本章基本要求：

(1) 掌握可分离变量的微分方程 $\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$ 的解法;

(2) 掌握一阶线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的解法；

(3) 了解可降阶的三种特殊微分方程

$y''=f(x)$，$y''=f(x,y')$，$y''=f(y,y')$ 的解法;

(4) 掌握二阶常系数齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的解法.

第7章 微分方程

7.1微分方程的基本概念

要求：理解微分方程阶，通解，特解等概念

1.微分方程：含有未知函数导数（微分）的方程称为微分方程.

见教材 P81 例5.2，我们早已接触过微分方程.

求经过点(1,3)，且曲线上任上点的切线斜率为$3x^2+1$的曲线方程.

解 因为$y'=3x^2+1$， 微分方程

则 $y=\int(3x^2+1)dx=x^3+x+c$ 带一个任意常数，是通解

又因为曲线经过$(1,3)$， 初始条件：$x=1, y=3$

将$x=1$，$y=3$代入，得$c=1$，

故所求曲线为 $y=x^3+x+1$ 特解：任意常数$c=1$

再看中学物理的一个问题：自由落体的运动方程为$S=\frac{1}{2}gt^2$

这个方程怎么得出的？它是解这样一个微分方程

$$\begin{cases} S''(t)=g \\ S'(0)=0 \\ S(0)=0 \end{cases}$$

$S'(t)=\int S''(t)dt=gt+c_1$　　由$S'(0)=0$解出$c_1=0$

$S(t)=\int S'(t)dt=\frac{1}{2}gt^2+c_2$　由$S(0)=0$解出$c_2=0$

$$\boxed{\text{所以自由落体运动方程为}S=\frac{1}{2}gt^2}$$

要想解决更多的实际问题，我们对微分方程需进一步研究

2.微分方程的阶： 含有n阶导数(微分)的微分方程称为n阶微分方程.

如：

(1) $\frac{dy}{dx}-2x+\sin 2x=0$；	一阶微分方程
(2) $(y'')^3+2y'+y=0$；	二阶微分方程
(3) $y^{(5)}=e^{2x}$.	五阶微分方程

3.微分方程的解： 求出未知函数的表达式$y=f(x)$

(1)通解： n阶微分方程中含有n个独立待定常量的解称为通解.

(2)特解： 满足初始条件的解称为特解.

(3)初始条件： 方程必须满足的条件称为初始条件.

P84　4 已知函数$f(x)$的导数为$3x^2+2x-1$，且当$x=1$时, $y=4$, 求$f(x)$.

解　已知$y'=3x^2+2x-1$（一阶微分方程）

则　$y=\int y'dx=\int\left(3x^2+2x-1\right)dx=x^3+x^2-x+c$（方程的通解）

将$x=1, y=4$（初始条件）代入，得$c=3$

所求曲线为$y=x^3+x+3$（特解）

$$\begin{cases} S''(t)=g \\ S'(0)=0 \\ S(0)=0 \end{cases}$$

这是一个二阶微分方程，给出两初始条件，

求出的解是特解 $S=\dfrac{1}{2}gt^2$

请同学们在实际生活中找一些现象，用微分方程来描述

例1 求下列微分方程的通解：

$(1)\dfrac{dy}{dx}=\sin 2x \qquad (2)\,y''-2x=0$

解：(1)对$\dfrac{dy}{dx}=\sin 2x$求积分 $y=\int \sin 2xdx=-\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$

故，$\dfrac{dy}{dx}=\sin 2x$的通解为 $y=-\dfrac{1}{2}\cos 2x+C$

(2)将$y''-2x=0$化为 $y''=2x$，积分得 $y'=\int 2xdx=x^2+C_1$，

再次积分，得 $y=\int\left(x^2+C_1\right)dx=\dfrac{1}{3}x^3+C_1x+C_2$

故，$y''-2x=0$ 的通解为 $y=\dfrac{1}{3}x^2+C_1x+C_2$

函数组的线性相关性：

n个函数组的线性相关性将在线性代数中介绍，微分方程只要知道两个函数的线性相关性判定就够了.

两个函数 $y_1(x), y_2(x)$,

如果 $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} = k$(常数)，则称$y_1(x), y_2(x)$线性相关，

如果 $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} = \varphi(x)$(函数)，则称$y_1(x), y_2(x)$线性无关.

例如：$y_1 = \sin x$，$y_2 = 3\sin x$，$\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{1}{3}$，$y_1$与$y_2$线性相关，

$y_1 = e^x$，$y_2 = e^{2x}$，$\dfrac{y_1}{y_2} = e^{-x}$，$y_1$与$y_2$线性无关.

作业：P122

必做：5

写在草稿纸上：1，2, 4

7.2可分离变量的微分方程

要求：记住方程特点，会用积分求解

定义： 形如$\dfrac{dy}{dx}=f(x)g(y)$的方程称为可分离变量的微分方程.

解法： 分离变量，两边积分

给出方程：$\dfrac{dy}{dx}=f(x)g(y)$

分离变量：$\dfrac{1}{g(y)}dy=f(x)dx$

两边积分：$\displaystyle\int\frac{1}{g(y)}dy=\int f(x)dx$

例1　找出可分离变量的微分方程，并求解

$(1)\ y' = e^{x+y}$　　$(2)\ y' = \sin(x+y)$　　$(3)\ \dfrac{dy}{dx} = 3x^2 y$

$(4)\ \left(x + xy^2\right)dx + \left(y - x^2 y\right)dy = 0$　　$(5)\ y' + e^{xy} = 1$

判别:(1),(3),(4)是可分离变量的微分方程

解(1) 将$y' = e^{x+y}$分离变量：得$\dfrac{dy}{dx} = e^x e^y$　即$e^{-y}dy = e^x dx$

两边积分：$\int e^{-y}dy = \int e^x dx,$

求出$-e^{-y} + C = e^x$　　两边积分，只用加一个任意常数

故，所求微分方程通解为$e^x + e^{-y} = C.$

解 (3) $\frac{dy}{dx}=3x^2y$ 分离变量，得 $\frac{1}{y}dy=3x^2dx$,

两边积分：$\int\frac{1}{y}dy=\int 3x^2dx$ 得 $\ln|y|=x^3+C_1$

今后在 $\int\frac{1}{x}dx$ 积分中，可以不加绝对值符号，以方便计算.

整理为 $|y|=e^{x^3+C_1}$, $|y|=e^{x^3}\cdot e^{C_1}$ 即 $y=\pm e^{C_1}e^{x^3}=Ce^{x^3}$ (记 $C=\pm e^{C_1}$)

又因为 $y=0$ 也是原方程 $\frac{dy}{dx}=3x^2y$ 的一个解，因此 C 可取任意常数

故，所求原微分方程的通解为 $y=Ce^{x^3}$.

解(4)：原方程$\left(x+xy^{2}\right)dx+\left(y-x^{2}y\right)dy=0$

分离变量：$\dfrac{y}{1+y^{2}}dy=\dfrac{x}{x^{2}-1}dx$

两边积分：$\int\dfrac{y}{1+y^{2}}dy=\int\dfrac{x}{x^{2}-1}dx$

$$\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+y^{2}}d\left(1+y^{2}\right)=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^{2}-1}d\left(x^{2}-1\right)$$

$\ln\left(1+y^{2}\right)=\ln\left(x^{2}-1\right)+\ln C$

将任意常量写成
$\ln C$是为方便化简

即 $\ln\left(1+y^{2}\right)=\ln C\left(x^{2}-1\right)$

对数性质：$\ln a+\ln b=\ln ab$

故，$1+y^{2}=C\left(x^{2}-1\right)$为所求微分方程的通解.

在微分方程的解中，除了要计算不定积分外，还要考虑化简问题，因此，相对于求函数的不定积分而言，求微分方程的解显得难度更大些，既要保持思维的逻辑性，还要保持思维的严谨性，更要保持思维的灵活性.

例如 $(3)\ \dfrac{dy}{dx}=3x^2y$ 分离变量，得 $\dfrac{1}{y}dy=3x^2dx$,

两边积分, $\int\dfrac{1}{y}dy=\int 3x^2dx$ 得 $\ln|y|=x^3+C_1$ 即 $y=Ce^{x^3}$

常数 C_1

$\dfrac{dy}{dx}=3x^2y$, 还可以这样解:

分离变量: $\dfrac{1}{y}dy=3x^2dx$ 两边积分: $\int\dfrac{1}{y}dy=\int 3x^2dx$

$\ln y=x^3+\ln C \Rightarrow \ln\dfrac{y}{C}=x^3 \Rightarrow \dfrac{y}{C}=e^{x^3}$ 即 $y=Ce^{x^3}$

常数 $\ln C$

两种解法区别在于积分常数的形式

例3 求微分方程$(y+3)dx+\cot x dy=0$满足初始条件$y|_{x=0}=1$的特解.

解：分离变量： $\cot x dy=-(y+3)dx$ 即$\dfrac{1}{y+3}dy=-\tan x dx$

两边积分： $\ln(y+3)=\ln\cos x+\ln C$ 即$\underbrace{y+3=C\cos x}_{\text{通解}}$

将初始条件 $x=0, y=1$代入上式，得$1+3=C\cos 0$，求出$C=4$

故，所求特解为 $\underbrace{y=-3+4\cos x}_{\text{特解}}$

例4 放射性镭，其衰变速度与当时未衰变镭的存量M成正比，已知当$t=0$时镭的含量为M_0,求在衰变过程中镭含量$M(t)$随时间t的变化规律.

解：镭的衰变速度即是M对时间t的变化率$\dfrac{dM}{dt}$, 据题意，有

$$\frac{dM}{dt}=-kM，且M|_{t=0}=M_0, 其中k>0为比例系数.$$

分离变量：$\dfrac{1}{M}dM=-kdt$, 两边积分：$\ln M=-kt+\ln C$　即$\ln\dfrac{M}{C}=-kt$

求出$\dfrac{M}{C}=e^{-kt}$ 即$M=Ce^{-kt}$为微分方程的通解.

将$t=0$, $M=M_0$代入，得$M_0=Ce^0$　即$C=M_0$

故，所求镭的含量M随时间t的变化规律为 $M=M_0e^{-kt}$.

可见，镭的含量随时间的增加按指数规律衰减.

教材P125 齐次方程

定义：形如$\dfrac{dy}{dx}=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$的方程称为齐次方程.

解法：变量代换法

令$\dfrac{y}{x}=u$, 则 $y=xu$, $\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$,

代入原齐次方程，得$u+x\dfrac{du}{dx}=f(u)$

整理 $x\dfrac{du}{dx}=f(u)-u$

分离变量，$\dfrac{1}{f(u)-u}du=\dfrac{1}{x}dx$, 积分$\int\dfrac{1}{f(u)-u}du=\int\dfrac{1}{x}dx$

练习：

(1) $y' = -\dfrac{x}{y}$

(2) $\sqrt{1-x^2}\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2}$

(3) $xdy + 2ydx = 0,\ y(2) = 1$

(4) $y'\csc x = y\ln y,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e$

答案：

(1) $x^2 + y^2 = C$

(2) $\arcsin y = \arcsin x + c$

(3) $x^2 y = 4$

(4) $\ln(\ln y) = -\cos x$

作业：

必做：P123　5

P127　$1(1),(3)$　$2(1)$

写在草稿纸上：P123　1, 2, 4

预习：第7.3节