第五章　　不定积分

§5.1 不定积分的概念及性质

要求：理解原函数与不定积分概念，牢记16个基本积分公式

一、原函数与不定积分的概念

1.　原函数：在区间I上，若$F'(x)=f(x)$或　$\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$，则称$F(x)$是$f(x)$的一个原函数.

例如，(1) x^3+e^{-x}是$3x^2-e^{-x}$的一个原函数，因为

$$\left(x^3+e^{-x}\right)'=3x^2-e^{-x}$$

(2) $(\sin x)'=\cos x$，故$\sin x$是$\cos x$的一个原函数

又$(\sin x+1)'=\cos x$，故$\sin x+1$也是$\cos x$的一个原函数

疑问：$f(x)$的原函数是什么？

问题来了，究竟哪个是原函数？或原函数有几个？

常用结论：

(1)连续函数必有原函数

(2)如果一个函数有原函数，则必有无穷多个原函数，它们之间至多相差一个常数.

(3)若$f(x)$的一个原函数为$F(x)$，则$F(x)+C$ 是 $f(x)$的所有原函数其中C为任意常量.

证明(2)：设$G(x)$是 $f(x)$的任意一个原函数，则由$G'(x)=F'(x)$

得$G(x)=F(x)+C$，故 $f(x)$的所有原函数为$F(x)+C$

原函数是一个非常重要的概念，一定要认真看书，深刻理解.

2. **不定积分**的定义：$f(x)$的所有原函数$F(x)+C$称为$f(x)$的不定积分，记为$\int f(x)dx$，即$\int f(x)dx = F(x)+C$

$F(x)$和$f(x)$的关系：

$F'(x)=f(x)$

或$\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$

根据不定积分的定义，有如下常用结论：

（见P81）

$$(1)\ \left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x) \quad 或\ \mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right] = f(x)\mathrm{d}x$$

$$(2)\ \int f'(x)\mathrm{d}x = f(x)+C \quad 或\ \int \mathrm{d}f(x) = f(x)+C$$

重要关系：“积分”与“导数或微分”是一对互逆运算.

求$f(x)$的不定积分的关键：求出$f(x)$的一个原函数$F(x)$.

例5.1 求下列不定积分：（P81）

如果$F'(x)=f(x)$，则$\int f(x)dx=F(x)+C$

(1) $\int \cos x\mathrm{d}x$ (2) $\int e^{-x}\mathrm{d}x$ (3) $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$

解 (1) 因为$(\sin x)'=\cos x$，所以$\sin x$是$\cos x$的一个原函数，故

$$\int \cos x dx=\sin x+C$$

(2) 因为$\left(-e^{-x}\right)'=e^{-x}$，所以$-e^{-x}$是$e^{-x}$的一个原函数，故

$$\int e^{-x}dx=-e^{-x}+C$$

(3) 当$x>0$时，$(\ln x)'=\frac{1}{x}$，当$x<0$时，$\left[\ln(-x)\right]'=\frac{1}{-x}\cdot(-x)'=\frac{1}{x}$

故，$\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$

补充例题：计算下列不定积分

(1) $\int x^2 dx$　　(2) $\int \frac{1}{1+x^2} dx$　　(3) $\int \csc^2 x dx$

解　(1) 想想：$(?)' = x^2$，$\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$，故 $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$

计算积分时系数容易错

(2)　因为 $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$，故 $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$

计算积分时求导公式要记牢

(3) 因为 $(\cot x)' = -\csc^2 x$，故 $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$

计算积分时符号容易错

二、基本积分公式

(1) $\int kdx = kx + C$

(2) $\int x^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1,$

当$\alpha=-1$时，$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$，

特别$\int \frac{1}{x \pm a}dx = \ln|x \pm a| + C$

(3) $\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C, a > 0$且$a \neq 1$ 特别$\int e^{x}\mathrm{d}x = e^{x} + C$

(4) $\int \sin xdx = -\cos x + C$ $\int \cos xdx = \sin x + C$

$\int \tan xdx = -\ln|\cos x| + C$ $\int \cot xdx = \ln|\sin x| + C$

$\int \sec^{2} xdx = \tan x + C$ $\int \csc^{2} xdx = -\cot x + C$

$\int \sec x \tan xdx = \sec x + C$ $\int \csc x \cot xdx = -\csc x + C$

(5) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}dx = \arcsin x + C$ $\int \frac{1}{1+x^{2}}dx = \arctan x + C$

三、不定积分的性质：

$$(1)\int \left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$$

（两个函数代数和的积分等于它们积分的代数和）

$$(2)\int kf(x)dx=k\int f(x)dx\ (k\neq 0)$$

例5.3 求下列函数的不定积分：（P82）

$$(1)\int\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x^2-4\right)dx$$

（先将被积函数整理为 x 的幂函数）

解 $I=\int\left(x^{\frac{5}{2}}-x^2-4x^{\frac{1}{2}}+4\right)dx=\int x^{\frac{5}{2}}dx-\int x^2dx-4\int x^{\frac{1}{2}}dx+4\int dx$

$$=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}-\frac{1}{3}x^3-\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}+4x+c$$

用公式 $\int x^{\alpha}dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+c$

$$(2)\int 3^x e^x dx=\int(3e)^x dx=\frac{1}{\ln(3e)}(3e)^x+c$$

用公式：$\int a^x dx=\frac{1}{\ln a}a^x+c$

$$(4)\int \tan^2 x dx=\int(\sec^2 x-1)dx=\tan x-x+c$$

用公式：$\int \sec^2 x dx=\tan x+c$

$$(3)\int \frac{x^3}{x+2}dx=\int\frac{x^3+8-8}{x+2}dx=\int[(x^2-2x+4)-\frac{8}{x+2}]dx$$

用公式：$x^3\pm a^3=(x\pm a)(x^2\mp ax+a^2)$整理约分

$$=\frac{1}{3}x^3-x^2+4x-8\ln|x+2|+c$$

用公式：$\int\frac{1}{x\pm a}dx=\ln|x\pm a|+c$

从这几个例题看出，记住基本积分公式是多么重要

上面介绍的是不定积分计算方法一：**直接积分**

即仅作简单的代数或三角恒等变形，就可以算出积分

补充例题：求下列函数的不定积分：

$$(1)\quad \int \frac{(1+x)^3}{x^2}dx$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$= \int \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2}dx$$

$$= \int \left(x+3+3\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 3x + 3\ln|x| - \frac{1}{x} + c$$

用公式

$$\int x^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c$$

$$(\alpha \neq -1)$$

当$\alpha = -1$时，

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$$

$$(2)\ \int\left(\frac{\sin x}{2}-\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{3}{1+x^2}\right)dx$$

$$\int\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+c$$

$$=-\frac{1}{2}\cos x-\tan x+3\arctan x+c$$

$$\int\sin x\,dx=-\cos x+c$$

$$\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+c$$

$$(3)\quad\int\frac{x^3-8}{x-2}dx$$

用公式 $a^3\pm b^3=(a\pm b)\left(a^2\mp ab+b^2\right)$

$$=\int\frac{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}{(x-2)}dx$$

$$=\int\left(x^2+2x+4\right)dx\quad=\frac{1}{3}x^3+x^2+4x+c$$

(4) $\int \frac{1}{x^2(x^2+1)}dx$

折分 $\frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}$

$$= \int\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = -\frac{1}{x} - \arctan x + c$$

例5. 2 （P81）

求经过点$(1,3)$，且曲线上任一点的切线斜率为$3x^2+1$的曲线方程.

解 因为$y' = 3x^2+1$，则 $y = \int(3x^2+1)dx = x^3+x+c$

又因为曲线经过$(1,3)$，将$x=1$，$y=3$代入，得$c=1$，

故所求曲线为 $y = x^3+x+1$

小结：

一、概念：原函数与不定积分；

二、公式：基本积分公式；

三、技巧：

(1)加一减一法；

(2)先拆项后积分，如$\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$

课堂练习

$$(1)\int x^2\sqrt{x}dx$$

$$=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+c$$

$$(2)\int \frac{(x-1)^3}{x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2-3x+3\ln|x|+\frac{1}{x}+c$$

$$(3)\int \left(e^x-3\cos x\right)dx$$

$$=e^x-3\sin x+c$$

$$(4)\int 2^x e^x dx$$

$$=\frac{1}{\ln(2e)}(2e)^x+c$$

$$(5)\int \frac{x^2+x+1}{x\left(x^2+1\right)}dx$$

$$=\ln|x|+\arctan x+c$$

$$(6)\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$$

$$=x-\arctan x+c$$

作业：P83

必做： $\mathbf{3.(1),(3),(5),(7),(10),(15)}$

预习5.2节