习题 10.4　（P216）

2.求曲面 $z=1-x^2-y^2$ 与 $z=0$ 所围成的立体体积.

解　$V=\iint\limits_D\left(1-x^2-y^2\right)dxdy$，$D:x^2+y^2\le 1$，

在极坐标系下计算，$D:0\le\theta\le 2\pi,0\le r\le 1$

$$V=\iint\limits_D\left(1-x^2-y^2\right)dxdy=\iint\limits_D\left(1-r^2\right)\cdot rdrd\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\left(r-r^3\right)dr=2\pi\left(\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{4}r^4\right)\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{2}.$$

5.求由圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和旋转抛物面 $z=6-x^2-y^2$ 所围成立体的体积.

解　先确定积分区域 $\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2}\\ z=6-x^2-y^2\end{cases}$，$D:x^2+y^2\le 2^2$，

在极坐标系下表示为　D: $0\le\theta\le 2\pi$, $0\le r\le 2$，

$$V=\iint\limits_D\left[\left(6-x^2-y^2\right)-\sqrt{x^2+y^2}\right]dxdy=\iint\limits_D\left[\left(6-r^2\right)-\sqrt{r^2}\right]rdrd\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\left(6-r-r^2\right)r\,dr$$

$$=2\pi\left(3r^2-\frac{1}{3}r^3-\frac{1}{4}r^4\right)\Bigg|_0^2=\frac{32}{3}\pi.$$

习题 10.5　（P219）

2. 计算下列三重积分：

（1）$\iiint\limits_G xyz^2\mathrm{dv}$，**其中** $G=\{(x,y,z)|0\le x\le 1,1\le y\le 2,0\le z\le 1\}$；

解　$\iiint\limits_G xyz^2\mathrm{dv}=\int_0^1dx\int_1^2dy\int_0^1xyz^2dz=\int_0^1xdx\int_1^2ydy\int_0^1z^2dz$

$$=\left(\frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_0^1\times\left(\frac{1}{2}y^2\right)\Bigg|_1^2\times\left(\frac{1}{3}z^3\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}\times\frac{4-1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}.$$

（2）$\iiint\limits_G(x+y+z)\mathrm{dxdydz}$，**其中** $G=\{(x,y,z)|0\le x\le a,0\le y\le b,0\le z\le c\}$；

解　$\iiint\limits_G(x+y+z)\mathrm{dxdydz}=\int_0^adx\int_0^bdy\int_0^c(x+y+z)dz=\int_0^adx\int_0^b\left(xz+yz+\frac{1}{2}z^2\right)\Bigg|_0^c dy$

$$=\int_0^adx\int_0^b\left(cx+cy+\frac{1}{2}c^2\right)dy=\int_0^a\left(cxy+\frac{1}{2}cy^2+\frac{1}{2}c^2y\right)\Bigg|_0^b dx=\int_0^a\left(cbx+\frac{1}{2}cb^2+\frac{1}{2}bc^2\right)dx$$

$$=\left(\frac{1}{2}cbx^2+\frac{1}{2}cb^2x+\frac{1}{2}bc^2x\right)\Bigg|_0^a=\frac{1}{2}abc\left(a+b+c\right).$$

（3） $\iiint\limits_G x\sin y\cos z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$， $G=\left\{(x,y,z)\middle|0\le x\le 1,0\le y\le \frac{\pi}{2},0\le z\le \frac{\pi}{2}\right\}$；

解 $\iiint\limits_G x\sin y\cos z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1 xdx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin ydy\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos zdz$

$=\left(\frac{1}{2}x^2\right)_0^1\times\left(-\cos y\right)_0^{\frac{\pi}{2}}\times\left(-\sin z\right)_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$.

习题 10.6 （P224）

1. 计算下列三重积分：

（1） $\iiint\limits_G (x^2+y^2)\,\mathrm{d}v$，其中 G 为旋转抛物面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 与平面 $z=3$ 所围成；

解 在柱坐标系计算 G： $\frac{1}{2}r^2\le z\le 3,0\le r\le\sqrt{6},0\le\theta\le 2\pi$， $dv=rdrd\theta dz$，

$$\iiint\limits_G (x^2+y^2)\,\mathrm{d}v=\iiint\limits_G r^2\cdot rdrd\theta dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{6}}r^3dr\int_{\frac{1}{2}r^2}^{3}dz=2\pi\int_0^{\sqrt{6}}r^3\left(z\Big|_{\frac{1}{2}r^2}^{3}\right)dr$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{6}}r^3\left(3-\frac{1}{2}r^2\right)dr=2\pi\int_0^{\sqrt{6}}\left(3r^3-\frac{1}{2}r^5\right)dr=2\pi\left(\frac{3}{4}r^4-\frac{1}{12}r^6\right)_0^{\sqrt{6}}=18\pi.$$

（4） $\iiint\limits_G z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 G 为由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的区域；

解 在柱坐标系计算 G： $r^2\le z\le\sqrt{2-r^2},0\le r\le 1,0\le\theta\le 2\pi$， $dv=rdrd\theta dz$，

$$\iiint\limits_G z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_G z\cdot rdrd\theta dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}}z\,dz=2\pi\int_0^1 r\left(\frac{1}{2}z^2\Big|_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}}\right)dr$$

$$=\pi\int_0^1 r\left(2-r^2-r^4\right)dr=\pi\left(r^2-\frac{1}{4}r^4-\frac{1}{6}r^6\right)_0^1=\frac{7}{12}\pi.$$