总 习 题 8

1. 求向量 $\boldsymbol{a}=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})$ 与 $\boldsymbol{b}=\frac{1}{3}(-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})$ 的坐标及其模.

解 向量 a 的坐标是 $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{-1}{3}\right)$，向量 b 的坐标是 $\left(\frac{-1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$；

向量 a 、向量 b 的模都是 1，$|a|=|b|=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{-1}{3}\right)^2}=1$.

2. 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，求 $(-2\boldsymbol{a})\cdot 3\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}\times 2\boldsymbol{b}$.

解 $(-2\boldsymbol{a})\cdot 3\boldsymbol{b}=-6(a\cdot b)=-6\left[3\times1+(-1)\times2+(-2)\times(-1)\right]=-6\times3=-18$；

$$\boldsymbol{a}\times 2\boldsymbol{b}=2(a\times b)=2\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=2(5,1,7).$$

3. 求向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\sqrt{2}\boldsymbol{k}$ 与坐标轴间的夹角.

解 由方向角定义知，$a_0=\frac{a}{|a|}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，有等式

$\cos\alpha=\frac{1}{2}$，$\cos\beta=\frac{1}{2}$，$\cos\gamma=\frac{\sqrt{2}}{2}$，得 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，$\beta=\frac{\pi}{3}$，$\gamma=\frac{\pi}{4}$.

4. 试用向量的点积证明余弦定理：

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

证明 如图 8.4 所示, 三角形 ΔABC 三个内角 A 、B 、C 所对的边分别为 a，b，c，求证：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

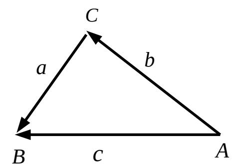

图 8.4

因为

$$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC},$$

从而

$$\left(\overrightarrow{CB}\right)^2=\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)^2=\left(\overrightarrow{AB}\right)^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\left(\overrightarrow{AC}\right)^2,$$

即

$$\left|\overrightarrow{CB}\right|^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2.$$

又因为 $\left|\overrightarrow{CB}\right|=a$，$\left|\overrightarrow{AB}\right|=c$，$\left|\overrightarrow{AC}\right|=b$，所以

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

5. 利用数量积证明：$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\le|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

证明 $|a+b|^2=(a+b)\cdot(a+b)=a^2+b^2+2a\cdot b=a^2+b^2+2|a|\cdot|b|\cos\theta$

$(|a|+|b|)^2=|a|^2+|b|^2+2|a|\cdot|b|$

$|a+b|^2-(|a|+|b|)^2=2|a|\cdot|b|(\cos\theta-1)\le 0$，所以$|a+b|^2\le(|a|+|b|)^2$，由于模都是正的，

所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\le|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$成立.

6. 已知$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$,求ΔOAB的面积.

解 由叉积定义知 $\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right|$在数值上等于以$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$为邻边的平行四边形面积，

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}=(-3,-3,1)$$

所以，ΔOAB的面积＝$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right|$＝$\frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2+(-3)^2+1}=\frac{1}{2}\sqrt{19}$.

7. 求通过原点且垂直于两个平面：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$与$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$的平面方程.

解 两已知平面的法向量是$n_1=(A_1,B_1,C_1)$， $n_2=(A_2,B_2,C_2)$，所求平面的法向量

$$n=\begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}i-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}j+\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}k=(B_1C_2-B_2C_1)i-(A_1C_2-A_2C_1)j+(A_1B_2-A_2B_1)k ,$$

又知，平面过原点，由点法式得平面方程

$$(B_1C_2-B_2C_1)(x-0)-(A_1C_2-A_2C_1)(y-0)+(A_1B_2-A_2B_1)(z-0)=0 ,$$

整理得 $(B_1C_2-B_2C_1)x-(A_1C_2-A_2C_1)y+(A_1B_2-A_2B_1)z=0$

8. 求通过直线$\begin{cases} x+y=0 \\ x-y-z-2=0 \end{cases}$，且平行于直线$x=y=z$的平面方程.

解 记所求平面为α，已知直线$\begin{cases} x+y=0 \\ x-y-z-2=0 \end{cases}$为$l_1$，直线$x=y=z$为$l_2$，

则直线l_1方向向量a_1与平面α平行，直线l_2也与平面α平行，故平面α的法向量$n=a_1\times a_2$，

$$a_1=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=(-\quad 1\ ,)，\quad a_2=(1,1,1) ,$$

$$n=a_1\times a_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(3,-1,-2) ,$$

由题设，平面通过直线$\begin{cases} x+y=0 \\ x-y-z-2=0 \end{cases}$，直线上所有点都在平面上，求任意一点，

令$x=0,y=0$，求得$z=-2$，平面上有点$(0,0,-2)$.由点向式写出平面方程

$3(x-0)-1(y-0)-2(z+2)=0$，整理 $3x-y-2z-4=0$.

9. 求通过点 $(1,2,5)$ 且与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 平行的直线方程.

解　已知两平面的法向量分别为 $n_1=(1,0,2)$，$n_2=(0,1,-3)$，所求直线方向向量为

$a=n_1\times n_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}=(-2,3,1)$，由点向式得直线方程 $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-5}{1}$.

10. 设平面 π 在平面 $\pi_1: x-2y+z-2=0$ 和平面 $\pi_2: x-2y+z-6=0$ 之间,且它到平面 π_1 和平面 π_2 之间的距离之比为 $1:3$. 求平面 π 的方程.

解　已知平面 π,π_1,π_2 三平面平行，设所求平面 π 的方程为 $x-2y+z+D=0$，

在 π 上取点 $M(x_0,y_0,z_0)$，满足 $x_0-2y_0+z_0+D=0$，$x_0-2y_0+z_0=-D\cdots\cdots(1)$，

M 到 π_1 的距离 $d_1=\dfrac{|x_0-2y_0+z_0-2|}{\sqrt{1+4+1}}$，$M$ 到 π_2 的距离 $d_2=\dfrac{|x_0-2y_0+z_0-6|}{\sqrt{1+4+1}}$，

将（1）代入 d_1,d_2 中，得 $d_1=\dfrac{|D+2|}{\sqrt{6}},d_2=\dfrac{|D+6|}{\sqrt{6}}$　由 $d_1:d_2=1:3$ 得 $3d_1=d_2$，即 $3|D+2|=|D+6|$，所以 $D=0$，所求平面方程为 $x-2y+z=0$

11. 求过直线 $\begin{cases} 3x+2y-z-1=0 \\ 2x-3y+2z+2=0 \end{cases}$，且垂直于已知平面 $x+2y+3z-5=0$ 的平面方程.

解一　已知直线方向向量 $a=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}=(1,-8,-13)$，已知平面的方向向量 $n_1=(1,2,3)$，记所所求平面为 π，法向量为 n.

则题设，平面包含直线，有 $a\perp n$，两平面垂直，有 $n_1\perp n$，所以

$$n=a\times n_1=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -8 & -13 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=(2,-16,10),$$

再求平面上的一点，找直线上的点，令 $x=0$，直线方程化为 $\begin{cases} 2y-z=1 \\ 3y-2z=2 \end{cases}$，求得 $y=0,z=-1$，即平面上有点 $(0,0,-1)$，由点向式写平面方程

$2(x-0)-16(y-0)+10(z+1)=0$，整理 $x-8y+5z+5=0$.

解二　用平面束方程求解

过直线 $\begin{cases} 3x+2y-z-1=0 \\ 2x-3y+2z+2=0 \end{cases}$ 的平面束方程为　$3x+2y-z-1+\lambda(2x-3y+2z+2)=0$，

即 $(3+2\lambda)x+(2-3\lambda)y+(-1+2\lambda)z+(-1+2\lambda)=0$，其中 λ 为待定常数.这个平面与平面 $x+2y+3z-5=0$ 垂直，两法向量点积为零 $(3+2\lambda)+2(2-3\lambda)+3(-1+2\lambda)=0$，解得 $\lambda=-2$ 代

入平面束方程中，求得 $x-8y+5z+5=0$.

书上答案：$x-17y+11z+11=0$，错

12. 求点 $(-1,2,0)$ 在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的投影.

解　已知点 M 在平面 π 上的投影，即是过点 M 且与平面平行的直线 l 与平面 π 的交点.

第一步，写出过点 $(-1,2,0)$，且与平面 $x+2y-z+1=0$ 垂直的直线方程

已知平面的法向量 $(1,2,-1)$，则直线方程为 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{-1}$；

第二步　求直线与平面的交点

化直线方程为参数式　令 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{-1}=t$，参数方程为 $\begin{cases}x=-1+t\\ y=2+2t\\ z=-t\end{cases}$，代入平面方程中，

$(-1+t)+2(2+2t)-(-t)+1=0$，解出 $t=-\dfrac{2}{3}$；

第三步　求交点坐标

将 $t=-\dfrac{2}{3}$ 代入直线参数方程，$\begin{cases}x=-1-\dfrac{2}{3}=-\dfrac{5}{3}\\ y=2+2\left(-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{2}{3}\\ z=-\left(-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{2}{3}\end{cases}$

所以点在平面上的投影坐标为 $\left(-\dfrac{5}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$.

13. 已知点 $A(1,0,0)$ 和点 $B(0,2,1)$，试在 z 轴上求一点 C，使 ΔABC 的面积最小.

解　记在 z 轴点 $C(0,0,c)$，由叉积定义知，ΔABC 的面积 $=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BC}\right|$，

$$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ -1 & 0 & c\\ 0 & -2 & c-1\end{vmatrix}=(2c,c-1,2)，\quad \left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{(2c)^2+(c-1)^2+4}=\sqrt{5c^2-2c+5}，$$

记 $f(x)=5x^2-2x+5$，函数 $f(x)$ 的极小值点就是使 ΔABC 的面积最小的 C 点的 z 坐标.

$f'(x)=10x-2$，令 $f'(x)=0$，驻点 $x=\dfrac{1}{5}$，也即 $c=\dfrac{1}{5}$，所以 z 轴上点 C，坐标为 $\left(0,0,\dfrac{1}{5}\right)$ 时，ΔABC 的面积最小.

14. 写出适合下列条件的旋转曲面.

（1）$\begin{cases}4x^2+9y^2=36\\ z=0\end{cases}$，绕 x 轴旋转一周.

解　曲线绕 x 轴旋转一周所得的曲面方程为　$4x^2+9\left(y^2+z^2\right)=36$；

（2）$\begin{cases} 4x^2 - 9y^2 = 36 \\ z = 0 \end{cases}$，绕 y 轴旋转一周.

解　曲线绕 y 轴旋转一周的曲面方程为　$4\left(x^2 + z^2\right) - 9y^2 = 36$；

（3）$\begin{cases} z^2 = 5x \\ y = 0 \end{cases}$，绕 x 轴旋转一周.

解　曲线绕 x 轴旋转一周所得的曲面方程为　$y^2 + z^2 = 5x$.

15. 求旋转抛物面 $z = x^2 + y^2 (0 \le z \le 4)$ 在坐标面上的投影.

解　曲面在坐标面上的投影是一个区域.

所以（1）在 xoy 坐标面的平面上的投影（区域）是　$x^2 + y^2 \le 4$

（2）在 $yoz(x = 0)$ 坐标面上的投影（区域）是　$y^2 \le z \le 4$；

（3）在 $zox(y = 0)$ 坐标面上的投影（区域）是　$x^2 \le z \le 4$.

16. 说明下列旋转曲面是怎样形成的?

（1）$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1$;

解　曲面 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1$ 是由曲线 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 绕 x 旋转一周形成;

（2）$x^2 - \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$;

解　曲面 $x^2 - \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ 是由曲线 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 绕 y 旋转一周形成;

（3）$x^2 - y^2 - z^2 = 1$.

解　曲面 $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ 是由曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 绕 x 旋转一周形成.