本章基本要求：

1. 熟悉向量的线性运算，点积和叉积运算

2. 熟练掌握点法式写平面方程，熟悉几种特殊平面方程的特点

3. 熟练掌握点向式写直线方程

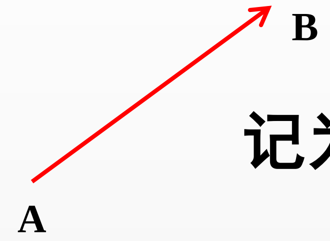
4. 记住五类常用曲面的名称、方程及图形

8.1 空间向量

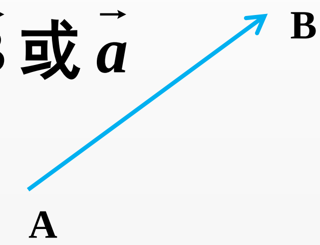
一、向量概念

向量：有大小，方向的量称向量

向量可以平移(大小、方向都没变)



记为 $\overrightarrow{AB}$ 或 $\vec{a}$



常用结论：

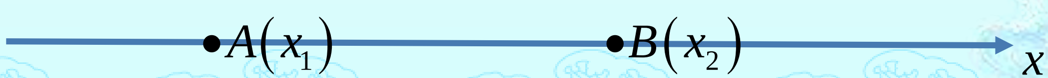
$(1)\vec{a}$ 的模记为 $|\vec{a}|$， $\vec{a}$ 的反向向量记为 $-\vec{a}$；

$(2)\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行(共线)记为 $\vec{a}//\vec{b}$，两非零向量 $\vec{a}//\vec{b} \Leftrightarrow$ 存在常量 k，

使得 $\vec{b}=k\vec{a}$.

与 $\vec{a}$ 共线的单位向量记为 $\overrightarrow{a_0}$，且 $\overrightarrow{a_0}=\pm\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

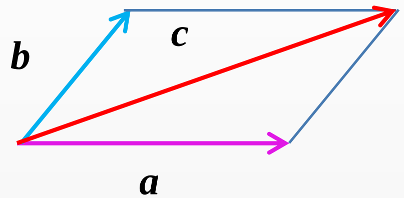
(3)数轴上任意两点的坐标分别为 $A(x_1),B(x_2)$，$\vec{i}$ 为与 x 轴同向的单位向量，则 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1)\vec{i}$.



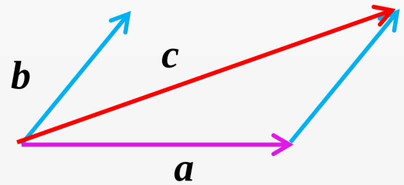
二、向量的线性运算

向量也可用黑体字母**a**表示(手写时上面加箭头, 印刷体不加)

加法 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$



平行四边形法则



三角形法则

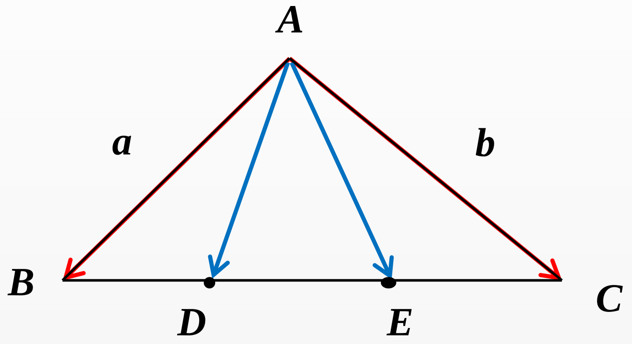
向量的线性运算，满足交换律、结合律和分配律.

(1)交换律: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2)结合律: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ $\quad \lambda\left(k\vec{a}\right)=k(\lambda \boldsymbol{a})=(k\lambda)\boldsymbol{a}$;

(3)分配律: $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda \boldsymbol{a}+\lambda \boldsymbol{b}$ $\quad (\lambda+k)\boldsymbol{a}=\lambda \boldsymbol{a}+k\boldsymbol{a}$.

例8.1(P151) 在ΔABC中，D、E是BC边上的三等分点，设$\overrightarrow{AB}=a$，$\overrightarrow{AC}=b$，请用a、b表示$\overrightarrow{AD}$及$\overrightarrow{AE}$.



解：如图示，易知$\overrightarrow{BC}=b-a$

因D,E是BC的三等分点，则$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{EC}=\frac{1}{3}(b-a)$

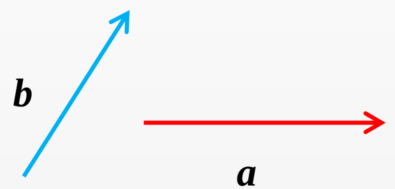
在ΔABD中，有$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=a+\frac{1}{3}(b-a)=\frac{1}{3}(b-2a)$,

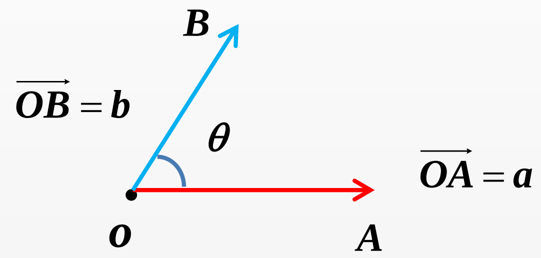
在ΔAEC中，有$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{EC}=b-\frac{1}{3}(b-a)=\frac{1}{3}(2b+a)$.

三、向量在有向直线上的投影

1. 空间中两向量的夹角$\theta\left(0\le\theta\le\pi\right)$

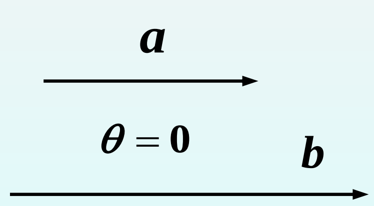
设有两非零向量a,b,

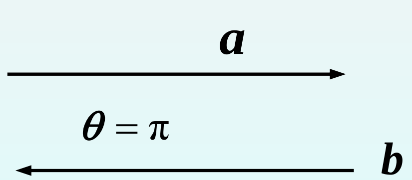




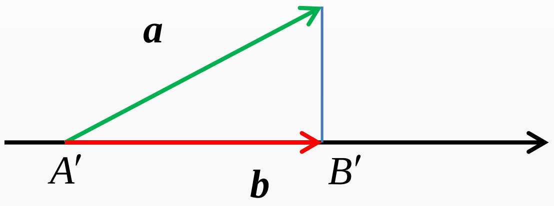
$\angle AOB$称为向量a与b的夹角，记为θ，规定$0\le\theta\le\pi$.

特别地，当 $a/\!/b$ 时，$\theta=0$或$\theta=\pi$





2. $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影



$\overrightarrow{A'B'}$称为向量$\boldsymbol{a}$在向量$\boldsymbol{b}$上的投影

$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影记为$(\boldsymbol{a})_{\boldsymbol{b}}$，且$(\boldsymbol{a})_{\boldsymbol{b}}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta$

其中θ为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影$(\boldsymbol{a})_{\boldsymbol{b}}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta$是数量.

在直角三角形中看它们的关系很容易理解

作业：$P152$

写在草稿纸上 2. 3

8.2 空间直角坐标系及向量的坐标表达

一、空间直角坐标系

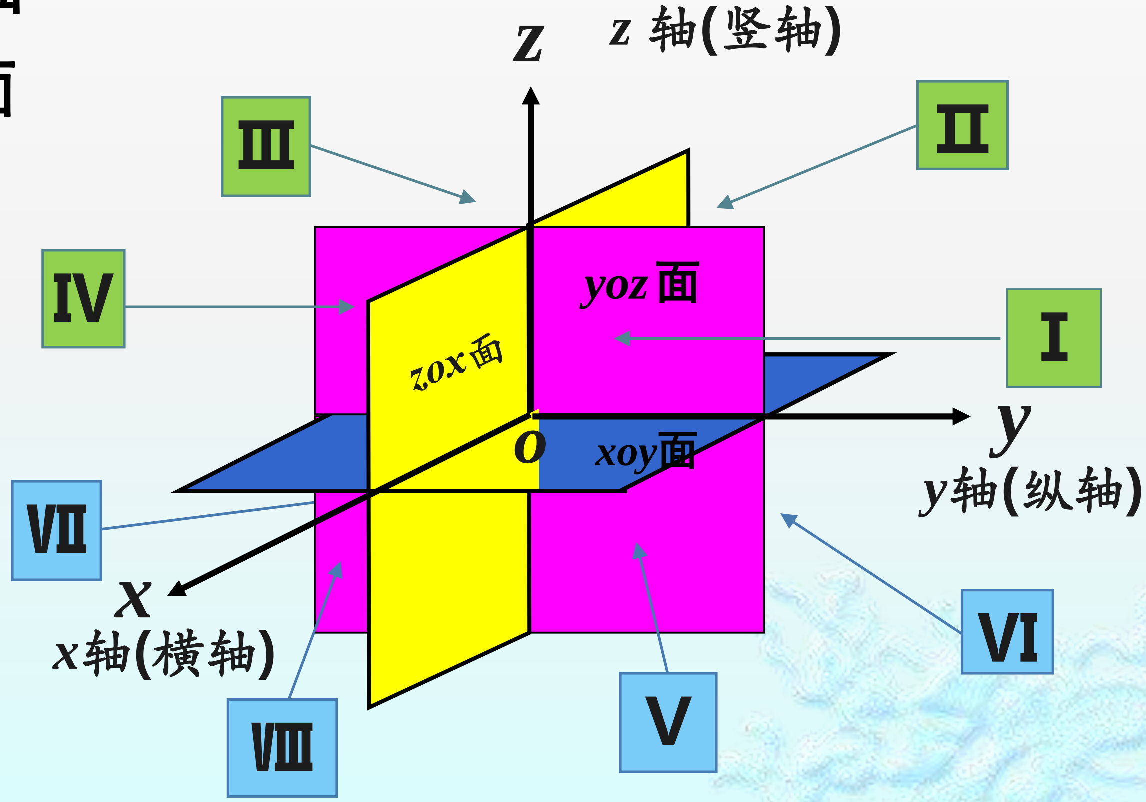
将中学学过的平面解析几何知识扩展到空间

空间一**点** —— 坐标原点

空间直**线** —— 坐标轴

空间平**面** —— 坐标面

三个坐标面把空间分成八个卦限



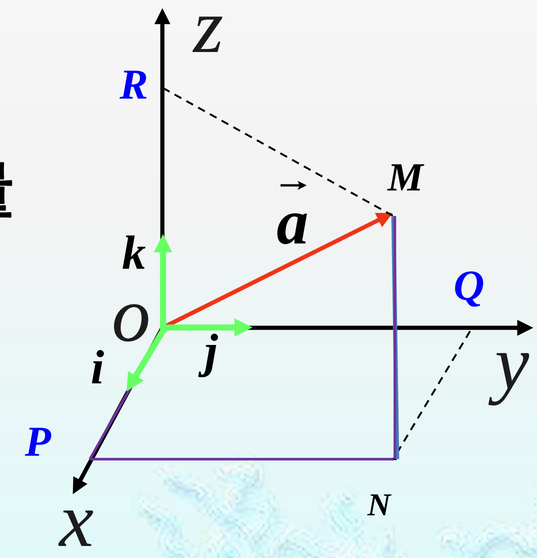
二、向量的分解式与坐标表达式

设a是空间任一向量，记起点为O，终点为M，$a=\overrightarrow{OM}$

以起点O为原点建立空间直角坐标系，记点M在三个坐标轴上的投影分别为P, Q, R, $a=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$.

$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$，$\overrightarrow{OR}$是a在三个坐标轴上的投影

也叫a的分向量



令 i, j, k 分别为沿 x, y, z 轴正向的单位向量

如果a在三个坐标轴上的投影分别为a_x, a_y, a_z

$\overrightarrow{OP}=a_x i$，$\overrightarrow{OQ}=a_y j$，$\overrightarrow{OR}=a_z k$,

它将向量的大小和方向分别表示(很重要)

$$a=a_x i+a_y j+a_z k$$

称向量a的分解式

$$a=\left(a_x, a_y, a_z\right)$$

称向量a的坐标表达式

有向量的坐标表达式，我们表示、计算向量就简单多了

例如：$i=(1,0,0)$，$j=(0,1,0)$，$k=(0,0,1)$

设 $a=a_x i+a_y j+a_z k=(a_x,a_y,a_z)$，$b=b_x i+b_y j+b_z k=(b_x,b_y,b_z)$，

(1)向量 a 的模 $|a|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$;

(2) $a+b=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z)$ $\quad a-b=(a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z)$

(3) $\lambda a=\lambda(a_x,a_y,a_z)=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$;

(4) 与 a 共线的单位向量 $a_0=\pm\dfrac{a}{|a|}=\pm\dfrac{(a_x,a_y,a_z)}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$;

(5)若两非零向量 $a//b$，则存在 $k\neq 0$，使得 $b=ka$，

即 $\dfrac{b_x}{a_x}=\dfrac{b_y}{a_y}=\dfrac{b_z}{a_z}$，反之亦然.

例1 设$a=(2,-3,5)$，$b=(-4,2,1)$，求$2a+5b$及$|a|$.

例2 求与$a=\left(-3,1,-\sqrt{6}\right)$反方向的单位向量.

解 由公式 $a_0=\pm\frac{a}{|a|}$，反方向取负号

$$|a|=\sqrt{(-3)^2+1^2+\left(-\sqrt{6}\right)^2}=\sqrt{9+1+6}=4$$

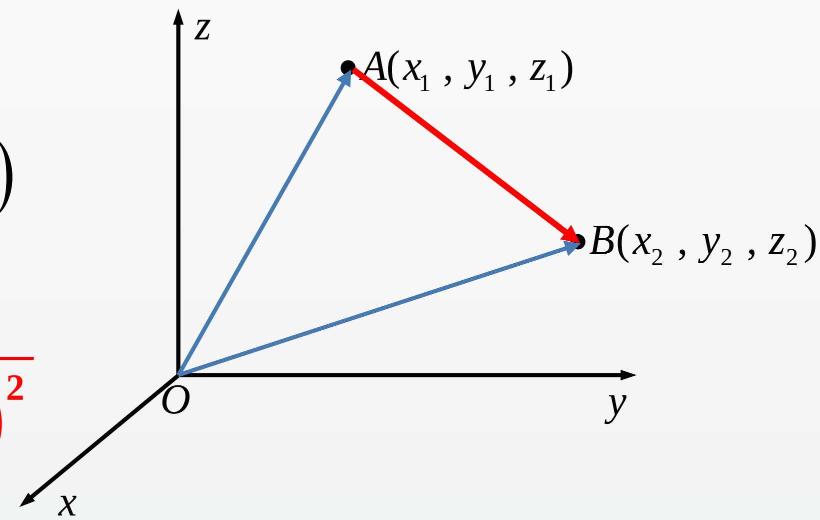
$$a_0=-\frac{a}{|a|}=-\frac{\left(-3,1,-\sqrt{6}\right)}{4}=\left(\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{-1}{4},\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$$

三、空间中两点间距离公式

已知空间中两点的坐标分别为$A(x_1,y_1,z_1)$,$B(x_2,y_2,z_2)$,

$\overrightarrow{OA}=(x_1,y_1,z_1)$, $\overrightarrow{OB}=(x_2,y_2,z_2)$,

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$



故，A,B两点间的距离为

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

空间中任意两点A,B构成向量$\overrightarrow{AB}$,它的坐标表示法是终点坐标减起点坐标.

例如：$A(3,0,1)$, $B(-2,1,4)$, $\overrightarrow{AB}=(-2-3,1-0,4-1)=(-5,1,3)$

书中其他的内容自学

作业：$P152$

写在草稿纸上 2, 3

作业：$P156$

写在草稿纸上 1, 2, 3

必做：5, 6