

重积分练习

1 计算下列二重积分:

① $\iint_D (x^2 + 2\sin x + 3y + 4) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$;

② $\iint_D \sin \frac{\pi x}{2y} d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | y = x, y = 2, y = \sqrt{x}\}$;

③ $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{2-y^2}} e^{x^2+y^2} dx$ 。

2 计算二重积分 $\iint_D |x^2 + y^2 - 1| d\sigma$, $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ 。(硕士研究生入学考试题)

3 计算二重积分 $\iint_D x[yf(x^2 + y^2) - 1] dx dy$, 其中 D 是由 $y = x^3$, $y = 1$, $x = -1$ 所围成的闭区域, $f(u)$ 为连续函数。

4 计算下列三重积分:

① $\iiint_{\Omega} z dv$, 其中 Ω 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$ 被夹在 $z = 3$ 和 $z = 4$ 之间的部分;

② $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dv$, 其中 Ω 由 $z = x^2 + y^2$ 及 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 围成;

③ $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv$, 其中 Ω 由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ 围成;

④ $\iiint_{\Omega} z dv$, 其中 Ω 由 $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 = 4$ 及 $z = 0$ 围成。

5 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z^2 dv$, 其中 Ω 是两球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 和 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz$ ($R > 0$) 的公共部分。