§6.5　定积分在几何上的应用

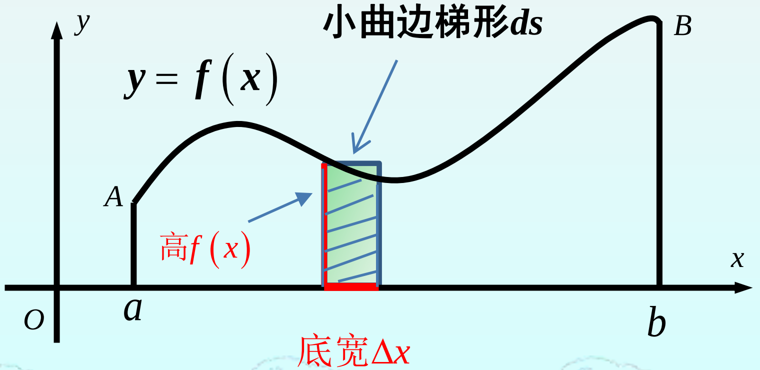
要求：理解微元法的思想，会求平面图形的面积

一、微元法

在定积分实用背景求解时我们知道，通过“分割、求和、取极限”把问题的整体分成许多微小的单元，在一个小单元中以“规则”代替“不规则”来实现问题求解，这种方法称为“微元法”.

由曲线 $y=f(x)>0$，$x=a, x=b$ 及 x 轴围成平面图形面积

$$S=\int_a^b f(x)dx$$



小曲边梯形ds　　小矩形面积

面积元素 $ds \approx dA = f(x)dx$

$$\Rightarrow S=\int_a^b ds=\int_a^b f(x)dx$$

二、平面图形的面积

1. 直角坐标情形

定积分求面积步骤

(1)画图，求交点，选择积分变量

(2)写出面积元素

(3)积分

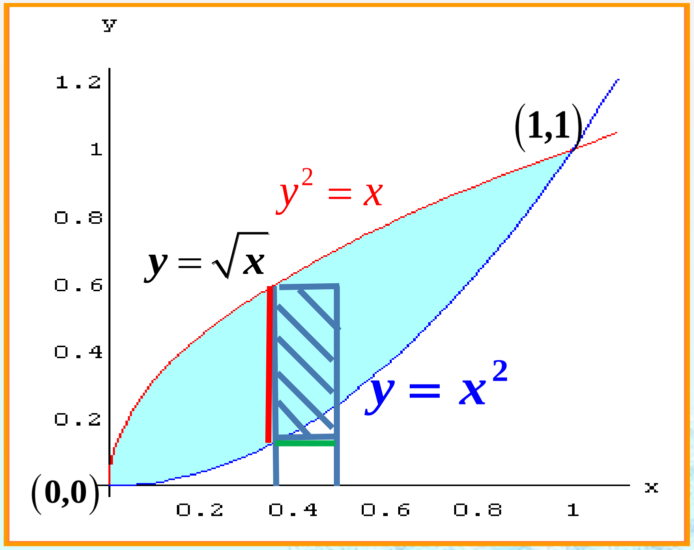
例6. 20　求由抛物线 $y^2 = x$，$y = x^2$围成的平面图形的面积．（$P110$）

解 (1)图形见右，对x积分

(2)面积元素 $dA = \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx$

$$(3)\ S = \int_0^1 dA = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx$$

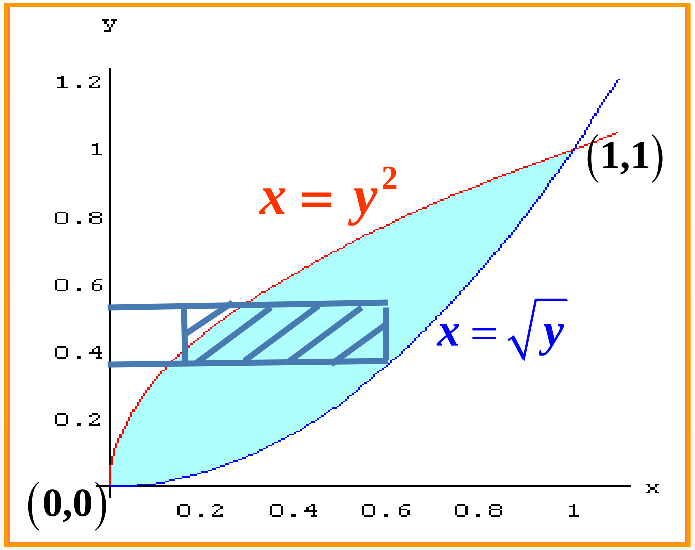
$$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$



解二　选择对y积分，

面积元素$dA=\left(\sqrt{y}-y^2\right)dy$

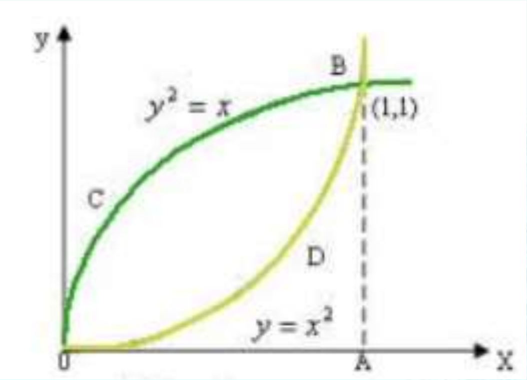
$$S=\int_0^1 dA=\int_0^1\left(\sqrt{y}-y^2\right)dy=\frac{1}{3}$$



解三　由定积分几何意义

$$S=S_{大}-S_{小}=\int_0^1\sqrt{x}dx-\int_0^1 x^2dx=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

绿线围成　　黄线围成



例6.21　求由曲线 $y=\dfrac{1}{x}, y=x, x=3$ 围成平面图形的面积.　(*P*112)

解　(1) 从画出的图形来看，就选择对 x 积分

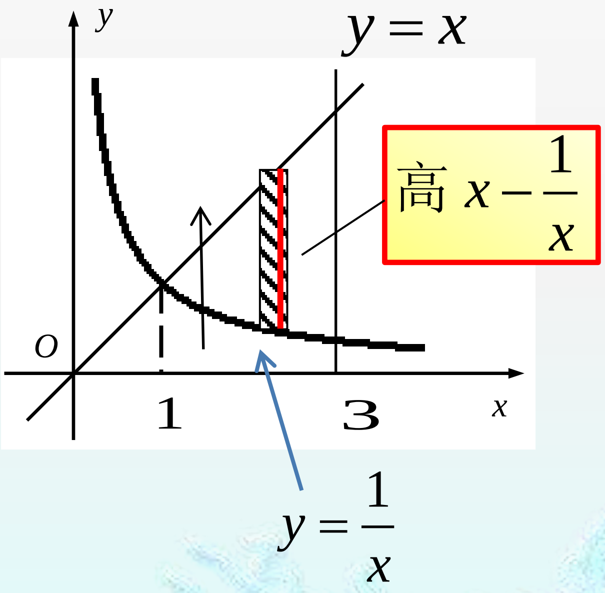
(2) 面积元素　$ds=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)dx$

(3) 积分 $S=\int_1^3 ds=\int_1^3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)dx$

$$=\left(\frac{1}{2}x^2-\ln x\right)\Bigg|_1^3$$

$$=\left(\frac{3^2}{2}-\ln 3\right)-\left(\frac{1}{2}-\ln 1\right)$$

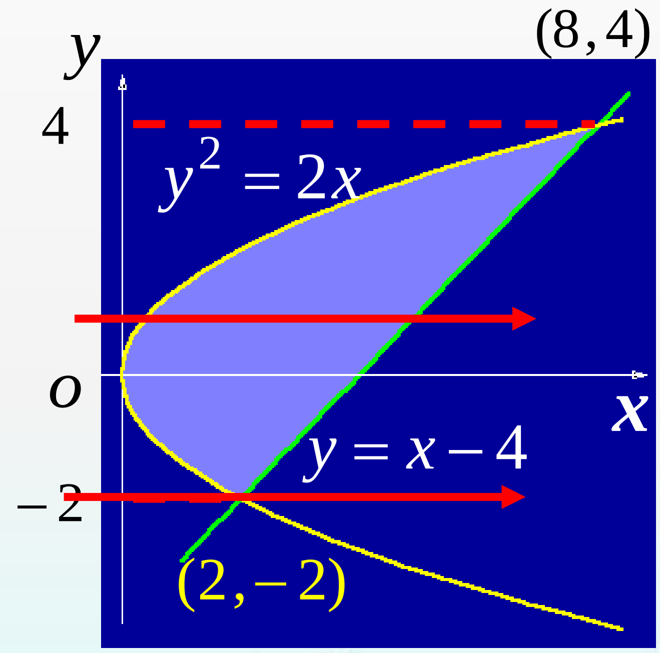
$$=4-\ln 3$$



重点例题，一定要看懂

例6.22 计算抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $y=x-4$ 所围图形的面积. P113 (有难度)

解：由 $\begin{cases} y^2=2x \\ y=x-4 \end{cases}$ 得交点 $(2,-2),(8,4)$



选取 y 作积分变量，且 $y\in[-2,4]$

积分出线 $x=y+4$，积分入线 $x=\dfrac{y^2}{2}$

故被积函数为 $y+4-\dfrac{y^2}{2}$

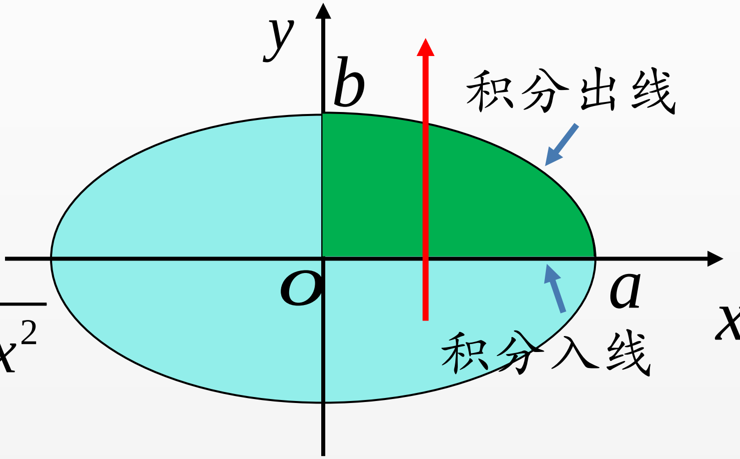
$$S=\int_{-2}^{4}\left(y+4-\frac{y^2}{2}\right)dy$$

$$=\left[\tfrac{1}{2}y^2+4y-\tfrac{1}{6}y^3\right]_{-2}^{4}=18$$

例6. 23求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围图形的面积 .

解　利用对称性，知所求面积是

它在第一象限部分面积的4倍



且椭圆在第一象限的方程为 $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

故被积函数为 $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$,　积分区间为 $x\in[0,a]$

应用定积分求面积为

$$S=4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$ （87页例6.2）

$$=\frac{4b}{a}\cdot\frac{\pi}{4}a^2=\pi ab$$

当 $a=b$ 时得圆面积公式

2.**极坐标情形不介绍，有兴趣的同学可自学**

三、旋转体的体积

只介绍思想，不要求会计算

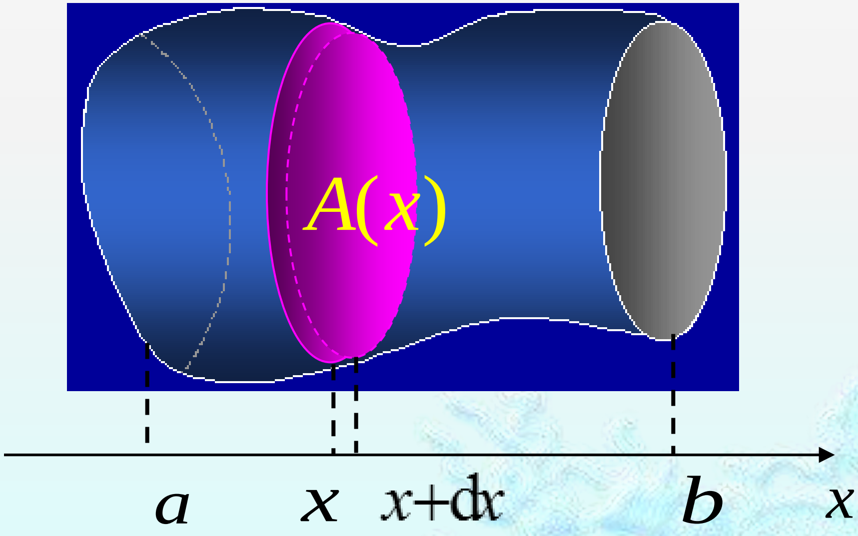
设所给立体垂直于x 轴的截面面积为$A(x)$, $A(x)$在$[a,b]$

上连续, 则对应于小区间 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 的体积元素为

$$\mathrm{d}V = A(x)\,\mathrm{d}\,x$$

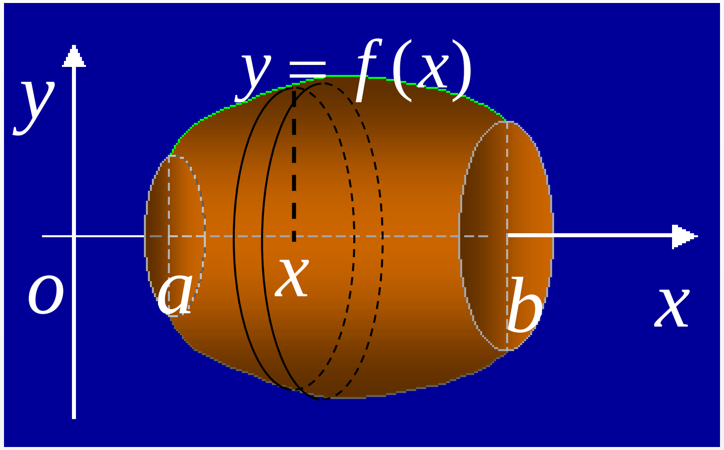
因此所求立体体积为

$$V = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}\,x$$



特别，当考虑连续曲线段 $y = f(x)\ (a \le x \le b)$ 绕 x 轴

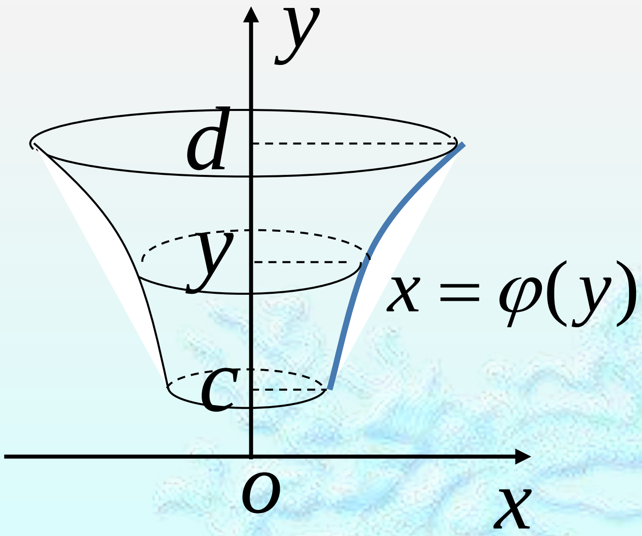
轴旋转一周围成的立体体积时,有



$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 \,\mathrm{d}x$$

当考虑连续曲线段

$$x = \varphi(y)\ (c \le y \le d)$$

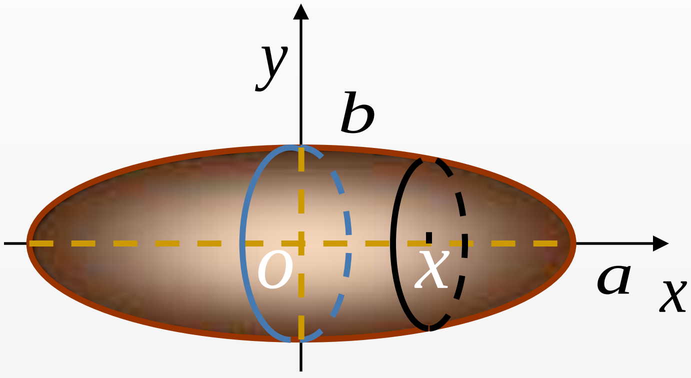


绕 y 轴旋转一周围成的立体体积时,

有

$$V = \int_c^d \pi [\varphi(y)]^2 \,\mathrm{d}y$$

例6.25. 计算由椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围图形绕 x 轴旋转而转而成的椭球体的体积. (P115)



解: 利用直角坐标方程

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\quad(-a\le x\le a)$$

则 $$V=2\int_0^a \pi\, y^2\,\mathrm{d}x$$

(利用对称性)

$$=2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^a (a^2-x^2)\,\mathrm{d}x$$

$$=2\pi\frac{b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

作业：P116

必做：1$(1),(3),(4)$