§3.2 函数的求导法则

要求：牢记导数运算法则，熟练掌握复合函数求导运算

一、导数运算法则

定理3.1 设函数$u(x),v(x)$在x处均可导，则它们的和、差、积、商也在x处可导，且

$$(1)\ (u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(2)\ (u \cdot v)' = u'v + uv'$$

特别地，当k是常量时，$(ku)' = k \cdot u'$

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$$

$$(3)\ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

证明(2) 记$y=u(x)v(x)$,则

提示：

$\Delta u=u(x+\Delta x)-u(x)$

$\Rightarrow u(x+\Delta x)=u+\Delta u$

$\Delta v=v(x+\Delta x)-v(x)$

$\Rightarrow v(x+\Delta x)=v+\Delta v$

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)$$

$$=(u+\Delta u)(v+\Delta v)-uv=v\cdot\Delta u+u\cdot\Delta v+\Delta u\Delta v$$

于是$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{v\cdot\Delta u+u\cdot\Delta v+\Delta u\Delta v}{\Delta x}=\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v+\dfrac{\Delta v}{\Delta x}\cdot u+\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\Delta v$

根据导数的定义

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v+\lim_{\Delta x\to 0}u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v$$

$$=v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v$$

$$=u'\cdot v+u\cdot v'+u'\cdot 0$$

因为$u(x),v(x)$均为可导函数，

所以$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}=u'$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}=v'$;

同时，由可导必连续可知$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v=0$

所以，$(uv)'=u'v+uv'$

例3.5　求下列函数的导数（P43）

$$(1)\ y = x^4 + 2\ln x - \arctan 3$$

解　$y' = \left(x^4 + 2\ln x - \arctan 3\right)' = \left(x^4\right)' + 2\left(\ln x\right)' - \left(\arctan 3\right)'$

$$= 4x^3 + \frac{2}{x} - 0$$

$$\left(u \pm v\right)' = u' \pm v'$$

$$(2)\ y = e^x\left(\sin x + \cos x\right)$$

$$\left(u \cdot v\right)' = u'v + uv'$$

解　$y' = [e^x\left(\sin x + \cos x\right)]'$

$$= \left(e^x\right)'\left(\sin x + \cos x\right) + e^x\left(\sin x + \cos x\right)'$$

$$= e^x\left(\sin x + \cos x\right) + e^x\left(\cos x - \sin x\right)$$

$$= 2e^x \cos x$$

$$(3)\ y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\quad (v\neq 0)$$

解 $$y'=\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)'=\frac{\left(x^2-1\right)'\left(x^2+1\right)-\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$(4)\ y=\frac{x^3-2x^2\sqrt{x}+x-5}{x^2}$$

本题看起来是用商的导数公式，但不是最好的解法.

先化简，后求导

解 化简 $y=x-2x^{\frac{1}{2}}+x^{-1}-5x^{-2}$ 用公式 $\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha x^{\alpha-1}$

$$y'=\left(x-2x^{\frac{1}{2}}+x^{-1}-5x^{-2}\right)'=1-\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}+\frac{10}{x^3}$$

练习：计算下列函数的导数：

$$(1)\ y = x^6 + 3\ln x - \sin\frac{\pi}{2}$$

解 $y' = 6x^5 + \dfrac{3}{x}$ 用法则：$(u \pm v)' = u' \pm v'$ 注意 $\left(\sin\dfrac{\pi}{2}\right)' = 0$

$$(2)\ y = e^x \cos x$$

解 $y' = \left(e^x\right)' \cos x + e^x \left(\cos x\right)'$ 用法则：$(u \cdot v)' = u'v + uv'$

$$= e^x \cos x - e^x \sin x$$

$(3)\ y=\dfrac{2x^3-5}{x^2+1}$ 用法则: $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}\quad (v\neq 0)$

$$y'=\left[\frac{2x^3-5}{x^2+1}\right]'=\frac{(2x^3-5)'\left(x^2+1\right)-\left(2x^3-5\right)\left(x^2+1\right)'}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{6x^2\left(x^2+1\right)-\left(2x^3-5\right)2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x\left(x^3+3x+5\right)}{(x^2+1)^2}$$

$(4)\ y=\dfrac{x^3-2x^2\sqrt{x}+x-3}{x^2}$ 先整理 $y=x-2x^{\frac{1}{2}}+x^{-1}-3x^{-2}$

再求导 $y'=1-x^{-\frac{1}{2}}-x^{-2}+6x^{-3}=1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x^2}+6\dfrac{1}{x^3}$

求导过程中注意:先化简后求导或求完导数后整理

例3.6 设 $f(x)=\dfrac{\cos x}{e^x}-3(1+x^2)\arctan x$，求 $f'(0)$　（P43）

这类题的求解方法是：先求导函数 $f'(x)$, 再算导函数值 $f'(x_0)$

解　$f'(x)=\left[\dfrac{\cos x}{e^x}\right]'-\left[3(1+x^2)\arctan x\right]'$

$$=\frac{(-\sin x)e^x-\cos x\cdot e^x}{(e^x)^2}-[6x\arctan x+3(1+x^2)\cdot\frac{1}{1+x^2}]$$

$$=-\frac{\sin x+\cos x}{e^x}-6x\arctan x-3$$

所以　$f'(0)=-\dfrac{1}{e^0}-3=-4$

理解记号：$f'(x_0)=f'(x)\big|_{x=x_0}$

课堂练习

求下列函数的导数

$$(1)\ y = x^3 - 2x^2 + x - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}$$

$$(2)\ y = \sin x \cos x$$

$$(3)\ y = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$(4)\ y = \frac{x^2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 2}{x^2}$$

二 复合函数求导法则

定理3.2 设函数$u=\varphi(x)$在x处可导，函数$y=f(u)$在对应的u点处可导，则复合函数$y=f[\varphi(x)]$也在x处可导，且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \quad \text{或} \quad y_x'=y_u'\cdot u_x'$$

此定理可以理解为：

因为复合函数$y=f[\varphi(x)]$由两简单函数$y=f(u)$及$u=\varphi(x)$复合而成，所以$y'=f'(u)\cdot\varphi'(x)$或 $y_x'=y_u'\cdot u_x'$

证明 由$y=f(u)$可导即$f'(u)=\lim\limits_{\Delta u\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta u}$得$\Delta y=f'(u)\cdot\Delta u+\Delta u\alpha$

$\left(\alpha\text{是当}\Delta x\to 0\text{时的无穷小量}\right)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f'(u)\Delta u+\Delta u\alpha}{\Delta x}=f'(u)\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\alpha$$

极限与无穷小量的关系

$$f'(u)=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)+\alpha$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f'(u)\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\alpha$$

$$=f'(u)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+u'(x)\cdot 0=f'(u)u'(x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

故 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ 或 $y_x'=y_u'\cdot u_x'$

$f(u)$必须是基本初等函数

求导要点：$y=f[\varphi(x)]\xrightarrow[\text{及}u=\varphi(x)\text{构成}]{\text{由}y=f(u)}y'=f'(u)\cdot\varphi'(x)$

例3.7　求下列函数的导数（P44）

$(1)\ y=\sin 2x$　　　　$(2)\ y=e^{x^3+2x-3}$

解(1)　因为$y=\sin 2x$由$y=\sin u,\ u=2x$复合而成

根据公式　$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ 或 $y_x'=y_u'\cdot u_x'$

$$y'=(\sin 2x)'=(\sin u)_u'\cdot u_x' =\cos u\cdot 2=2\cos 2x$$

解(2)　先把函数的复合关系弄清楚

$$y=e^u,\ u=x^3+2x-3$$

$$y'=\left(e^u\right)_u'\cdot u_x'=e^u\cdot\left(x^3+2x-3\right)_x' =\left(3x^2+2\right)e^{x^3+2x-3}$$

当我们对复合函数求导运算很熟练后，可以不写中间变量

$$y'=\left(e^{x^3+2x-3}\right)'=e^{x^3+2x-3}\cdot\left(x^3+2x-3\right)'=\left(3x^2+2\right)e^{x^3+2x-3}$$

$(3)\ y=\ln\cos x$

解　$y'=(\ln\cos x)'=\dfrac{1}{\cos x}(\cos x)'=-\dfrac{\sin x}{\cos x}=-\tan x$

$(4)\ y=\sqrt[3]{1-3x^2}$

解　先整理 $y=(1-3x^2)^{\frac{1}{3}}$　用公式$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$求导

$$y'=\frac{1}{3}(1-3x^2)^{\frac{1}{3}-1}\cdot(1-3x^2)'$$

$$=\frac{1}{3}(1-3x^2)^{-\frac{2}{3}}\cdot(-6x)=-2x(1-3x^5)^{-\frac{2}{3}}$$

补充例题 求下列函数的导数：

$(1)\ y=\left(3x^2+2\right)^3$

解 $y'=3\left(3x^2+2\right)^2\left(3x^2+2\right)'$

用复合函数求导法则 $y'_x=y'_u\cdot u'_x$ 及公式 $\left(x^\alpha\right)'=\alpha x^{\alpha-1}$

$=3\left(3x^2+2\right)^2\left(6x+0\right)$

用求导法则 $\left(u+v\right)'=u'+v'$ 及公式 $\left(x^\alpha\right)'=\alpha x^{\alpha-1}$

$=18x\left(3x^2+2\right)^2$

$(2)\ y=e^{-x}$

解 $y'=(e^{-x})'=e^{-x}(-x)'=-e^{-x}$

注意：$-x$也是复合函数

$(3)\ y = e^{\tan x}$

解 函数的复合过程为 $y = e^{u}, u = \tan x$

利用复合函数求导法则，有

$$y' = (e^{u})' \cdot u' = e^{u} \cdot (\tan x)' = (\sec^2 x) e^{\tan x}$$

公式:$(e^{x})' = e^{x}$

公式:$(\tan x)' = \sec^2 x$

当我们熟悉法则后，可以不写出中间变量

$$y' = (e^{\tan x})' = e^{\tan x} \cdot (\tan x)' = (\sec^2 x) e^{\tan x}$$

记住复合函数求导法则：由外向内，逐层求导.

想想：若 $y = e^{\tan \frac{1}{x}}$，$y' = ?$

例3.8 求下列函数的导数：（P45）

$$(1)\ y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$

解 $$y'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left[x+\sqrt{1+x^2}\right]'$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left(1+x^2\right)'\right]\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

希望记住这个导数结果，求导过程在黑板上详细推导

$(2)\ y=\sin^2(\cos 2x)$

解 $y'=[\sin^2(\cos 2x)]'$

公式:$\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha\left(x^{\alpha-1}\right)$

$=2[\sin(\cos 2x)]^{2-1}\cdot[\sin(\cos 2x)]'$

公式:$(\sin x)'=\cos x$

$=2[\sin(\cos 2x)]\cdot\cos(\cos 2x)\cdot(\cos 2x)'$

公式:$(\cos x)'=-\sin x$

$=2[\sin(\cos 2x)]\cdot\cos(\cos 2x)\cdot(-\sin 2x)(2x)'$

$=-2\sin(2\cos 2x)\sin 2x$

补充例题(难题选讲) 设 $f(x)$可导，求下列函数的导数：

$(1)\ y = f(\sin x)$，$(2)\ y = \sin f(x)$

解 这是带抽象函数求导问题，对 f 求导要记“f'”

$$(1)\ y' = [f(\sin x)]' = f'(\sin x)\cdot(\sin x)' = \cos x \cdot f'(\sin x)$$

$$(2)\ y' = [\sin f(x)]' = \cos f(x)\cdot f'(x)$$

认真对比这两例题，能较好地理解复合函数求导过程：

由外向内，逐层求导.

例3.9　设 $y=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x$，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{1}{2}}$ $(P45)$

这是一个求导函数值的例题，看这个例题要注意几点：

(1)计算顺序，先求$f'(x)$，再算$f'\left(\dfrac{1}{2}\right)$

(2)进一步理解记号：$f'(x_0)$与$[f(x_0)]'$

$f'(x_0)=\left.[f(x)]'\right|_{x=x_0}$即先求导函数，再算导函数值；

$[f(x_0)]'$是先算函数值，后求导，所以$[f(x_0)]'=0$

具体计算自己完成

课堂练习

求下列复合函数的导数

$$(1)\ y=\sqrt[3]{x^3-x+2}$$

$$(2)\ y=e^{x^3}\cos 2x$$

$$(3)\ y=\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)$$

$$(4)\ y=\left(1+e^x\right)^3$$

三、反函数求导

只要求记住四个反三角函数求导公式

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1 \qquad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1 \qquad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

小结：

1.导数的运算法则：

$$(1)(u \pm v)' = u' \pm v', \qquad (2)(uv)' = u'v + uv',$$

$$(3)\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, 其中 v \neq 0$$

$y = f(u)$及$u = \varphi(x)$必须是基本初等函数

2.复合函数求导法：

求导要点：$y = f[\varphi(x)] \xrightarrow[\text{及}u=\varphi(x)\text{构成}]{\text{由}y=f(u)} y' = f'(u) \cdot \varphi'(x)$

只要是复合函数，就必引入u，只要引入u，就必乘以u'.

作业　**P45～46**

写在作业本上

$\mathbf{1}\ (3),(4),(6),(9)$

$\mathbf{3}\ (1),(5),(9),(17)$

$5\ (1),(2)$