0^1=-1$$（9 分）

18．级数收敛的是__A.$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{5^n}$ B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{5}{3})^n$ E. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ F. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{5^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{5})^n-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{5})^n$两个公比小于 1 的等比级数的差，收敛；

B.调和级数，发散； C. p=1/2 的 p 级数，发散；

D. 公比大于 1 的等比级数的，发散； E 和 F，莱布尼兹交错级数，收敛。

19．判断级数敛散性：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{(n+1)(n+2)}$

解：因$\frac{3}{(n+1)(n+3)}<\frac{3}{n^2}$（3 分），而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^2}$收敛（6 分），根据比较审敛法可知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{(n+1)(n+2)}$收敛.（9 分）

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}$

解：因$\frac{n+1}{n(n+2)}\ge\frac{n+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+2}$(4 分)，而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}$发散（6 分），据比较审敛法知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}$发散（9 分）

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{n^2-1}}$

解：由于$\frac{2}{\sqrt{n^2-1}}\ge\frac{2}{\sqrt{n^2}}=\frac{2}{n}$（4 分），而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}$发散（6 分），根据比较审敛法可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{n^2-1}}$发散（9 分）。

20．求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{3^n\cdot\sqrt{n}}$的收敛半径和收敛域.

解：记$t=x+1$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{3^n\sqrt{n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{3^n\sqrt{n}}$(2 分).对于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{3^n\sqrt{n}}$, $a_n=\frac{1}{3^n\sqrt{n}}$

收敛半径 R= $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{1}{3^n\sqrt{n}}/\frac{1}{3^{n+1}\sqrt{n+1}})=\lim\limits_{n\to+\infty}3\sqrt{1+\frac{1}{n}}=3$（5 分），

当$t=-3$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{3^n\sqrt{n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$收敛，

当$t=3$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{3^n\sqrt{n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$发散；

则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{3^n\sqrt{n}}$收敛域为$[-3,3)$（7 分），

由$-3\le x+1<3$得$-4\le x<2$，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{3^n\sqrt{n}}$的收敛域为$[-4,2)$（9 分）.

后面还有（补充）：

1.计算$\iint\limits_D (3x+10x^2y)dxdy$， D 由双曲线 $y=\dfrac{1}{x}$， 直线 $y=x$ 和 $x=2$ 围成。

解：积分区域D： $1\le x\le 2,\dfrac{1}{x}\le y\le x$（2 分）

$\iint\limits_D (3x+10x^2y)dxdy=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}(3x+10x^2y)dy$ （4 分） $=\int_1^2(3x^2+5x^4-8)dx$ （6 分） $=\left(x^3+x^5-8x\right)_1^2=30$ （8 分）

2.计算二重积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}\sqrt{r\cos\theta-r^2\cos^2\theta}\cdot rdr$.

解：由题意可知 $D:0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2},0\le r\le\cos\theta$ （如图），根据极坐标与直角坐标相互转换关系 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ ，得

$D:0\le x\le 1,0\le y\le\sqrt{x-x^2}$（3 分），

故$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}\sqrt{r\cos\theta-r^2\cos^2\theta}\cdot rdr=\iint\limits_D\sqrt{r\cos\theta-r^2\cos^2}\cdot rdrd\theta=\iint\limits_D\sqrt{x-x^2}dxdy$ （5 分）

$=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}}\sqrt{x-x^2}\,dy=\int_0^1\left(x-x^2\right)dx=\left(\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{3}x^3\right)_0^1=\dfrac{1}{6}$ （8 分）

3 计算曲线积分$\int_L 2x^2yds$， L 为抛物线 $y=2x-1$上点$(1,1)$ 到$(3,5)$ 一段弧.

解：$L:\begin{cases}x=x\\ y=2x-1\end{cases},1\le x\le 3.$（2 分） $ds=\sqrt{1^2+2^2}dx=\sqrt{5}dx$（4 分）， $\int_L 2x^2yds=\int_1^3 2\sqrt{5}x^2(2x-1)dx$ (7 分) $=\dfrac{191}{3}\sqrt{5}$ （9 分）

4.计算物体在变力$F=(2x+y^2x+1)i+(x^2y+3y^2+2)j$ 作用下沿着曲线 $y=x^2$ 从 A(0,0)点移动到点 B(2,4)所做的功.

解：物体所做的总功是，$\int_L(2x+y^2x+1)dx+(x^2y+3y^2+2)dy$（1 分）

记 $P(x,y)=2x+y^2x+1,Q(x,y)=x^2y+3y^2+2$， 则 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2xy=\dfrac{\partial P}{\partial y}$， 说明积分与路径无关，即所做的功是一个常值，与运动路径无关（4 分）。选取$\begin{cases}x=x\\ y=0\end{cases},x:0\to 2$水平线段和$\begin{cases}x=2\\ y=y\end{cases},y:0\to 4$竖直线段从 A 到 B 作为积分路径，所做的功

$\int_L(2x+y^2x+1)dx+(x^2y+3y^2+2)dy=\int_0^2(2x+1)dx+\int_0^4(4y+3y^2+2)dy$ （7 分） $=(x^2+x)\Big|_0^2+(2y^2+y^3+2y)\Big|_0^4=110.$(9 分)

5.计算曲线积分$\int_L(x+y)ds$， L 为曲线 $y=3x+1$ 上点$(0,1)$ 到$(2,7)$ 一段弧.

解： $L:\begin{cases}x=x\\ y=3x+1\end{cases},0\le x\le 2.$（3 分） $ds=\sqrt{1^2+3^2}dx=\sqrt{10}dx$（5 分）

$\int_L(x+y)ds=\int_0^2(4x+1)\sqrt{10}dx$ (7 分) $=\sqrt{10}(2x^2+x)\Big|_0^2=10\sqrt{10}$ （9 分）

6.计算对坐标曲线积分$\int_L(16x-4xy^3)dx+(2y-6x^2y^2)dy$， L 为曲线 $y=x^3$ 上点$(0,0)$ 到$(2,8)$ 一段弧.

解：法一：因$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-12xy^2=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，则积分与路径无关；（3 分）

$\int_L(16x-4xy^3)dx+(2y-6x^2y^2)dy=\int_0^2 16xdx+\int_0^8(2y-24y^2)dx$ （6 分） $=8x^2\Big|_0^2+(y^2-8y^3)\Big|_0^8=-4000$ （9 分）

法二：$L:\begin{cases}x=x\\ y=x^3\end{cases},x:0\to 2.$， $dy=3x^2dx$（3 分）

$\int_L(16x-4xy^3)dx+(2y-6x^2y^2)dy=\int_0^2[(16x-4x^{10})+(2x^3-6x^8)\bullet 3x^2]dx=\int_0^2(16x+6x^5-22x^{10})dx$ （6 分）

$=(8x^2+x^6-2x^{11})\Big|_0^2=-4000$ （9 分）

高等数学 II 模拟试卷

一、填空题与选择（每小空 3 分，共 18 分）

1 微分方程$y'' = x^2 - e^x$的通解是 ____________________。

2 设向量$\vec{a} = (-2,3,1)$，$\vec{b} = (0,-1,5)$，则$\vec{a} \cdot \vec{b} =$ __________，$\vec{a} \times \vec{b} =$ __________。

3 设函数$f(x,y) = \frac{3xy}{x^2+y^2}$，则$f(-1,1) =$ ____________。

4 若$z = y^2 sinx$，则$\frac{\partial z}{\partial x} =$ ______________ ，$\frac{\partial z}{\partial y} =$ _____________。

5 设$z = x^4 + y^4 - x^2y^2$，则$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ =(　　　)

A　$4xy$　　　B　$-4xy$　　　C　$-4x$　　　D　$4y$

6 若积分区域 D 为$x^2+y^2 \le a^2$，则二重积分$\iint_D dxdy =$ (　　　)

A　πa^2　　　B　$2\pi a$　　　C　$2\pi a^2$　　　D　a^2

二、计算与求解题（每小题 8 分，共 72 分）

7　求微分方程 $(x^2y + y)dy - (x + xy^2)dx = 0$ 满足初始条件$y(0) = 1$的特解。

8　设$z = x^2\sin(x - y)$，求函数的一阶偏导数。

9　设若$z = e^{xy^2}$，求全微分dz。

10 计算二重积分$\iint_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$，其中 D 是由双曲线$xy = 1$，直线$x = 2$和$y = x$围成的区域。

11 计算二重积分$\iint_D e^{x^2+y^2}dxdy$，D：$x^2 + y^2 \le 16$

12 计算三重积分$\iiint_G x^3 y^2 z dxdydz$，

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \middle| 0 \le x \le 1，\ -1 \le y \le 2，0 \le z \le 3\right\}$$

13 计算曲线积分$\int_L \sqrt{y}\,ds$，其中 L 为抛物线$y = x^2$上点$(0,0)$到点$(2,4)$的一段。

14 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}$的敛散性，如果收敛，请求其和。

15 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{2^n\sqrt{n}}$的收敛域。

三 应用题(10 分)

16 求由圆锥面$z = \sqrt{x^2 + y^2}$和旋转抛物面$z = 6 - x^2 - y^2$所围成的立体体积。

四、（附加题）（8 分）

17 设$x + y + z = e^z$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

高等数学II模拟试卷答案

一、填空题与选择（每小空3分，共18分）

1. $y=\frac{1}{12}x^4-e^x+C_1x+C_2$　　2.（16,10,2）　　3. $-\frac{3}{2}$　　4. $y^2\cos x$ 、$2y\sin x$

5. B　　6. A

二、计算与求解题（每小题8分，共72分）

7.(8分) 解：分离变量：$\frac{y}{1+y^2}dy=\frac{x}{1+x^2}dx$　　（3分）

两边积分得：$\ln(1+y^2)=\ln(1+x^2)+\ln C$　　（5分）

求出：$$\begin{aligned}1+y^2&=C(1+x^2)\\ y^2&=C(1+x^2)-1\end{aligned}$$　　（6分）

将 $y(0)=1$ 代入上式，解出 $C=2$

故 $y^2=2(1+x^2)-1=2x^2+1$　　（8分）

8.(8分)

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\sin(x-y)+x^2\cos(x-y)$　　（4分）

$\frac{\partial z}{\partial y}=-x^2\cos(x-y)$

（8分）

9.(8分)

解：因 $\frac{\partial z}{\partial x}=y^2e^{xy^2}$　　（3分）

$\frac{\partial z}{\partial y}=2xye^{xy^2}$　　（6分）

故：$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$

$=y^2e^{xy^2}dx+2xye^{xy^2}dy$　　（8分）

10(8分) 解：由题意知 $1\le x\le 2$，$\frac{1}{x}\le y\le x$，　　（3分）

故：$\iint\limits_D\frac{x^2}{y^2}dxdy=\int_1^2dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}dy$

$=\int_1^2(x^3-x)dx$　　（6分）

$=\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_1^2=\frac{9}{4}$　　（8分）

11.(8分) 解：$\iint_D e^{x^2+y^2}dxdy=\iint_D e^{r^2}rdrd\theta$　　（3分）

$$=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 e^{r^2} r dr$$ （6 分）

$$=2\pi * \frac{1}{2} e^{r^2} \mid_0^4 = \pi(e^{16}-1)$$ （8 分）

12. (8 分) 解：

$$\iiint_G x^3 y^2 z dxdydz = \int_0^1 x^3 dx \int_{-1}^2 y^2 dy \int_0^3 z dz$$ （4 分）

$$=\frac{1}{4}x^4\Big|_0^1 \cdot \frac{1}{3}y^3\Big|_{-1}^2 \cdot \frac{1}{2}z^2\Big|_0^3$$ （6 分）

$$=\frac{1}{4}\times 3\times\frac{9}{2}=\frac{27}{8}$$ （8 分）

13.(8 分) 解：

令 $\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \end{cases}$ $\quad 0\le t\le 2$ （2 分）

则 $\int_L \sqrt{y} ds = \int_0^2 t\sqrt{1+4t^2} dt$ （4 分）

$$=\frac{1}{8}\int_0^2 \sqrt{1+4t^2} d(1+4t^2)$$

$$=\frac{1}{12}(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2$$ （6 分）

$$=\frac{17\sqrt{17}-1}{12}$$ （8 分）

14.(8 分) 解：由于

$$s_n=\frac{2}{1\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{2}{n\cdot(n+1)}$$ （2 分）

$$=2\left[(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})\right]$$ （4 分）

$$=2(1-\frac{1}{n+1})$$ （6 分）

由 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} 2(1-\frac{1}{n+1})=2$ 可知，所给级数收敛，其和为 2. （8 分）

15. (8 分)解： 令 $t=x+3$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{2^n\sqrt{n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{2^n\sqrt{n}}$， （2 分）

由于 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n+1}\sqrt{n+1}}\times 2^n\sqrt{n}=\frac{1}{2}$， （4 分）

则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{2^n\sqrt{n}}$ 的收敛半径 $R=2$， （5 分）

当 $t=2$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{2^n\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散， （6 分）

当 $t=-2$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{2^n\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛， （7 分）

所以 $-2\le x+3<2$，即 $-5\le x<-1$ 为原级数的收敛域. （8 分）

三、应用题（10 分）

16. (10 分)解：

根据两曲面可以确定积分区域 D： $x^2+y^2\le 4$

令 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ $0\le\theta\le 2\pi$，$0\le r\le 2$，则 （3 分）

则 $V=\iint\limits_D (6-x^2-y^2-\sqrt{x^2+y^2})dxdy$ （5 分）

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(6-r^2-r)rdr$ （6 分）

$=\int_0^{2\pi}\frac{16}{3}d\theta=\frac{32}{3}\pi$ （8 分）

五、（附加题）（8 分）

17. (8 分) 解：**此为多元隐函数z=z (x, y) 求偏导. 方程写为** $e^z-x-y-z=0$

构造函数，记 $F(x,y,z)=e^z-x-y-z$，则

$F_x=-1$，$F_z=e^z-1$，$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{1}{e^z-1}$ （4 分）

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{e^z-1}\right)=\frac{-1}{(e^z-1)^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(e^z-1)=\frac{-e^z\frac{\partial z}{\partial x}}{(e^z-1)^2}=\frac{-e^z}{(e^z-1)^3}$ （8 分）