# 第九章习题《基础物理 I 波动理论导引》

**习题 9.1：** 在自由空间原点处放置一个 $x$ 方向的长度为 $l$ 的电偶极子天线，电流 $i(t)=I_0\cos(\omega t)$，求远区场的电场、磁场与平均能流密度。（提示：利用远场近似令 $\nabla=-\hat{r}jk$）。

**解：**

电偶极子天线的电流分布为：$i(t)=I_0\cos(\omega t)=\mathrm{Re}\left[I_0e^{j\omega t}\right]$，即 $\vec{J}=\hat{x}I_0l\delta(\vec{r})$

矢量位：

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{\vec{J}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{-jkr}}{r}\iiint\hat{x}I_0l\delta(\vec{r}')dV'=\hat{x}\frac{\mu_0I_0l}{4\pi r}e^{-jkr}$$

利用坐标关系：

$$\begin{aligned}
\hat{x}&=\hat{r}\sin\theta\cos\phi+\hat{\theta}\cos\theta\cos\phi-\hat{\phi}\sin\phi\\
\hat{y}&=\hat{r}\sin\theta\sin\phi+\hat{\theta}\cos\theta\sin\phi+\hat{\phi}\cos\phi\\
\hat{z}&=\hat{r}\cos\theta-\hat{\theta}\sin\theta
\end{aligned}$$

将矢量位 $\vec{A}$ 转化到球坐标系：

$$\vec{A}=\left(\hat{r}\sin\theta\cos\phi+\hat{\theta}\cos\theta\cos\phi-\hat{\phi}\sin\phi\right)\frac{\mu_0I_0l}{4\pi r}e^{-jkr}$$

利用矢量位与磁场的关系得到磁场表达式：

$$\begin{aligned}
\vec{H}&=\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{A}=\frac{1}{\mu_0}\left(-j\vec{k}\right)\times\vec{A}=\left(-\hat{r}jk\right)\times\left[\hat{r}\sin\theta\cos\phi+\hat{\theta}\cos\theta\cos\phi-\hat{\phi}\sin\phi\right]\frac{I_0l}{4\pi r}e^{-jkr}\\
&=\left(\hat{\phi}\cos\theta\cos\phi+\hat{\theta}\sin\phi\right)\frac{-jI_0lk}{4\pi r}e^{-jkr}
\end{aligned}$$

求得电场表达式：

$$\begin{aligned}
\vec{E}&=\frac{1}{j\omega\varepsilon}\nabla\times\vec{H}\approx\frac{1}{j\omega\varepsilon}\left(-\hat{r}jk\right)\times\left(\hat{\phi}\cos\theta\cos\phi+\hat{\theta}\sin\phi\right)\frac{-jI_0lk}{4\pi r}e^{-jkr}\\
&=\frac{1}{j\omega\varepsilon}\left(-\hat{\theta}\cos\theta\cos\phi+\hat{\phi}\sin\phi\right)\frac{-I_0lk^2}{4\pi r}e^{-jkr}\\
&=\eta\left(-\hat{\theta}\cos\theta\cos\phi+\hat{\phi}\sin\phi\right)\frac{jI_0lk}{4\pi r}e^{-jkr}
\end{aligned}$$

平均能流密度为：

$$
\begin{aligned}
\left\langle \vec{S}(t) \right\rangle &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{E}\times\vec{H}^*\right] \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\eta\left(-\hat{\theta}\cos\theta\cos\phi+\hat{\phi}\sin\phi\right)\frac{jI_0lk}{4\pi r}e^{-jkr}\times\left(\hat{\phi}\cos\theta\cos\phi+\hat{\theta}\sin\phi\right)\frac{jI_0lk}{4\pi r}e^{jkr}\right] \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[-\eta\left(-\hat{\theta}\cos\theta\cos\phi+\hat{\phi}\sin\phi\right)\times\left(\hat{\phi}\cos\theta\cos\phi+\hat{\theta}\sin\phi\right)\left(\frac{I_0lk}{4\pi r}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\eta\left(\hat{r}\cos^2\theta\cos^2\phi+\hat{r}\sin^2\phi\right)\left(\frac{I_0lk}{4\pi r}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\hat{r}\left(\cos^2\theta\cos^2\phi+\sin^2\phi\right)\eta\left(\frac{I_0lk}{4\pi r}\right)^2
\end{aligned}
$$

**习题 9.2：**在原点处 $yz$ 平面内摆放一个小电流圆环，圆环面积为 $S$，圆环周长远小于波长，环上电流为$i(t)=I_0\cos(\omega t)$，沿着正 $x$ 方向看，电流为顺时针流向，求远区场的电场、磁场与平均能流密度。（提示：利用习题 1 的结论，结合电磁对偶特性）。

**解：**

圆环电流 $i(t)=I_0\cos(\omega t)=\mathrm{Re}\left[I_0e^{j\omega t}\right]$，

根据右手原则，对应的磁偶极矩为 $\vec{p}_m=\hat{x}I_0S$

则磁偶极子的磁电流分布为 $\vec{J}_m(\vec{r}\,')=j\omega\mu\vec{p}_m=\hat{x}j\omega\mu I_0S\delta(\vec{r}\,')$

习题一中，电偶极子电流分布为 $\vec{J}_e=\hat{x}I_0l\delta(\vec{r})$

利用对偶性质：$\vec{J}_e\rightarrow\vec{J}_m$，$\vec{E}_e\rightarrow\vec{H}_m$，$\vec{H}_e\rightarrow-\vec{E}_m$，$\mu\leftrightarrow\varepsilon$

做如下对偶变换：$I_0l\rightarrow j\omega\mu I_0S$，$\vec{E}_e\rightarrow\vec{H}_m$，$\vec{H}_e\rightarrow-\vec{E}_m$，$\mu\leftrightarrow\varepsilon$

得到该磁偶极子的远场辐射电场为：

$$\vec{E}=-\left(\hat{\phi}\cos\theta\cos\phi+\hat{\theta}\sin\phi\right)\frac{\omega\mu I_0S}{2\lambda r}e^{-jkr}$$

远场辐射磁场为：

$$\vec{H}=\left(-\hat{\theta}\cos\theta\cos\phi+\hat{\phi}\sin\phi\right)\frac{1}{\eta}\frac{-\omega\mu I_0S}{2\lambda r}e^{-jkr}$$

平均能流密度为：

$$\left\langle \vec{S}(t) \right\rangle=\frac{1}{2}\hat{r}\left(\cos^2\theta\cos^2\phi+\sin^2\phi\right)\frac{1}{\eta}\left(\frac{\omega\mu I_0S}{2\lambda r}\right)^2$$