

二. 极限与连续(二) (6 学时)

1. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$, 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

2. 设 $x_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{16}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^{2^n}}\right)$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

3. 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x)$

4. 设 $f(x) = \begin{cases} x^a \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ b, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 求 a, b 值满足的情况。

5. 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f(x) = 3^x + 1 - \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, 求 $f(x)$

6. 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x^{2n} + 2}$, 求 $f(x)$, 并判断 $f(x)$ 的连续性

7. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[\left(\frac{2 + \cos x}{3} \right)^x - 1 \right]$

8. 求 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - \sqrt{x})(1 - \sqrt[3]{x}) \cdots (1 - \sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$