5.5 离散时间傅里叶变换

5.5.1 序列傅里叶变换的定义

由拉普拉斯变换与z变换关系知：$X(s)=X(z)\big|_{z=e^{sT_S}}$

又知：当X(s)收敛域包含虚轴时：$X(\omega)=X(s)\big|_{s=j\omega}$

2式中s=jw代入1式中s，得到:

$$X(\omega)=X(s)\big|_{s=j\omega}=X(z)\big|_{z=e^{j\omega T_S}}$$

而 $\Omega=\omega T_s$

则 $$\boxed{X(e^{j\Omega})=X(z)\big|_{z=e^{j\Omega}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-jn\Omega}}$$

为序列的傅里叶变换，即离散时间傅里叶变换（DTFT）

因为 $z = |z| e^{j\Omega}$

当 $z = e^{j\Omega}$ 时，说明 $|z| = 1$

所以离散时间傅里叶变换（DTFT），即为单位圆上的z变换。

比较4.6节，“虚轴上的拉普拉斯变换就是连续时间信号的傅里叶变换”

由z逆变换得到离散时间傅里叶逆变换（IDTFT）:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz \rightarrow x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\Omega}) e^{jn\Omega} d\Omega$$

$X(e^{j\Omega})$ 为序列的频谱函数；x(n)原函数；记作

$$X(e^{j\Omega}) \leftrightarrow x(n)$$

$$X(e^{j\Omega}) = \left|X(e^{j\Omega})\right| e^{j\phi(\Omega)}$$

幅度谱　　　　相位谱

关于DTFT的六点说明

1、$x(n)$ 是n的离散函数，$X(e^{j\Omega})$ 是 Ω 连续函数；

2、当收敛域包含单位圆时，将 $z = e^{j\Omega}$ 代入z变换即得到DTFT；

3、序列存在傅里叶变换的充分条件 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x(n)e^{-jn\Omega}\right| < \infty$

4、非周期序列频谱$X(e^{j\Omega})$是以2π为周期的连续谱；

因为抽样信号频谱$X(\omega)=X(e^{j\omega T_s})$ ，又知$X(\omega)$ 以

ω_s 为周期，即 $X(\omega)=X(\omega+\omega_s)=X(e^{j(\omega+\omega_s)T_s})$

$$=X(e^{j\omega T_s+j\omega_s T_s})=X(e^{j(\omega T_s+2\pi)})$$

$$=X(e^{j(\Omega+2\pi)})=X(e^{j\Omega})$$

所以，由抽样信号的频谱角频率以 ω_s 为周期，即可推导得到

序列DTFT以 2π 为周期。

5.

$$X(e^{j\Omega}) = \mathrm{Re}[X(e^{j\Omega})] + \mathrm{Im}[X(e^{j\Omega})] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\cos n\Omega - j\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\sin n\Omega$$

其幅频特性、相频特性为

$$\left|X(e^{j\Omega})\right| = \sqrt{\mathrm{Re}^2[X(e^{j\Omega})] + \mathrm{Im}^2[X(e^{j\Omega})]}$$

$$\varphi(\Omega) = \tan^{-1}\frac{\mathrm{Im}[X(e^{j\Omega})]}{\mathrm{Re}[X(e^{j\Omega})]}$$

如果 $x(n)$ 是实数序列，幅频特性为偶函数，相频特性为奇函数

6. 联系本征函数，获得零状态响应

若输入序列 $x(n)=e^{jn\Omega_0}(-\infty<n<\infty)$，则系统的零状态响应为

$$y_{zs}(n)=e^{j\Omega_0 n}H(e^{j\Omega_0})=x(n)H(e^{j\Omega_0})$$

若输入序列 $x(n)=\mathrm{Re}[e^{jn\Omega_0}]=\cos\Omega_0 n\ (-\infty<n<\infty)$

则系统的零状态响应为

$$\begin{aligned}y_{zs}(n)&=\mathrm{Re}[e^{j\Omega_0 n}H(e^{j\Omega_0})]=\mathrm{Re}[|H(e^{j\Omega_0})|e^{j(\Omega_0 n+\varphi(\Omega_0))}]\\&=|H(e^{j\Omega_0})|\cos[\Omega_0 n+\varphi(\Omega_0)]\end{aligned}$$

n 是从 $-\infty$ 起始的，此时的零状态响应就是系统的稳态响应

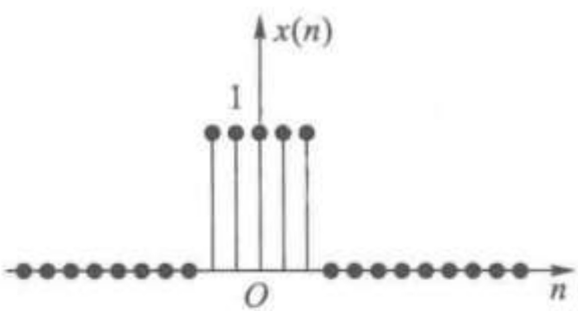
例 p279

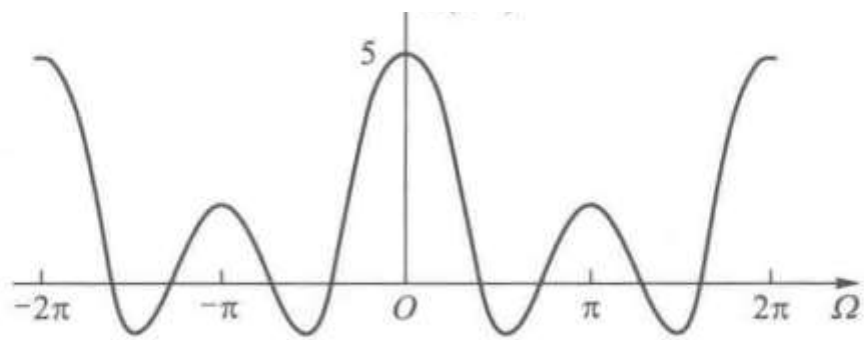
例 5-18 求序列 $x(n)=\begin{cases}1, & |n|\leq N \\ 0, & |n|>N\end{cases}$ 的频谱。

$$X(e^{j\Omega})=X(z)\Big|_{z=e^{j\Omega}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-jn\Omega}$$

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})=X(z)\Big|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega}=\sum_{n=-N}^{N}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}N\Omega}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(N+1)\Omega}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(N\Omega+\frac{\Omega}{2})}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(N\Omega+\frac{\Omega}{2})}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\Omega}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\Omega}{2}}}=\frac{\sin(N+\frac{1}{2})\Omega}{\sin\frac{\Omega}{2}}$$





例 5-19 求 $\mathrm{DTFT}[a^n \mathrm{u}(n)]$，其中 $|a|<1$。

解： 已知 $\mathscr{Z}[a^n \mathrm{u}(n)]=\dfrac{z}{z-a}\ (|z|>|a|)$，

因为 $|a|<1$，收敛域包含单位圆，则有

$$\mathrm{DTFT}[a^n \mathrm{u}(n)] = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega} - a}$$

5.5.2 序列傅里叶变换的性质

1. 周期性

$$X[e^{j(\Omega+2\pi)}] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn(\Omega+2\pi)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\Omega}e^{-jn2\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\Omega}$$

$$= X[e^{j\Omega}]$$

2. 线性性质

设 $\mathrm{F}[x_1(n)] = X_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$， $\mathrm{F}[x_2(n)] = X_2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$

则 $\mathrm{F}[ax_1(n)+bx_2(n)] = aX_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})+bX_2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$

3. 共轭对称性

设 $\mathrm{F}[x(n)] = X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$ 则 $\mathrm{F}[x^*(n)] = X^*(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega})$

时域序列的复共轭对应于频域频谱的复共轭且反折。

4．奇偶虚实性　**实偶__实偶**

实奇__虚奇

结论：实序列的偶分量的傅里叶变换是原函数傅里叶变换的实部；实序列的奇分量的傅里叶变换是原函数傅里叶变换的虚部*j；

5．序列移位性质

设 $\mathrm{F}[x(n)] = X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$

则 $\mathrm{F}[x(n-m)] = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega m} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$

$Z[x(n-m)]=z^{-m}X(z)$

时域移位对应于频域相位的变化。

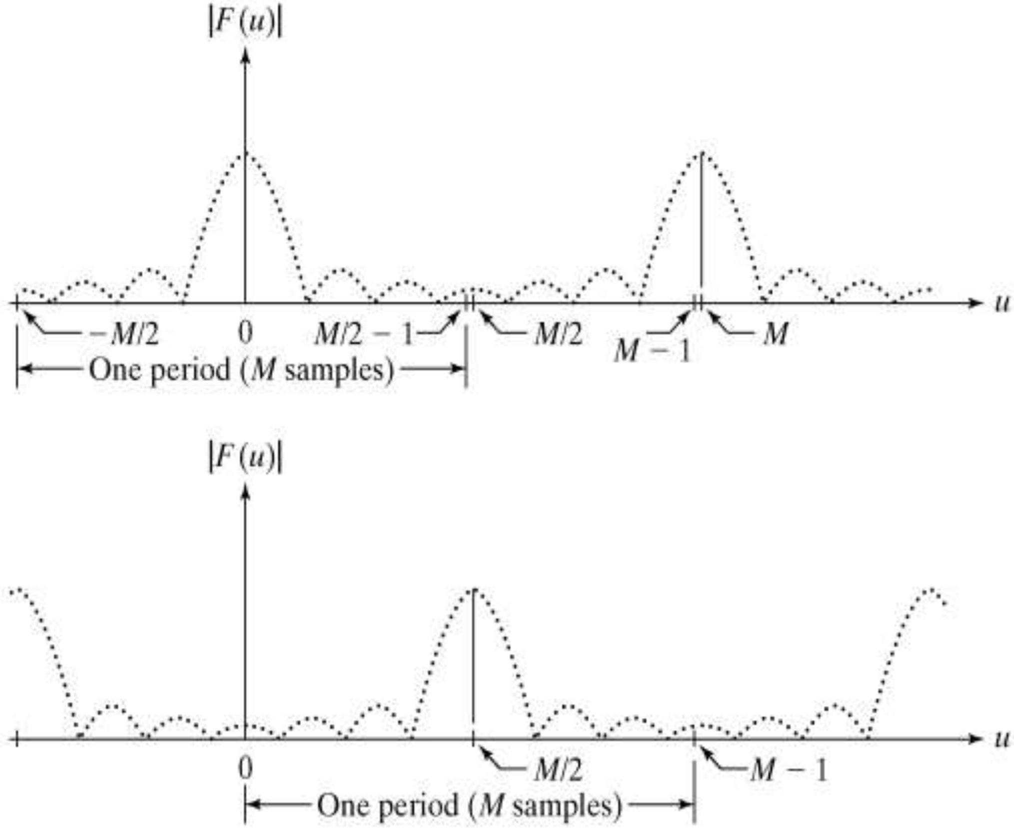
6．频移性质

设 $\mathrm{F}[x(n)] = X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$

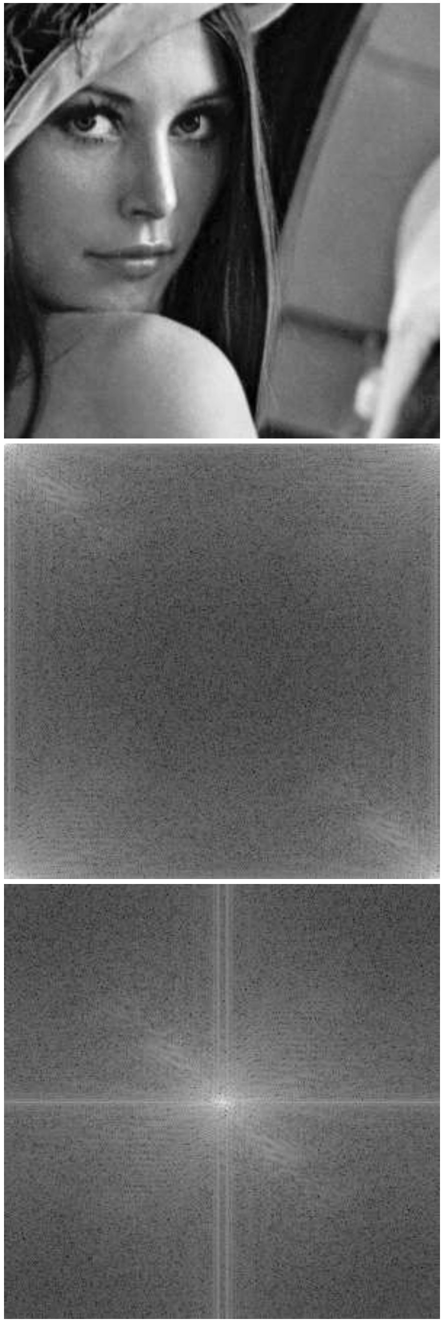
则 $\mathrm{F}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega_0 n} x(n)] = X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\Omega-\Omega_0)})$

$$\boldsymbol{Z}\,[a^n x(n)] = X\left(\frac{z}{a}\right), R_{x1} < \left|\frac{z}{a}\right| < R_{x2}$$

时域调制对应于频域频移，又称为调制性质



|F (u)|
u
−M/2
0
M/2 − 1
M/2
M − 1
M
One period (M samples)
|F (u)|
u
0
M/2
M − 1
One period (M samples)



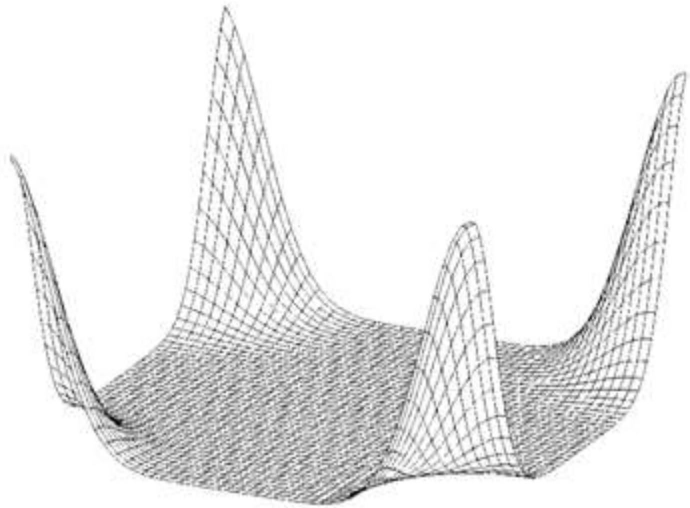
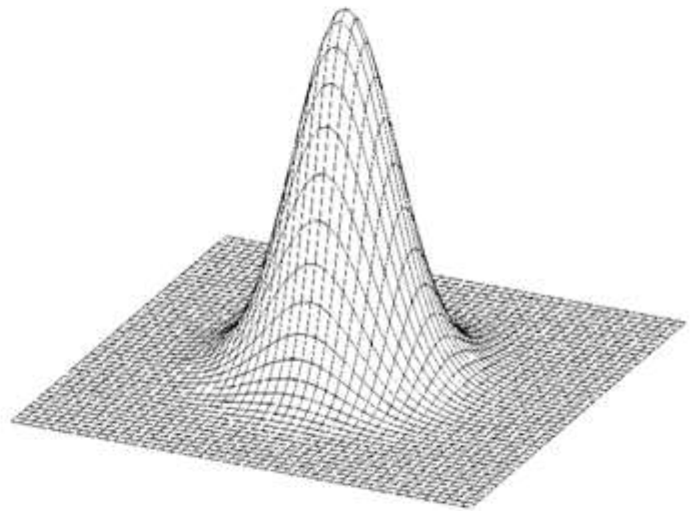
$$f(x,y)e^{j2\pi(u_0 x/M + v_0 y/N)} \Rightarrow F(u-u_0, v-v_0)$$

$$\text{if } u_0 = \frac{M}{2};\ v_0 = \frac{N}{2}$$

$$f(x,y)e^{j2\pi(\frac{M}{2}x/M + \frac{N}{2}y/N)} = f(x,y)e^{j\pi(x+y)} = f(x,y)(-1)^{(x+y)}$$

$$\Rightarrow F\left(u - \frac{M}{2}\ , v - \frac{N}{2}\right)$$

When working in MATLAB, the approach is to rearrange the data afterwards using function ***fftshift***

7．序列反折

设 $F[x(n)] = X(e^{j\Omega})$

则 $F[x(-n)] = X(e^{-j\Omega})$

$$\mathbf{Z}[x(-n)] = X\left(z^{-1}\right), R_{x1} < \left|z^{-1}\right| < R_{x2}$$

8．尺度变换性质

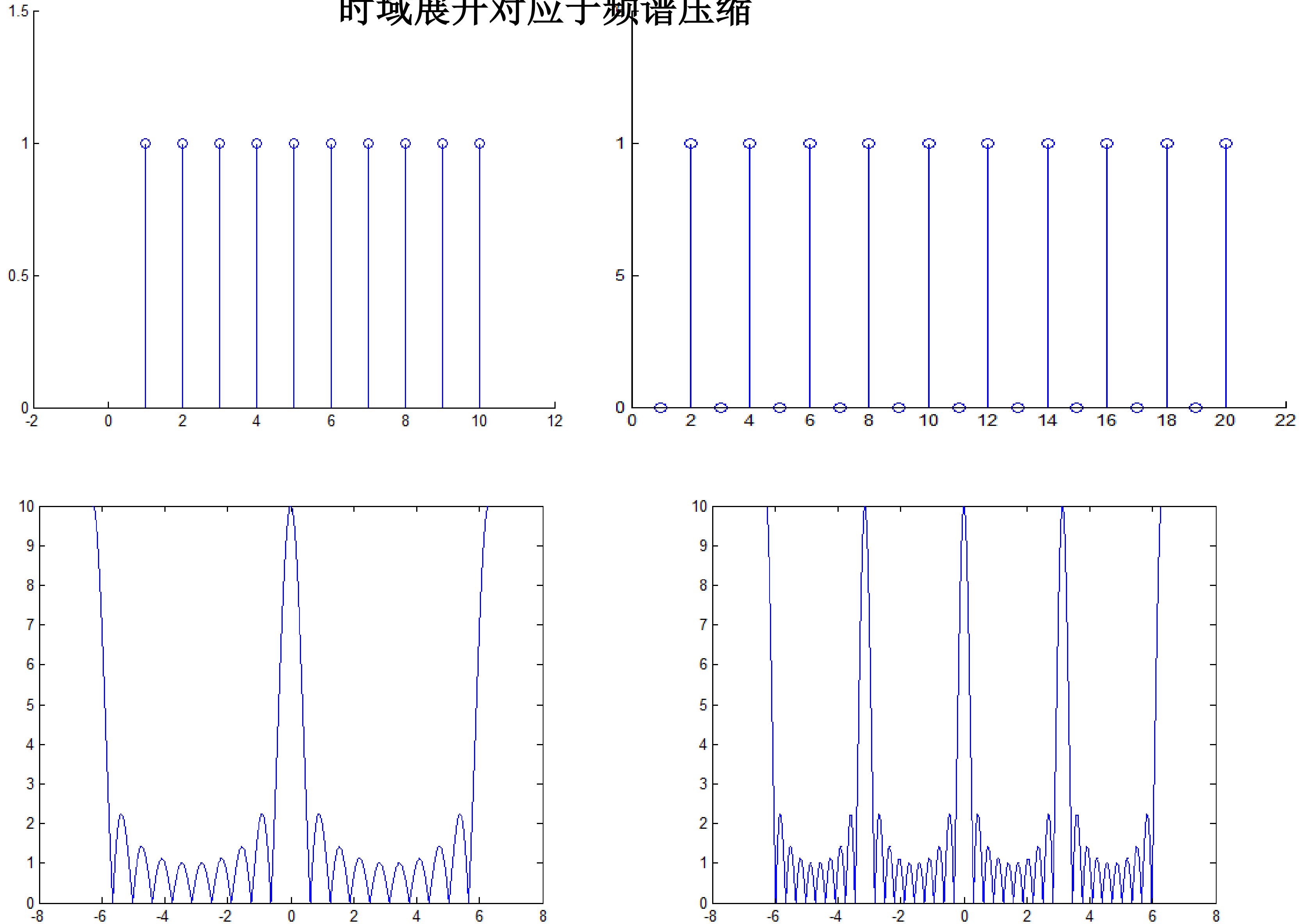
设 $F[x(n)] = X(e^{j\Omega})$

插值算法

则 $F[x(\frac{n}{k})] = X(e^{j\Omega k})$

n为k的整数倍

时域展开对应于频谱压缩



9. 频域微分性质

设 $$\mathrm{F}[x(n)] = X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$$

则 $$\mathrm{F}[nx(n)] = \mathrm{j}\frac{\mathrm{d}X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})}{\mathrm{d}\Omega}$$

若$\boldsymbol{Z}[x(n)] = X(z)$，$\alpha < |z| < \beta$

则$\boldsymbol{Z}[nx(n)] = -z\dfrac{d}{dz}X(z)$，$\alpha < |z| < \beta$

10．卷积定理

时域

设 $\mathrm{F}[x(n)] = X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$， $\mathrm{F}[y(n)] = Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$， $w(n) = x(n) * y(n)$

则 $W(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) = \mathrm{F}[x(n) * y(n)] = X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$

时域卷积定理说明，时域中序列的卷积运算对应于频域中各序列频谱的乘积。傅里叶变换将序列的卷积运算变成了代数乘法运算，为线性时不变系统的分析带来很大的方便。

频域 $\mathrm{F}[x(n)y(n)] = \dfrac{1}{2\pi} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) * Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\Omega-\theta)})\mathrm{d}\theta$

上述积分称为周期卷积，又称为圆卷积。

11．帕斯瓦尔（Parseval）定理

设 $\mathrm{F}[x(n)] = X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$

则 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})|^2 \,\mathrm{d}\Omega$

说明了在时域中求序列的能量与频域中用频谱密度

$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})$ 计算能量是相等的。

函数 $|X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})|^2$ 称为能量密度谱，描述了能量在频域中的分布情况。

帕斯瓦尔定理还有一般形式，即

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y^*(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})Y^*(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega})\mathrm{d}\Omega$$

5.5.3 频率响应的几何确定法

$$H(z)=H_0\frac{\prod_{j=1}^{M}(z-z_j)}{\prod_{i=1}^{N}(p-p_i)}$$

$$H(e^{j\Omega})=H(z)\Big|_{z=e^{j\Omega}}=H_0\frac{\prod_{r=1}^{M}(e^{j\Omega}-z_r)}{\prod_{i=1}^{N}(e^{j\Omega}-p_i)}$$

由于 $(e^{j\Omega}-z_r)$ *and* $(e^{j\Omega}-p_i)$ 为复数，故令

$$(e^{j\Omega}-z_r)=A_r e^{j\theta_r}$$

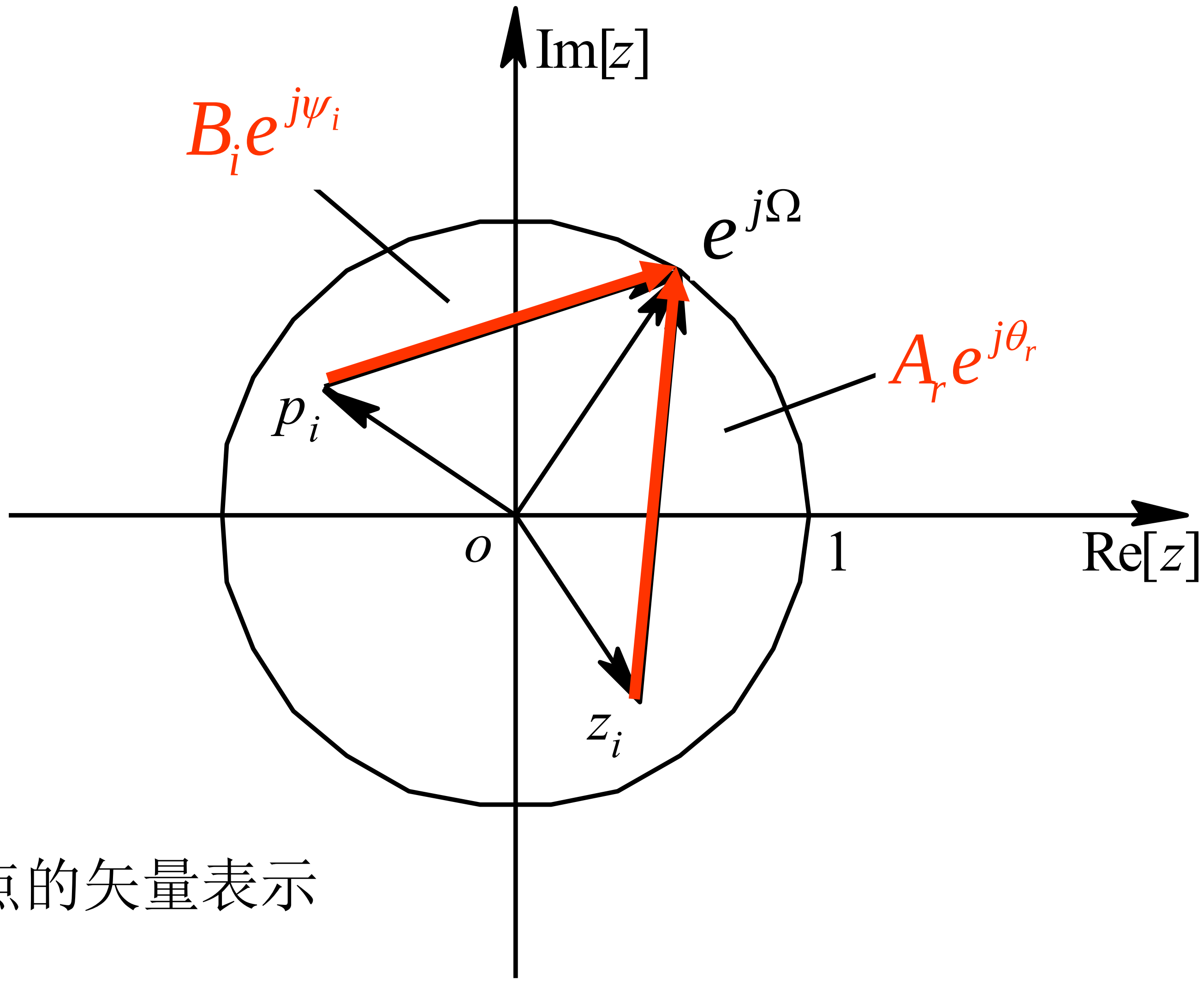
$$(e^{j\Omega}-p_i)=B_i e^{j\psi_i}$$

则 $H(e^{j\Omega})$ 又可表示为

$$H(e^{j\Omega}) = H_0 \frac{\prod_{r=1}^{M} A_r e^{j\theta_r}}{\prod_{i=1}^{N} B_i e^{j\psi_i}} = H_0 \frac{\prod_{r=1}^{M} A_r}{\prod_{i=1}^{N} B_i} e^{j\left(\sum_{r=1}^{M}\theta_r - \sum_{i=1}^{N}\psi_i\right)}$$

幅频响应和相频响应分别为

$$\left|H(e^{j\Omega})\right| = H_0 \frac{\prod_{r=1}^{M} A_r}{\prod_{i=1}^{N} B_i} \qquad \varphi(\Omega) = \sum_{r=1}^{M}\theta_r - \sum_{i=1}^{N}\psi_i$$



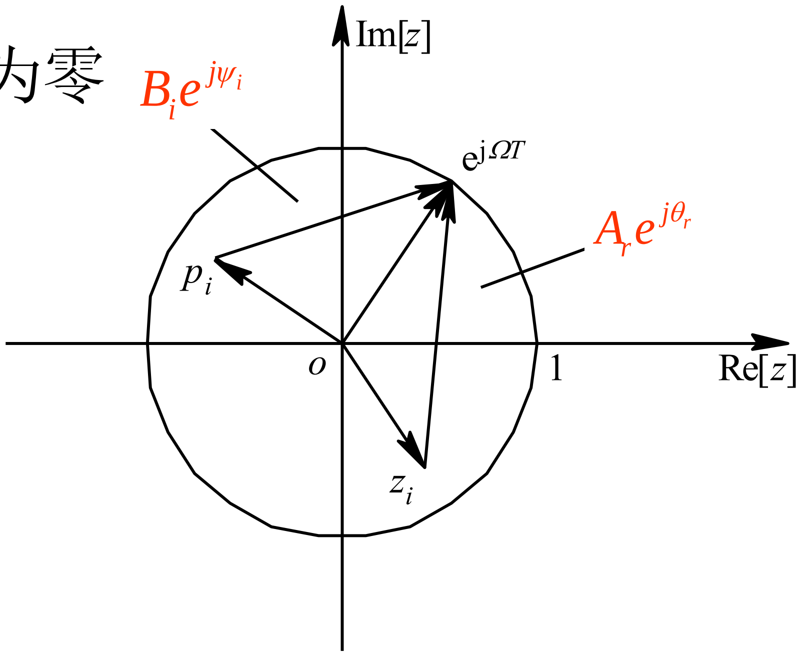
零、极点的矢量表示

零、极点对幅频特性的影响：

1、原点处的零、极点不影响系统的幅频特性

2、极点影响频度特性的幅值，极点越靠近单位圆，峰值越高越尖锐，当极点处于单位圆上，该点的频率响应为无穷大，系统不稳定

3、零点影响幅度特性的谷值，零点越靠近单位圆，谷值越小，当零点处于单位圆上，幅值为零



例5-20（类似） 已知离散系统的系统函数为

$$H(z)=\frac{6(z-1)}{4z+1}\qquad |z|>\frac{1}{4}$$

求系统的频率响应，粗略画出系统的幅频响应和相频响应曲线。

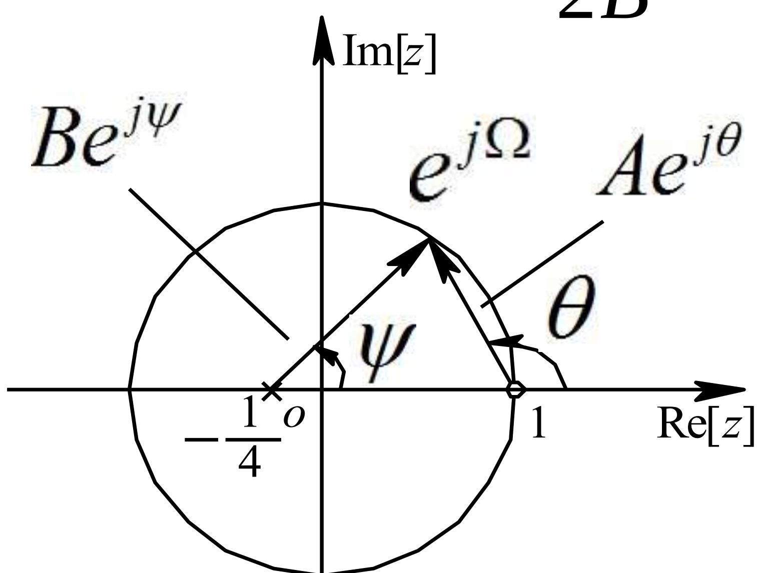
解 由于H（z）的收敛域为 $|z|>\frac{1}{4}$，所以H（z）在单位圆上收敛。H（z）有一个极点 $p_1=-\frac{1}{4}$，有一个零点z_1=1。系统的频率响应为

$$H(e^{j\Omega})=H(z)\Big|_{z=e^{j\Omega}}=\frac{3}{2}\left[\frac{e^{j\Omega}-1}{e^{j\Omega}-\left(-\frac{1}{4}\right)}\right]$$

令 $Ae^{j\theta}=e^{j\Omega}-1, Be^{j\psi}=e^{j\Omega}-\left(-\frac{1}{4}\right)$，则有

$$H(e^{j\Omega})=\frac{3Ae^{j\theta}}{2Be^{j\psi}}=\left|H(e^{j\Omega})\right|e^{j\varphi(\Omega)}$$

$$\left|H(e^{j\Omega})\right|=\frac{3A}{2B} \qquad \varphi(\Omega)=\theta-\psi$$

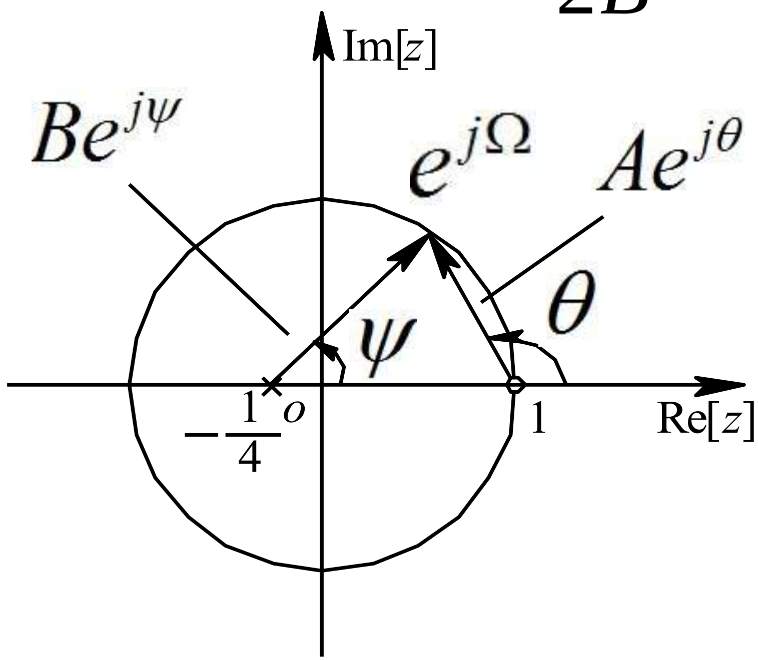


(a)

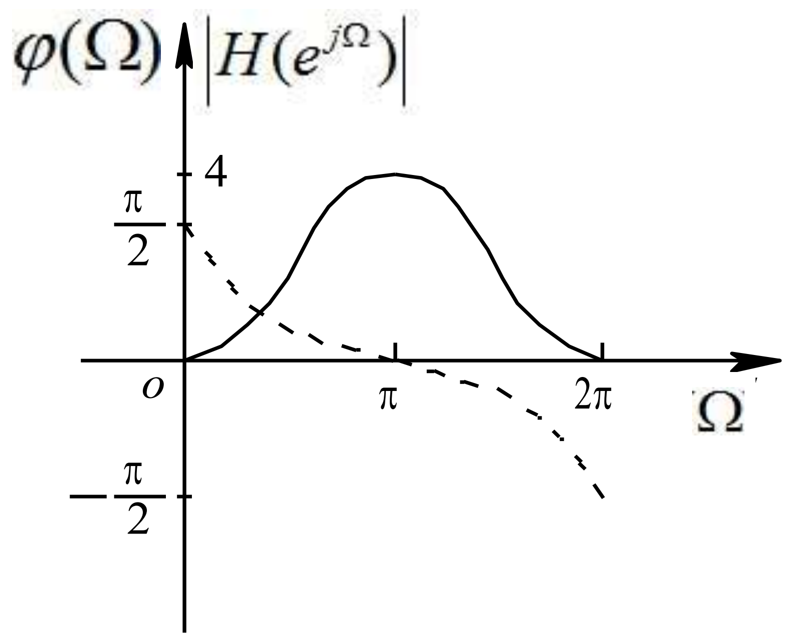
令 $Ae^{j\theta}=e^{j\Omega}-1, Be^{j\psi}=e^{j\Omega}-\left(-\dfrac{1}{4}\right)$，则有

$$H(e^{j\Omega})=\frac{3Ae^{j\theta}}{2Be^{j\psi}}=\left|H(e^{j\Omega})\right|e^{j\varphi(\Omega)}$$

$$\left|H(e^{j\Omega})\right|=\frac{3A}{2B} \qquad \varphi(\Omega)=\theta-\psi$$



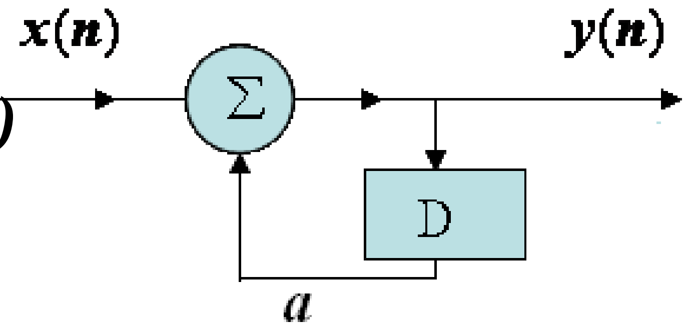
(a)



(b)

例5-10 已知一因果离散系统如图

设 $|a|<1$，试求系统频率响应，大致画出其幅频特性，并说明其滤波特性。

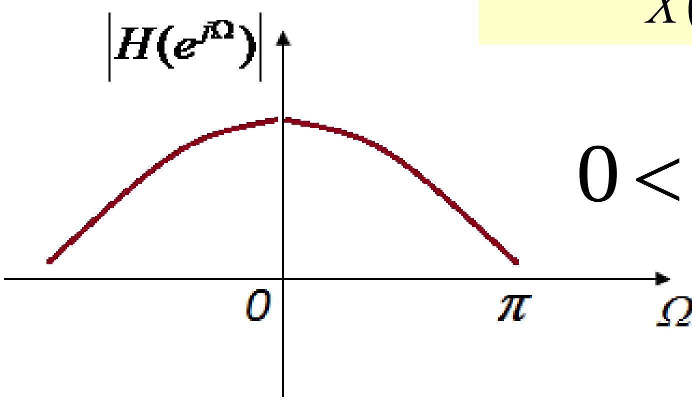


$$|H(e^{j\Omega})| = \frac{A}{B}$$

$$y(n) - ay(n-1) = x(n)$$

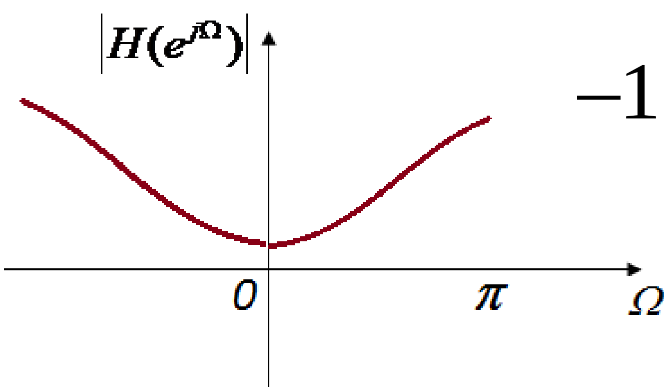
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z}{z-a}$$

低通

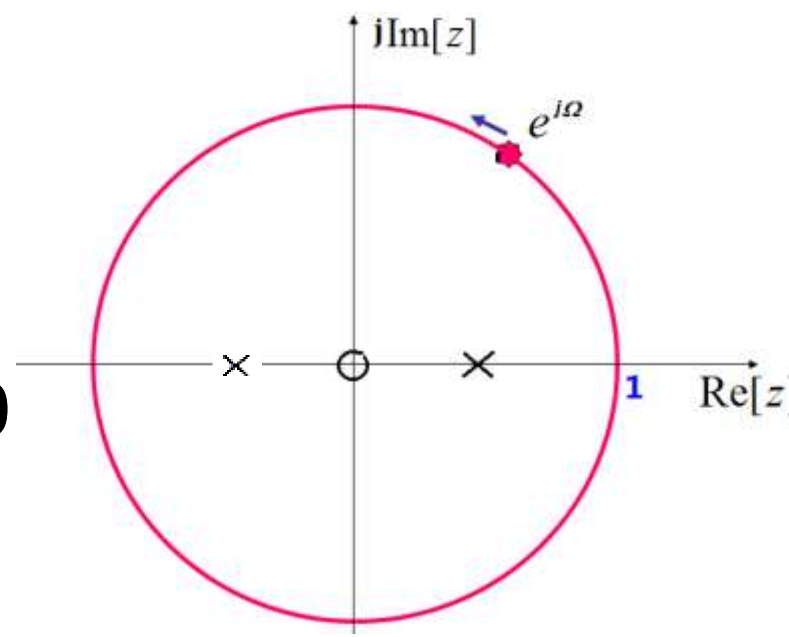


$$0<a<1$$

高通

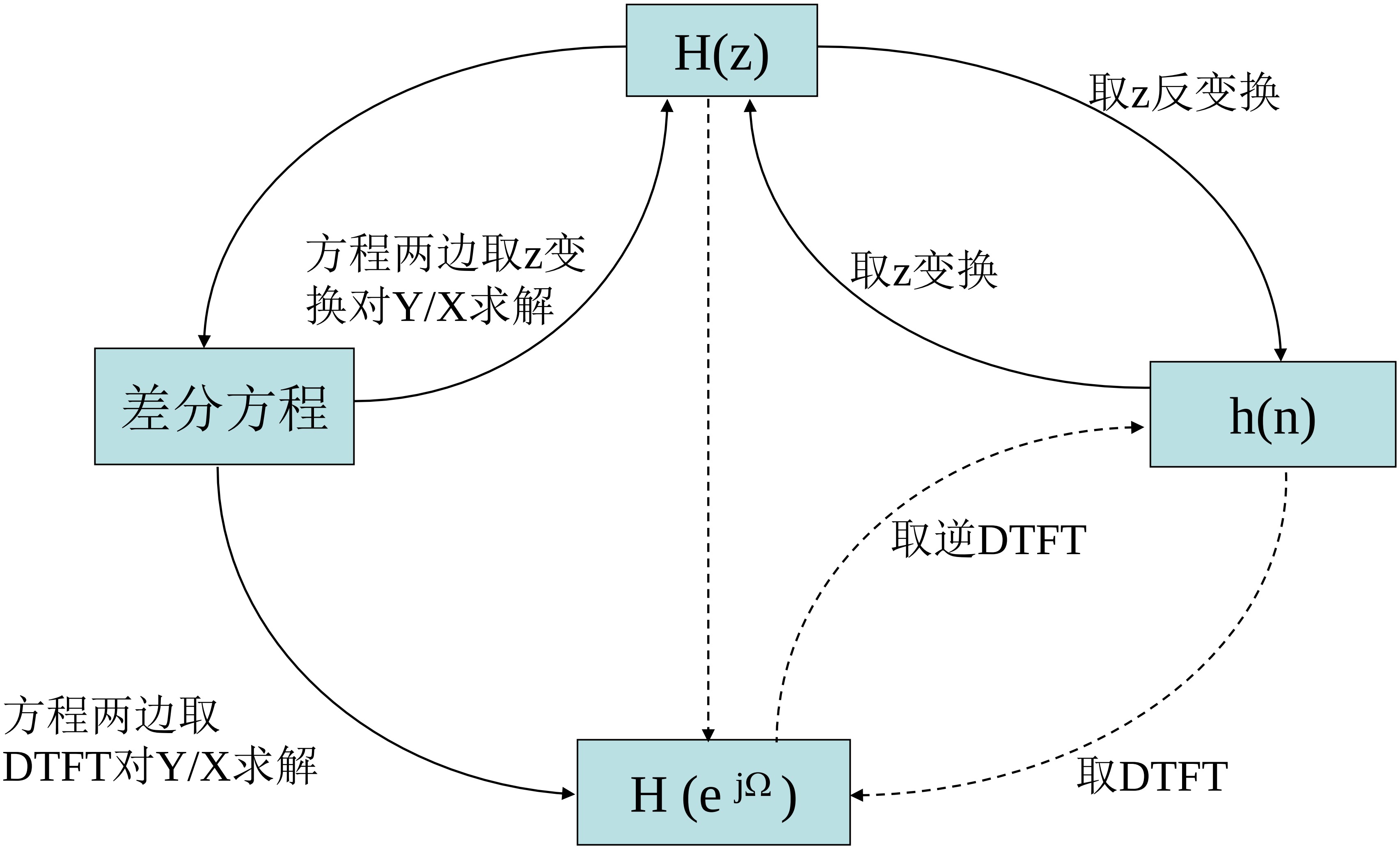


$$-1<a<0$$

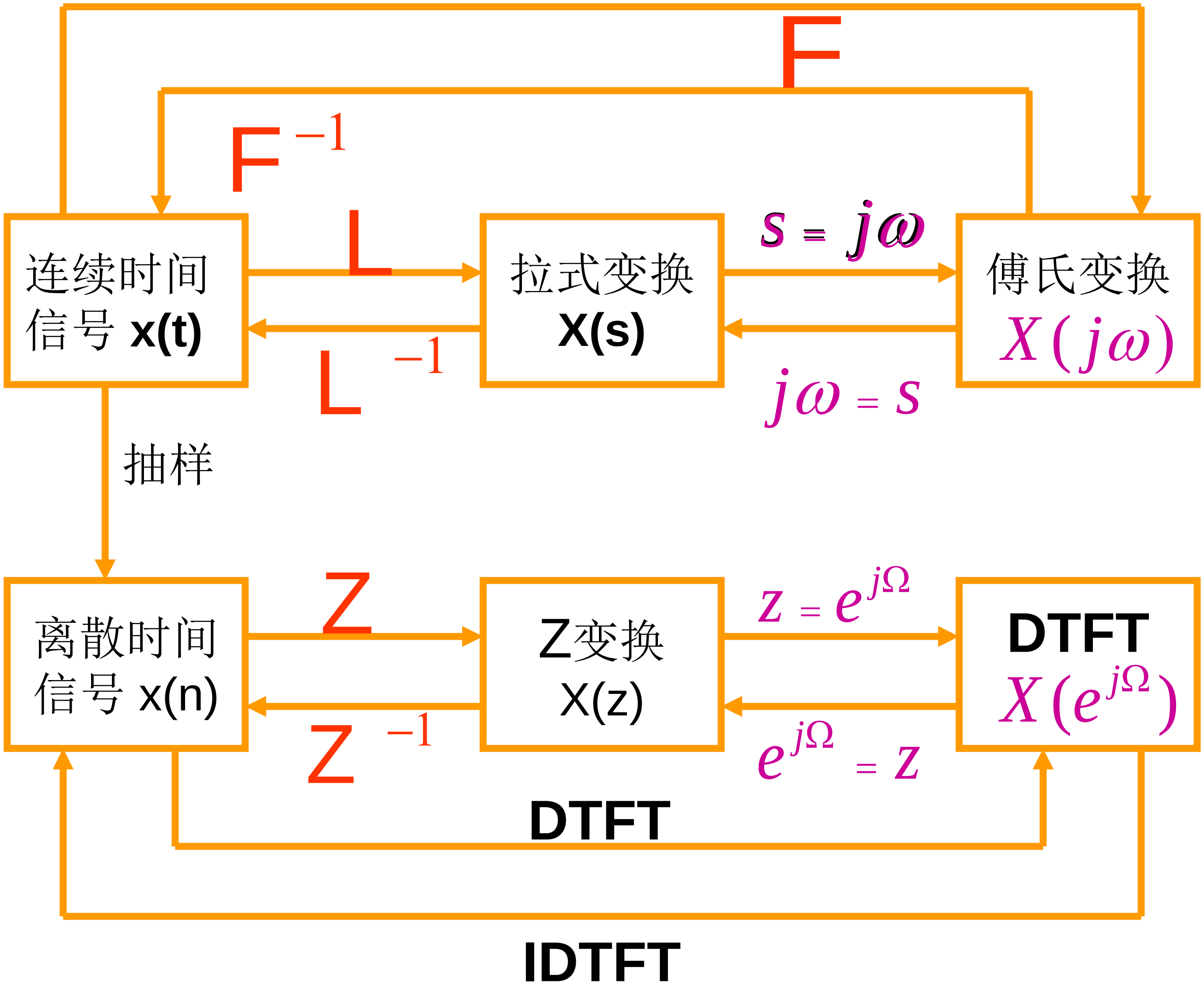


说明：离散系统（又叫数字滤波器）按其频率特性分有低通、高通、带通、带阻和全通之分。由于数字滤波器的频率特性$H(e^{j\Omega})$是周期性的，因此滤波器特性的判断在 $0 \sim \pi$ 范围内进行。

离散系统各种表示之间的关系



Z域、S域、频域之间的关系



作业：p294 5-24~5-29