关于二重积分的对称性

先介绍二元函数的奇偶性

在闭区域 D 上，如果 $f(-x,y)=-f(x,y)$，则称二元函数 $f(x,y)$ 是关于变量 x 的奇函数；如果 $f(-x,y)=f(x,y)$，则称二元函数 $f(x,y)$ 是关于变量 x 的偶函数。

类似地，在闭区域 D 上，如果 $f(x,-y)=-f(x,y)$，则称二元函数 $f(x,y)$ 是关于变量 y 的奇函数；如果 $f(x,-y)=f(x,y)$，则称二元函数 $f(x,y)$ 是关于变量 y 的偶函数。

例如，函数 $f(x,y)=\sin x\cos y$，由于 $f(-x,y)=-f(x,y)$，则称函数 $f(x,y)=\sin x\cos y$ 是关于 x 的奇函数；又由于 $f(x,-y)=f(x,y)$，则称函数 $f(x,y)=\sin x\cos y$ 是关于 y 的偶函数。

二重积分的对称性定理

① 如果二元函数 $f(x,y)$ 关于变量 x（或 y）是奇函数，且积分区域 D 关于 y（或 x）轴对称，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=0;$$

②如果二元函数 $f(x,y)$ 关于变量 x（或 y）是偶函数，且积分区域 D 关于 y（或 x）轴对称，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=2\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma \text{（或} \iint_D f(x,y)d\sigma=2\iint_{D_2} f(x,y)d\sigma\text{）。}$$

其中 D_1 与 D_2 是 D 被 y（或 x）轴所分成的对称的两个部分区域之一部分。

例 1　计算 $I=\iint_D [xf(x^2+y^2)+yf(x^2-y^2)]dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 1\}$

解　积分区域 D 关于 y 轴对称，被积函数 $xf(x^2+y^2)$ 关于 x 是奇函数，由对称知

$$\iint_D xf(x^2+y^2)dxdy=0;$$

同时积分区域 D 关于 x 轴对称，而被积函数 $yf(x^2-y^2)$ 关于 y 是奇函数，仍由对称知

$$\iint_D yf(x^2-y^2)dxdy=0,$$

故

$$I=0。$$

例 2　计算$\iint\limits_{D} y\sqrt{1+x^2-y^2}d\sigma$，其中$D$是由直线$y=x$，$x=-1$及$y=1$所围成的闭区域。

解　如图 9—11 所示，观察积分区域D的特点，若将D分为D_1,D_2,D_3,D_4，则$D_1\cup D_2$构成的区域关于y轴对称，$D_3\cup D_4$构成的区域关于x轴对称。再观察被积函数$f(x,y)=y\sqrt{1+x^2-y^2}$，由于$f(x,-y)=-f(x,y)$，所以$f(x,y)$是关于y的奇函数。根据二重积分的对称性，有

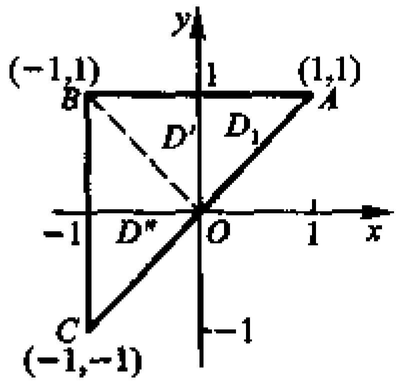

图 9—11

$$\iint\limits_{D_3\cup D_4} y\sqrt{1+x^2-y^2}d\sigma=0\text{。}$$

又由于被积函数$f(x,y)$满足$f(-x,y)=f(x,y)$，因此，它是关于x的偶函数，所以

$$\iint\limits_{D_1\cup D_2} y\sqrt{1+x^2-y^2}d\sigma=2\iint\limits_{D_1} y\sqrt{1+x^2-y^2}d\sigma\text{。}$$

从而有

$$\iint\limits_{D} y\sqrt{1+x^2-y^2}d\sigma=\iint\limits_{D_1\cup D_2} y\sqrt{1+x^2-y^2}d\sigma+\iint\limits_{D_3\cup D_4} y\sqrt{1+x^2-y^2}d\sigma$$

$$=2\iint\limits_{D_1} y\sqrt{1+x^2-y^2}d\sigma\text{。}$$

再注意到被积函数的特点，不妨将D_1看作X—型区域，即将D_1表示为

$$x\le y\le 1,\quad 0\le x\le 1\text{。}$$

于是

$$I=2\iint\limits_{D_1} y\sqrt{1+x^2-y^2}d\sigma=2\int_0^1 dx\int_x^1 y\sqrt{1+x^2-y^2}dy$$

$$=-\int_0^1 dx\int_x^1\sqrt{1+x^2-y^2}d(1+x^2-y^2)=-\frac{2}{3}\int_0^1(1+x^2-y^2)^{3/2}\Big|_x^1 dx$$

$$=-\frac{2}{3}\int_0^1(x^3-1)dx=\frac{1}{2}\text{。}$$