§9.5 隐函数的求导公式

要求：熟练掌握多元隐函数求偏导计算

设二元函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $F(x,y,z)=0$ 确定，$F(x,y,z)$ 在 (x_0,y_0,z_0) 的某一邻域内有连续偏导数，且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$, $F_x(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则在 (x_0,y_0,z_0) 处 $z=f(x,y)$ 有连续偏导数，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$$

注意：正确理解记号 F_x 是三元函数 $F(x,y,z)=0$ 中，对第一个变量 x 求导，y,z 看作常量.

特例：$y=f(x)$ 由方程 $F(x,y)=0$ 所确定，则一元函数导数

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y},$$

例9.16 ($P187$) 求由方程 $x^2+y^2=4$所确定的隐函数的导数.

解法一 设 $F(x,y)=x^2+y^2-4$ $F_x=2x$, $F_y=2y$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y}$$

再用上学期学的一元隐函数求导方法做一遍

解 方程两边对 x 求导 $2x+2yy'=0$ 解得 $y'=-\dfrac{x}{y}$

第三种解法：将函数显化 $y_1=\sqrt{4-x^2}$ (或 $y_2=-\sqrt{4-x^2}$)

一元函数求导法：$y_1'=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}\left(4-x^2\right)'=\dfrac{1}{2}\dfrac{-2x}{\sqrt{4-x^2}}$

整理 $y_1'=-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ $\sqrt{4-x^2}$用y_1代入，得$y_1'=-\dfrac{x}{y_1}$

一题用四种方法求解，扩展解题思路

再用上学期学的参数方程求导方法做一遍

解法四 $x^2+y^2=4$的参数方程为 $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{2\cos t}{-2\sin t}$$

为了跟前面的计算形式一致，写成 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2\cos t}{-2\sin t}=-\dfrac{x}{y}$

四种方法，结果完全一致.

例9.17 设$z=z(x,y)$是由方程$z^3-3xyz=1$所确定的隐函数, 求dz.

先复习全微分公式：$dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$

题目给出的是隐函数，要利用隐函数求导法计算偏导数

解 记$F(x,y,z)=z^3-3xyz-1$

$$F_x=-3yz \quad F_y=-3xz \quad F_z=3z^2-3xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{-3yz}{3z^2-3xy} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{-3xz}{3z^2-3xy}$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{yz}{z^2-xy}dx+\frac{xz}{z^2-xy}dy$$

练习

(1) 设$z=z(x,y)$是由方程$e^{-xy}-2z+e^{z}=0$所确定的二元函数，求dz.

(2) 已知$x+y-e^{z}=z$，求$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}$.

(1) 设$z=z(x,y)$是由方程$e^{-xy}-2z+e^{z}=0$所确定的二元函数，求dz.

解：令 $F(x,y,z)=e^{-xy}-2z+e^{z}$

则$F_x=-ye^{-xy}$, $F_y=-xe^{-xy}$, $F_z=-2+e^{z}$.

所以$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}=\dfrac{ye^{-xy}}{e^{z}-2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}=\dfrac{xe^{-xy}}{e^{z}-2}$.

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{ye^{-xy}}{e^{z}-2}dx+\frac{xe^{-xy}}{e^{z}-2}dy=\frac{e^{-xy}}{e^{z}-2}(ydx+xdy)$$

(2) 已知$x+y-e^z=z$，求$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}$.

解：令 $F(x,y,z)=x+y-e^z-z$，则

$$F_x=1,\ F_y=1,\ F_z=-e^z-1.$$

所以 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{1}{e^z+1}$$

将$x=1, y=0$代入原方程，可得$z=0$

故 $$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=\left.\frac{1}{e^z+1}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=\frac{1}{2}.$$

第九章小结

一、多元函数概念

求函数定义域(能画出二元函数定义域的图形)

二、多元函数偏导数计算

(1) 显函数 $z = f(x,y)$，对 x 求导时将 y 看作常量

(2) 复合函数 $z = f(u,v)$, $u = \varphi(x,y)$, $v = \psi(x,y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

(3) 隐函数 $F(x,y,z) = 0$ $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F_x}{F_z}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F_y}{F_z}$

三、全微分

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

四、高阶偏导数

设二元函数 $z = f(x, y)$, 二阶偏导数有四个

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 称二阶混合偏导数，当混合偏导数连续时

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

作业：必做

***P*188　2.**

4. (1)

5.

选做：　1，8

预习 10.1节