§6.3 定积分的换元积分法和分部积分法

要求：学会定积分的换元变限方法

一、定积分的换元积分法

在计算不定积分时，有时需要做变量代换，

例如$\int \cos^3 x \sin x dx = -\int \cos^3 x d\cos x = -\int t^3 dt$，但若是计算定积分

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin x \, dx = -\int_?^? t^3 dt$， 这就有一个变换积分限的问题.

通过具体例子来学习这一问题

例6. 9 $(1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin x \, dx \quad (P102)$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \, d\cos x \qquad = -[\frac{1}{4}\cos^4 x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}$$

这是简单方法，不换元，求出原函数，计算上、下限函数值之差.

例6.9 (2) $\int_1^5 \frac{x-1}{1+\sqrt{2x-1}}dx$

解 令$t=\sqrt{2x-1}$, $x=\frac{t^2+1}{2}$, $dx=tdt$,

下限：$x=1, t=1$; 上限：$x=5, t=3$;

所以，$\int_1^5 \frac{x-1}{1+\sqrt{2x-1}}dx = \int_1^3 \frac{\frac{t^2+1}{2}-1}{1+t}t\,dt = \frac{1}{2}\int_1^3 (t-1)t\,dt$

$= \frac{1}{2}\int_1^3 (t^2-t)dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2\right]_1^3 = \frac{7}{3}$

这题一般情况采用换元变限的方法，不要还原

例6.9 (4) $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x\ (a > 0)$

由定积分几何意义知，答案是$\frac{1}{4}\pi a^2$

解 令$x = a\sin t$　　积分变量：$dx = d(a\sin t) = a\cos t dt$

被积函数：$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} = a\sqrt{\cos^2 t} = a|\cos t|$

变限：$x = 0$, $0 = a\sin t$, 算出$t = 0$; $x = a$, $a = a\sin t$, 算出$t = \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a|\cos t| a\cos t dt = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{4}a^2$$

$t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $|\cos t| = \cos t$

例6.11 设 $f(x)$为对称区间$[-a,a]$$(a>0)$上的连续函数，则

(1)当 $f(x)$是奇函数时，$\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$;

(2)当 $f(x)$是偶函数时，$\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

证明：根据积分的可加性，$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx$

看第一个积分 $\int_{-a}^{0} f(x)dx$，令$x=-t$，

则$\int_{-a}^{0} f(x)dx=\int_{a}^{0} f(-t)d(-t)=\int_{0}^{a} f(-t)dt$

(1) 当 $f(x)$在$[-a,a]$上是奇函数时，$f(-t)=-f(t)$,则

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx=\int_{0}^{a} f(-t)dt+\int_{0}^{a} f(x)dx$$

$$=-\int_{0}^{a} f(t)dt+\int_{0}^{a} f(x)dx=0$$

(2) 当 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上是偶函数时，$f(-t)=f(t)$,则

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx=\int_{0}^{a} f(-t)dt+\int_{0}^{a} f(x)dx$$

$$=\int_{0}^{a} f(t)dt+\int_{0}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

例如: (1) $\int_{-1}^{1} \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx=0$ 　**因为 $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ 是奇函数 (P4)**

(2) $\int_{-3}^{3}\left|1+x^2\right|dx=2\int_{0}^{3}\left(1+x^2\right)dx=2[x+\frac{1}{3}x^3]_0^3=2(3+9)=24$

利用上面的结论，简化计算. 不用去绝对值，积分下限为零，函数值好计算.

二、定积分的分部积分法　（P104）

不定积分的分部积分公式 $\int udv = uv - \int vdu$

相应的有定积分的分部积分公式：$\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu$

例6. 12　(1) $\int_0^1 \arctan x\,\mathrm{d}x$　($P104$)

$$= [x \cdot \arctan x]_0^1 - \int_0^1 xd(\arctan x)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}d(1+x^2)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\ln|1+x^2|)_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$$

一般先求原函数，最后计算函数值，这样不易出错.

例6.13 $\int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

解法一 直接计算定积分

令 $t=\sqrt{x}, x=t^2, dx=2tdt$，且 $t\in[0,1]$

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 e^t t dt = 2\int_0^1 t de^t = 2\left[\left(te^t\right)_0^1 - \int_0^1 e^t dt\right]$$

$$=2\left[(e-0)-e^1\Big|_0^1\right]=2\left[e-(e-1)\right]=2$$

解法二 先求不定积分　令 $t=\sqrt{x}, x=t^2, dx=2tdt$，

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = 2\int te^t dt = 2\left[te^t - \int e^t dt\right] = 2\left(te^t - e^t\right)+c = 2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)+c$$

所以 $\int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)\Big|_0^1 = 2$

补充内容 利用定积分的分部积分法可以推出一个重要公式

记 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \left(= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx\right) = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n\text{为偶数} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1, & n\text{为奇数} \end{cases}$$

记住公式，以后遇到这样的积分可直接写出积分结果.

例如：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1$　　$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x dx = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$

练习：计算$(1)\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx$　　$(2)\int_{-\pi}^{\pi}\sin^5 3x\cos^4 6xdx$

积分都为零

作业：　$\mathbf{P}104$

必做　$1\ (1),(3),(7),(10),$

$2(3)$

$5\ (1)$