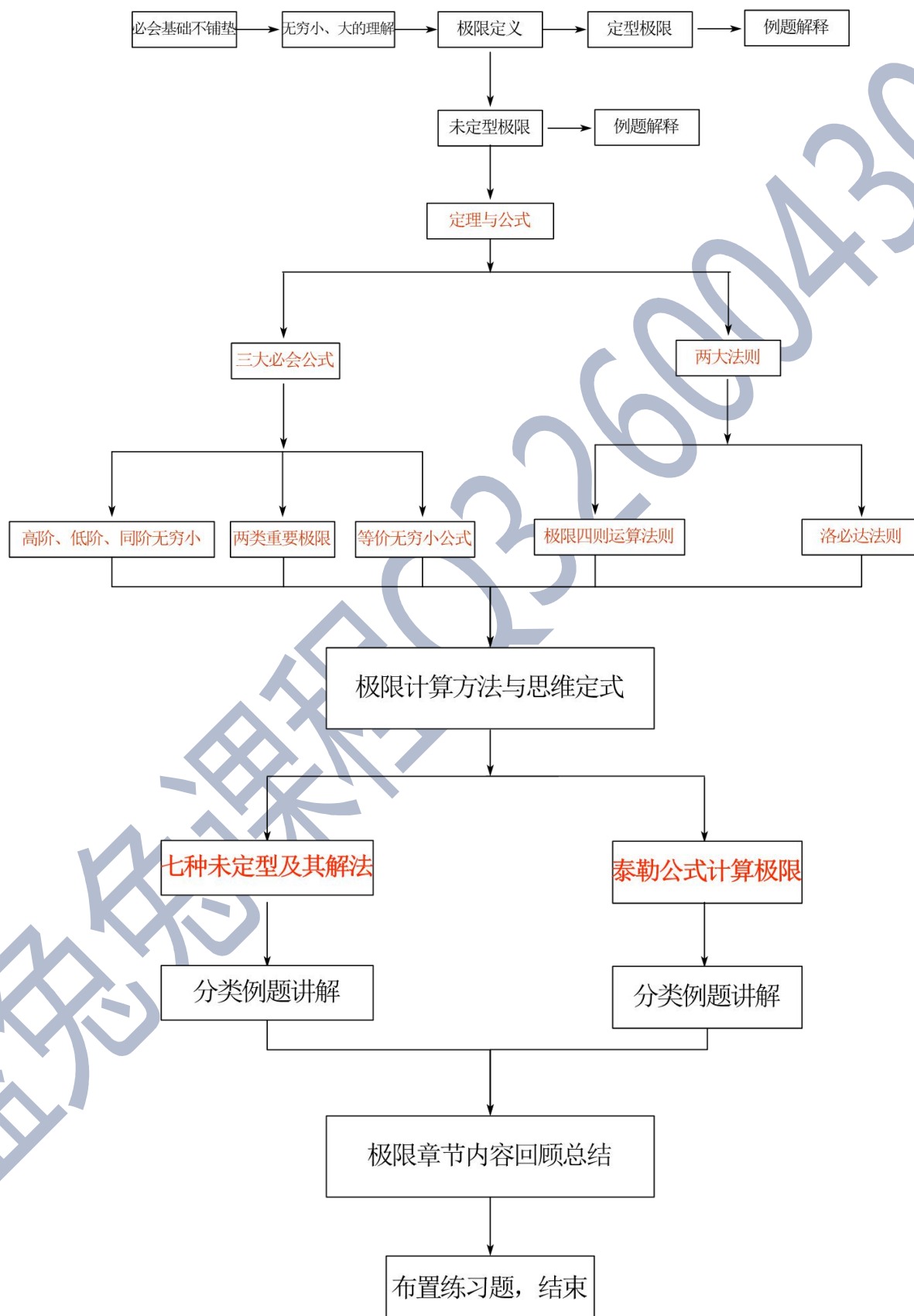


极限计算方法归类讲解

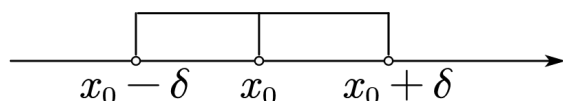
集训框架:



一、极限定义: 函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的某一去心邻域有定义, 存在常数 A , 对 $\forall \varepsilon > 0$, 总 $\exists \delta > 0$ 使得当 x 满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 均有 $|f(x) - A| < \varepsilon$

那么称常数 A 为函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时的极限值, 记作: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

定义解释: $0 < |x - x_0| < \delta \Leftrightarrow x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$

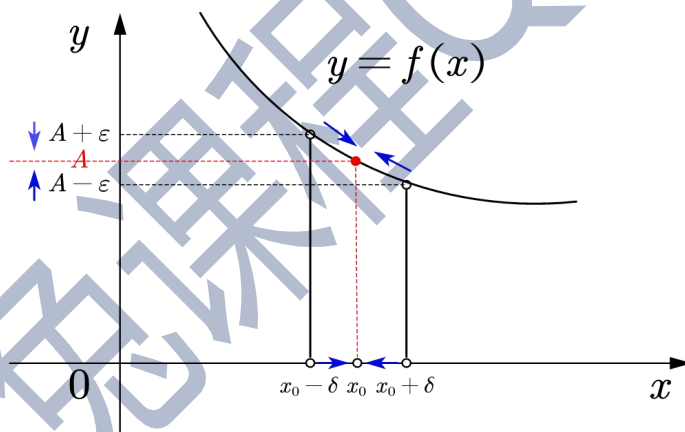


注意: ① 左右邻域
② 去心

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow x \rightarrow x_0 \quad \text{注意: } x \neq x_0$$

$$|f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$$

$$|f(x) - A| < \varepsilon \Rightarrow f(x) \rightarrow A$$



示意图

即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

二、【极限类型】：定型、未定型

定型例题： $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{3 + x}$

未定型例题： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$

三、【三大必会公式】：①无穷小阶的比较

②等价无穷小公式

③两类重要极限

①无穷小阶的比较

设 $x \rightarrow a$, $f(x) \rightarrow 0$, $g(x) \rightarrow 0$

若 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, 则 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小 , 记 $f(x) = o[g(x)]$

若 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, 则 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的低阶无穷小 , 记 $g(x) = o[f(x)]$

若 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ (非0常数), 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的同阶无穷小

特殊地, 当 $A = 1$ 时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 等价无穷小, 记作 $f(x) \sim g(x)$

【知识积累】: $x \rightarrow 0$ 时, 以下式子成立

$$ko(x) = o(x) = o(kx) , \text{其中 } k \neq 0$$

$$o(x) + o(x^2) = o(x)$$

$$o(x) \cdot o(x^2) = o(x^3)$$

$$x^2 \cdot o(x) = o(x^3)$$

注意: $o(1)$ 表示无穷小量, 在计算中可直接默认为0

例1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列正确的是()

A. $o(x) + o(x^2) = o(x^2)$

B. $o(x) + x = o(x)$

C. $o(x) - o(x) = 0$

D. $o(x) \cdot o(x) = o(x^2)$

②等价无穷小公式

$$x \rightarrow 0 \text{ 时, } x \sim \sin x \sim \arcsin x \sim \tan x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a$$

$$(1+x)^a - 1 \sim ax$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

注意: ①反向加负号; ②可推广

例2. 计算极限 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x \ln(1+x)}{x \sin x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln \cos x}$

③两类重要极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

例3. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

四、【两大法则】：①四则运算法则

②洛必达法则

①四则运算法则

若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ (A, B 均为定常数) 则

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A + B$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A - B$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \cdot B$$

$$\text{若 } B \neq 0, \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{A}{B}$$

例4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$

②洛必达法则

若 (1) $\lim_{x \rightarrow \square} \frac{f(x)}{g(x)}$ 为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型

(2) $f(x), g(x)$ 可导且 $g'(x) \neq 0$

(3) $\lim_{x \rightarrow \square} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (定值或无穷大)

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow \square} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \square} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

例5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x}{x^2}$

(2013年考研) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{x^2}$

例6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2}$

五、极限七种未定型及其解法

七种未定型： 类型 ① $\frac{0}{0}$ 、 $\frac{\infty}{\infty}$ 、 $0 \cdot \infty$

类型 ② 0^0 、 1^∞ 、 ∞^0

类型 ③ $\infty - \infty$

类型 ① $\frac{0}{0}$ 、 $\frac{\infty}{\infty}$ 、 $0 \cdot \infty$ 题型

例7. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$

例8. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x + 5}{x^2 + 1}$

例9. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$

类型 ② 0^0 、 1^∞ 、 ∞^0

例10. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

例11. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

例12. 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

例13. 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^{\frac{1}{x}} - 1 \right)^{\frac{1}{\ln x}}$

类型 ③ $\infty - \infty$

例14. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$

例15. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[n]{x^n + \frac{1}{3}x^{n-1} + 2} - x \right)$

六、利用泰勒展开计算极限

$$x \rightarrow 0 \text{ 时, } \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

例16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\tan x - x}$

例17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$

例18. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$

例19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{e^x - x - \cos x}$

【练习题】

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin\left(\frac{3}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \cdot \tan(3x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{\cos x})(1 - \sqrt[3]{\cos x}) \cdots (1 - \sqrt[2018]{\cos x})}{(1 - \cos x)^{2017}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x+1)(x+2)} \right]^x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sin\left(\ln\left(1 + \frac{3}{x}\right)\right) - \sin\left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x - 1} - x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}}$$

若 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} - a \right) e^x \right] = 1$, 求 a 的值

计算 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan x \right)^{\frac{1}{x}}$

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x + 3^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$ (练: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x + 3^x}{3^{x^2} + 4^{x^2}} \right)^{\frac{1}{x}}$)

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$

计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^2}}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2}$

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[2019]{\cos(2018x)} - \sqrt[2018]{\cos(2019x)}}{x^2}$

计算 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + n^2 x^2}$