微分方程习题选讲

1.设有级数$2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

①求此级数的收敛域；②证明此级数满足$y''-y=-1$；③求此级数的和函数.

2.当$x\geq 0$时,$f(x)$可导,$f(0)=1$,且满足$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)dt=0$

(I)求$f'(x)$;

(II)证明:当$x\geq 0$时有不等式$e^{-x}\leq f(x)\leq 1$.

3.当$\Delta x\to 0$ 时α 是比Δx 较高阶的无穷小量 函数$y(x)$ 在任意点 x 处的增量

$$\Delta y=\frac{y\Delta x}{x^2+x+1}+\alpha,$$

$y(0)=\pi$,求y 的表达式

4.设$f(x)$为偶函数,且满足$f'(x)+2f(x)-3\int_0^x f(t-x)dt=-3x+2$, 求$f(x)$.

5.设有二阶线性微分方程

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(2\sqrt{1-x^2}-x\right)\frac{dy}{dx}+y=2x$$

①作自变量替换$x=\sin t\left(-\frac{\pi}{2}\leq t\leq\frac{\pi}{2}\right)$,把方程变换成$y$关于$t$ 的微分方程

②求原方程的通解.

6.设$f(x)$在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内可导,$f(0)=1$,$f(x)>0$,且满足$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f\left(x+h\cos^2 x\right)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}}=e^{x\cos^2 x+\tan x}$

求$f(x)$表达式.

7.设$f(x)$是可导的函数,对于任意的s,t,有$f(s+t)=f(s)+f(t)+2st$, 且$f'(0)=1$.

求函数$f(x)$的表达式.

8.设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内具有连续的导数，且满足

$$f(t)=2\iint_{x^2+y^2\leq t^2}\left(x^2+y^2\right)f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy+t^4,$$

求函数$f(x)$的表达式.

9.曲线簇$y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$中满足条件$y(0)=1,y'(0)=-2$ 的曲线____________.

10.求通解$y'=\frac{y}{2x}+\frac{1}{2y}\tan\frac{y^2}{x}$.

11.设函数$f\left(x\right)$连续.

①求初值问题$\begin{cases} y'+ay=f\left(x\right) \\ y\left(0\right)=0 \end{cases}$的解$y\left(x\right)$,其中$a$是正常数.

②若$\left|f\left(x\right)\right|\le k\left(k\text{为常数}\right)$,证明:$x\ge 0$时,有$\left|y\left(x\right)\right|\le \frac{k}{a}\left(1-e^{-ax}\right)$.

12.验证函数$y\left(x\right)=-1-\frac{x^3}{3!}-\frac{x^6}{6!}-\cdots-\frac{x^{3n}}{\left(3n\right)!}-\cdots\left(-\infty<x<\infty\right)$满足微分

方程:$y''+y'+y=-e^x$.

13.设数列满足:

$$a_0=3,\quad a_1=1,\quad a_{n-2}-n\left(n-1\right)a_n=0\quad\left(n\geqslant 2\right)$$

设$S\left(x\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$

①证明:$S''\left(x\right)-S\left(x\right)=0$

②求$S\left(x\right)$表达式

14.设$y\left(x\right)$满足$y''\left(x\right)+2y'\left(x\right)+ky=0$, 其中$k\in\left(0,1\right)$

①证明:反常积分$\int_0^{+\infty}y\left(x\right)dx$ 收敛

②若$y\left(0\right)=1, y'\left(0\right)=1$求$\int_0^{+\infty}y\left(x\right)dx$值

15.设$a_0=1$，$a_1=0$，$a_{n+1}=\frac{1}{n+1}\left(na_n+a_{n-1}\right)$,$S\left(x\right)$是$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 的和函数

①证明:$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 收敛半径不小于1

②证明:$\left(1-x\right)S'\left(x\right)-xS\left(x\right)=0, x\in\left(-1,1\right)$, 并求$S\left(x\right)$表达式