复习

上一节介绍了几个重要级数的收敛性要记住

调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$，当$|q|<1$时级数收敛，且$\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}=\frac{a}{1-q}$

几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$，当$|q|\geq 1$时级数发散.

级数$\sum_{n=0}^{\infty}a\frac{8^n}{7^n}$，$\left|\frac{8}{7}\right|>1$，级数发散.

级数$\sum_{n=0}^{\infty}a\frac{5^n}{7^n}$，$\left|\frac{5}{7}\right|<1$，级数收敛，且$\sum_{n=0}^{\infty}a\frac{5^n}{7^n}=\frac{a}{1-\frac{5}{7}}=\frac{7}{2}a.$

第二节

正项级数及其审敛法

要求：会用比较、比值审敛法判断正项级数的收敛性

定义（正项级数）

若 $u_n \geq 0$，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数.

定理12.1

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是其部分和有界.

定理12.2（比较审敛法）

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个正项级数，有 $u_n \leq v_n$，则有

(1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

大收则小收

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

小发则大发

例12.5　判断下列级数的敛散性：　(P256)

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$　　(2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$

(1) 分析　首先估计级数收敛还是发散：　答：收敛

为什么是收敛的？　因为$\frac{1}{n^n}$变小很快，估计部分和数列极限存在.

需要找一个比它大且收敛的级数与之比较

解　(1) 当$n>1$时，$n^n \geq 2^n$，　$\frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{2^n}$

而等比级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$是收敛的，根据比较审敛法可知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$收敛.

解　(2)　$\because$　$\ln n < n$，即$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$，而调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$是发散的，

根据比较审敛法可知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$发散.

例12.5 判断级数收敛性不好做，首先要估计级数的敛散性，还要找一个与之相应的级数进行比较.

需另找判别方法.

什么方法?

定理12.3（比较审敛法的极限形式）

定理12.3（比较审敛法的极限形式）

设两正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 满足 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$，则有

(1) 当 $0 < l < \infty$ 时，两个级数同时收敛或发散；

(2) 当 $l = 0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

(3) 当 $l = \infty$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散；

注意：$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$，要判别 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的收敛性，通项u_n放在分子处；

已知 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的收敛性，通项v_n放在分母处；位置不要放错.

比较审敛法的极限形式常用的是第一个结论，两级数收敛性相同.

例12.6 证明 p 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}(p>0)$，当$p>1$时收敛，当$p\le 1$时发散.

记住这个结论，由于时间关系，不证明.

例12.6的结论是比较审敛法的一个基本级数，要求会用它与其他要判别收敛性的级数进行比较.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛； $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散； $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 收敛.

常用于比较的级数有：

几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$,当$|q|<1$时级数收敛，当$|q|\ge 1$时级数发散.

p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}(p>0)$，当$p>1$时收敛，当$p\le 1$时发散.

判别下列级数的敛散性

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)^2} \qquad (2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \qquad (3)\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{2n} \qquad (4)\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left[1+\frac{1}{n^2}\right]$$

学会从通项中找与之比较的级数

$$(1)\ u_n=\frac{2n+1}{n(n+1)^2},\quad 找 v_n=\frac{1}{n^2},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=2,$$

已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，所以原级数也收敛.

$$(2)\ u_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}},\quad 找 v_n=\frac{1}{n},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=1,$$

已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，所以原级数也发散.

$$(3)\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{2n} \quad 令\ v_n=\frac{1}{n}$$

$$n\to\infty,\quad \sin\tfrac{1}{n}\ \sim\ \tfrac{1}{n}$$

$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{2n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$$

根据比较审敛法的极限形式知 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{2n}$ 发散.

$$(4)\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left[1+\frac{1}{n^2}\right] \quad 令\ v_n=\frac{1}{n^2}$$

$$n\to\infty,\quad \ln(1+\tfrac{1}{n^2})\ \sim\ \tfrac{1}{n^2}$$

$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left[1+\frac{1}{n^2}\right]}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\frac{1}{n^2}=1$$

根据比较审敛法的极限形式知 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left[1+\frac{1}{n^2}\right]$ 收敛.

定理12.4 (比值审敛法)

设 $\sum u_n$ 为正项级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$，则

(1) 当 $\rho<1$ 时，级数**收敛**；

(2) 当 $\rho>1$ 时，级数**发散**；

(3) 当 $\rho=1$ 时，级数收敛情况**不确定**.

比值法适用于一般项**含有** $n!,\ a^n$ 等形式的级数

比值法的好处在于无须事先对级数的收敛情况有个预判

例12.9 判断下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}$

解　(1) $\because\ \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1$

根据比值审敛法可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 收敛.

(2) $\because\ \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2>1$

根据比值审敛法可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}$ 发散.

两种审敛法的比较

	优　点	缺　点
比较审敛法	使用范围广，理论上讲任何级数都可判断	不好掌握，先要预判级数的收敛性，再找一个收敛性与之相应的级数进行比较
比值审敛法	自己的通项比，不需借助其他级数就能判别，易掌握	当比值为1时，判别法失效，使用有局限性

两种方法都要掌握，应用时看级数通项的特点选择用哪种审敛法

学会从通项中选择正确的审敛法进行收敛性判定

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n(n+2)}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+n^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n}$
比较	比较	比值
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}$	$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$
比值	比较	比值　比较
		都可用

定理12.5 根值审敛法（*Cauchy*判别法）

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$，则

(1) 当 $l<1$ 时，级数收敛

(2) 当 $l>1$ 时，级数发散

(3) 当 $l=1$ 时，级数是否收敛不确定

适用于级数的一般项含有n次幂的级数

这个定理只要求了解，不展开讲

例8：判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$的敛散性：

解： $\because \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$

根据根值审敛法可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ 收敛.

作业　　P259

1.　(3)、(4)

2.　(1)、(2)

4.　(2)、(4)

预习　12.3节