练习题A（基本题）

1. 设D是由$x=0$，$y=0$，$x+y=\frac{1}{10}$，$x+y=1$围成的平面区域，

$I_1=\iint\limits_D \sin(x+y)d\sigma$，$I_2=\iint\limits_D (x+y)d\sigma$，$I_3=\iint\limits_D \ln(x+y)d\sigma$试比较三个积分的大小。

2. 设$D_1=\{(x,y)|-1\le x\le 1,0\le y\le 1\}$，$D_2=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$，试说明

$I_1=\iint\limits_{D_1}(\sin x\cos y+x^2)d\sigma$与$I_2=\iint\limits_{D_2}x^2d\sigma$的关系。

3. 估计下列积分值

①$I=\iint\limits_D x(x+y)d\sigma \quad D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 2\}$

②$I=\iint\limits_D (2x^2+y^2+2)d\sigma \quad D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 3\}$

③$I=\iint\limits_D e^{x^2+y^2}d\sigma \quad D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$

④$I=\iint\limits_D \sin^2 x\sin^2 y d\sigma \quad D=\{(x,y)|-\pi\le x\le 0,0\le y\le \pi\}$

4. 计算 $I=\iint\limits_D (xy^2+\sin x\sin y)d\sigma$，其中$D$是由$y=x^2$，$y=1$围成的平面区域。(积分区间的对称性)

5. 改变下列二重积分的积分次序：

① $\int_0^1 dy\int_0^y f(x,y)dx$； ② $\int_0^a dx\int_{a-x}^{\sqrt{a^2x^2}} f(x,y)dy$

③$\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy$ ； ④ $\int_0^1 dy\int_0^{2y} f(x,y)dx+\int_1^3 dy\int_0^{3-y} f(x,y)dx$。

6. 为修建高速公路，要在一个山坡中开辟出一条长500m、宽20m的通道。据测量，以出发点一侧为原点，往另一侧方向x轴$(0\le x\le 20)$，往公路延伸方向为y轴$(0\le y\le 500)$，且山坡的高度为

$$z=10\sin\frac{\pi}{500}y+\sin\frac{\pi}{20}x,$$

计算所需挖掉的土方量。

7. 选择适当的坐标将二重积分$I=\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$化为二次积分，其中积分区域$D$分别为：

① 由$|x|+|y|\le 1$所围成的区域；

② 由$x^2+y^2\le 2x$所围成的区域；

③ 由$y=\frac{1}{x}$，$y=x$，$x=2$所围成的区域；

④ 由$y=x^2,y=\sqrt{x}$所围成的区域；

⑤ 由$\pi\le x^2+y^2\le 2\pi$所围成的区域；

⑥ 由 $y=x^2$， $y=x+2$ 所围成的区域；

⑦ 由 $y=e^x$， $y=e^{-x}$， $y=e$ 所围成的区域；

8. 利用极坐标计算下列各题：

① $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy$，其中 D 是由圆 $x^2+y^2=4$ 所围成的闭区域；

② $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中 D 是由圆 $x^2+y^2=\pi^2$， $x^2+y^2=4\pi^2$， $y=x$ 和 $y=0$ 所围成的闭区域；

③ $\iint\limits_D xdxdy$，其中 D 是由圆 $x^2+y^2\le ax\ (a>0)$ 所围成的闭区域。

9. 选择适当的坐标计算二重下列积分：

① $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中 D 是由圆环 $a^2\le x^2+y^2\le b^2$ 所围成的闭区域；

② $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$，其中 D 是由 $xy=1$， $y=x$ 及 $x=2$ 所围成的闭区域；

③ $\iint\limits_D \left|x^2+y^2-4\right|dxdy$，其中 D 是由圆 $x^2+y^2\le 16$ 所围成的闭区域；

10. 求下列立体的体积：

① V 由曲面 $z=x^2+y^2$ 及 $z=4$ 所围成；

② V 由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=6-2x^2-y^2$ 所围成；

练习题 B（有点难度）

1. 选择以下各题中给出的四个结论中一个正确的结论：

（1）设有空间闭区域

$G_1=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\le R^2, z\ge 0\right\}$， $G_2=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\le R^2, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\right\}$，

则有________。

（A） $\iiint\limits_{G_1} xdv=4\iiint\limits_{G_2} xdv$，　　（B） $\iiint\limits_{G_1} ydv=4\iiint\limits_{G_2} ydv$，

（C） $\iiint\limits_{G_1} zdv=4\iiint\limits_{G_2} zdv$，　　（D） $\iiint\limits_{G_1} xyzdv=4\iiint\limits_{G_2} xyzdv$。

（2）设有平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle|-a\le x\le a, x\le y\le a\right\}$， $D_1=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le a, x\le y\le a\right\}$，则

$\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)dxdy=$__________。

（A） $2\iint\limits_{D_1} cosx\sin ydxdy$，　　（B） $2\iint\limits_{D_1} xydxdy$， （C）$4\iint\limits_{D_1}(xy+cosx\sin y)dxdy$，　　　（D）0。

2. $I_1=\iint\limits_D\left[\sin(x+y)\right]^2 d\sigma$，$I_2=\iint\limits_D(x+y)^2 d\sigma$，其中 D 由直线 $x=0$，$y=0$，$x+y=\frac{1}{3}$，$x+y=1$ 所围成.

3. 计算下列二重积分：

①$\iint\limits_D(x^2+2\sin x+3y+4)d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le R^2\}$；

②$\iint\limits_D\sin\frac{\pi x}{2y}d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\big|y=x,y=2,y=\sqrt{x}\}$；

③$\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{2-y^2}}e^{x^2+y^2}dx$

④ $\iint\limits_D xye^{x^2+y^2}dxdy$，其中 D 是由 $0\le x\le 1$ 及 $0\le y\le 1$ 所围成的闭区域。

4. 交换二次积分次序：

①$\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x}}^{1+\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$；　　②$\int_0^{2\pi}dx\int_0^{\sin x}f(x,y)dy$。③$\int_0^1 dx\int_{x^3}^{\sqrt{2-x}}f(x,y)dy$

5. 化下列二重积分为极坐标下的二次积分：

① $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{3}}f(x,y)dx$　　　② $\int_0^1 dx\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$

③ $\int_0^a dy\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}f(x,y)dx$　　④ $\int_0^1 dx\int_{\frac{x}{2}}^{x}f(x^2+y^2)dx$

6. 计算二重积分 $\iint\limits_D x[yf(x^2+y^2)-1]dxdy$，其中 D 是由 $y=x^3$，$y=1$，$x=-1$ 所围成的闭区域，$f(u)$ 为连续函数。

7. 计算二重积分 $\iint\limits_D\left|x^2+y^2-1\right|d\sigma$，$D=\{(x,y)\big|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$。

8. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，并设 $\int_0^1 f(x)dx=A$，证明 $\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy=\frac{A^2}{2}$。

9. 证明 $\int_a^b dx\int_a^x(x-y)^{n-2}f(y)dy=\frac{1}{n-1}\int_a^b(b-y)^{n-1}f(y)dy$。

10. 设 $f(x,y)$ 连续，D 由 $y=x^2$，$y=0$，$x=1$ 围成，$f(x,y)$ 满足 $f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，求 $f(x,y)$。