第4章 导数的应用

内容提要及要求：

1.了解微分中值定理；

2. 利用罗必达法则计算$\frac{0}{0}$及$\frac{\infty}{\infty}$和一些简单可化为这两种类型未定式的极限；

3.会判断曲线的单调性与曲线的凹凸区间及拐点；

4.会求函数的极值与最大最小值；

§4.1 微分中值定理

一、罗尔定理

如果函数 $y=f(x)$ 满足 (1) 在 $[a,b]$ 上连续，(2) 在 (a,b) 内可导，(3) 且 $f(a)=f(b)$，则至少有一点 $x_0\in(a,b)$，使得

$$f'(x_0)=0.$$

如图示，几何上理解为：在 (a,b) 内连续的曲线，若 $f(a)=f(b)$，则曲线上必有平行于 AB 的切线，即存在 $x_0\in(a,b)$，使得 $f'(x_0)=0.$

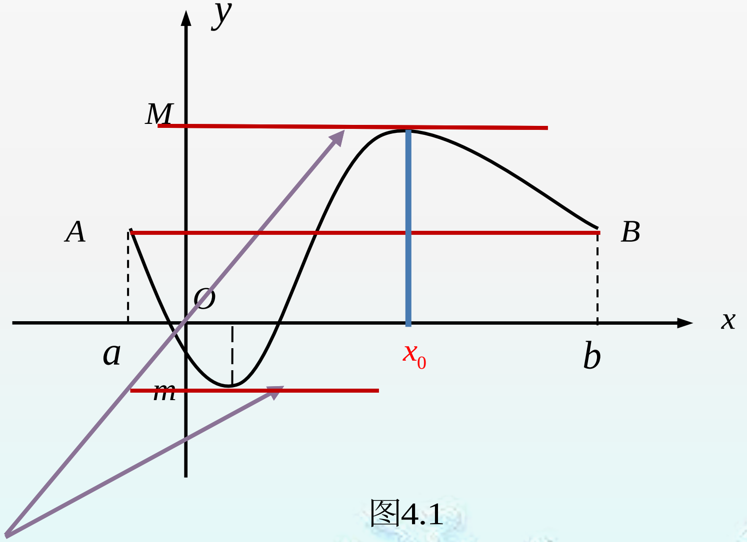

图4.1

必有平行于 AB 的切线，即至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f'(x_0)=0$

二、拉格朗日中值定理

如果函数 $f(x)$ (1)在$[a,b]$上连续，(2)在(a,b)内可导，则至少有一点 $x_0 \in (a,b)$，使得 $f'(x_0)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

或 $f(b)-f(a)=f'(x_0)(b-a)$成立.

几何理解：在(a,b)内连续的曲线，曲线上必有平行于AB的切线，至少存在一点 $x_0 \in (a,b)$，

使得 $$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

或 $f(b)-f(a)=f'(x_0)(b-a)$

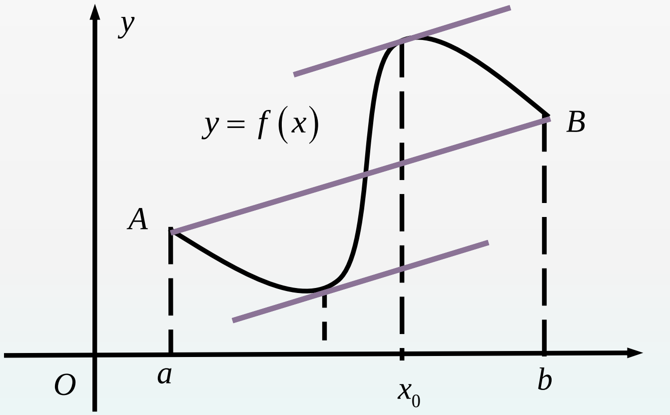

图4.2

直线AB的斜率 $k_{AB}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

两个重要推论：

(1) 若 $f'(x)=0$，则 $f(x)=C$ (常量).

(2) 若 $f'(x)=g'(x)$，则 $f(x)-g(x)=C$ (常量)

三、柯西中值定理

如果函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $g'(x)\neq 0$，则至少有一点 $x_0\in(a,b)$，使得

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

三个定理的关系：

柯西中值定理特例，当 $g(x)=x$ 时，就是拉格朗日中值定理；

拉格朗日中值定理特例，当端点函数值相等时，就是罗尔定理.

中值定理主要是解决本章导数应用的基础理论问题，除此之外，中值定理还有广泛的应用，以下举两例.

P58 例4. 2　证明 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, (-1 \le x \le 1)$

证明：记 $f(x) = \arcsin x + \arccos x,\ (-1 \le x \le 1)$

因为 $f'(x) = (\arcsin x)' + (\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$

所以，对于任意的 $-1 \le x \le 1,\ f(x) = C$ (常量)

又因为 $f(1) = \arcsin 1 + \arccos 1 = \frac{\pi}{2}$

故，对于任意的 $-1 \le x \le 1$，都有 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

证明某个函数恒等于常数

P59 习题 4.1　第4题：设$a>b>0$, 证明

$$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}.$$

证明：记$f(x)=\ln x$,其中$x\in[b,a]$,易知$f(x)$在$[b,a]$上连续，在(b,a)内可导.

根据拉格朗日中值定理，至少有一点$x_0\in(b,a)$，使得

$$f'(x_0)=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{1}{x_0},$$

即$\frac{1}{x_0}=\frac{\ln a-\ln b}{a-b}=\frac{\ln\frac{a}{b}}{a-b}$或$\ln\frac{a}{b}=\frac{a-b}{x_0}$

由$b<x_0<a$可知$\frac{a-b}{a}<\frac{a-b}{x_0}<\frac{a-b}{b}$,即$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$.

故，当$a>b>0$时,总有$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$成立.

利用中值定理证明不等式

§4.2 罗必达法则

要求：能利用罗必达法则，求$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}$型未定式的极限

前面介绍无穷小的运算性质时知道，两个无穷小相除不一定是无穷小， 例如 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0,\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x^2}=\infty$

我们把分子、分母都以零为极限或极限都是无穷大这类极限称为“未定式”，即极限值不确定.

罗必达法则给出了这类未定式极限一种很简单的求解方法

$\frac{0}{0}$、$\frac{\infty}{\infty}$是两类最基本的未定式，其它形式的未定式还有

$\infty-\infty$、$\infty\cdot 0$、0^0、1^∞、∞^0这五种类型.

这些未定式都能用罗必达法则来求解

定理4.4（罗必达法则）P59 假设

(1)当$x\to a$或$x\to\infty$时，$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$是属于$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$未定式的极限；

(2) $f(x),g(x),f'(x),g'(x)$在a的某个邻域内或当$x\to\infty$时连续，且$g'(x)\neq 0$;

(3)$\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在或为∞，则 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

注意：(1)该定理的条件要求 $f(x)$，$g(x)$都是无穷小(或无穷大)，

(2)要求导函数 $f'(x)$，$g'(x)$之比的极限存在，而不是$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'$的极限存在.

证明:(仅证当$x \to a$时的极限)

因为当$x \to a$时,$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$属于$\dfrac{0}{0}$未定式，为便于使用，可补充定义

$f(a) = g(a) = 0$，因而

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \to a} \frac{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$ 其中$g'(x) \neq 0$

说明：只要满足罗必达法则的条件，该定理可多次使用.

例4.4 计算下列极限（P60）

$$(1)\lim_{x\to3}\frac{2x^2-7x+3}{3x^2-8x-3}\qquad(2)\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}\qquad(3)\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot}x}$$

解

$$(1)\lim_{x\to3}\frac{2x^2-7x+3}{3x^2-8x-3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to3}\frac{\left(2x^2-7x+3\right)'}{\left(3x^2-8x-3\right)'}=\lim_{x\to3}\frac{4x-7}{6x-8}=\frac{1}{2}$$

$$(2)\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\left(e^x-e^{-x}-2x\right)'}{\left(x-\sin x\right)'}=\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$$

(2)用了三次罗必达法则，注意每次使用罗必达法则之前必须验证定理的条件是否满足.

解(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\dfrac{1}{x(x+1)}}{-\dfrac{1}{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2+x}=1$

$$\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]'=\frac{1}{1+\dfrac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)'=\frac{x}{x+1}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{x(x+1)}$$

书上的解法，用了无穷小的等价代换，

当$x\to0$时，$\ln(1+x)\sim x$，那么，当$x\to\infty$时，$\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\sim\dfrac{1}{x}$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\operatorname{arccot} x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\dfrac{1}{x^2}}{-\dfrac{1}{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2}=1$

例4.5 计算下列极限（P60）

$$(1)\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{a^x},(a>1)\qquad(2)\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

无穷大的倒是无穷小

解（1）$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{a^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{a^x\ln a}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{a^x(\ln a)^2}=0$$

解（2）$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{\sqrt{1+x^2}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{1+e^x}}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+e^x}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}=\frac{1}{1}=1$$

若分子、分母极限都存在，分别求出其极限值

例4. 6 求下列函数的极限：(P61)

$$(1)\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right]\qquad (2)\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)\qquad (3)\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

这是其它形式的未定式，不要求会计算，留给有兴趣的同学自学.

罗必达法则求极限练习：

$$(1)\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-1}$$

$$(2)\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2+x-1}$$

$$(3)\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$(4)\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}$$

答案：

$(1)\frac{2}{3}$

$(2)\frac{1}{2}$

$(3)\frac{1}{2}$

$(4)\ 1$

罗必达法则不是万能的，也有无效的情况

例如：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ $\left(\text{它是}\dfrac{\infty}{\infty}\text{型未定式}\right)$

用罗必达法则：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

再用罗必达法则　　　还原成原极限，不能求出结果

作业： P62

写在作业本上　1(1), (3), (4)

2(3), (4)