1.2 系统

1.2.1 系统(System)

银河系　生态系统　神经网络 ⟶ 自然系统

交通运输　工业监控　移动通讯　互联网 ⟶ 人工系统

电气　机械　声学　光学 ⟶ 物理系统

政治体制　经济预测　市场管理 ⟶ 非物理系统

系统：由若干相互作用和相互依赖的事物组合而成的、具有稳定功能的整体。

一般框图

输入信号

激励

输出信号

响应

M个输入　　**映射 / 变换机构**　　N个输出

M＝N＝1　　单输入—单输出　（SISO）

多输入—多输出　（MIMO）

1. 2. 2 系统的分类

- **输入信号通过系统时，经加工、处理成为输出信号。**

$$f(\cdot) \longrightarrow \boxed{\text{系统}} \longrightarrow y(\cdot)$$

$$f(t) \longrightarrow y(t) \quad \text{或} \quad f(n) \longrightarrow y(n)$$

- **系统的描述:**

$$y(t) = S[\{y(0)\},\{f\,(t)\}\,]$$

初始状态 $y(0)$

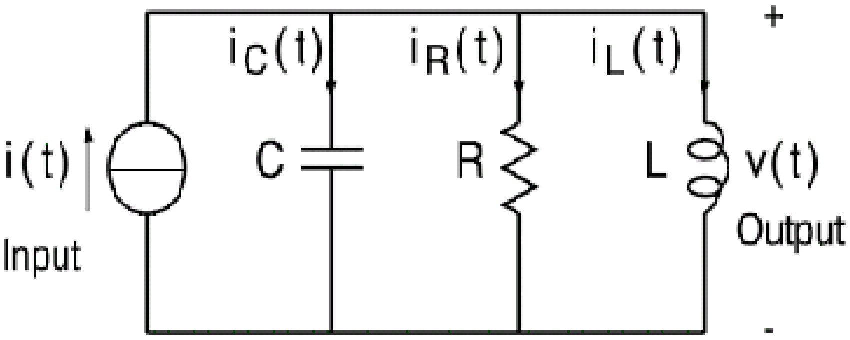
1. 连续时间系统和离散时间系统

连续时间系统：系统的输入和输出都是连续时间信号

离散时间系统：系统的输入和输出都是离散时间信号

连续时间系统举例

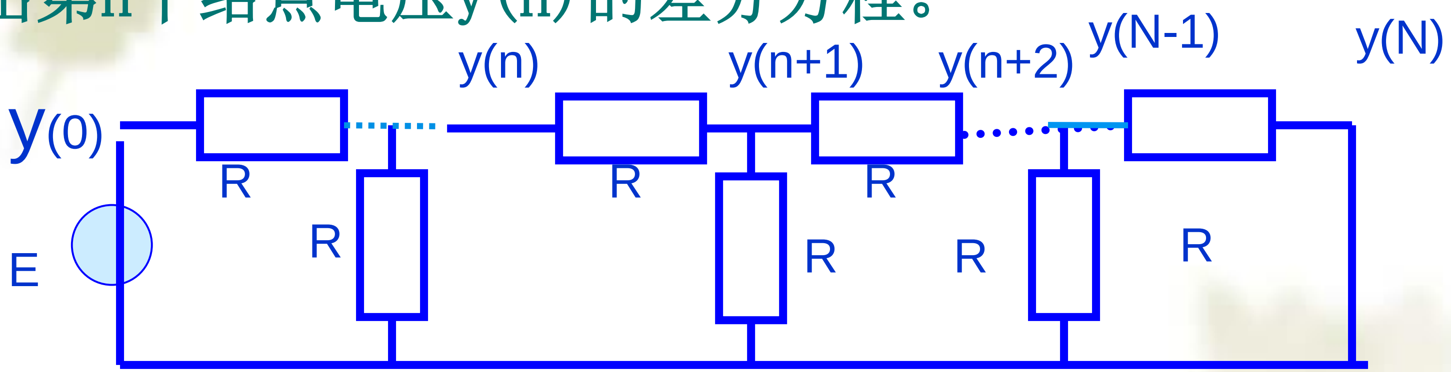
例：RLC circuit



$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R} + \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(\tau)d\tau$$

离散时间系统举例

已知梯形网络电阻为R，结点电压为y(n)，n=0，1，…，N，试写出第n个结点电压y(n)的差分方程。



$$\frac{y(n)-y(n+1)}{R}=\frac{y(n+1)}{R}+\frac{y(n+1)-y(n+2)}{R}$$

整理得：$y(n+2)-3y(n+1)+y(n)=0$ 2阶前向差分

连续时间系统在时域的数学模型是微分方程

离散时间系统在时域的数学模型是差分方程

2. 记忆系统和无记忆系统

无记忆系统：t0时刻输出只依赖于t0时刻输入。又称静态系统或即时系统；

记忆系统：t0时刻输出依赖于t0及/或t0以外时刻的输入。又称动态系统或动力学系统；

无记忆系统：放大器

记忆系统：积分（累加）运算器、差分运算

3. 线性系统(linear system)/非线性系统

- **满足叠加(superposition)原理的系统，称为线性系统**

If $f_1(t) \rightarrow y_1(t)$ and $f_2(t) \rightarrow y_2(t)$,

then $af_1(t) + bf_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t)$.

即：包含 齐次性（均匀性） 和 可加性

输入信号之（加权）和的响应等于各自输入信号的响应之（加权）和。

教材P18 例1-7 同学讲解

电路分析中，以**换路发生时刻**为计算时间起点（t=0）。

系统换路前的状态称为**初始状态**（又称0_-状态）

电路状态通常以$u_c(t)$ 和 $i_L(t)$ 表示

如果换路瞬间电容电压和电感电流没有跃变，则

$$u_c(0-)=u_c(0_+)\text{；}\quad i_L(0-)=i_L(0_+)$$

系统的响应视作**初始状态和外加激励共同作用**的结果：

$y(t) = S[\{y(0)\}, \{x(t)\}]$

零输入响应(zero input response) $y_{zi}(t)$

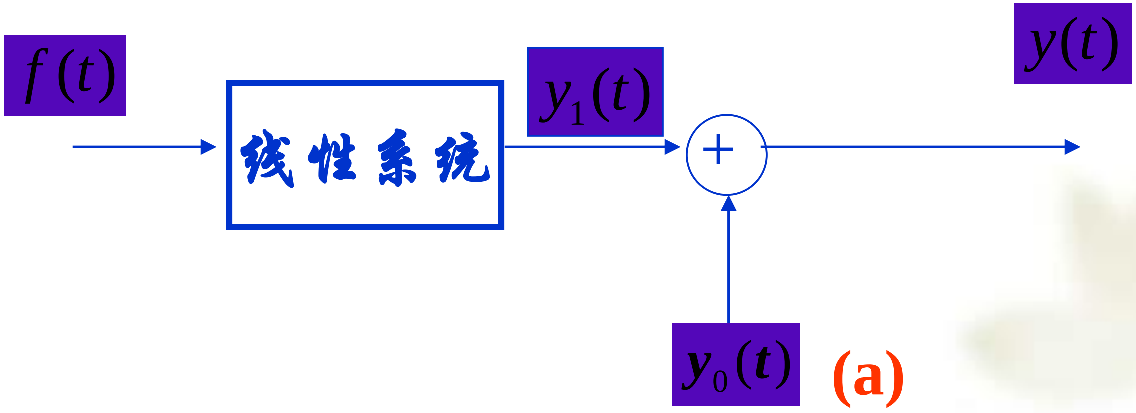
$$y_{zi}(t) = S[\{y(0)\}, \{0\}]$$

零状态响应(zero state response) $y_{zs}(t)$

$$y_{zs}(t) = S[\{0\}, \{x(t)\}]$$

初始状态不为0的线性系统称为增量线性系统。

任何一个增量线性系统都可以等效成一个线性系统加上一个与输入无关的响应.



(a)

- **当 $f(t)=0$ 时, $y(t)=y_0(t)$ 　　称 $y_0(t)$ 为零输入响应.**
- **$y_1(t)$ 完全是由输入信号与系统特性引起的,满足零输入零输出,是线性系统，称$y_1(t)$为零状态响应.**

增量线性系统在数学上不是一个严格的线性系统，但在工程应用中当成线性系统使用
例如：y(t)=C+x(t)　(如果是判断题，答：非线性系统)

•凡同时满足

- 可分解性 $y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)$
- 零输入线性
- 零状态线性

称为线性系统

零输入线性：零输入响应对各初始状态呈线性。

$S[\{ay_1(0)+by_2(0)\},\{0\}] = aS[\{y_1(0)\},\{0\}]+bS[\{y_2(0)\},\{0\}]$

零状态线性：零状态响应对各激励信号呈线性。

$S[\{0\},\{ax_1(t)+bx_2(t)\}] = aS[\{0\},\{x_1(t)\}]+bS[\{0\},\{x_2(t)\}]$

判断该系统是否线性：$y(t)=ay(0)+bx(t),\quad t\geq 0$；

结论：线性齐次微分方程为线性系统，如

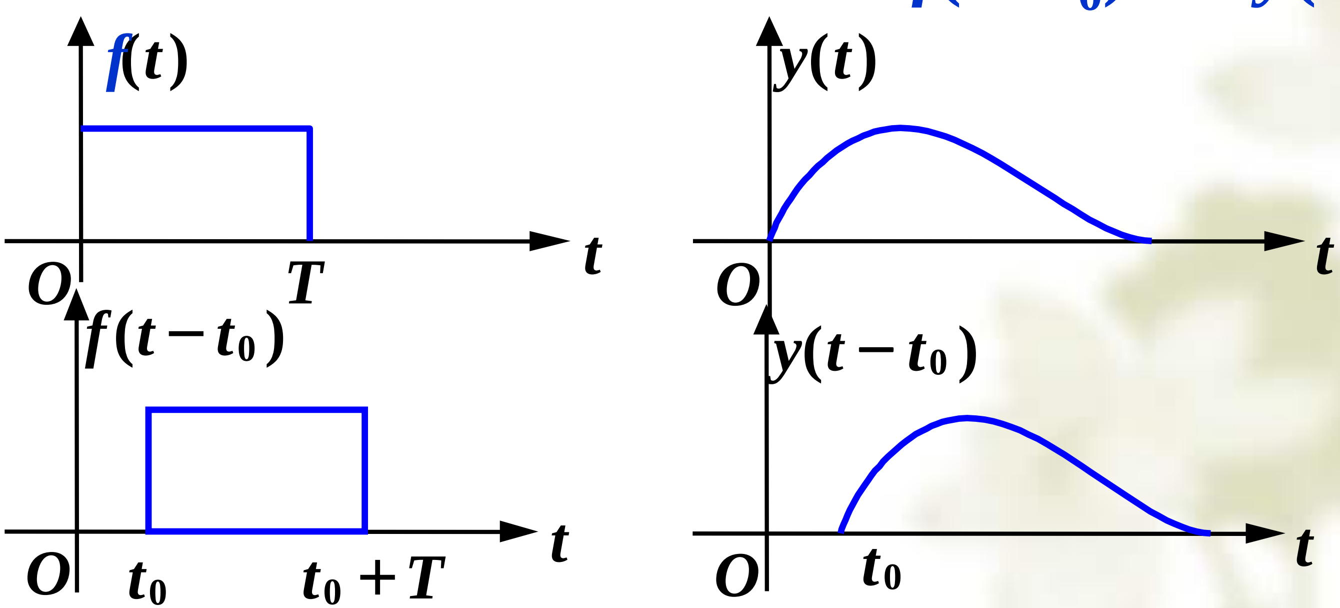
$y'(t)+3y(t)=2x(t)$； $y'(t)+3ty(t)=2x(t)$；

4. 时不变(time invariant)/时变系统

- **电路:元件的参数值是否随时间而变;**
- **方程:系数是否随时间而变;**
- **从输入输出关系看:** If $f(t) \to y(t)$,

then $f(t-t_0) \to y(t-t_0)$.

意味着由f(t)激励产生的y(t)再进行平移得到



注意:指的是零状态响应

试判断系统 $y(t)=\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+3x(t)$、$y(t)=x(2t)$ 是否为时不变的。

解：由题意可知 $x(t)\rightarrow y(t)=\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+3x(t)$，那么

$$x(t-t_0)\rightarrow\frac{\mathrm{d}x(t-t_0)}{\mathrm{d}t}+3x(t-t_0)$$

$y(t\text{-}t0)=?$

$$\frac{\mathrm{d}x(t-t_0)}{\mathrm{d}(t-t_0)}+3x(t-t_0)$$

$$=\frac{\mathrm{d}x(t-t_0)}{\mathrm{d}t}+3x(t-t_0)$$

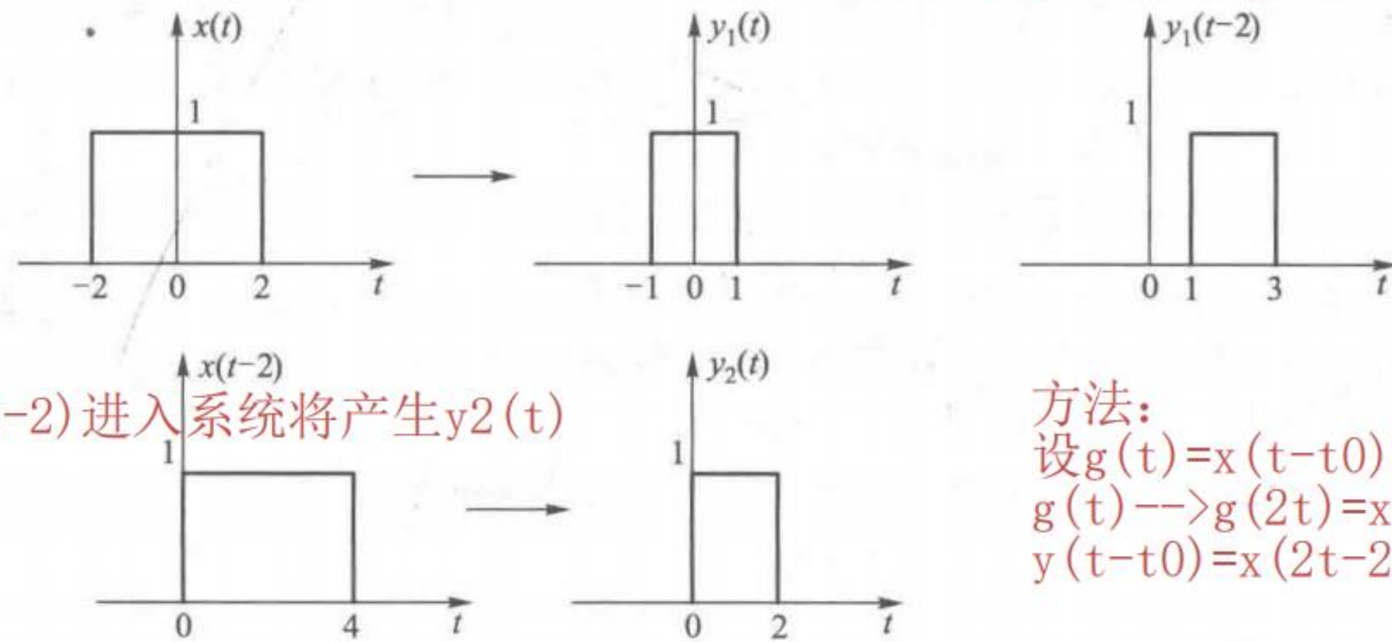
$y(t) = x(2t)$ $x(t) \dashrightarrow x(2t)$ $y(t-t0)=x(2(t-t0)=x(2t-2t0)$

$x(t-t0) \dashrightarrow x(2t-t0) =! y(t-t0)$

证明：设$g(t)=x(t-t0)$

$g(t) \dashrightarrow g(2t)=x(2t-t0)$

x(t)进入系统将产生y1(t)



x(t-2)进入系统将产生y2(t)

方法：
设g(t)=x(t-t0)
g(t)-->g(2t)=x(2t-t0)
y(t-t0)=x(2t-2t0)

结论：常系数微分方程为时不变系统，如

$y'(t) + 3y(t) = 2x(t)$; $y'(t) + 3y^2(t) = 2x(t)$

线性时不变（LTI linear time-invariant）系统

- 最基本、最重要的一种系统，用常系数线性微分方程描述。
- LTI 系统具有比较完整有效的理论基础，在信号处理中有重要用途

If $f_1(t) \to y_1(t)$ and $f_2(t) \to y_2(t)$, then

$$af_1(t-t_1) + bf_2(t-t_2) \to ay_1(t-t_1) + by_2(t-t_2)$$

结论：线性常系数微分方程为线性时不变系统，如

$$y'(t) + 3y(t) = 2x(t);$$

线性时不变（LTI linear time-invariant）系统

练习：教材p39，1-8

线性时不变判断例题

数学知识：

1、定积分换元法：

要知道定积分的上下限，是被积函数自变量的变化范围。原来的定积分的上下限，是原来定积分被积函数自变量的变化范围。换元后新的定积分上下限，当然就是新的定积分被积函数自变量的变化范围。**即换元后，新的变量的变化范围。**

根据换元的公式，原来的上限算出来的新变量的值就是新的上限，原来下限算出来的新变量的值就是新的下限。

例如原来的定积分是上限为5，下限为0，原来的自变量是x；换元是t=5-x，那么新的上限就是根据t上限=5-x上限=5-5=0；新的下限就是t下限=5-x下限=5-0=5； 所以新的上限是0，下限是5。

2、在定积分中，上下限对调后变成原来的相反数。

判断常系数微分方程ay'(t)+by(t)＋c=f(t) c≠0，是否是线性时不变系统。

答：若c不是y的定积分，该系统是非线性时不变。

若c是y的定积分或c=0，该系统是线性时不变。

1.对于系统方程为 $y'(t)+5y(t)+6\int_0^6 y(t)dt=4e(t)$ 的系统，下列说法中，叙述错误的是

A.该系统是线性的　　B.该系统是非时变的

C.该系统是一阶的　　D.该系统是因果的

LTI系统满足微分、积分特性

$f(t) \rightarrow$ 系统 $\rightarrow y(t)$

$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} \rightarrow$ 系统 $\rightarrow \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$

$\int_{-\infty}^{t} f(x)dx \rightarrow$ 系统 $\rightarrow \int_{-\infty}^{t} y(x)dx$

利用线性证明，可推广至高阶。

讨论：微分、积分特性对计算带来的好处

判断时变系统方法：自变量系数不为1

5、因果(Causality)/非因果系统

响应不会超前于激励出现的系统：即是物理可实现系统

CAUSAL OR NONCAUSAL?

$$y(t) = f^2(t-1)$$

$$y(t) = f(t+2)$$

$$y(n) = x(-n)$$

$$y(n) = 3x(2n)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{5t} f(\tau)d\tau$$

5、因果(Causality)/非因果系统

响应不会超前于激励出现的系统：即是物理可实现系统

CAUSAL OR NONCAUSAL?

$$y(t) = (t+5)\cos\left[\frac{1}{x(t)}\right]$$ ？

$$y(t) = f^2(t-1) \quad \surd$$

$$y(t) = f(t+2) \quad \times \qquad \boldsymbol{t} = -2, \quad \boldsymbol{y}(-2) = \boldsymbol{f}(0)$$

$$y(n) = x(-n) \quad \times \qquad \boldsymbol{n} = -1, \quad \boldsymbol{y}(-1) = \boldsymbol{x}(1)$$

$$y(n) = 3x(2n) \quad \times \qquad n = 1, \quad y(1) = 3x(2)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{5t} f(\tau)d\tau \quad \times$$

非因果系统并不一定都是物理不可实现的。

例如：存储后再处理

6、稳定（Stability）/不稳定系统

BIBO — Bounded Input → Bounded Output

三种典型不稳定系统：1、微分系统；2、上限为自变量的积分系统；3、系数为自变量

试判断系统 $y(t)=e^{x(t)}$ 是否为稳定的。

7、可逆/不可逆系统

不同的输入对应不同的输出的系统。

$$x(.) \longrightarrow \boxed{\text{可逆系统}} \xrightarrow{y(.)} \boxed{\text{逆系统}} \longrightarrow x(.)$$

P22 **例 1-11** 试判断下列系统是否为可逆的。

① $y(t)=x(2t)$； ② $y(t)=x^2(t)$。

与x(t)形状有没有关系？

8、集总参数系统/分布参数系统

元件尺寸远远小于其上通过的信号波长，元件特性表现在一个点上，这类系统为集总参数系统。

如收音机

而微波器件有可能是分布参数系统

练习：1、判断下列系统是否是线性的、时不变的、因果的、稳定的?

$y(t)=e^{f(t)}$	X	√	√	√
$y(t)=\dfrac{df(t)}{dt}$	√	√	√	X
$y(t)=f(t)u(t)$	√	X	√	√
$y(t)=f(1-t)$	√	X	X	√
$y(t)=f(2t)$	√	X	X	√

直观判断时不变系统的方法：是否出现变系数，是否有尺度变换或反折。

自己总结判断方法

时不变性：判断系统是否线性?是否时变?

$$1.y(k)=(k-2)f(k)$$

$$2.y(k)=f(k-1)f(k)$$

$$3.y(k)=f(1-k)$$

* $$4.y(k)+(k-1)y(k-2)=f(k)$$

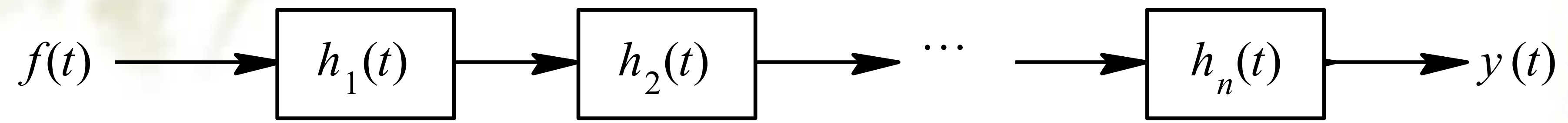
$$5.y(k)=[f(k)]^2$$

* $$6.y(k)=2f(k)+3$$

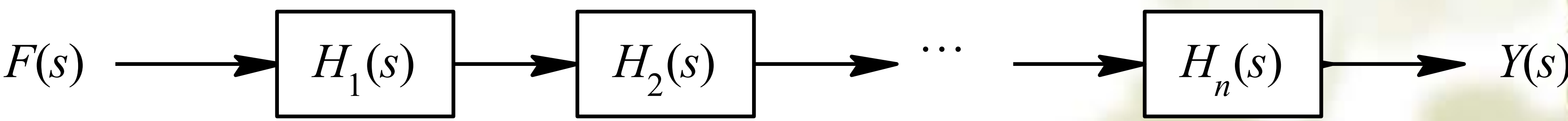
$$7.y(k)=\sum_{n=-\infty}^{k}f(n)$$

1.2.3 系统的连接

1、系统的串联（级联）连接

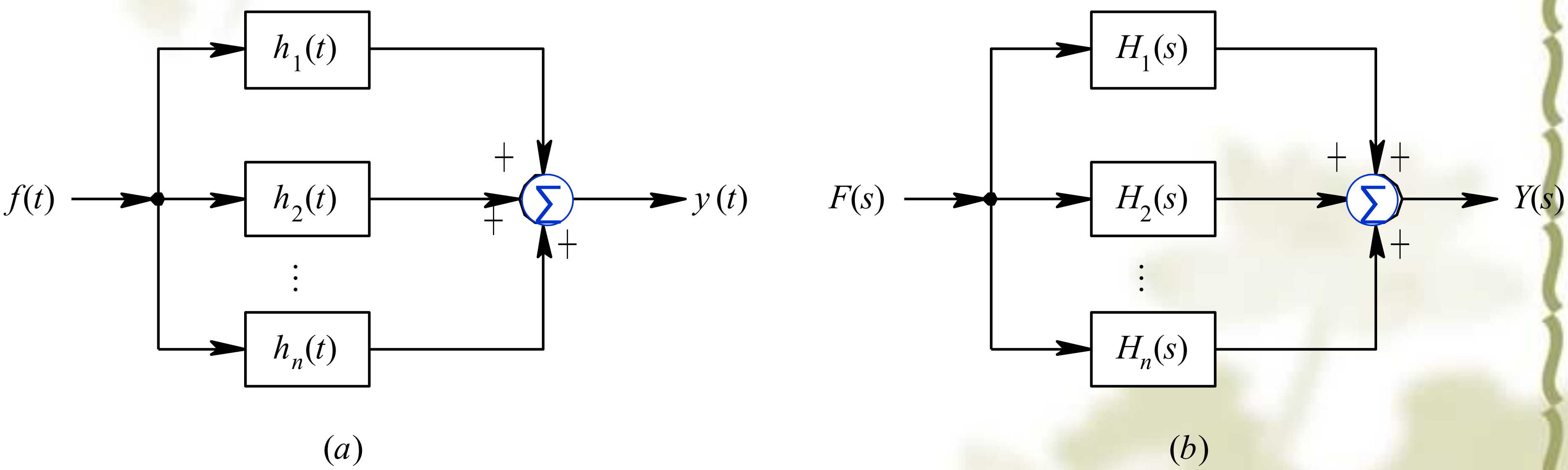


(a)

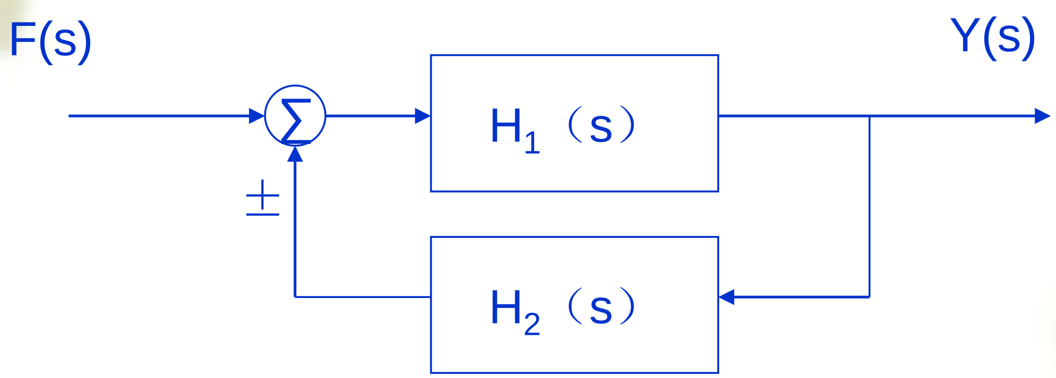


(b)

2、系统的并联 连接



3、系统的反馈连接



正反馈

负反馈

反馈系统通常有信号循环流动路径，称之有环系统；其它为无环系统

持续响应时间：有环系统可以有无限持续响应时间