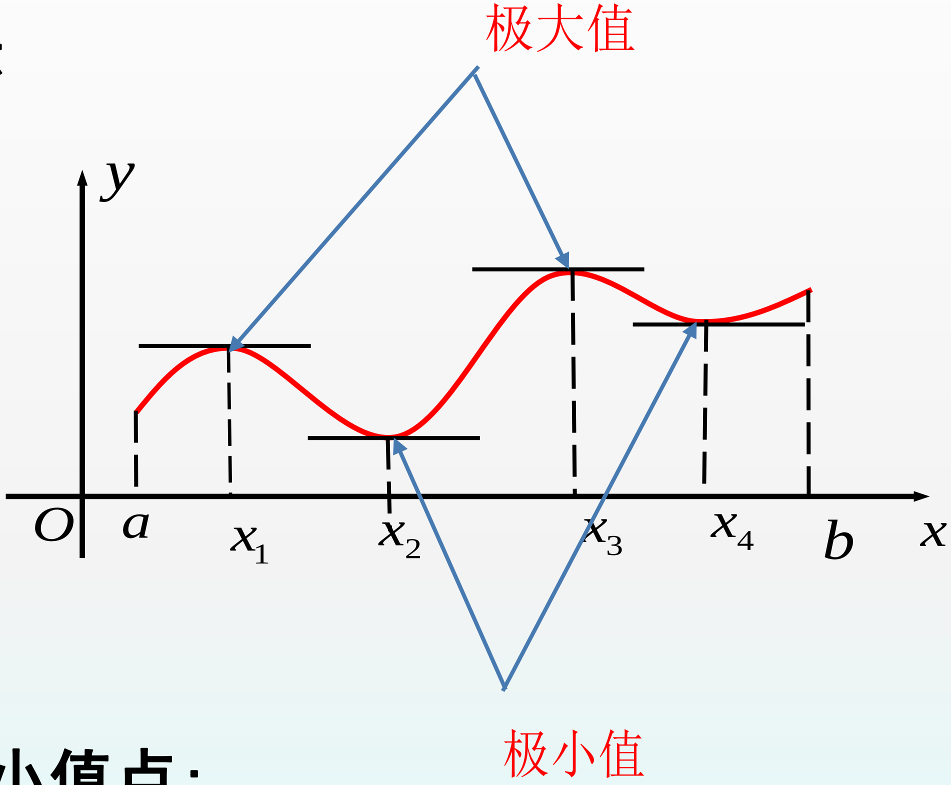
§4.4 函数的极值与最值

要求：会求函数的极值，能求解应用问题

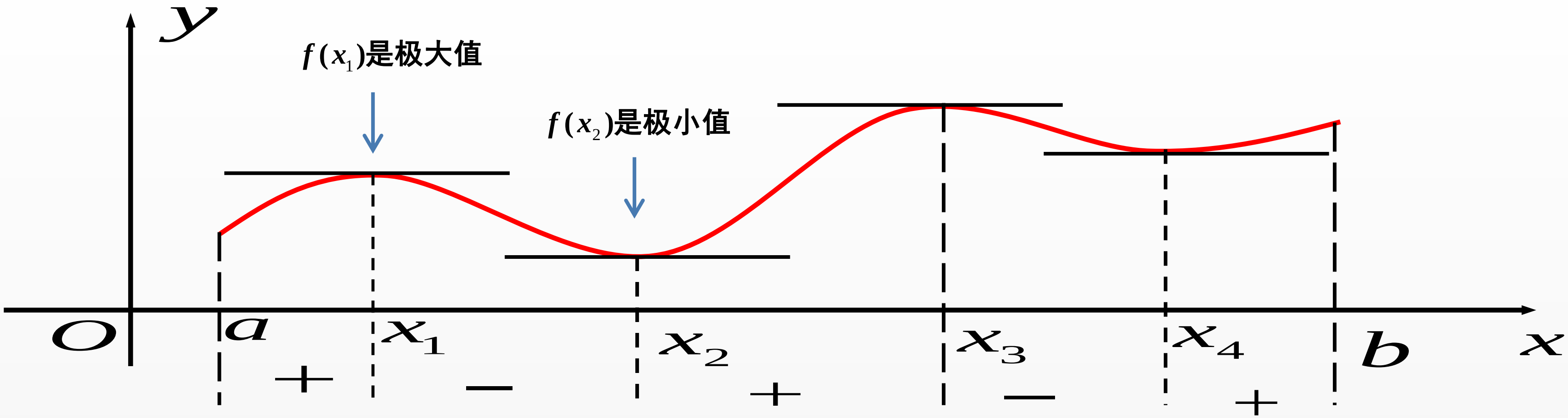
一、函数的极值与求极值的方法



定义4.3 (P67) 设函数 $f(x)$ 定义在 x_0 的某个邻域内，对于邻域内的任意 x $(x \neq x_0)$，

(1) 若 $f(x_0) < f(x)$，则称 $f(x_0)$ 为函数的极小值，x_0 为极小值点；

(2) 若 $f(x_0) > f(x)$，则称 $f(x_0)$ 为函数的极大值，x_0 为极大值点.



x	(a,x_1)	x_1	(x_1,x_2)	x_2	(x_2,x_3)	x_3	(x_3,x_4)	x_4	(x_4,b)
$f'(x)$	+ ↗	极大	↘ −	极小	+ ↗	极大	↘ −	极小	+ ↗

判定极值方法一：一阶导数判别法(参考以上列表结论)

具体步骤：

(1)求出函数的定义域

(2)求导，并令$f'(x)=0$，求出驻点及导数不存在点；

(3)列表讨论

例4.13（P68）求函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+3$ 的极值.

解　定义域为 $(-\infty,+\infty)$

$$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3),$$

令 $f'(x)=0$，求出**驻点** $x_1=-1$，$x_2=3$

x	$(-\infty,\ -1)$	-1	$(-1,\ 3)$	3	$(3,\ +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	极大	$\searrow$	极小	$\nearrow$

根据上表讨论可知，$x=-1$ 是极大值点，极大值 $f(-1)=8$

$x=3$ 是极小值点，极小值 $f(3)=-24$.

注意：极值、极值点的定义，表达要正确.

例4.14（P69）求函数 $f(x)=2x+3\sqrt[3]{x^2}$ 的极值.

解　定义域 $(-\infty,+\infty)$,

求导 $f'(x)=\left(2x+3x^{\frac{2}{3}}\right)'=\dfrac{2\left(\sqrt[3]{x}+1\right)}{\sqrt[3]{x}}$

当 $x=-1$ 时，$f'=0$；当 $x=0$ 时，f' 不存在

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$+\nearrow$	0	$\searrow -$	不存在	$\nearrow +$

所以，当 $x=-1$ 时，函数有极大值 $f(-1)=1$;

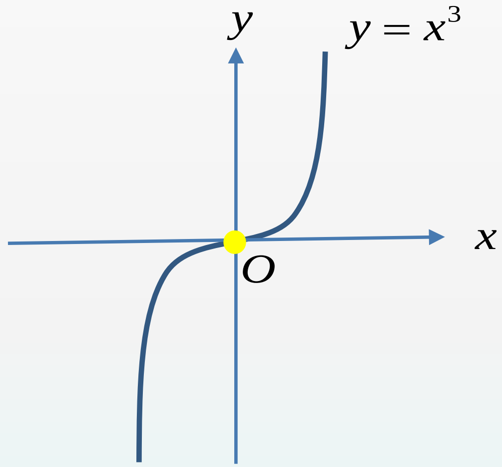
当 $x=0$ 时，函数有极小值 $f(0)=0$.

注意：在 $x=0$ 处导数不存在，但在 $x=0$ 处函数有极值.

注意：极值点与驻点无任何关系，

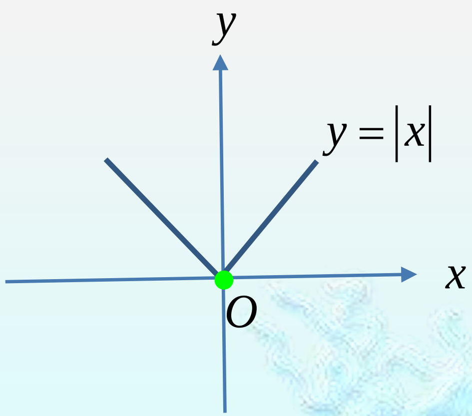
驻点未必是极值点，如$y=x^3$，$x=0$是驻点；

极值点也未必是驻点，如$y=|x|$中的$x=0$是极值点.



$x=0$是驻点，
但不是极值点

当$x=0$时导数不存在，但$x=0$是极值点.



问：既然没有关系，为什么求极值时总要求出驻点？

定理4.7：（P68）可导函数的极值点必是驻点.

定理的条件： (1)函数在x_0点处可导，

(2)函数在x_0点处取得极值；

结论： 在x_0处必有$f'(x_0)=0.$

证明(反证法)　设x_0是可导函数的极值点，但$f'(x_0)\neq 0.$

不妨假设$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0,$

根据极限的保号性，必存在x_0的某个邻域，使得$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0,$

由此得到如下结论：

x	$x<x_0$	x_0	$x_0<x$
$f(x)$的取值情况	$f(x)<f(x_0)$	x_0不是极值点	$f(x_0)<f(x)$

$f(x)$是增函数，与题设矛盾，故可导函数的极值点x_0必是驻点，即$f'(x_0)=0.$

判定极值方法二：二阶导数判别法

定理4.8　($P69$)

设函数 $f(x)$ 在 x_0 处有二阶导数，且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，则

(1)若 $f''(x_0)>0$，则 x_0 是函数的极小值点；

(2)若 $f''(x_0)<0$，则 x_0 是函数的极大值点.

证明(2)：因为 $f''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}<0$

则必存在 x_0 的某个去心邻域，使得 $\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}<0$，即 $\dfrac{f'(x)}{x-x_0}<0$

x	$x<x_0$	x_0	$x>x_0$
$f(x)$ 的取值情况	$f'(x)>0$	x_0 是极大值点	$f'(x)<0$

故，当 $f'(x_0)<0$ 时，x_0 是极大值点.

例4.15 (P69) 求函数 $f(x)=x^3-9x^2+15x+1$的极值.

解 定义域$(-\infty,+\infty)$

令 $f'(x)=3x^2-18x+15=3(x-1)(x-5)=0$,

求出驻点 $x=1$, $x=5$

求二阶导数 $f''(x)=6x-18=6(x-3)$

计算： $f''(1)<0$，**所以** $x=1$**是极大值点，极大值** $f(1)=8$,

$f''(5)>0$，**所以** $x=5$**是极小值点，极小值** $f(5)=-24$.

二阶导数求极值法要点

条件： $f'(x_0)=0$， $f''(x_0)\neq 0$

结论： $f''(x_0)>0$，**则** $f(x_0)$**是极小值，**

$f''(x_0)<0$，**则** $f(x_0)$**是极大值.**

结合曲线凹凸性来记：

$f''(x_0)>0$,曲线是凹弧，

$f(x_0)$是极小值；

$f''(x_0)<0$,曲线是凸弧，

$f(x_0)$是极大值.

例4.16 求函数$f(x)=\sin x+\cos x$在$[0,2\pi]$内的极值点.

教材P69，自学

两种判别法的比较：

一阶判别法

优点：使用范围广，任何函数都可判定；**缺点：**过程太长

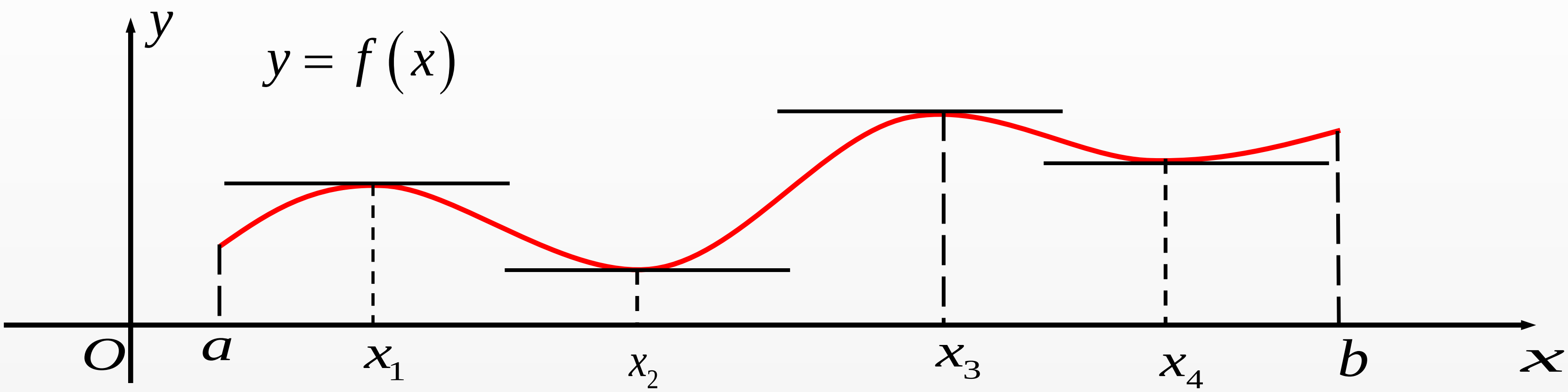
二阶判别法

优点：使用简便；**缺点：**有无法判定的情况

（当 $f'(x_0)=0$时，判别法无效）

两种判别法都要会，根据具体情况灵活运用.

二、函数的最大最小值



求函数最值步骤：

(1)确定求解范围

(2)求驻点及导数不存在的点

(3)计算上述各点的函数值进行比较

函数的最大(小)值在驻点、不可导点及区间端点取得.

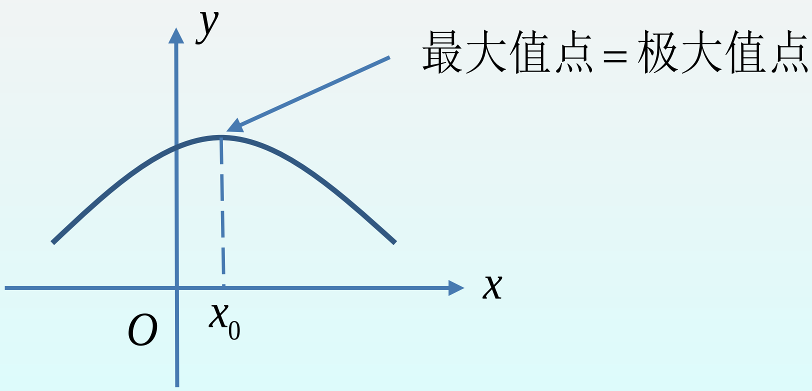
例4.17 求函数 $y=\left(x^2-2x\right)^{\frac{2}{3}}$ 在区间$[0,3]$上的最大最小值.

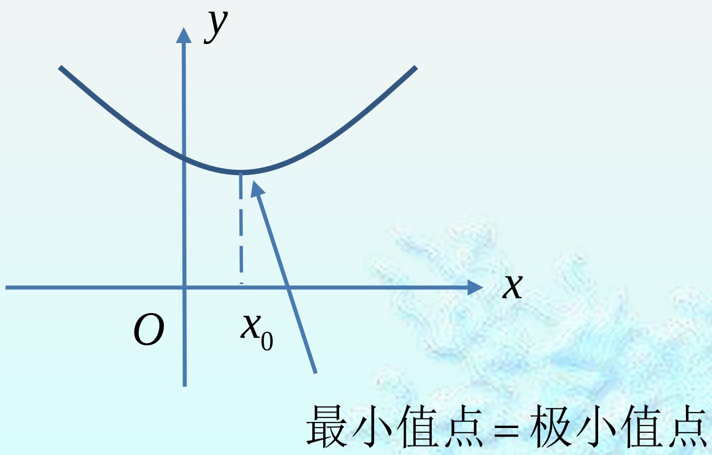
见教材P70，自学

两个经验：见教材P70

(1)若 $f(x)$在$[a,b]$上为单调增(减)函数，则函数最大(小)值点必在端点取得.

(2)设 x_0是可导函数的唯一极大(小)值点，则x_0必是最大(小)值点.



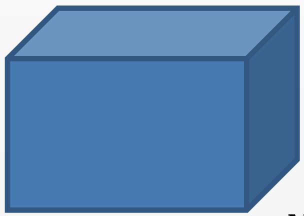


例4.18 (P70) 欲做一个底面为长方形的带盖箱子，其体积为$72cm^3$，相邻两底边长之比为1：2，问各边的长为多少时，才能使用料最省？

解 设底面一边长为x，另一边长为$2x$，

$$v = 2x\cdot x\cdot h = 72 \Rightarrow h = \frac{36}{x^2}$$

则箱子的高$h = \dfrac{72}{2x\cdot x} = \dfrac{36}{x^2}$，



用料最省就是其表面积S最小

依题意，表面积是六面体六个面的面积之和

$$S = (2x+4x)\cdot\frac{36}{x^2} + 2\cdot(2x\cdot x) = \frac{216}{x} + 4x^2 \ (x>0)$$

令$S' = -\dfrac{216}{x^2} + 8x = 0$，求出唯一驻点$x = 3cm$

判定： 由$S''=\dfrac{432}{x^3}+8>0$知，$x=3$是极小值点，也是最小值点

所以，当箱子一边长为3*cm*，另一边长为6*cm*，高为

$\dfrac{36}{3^2}$=4*cm*时，所用材料最省.

说明：如果求解的是实际应用问题，必有最值，且在定义域内只有唯一驻点，则该驻点就是最值点.

教材中其他例题自学

小结：

一、基本概念

(1)极值 $f(x_0)$，极值点 x_0；

(2)驻点：使得 $f'(x)=0$的点称为驻点；

二、极值判定方法

(1)一阶导数判别法；

(2)二阶导数判别法$($适用于二阶可导函数$)$；

注意：函数的极值点存在于驻点及不可导点中.

三、最大$($小$)$值

(1)最大$($小$)$值在驻点、不可导点、区间端点中；

(2)若 x_0是可导函数的唯一极大$($小$)$值点，则 x_0必是函数的最大$($小$)$值点.

作业： P72

必做：2.(1)　3.(1)　8

写在书上：　1. 选择题