练习：

一、将二重积分化为二次积分

(1)$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, $D: y=x, y=2, x=0$

(2)$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, $D: xy=1, y=x, y=2$

(3)$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, $D: y=x^2, y=x$

二、交换积分次序 $\int_0^1 dx\int_x^1 f(x,y)dy$

答案：一、

(1) $\int_0^2 dy\int_0^y f(x,y)dx$

或 $\int_0^2 dx\int_x^2 f(x,y)dy$

(2) $\int_1^2 dy\int_{\frac{1}{y}}^{y} f(x,y)dx$

(3) $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} f(x,y)dy$

或 $\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

答案：二、 $\int_0^1 dx\int_x^1 f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_0^y f(x,y)dx$

§ 10.3 极坐标系中计算二重积分

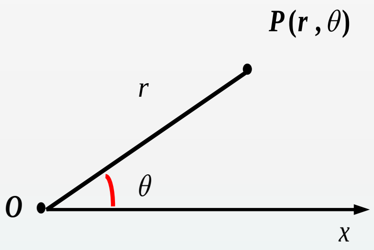
要求：会计算简单区域的二重积分

问题1：为什么要引入新的坐标系？

积分$\iint_D e^{x^2+y^2}dxdy$在直角坐标系中无法计算，必须引入新的方法.

问题2：新的计算方法怎样化为二次积分？积分限如何确定？

先介绍极坐标 (见教材$P12$)



极点o 极轴x 平面上点P

P到O点的距离称极径，记为r

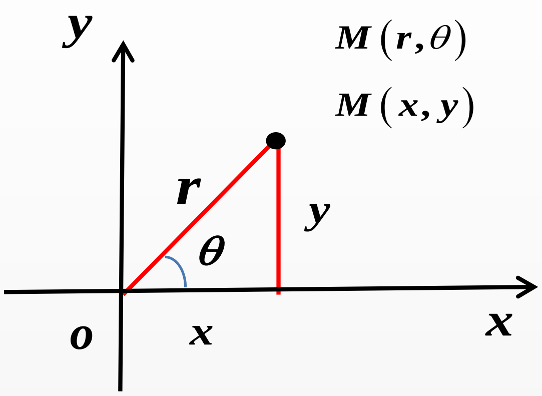
射线OP与极轴正向的夹角称极角，用θ表示

约定：极径 $0 \le r < \infty$，极角 $0 \le \theta \le 2\pi$

记住：

(1) 直、极坐标关系

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$



(2) 取值范围：$0 \le r < \infty,\ 0 \le \theta \le 2\pi$

(3) 面积元素：$d\delta = rdrd\theta$ 推导见$P208$

直角坐标下的二重积分转换为**极坐标**下的二重积分公式：

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdrd\theta$$

常用代数式转换：

$$x^2 + y^2 \Rightarrow (r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = r^2 \qquad \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \tan\theta$$

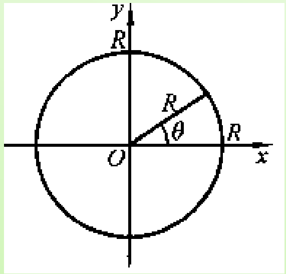
圆的直角坐标方程和极坐标方程对照

(1) 圆心在原点，半径为R的圆

直角坐标方程：$x^2+y^2=R^2$

极坐标方程：$r=R$

积分区域D：$0\le r\le R,\ 0\le\theta\le 2\pi$

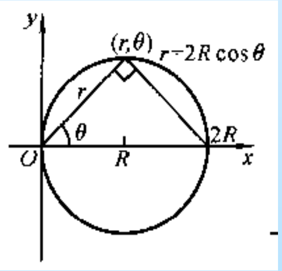


(2) 圆心在$(R,0)$，半径为R的圆：

直角坐标方程：$(x-R)^2+y^2=R^2$

极坐标方程：$r=2R\cos\theta$

积分区域D：$0\le r\le 2R\cos\theta,\quad -\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$

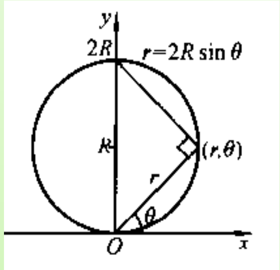


(3) 圆心在$(0,R)$，半径为R的圆：

直角坐标方程：$x^2+(y-R)^2=R^2$

极坐标方程：$r=2R\sin\theta$

积分区域D：$0\le r\le 2R\sin\theta,\ 0\le\theta\le\pi$

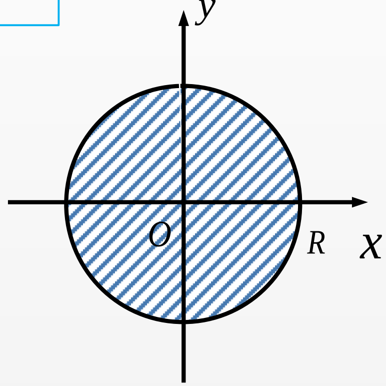


极坐标系中计算二重积分步骤：

(1) 积分区域 D 用不等式表示　(2) 变换被积表达式

(3) 化为二次积分，定限　　　(4) 计算

例如：$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy$，$D: x^2+y^2 \le R^2$



解 (1) 在极坐标系中，$D: 0 \le r \le R,\ 0 \le \theta \le 2\pi$

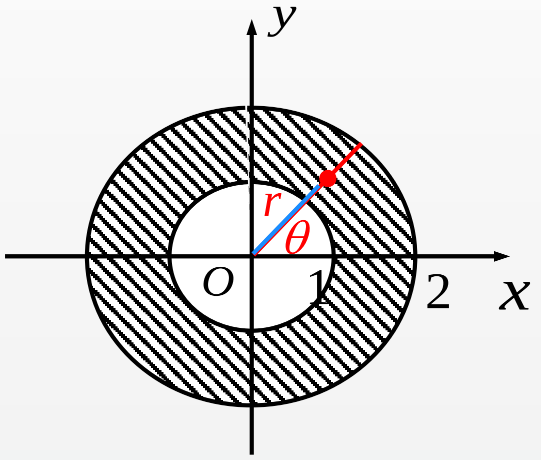
(2) $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy = \iint\limits_D e^{r^2}rdrd\theta$

(3) $= \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R e^{r^2}rdr$　极坐标系中计算基本上都是先 r 后 θ

(4) $= (\int_0^{2\pi}d\theta)(\int_0^R e^{r^2}rdr) = (\theta\Big|_0^{2\pi})\times(\frac{1}{2}e^{r^2}\Big|_0^R) = \pi(e^{R^2}-1)$

例10.9 求 $I=\iint\limits_{D}\left(x^{2}+y^{2}\right)dxdy$**，其中** D **是圆环** $1\le x^{2}+y^{2}\le 4.$

分析：积分区域由两个圆构成，与前面介绍的常用圆的定限稍许有点不同，注意 r 的变化范围.



解 (1) 积分区域 D： $0\le\theta\le 2\pi$, $1\le r\le 2$

(2) $I=\iint\limits_{D}\left(x^{2}+y^{2}\right)dxdy=\iint\limits_{D}r^{2}\cdot rdrd\theta$

(3) $=\int_{0}^{2\pi}d\theta\int_{1}^{2}r^{3}dr$

(4) $=2\pi\left(\frac{1}{4}r^{4}\right)_{1}^{2}=2\pi\cdot\frac{1}{4}\left(16-1\right)=\frac{15}{2}\pi$

一、画出积分区域，把积分$\iint_D f(x,y)dxdy$表示为极坐标形式下的二次积分，其中D是：

(1) $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\}$;

(2) $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 2x\}$;

(3) $\{(x,y) \mid a^2 \le x^2+y^2 \le b^2\}$，其中 $0<a<b$.

二. 计算下列二重积分：

(1) $\iint_D (x^2+y^2)dxdy, \quad D: x^2+y^2 \le a^2;$

(2) $\iint_D \sin(x^2+y^2)dxdy, \quad D: 1 \le x^2+y^2 \le 2;$

(3) $\iint_D e^{-x^2-y^2} dxdy, \quad D: x^2+y^2 \le R^2, x \ge 0, y \ge 0$

作业：

$P211$ **1. (1), (2)**

4. (2)

预习：第10.4, 10.5节