2018 桂林电子科技大学高等数学数学竞赛试卷

参考答案

考试时间 120 分钟　　班级＿＿＿＿＿　　学号＿＿＿＿＿＿　　姓名＿＿＿＿＿＿

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	成绩
满　分	30	15	15	15	15	10			100
得　分									
评卷人									

一 填空题（每小题 5 分，共 30 分）

1. ± 1；2. 1；3. $2018!$；4. $\frac{37}{24}-\frac{1}{e}$；5. 0；6. $e^x(x+1)$.

二（15 分）

解：设切平面与椭球面的切点为 $P(x_0,y_0,z_0)$，则切平面方程可写成 $x_0x+2y_0y+3z_0z=21$

在直线上任取两点 $A(6,3,\frac{1}{2}),B(8,4,-\frac{1}{2})$，分别代入平面方程得

$6x_0+6y_0+\frac{3}{2}z_0=21$

$8x_0+8y_0-\frac{3}{2}z_0=21$

又 $x_0^2+2y_0^2+3z_0^2=21$

联立以上三式，解得 $P(3,0,2)$ 或 $P(1,2,2)$，故所求的平面方程为 $3x+6z-21=0$ 或

$x+4y+6z-21=0$

三（15 分）

解：旋转曲面的方程为：$z=x^2+y^2$

设 $P(x,y,z)$ 为曲面上任一点，则 P 到平面 $x+y-2z=2$ 的距离为

$d=\frac{|x+y-2z-2|}{\sqrt{6}}$，求 d 的最小值即求 d^2 在约束 $z=x^2+y^2$ 下的最小值，构造拉格朗日

函数 $L(x,y,z,\lambda)=\frac{1}{6}(x+y-2z-2)^2+\lambda(z-x^2-y^2)$

由 $\begin{cases} L_x = \dfrac{1}{3}(x+y-2z-2)-2\lambda x = 0 \\ L_y = \dfrac{1}{3}(x+y-2z-2)-2\lambda y = 0 \\ L_z = \dfrac{1}{3}(x+y-2z-2)\cdot(-2)+\lambda = 0 \\ L_\lambda = z-x^2-y^2 = 0 \end{cases}$ 解得唯一驻点 $(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8})$

所以 $d_{\min} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\left|\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}-2\right| = \dfrac{7}{4\sqrt{6}}$

四（15 分）

解：$\dfrac{du}{dx} = \dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{dz}{dx}$， $\dfrac{dy}{dx} = \cos x$

再由 $\varphi(x^2, e^y, z) = 0$ 两端对 x 求导，得 $\varphi_1'\cdot 2x+\varphi_2'\cdot e^y\cdot\dfrac{dy}{dx}+\varphi_3'\cdot\dfrac{dz}{dx} = 0$，解得

$\dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{2x\varphi_1'+e^y\cos x\varphi_2'}{\varphi_3'}$ ，所以

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}+\cos x\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{2x\varphi_1'+e^y\cos x\varphi_2'}{\varphi_3'}\frac{\partial f}{\partial z}$$

五（15 分）

解：该球冠的面积与 $x^2+y^2+z^2 = R^2$ 被 $z = h(0<h<R)$ 截下的上侧的球冠的面积一样

其在 xoy 平面内的投影为：$D = \left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \le R^2-h^2\right\}$，

曲面方程为：$z = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

$$S = \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy = R\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{R^2-h^2}\frac{rdr}{\sqrt{R^2-r^2}} = 2\pi R(R-h)$$

六（10 分） 令 $F(x) = f(x)-x^2+x$，则 $F(0) = F(1)$，故 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔中值定理的条件，从而存在 $\eta\in(0,1)$ 使得 $F'(\eta) = 0$；

又 $F'(1) = f'(1)-2+1$，于是 $F'(x) = f'(x)-2x+1$ 在 $[\eta,1]$ 上满足罗尔中值定理的条件，

从而存在 $\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$ 使得 $F''(\xi) = 0$，即存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f''(\xi) = 2$.