

# 参考答案

## 高数课堂测试 1

课程老师：刘登生

说明：本次测试满分100分，选择、填空和解答题分别占20分、30分、50分。

该测试成绩占最终期末考试分数的40%，希望各位学生认真、耐心作答！

一、选择题（每道题5分，共20分）

1. 下列选项中，与  $y = \ln x$  为同一个函数的是 (C)

A.  $y = \frac{1}{2} \ln x^2$  B.  $y = \frac{1}{2} \ln^2 x$  C.  $y = \frac{1}{3} \ln x^3$  D.  $y = \frac{1}{3} \ln^3 x$

2.  $x_0$  的去心邻域表示正确的是 (D)

A.  $(x_0 - \delta, x_0)$  B.  $(x_0, x_0 + \delta)$  C.  $U(x_0, \delta)$  D.  $U^{\circ}(x_0, \delta)$

3. 设  $y = \ln(\sqrt{1-x^2})$ ，则该函数定义域为 (B)

A.  $[-1, 1]$  B.  $(-1, 1)$  C.  $(0, 1)$  D.  $(-1, 0)$

4. 下列函数在区间  $[-1, 1]$  为奇函数的是 (C)

A.  $\arccos x$  B.  $\arccot x$  C.  $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$  D.  $\sec x$

二、填空题（每道题6分，共30分）

5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{2x} = \frac{1}{2}$

6.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - n) = 0$

7. 数列  $\left\{ \frac{n-1}{n+1} \right\}$  收敛于  $\frac{1}{2}$

8.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{4}{5} \right)^n + \sqrt[3]{2} \right] = \frac{1}{2}$

9.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$

三、解答题（每道题10分，共50分）

10. 计算极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \left[ \ln \left( 1 + \frac{5}{x} \right) \right]$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left( 1 + \frac{5}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{5}{x}$$

$$= 5$$

11. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \cos x - 1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

12. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{\cos x}}{x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{3}}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{3}}}{x^2} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}(\cos x - 1)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4} \cdot \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{8}$$

13. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x^3 \sin \frac{1}{x}}{\tan x \cdot \sin x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x^3 \sin \frac{1}{x}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + x \sin \frac{1}{x} \right) = 1$$

14. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan e^x + \arctan e^{-x} - \frac{\pi}{2}}{x + \sin x}$

$$\text{解：由于 } (\arctan e^x + \arctan e^{-x})' = \frac{e^x}{1+e^{2x}} - \frac{e^{-x}}{1+e^{2x}}$$

$$= \frac{e^x}{1+e^{2x}} - \frac{e^{-x}}{e^{2x}+1} > 0$$

$$\text{故 } \arctan e^x + \arctan e^{-x} = C$$

$$\text{令 } x=0 \text{ 得 } \arctan 1 + \arctan 1 = C \text{ 故 } C = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \forall x, \text{ 均有 } \arctan e^x + \arctan e^{-x} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{故原极限} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}}{x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x + \sin x} = 0$$

