复习：

上一节介绍了平面的三种形式

(1) 点法式：已知平面上的一点及法向量

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

(2) 一般式：由点法式整理得到

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$$

(3) 截距式：由一般式整理得到(此时A,B,C,D均不为零)

或已知平面与三条坐标轴的交点$P(a,0,0)$, $Q(0,b,0)$, $R(0,0,c)$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

点法式是最常用的平面方程

§ 8.5 空间直线及其方程

要求：

1. 熟记**直线对称式方程**的形式
   掌握用对称式求解直线方程的方法
2. 熟记**直线参数式方程**的形式
3. 熟记**直线一般方程**的形式
4. 掌握直线方程三种形式的相互转化方法

8.5.1　空间直线及其方程

已知直线上的一点及方向，该直线就唯一确定.

问题：根据已知条件，如何写出该直线的方程？

定义$(P164)$：与直线平行的非零向量称为直线的**方向向量**.

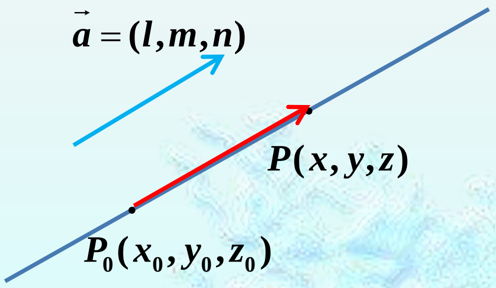
方向向量记为 $\vec{a}=(l,m,n)$. 方向向量也称为直线的**方向数**

注意：方向向量有无穷多个，它们之间是平行的.

已知直线上点$P_0(x_0,y_0,z_0)$及直线的方向向量$\vec{a}=(l,m,n)$

分析如何写直线方程

设$P(x,y,z)$为直线上任意一点，则 $\vec{a}//\overrightarrow{P_0P}$



$$\boxed{\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}} \qquad (8.17)$$

(8.17)称为直线的**对称式**方程或**点向式**方程

对称式是最常用的直线方程

点向式是指用直线上一点和一个方向向量来求解直线方程

$$\frac{x-\boxed{x_0}}{\boxed{l}}=\frac{y-\boxed{y_0}}{\boxed{m}}=\frac{z-\boxed{z_0}}{\boxed{n}}$$

由对称式能读出点及方向向量的信息

例如：(1) 已知直线方程 $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{4}$

可知，直线上有一点$(1,0,-2)$，方向向量 $\vec{a}=(2,-1,4)$

（2） 已知直线过原点，方向向量为$\vec{a}=(3,-7,1)$

直线方程 $\frac{x}{3}=\frac{y}{-7}=\frac{z}{1}$

由对称式可化为参数式

令 $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}=t$ (t为参数)

整理 $\boxed{\begin{cases} x = x_0 + l t \\ y = y_0 + m t \qquad (t\text{为参数}) \\ z = z_0 + n t \end{cases}}$ (8.18)

(8.18)称为直线的**参数式**方程

又因为空间直线可看作两平面的交线

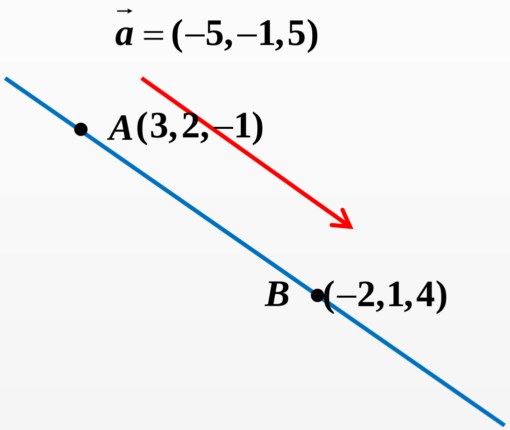
$$\boxed{\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}} \qquad (8.19)$$

(8.19)称为直线的**一般**方程

写直线方程的关键是找方向向量

例8.19 ($P165$) 求满足下列条件的直线方程

(1) 过两点 $A(3,2,-1)$, $B(-2,1,4)$;



解 记要求的直线为l, 直线上有两点 A, B

则直线的方向向量 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}=(-5,-1,5)$

由对称式 $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$

写出直线方程为

$$\frac{x-3}{-5}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{5} \quad \text{或} \quad \frac{x+2}{-5}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-4}{5}$$

(2)过点$(-1,3,4)$且垂直于平面$2x-3y+5=0$

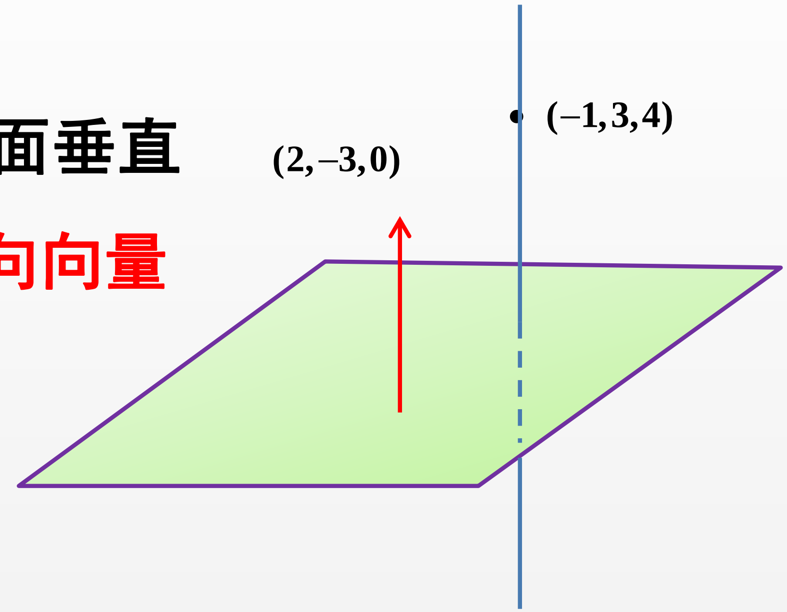
解　已知平面$2x-3y+5=0$

所求直线过点$(-1,3,4)$且与已知平面垂直

此时平面的法向量 即为直线的**方向向量**

写出直线的对称式方程为

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z-4}{0}$$



注意：第二个等式右端$\frac{z+1}{0}$分母为零，我们约定应理解为

$$\begin{cases}\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-3}{-3}\\ z-4=0\end{cases}$$

该直线是两平面的交线

前面已介绍了直线的三种形式：

(1) 对称式 $$\frac{x-\boxed{x_0}}{\boxed{l}}=\frac{y-\boxed{y_0}}{\boxed{m}}=\frac{z-\boxed{z_0}}{\boxed{n}}$$

对称式读出点及方向向量的信息

(2) 参数式 $$\begin{cases} x=x_0+l\,t \\ y=y_0+m\,t \\ z=z_0+n\,t \end{cases}$$ (t为参数)

参数式读出点及方向向量的信息

(3) 一般式 $$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

三种形式可以相互转化

例 8.21 (*P*165) 将直线方程

$$\begin{cases} 2x-3y+z+7=0 \\ 3x+y-2z-4=0 \end{cases}$$

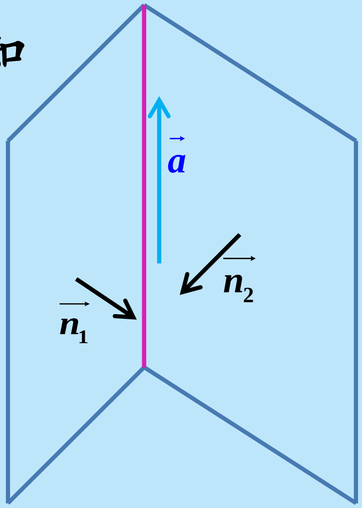
化为参数式及对称式.

分析：空间直线看作两平面的交线，两平面已给出，可知法向量$\vec{n}_1=(2,-3,1)$

$\vec{n}_2=(3,1,-2)$

直线的方向向量与两法向量垂直

$\vec{a}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$



再在直线上求出一点，就可写出对称式，变形就得到参数式.

解 已知$\vec{n}_1=(2,-3,1)$,

$\vec{n}_2=(3,1,-2)$,

$$\vec{a}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}=(5,7,11)$$

令 $x=0$ (令$x=1$可以吗?)

代入直线方程$\begin{cases} -3y+z+7=0 \\ y-2z-4=0 \end{cases}$

求得直线上一点$(0,2,-1)$

对称式 $\dfrac{x-0}{5}=\dfrac{y-2}{7}=\dfrac{z+1}{11}$

参数式$\begin{cases} x=5t \\ y=7t+2 \\ z=11t-1 \end{cases}$

例 8.20 (P165) 求直线 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{3}$ 与平面 $x-y+2z+6=0$ 的交点坐标.

解 将直线方程化为参数式，得

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-t \\ z=3t \end{cases}$$

代入平面方程中

$$(1+2t)-(-2-t)+2(3t)+6=0$$

求出 $t=-1$

再将 $t=-1$ 代入参数式中，算出 $x=-1, y=-1, z=-3$

直线与平面的交点为 $(-1,-1,-3)$

常用方法：

(1)若已知直线的对称式，则化为参数式，代入平面方程中，求出参数值，再代入参数式，算出交点坐标；

(2)若已知直线的一般方程，则与平面一般方程联立，解三元一次方程组，方程组的解就是交点坐标.

练习：写出满足下列条件的直线方程

(1) 过点$M(4,-1,2)$且平行于直线$L:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{5}$;

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{5}$$

(2) 过点$M_1(3,-2,1)$和$M_2(-1,0,2)$;

$$\frac{x-3}{-4}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}$$ 或 $$\frac{x+1}{-4}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{1}$$

(3) 过点$M(-2,2,4)$且与两平面$x+2z=0$和$y-3z=2$平行.

$$\frac{x+2}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{1}$$

小结：

今天介绍直线方程的三种形式

(1) 对称式 (或点向式)

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

(2) 参数式 $\begin{cases} x = x_0 + l\,t \\ y = y_0 + m\,t \\ z = z_0 + n\,t \end{cases}$ (t为参数)

(3)一般式 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$

对称式是最常用的写直线方程的方法

其余内容自学

作业：*P*167

1. (2), (6)　　2.　3

预习：　第 8.6 节