

§1.2 初等函数

要求：记住基本初等函数的图形

一、基本初等函数

常、幂、指、对、三角、反三角这六类函数统称**基本初等函数**

(1) 常量函数 $y = C$

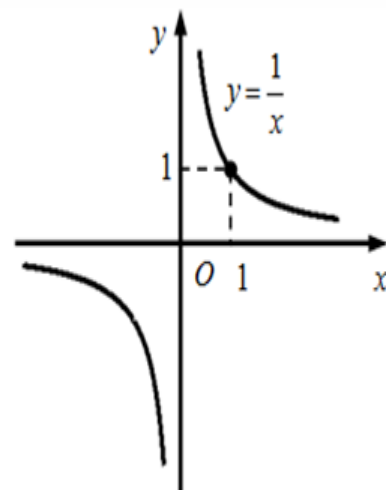
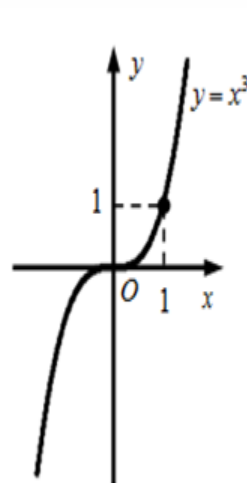
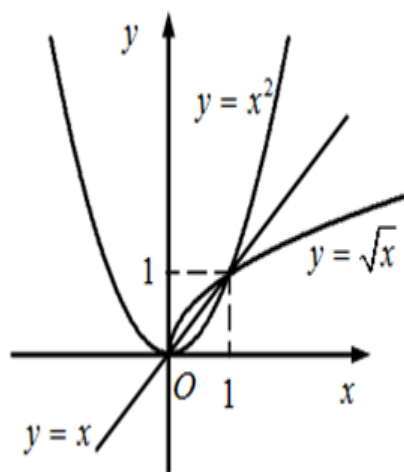
其图形是一条水平直线，它在 y 轴上的截距为 C

(2) 幂函数

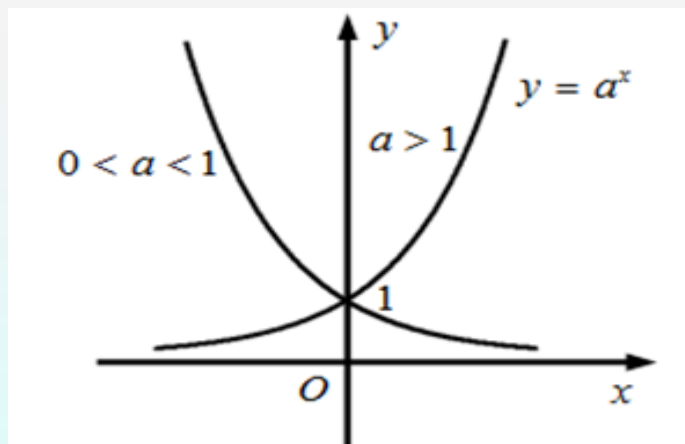
常见的幂函数有

$$y = x, \quad y = x^2,$$

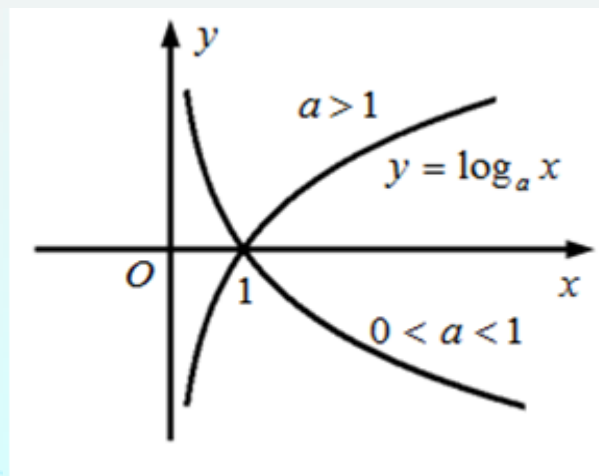
$$y = \sqrt{x}, \quad y = x^3, \quad y = \frac{1}{x}$$



(3) 指数函数



(4) 对数函数



(5) 三角函数

1. 正弦函数 $y = \sin x$

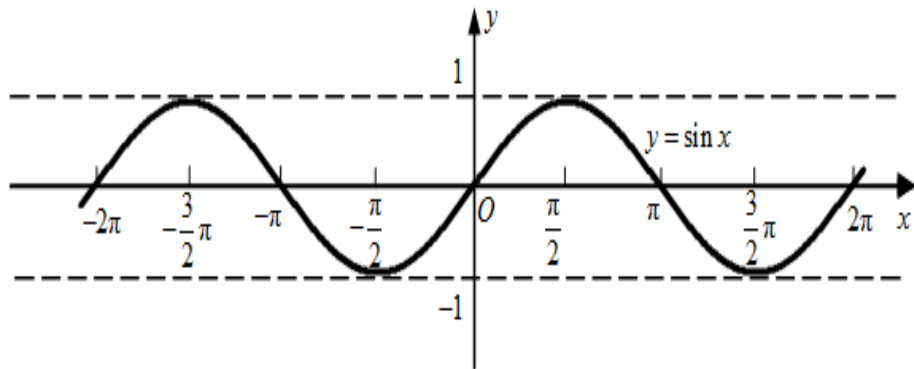


图 1.11

2. 余弦函数 $y = \cos x$

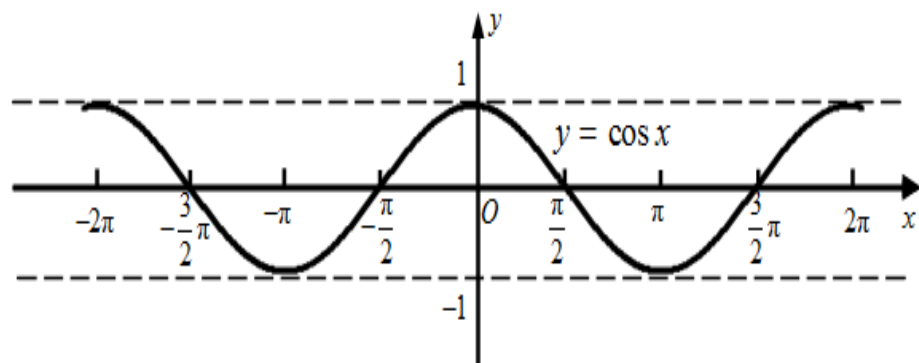


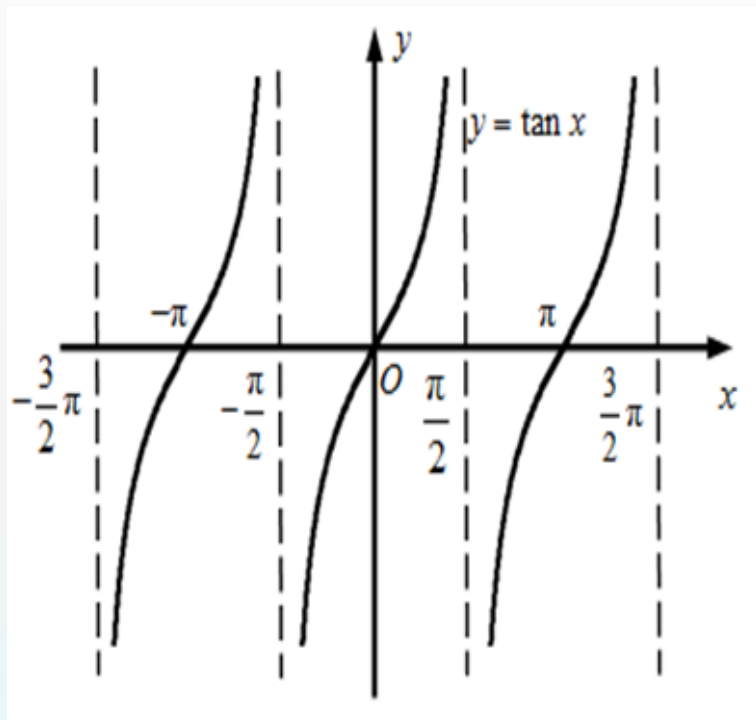
图 1.12

正、余弦函数都具有周期性，有界性

周期为 2π ， $|\sin x| \leq 1$ ， $|\cos x| \leq 1$

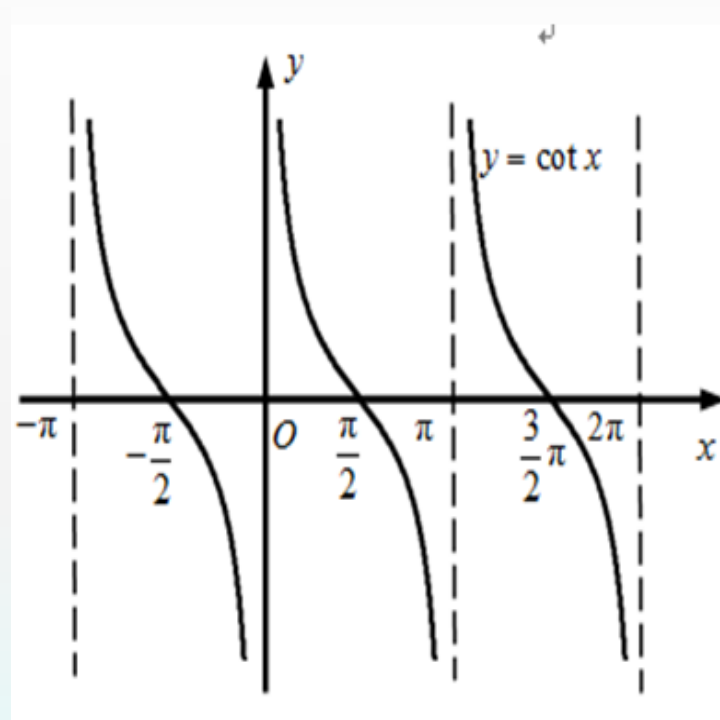
3. 正切函数

$$y = \tan x$$



4. 余切函数

$$y = \cot x$$



正、余切函数都具有周期性，周期为 π

5. 正割函数

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

6. 余割函数

$$y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

这两个函数记住表达式就行，图形不用记。

反函数 教材P6

简单地说， y 表示函数， x 表示自变量；其反函数就是解出 $x = F(y)$ ， x 表示函数， y 表示自变量.

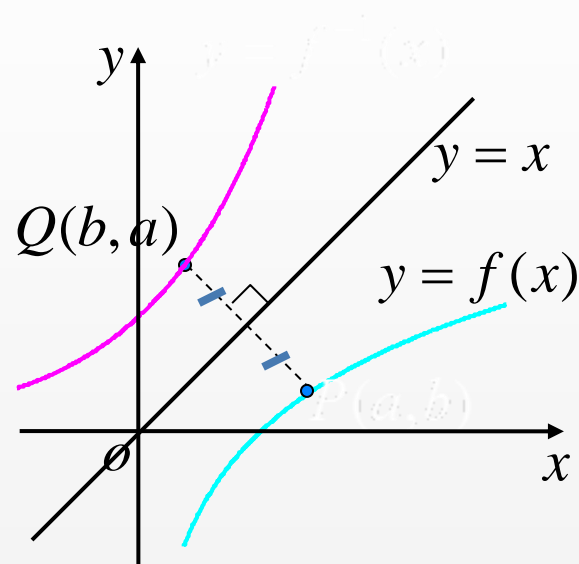
例如：函数 $y = x^3$ ，其反函数是 $x = \sqrt[3]{y}$

同理：函数 $x = \sqrt[3]{y}$ ，其反函数是 $y = x^3$ ，

在同一坐标系内， $y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.

教材 P6

函数 $y = f(x)$ 与其反函数
 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线
 $y = x$ 对称.



例如,

指数函数 $y = e^x, x \in (-\infty, +\infty)$

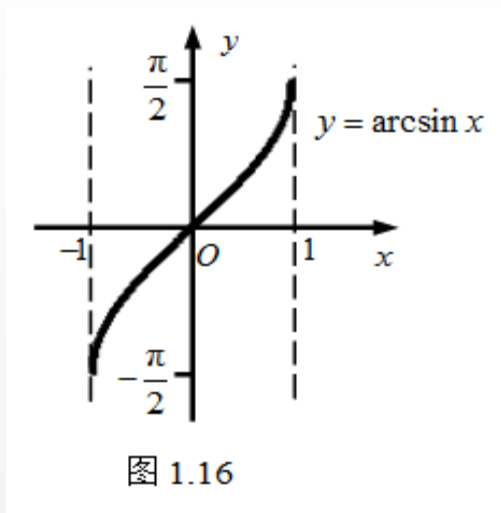
对数函数 $y = \ln x, x \in (0, +\infty)$

} 互为反函数,

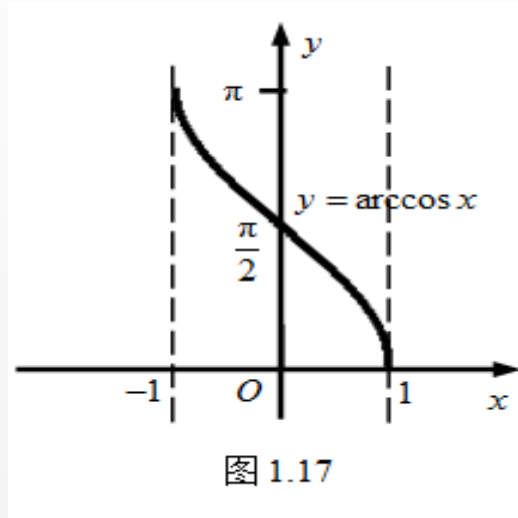
它们都单调递增, 其图形关于直线 $y = x$ 对称.

(6) 反三角函数

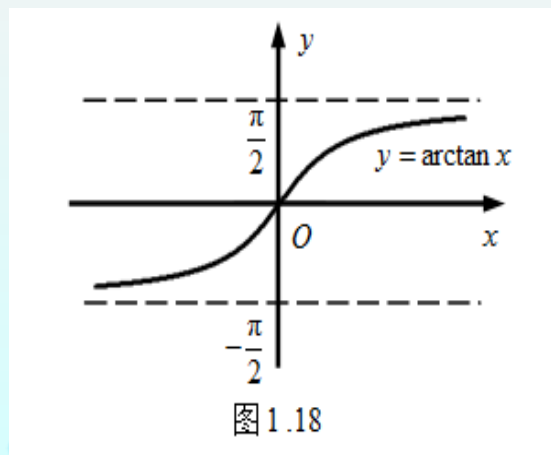
1. 反正弦 $y = \arcsin x$



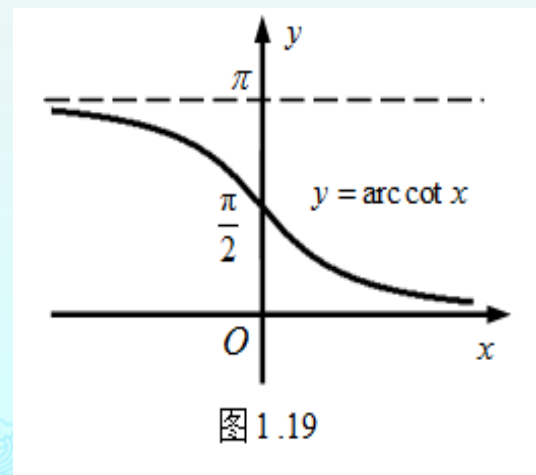
2. 反余弦 $y = \arccos x$



3. 反正切 $y = \arctan x$



4. 反余切 $y = \operatorname{arccot} x$



二、复合函数

定义1.9 (见P10)

已知函数 $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, 若 $y = f[\varphi(x)]$ 的表达式有意义, 则称 $y = f[\varphi(x)]$ 是由 $y = f(x)$ 与 $u = \varphi(x)$ 复合而成的复合函数.

例如: $y = \sin u$, $u = x + 1$, 复合函数为 $y = \sin(x + 1)$

说明: 由 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$ 复合而成的函数 $y = f[\varphi(x)]$ 不一定有意义, 如 $y = \sqrt{u}$ 及 $u = -x^2 - 2$ 复合而成的函数 $y = \sqrt{-x^2 - 2}$ 就没有意义.

因为 $y = \sqrt{u}$ 的定义域是 $[0, +\infty)$, 而 $u = -x^2 - 2$ 的值域是 $(-\infty, -2]$

不能构成复合函数

三、初等函数

由基本初等函数与多项式函数经过**有限次**复合与**有限次**运算而成的可以用**一个式子表达**的函数称为初等函数.

注意：分段函数不是初等函数

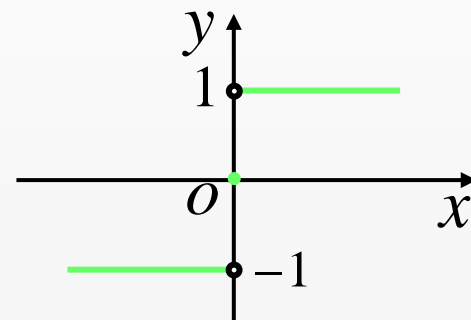
例如： $y = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} = |x|$ 是初等函数，

而 $y = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ -x + 3 & x < 0 \end{cases}$ 不是初等函数. (不能用一个式子表达)

非初等函数举例: P3

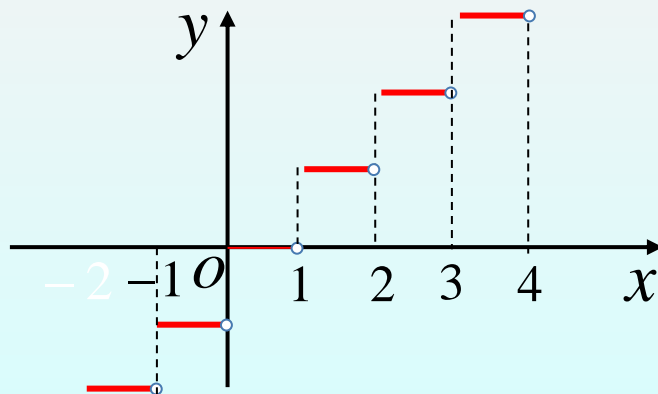
符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0 \\ 0, & \text{当 } x = 0 \\ -1, & \text{当 } x < 0 \end{cases}$$



取整函数

$$y = [x] = n, \text{ 当 } n \leq x < n+1, n \in \mathbb{Z}$$



四、函数关系的建立

例1.6 (P11) 将圆心角为 α 弧度的扇形卷成一个圆锥形(如图1.20), 要求圆锥顶角为 θ , 试求 θ 和 α 的函数关系.

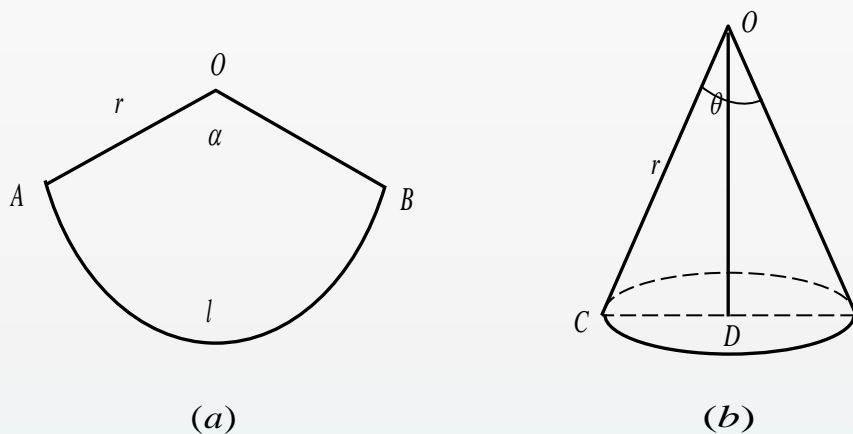


图 1.20

解: (a) 图的弧长与 (b) 图的圆周长相等

弧长 $l = ra$, 圆周长为 $2\pi \cdot CD$

得到等式 $ra = 2\pi \cdot CD$

建立函数关系时
注意: 找扇形中
某个量与圆锥中
某个量的等量关
系

解：(a) 图的弧长与 (b) 图的圆周长**相等**

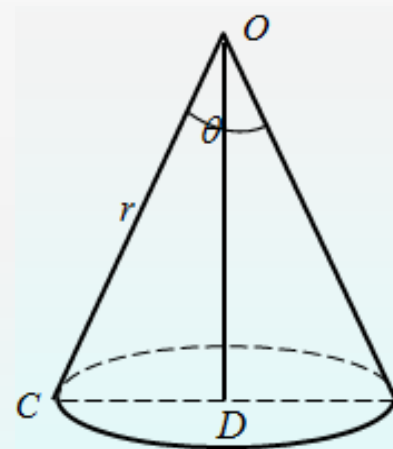
弧长 $l = ra$ ，圆周长为 $2\pi \cdot CD$

得到等式 $ra = 2\pi \cdot CD$ 底圆半径 $CD = \frac{ra}{2\pi}$

在直角三角形ODC中

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{CD}{r} = \frac{\alpha}{2\pi}$$

$$\theta = 2\arcsin \frac{\alpha}{2\pi} \quad (0 < \alpha < 2\pi)$$



作业：P11

必做：2. (1) (5) (8) (12)

在草稿纸上演算：3[#]

选做：6^{*}