复习两种曲线积分计算

(1) 计算 $\int_L x\,ds$, 其中L为抛物线$y=x^2$上从(0,0)到(2,4)的一段.

解 选 x 作参数, $\begin{cases} x=x \\ y=x^2 \end{cases}$ $\quad 0\le x\le 2, \quad ds=\sqrt{1+4x^2}\,dx$

$$\int_L x\,ds=\int_0^2 x\sqrt{1+4x^2}\,dx=\left[\frac{1}{12}\left(1+4x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2=\frac{1}{12}\left[17\sqrt{17}-1\right]$$

(2) 计算 $\int_L xy\,dx$, 其中L为抛物线$x=y^2$上从$(1,-1)$到(1,1)的一段.

解 选 y 作参数, $\begin{cases} x=y^2 \\ y=y \end{cases}$ $\quad y$从−1到1

选x做参数怎么计算?

$$\int_L xy\,dx=\int_{-1}^1 y^2 y\,dy^2=2\int_{-1}^1 y^4\,dy=\frac{2}{5}y^5\Big|_{-1}^1=\frac{4}{5}$$

两种曲线积分对比

名　称	对弧长的曲线积分	对坐标的曲线积分
积分符号	$\int_L f(x,y)ds$	$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$
物理意义	曲线构件的质量	变力沿曲线所做的功
计算方法	化为对参数的定积分	
步　骤	①　写出曲线参数方程	
	② 变换弧长元素	② 将参数方程代入积分式中
	③　确定积分限，化为定积分	
注　意	积分下限小于上限	积分下限不一定小于上限

§ 11.3 格林公式

要求：记住曲线积分与路径无关的判定方法，并计算积分

11.3.1 格林公式

1. 平面区域分型 $(P234)$

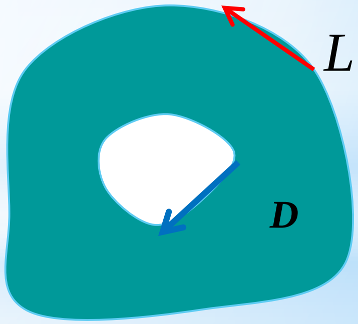
正规区域：D即是X型又是Y型区域

2. 边界曲线方向 $(P235)$

当观察者沿边界L的某一方向行走时，靠近行走方向的D总在其左边，则行走方向就是区域D的正向边界.

3. 连通　单连通区域(无“洞”区域)

多连通区域(有“洞”区域)



域 D 边界L 的正向: 外边界曲线逆时针,

内边界曲线顺时针.

定理1. 设区域 D 是由分段光滑正向曲线 L 围成，函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 D 上具有连续一阶偏导数，则有

$$\oint_{+L} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$ （格林公式）

$+L$表示L的正向

格林公式告诉我们，在平面闭区域D上的二重积分可以用沿闭区域 D的边界曲线 L上的曲线积分来表示.

格林公式的应用通常是左化右，即将对坐标的曲线积分化为二重积分来计算.

例11.8 利用格林公式计算曲线积分$I=\oint_L x^2ydx-y^3dy$，其中L是由曲线 $y^3=x^2$ 与 $y=x$ 连接起来的正向闭合曲线.

解 $P=x^2y,\ Q=-y^3$ $\quad\frac{\partial P}{\partial y}=x^2,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=0\quad \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0-x^2=-x^2$

由格林公式得

$$I=\oint_L x^2ydx-y^3dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_D(-x^2)dxdy$$

$$=-\int_0^1dx\int_x^{x^{2/3}}x^2dy=-\int_0^1\left(x^{\frac{8}{3}}-x^3\right)dx$$

$$=-\left(\frac{3}{11}x^{\frac{11}{3}}-\frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_0^1=-\frac{1}{44}$$

利用格林公式将闭曲线的积分化为二重积分，简化计算.

例11.9 利用格林公式计算曲线积分$I=\oint_L (x+y)dx-(x-y)dy$,

其中L是逆时针方向绕圆$x^2+y^2=a^2$一圈的路径.

解 $P=x+y$, $Q=-(x-y)$ $\quad \dfrac{\partial P}{\partial y}=1$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-1$

由格林公式得

$$I=\oint_L (x+y)dx-(x-y)dy=\iint_D (-2)\,dxdy$$

$$=-2\iint_D dxdy=-2\pi a^2$$

例11.10通过补线形成闭曲线，用格林公式的例题.(自学)

* 练习.　设 *L* 是一条分段光滑的闭曲线, 证明

$$\oint_L 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = 0$$

证: 令 $P = 2xy,\ Q = x^2,$ 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2x = 0$$

利用格林公式, 得

$$\oint_L 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = \iint_D 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

格林公式 $$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$$

* 推论：正向闭曲线 L 所围区域 D 的面积

$$A=\frac{1}{2}\oint_L x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x$$

见教材$P238$

例11.11 求椭圆 $L:\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\end{cases},\ 0\le\theta\le 2\pi$ 所围面积

$$A=\frac{1}{2}\oint_L x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(ab\cos^2\theta+ab\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta=\pi ab$$

特别地：当$a=b$时，$x^2+y^2=a^2$的面积为πa^2

11.3.2 平面上曲线积分与路径无关的等价条件

定理2 设D是单连通域，函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在 D 内具有一阶连续偏导数，则曲线积分$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$在$D$内与路径无关（或沿$D$内任何闭合路线的曲线积分值为零）的充分必要条件是在D内恒有

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

成立.

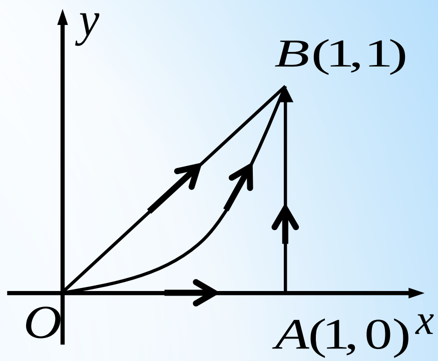
曲线积分与路径无关有多个定理，可写成四个等价条件，稍后我发到培优群，有兴趣的同学可以自学.

例11.12 计算曲线积分$I=\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x^2+y^2)dx+2xydy$，其中积分路径$L$分别如下：

(1) 从$O(0,0)$到$B(1,1)$的直线段；

(2) 从$O(0,0)$沿抛物线$y=x^2$到$B(1,1)$的曲线段；

(3) 从$O(0,0)$到$A(1,0)$再到$B(1,1)$的折线段.



解 已知$P=x^2+y^2$，$Q=2xy$ $\boxed{\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2y=\dfrac{\partial P}{\partial y}}$ 曲线积分与路径无关

可知，三条路径积分结果相同,只需计算(1)从点O到点B的直线段

直线OB的方程为$y=x$，则参数方程为$\begin{cases}x=x\\y=x\end{cases}$，参数$x$从0变到1.

$$I=\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x^2+y^2)dx+2xydy=\int_0^1(x^2+x^2)dx+2xxdx$$ $\boxed{y\text{用参数}x\text{代换}}$

$$=\int_0^1 4x^2dx=\frac{4}{3}$$

例11.13 $(P239)$ 计算曲线积分$I=\int_L\left(2xy+3xe^x\right)dx+(x^2-y\cos y)dy$,

其中L是沿抛物线$y=1-(x-1)^2$，从点$O(0,0)$到$A(2,0)$.

解： $P=2xy+3xe^x$，$Q=x^2-y\cos y$ $\quad \dfrac{\partial P}{\partial y}=2x,\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2x$

即 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 所以积分与路径无关,

将原来的积分路径改为直线OA: $y=0,x=x(0\le x\le 2)$

$$I=\int_L\left(2xy+3xe^x\right)dx+(x^2-y\cos y)dy$$

$$=\int_0^2 3xe^x dx=\left[3(x-1)e^x\right]_0^2=3(e^2+1)$$

作业：*P*240　　没有必做题

选做

1.(1)　4.(1)　7.

第十一章练习

1. 计算曲线积分$\int_L xyds$，其中L为圆心在原点，半径为1的圆弧在第一象限部分.

2. 计算曲线积分$\int_L ydx+xdy$，其中L为圆周$x^2+y^2=R^2$上对应于点$(R,0)$到$(0,R)$上的一段弧.

3. 计算曲线积分$\int_{(0,0)}^{(1,1)}\left(x^2+y^2\right)dx+2xydy$，其中$L$为抛物线$y=x^2$上点$(0,0)$到点$(1,1)$的曲线段.

4. 计算曲线积分$\int_L \sqrt{9y^{\frac{4}{3}}+1}ds$，其中$L$为曲线$y=x^3$上从点$(0,0)$到点$(1,1)$的一段弧.

1. 计算曲线积分$\int_L xyds$，其中L为圆心在原点，半径为1的圆弧在第一象限部分.

分析：从积分看$\int_L xyds$，是对弧长的曲线积分

解　参数式$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$，　$0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

$$ds=\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2}dt \quad =dt$$

$$\therefore \int_L xyds=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt \quad =\frac{1}{2}\sin^2 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}$$

2. 计算曲线积分$\int_L ydx + xdy$，其中L为圆周$x^2 + y^2 = R^2$上对应于点$(R,0)$到$(0,R)$上的一段弧.

分析：从积分看$\int_L ydx + xdy$，是对坐标的曲线积分

解　参数式$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$，$t$从0变到$\frac{\pi}{2}$

$$\therefore \int_L ydx + xdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (R\sin t)d(R\cos t) + (R\cos t)d(R\sin t)$$

$$= R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin^2 t + \cos^2 t)dt = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\, dt$$

$$= -\frac{R^2}{2}\sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

3. 计算曲线积分$\int_{(0,0)}^{(1,1)}\left(x^2+y^2\right)dx+2xydy$，其中$L$为抛物线$y=x^2$上点$(0,0)$到点$(1,1)$的曲线段.

$\boxed{\int_{(0,0)}^{(1,1)}\left(x^2+y^2\right)dx+2xydy\text{是对坐标的曲线积分}}$

解 参数式$\begin{cases} x=x \\ y=x^2 \end{cases}$, x从0变到1

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}\left(x^2+y^2\right)dx+2xydy=\int_0^1\left[x^2+\left(x^2\right)^2\right]dx+2x\left(x^2\right)dx^2$$

$$=\int_0^1\left(x^2+5x^4\right)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+x^5\right]_0^1=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$$

4. 计算曲线积分$\int_L \sqrt{9y^{\frac{4}{3}}+1}ds$，其中$L$为曲线$y=x^3$上从点$(0,0)$到点$(1,1)$的一段弧.

分析：从积分看$\int_L \sqrt{9y^{\frac{4}{3}}+1}ds$，是对弧长的曲线积分

解　参数式$\begin{cases} x=x \\ y=x^3 \end{cases}$，　$0\le x\le 1$

$$ds=\sqrt{1+\left(3x^2\right)^2}dx \quad =\sqrt{1+9x^4}dx$$

$$\int_L \sqrt{9y^{\frac{4}{3}}+1}ds=\int_0^1 \sqrt{9\left(x^3\right)^{\frac{4}{3}}+1}\left(\sqrt{1+9x^4}dx\right)$$

$$=\int_0^1\left(1+9x^4\right)dx \quad =\left[x+\frac{9}{5}x^5\right]_0^1 \quad =1+\frac{9}{5}=\frac{14}{5}$$