5.3 Z反变换

5.3 反演积分法

p2~3讨论学习：

Z逆变换公式推导方法

Z逆变换的定义

复变函数理论中的柯西公式为

$$\oint_C z^{n-1}dz = \begin{cases} 2\pi j & n=0 \\ 0 & n\neq 0 \end{cases}$$

C为闭合曲线，积分沿逆时针方向。

序列$f(k)$的双边Z变换的定义为

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)z^{-k} \qquad \alpha<|z|<\beta$$

上式两边同乘: z^{n-1} 再做围线积分

$$\oint_C z^{n-1}dz = \begin{cases} 2\pi j & n=0 \\ 0 & n\neq 0 \end{cases}$$

$$\oint_C F(z)z^{n-1}dz = \oint_C z^{n-1}[\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)z^{-k}]dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\oint_C z^{-k+n-1}dz$$

根据柯西公式:

$$\oint_C F(z)z^{n-1}dz = 2\pi j f(n)$$

即-k+n-1=-1时

所以:

$$f(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C F(z)z^{n-1}dz$$

C为收敛域内的闭合曲线，积分沿逆时针方向。

2. 幂级数展开法（长除法）

p4~9讨论学习：
1、什么情况下可以用长除法计算Z逆变换；
2、根据收敛域不同，长除法应作怎样变化；

根据双边Z变换的定义，若$f(k)$为双边序列，则$F(z)$为z和z^{-1}的幂级数，收敛域为$\alpha<|z|<\beta$。即

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)z^{-k}=\sum_{k=-\infty}^{-1} f(k)z^{-k}+\sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}$$

$$=F_1(z)+F_2(z) \qquad \alpha<|z|<\beta$$

式中：

$$F_1(z)=\sum_{k=-\infty}^{-1} f(k)z^{-k} \qquad |z|<\beta$$

$$F_2(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} \qquad |z|>\alpha$$

F(z)一般为有理分式,即F(z)=N(z)/D(z)

若$f(k)$为因果序列，则$F(z)$为z^{-1}的幂级数，收敛域为$|z|>\alpha$，即

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = f(0)+f(1)z^{-1}+f(2)z^{-2}+f(3)z^{-3}+\cdots$$

f(k)是降幂排列的z的系数， 因此N(z)，D(z)按z的降幂排列次序进行长除

若$f(k)$为反因果序列，$k>0$时$f(k)=0$，则$F(z)$为z的幂级数，收敛域为$|z|<\beta$，即

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{-1} f(k)z^{-k} = f(-1)z+f(-2)z^{2}+f(-3)z^{3}\cdots$$

f(k)是升幂排列的z的系数， 因此N(z)，D(z)按z的升幂排列次序进行长除

例 5-12（类似）已知 $F(z)=\dfrac{z^2+z}{z^2-2z+1}$, $|z|>1$，求 $F(z)$ 的原函数 $f(k)$。

解 因为 $F(z)$ 的收敛域为 $|z|>1$，所以其原函数为因果序列，所以按降幂排列：

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1+3z^{-1}+5z^{-2}+\cdots \\
\cline{2-2}
z^2-2z+1 & z^2+z \\
 & \underline{z^2-2z+1} \\
 & \qquad 3z-1 \\
 & \qquad \underline{3z-6+3z^{-1}} \\
 & \qquad\qquad 5-3z^{-1} \\
 & \qquad\qquad \underline{5-10z^{-1}+5z^{-2}} \\
 & \qquad\qquad\qquad 7z^{-1}-5z^{-2} \\
 & \qquad\qquad\qquad \cdots
\end{array}
$$

即

$$F(z)=\frac{z^2+z}{z^2-2z+1}=1+3z^{-1}+5z^{-2}+\cdots$$

于是得

$$k<0,\ f(k)=0$$

$$k\geq 0,\ f(0)=1,\ f(1)=3,\ f(2)=5,\cdots$$

$$f(k)=(2k+1)u(k)$$

例 5-13（类似） 已知 $F(z)=\dfrac{z^2+z}{z^2-2z+1}$，$|z|<1$，求$F(z)$的原函数$f(k)$。

解 因为$F(z)$的收敛域为$|z|<1$，故$F(z)$的原函数$f(k)$为反因果序列，按升幂排列：

$$
\begin{array}{r|l}
 & z+3z^2+5z^3+\cdots \\
\hline
1-2z+z^2 & z+z^2 \\
 & \underline{z-2z^2+z^3} \\
 & \qquad 3z^2-z^3 \\
 & \qquad \underline{3z^2-6z^3+3z^4} \\
 & \qquad\qquad 5z^3-3z^4 \\
 & \qquad\qquad \underline{5z^3-10z^4+5z^5} \\
 & \qquad\qquad\qquad 7z^4-5z^5 \\
 & \qquad\qquad\qquad \cdots
\end{array}
$$

即

$$F(z)=\frac{z^2+z}{z^2-2z+1}=1z+3z^2+5z^3+\cdots$$

于是得

$$k<0,\ f(-1)=1,\ f(-2)=3,\ f(-3)=5,\cdots$$

$$k\geq 0,\ f(k)=0$$

$$f(k)=(-2k-1)u(-k-1)$$

不足之处：通式难求

3. 部分分式展开法

$$e^{s_i t}\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{s-s_i}$$

p10~17讨论学习：
1、将一阶极点有理分式展开后的基本分式是什么？与拉普拉斯逆变换展开后的基本分式有什么不同？
2、根据收敛域不同，其逆变换有什么不同？

若$X(z)$为有理分式，则$X(z)$可表示为

$$X(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}+\cdots+b_1 z+b_0}{a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0}$$

（1）如果 $M>N$，则先用长除法将 $X(z)$ 化为一个真分式与一个整式之和的形式。其中整式部分形如 $b_0+B_1z+B_2z^2+\cdots$，其 z 反变换为冲激函数及其移序形式的线性组合，即

$$b_0+B_1z+B_2z^2+\cdots \leftrightarrow b_0\delta(n)+B_1\delta(n+1)+B_2\delta(n+2)+\cdots$$

但由于常用指数函数Z变换的形式为

有理分式必须m<=n

$$a^n u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-a} \quad |z|>a \qquad -a^n u(-n-1) \leftrightarrow \frac{z}{z-a} \quad |z|<a$$

因此，一般先把$\boxed{\dfrac{X(z)}{z}}$展开为部分分式，然后再乘以z，得到用基本形式$\dfrac{z}{z-a}$表示的$X(z)$，再根据常用Z变换对求Z逆变换。

当m<=n，$\dfrac{X(z)}{z}$一定为有理真分式：

1、有一阶极点，可表示为：

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{B(z)}{M(z)}=\frac{B(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_m)}$$

$$=\frac{K_1}{z-z_1}+\frac{K_2}{z-z_2}+\cdots+\frac{K_m}{z-z_m}=\sum_{i=1}^{m}\frac{K_i}{z-z_i} \qquad (1)$$

计算系数K_i $\quad K_i=(z-z_i)\left.\dfrac{X(z)}{z}\right|_{z=z_i}$

式(1)两端乘以z，得 $\quad X(z)=\sum_{i=1}^{m}K_i\dfrac{z}{z-z_i}$

根据*X(z)*的收敛域获得其逆变换

$$a^n u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-a} \qquad |z|>|a|$$

$$-a^n u(-n-1) \leftrightarrow \frac{z}{z-a} \qquad |z|<|a|$$

例5-14（类似）：已知象函数 $F(z)=\dfrac{z^2}{(z+1)(z-2)}$**，求逆z变换。**

其收敛域分别为：（1）|z|>2 (2) |z|<1 (3) 1<|z|<2

解：部分分式展开为

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{z}{(z+1)(z-2)}=\frac{\frac{1}{3}}{z+1}+\frac{\frac{2}{3}}{z-2} \qquad F(z)=\frac{1}{3}\frac{z}{z+1}+\frac{2}{3}\frac{z}{z-2}$$

(1)当|z|>2，故f(k)为因果序列

$$f(k)=[\frac{1}{3}(-1)^k+\frac{2}{3}(2)^k]\varepsilon(k)$$

(2) 当|z|<1，故f(k)为反因果序列

$$f(k)=[-\frac{1}{3}(-1)^k-\frac{2}{3}(2)^k]\varepsilon(-k-1)$$

(3)当1<|z|<2

$$f(k)=\frac{1}{3}(-1)^k\varepsilon(k)-\frac{2}{3}(2)^k\varepsilon(-k-1)$$

补充例 已知 $F(z)=\dfrac{z^2+2}{(z-1)(z-2)}, |z|>2,$

求$F(z)$的原函数$f(k)$。

注意这里
m=n

解 因为$F(z)$的收敛域为$|z|>2$，所以$f(k)$为因果序列。

$\dfrac{F(z)}{z}$ 的极点全为一阶极点，可展开为

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{z^2+2}{z(z-1)(z-2)}=\frac{K_1}{z}+\frac{K_2}{z-1}+\frac{K_3}{z-2}$$

求K_1、 K_2、K_3， 得

$$K_1=z\cdot\frac{F(z)}{z}\Big|_{z=0}=1$$

$$K_2=(z-1)\cdot\frac{F(z)}{z}\Big|_{z=1}=-3 \qquad K_3=(z-2)\cdot\frac{F(z)}{z}\Big|_{z=2}=3$$

于是得 $$\frac{F(z)}{z}=\frac{1}{z}-\frac{3}{z-1}+\frac{3}{z-2}$$

故 $$F(z)=1-\frac{3z}{z-1}+\frac{3z}{z-2}$$ |z|>2

由于 $\delta(k)\leftrightarrow 1$ $\quad u(k)\leftrightarrow\frac{z}{z-1}\quad |z|>1$

$$2^k u(k)\leftrightarrow\frac{z}{z-2}\quad |z|>2$$

并且以上三个函数变换的收敛域的公共部分为|z|>2， 所以得*F(z)*的原函数为

$$f(k)=\delta(k)-3u(k)+3(2)^k u(k)$$

补充例 已知 $F(z)=\dfrac{z^2}{(z+2)(z+3)},|z|<2$，求$F(z)$的原函数$f(k)$。

解 因为$F(z)$的收敛域为$|z|<2$，所以$f(k)$为反因果序列。

对$\dfrac{F(z)}{z}$ 进行部分分式展开， 得

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{z}{(z+2)(z+3)}=\frac{3}{z+3}-\frac{2}{z+2}$$

于是得

$$F(z)=\frac{3z}{z+3}-\frac{2z}{z+2} \qquad |z|<2$$

$$-(-3)^k u(-k-1)\leftrightarrow\frac{z}{z+3} \quad |z|<3 \qquad -(-2)^k u(-k-1)\leftrightarrow\frac{z}{z+2} \quad |z|<2$$

$$f(k)=[2(-2)^k-3(-3)^k]u(-k-1)$$

$$=[(-3)^{k+1}-(-2)^{k+1}]u(-k-1)$$

补充例 已知$F(z)=\dfrac{z^2+3z}{(z-1)(z-2)(z-3)}, 2<|z|<3$，求$F(z)$的原函数$f(k)$。

解：由于$F(z)$的收敛域为$2<|z|<3$，所以$f(k)$为双边序列。$\dfrac{F(z)}{z}$展开为

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{z+3}{(z-1)(z-2)(z-3)}=\frac{2}{z-1}-\frac{5}{z-2}+\frac{3}{z-3}$$

故有 $$F(z)=\frac{2z}{z-1}-\frac{5z}{z-2}+\frac{3z}{z-3}$$ $2<|z|<3$

由于 $$u(k)\leftrightarrow\frac{z}{z-1}$$ $|z|>1$

$$2^k u(k)\leftrightarrow\frac{z}{z-2}$$ $|z|>2$

$$-3^k u(-k-1)\leftrightarrow\frac{z}{z-3}$$ $|z|<3$

所以： $$f(k)=2u(k)-5\cdot 2^k u(k)-3\cdot 3^k u(-k-1)$$

2、 $\frac{X(z)}{z}$ 有重极点。

p18~21讨论学习：
1、将重极点有理分式展开后的基本分式是什么？
2、如何计算各自分子？

设 $\frac{X(z)}{z}$ 在$z=z_0$=a有r阶重极点，另有n个一阶极点z_i(i=1, 2, …，n)，则 $\frac{X(z)}{z}$ 可表示为

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{B(z)}{(z-a)^r(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)}$$

则 $\frac{X(z)}{z}$ 可展开为以下部分分式：

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{K_{11}}{(z-a)^r}+\frac{K_{12}}{(z-a)^{r-1}}+\cdots+\frac{K_{1r}}{(z-a)}+\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i}{z-z_i}$$

系数K_{1i}(i=1, 2, …, m)、K_i(i=1, 2, …, n)的计算方法为

$$K_{1i}=\frac{1}{(i-1)!}\frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}}\left[(z-a)^r\frac{X(z)}{z}\right]\Bigg|_{z=a}$$

$$K_i=(z-z_i)\frac{X(z)}{z}\Bigg|_{z=z_i}$$

同一阶极点求法

$X(z)$的部分分式展开式为

$$na^n u(n)\leftrightarrow\frac{az}{(z-a)^2}$$

$$X(z)=\frac{K_{11}z}{(z-a)^r}+\frac{K_{12}z}{(z-a)^{r-1}}+\cdots+\frac{K_{1r}z}{(z-a)}+\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i z}{z-z_i}$$

补充例　已知 $F(z)=\dfrac{z+2}{(z-1)(z-2)^2},|z|>2,$ 求*F*(*z*)的原函数*f*(*k*)。

解 *f*(*k*)为因果序列。$\dfrac{F(z)}{z}$ 的部分分式展开式为

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{z+2}{z(z-1)(z-2)^2}=\frac{K_{12}}{(z-2)^2}+\frac{K_{11}}{(z-2)}+\frac{K_1}{z-1}+\frac{K_2}{z}$$

$$=\frac{2}{(z-2)^2}-\frac{\frac{5}{2}}{z-2}+\frac{3}{z-1}-\frac{\frac{1}{2}}{z}$$

$$F(z)=\frac{2z}{(z-2)^2}-\frac{\frac{5}{2}z}{z-2}+\frac{3z}{z-1}-\frac{1}{2}$$ |z|>2

$$k2^{k-1}u(k) \leftrightarrow \frac{z}{(z-2)^2}$$

$$na^n u(n) \leftrightarrow \frac{az}{(z-a)^2}$$

$$2^k u(k) \leftrightarrow \frac{z}{z-2}$$

$$u(k) \leftrightarrow \frac{z}{z-1}$$

$$\delta(k) \leftrightarrow 1$$

所以

$$f(k) = 2k2^{k-1}u(k) - \frac{5}{2}2^k u(k) + 3u(k) - \frac{1}{2}\delta(k)$$

其它情况，如有共轭复极点、非因果序列的重根等不再讨论。

求Z变换 $F(z) = 1 + z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}$ 的原函数 $f(n)$ =_____。