§2.5 函数的连续性

要求：理解函数连续概念，了解连续函数的有关结论

一、连续函数的有关概念

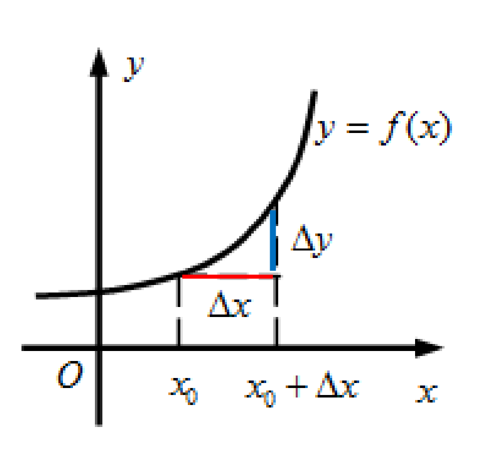
(1)增量的概念：

设函数 $y=f(x)$ 定义在 x_0 的某个邻域内，当自变量从 x_0 变化到 x 时，相应地有如下增量

自变量的增量：$\Delta x = x - x_0$，

函数值的增量：$\Delta y = f(x) - f(x_0)$

或 $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$



注意：增量可正可负

(2)函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处连续的定义1：

设函数 $y=f(x)$ 定义在 x_0 的某个邻域内，若

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

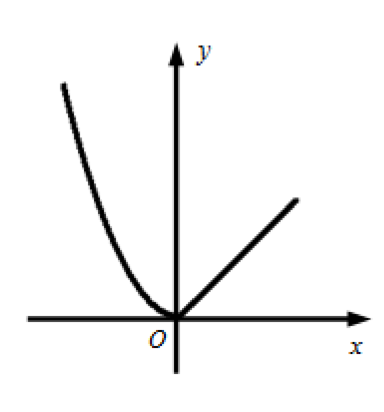
则称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处连续(图形在 x_0 处连接不断).

(3)函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处连续的定义2:

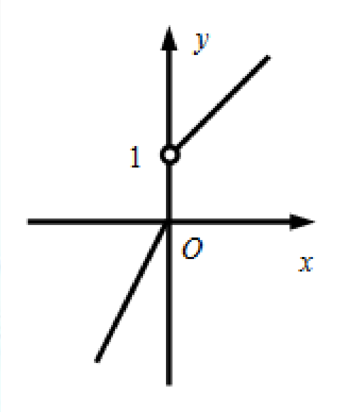
设函数 $y=f(x)$ 定义在 x_0 的某个邻域内，若

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0,$$

则称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处连续.



连续



在 $x=0$ 处不连续

我们学了连续的两个定义：

由定义1：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Rightarrow \lim\limits_{x-x_0\to 0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=0$

$\Delta x=x-x_0 \quad \Delta y=f(x)-f(x_0)$

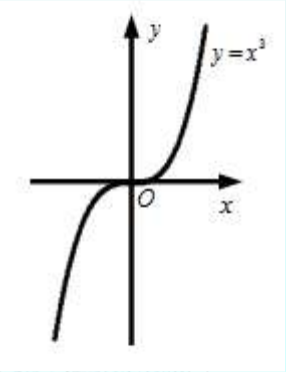
得定义2：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ 两个定义各有用处

(4)若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$，则称 $y=f(x)$ 在 x_0 处左连续；

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处右连续.

(5)若函数在 (a,b) 内每一个点都连续，则称函数 $y=f(x)$

在 (a,b) 内连续.



在定义域内处处连续

函数在闭区间$[a,b]$上连续是指：函数在开区间(a,b)内连续，且在a点右连续，在b点左连续.

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a) \qquad \lim_{x\to b^-} f(x)=f(b)$$

有结论：函数$y=f(x)$在x_0处连续的充分必要条件是函数在x_0处左连续且右连续，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$$

函数的不连续点称为函数的间断点.

如：$y=\dfrac{\sin x}{x}$，当$x=0$时函数无定义，所以$x=0$是间断点.

间断点最常见的是：分母为零，函数在此处无定义

例1 求函数 $f(x)=\dfrac{x-4}{x^2-3x-4}$ 的连续区间及间断点.

解 从 $f(x)=\dfrac{x-4}{x^2-3x-4}=\dfrac{x-4}{(x-4)(x+1)}$ 可以看出，

当 $x=4$ 及 $x=-1$ 时，函数没有意义，

故 $x=4$ 及 $x=-1$ 是函数的间断点；

除此两点外，都有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ 成立，

故函数的连续区间为 $(-\infty,-1)\cup(-1,4)\cup(4,+\infty)$.

重要结论：一切初等函数在其定义区间内都连续

我们可以用函数的连续性求极限

对数性质：$a\ln b = \ln b^{a}$

例2.16 求下列函数的极限 (P33)

$$(1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x) = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}]$$

$$= \ln e = 1$$

(见教材P33，性质2.12)

顺便得到结论：当$x\to 0$时，$\ln(1+x)\sim x$

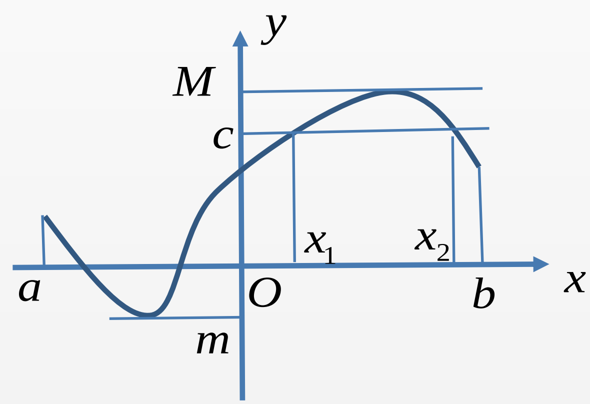
补充例题：$\lim\limits_{x\to 0}\cos x$

因为函数$\cos x$在定义域内连续， $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = f(0) = \cos 0 = 1$

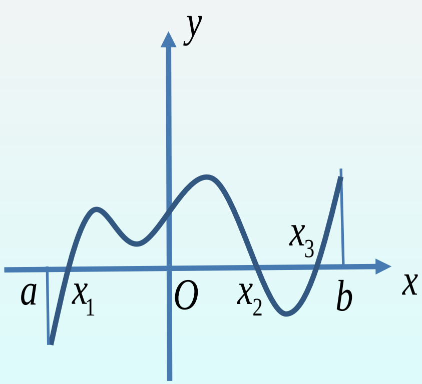
二、闭区间上连续函数的性质

定理2.7（有界性与最大最小值定理） (P33) 在闭区间上连续的函数在该区间上有界且必能取得最大和最小值.

定理2.8（介值定理） 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $m \le f(x) \le M$，若 $m \le c \le M$，则在 (a,b) 内至少有一点 x_0，使得 $f(x_0)=c$.



图中 $f(x_1)=c,\ f(x_2)=c$



图中 $f(x_1)=0,\ f(x_2)=0,\ f(x_3)=0$

定理2.9（零点定理） 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则至少有一个点 $x_0 \in (a,b)$，使得

$$f(x_0)=0.$$

习题2.5　P34

必做　1. (1) (2)