本章基本要求：

1. 理解二元函数概念，会求函数定义域
2. 理解偏导数概念，熟练掌握多元函数偏导数与全微分的计算
3. 会计算多元复合函数、多元隐函数的偏导数

第九章 多元函数微分法及其应用

前面讨论的函数均是只有一个自变量的一元函数记作 $y = f(x)$. 但很多实际问题往往要牵涉到多个方面的因素，例如，六面体体积与长、宽、高三个变量有关系，这就是多元函数. 本章主要研究二元函数 $z = f(x, y)$.

§9.1 多元函数基本概念

要求：理解多元函数概念，会求二元函数定义域

9.1.1 多元函数概念

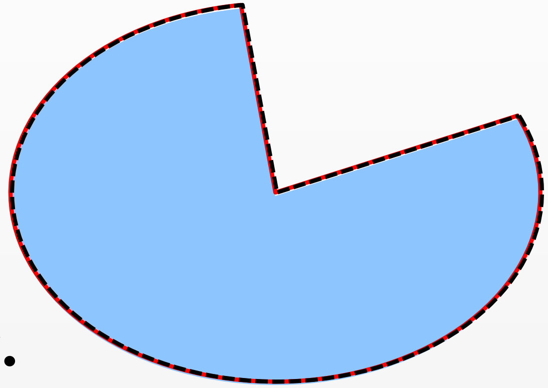
与一元函数$y=f(x)$类似，$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为$n(n\geq 2)$元函数，它有n个独立的自变量. 由于研究n元函数比较复杂，我们先研究二元函数，很多性质和结论可以推广到二元以上的函数成立，无需证明.

二元函数$z=f(x,y)$，x,y是独立的自变量. 它的变化范围是平面上的一个区域.

为此先介绍几个概念：

1. 区域　由若干条曲线围成的平面的一部分称为区域.

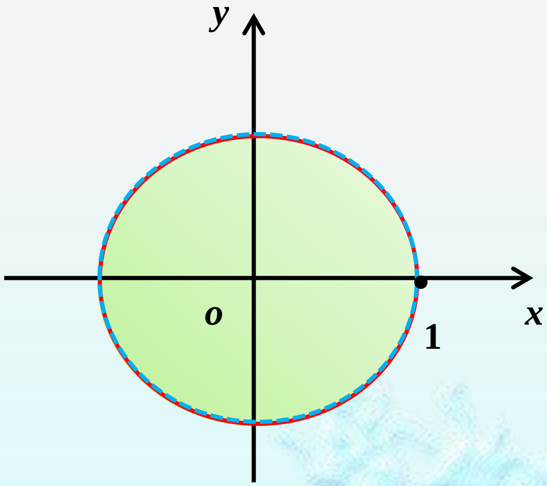
2. 边界　围成区域的曲线称为边界.



3. 边界点　边界上的点称为边界点.

区域还有开、闭之分，还有有界、无界之分.

例如：$x^2+y^2<1$ 是开区域



$x^2+y^2\le 1$ 是闭区域

$x^2+y^2>1$ 是无界区域

定义：设D是平面上的一个非空点集，如果对任意$(x,y)\in D$，按照某种对应法则f，都有唯一确定的实数z与之对应，则称z是x,y的二元函数，记为$z=f(x,y)$.

D是定义域，通常表示为$D=\{(x,y)\mid x,y\text{满足的条件}\}$

自然定义域：没有指明自变量取值限制而得到的定义域

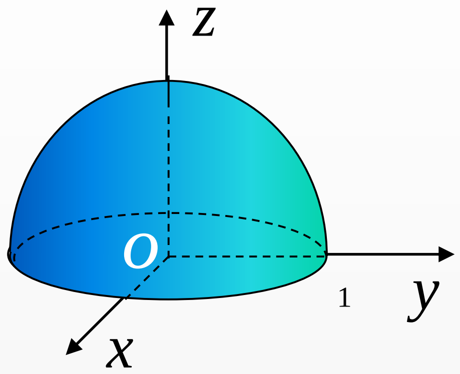
例如：$z=x+y$，$x\in R$, $y\in R$是函数的自然定义域.

若某人工资z包括基本工资x和职务工资y两部分，则$z=x+y$

定义域为：　$0\le x<+\infty$，$0\le y<+\infty$

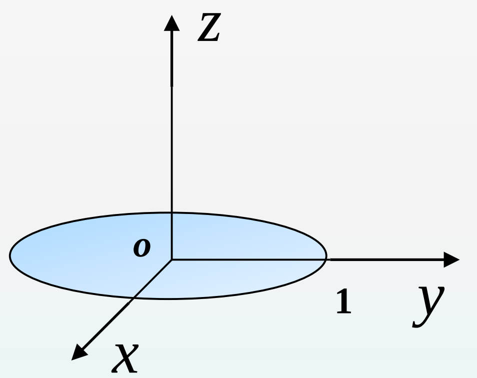
一定要会求函数定义域，并画出二元函数定义域的图形.

例1：求函数$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$的定义域.

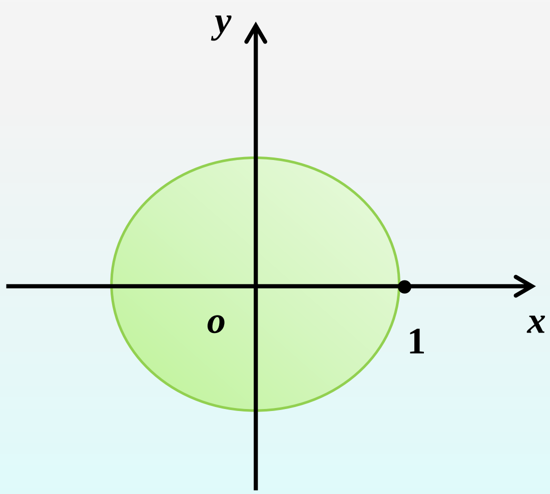


图形为球心在坐标原点，半径为1的上半球面，

定义域为xoy面上的圆$x^2+y^2\le 1$



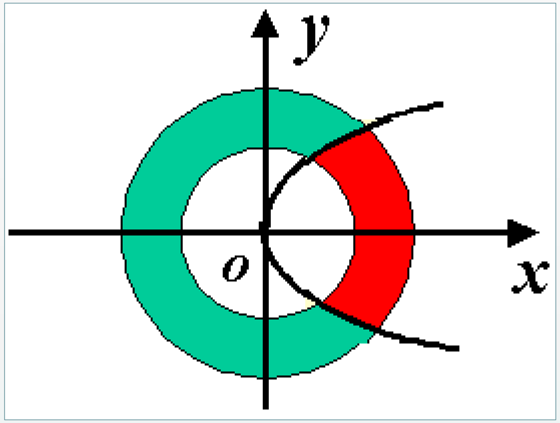
要求画二维平面区域图形



例2 求函数$f(x,y)=\dfrac{\arcsin(3-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$的定义域.

解 先考查分子得：$\left|3-x^2-y^2\right|\le 1$

分母要求：$x-y^2>0$



$$\begin{cases}\left|3-x^2-y^2\right|\le 1\\ x-y^2>0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2\le x^2+y^2\le 4\\ x>y^2\end{cases}$$

函数定义域为 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,2\le x^2+y^2\le 4, x>y^2\right\}$

练习：求下列函数的定义域

(1) $z = \ln(y + x - 1)$

(2) $u = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

(3) $z = \dfrac{1}{\sqrt{x+y}} + \dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$

(4) $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$

(5) $z = \arcsin\dfrac{y}{x}$

定义域：

(1) $y + x > 1$

(2) $x^2 + y^2 \neq 0$

(3) $\begin{cases} x + y > 0 \\ x - y > 0 \end{cases}$

(4) $x \geq \sqrt{y}, y \geq 0$

(5) $\left|\dfrac{y}{x}\right| \leq 1$

9.1.2 二元函数的极限

1. 邻域　点集 $U(P_0,\delta)=\{P\,\big|\,|PP_0|<\delta\}$, 称为点 P_0 的 δ 邻域.

点 P_0 的 δ 邻域是以 $P_0(x_0,y_0)$ 为中心，δ 为半径的开圆.

$$U(P_0,\delta)=\left\{(x,y)\,\middle|\,\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$$

2. 极限定义　设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一去心邻域内有定义当 $P(x,y)$ 沿任意路径无限接近 $P_0(x_0,y_0)$ 时，若 $z=f(x,y)$ 的值无限的趋近某一常数 A. 则称 A 为 $z=f(x,y)$ 当 $P(x,y)$ 趋近于 $P_0(x_0,y_0)$ 时的二重极限. 记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \text{ 或 } \lim_{P\to P_0} f(x,y)=A$$

也可记为　$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \text{ 或 } f(x,y)\to A\ (P\to P_0)$$

与一元函数的极限类似，也要研究当点(x,y)无限趋近于定点(x_0,y_0)时二元函数值的变化趋势. 但这种情况要比一元函数复杂得多，因为平面上的点(x,y)趋近于(x_0,y_0)的方式有无穷多种.

因此，我们仅要求会计算简单的极限.

例9. 3 $(P117)$ 已知下列二重极限存在，求其值：

$$(1)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$$

解 (1) 令$u=x^2+y^2$，当$\left(x,y\right)\to\left(0,0\right)$时, $u\to 0$, 则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=\boxed{\lim_{u\to 0}u\sin\frac{1}{u}=0}$$

?

$\left|\sin\frac{1}{u}\right|\le 1$,有界，$u\to 0$是无穷小，由无穷小的运算性质得到

$$(2)\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3-\sqrt{xy+9}}{xy}$$

一元函数求极限的方法：

去根号，二元函数求极仍然可用.

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(3-\sqrt{xy+9}\right)\left(3+\sqrt{xy+9}\right)}{xy\left(3+\sqrt{xy+9}\right)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3^2-\left(\sqrt{xy+9}\right)^2}{xy\left(3+\sqrt{xy+9}\right)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-xy}{xy\left(3+\sqrt{xy+9}\right)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-1}{3+\sqrt{xy+9}} = -\frac{1}{6}$$

9.1.3 二元函数的连续性

定义：设函数$z=f(x,y)$在点P_0的某一邻域内有定义，如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

则称函数$z=f(x,y)$在点P_0处连续，否则称函数$z=f(x,y)$在点P_0处间断. 或称在点P_0处不连续.

如果函数在D上各点处都连续，则称此函数在D上连续

在D内连续的函数$z=f(x,y)$的图形是一张连续曲面.

二元函数在闭区域上连续的函数，其性质与一元函数类似.

作业：

***P*178　1. (1), (2),(3), (6)**

3.

5. (3), (4)

预习 9.2节