2016级高等数学II 试卷

一、填空题与选择（每小空 3 分，共 18 分）

1 微分方程$y'' = x^2 - e^x$的通解是　　　　　　　　　　　　。

2 设向量$\vec{a} = (-2,3,1)$，$\vec{b} = (0,-1,5)$，则$\vec{a}\cdot\vec{b} =$　　　　　　，$\bar{a}\times\vec{b} =$　　　　　　　。

3 设函数$f(x,y) = \frac{3xy}{x^2+y^2}$，则$f(-1,1) =$　　　　　　　　。

4 若$z = y^2 sinx$，则$\frac{\partial z}{\partial x}=$ ______________ ，$\frac{\partial z}{\partial y} =$ _____________。

5 设$z = x^4 + y^4 - x^2y^2$，则$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ =(　　　　)

A　$4xy$　　　B　$-4xy$　　　C　$-4x$　　　D　$4y$

6 若积分区域 D 为$x^2+y^2 \le a^2$，则二重积分$\iint_D dxdy =$ (　　　　)

A　πa^2　　　B　$2\pi a$　　　C　$2\pi a^2$　　　D　a^2

二、计算与求解题（每小题 8 分，共 72 分）

7　求微分方程 $(x^2y + y)dy - (x + xy^2)dx = 0$ 满足初始条件$y(0) = 1$的特解。

8　设$z = x^2\sin(x-y)$，求函数的一阶偏导数。

9　设若$z = e^{xy^2}$，求全微分dz。

10 计算二重积分$\iint_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$，其中 D 是由双曲线$xy = 1$，直线$x = 2$和$y = x$围成的区域。

11 计算二重积分$\iint_D e^{x^2+y^2}dxdy$，D：$x^2 + y^2 \le 16$

12 计算三重积分$\iiint_G x^3 y^2 z dxdydz$，

$$\Omega = \left\{(x,y,z)\middle|0 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 3\right\}$$

13 计算曲线积分$\int_L \sqrt{y}\,ds$，其中 L 为抛物线$y = x^2$上点(0,0)到点(2 ,4)的一段。

14 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}$的敛散性，如果收敛，请求其和。

15 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{2^n\sqrt{n}}$的收敛域。

三 应用题(10 分)

16 求由圆锥面$z = \sqrt{x^2 + y^2}$和旋转抛物面$z = 6 - x^2 - y^2$所围成的立体体积。

四、（附加题）（8 分）

17 设$x + y + z = e^z$，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

2016级高等数学 II 试卷答案

一、填空题与选择（每小空 3 分，共 18 分）

1. $y=\frac{1}{12}x^4-e^x+C_1x+C_2$　　2.（16,10,2）　　3. $-\frac{3}{2}$　　4. $y^2\cos x$ 、$2y\sin x$

5. B　　6. A

二、计算与求解题（每小题 8 分，共 72 分）

7. (8 分) 解：分离变量：$\frac{y}{1+y^2}dy=\frac{x}{1+x^2}dx$　　（3 分）

两边积分得：$\ln(1+y^2)=\ln(1+x^2)+\ln C$　　（5 分）

求出：$$\begin{aligned}1+y^2&=C(1+x^2)\\ y^2&=C(1+x^2)-1\end{aligned}$$　　（6 分）

将 $y(0)=1$ 代入上式，解出 $C=2$

故 $y^2=2(1+x^2)-1=2x^2+1$　　（8 分）

8. (8 分)

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\sin(x-y)+x^2\cos(x-y)$　　（4 分）

$\frac{\partial z}{\partial y}=-x^2\cos(x-y)$　　（8 分）

9.(8 分)

解：因 $\frac{\partial z}{\partial x}=y^2e^{xy^2}$　　（3 分）

$\frac{\partial z}{\partial y}=2xye^{xy^2}$　　（6 分）

故：$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$

$=y^2e^{xy^2}dx+2xye^{xy^2}dy$　　（8 分）

10(8 分) 解：由题意知 $1\le x\le 2$，$\frac{1}{x}\le y\le x$，　　（3 分）

故：$\iint\limits_D\frac{x^2}{y^2}dxdy=\int_1^2dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}dy$

$=\int_1^2(x^3-x)dx$　　（6 分）

$=\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_1^2=\frac{9}{4}$　　（8 分）

11. (8 分) 解：$\iint_D e^{x^2+y^2}dxdy=\iint_D e^{r^2}rdrd\theta$　　(3 分)

$=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 e^{r^2} r dr$　　　　（6 分）

$=2\pi * \frac{1}{2} e^{r^2} \mid_0^4 = \pi(e^{16}-1)$　　（8 分）

12.（8 分）解：

$$\iiint_G x^3y^2zdxdydz = \int_0^1 x^3dx\int_{-1}^2 y^2dy\int_0^3 zdz$$　　（4 分）

$$=\frac{1}{4}x^4\Big|_0^1\cdot\frac{1}{3}y^3\Big|_{-1}^2\cdot\frac{1}{2}z^2\Big|_0^3$$　　（6 分）

$$=\frac{1}{4}\times 3\times\frac{9}{2}=\frac{27}{8}$$　　（8 分）

13.（8 分）解：

令 $\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \end{cases}$　$0\le t\le 2$　　（2 分）

则 $\int_L \sqrt{y}ds = \int_0^2 t\sqrt{1+4t^2}dt$　　（4 分）

$$=\frac{1}{8}\int_0^2\sqrt{1+4t^2}d(1+4t^2)$$

$$=\frac{1}{12}(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2$$　　（6 分）

$$=\frac{17\sqrt{17}-1}{12}$$　　（8 分）

14.（8 分）解：由于

$$s_n=\frac{2}{1\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{2}{n\cdot(n+1)}$$　　（2 分）

$$=2\left[(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})\right]$$　　（4 分）

$$=2(1-\frac{1}{n+1})$$　　（6 分）

由 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\lim\limits_{n\to\infty}2(1-\frac{1}{n+1})=2$ 可知，所给级数收敛，其和为 2.　　（8 分）

15.（8 分）解：　令 $t=x+3$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{2^n\sqrt{n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{2^n\sqrt{n}}$，　　（2 分）

由于 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n+1}\sqrt{n+1}}\times 2^n\sqrt{n}=\frac{1}{2}$，　　（4 分）

则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{2^n\sqrt{n}}$ 的收敛半径 $R=2$，（5 分）

当 $t=2$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{2^n\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散，（6 分）

当 $t=-2$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{2^n\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛，（7 分）

所以 $-2\le x+3<2$，即 $-5\le x<-1$ 为原级数的收敛域.（8 分）

三、应用题（10 分）

16. (10 分)解：

根据两曲面可以确定积分区域 D： $x^2+y^2\le 4$

令 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ $0\le\theta\le 2\pi$，$0\le r\le 2$，则（3 分）

则 $V=\iint\limits_D(6-x^2-y^2-\sqrt{x^2+y^2})dxdy$（5 分）

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(6-r^2-r)rdr$（6 分）

$=\int_0^{2\pi}\frac{16}{3}d\theta=\frac{32}{3}\pi$（8 分）

五、（附加题）（8 分）

17. (8 分)解：记 $F(x,y,z)=e^z-x-y-z$，则

$F_x=-1$，$F_z=e^z-1$，$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{e^z-1}$（4 分）

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{e^z-1}\right)=\frac{-e^z\frac{\partial z}{\partial x}}{(e^z-1)^2}=\frac{-e^z}{(e^z-1)^3}$（8 分）