第五章习题《基础物理 I 波动理论导引》

习题 5.1：根据原子的玻尔模型，电子在半径为 $R = n\hbar / mv$ 的量化轨道上绕着原子核旋转，其中 n 是整数，m 是电子质量，v 是电子速度。设核为电荷量 Ze 的正电荷，计算半径 R（提示：令离心力与洛伦兹力相等）。设 $Z = 1$，估算氢原子的半径。

解：$mv^2/R = Ze^2/4\pi\varepsilon R^2$ => $R = Ze^2/4\pi\varepsilon mv^2$

习题 5.2：

（1） 在微波炉的工作频率（2.5 GHz）下，圆形牛排的介电常数约为 $40\varepsilon_0$，电导率 $\sigma = 2$ mho/m。求牛排的趋肤深度？将此趋肤深度与聚苯乙烯泡沫进行比较（介电常数为 $1.03\ \varepsilon_0$，电导率 $\sigma = 4\times10^{-6}$ mho/m）

（2） 当 $1 \ll \sigma/\omega\varepsilon$ 时，媒质被认为是良导体。假设地球的电导率为 $\sigma = 5\times10^{-3}$ mho/m，介电常数为 10 ε_0，求地球能被认为是良导体的最高频率（这里我们取 $\sigma/\omega\varepsilon > 0.1$）。

（3） 铝的介电常数为 ε_0，磁导率 μ_0，电导率 $\sigma = 3.54\times10^7$ mho/m。如果是工作频率为 100MHz 的天线接收端由一个覆盖铝涂层的木头制成的，如果铝的厚度应是该频率下趋肤深度的五倍，求铝层的厚度。普通铝箔约为 1/1000 英寸厚，是否足够满足厚度要求？

（4） 求海水在 100Hz 和 5MHz 频率处的趋肤深度。设海水的电导率为 $\sigma = 4$ mho/m，介电常数为 80 ε_0，磁导率为 μ_0。

（5） 一艘轮船想要与水下 100 米处的潜艇通信，如果用 1kHz 的电磁波通信，有多少电磁波能量可以到达水下潜艇。海水的电磁参数同（4）。

解：波数的虚部为：$k'' = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}-1\right)\right]^{1/2}$。

对于理想导体（$1 \ll \sigma/\omega\varepsilon$），我们有 $k'' \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$，因此趋肤深度为 $d_P = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$

对于低电导率材料（$\sigma/\omega\varepsilon \ll 1$），趋肤深度 $d_P = \frac{2}{\sigma}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$

（1） 计算得 $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \frac{2}{40\times8.85\times10^{-12}\times2\pi\times2.5\times10^9} = 0.36$，因此波数的虚部为

$$k'' = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}-1\right)\right]^{1/2}$$
$$= \frac{2\pi\times 2.5\times 10^9}{3\times 10^8}\sqrt{40}\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+0.36^2}-1\right)\right]^{1/2}$$
$$= 58.7\left(\mathrm{m}^{-1}\right)$$

趋肤深度为：$d_P = \frac{1}{k''} = \frac{1}{58.7}(\mathrm{m}) = 1.7(\mathrm{cm})$

聚苯乙烯泡沫：$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \frac{4\times 10^{-6}}{1.03\times 8.85\times 10^{-12}\times 2\pi\times 2.5\times 10^9} = 2.79\times 10^{-5} \ll 1$

因此 $d_P \approx \frac{2}{\sigma}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = \frac{2}{\sigma\eta} = \frac{2\sqrt{1.03}}{4\times 10^{-6}\times 377} = 1346.0(\mathrm{m})$

（2） 对于良导体，令 $\sigma/\omega\varepsilon > 0.1$，则

$$\omega < 10\times\frac{\sigma}{\varepsilon} = 10\times\frac{5\times 10^{-3}}{10\times 8.85\times 10^{-12}} = 5.65\times 10^8\,(\mathrm{rad/s})$$

或者 $f_{\max} = \frac{\omega_{\max}}{2\pi} = \frac{5.65\times 10^8\,(\mathrm{rad/s})}{2\pi} = 89.9(\mathrm{MHz})$

（3） 由于 $1 \ll \sigma/\omega\varepsilon$，则有趋肤深度

$$d_P \approx \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{2}{2\pi\times 10^8\times 4\pi\times 10^{-7}\times 3.54\times 10^7}} = 8.46\times 10^{-6}(m)$$

铝箔的厚度为 $5d_P = 4.24\times 10^{-5}(m)$。

而普通铝箔的为 $10^{-3}(inch) = 2.54\times 10^{-5}(m) < 4.24\times 10^{-5}(m)$，所以不够厚。

（4） 当 $f = 100Hz$ 时，

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \frac{4}{2\pi\times 100\times 80\times 8.85\times 10^{-12}} = 8.99\times 10^6 \gg 1$$

则有趋肤深度 $d_P = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{2}{2\pi\times 100\times 4\pi\times 10^{-7}\times 4}} = 25.2(m)$。

当 $f = 5MHz$ 时，损耗正切为

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \frac{4}{2\pi\times 5\times 10^6\times 80\times 8.85\times 10^{-12}} = 180 \gg 1$$

则有趋肤深度 $d_P = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{2}{2\pi\times 5\times 10^6\times 4\pi\times 10^{-7}\times 4}} = 0.11(m)$。

（5） 当 $f = 1kHz$ 时，趋肤深度为

$$d_P = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \sqrt{\frac{2}{2\pi\times1000\times4\pi\times10^{-7}\times4}} = 7.96(m) = \frac{1}{k''}$$

能量的衰减项为$e^{-2k''z} = e^{-2\times\frac{100}{7.96}} = 1.22\times10^{-11} = -109.1(dB)$

习题 5.3：有一个导电的单轴媒质，它的介电常数和电导率分别为

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon & & \\ & \varepsilon & \\ & & \varepsilon_z \end{bmatrix},\ \bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma & & \\ & \sigma & \\ & & \sigma_z \end{bmatrix}$$

（1）当电磁波沿着 x 轴方向传播时，求该媒质中电磁波的色散关系（波数 k 与频率 ω 的关系）。（2）当$\sigma_z/\sigma \gg 1$时，该单轴媒质可以作为偏振片使用，任意极化的电磁波可以转变成线极化波透射出来。

解：把电导率和介电常数合并起来，得到新的介电常数张量：

$$\bar{\bar{\varepsilon}}_c = \begin{bmatrix} \varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega} & & \\ & \varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega} & \\ & & \varepsilon_z - j\frac{\sigma_z}{\omega} \end{bmatrix}$$

（1）电磁波沿着 x 方向传播时，有两种极化模式：

- 寻常波：电场极化方向在 y 方向，此时波数 $k_o = \omega\sqrt{\mu\left(\varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}\right)}$；
- 非寻常波：电场极化方向在 z 方向（光轴方向），此时波数 $k_e = \omega\sqrt{\mu\left(\varepsilon_z - j\frac{\sigma_z}{\omega}\right)}$

（2）当$\sigma_z/\sigma \gg 1$时，非寻常波波数 k_e 的虚部更大，因此非寻常波衰减更快，所以只有寻常波能够透过该媒质，透射波为寻常波，电场沿着 y 方向极化。

习题 5.4：如图所示，考虑一个圆极化波垂直入射到单轴媒质中，入射波的电场为

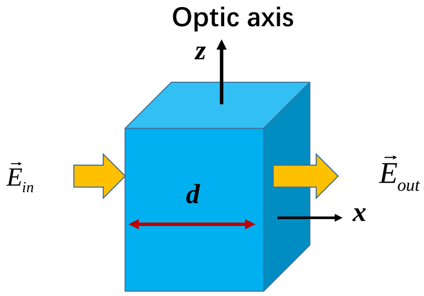
$$\vec{E}_{in} = \hat{y}E_0\exp(-jk_x x) + \hat{z}\alpha E_0\exp(-jk_x x - j\beta)$$

这里我们忽视界面处的电磁波反射。试求：

（1）　如果入射波为右旋圆极化波，且 α 和 β 均为正实数，求 α 和 β 的取值。

（2） 设单轴媒质的介电常数为 $\bar{\bar{\varepsilon}}=\begin{bmatrix}\varepsilon_x & & \\ & \varepsilon_y & \\ & & \varepsilon_z\end{bmatrix}$，其中 $\varepsilon_x=\varepsilon_y=4\varepsilon_0$，$\varepsilon_z=9\varepsilon_0$，磁导率为 μ_0。求单轴媒质里，电场沿 y 方向极化的电磁波波数 k_x。

（3） 在（2）中，令入射波为右旋圆极化波，求单轴媒质的最小厚度 d，使得电磁波透过该媒质后转化为左旋圆极化波。



解：（1）因为是圆极化波，所以 $\alpha=1$，$\beta=\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi$ 则

$\vec{E}_{in}=\left[\hat{y}+\hat{z}\exp(-j\beta)\right]E_0\exp(-jk_x x)$

取 $x=0$ 平面，$\vec{E}_{in}(x=0)=E_0\left[\hat{y}+\hat{z}\exp(-j\beta)\right]=\vec{E}_R+j\vec{E}_I$

其中 $\vec{E}_R=E_0\hat{y}$，$\vec{E}_I=-E_0\hat{z}\sin\beta$。

平面内，随着时间增加，电场矢量从 $\vec{E}_R$ 方向转到 $-\vec{E}_I$ 方向，

要求是左旋圆极化波，只能选 $\beta=\frac{\pi}{2}$。

（2）因为光轴是 z 轴，所以电场沿着 y 方向极化的电磁波为寻常波，波数 $k_x=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_y}=2\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=2k_0$。

（3）寻常波（电场 y 极化）波数 $k_o=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_y}=2\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=2k_0$，非寻常波（电场 z 极化）波数 $k_e=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_z}=3\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=3k_0$，要令右旋圆极化波转为左旋圆极化波，则两种线极化波经过媒质产生的相位差应为 π 的奇数倍，即

$$(k_o-k_e)d=\pi+2m\pi$$

满足要求的最小厚度为 $d=\frac{\pi}{k_0}=\frac{\lambda_0}{2}$。