§ 10.2 直角坐标系中计算二重积分

要求：会将二重积分化为二次积分，会交换积分次序

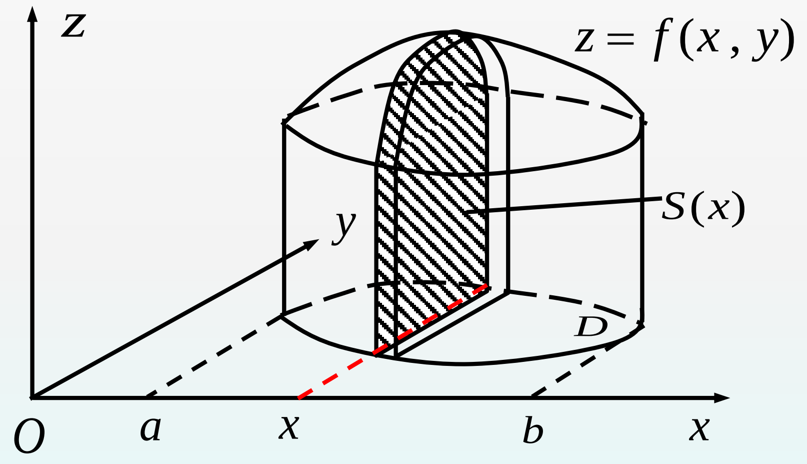
二重积分是化为两个定积分来计算.

问题：怎样化为二次积分？积分限如何确定？

以计算曲顶柱体体积为例

方法：平行截面法

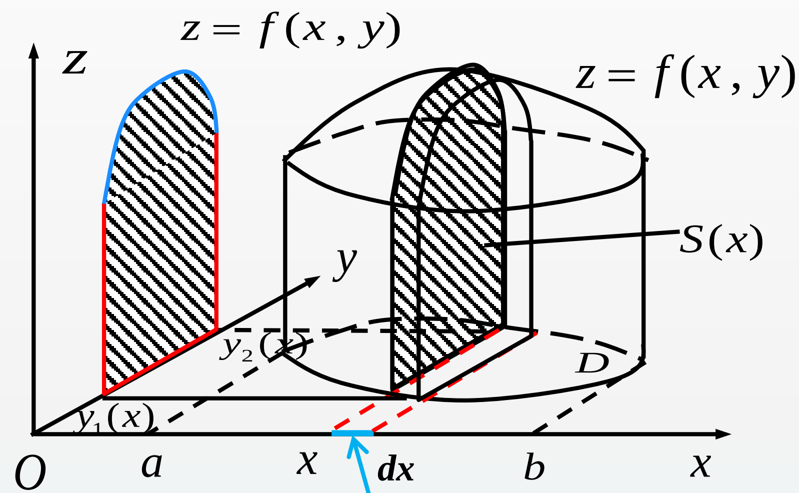
先将柱体切成一系列相互平行的小的扁的曲顶柱体，整个柱体由这一系列小的扁的曲顶柱体叠加而成.



一 思想方法：微元法

1. **分割** 在区间$[a,b]$上，用平行于yoz的平面截曲顶柱体，截面是个曲边梯形，面积记为$S(x)$.

2. **近似** 小曲顶柱体近似看作偏的柱体，其体积为 $dV = S(x)dx$



3. **叠加** 所求的体积为

$$V = \int_a^b dV = \int_a^b S(x)dx$$

计算$S(x)$ 将小片$S(x)$投影到yoz平面上，则$S(x)$的面积为

高

$$S(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

$$V = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right] dx$$

将二重积分化为两个定积分

$$V=\int_a^b\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$$

约定：二次积分记号写为

$$=\int_a^b dx\boxed{\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy}$$

先对 y 积分，后对 x 积分.

说明：$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$ 计算时，将 x 看作常量，对 y 计算定积分，

其结果是 x 的函数.

类似地，也可以化为先对 x 积分，后对 y 积分

$$V=\int_c^d dy\boxed{\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx}$$

说明：$\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$ 计算时，将 y 看作常量，对 x 计算定积分，

其结果是 y 的函数.

二 如何确定两个二次积分的积分限

1. 积分区域 D 为矩形域

若函数 $f(x,y)$ 在矩形域 $D=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b, c\le y\le d\}$ 上连续，则

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx=\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy$$

例10.1（$P204$） 计算 $\iint_D xe^{xy}dxdy$，其中 $D: 0\le x\le 2, -1\le y\le 1.$

分析：先对哪个变量积分好计算？ 选择积分次序很重要

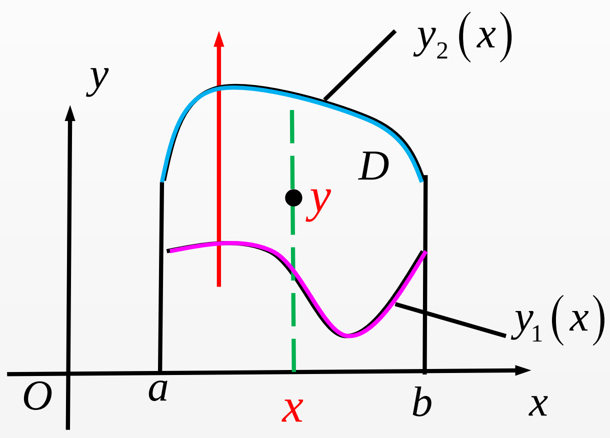
$I=\int_{-1}^{1}dy\int_0^2 xe^{xy}dx$ 若先对 x 积分 $\int_0^2 xe^{xy}dx$，用分部积分法计算

$I=\int_0^2 dx\int_{-1}^{1} xe^{xy}dy$ 若先对 y 积分 $\int_{-1}^{1} xe^{xy}dy$，用凑微分法计算

解 $I=\int_0^2 dx\int_{-1}^{1}xe^{xy}dy=\int_0^2 dx\int_{-1}^{1}e^{xy}d(xy)=\int_0^2 e^{xy}\Big|_{-1}^{1}dx=\int_0^2(e^x-e^{-x})dx$

2. 积分区域 D 为 X 型区域 (先 y 后 x)

积分区域 D 由曲线 $x=a,\ x=b,\ y=y_1(x),\ y=y_2(x)$ 围成，称 X 型



判断方法：用箭头“↑”穿过 D，当直线在 $[a,b]$ 区间内平移时，积分“入线”与“出线”都未改变，则 D 称为 X 型域.

在任意的 x 处，有 $y_1(x)\le y\le y_2(x)$，

由此得到 D 中 x 与 y 的取值范围：

$$y_1(x)\le y\le y_2(x),\quad a\le x\le b$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right]dx$$

$$=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

X 型域

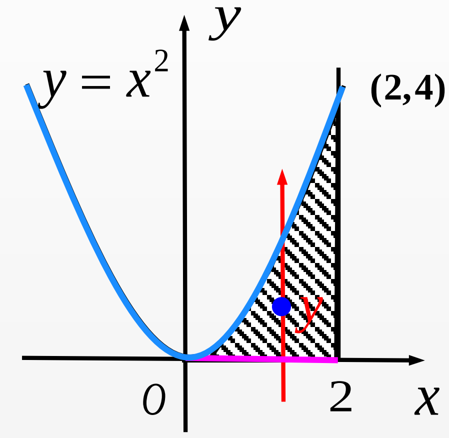
$$a\le x\le b$$

$$y_1(x)\le y\le y_2(x)$$

积分次序：

先 y 后 x

例10.3 $\left(P205\right)$计算$I=\iint\limits_D (x^2+y)dxdy$，其中$D$是由$y=x^2, x=2$及$x$轴围成的区域.



计算二重积分步骤：

(1) 画图，确定区域类型，求交点；

(2) 根据确定的类型，将D用不等式表出；

(3) 化为二次积分并定积分限；

(4) 计算两个定积分.

注意：二重积分的结果是一个确定的数值.

解 (1) 积分区域如右图 看作X型区域 交点坐标(2,4)

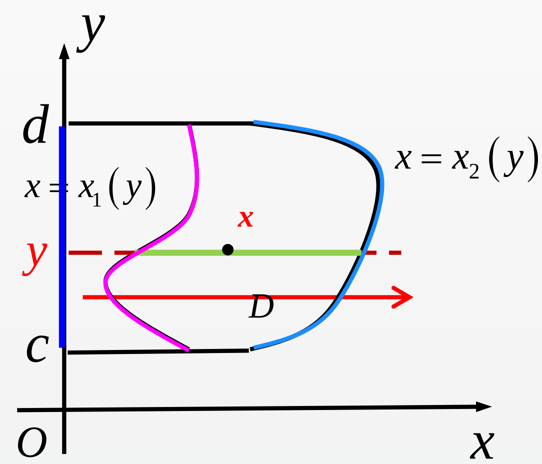
(2) D: $0\le x\le 2,\quad 0\le y\le x^2$

(3) $I=\iint\limits_D (x^2+y)dxdy=\int_0^2 dx\int_0^{x^2}(x^2+y)dy$

3. 积分区域 D 为 Y 型区域（先 x 后 y）

积分区域 D 由曲线 $y=c,\ y=d,\ x=x_1(y),\ x=x_2(y)$ 围成，称 Y 型

判别方法与前面介绍判别是否为 X 型区域一致



在任意的 y 处，有 $x_1(y)\le x\le x_2(y)$，

由此得到 D 中 x 与 y 的取值范围：

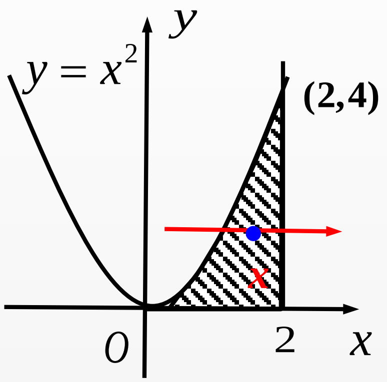
$$c\le y\le d\ ,\quad x_1(y)\le x\le x_2(y)$$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_c^d\left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}f(x,y)dx\right]dy$$

$$=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}f(x,y)dx$$

y 型区域 $\quad c\le y\le d\quad x_1(y)\le x\le x_2(y)$ 积分次序：先 x 后 y

例10.3 $\left(P205\right)$ 计算 $I=\iint\limits_D (x^2+y)dxdy$，其中 D 是由 $y=x^2,\ x=2$ 及 x 轴围成的区域.



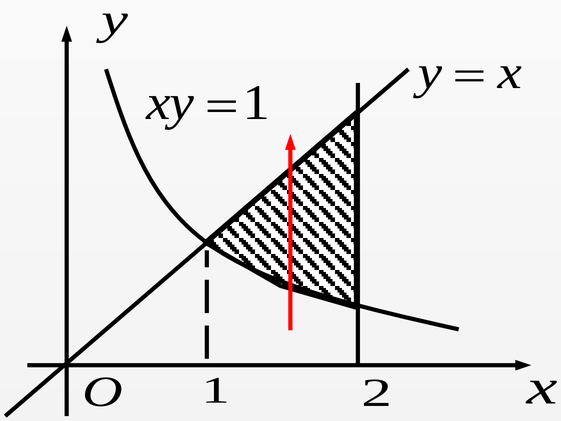
解二 把 D 看作 Y 型区域　交点坐标(2,4)

$$D:\ 0\le y\le 4,\quad \sqrt{y}\le x\le 2$$

$$I=\iint\limits_D (x^2+y)dxdy=\int_0^4 dy\int_{\sqrt{y}}^2 (x^2+y)dx$$

例10.4（$P206$）计算二重积分 $I=\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$，其中 D 为由双曲线 $xy=1$，直线 $y=x$ 和 $x=2$ 围成的区域.

解 (1) 画图　先对 y 积分



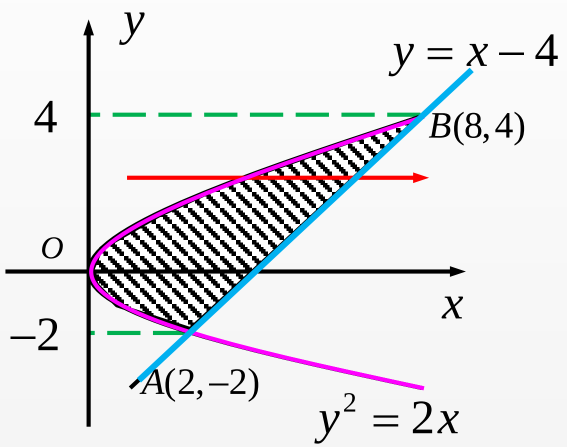
(2) $D:\ 1\le x\le 2,\quad \frac{1}{x}\le y\le x$

(3) $I=\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}dy$

(4) $=\int_1^2\left(-\frac{x^2}{y}\right)_{\frac{1}{x}}^{x}dx=\int_1^2(x^3-x)dx$

学会从积分区域特点选择积分次序，所以一定要画出 D 的图形

例10.5 $(P206)$ 计算 $I=\iint\limits_D xydxdy$，其中D是由$y^2=2x$和$y=x-4$围成.



解 (1) 画图 看作y型区域

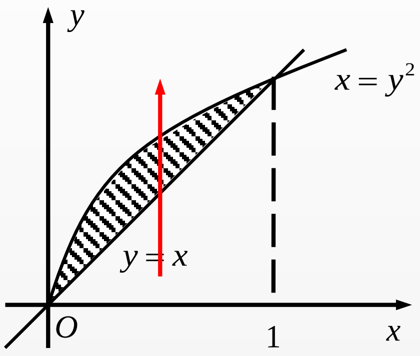
交点 $A(2,-2)$，$B(8,4)$

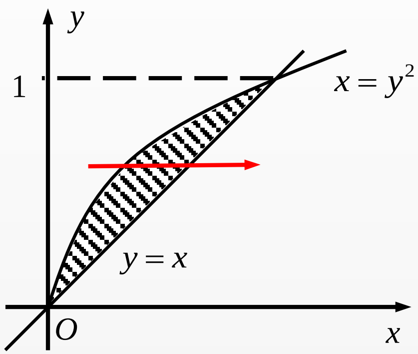
(2) $D:-2\le y\le 4,\quad \dfrac{y^2}{2}\le x\le y+4$

(3) $I=\iint\limits_D xydxdy=\int_{-2}^{4}dy\int_{\frac{y^2}{2}}^{y+4}xy\,dx$

例10.6 计算 $I=\iint\limits_D \dfrac{\sin y}{y}dxdy$，其中$D$是由 $y=x$和$x=y^2$围成.

分析：从积分区域看，即是X型，也可看作Y型





从被积函数看，$\displaystyle\int \frac{\sin y}{y}dy$

原函数不是初等函数，无法算出积分结果.

解 先对x积分 D： $0\le y\le 1,\quad y^2\le x\le y$

$$I=\iint\limits_D \frac{\sin y}{y}dxdy=\int_0^1 dy\int_{y^2}^{y}\frac{\sin y}{y}dx$$

问题：为什么先对x积分可以算出结果?

$$=\int_0^1\frac{\sin y}{y}\left(x\Big|_{y^2}^{y}\right)dy=\int_0^1\frac{\sin y}{y}(y-y^2)dy=\int_0^1(\sin y-y\sin y)dy$$

这是一个看被积函数选择积分次序的例题

例10.7（$P207$）改变二次积分$\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$的积分次序.

步骤：

(1) 表D

(2) 画图

(3) 再表D

(4) 交换

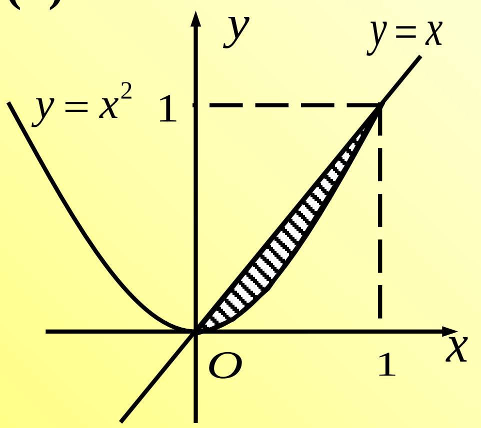
(1) 由二次积分限知，围成积分区域D的曲线是：

$$y=0,\ y=1,\ x=y,\ x=\sqrt{y}$$

将D用不等式表示(先x后y)

$$0\le y\le 1,\quad y\le x\le\sqrt{y}$$

(2)



(3) 将D按先y后x的积分次序表示

$$0\le x\le 1,\quad x^2\le y\le x$$

(4)

$$\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} f(x,y)dy$$

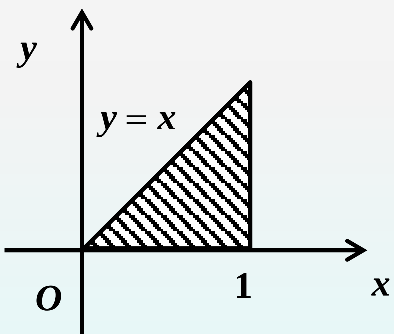
交换积分次序必须要掌握

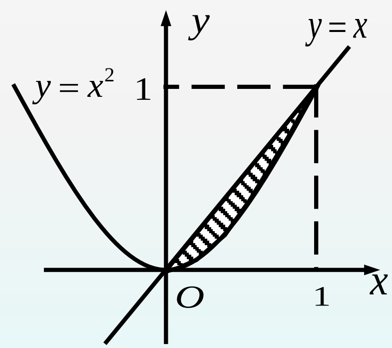
小结：本节介绍直角坐标系中计算二重积分，主要掌握：

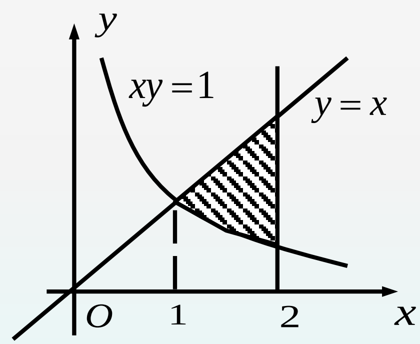
1. 看积分区域选择积分次序；(例10.4，例10.5)
2. 看被积函数选择积分次序；(例10.6)
3. 交换二次积分次序. (例10.7)

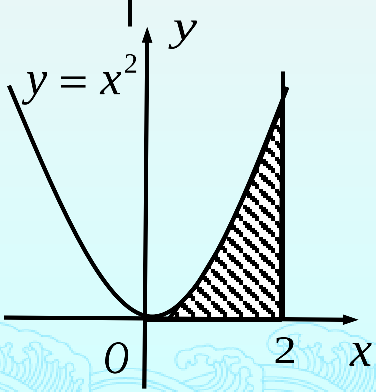
直角坐标系中如何化为二次积分要熟练掌握

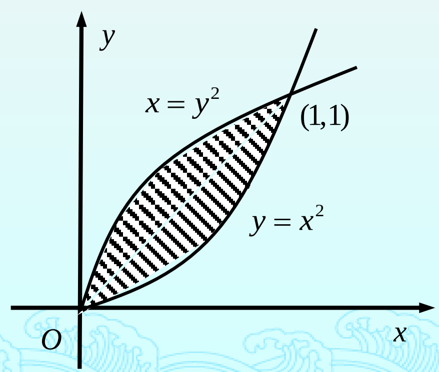
常见积分区域图形

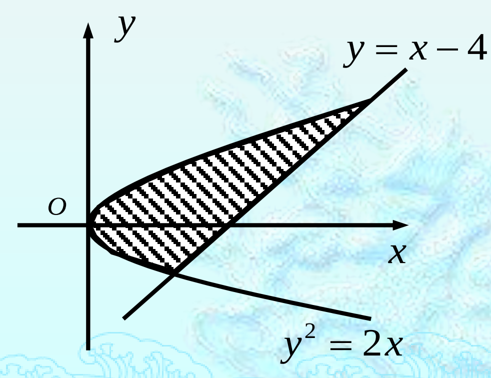












作业：

$P207$

必做 1. (2)

2. (2)，(4)，(6)

3. (1)，(2)

选做 5

预习：10.3节