8.3 向量的点积和叉积

要求：熟练掌握向量的点积和叉积运算

前面介绍了向量的加、减、数乘运算，这些统称线性运算.

这节我们学习向量的乘法，乘法有两种，点乘和叉乘.

一、向量的点积

定义$\left(P157\right)$ 两个向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的点积$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，是指两个向量的模及其夹角$\theta$余弦的乘积. 即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$的结果是数量，因此又叫数量积，也叫内积.

记住以下结论：

$(1)\ \boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{a}|\cos 0=|\boldsymbol{a}|^2;$

(2) 两非零向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$垂直的充分必要条件是$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,

即$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0.$

(3) 设$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则

$$\boxed{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})=\boxed{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}$$

即两向量的点积等于两向量对应坐标乘积之和. 其计算结果是一个数.

用点积的定义，基本单位向量的运算满足：

$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1;$ $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0.$

记牢点积定义 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta$

点积有下列运算律：

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

(2) 分配律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$

(3) 数乘结合律 $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$

向量的点积运算要熟练

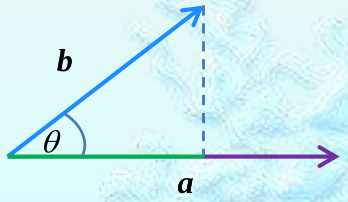
例8.10 $(P158)$

设$\boldsymbol{a}=(2,2,-8)$，$\boldsymbol{b}=(2,-2,1)$，求$\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{b})$及$\boldsymbol{b}$在$\boldsymbol{a}$上的投影.

解： $\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{b})=2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=2(2,2,-8)\cdot(2,-2,1)=2\times(-8)=-16$

$$(\boldsymbol{b})_{\boldsymbol{a}}=|\boldsymbol{b}|\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{-8}{\sqrt{2^2+2^2+(-8)^2}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta$



例8.11 (*P*158)　计算两向量$a=\left(1,-1,\sqrt{2}\right)$, $b=\left(1,1,\sqrt{2}\right)$的夹角.

解　由点积公式　$a\cdot b=|a|\cdot|b|\cos\theta$

$$\cos\theta=\frac{a\cdot b}{|a||b|}=\frac{1\times1+(-1)\times1+\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{\sqrt{1^2+(-1)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}\sqrt{1^2+1^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}}=\frac{1}{2}$$

$$\theta=\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$$

练习

1. 设$a=i+2j-k$, $b=-i+j$, 求$a\cdot b$及夹角θ的正弦和余弦.

答案　$a\cdot b=1$　　$\cos\theta=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$　　$\sin\theta=\sqrt{\dfrac{11}{12}}$

二、向量的叉积

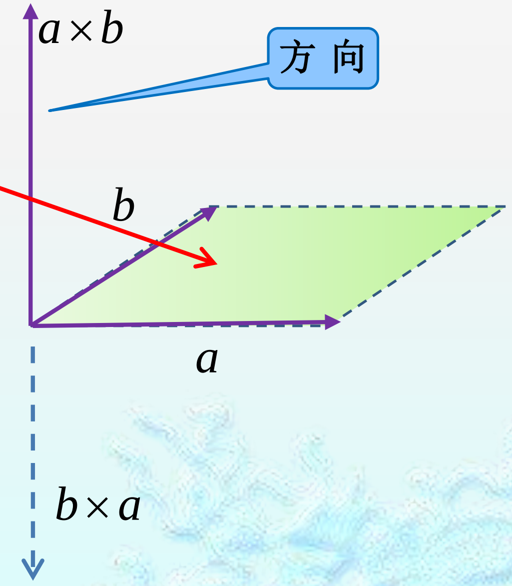
定义:(P159)　约定$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$是一个向量

(1)　模$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin\theta$，　其中$\theta$为两向量的夹角;

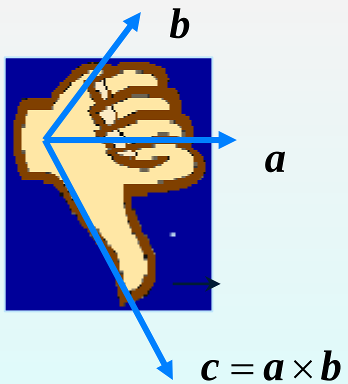
(2)　它的方向同时垂直于$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$，　且服从右手法则.

$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$为两向量的叉积，或向量积，也称外积.

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$的模在数值上等于平行四边形的面积.



右手法则



向量$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$模相同，方向相反.

叉积有下列运算律：

(1) 反交换律 $a \cdot b = -b \cdot a$

(2) 数乘结合律 $(\lambda a) \times b = a \times (\lambda b) = \lambda(a \times b)$

(3) 分配律 $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$

向量的叉积运算要熟练

记住以下结论：

(1) $a \times a = 0$ (零向量)

(2) 两非零向量 a 与 b 平行的充分必要条件是 $a \times b = 0$,

$$a // b \Leftrightarrow a \times b = 0$$

(3) 向量积 $a \times b$ 的模 $|a \times b|$ 在数值上等于以 a、b 为两邻边的平行四边形面积.

例8.12 (P159)　已知$|a|=2$，$|b|=3$，$a\cdot b=5$，求

(1) a与b的夹角余弦；(2) $|a\times b|$；(3) $\left[(a+b)\times(a-b)\right]^2$

解 (1) $\cos\theta=\dfrac{a\cdot b}{|a|\cdot|b|}=\dfrac{5}{6}$　　$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{11}}{6}$

(2) $|a\times b|=|a|\cdot|b|\sin\theta=\sqrt{11}$

(3) $\left[(a+b)\times(a-b)\right]^2=$

由向量积$a\times b$的定义，i、j、k两两之间的叉积分别为：

$$i\times i=0,\quad j\times j=0,\quad k\times k=0$$

$$\boxed{\begin{gathered}i\times j=k,\\ j\times i=-k,\end{gathered}}\quad \boxed{\begin{gathered}j\times k=i,\\ k\times j=-i,\end{gathered}}\quad \boxed{\begin{gathered}k\times i=j\\ i\times k=-j\end{gathered}}$$

反交换律

向量积 $a \times b$ 的坐标表达式：

设$a = (a_x, a_y, a_z)$， $b = (b_x, b_y, b_z)$， 则

$$a \times b = (a_x i + a_y j + a_z k) \times (b_x i + b_y j + b_z k)$$

$$\begin{aligned} &= a_x b_x (i \times i) + a_x b_y (i \times j) + a_x b_z (i \times k) \\ &+ a_y b_x (j \times i) + a_y b_y (j \times j) + a_y b_z (j \times k) \\ &+ a_z b_x (k \times i) + a_z b_y (k \times j) + a_z b_z (k \times k) \end{aligned}$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y) i + (b_x a_z - b_z a_x) j + (a_x b_y - a_y b_x) k$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} i \times i = 0, & i \times j = k, & i \times k = -j, \\ j \times i = -k, & j \times j = 0, & j \times k = i, \\ k \times i = j, & k \times j = -i, & k \times k = 0, \end{array}$$

两非零向量a与b平行的充分必要条件是$a\times b=0$,

用坐标表示为：对应坐标分量成比例

$$\boxed{\text{两非零向量}a\,//\,b\Leftrightarrow a\times b=0\Leftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}}$$

叉积运算必须熟练

例 8.13 (P160)

求与$a=3i-2j+4k$，$b=i+j-2k$都垂直的单位向量.

分析：解题有两步，一是求与两向量都垂直的向量，二是单位化.

解　由叉积定义知 $a\times b$ 与两向量都垂直

$$a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 3 & -2 & 4\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{vmatrix}i-\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & -2\end{vmatrix}j+\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}k=0i+10j+5k$$

$$=(0,10,5)$$

与a,b都垂直的向量为 $a\times b=(0,10,5)$

单位向量为 $c=\pm\frac{a\times b}{|a\times b|}=\pm\frac{(0,10,5)}{\sqrt{0^2+10^2+5^2}}=\pm\frac{(0,2,1)}{\sqrt{5}}$ 坐标表达式

$=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}(2j+k)$ 分解式

练习：

1. 已知 $a=(2,1,-1)$, $b=(1,-1,2)$, 计算 $a\cdot b$, $a\times b$.

$$a\cdot b=2\times1+1\times(-1)+(-1)\times2=-1$$

$$a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=i-5j-3k$$

2. 用向量方法证明正弦定理: $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

证: 由三角形面积公式

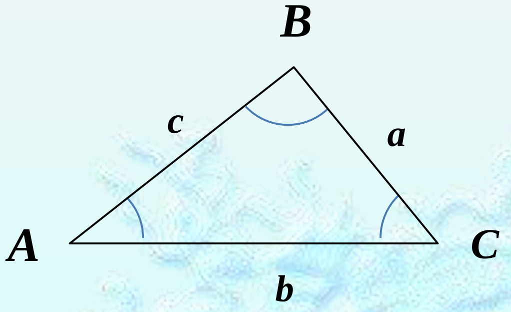
$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right| \quad =\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CA}\right|$$

因 $\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\right| = b\cdot c\cdot\sin A$

$\left|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\right| = c\cdot a\cdot\sin B$

$\left|\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CA}\right| = a\cdot b\cdot\sin C$



所以 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

小结：　　设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$

(1) 向量运算

$$a \pm b=(a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$$

$$\lambda a=(\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

$$a \cdot b=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z$$

$$a \times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

(2) 向量关系：

$$a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b=0 \Leftrightarrow a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z=0$$

$$a // b \Leftrightarrow a \times b=0 \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$$

作业：$P160$

必做：4, 6, 8

写在草稿纸上：1

预习 第8.4节