复习对坐标的曲线积分

$P229$ 计算$I=\int_L \frac{1}{x-y}ds$, 其中L为从点$(0,-2)$到点$(4,0)$的线段.

解 (1) 积分直线的方程为 $y=\frac{1}{2}x-2$ x作参数，从0变到4

(2) 变换弧长元素 $ds=\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx=\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\,dx=\frac{\sqrt{5}}{2}dx$

(3) 化为定积分 $I=\int_0^4 \frac{1}{x-\left(\frac{1}{2}x-2\right)}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}dx\right)$

$$=\sqrt{5}\int_0^4 \frac{1}{x+4}dx=\sqrt{5}\ln(x+4)\big|_0^4=\sqrt{5}\ln 2$$

$P229$ 计算$\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$，其中$L$为圆周$x^2+y^2=a^2$，直线 $y=x$及x轴在第一象限内所围成的扇形的整个边界.

解 将闭曲线分为三段计算

L_1：x轴上的一段，参数式方程 $\begin{cases} x=x \\ y=0 \end{cases}$ $\quad 0\le x\le a$

$$\int_{L_1} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int_0^a e^x dx=e^x\Big|_0^e=e^a-1$$

L_2：圆周$x^2+y^2=a^2$上$0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$的$1/8$弧段

参数方程：$\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \end{cases}$，$\quad 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$ $\qquad ds=ad\theta$

$$\int_{L_2} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a a d\theta=ae^a\frac{\pi}{4}$$

L_3:直线$y=x$上$0\le x\le \frac{\sqrt{2}}{2}a$ 参数方程:$\begin{cases} x=x \\ y=x \end{cases}, \quad 0\le x\le \frac{\sqrt{2}}{2}a$

$$ds=\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx=\sqrt{2}\,dx$$

$$\int_{L_2} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} e^{\sqrt{2}x}\left(\sqrt{2}dx\right)=e^{\sqrt{2}x}\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a}=e^a-1$$

所以$\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=\int_{L_1} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds+\int_{L_2} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds+\int_{L_3} e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$

$$=\left(e^a-1\right)+ae^a\frac{\pi}{4}+\left(e^a-1\right)=2\left(e^a-1\right)+ae^a\frac{\pi}{4}$$

§ 11.2 对坐标的曲线积分

要求：分清积分记号，记住化为定积分的方法

11.2.1 对坐标曲线积分的概念与性质

对坐标的曲线积分由物理学中的做功问题引出

中学物理介绍过，功等于力乘位移，$W = F \cdot S$，其中力是常力，质点沿直线移动.

问题：如果力是变的，质点不是直线移动，功怎么计算？

求解的基本思想：微元法

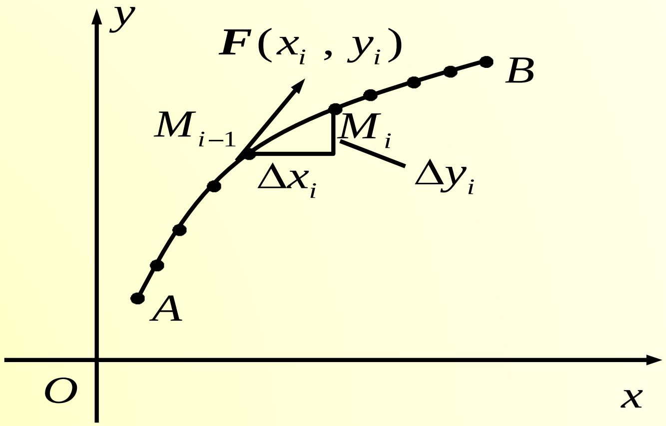
已知 xoy 平面内的一个质点在变力 $\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ 的作用下，从点 A 沿光滑曲线弧 L 移动到点 B，求变力对质点所做的功.

(1)分割 将曲线L分割为n小段，

第i段$\overrightarrow{M_{i-1}M_i} = \Delta x_i \vec{i} + \Delta y_i \vec{j}$ 位移为向量

第i段的力为 力为向量

$$\overrightarrow{F(x_i, y_i)} = P(x_i, y_i)\vec{i} + Q(x_i, y_i)\vec{j}$$



(2)近似 力在第i段做的功近似为

$$\Delta w_i \approx P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i$$

$W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{M_{i-1}M_i}$ 两向量的点积

(3)求和 变力对质点做的功为

$$W = \sum_{i=1}^{n} \Delta w_i \approx \sum_{i=1}^{n} \left[P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_i)\Delta x_i + \sum_{i}^{n} Q(x_i, y_i)\Delta y_i$$

(4)取极限 变力对质点做的功为

$$W=\lim_{\lambda\to 0}\left[\sum_{i=1}^{n}P(x_i,y_i)\Delta x_i+\sum_{i}^{n}Q(x_i,y_i)\Delta y_i\right]$$

$\lambda\to 0$是指每小段位移无限趋近于0

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(x_i,y_i)\Delta x_i+\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i}^{n}Q(x_i,y_i)\Delta y_i$$

$$=\int_L P(x,y)dx+\int_L Q(x,y)dy$$

$$=\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

约定：两个积分合写

结论 平面内质点在变力$\overrightarrow{F(x,y)}=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$的作用下沿曲线$L$从$A$点移动到$B$点所做的功

$$W=\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_L \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

其中：$d\vec{r}=dx\vec{i}+dy\vec{j}$

定义 (P230)

设L为xoy平面内从点A到点B的一条有向光滑曲线弧，$P(x,y)$与$Q(x,y)$在L上有界.

如果 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}P(x_i,y_i)\Delta x_i$ 的极限总存在，则称此极限值为函数$P(x,y)$在有向曲线弧L上**对坐标x**的曲线积分.

记为 $\int_L P(x,y)dx=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}P(x_i,y_i)\Delta x_i$

如果 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}Q(x_i,y_i)\Delta y_i$ 的极限总存在，则称此极限值为函数$Q(x,y)$在有向曲线弧L上**对坐标y**的曲线积分.

记为 $\int_L Q(x,y)dy=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}Q(x_i,y_i)\Delta y_i$

对坐标曲线积分的性质

性质1 (有向性) 设$-L$是与L相反方向的有向曲线，则 $\boxed{\int_{-L} = -\int_{L}}$

$$\int_{-L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

性质2 (积分的可加性) 设L由两段光滑曲线L_1和L_2组成，则

$$\boxed{\int_{L} = \int_{L_1} + \int_{L2}}$$

两点说明

(1)被积分函数$P(x,y)$、$Q(x,y)$中的点(x,y)在曲线L上，由曲线L的方程$y = y(x)$可知，x, y是相互关联的.

(2)对坐标的曲线积分与路径L的方向是有关的，因此在积分时要注意积分的路径、积分的起点与终点. 下限不一定小于上限.

11.2.2 对坐标曲线积分的计算

计算的总原则：化为对参数的定积分，

具体计算简单归结为三步式：

第一步：写出曲线的参数方程； $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ （t是参数）

第二步：变换 直接将参数方程代入积分表达式中，此时被积表达式中变量仅有参数t

第三步：确定积分限

积分曲线起点A对应参数$t = t_1$，终点B对应参数$t = t_2$

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{t_1}^{t_2} \{P[x(t),y(t)]x'(t) + Q[x(t),y(t)]y'(t)\}dt$$

对坐标的曲线积分转化为定积分由这三步完成

注意：积分限的确定，下限不一定小于上限.

$t=t_1$代入参数方程中算出是曲线起点的坐标，即$A\left[x(t_1),y(t_1)\right]$;

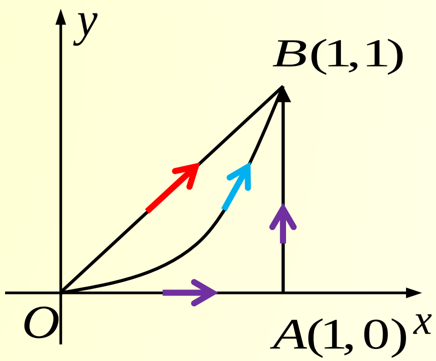
$t=t_2$代入参数方程中算出是曲线终点的坐标，即$B\left[x(t_2),y(t_2)\right]$.

例1 计算曲线积分$I=\int_L 2xy^3dx+x^2dy$,其中积分路径L分别如下：

(1) 从$O(0,0)$到$B(1,1)$的直线段；

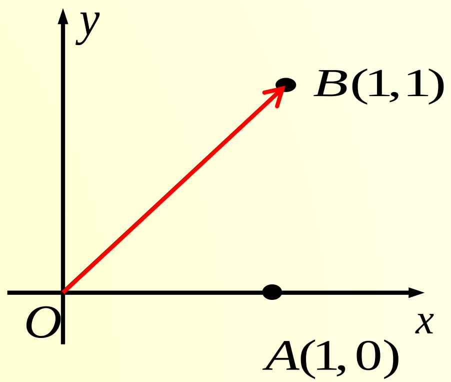
(2) 从$O(0,0)$沿抛物线$y=x^2$到$B(1,1)$的曲线段；

(3) 从$O(0,0)$到$A(1,0)$再到$B(1,1)$的折线段.



例1 计算曲线积分$I=\int_L 2xy^3dx+x^2dy$,其中积分路径

(1) 从$O(0,0)$到$B(1,1)$的直线段；



解　(1)直线OB的方程为$y=x$,

则参数方程为$\begin{cases} x=x \\ y=x \end{cases}$，参数$x$从0变化到1.

$$I=\int_L 2xy^3dx+x^2dy=\int_0^1 2x\cdot x^3dx+x^2dx$$

$$=\int_0^1\left(2x^4+x^2\right)dx=\left(\frac{2}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^1=\frac{14}{15}$$

例1 计算曲线积分$I=\int_L 2xy^3dx+x^2dy$,其中积分路径

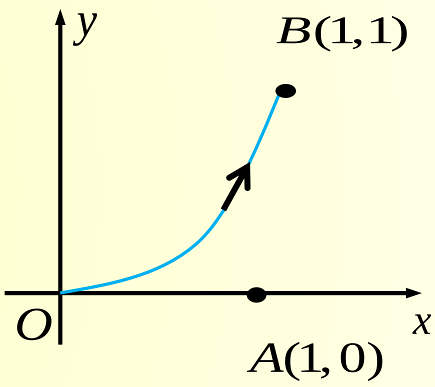
(2) 从$O(0,0)$沿抛物线$y=x^2$到$B(1,1)$的曲线段;

解 (2)曲线的参数方程为$\begin{cases} x=x \\ y=x^2 \end{cases}$,参数$x$从$0$变化到$1$,

$$I=\int_L 2xy^3dx+x^2dy=\int_0^1 2x\cdot(x^2)^3dx+x^2dx^2$$

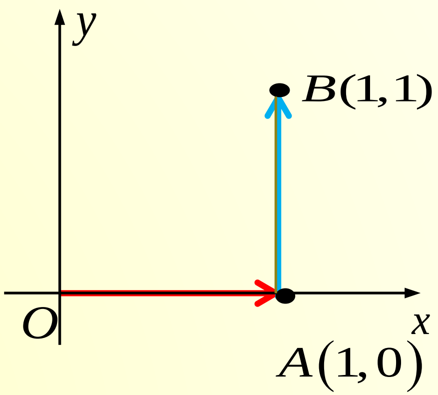
$$=\int_0^1 2x\cdot x^6dx+x^2\cdot 2xdx=\int_0^1\left(2x^7+2x^3\right)dx$$

$$=\left(\frac{1}{4}x^8+\frac{1}{2}x^4\right)_0^1=\frac{3}{4}$$



例1 计算曲线积分$I=\int_L 2xy^3dx+x^2dy$,其中积分路径

(3) 从$O(0,0)$到$A(1,0)$再到$B(1,1)$的折线段.



解 (3)积分路径$L=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$,

而$\overrightarrow{OA}$: $\begin{cases} x=x \\ y=0 \end{cases}$, 参数$x$从0到1;

而$\overrightarrow{AB}$: $\begin{cases} x=1 \\ y=y \end{cases}$, 参数$y$从0到1;

$$I=\int_L 2xy^3dx+x^2dy=\int_{\overrightarrow{OA}}+\int_{\overrightarrow{AB}}$$

$$=\int_0^1 2x\cdot 0dx+0+\int_0^1 2\cdot 1\cdot y^3 d1+\int_0^1 1dy=\int_0^1 dy=1$$

OA 段 $y=0$ AB 段 $x=1$

两种曲线积分都是化为对参数的定积分，记住以下曲线的参数方程对计算有帮助.

① **直线**，选x作参数，则参数方程为$\begin{cases} x = x \\ y = kx + b \end{cases}$

特例：水平直线$y=$常数，选x作参数；

铅直直线$x=$常数，选y作参数.

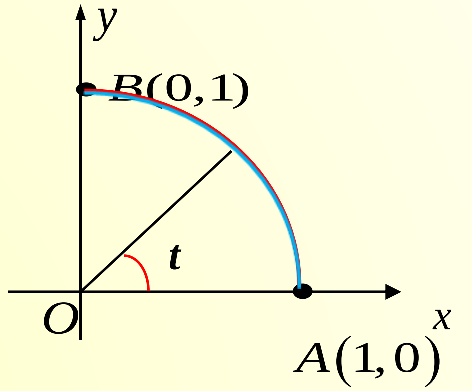
② **抛物线** $y = x^2$，选x作参数，则参数方程为$\begin{cases} x = x \\ y = x^2 \end{cases}$

③ **圆** $x^2 + y^2 = a^2$，以圆心角t为参数，参数方程为$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$

④ 摆线，参数方程为$x = a(t - \sin t), x = a(1 - \cos t)$

⑤ 螺旋线，参数方程为$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = kt$

例11.7 求质点在力$F = x^2 i - xyj$的作用下沿曲线$L: x = \cos t, y = \sin t$从点$A(1,0)$移动到点$B(0,1)$时所做的功.



解 积分路径如图，是四分之一圆周

且方向为逆时针 参数t从0变到$\frac{\pi}{2}$;

$$W = \int_L F \cdot dr = \int_L x^2 dx - xy\,dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^2 d(\cos t) - (\cos t)(\sin t) d(\sin t)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-2\cos^2 t \sin t\right) dt = 2\left[\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{3}.$$

作业：

$P233$

1. (1) (2) (3) (4)　3.

预习：第11. 3节