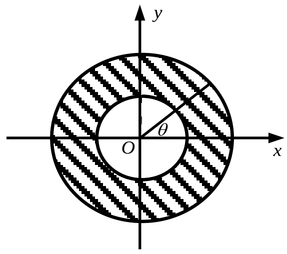
习题 10.3 （P211）

1. 在极坐标系中计算下列二重积分：

（1） $I=\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ **域是圆环** $4\le x^2+y^2\le 9$；



解　极坐标系与直角坐标的关系是 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$，

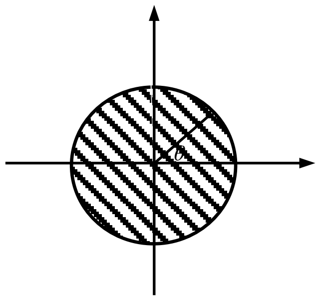
面积元素 $dxdy=rdrd\theta$，

积分区域 D：$0\le\theta\le 2\pi,\quad 2\le r\le 3$，所以

$$I=\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D r^2\cdot rdrd\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_2^3 r^3dr$$

$$=\theta\Big|_0^{2\pi}\cdot\frac{1}{4}r^4\Big|_2^3=\frac{65}{2}\pi\,.$$

（2） $I=\iint\limits_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$：　$x^2+y^2\le 1$；



解　积分区域是一个圆，

在极坐标系下 D：$0\le\theta\le 2\pi,\quad 0\le r\le 1$，

$$I=\iint\limits_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D \mathrm{e}^{-r^2}\cdot\mathrm{r}\mathrm{d}\mathrm{r}\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 e^{-r^2}rdr$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 e^{-r^2}rdr=\left(\theta\Big|_0^{2\pi}\right)\times\int_0^1 e^{-r^2}\left(-\frac{1}{2}\right)d\left(-r^2\right)$$

$$=\left(-\pi\right)\times e^{-r^2}\Big|_0^1=\pi\left(1-e^{-1}\right).$$

（3） $I=\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$：　$x^2+y^2\le ax$；

解　在极坐标系下，D：$-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2},\quad 0\le r\le a\cos\theta$，

$$I=\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D \sqrt{a^2-r^2}\cdot\mathrm{r}\mathrm{d}\mathrm{r}\mathrm{d}\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\sqrt{a^2-r^2}\cdot rdr$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\sqrt{a^2-r^2}\left(-\frac{1}{2}\right)d\left(a^2-r^2\right)=-\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{3}\left(a^2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{a\cos\theta}d\theta$$

$$=-\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\left[a^2\left(1-\cos^2\theta\right)\right]^{\frac{3}{2}}-a^3\right\}d\theta=\frac{1}{3}a^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{1-\sin^3\theta\right\}d\theta=\frac{\pi}{3}a^3\,.$$

（4）$I=\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，**其中 D 域如图 10.18 所示，以 2 为半径的四分之一圆弧和以 2 为直径的半圆弧及 y 轴所围成.**

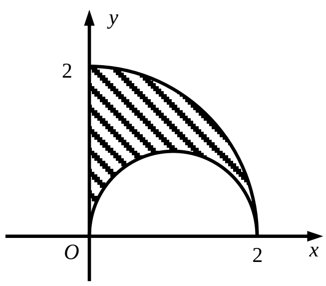


图10.18

解　记 D_1 为 2 为半径的四分之一圆，D_2 为以 2 为直径的半圆弧及 y 轴所围成的半圆，积分区域 $D=D_1-D_2$，

$$I=\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D_2}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

分别计算

$$\iint_{D_1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_1} (r\cos\theta)(r\sin\theta)\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 (r^2\cos\theta\sin\theta) rdr$$

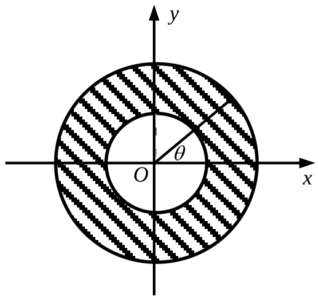
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta d\theta \int_0^2 r^3 dr = \left(\frac{1}{2}\sin^2\theta\right)_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4}r^4\right)_0^2 = 2$$

$$\iint_{D_2} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_2} (r\cos\theta)(r\sin\theta)\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} (r^2\cos\theta\sin\theta) rdr$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta \left(\frac{1}{4}r^4\right)_0^{2\cos\theta} d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta\sin\theta d\theta = -\frac{4}{6}\cos^6\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

所以 $I = \iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{D_2} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

4. 用适当的方法计算下列二重积分：



（2）$I = \iint\limits_D \ln(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，**其中** D**：** $1 \le x^2+y^2 \le \mathrm{e}$.

解　选择在极坐标系下积分

在极坐标系下 D：$0 \le \theta \le 2\pi$，$1 \le r \le \sqrt{e}$，

$$\iint\limits_D \ln(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D \ln r^2 \cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^{\sqrt{e}} \ln r^2 \cdot rdr$$

$$= \pi\int_1^{\sqrt{e}} \ln r^2 dr^2 = \pi\int_1^e \ln u du \quad （令 u = r^2）$$

（用分部积分法算此积分）$= \pi[u\ln u - u]_1^e = \pi[(e-e)-(0-1)] = \pi$.