§9.2 偏导数

要求：熟练掌握多元函数偏导数计算

9.2.1 偏导数的定义与计算

回顾：一元函数 $y=f(x)$ 导数定义

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

导数 $f'(x_0)$ 是函数 y 在点 x_0 处的变化率.

对二元函数 $z=f(x,y)$，我们也相应研究函数 z 对变量 x(或 y)的变化率，这就引出了一个新概念.

先介绍二元函数增量概念：

$\Delta z_x=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$ 称为函数对 x 的偏增量

$\Delta z_y=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ 称为函数对 y 的偏增量

定义9.4 (P179) 如果 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta z_x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$

存在，则此极限值称为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 x 的偏导数

记为 $f_x(x_0, y_0)$ 或 $z_x\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ 或 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0, y_0)}$

即 $$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

同理，可定义函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 y 的偏导数

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

如果函数 $z = f(x, y)$ 在 D 内每点 (x, y) 处的偏导数都存在，则函数对 x, y 的偏导数统称为函数对 x 或对 y 的偏导数.

记号：$f_x(x_0, y_0)$是求函数在(x_0, y_0)点的偏导函数值；

记号：$f_x(x, y)$是求函数在(x, y)点的偏导函数. 都称为求偏导数.

从定义看出，求函数的偏导数要用到一元函数的求导公式，对某一自变量求偏导时，其余变量看作常量.

例9.5 $(P180)$求下列函数的偏导数： (1) $z = y^2 \sin x$

解 (1)对 x 求偏导时，把 y 看作常量，得 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y^2 \cos x$

对 y 求偏导时，把 x 看作常量，得 $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y \sin x$

(2), (3) 自己做

练习：已知 $z = x^2 + (xy)^2 + a^2$，求 z_x, z_y.

例9.6 $(P180)$求函数 $f(x,y)=x^2+y^2-3xy$ 在点(1,3)处的偏导数.

分析：与一元函数一样，计算导数值 $f'(x_0)$，先求导函数 $f'(x)$，再计算导函数值 $f'(x)\big|_{x=x_0}$

解 $f_x=2x-3y$， 则 $f_x(1,3)=2\times1-3\times3=-7$

$f_y=2y-3x$， 则 $f_y(1,3)=2\times3-3\times1=3$

练习：

1. 求下列函数的偏导数

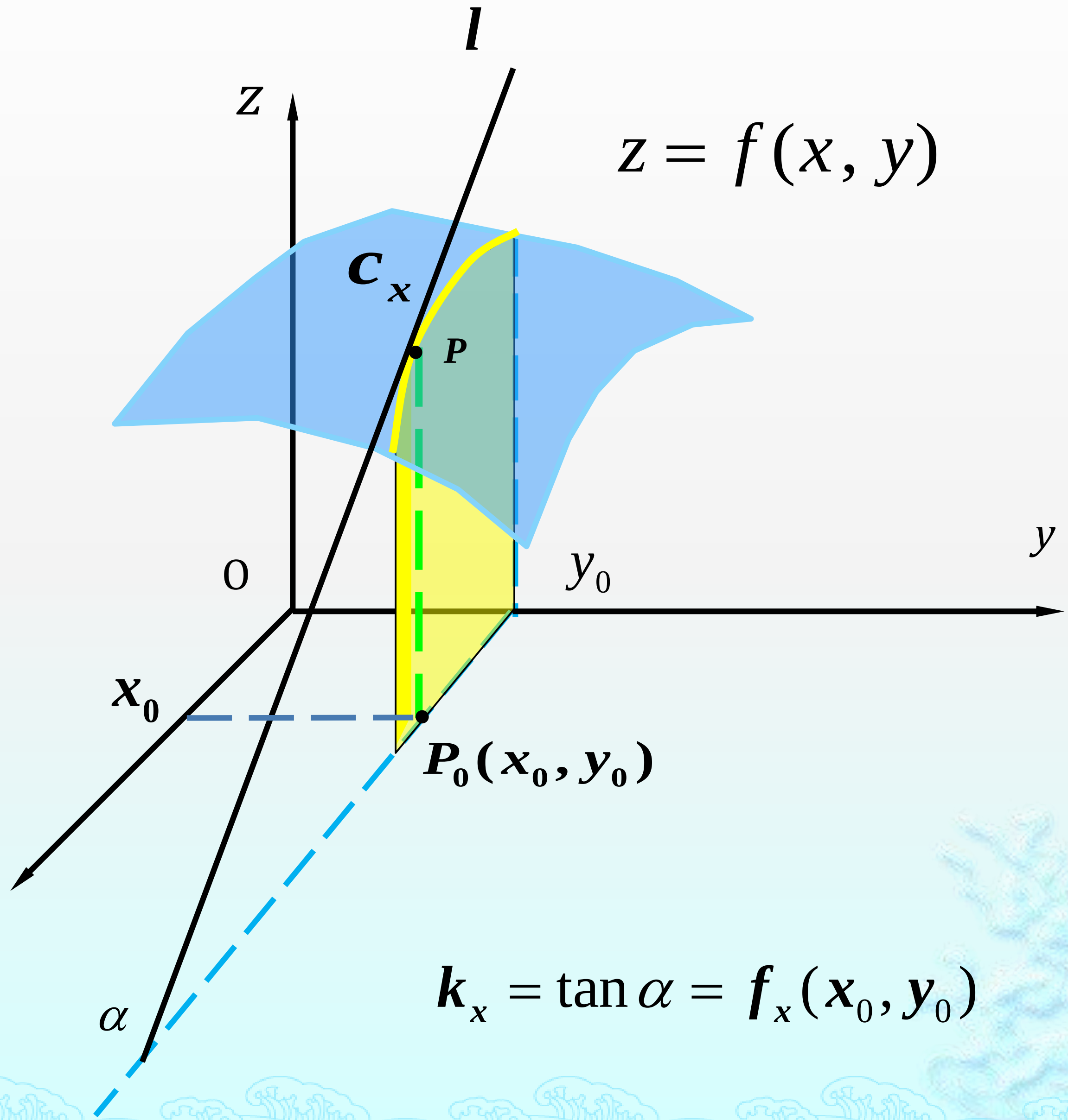
(1) $z=x^2\sin 2y$ (2) $z=\ln\left(x^2y^3\right)$

2. 设 $z=x^y\,(x>0,\ x\neq1)$，求证： $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{\ln x}\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z$

偏导数的几何意义

在$z=f(x,y)$函数中，若固定$y=y_0$则得$z=f(x,y_0)$，此时z是自变量为x的一元函数．从几何上看，它是曲面$z=f(x,y)$与平面$y=y_0$相交的一条曲线L_x：$\begin{cases} z=f(x,y), \\ y=y_0 \end{cases}$

偏导数$f_x(x_0,y_0)$是一元函数$z=f(x,y_0)$在点x_0处的导数，由一元函数导数的几何意义可知，$f_x(x_0,y_0)$表示曲线L_x在点$M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$处的切线M_0T_x对x轴的斜率，即$f_x(x_0,y_0)=\tan\alpha$，其中α为切线M_0T_x与x轴正方向的夹角．



$$k_x = \tan\alpha = f_x(x_0, y_0)$$

9.2.2 高阶偏导数

如果 $\frac{\partial z}{\partial x}=f_x(x,y)$，$\frac{\partial z}{\partial y}=f_y(x,y)$还可导，则称它们的偏导数为$z=f(x,y)$的二阶导数.

注意：二元函数的一阶偏导数有两个，二阶偏导数有四个

一阶偏导函数 $\frac{\partial z}{\partial x}=f_x(x,y)$有两个二阶偏导：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f_{xx}(x,y)\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f_{xy}(x,y)$$

同理：一阶偏导函数 $\frac{\partial z}{\partial y}=f_y(x,y)$也有两个二阶偏导：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f_{yx}(x,y)\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f_{yy}(x,y)$$

f_{xy}，f_{yx} 称混合二阶偏导数，可以证明，当 f_{xy} 与 f_{yx} 都连续时，$f_{xy}=f_{yx}$，即混合二阶偏导数求导与先后次序无关.

例9.7 （$P180$） 求函数 $z=x^3y^2-2x^2y^3$ 的二阶偏导数.

注意：题目要求二阶偏导数是指所有二阶偏导数.

解 先计算一阶偏导 $z_x=3x^2y^2-4xy^3$， $z_y=2x^3y-6x^2y^2$

再计算二阶偏导 $z_{xx}=6xy^2-2y^3$， $z_{xy}=6x^2y-12xy^2$

$$z_{yx}=z_{xy}=6x^2y-12xy^2,\quad z_{yy}=2x^3-12x^2y$$

高阶偏导数的计算就是按步就班，一阶一阶的算下去，

注意：不要少算了某些偏导数.

练习：(1) 设 $z = x\ln(xy)$, 求 $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$.

(2) 设 $f(x,y) = x + (y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$, 求 $f_x(x,1)$.

作业：

$P181$ 1. (1), (3), (4),(7),(8)

2. (1)

4.

预习 9.3节

§9.3 全微分

要求：熟练掌握多元函数全微分计算

回顾：一元函数 $y = f(x)$ 微分定义

增量 $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x$

$f'(x)\Delta x$ 称为函数 $y = f(x)$ 的微分，记作 $dy = f'(x)dx$

对二元函数 $z = f(x, y)$，前面给出了偏增量概念，现在定义

全增量 $z = f(x, y)$ 的**全增量**记为 Δz

$$\Delta z = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y)$$

$$\boxed{dz = f_x(x,\ y)\Delta x + f_y(x,\ y)\Delta y}$$

$$\boxed{\text{通常记作}\ \ dz = f_x(x,\ y)dx + f_y(x,\ y)dy}$$

称为函数在 (x, y) 处关于 Δx 与 Δy 的**全微分**.

全微分概念可以推广到更多元函数的情形.

三元函数 $u = f(x,y,z)$

$$\boxed{du = f_x(x, y,z)dx + f_y(x, y,z)dy + f_z(x, y,z)dz}$$

例 9.9 计算下列函数的全微分：

(1) $z = 3x^2y - y^5$; (2) $u = x + e^{xy} + \sin\frac{z}{2}$

解(1) $\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 - 5y^4$

$$\boxed{dz = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy} = 6xydx + (3x^2 - 5y^4)dy$$

解(2) $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = xe^{xy}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2}\cos\frac{z}{2}$

$$du = dx + xe^{xy}dy + \frac{1}{2}\cos\frac{z}{2}dz$$

例 9.10 (*P*183) 计算 $z = xy^2$ 在点 $(2,-1)$ 处当 $\Delta x = 0.01$ 和 $\Delta y = -0.01$ 时的全增量 Δz 和全微分 dz.

这个例题主要分清用什么公式计算，

全增量 $\Delta z = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y)$

全微分 $dz = f_x(x,\ y)dx + f_y(x,\ y)dy$

作业：

$P181$ 1. (1), (3), (4),(7),(8)

2. (1)

4.

作业：

$P183$ 1. (1), (6),(7)

3.

预习 9.4节