§6.4 微积分基本定理

要求：会求变上限积分$\int_a^x f(t)dt$的导数

一、积分上限的函数及其导数

$\int_a^x f(t)dt$ 称为变积分上限函数，$\int_x^b f(t)dt$ 称为变积分下限函数.

x是变量

记 $G(x)=\int_a^x f(t)dt$ 求导，$G'(x)=\left[\int_a^x f(t)dt\right]'$

$$=\left[F(t)\Big|_a^x\right]'=\left[F(x)-F(a)\right]'=F'(x)=f(x)$$

同理 $\left[\int_x^b f(t)dt\right]'=\left[F(b)-F(x)\right]'=-f(x)$

记住 $\left[\int_a^x f(t)dt\right]' = f(x)$， $\left[\int_x^b f(t)dt\right]' = -f(x)$

利用上述公式计算

$(1)\ y = \int_0^x \sin(2t+1)dt$ $\quad y' = \left[\int_0^x \sin(2t+1)dt\right]' = \sin(2x+1)$

$(2)\ y = \int_x^1 \sqrt{1+t^2}dt$ $\quad y' = \left[\int_x^1 \sqrt{1+t^2}dt\right]' = -\sqrt{1+x^2}$

练习　求下列函数的导数

$(1)\ y = \int_0^x e^{2t}dt$ $\quad (2)\ y = \int_a^x \frac{t}{1+t^2}dt$ $\quad (3)\ y = \int_x^b \sin^2 t dt$

一般地，$\left[\int_a^{u(x)} f(t)dt\right]' = \left[\int_a^{u(x)} f(t)dt\right]_u' \cdot u'(x) = f\left[u(x)\right]\cdot u'(x)$

同理 $\left[\int_{u(x)}^{b} f(t)dt\right]' = -f\left[u(x)\right]\cdot u'(x)$

$(3)\ y = \int_0^{x^2} e^{-2t}dt$　　$y' = \left[\int_0^{x^2} e^{-2t}dt\right]' = e^{-2x^2}\left(x^2\right)' = 2xe^{-2x^2}$

$(4)\ y = \int_{x^3}^{x^2} \ln t dt$　　$y' = \left[\int_{x^3}^{x^2} \ln t dt\right]' = \left[\int_{x^3}^{0} \ln t dt + \int_0^{x^2} \ln t dt\right]'$

$$= -\left(x^3\right)' \ln x^3 + \left(x^2\right)' \ln x^2 = 4x\ln x - 9x^2 \ln x$$

练习　求下列函数的导数

$(1)\ y = \int_0^{x^2} e^{2t}dt$　　$(2)\ y = \int_a^{\sqrt{x}} \frac{t}{1+t^2}dt$　　$(3)\ y = \int_{\sqrt[3]{x}}^{\sin x} \cos t^3 dt$

例6. 15 设 $f(x)=\int_{\sin x}^{1}\frac{1}{1+t^2}dt$，求$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ $(P107)$

解 $f'(x)=\left(\int_{\sin x}^{1}\frac{1}{1+t^2}dt\right)'=-\frac{1}{1+\sin^2 x}\cdot(\sin x)'=-\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$

故，$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{1+\sin^2\frac{\pi}{4}}=-\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{1}{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{3}$

计算导数值共有如下例题，要看懂

$P43$ 例3.6 $P45$ 例3.9 $P48$ 例3.15

$P51$ 作业第2题 $P107$ 例6.15

利用公式 $\left[\int_a^{u(x)} f(t)dt\right]' = f\left[u(x)\right]\cdot u'(x)$，还可以求极限

例6. 16 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \arctan t dt}{x^2}$ $(P108)$

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \arctan t dt}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x \arctan t dt\right)'}{\left(x^2\right)'}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{2} = \frac{1}{2}$$

练习：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2}dt}{x^2} = \dfrac{1}{2e}$

二、牛顿-莱布尼茨公式（P106）

设$f(x)$在$[a,b]$上连续，$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

证明：由$P106$微积分学第一基本定理,$\int_a^x f(t)dt$也是$f(x)$的一个原函数，

又由$P80$给出的结论知，原函数之间只相差一个常数，

所以, $\int_a^x f(t)dt - F(x) = C$

即 $\int_a^x f(t)dt = F(x) - C$

令$x = a$, $\int_a^a f(t)dt = 0 = F(a) - C$, 求出$C = F(a)$

令$x = b$, $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$,

这个公式在6.1节已给出，并且用它计算定积分了，这里是从理论上给出严格的证明.

所以，牛—莱公式 $\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$ 成立.

作业：　P108

写在书上：1

必做：　3.(1),(3)

　　　　4.(1),(2)

选做：　5