

一章习题解答

1.1 给定三个矢量 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 和 \mathbf{C} 如下：

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y - 3\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{B} = -4\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{C} = 5\mathbf{e}_x - 2\mathbf{e}_z$$

求：(1) \mathbf{a}_A ；(2) $|\mathbf{A} - \mathbf{B}|$ ；(3) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ；(4) θ_{AB} ；(5) \mathbf{A} 在 \mathbf{B} 上的分量；(6) $\mathbf{A} \times \mathbf{C}$ ；
(7) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ 和 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ ；(8) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$ 和 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ 。

$$\text{解 (1) } \mathbf{a}_A = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y - 3\mathbf{e}_z}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}} = \mathbf{e}_x \frac{1}{\sqrt{14}} + \mathbf{e}_y \frac{2}{\sqrt{14}} - \mathbf{e}_z \frac{3}{\sqrt{14}}$$

$$(2) |\mathbf{A} - \mathbf{B}| = |(\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y - 3\mathbf{e}_z) - (-4\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z)| = |\mathbf{e}_x + 6\mathbf{e}_y - 4\mathbf{e}_z| = \sqrt{53}$$

$$(3) \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y - 3\mathbf{e}_z) \cdot (-4\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z) = -11$$

$$(4) \text{由 } \cos \theta_{AB} = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}| |\mathbf{B}|} = \frac{-11}{\sqrt{14} \sqrt{17}} = -\frac{11}{\sqrt{238}}, \text{得 } \theta_{AB} = \cos^{-1} \left(-\frac{11}{\sqrt{238}} \right) = 135.5^\circ$$

$$(5) \mathbf{A} \text{ 在 } \mathbf{B} \text{ 上的分量 } A_B = |\mathbf{A}| \cos \theta_{AB} = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} = -\frac{11}{\sqrt{17}}$$

$$(6) \mathbf{A} \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -\mathbf{e}_x 4 - \mathbf{e}_y 13 - \mathbf{e}_z 10$$

$$(7) \text{由于 } \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & -4 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_x 8 + \mathbf{e}_y 5 + \mathbf{e}_z 20$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -\mathbf{e}_x 10 - \mathbf{e}_y 1 - \mathbf{e}_z 4$$

所以 $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y - 3\mathbf{e}_z) \cdot (\mathbf{e}_x 8 + \mathbf{e}_y 5 + \mathbf{e}_z 20) = -42$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (-\mathbf{e}_x 10 - \mathbf{e}_y 1 - \mathbf{e}_z 4) \cdot (\mathbf{e}_x 5 - \mathbf{e}_z 2) = -42$$

$$(8) (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ -10 & -1 & -4 \\ 5 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_x 2 - \mathbf{e}_y 40 + \mathbf{e}_z 5$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & 2 & -3 \\ 8 & 5 & 20 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_x 55 - \mathbf{e}_y 44 - \mathbf{e}_z 11$$

1.2 三角形的三个顶点为 $P_1(0,1,-2)$ 、 $P_2(4,1,-3)$ 和 $P_3(6,2,5)$ 。

(1) 判断 $\triangle P_1P_2P_3$ 是否为一直角三角形；

(2) 求三角形的面积。

解 (1) 三个顶点 $P_1(0,1,-2)$ 、 $P_2(4,1,-3)$ 和 $P_3(6,2,5)$ 的位置矢量分别为

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{e}_y - 2\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{r}_2 = 4\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y - 3\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{r}_3 = 6\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y + 5\mathbf{e}_z$$

则

$$\mathbf{R}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = 4\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{R}_{23} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2 = 2\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + 8\mathbf{e}_z,$$

$$\mathbf{R}_{31} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3 = -6\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y - 7\mathbf{e}_z$$

由此可见

$$\mathbf{R}_{12} \cdot \mathbf{R}_{23} = (4\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_z) \cdot (2\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + 8\mathbf{e}_z) = 0$$

故 $\triangle P_1P_2P_3$ 为一直角三角形。

$$(2) \text{ 三角形的面积 } S = \frac{1}{2} |\mathbf{R}_{12} \times \mathbf{R}_{23}| = \frac{1}{2} |\mathbf{R}_{12}| |\mathbf{R}_{23}| = \frac{1}{2} \sqrt{17} \sqrt{69} \approx 7.13$$

1.3 求 $P'(-3,1,4)$ 点到 $P(2,-2,3)$ 点的距离矢量 \mathbf{R} 及 \mathbf{R} 的方向。

解 $\mathbf{r}_{P'} = -3\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + 4\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{r}_P = 2\mathbf{e}_x - 2\mathbf{e}_y + 3\mathbf{e}_z,$

则

$$\mathbf{R}_{P'P} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_{P'} = 5\mathbf{e}_x - 3\mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z$$

且 $\mathbf{R}_{P'P}$ 与 x 、 y 、 z 轴的夹角分别为

$$\phi_x = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{R}_{P'P}}{|\mathbf{R}_{P'P}|} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{5}{\sqrt{35}} \right) = 32.31^\circ$$

$$\phi_y = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{R}_{P'P}}{|\mathbf{R}_{P'P}|} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{-3}{\sqrt{35}} \right) = 120.47^\circ$$

$$\phi_z = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{R}_{P'P}}{|\mathbf{R}_{P'P}|} \right) = \cos^{-1} \left(-\frac{1}{\sqrt{35}} \right) = 99.73^\circ$$

1.4 给定两矢量 $\mathbf{A} = 2\mathbf{e}_x + 3\mathbf{e}_y - 4\mathbf{e}_z$ 和 $\mathbf{B} = 4\mathbf{e}_x - 5\mathbf{e}_y + 6\mathbf{e}_z$ ，求它们之间的夹角和 \mathbf{A} 在 \mathbf{B} 上的分量。

解 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 之间的夹角为 $\theta_{AB} = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}| |\mathbf{B}|} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{-31}{\sqrt{29} \sqrt{77}} \right) = 131^\circ$

\mathbf{A} 在 \mathbf{B} 上的分量为 $A_B = \mathbf{A} \cdot \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} = \frac{-31}{\sqrt{77}} = -3.532$

1.5 给定两矢量 $\mathbf{A} = 2\mathbf{e}_x + 3\mathbf{e}_y - 4\mathbf{e}_z$ 和 $\mathbf{B} = -6\mathbf{e}_x - 4\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z$ ，求 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 在 $\mathbf{C} = \mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z$ 上的分量。

$$\text{解 } \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 2 & 3 & -4 \\ -6 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -13\mathbf{e}_x + 22\mathbf{e}_y + 10\mathbf{e}_z$$

所以 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 在 \mathbf{C} 上的分量为 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_C = \frac{(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}}{|\mathbf{C}|} = \frac{25}{\sqrt{3}} = 14.43$

1.6 证明：如果 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$ 和 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times \mathbf{C}$ ，则 $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ ；

解 由 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times \mathbf{C}$, 则有 $\mathbf{A} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{C})$, 即

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) \mathbf{C}$$

由于 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$, 于是得到 $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) \mathbf{C}$
故 $\mathbf{B} = \mathbf{C}$

1.7 如果给定一未知矢量与一已知矢量的标量积和矢量积, 那么便可以确定该未知矢量。

设 \mathbf{A} 为一已知矢量, $p = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$ 而 $\mathbf{P} = \mathbf{A} \times \mathbf{X}$, p 和 \mathbf{P} 已知, 试求 \mathbf{X} 。

解 由 $\mathbf{P} = \mathbf{A} \times \mathbf{X}$, 有

$$\mathbf{A} \times \mathbf{P} = \mathbf{A} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{X}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) \mathbf{X} = p\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) \mathbf{X}$$

故得

$$\mathbf{X} = \frac{p\mathbf{A} - \mathbf{A} \times \mathbf{P}}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}$$

1.8 在圆柱坐标中, 一点的位置由 $(4, \frac{2\pi}{3}, 3)$ 定出, 求该点在: (1) 直角坐标中的坐标;

(2) 球坐标中的坐标。

解 (1) 在直角坐标系中 $x = 4 \cos(\frac{2\pi}{3}) = -2$ 、 $y = 4 \sin(2\pi/3) = 2\sqrt{3}$ 、 $z = 3$

故该点的直角坐标为 $(-2, 2\sqrt{3}, 3)$ 。

(2) 在球坐标系中 $r = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ 、 $\theta = \tan^{-1}(4/3) = 53.1^\circ$ 、 $\phi = 2\pi/3 = 120^\circ$

故该点的球坐标为 $(5, 53.1^\circ, 120^\circ)$

1.9 用球坐标表示的场 $\mathbf{E} = \mathbf{e}_r \frac{25}{r^2}$,

(1) 求在直角坐标中点 $(-3, 4, -5)$ 处的 $|\mathbf{E}|$ 和 E_x ;

(2) 求在直角坐标中点 $(-3, 4, -5)$ 处 \mathbf{E} 与矢量 $\mathbf{B} = \mathbf{e}_x 2 - \mathbf{e}_y 2 + \mathbf{e}_z$ 构成的夹角。

解 (1) 在直角坐标中点 $(-3, 4, -5)$ 处, $r^2 = (-3)^2 + 4^2 + (-5)^2 = 50$, 故

$$|\mathbf{E}| = \left| \mathbf{e}_r \frac{25}{r^2} \right| = \frac{1}{2}$$

$$E_x = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{E} = |\mathbf{E}| \cos \theta_{rx} = \frac{1}{2} \times \frac{-3}{5\sqrt{2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{20}$$

(2) 在直角坐标中点 $(-3, 4, -5)$ 处, $\mathbf{r} = -\mathbf{e}_x 3 + \mathbf{e}_y 4 - \mathbf{e}_z 5$, 所以

$$\mathbf{E} = \frac{25}{r^2} = \frac{25\mathbf{r}}{r^3} = \frac{-\mathbf{e}_x 3 + \mathbf{e}_y 4 - \mathbf{e}_z 5}{10\sqrt{2}}$$

故 \mathbf{E} 与 \mathbf{B} 构成的夹角为 $\theta_{EB} = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{E}| |\mathbf{B}|} \right) = \cos^{-1} \left(-\frac{19/(10\sqrt{2})}{3/2} \right) = 153.6^\circ$

1.10 球坐标中两个点 (r_1, θ_1, ϕ_1) 和 (r_2, θ_2, ϕ_2) 定出两个位置矢量 \mathbf{R}_1 和 \mathbf{R}_2 。证明 \mathbf{R}_1 和 \mathbf{R}_2 间夹角的余弦为

$$\cos \gamma = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)$$

解 由 $\mathbf{R}_1 = \mathbf{e}_x r_1 \sin \theta_1 \cos \phi_1 + \mathbf{e}_y r_1 \sin \theta_1 \sin \phi_1 + \mathbf{e}_z r_1 \cos \theta_1$

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{e}_x r_2 \sin \theta_2 \cos \phi_2 + \mathbf{e}_y r_2 \sin \theta_2 \sin \phi_2 + \mathbf{e}_z r_2 \cos \theta_2$$

得到 $\cos \gamma = \frac{\mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_2}{|\mathbf{R}_1| |\mathbf{R}_2|} =$

$$\frac{\sin \theta_1 \cos \phi_1 \sin \theta_2 \cos \phi_2 + \sin \theta_1 \sin \phi_1 \sin \theta_2 \sin \phi_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2}{\sin \theta_1 \sin \theta_2 (\cos \phi_1 \cos \phi_2 + \sin \phi_1 \sin \phi_2) + \cos \theta_1 \cos \theta_2} =$$

$$\frac{\sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) + \cos \theta_1 \cos \theta_2}{\sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) + \cos \theta_1 \cos \theta_2}$$

1.11 一球面 S 的半径为 5，球心在原点上，计算： $\oint_S (\mathbf{e}_r 3 \sin \theta) \cdot d\mathbf{S}$ 的值。

解 $\oint_S (\mathbf{e}_r 3 \sin \theta) \cdot d\mathbf{S} = \oint_S (\mathbf{e}_r 3 \sin \theta) \cdot \mathbf{e}_r dS = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi 3 \sin \theta \times 5^2 \sin \theta d\theta = 75\pi^2$

1.12 在由 $r = 5$ 、 $z = 0$ 和 $z = 4$ 围成的圆柱形区域，对矢量 $\mathbf{A} = \mathbf{e}_r r^2 + \mathbf{e}_z 2z$ 验证散度定理。

解 在圆柱坐标系中 $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r r^2) + \frac{\partial}{\partial z} (2z) = 3r + 2$

所以 $\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} d\tau = \int_0^4 dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^5 (3r + 2) r dr = 1200\pi$

又 $\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S (\mathbf{e}_r r^2 + \mathbf{e}_z 2z) \cdot (\mathbf{e}_r dS_r + \mathbf{e}_\phi dS_\phi + \mathbf{e}_z dS_z) =$

$$\int_0^4 \int_0^{2\pi} 5^2 \times 5 d\phi dz + \int_0^5 \int_0^{2\pi} 2 \times 4r dr d\phi = 1200\pi$$

故有 $\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} d\tau = 1200\pi = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$

1.13 求 (1) 矢量 $\mathbf{A} = \mathbf{e}_x x^2 + \mathbf{e}_y x^2 y^2 + \mathbf{e}_z 24x^2 y^2 z^3$ 的散度；(2) 求 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 对中心在原点的一个单位立方体的积分；(3) 求 \mathbf{A} 对此立方体表面的积分，验证散度定理。

解 (1) $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial (x^2)}{\partial x} + \frac{\partial (x^2 y^2)}{\partial y} + \frac{\partial (24x^2 y^2 z^3)}{\partial z} = 2x + 2x^2 y + 72x^2 y^2 z^2$

(2) $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 对中心在原点的一个单位立方体的积分为

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} d\tau = \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} (2x + 2x^2 y + 72x^2 y^2 z^2) dx dy dz = \frac{1}{24}$$

(3) \mathbf{A} 对此立方体表面的积分

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 dy dz - \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} \left(-\frac{1}{2}\right)^2 dy dz +$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} 2x^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 dx dz - \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} 2x^2 \left(-\frac{1}{2}\right)^2 dx dz +$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} 24x^2 y^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 dx dy - \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} 24x^2 y^2 \left(-\frac{1}{2}\right)^3 dx dy = \frac{1}{24}$$

故有

$$\oint_{\tau} \nabla g \cdot d\tau = \frac{1}{24} = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

1.14 计算矢量 \mathbf{r} 对一个球心在原点、半径为 a 的球表面的积分，并求 ∇g 对球体积的积分。

解

$$\oint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_r dS = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} a a^2 \sin \theta d\theta = 4\pi a^3$$

又在球坐标系中， $\nabla g = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \mathbf{r}) = 3$ ，所以

$$\int_{\tau} \nabla g \cdot d\tau = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^a 3r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = 4\pi a^3$$

1.15 求矢量 $\mathbf{A} = \mathbf{e}_x x^2 + \mathbf{e}_y x^2 + \mathbf{e}_z y^2 z$ 沿 xy 平面上的一个边长为 2 的正方形回路的线积分，此正方形的两边分别与 x 轴和 y 轴相重合。再求 $\nabla \times \mathbf{A}$ 对此回路所包围的曲面积分，验证斯托克斯定理。

解

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^2 x dx - \int_0^2 x dx + \int_0^2 2^2 dy - \int_0^2 0 dy = 8$$

又

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & x^2 & y^2 z \end{vmatrix} = \mathbf{e}_x 2yz + \mathbf{e}_z 2x$$

所以

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^2 \int_0^2 (\mathbf{e}_x 2yz + \mathbf{e}_z 2x) \cdot \mathbf{e}_z dx dy = 8$$

故有

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 8 = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

1.16 求矢量 $\mathbf{A} = \mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y xy^2$ 沿圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ 的线积分，再计算 $\nabla \times \mathbf{A}$ 对此圆面积的积分。

解

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C x dx + xy^2 dy = \int_0^{2\pi} (-a^2 \cos \phi \sin \phi + a^4 \cos^2 \phi \sin^2 \phi) d\phi = \frac{\pi a^4}{4}$$

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \cdot \mathbf{e}_z dS = \int_S y^2 dS = \int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 \sin^2 \phi r dr d\phi = \frac{\pi a^4}{4}$$

1.17 证明：(1) $\nabla \cdot \mathbf{R} = 3$ ；(2) $\nabla \times \mathbf{R} = \mathbf{0}$ ；(3) $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{R}) = \mathbf{A}$ 。其中 $\mathbf{R} = \mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y + \mathbf{e}_z z$ ， \mathbf{A} 为一常矢量。

解 (1) $\nabla \cdot \mathbf{R} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$

$$(2) \quad \nabla \times \mathbf{R} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & y \end{vmatrix} = 0$$

(3) 设 $\mathbf{A} = \mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z$, 则 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{R} = A_x x + A_y y + A_z z$, 故

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{R}) &= \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} (A_x x + A_y y + A_z z) + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} (A_x x + A_y y + A_z z) + \\ &\quad \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} (A_x x + A_y y + A_z z) = \mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z = \mathbf{A} \end{aligned}$$

1.18 一径向矢量场 $\mathbf{F} = \mathbf{e}_r f(r)$ 表示, 如果 $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, 那么函数 $f(r)$ 会有什么特点呢?

解 在圆柱坐标系中, 由 $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r f(r)] = 0$

可得到

$$f(r) = \frac{C}{r} \quad C \text{ 为任意常数。}$$

在球坐标系中, 由 $\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r^2 f(r)] = 0$

可得到

$$f(r) = \frac{C}{r^2}$$

1.19 给定矢量函数 $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x y + \mathbf{e}_y x$, 试求从点 $P_1(2, 1, -1)$ 到点 $P_2(8, 2, -1)$ 的线积分

$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$: (1) 沿抛物线 $x = y^2$; (2) 沿连接该两点的直线。这个 \mathbf{E} 是保守场吗?

$$\begin{aligned} \text{解 (1)} \quad \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= \int_C E_x dx + E_y dy = \int_C y dx + x dy = \\ &= \int_1^2 y d(2y^2) + 2y^2 dy = \int_1^2 6y^2 dy = 14 \end{aligned}$$

(2) 连接点 $P_1(2, 1, -1)$ 到点 $P_2(8, 2, -1)$ 直线方程为

$$\frac{x-2}{y-1} = \frac{x-8}{y-2} \quad \text{即} \quad x - 6y + 4 = 0$$

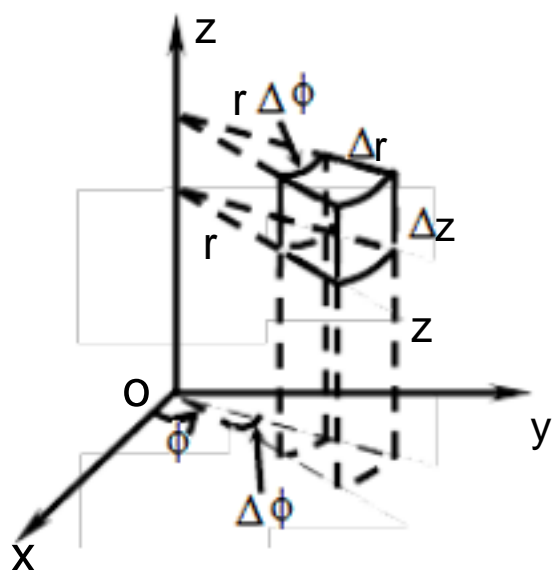
$$\text{故} \quad \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_C E_x dx + E_y dy = \int_1^2 y d(6y-4) + (6y-4) dy = \int_1^2 (12y-4) dy = 14$$

由此可见积分与路径无关, 故是保守场。

1.20 求标量函数 $\Psi = x^2 y z$ 的梯度及 Ψ 在一个指定方向的方向导数, 此方向由单位矢量

$\mathbf{e}_x \frac{3}{\sqrt{50}} + \mathbf{e}_y \frac{4}{\sqrt{50}} + \mathbf{e}_z \frac{5}{\sqrt{50}}$ 定出; 求 $(2, 3, 1)$ 点的方向导数值。

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \nabla \Psi &= \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} (x^2 y z) + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} (x^2 y z) + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} (x^2 y z) = \\ &= \mathbf{e}_x 2xyz + \mathbf{e}_y x^2 z + \mathbf{e}_z x^2 y \end{aligned}$$



题 1.21 图

故沿方向 $\mathbf{e}_l = \mathbf{e}_x \frac{3}{\sqrt{50}} + \mathbf{e}_y \frac{4}{\sqrt{50}} + \mathbf{e}_z \frac{5}{\sqrt{50}}$ 的方向导数为

$$\frac{\partial \Psi}{\partial l} = \nabla \Psi \cdot \mathbf{e}_l = \frac{6xyz}{\sqrt{50}} + \frac{4x^2z}{\sqrt{50}} + \frac{5x^2y}{\sqrt{50}}$$

点 (2,3,1) 处沿 \mathbf{e}_l 的方向导数值为

$$\frac{\partial \Psi}{\partial l} = \frac{36}{\sqrt{50}} + \frac{16}{\sqrt{50}} + \frac{60}{\sqrt{50}} = \frac{112}{\sqrt{50}}$$

1.21

试采用与推导直角坐标中

$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ 相似的方法推导圆柱坐标下的公式

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{\partial A_\phi}{r \partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

解 在圆柱坐标中，取小体积元如题 1.21 图所示。矢量场 \mathbf{A} 沿 \mathbf{e}_r 方向穿出该六面体的表面的通量为

$$\Psi_r = \int_{\phi}^{\phi+\Delta\phi} \int_z^{z+\Delta z} A_r|_{r+\Delta r} (r+\Delta r) dr d\phi - \int_{\phi}^{\phi+\Delta\phi} \int_z^{z+\Delta z} A_r|_r r dr d\phi \approx$$

$$[(r+\Delta r)A_r(r+\Delta r, \phi, z) - rA_r(r, \phi, z)]\Delta\phi\Delta z \approx \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} \Delta r \Delta\phi\Delta z = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} \Delta\tau$$

同理

$$\Psi_\phi = \int_r^{r+\Delta r} \int_z^{z+\Delta z} A_\phi|_{\phi+\Delta\phi} dr dz - \int_r^{r+\Delta r} \int_z^{z+\Delta z} A_\phi|_\phi dr dz \approx$$

$$[A_\phi(r, \phi+\Delta\phi, z) - A_\phi(r, \phi, z)]\Delta r \Delta z \approx \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \Delta r \Delta\phi\Delta z = \frac{\partial A_\phi}{r \partial \phi} \Delta\tau$$

$$\Psi_z = \int_r^{r+\Delta r} \int_\phi^{\phi+\Delta\phi} A_z|_{z+\Delta z} r dr d\phi - \int_r^{r+\Delta r} \int_\phi^{\phi+\Delta\phi} A_z|_z r dr d\phi \approx$$

$$[A_z(r, \phi, z+\Delta z) - A_z(r, \phi, z)]r \Delta r \Delta\phi\Delta z \approx \frac{\partial A_z}{\partial z} r \Delta r \Delta\phi\Delta z = \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta\tau$$

因此，矢量场 \mathbf{A} 穿出该六面体的表面的通量为

$$= \Psi_r + \Psi_\phi + \Psi_z \approx \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{\partial A_\phi}{r \partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right] \Delta\tau$$

故得到圆柱坐标下的散度表达式

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Psi}{\Delta\tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{\partial A_\phi}{r \partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

1.22 方程 $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ 给出一椭球族。求椭球表面上任意点的单位法向矢量。

解 由于 $\nabla u = \mathbf{e}_x \frac{2x}{a^2} + \mathbf{e}_y \frac{2y}{b^2} + \mathbf{e}_z \frac{2z}{c^2}$

$$|\nabla u| = 2\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2}$$

故椭球表面上任意点的单位法向矢量为

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla u}{|\nabla u|} = \left(\mathbf{e}_x \frac{x}{a^2} + \mathbf{e}_y \frac{y}{b^2} + \mathbf{e}_z \frac{z}{c^2}\right) / \sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2}$$

1.23 现有三个矢量 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{C} 为

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_r \sin \theta \cos \phi + \mathbf{e}_\theta \cos \theta \cos \phi - \mathbf{e}_\phi \sin \phi$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{e}_r z^2 \sin \phi + \mathbf{e}_\phi z^2 \cos \phi + \mathbf{e}_z 2rz \sin \phi$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{e}_x (3y^2 - 2x) + \mathbf{e}_y x^2 + \mathbf{e}_z 2z$$

(1) 哪些矢量可以由一个标量函数的梯度表示？哪些矢量可以由一个矢量函数的旋度表示？

(2) 求出这些矢量的源分布。

解 (1) 在球坐标系中

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} = \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta \cos \phi) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cos \theta \cos \phi) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (-\sin \phi) = \\ &= \frac{2}{r} \sin \theta \cos \phi + \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} - \frac{2 \sin \theta \cos \phi}{r} - \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & r \sin \theta \mathbf{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & rA_\theta & r \sin \theta A_\phi \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & r \sin \theta \mathbf{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

故矢量 \mathbf{A} 既可以由一个标量函数的梯度表示，也可以由一个矢量函数的旋度表示；
在圆柱坐标系中

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rz^2 \sin \phi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} (z^2 \cos \phi) + \frac{\partial}{\partial z} (2rz \sin \phi) = \\ &= \frac{z^2 \sin \phi}{r} - \frac{z^2 \sin \phi}{r} + 2r \sin \phi = 2r \sin \phi \end{aligned}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_r & rB_\theta & B_z \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 \sin \phi & rz^2 \cos \phi & 2rz \sin \phi \end{vmatrix} = 0$$

故矢量 \mathbf{B} 可以由一个标量函数的梯度表示；
直角坐标系中

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{C} &= \frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(3y^2 - 2x) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2) + \frac{\partial}{\partial z}(2z) = 0 \\ \nabla \times \mathbf{C} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3y^2 - 2x & x^2 & 2z \end{vmatrix} = \mathbf{e}_z(2x - 6y) \end{aligned}$$

故矢量 \mathbf{C} 可以由一个标量函数的旋度表示。

(2) 这些矢量的源分布为

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= 0, \quad \nabla \times \mathbf{A} = 0; \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 2r \sin \phi, \quad \nabla \times \mathbf{B} = 0; \\ \nabla \cdot \mathbf{C} &= 0, \quad \nabla \times \mathbf{C} = \mathbf{e}_z(2x - 6y) \end{aligned}$$

1.24 利用直角坐标，证明

$$\nabla (f\mathbf{A}) = f \nabla \mathbf{A} + \mathbf{A} \nabla f$$

解 在直角坐标中

$$\begin{aligned} f \nabla \mathbf{A} + \mathbf{A} \nabla f &= f \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) + \left(A_x \frac{\partial f}{\partial x} + A_y \frac{\partial f}{\partial y} + A_z \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \\ &= \left(f \frac{\partial A_x}{\partial x} + A_x \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \left(f \frac{\partial A_y}{\partial y} + A_y \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \left(f \frac{\partial A_z}{\partial z} + A_z \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(fA_x) + \frac{\partial}{\partial y}(fA_y) + \frac{\partial}{\partial z}(fA_z) = \nabla (f\mathbf{A}) \end{aligned}$$

1.25 证明

$$\nabla (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \nabla \times \mathbf{H}$$

解 根据 ∇ 算子的微分运算性质，有

$$\nabla (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) = \nabla_{\mathbf{A}} (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) + \nabla_{\mathbf{H}} (\mathbf{A} \times \mathbf{H})$$

式中 $\nabla_{\mathbf{A}}$ 表示只对矢量 \mathbf{A} 作微分运算， $\nabla_{\mathbf{H}}$ 表示只对矢量 \mathbf{H} 作微分运算。

由 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})$ ，可得

$$\nabla_{\mathbf{A}} (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} (\nabla_{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{A} (\nabla_{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{H})$$

同理

$$\nabla_{\mathbf{H}} (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{A} (\nabla_{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{H}) + \mathbf{H} (\nabla_{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{A})$$

故有

$$\nabla (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \nabla \times \mathbf{H}$$

1.26 利用直角坐标，证明

$$\nabla \times (f\mathbf{G}) = f \nabla \times \mathbf{G} + \nabla f \times \mathbf{G}$$

解 在直角坐标中

$$f \nabla \times \mathbf{G} = f [\mathbf{e}_x (\frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z}) + \mathbf{e}_y (\frac{\partial G_x}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial x}) + \mathbf{e}_z (\frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y})]$$

$$\nabla f \times \mathbf{G} = [\mathbf{e}_x (G_z \frac{\partial f}{\partial y} - G_y \frac{\partial f}{\partial z}) + \mathbf{e}_y (G_x \frac{\partial f}{\partial z} - G_z \frac{\partial f}{\partial x}) + \mathbf{e}_z (G_y \frac{\partial f}{\partial x} - G_x \frac{\partial f}{\partial y})]$$

所以

$$\begin{aligned} f \nabla \times \mathbf{G} + \nabla f \times \mathbf{G} &= \mathbf{e}_x [(G_z \frac{\partial f}{\partial y} + f \frac{\partial G_z}{\partial y}) - (G_y \frac{\partial f}{\partial z} + f \frac{\partial G_y}{\partial z})] + \\ &\quad \mathbf{e}_y [(G_x \frac{\partial f}{\partial z} + f \frac{\partial G_x}{\partial z}) - (G_z \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial G_z}{\partial x})] + \\ &\quad \mathbf{e}_z [(G_y \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial G_y}{\partial x}) - (G_x \frac{\partial f}{\partial y} + f \frac{\partial G_x}{\partial y})] = \\ &\quad \mathbf{e}_x [\frac{\partial (fG_z)}{\partial y} - \frac{\partial (fG_y)}{\partial z}] + \mathbf{e}_y [\frac{\partial (fG_x)}{\partial z} - \frac{\partial (fG_z)}{\partial x}] + \\ &\quad \mathbf{e}_z [\frac{\partial (fG_y)}{\partial x} - \frac{\partial (fG_x)}{\partial y}] = \nabla \times (f\mathbf{G}) \end{aligned}$$

1.27 利用散度定理及斯托克斯定理可以在更普遍的意义下证明 $\nabla \times (\nabla u) = 0$ 及 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ ，试证明之。

解 (1) 对于任意闭合曲线 C 为边界的任意曲面 S ，由斯托克斯定理有

$$\int_S (\nabla \times \nabla u) \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \nabla u \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \frac{\partial u}{\partial l} dl = \oint_C du = 0$$

由于曲面 S 是任意的，故有

$$\nabla \times (\nabla u) = 0$$

(2) 对于任意闭合曲面 S 为边界的体积 τ ，由散度定理有

$$\int_\tau \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) d\tau = \oint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$

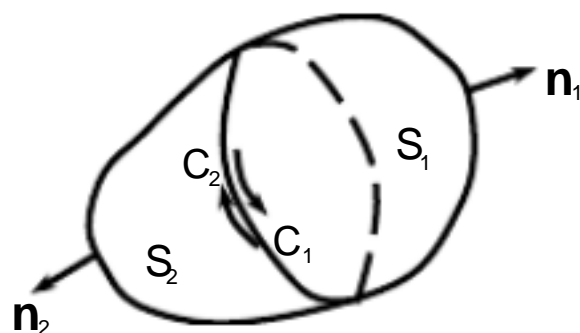
其中 S_1 和 S_2 如题 1.27 图所示。由斯托克斯定理，有

$$\int_{S_1} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}, \quad \int_{S_2} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{C_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

由题 1.27 图可知 C_1 和 C_2 是方向相反的同一路，则有 $\oint_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = -\oint_{C_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$

所以得到 $\int_\tau \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) d\tau = \oint_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} - \oint_{C_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{C_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} - \oint_{C_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0$

由于体积 τ 是任意的，故有 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$



题 1.27 图

二章习题解答

2.1 一个平行板真空二极管内的电荷体密度为 $\rho = -\frac{4}{9}\epsilon_0 U_0 d^{-4/3} x^{-2/3}$ ，式中阴极板位于

$x=0$ ，阳极板位于 $x=d$ ，极间电压为 U_0 。如果 $U_0=40V$ 、 $d=1cm$ 、横截面 $S=10cm^2$ ，求：(1) $x=0$ 和 $x=d$ 区域内的总电荷量 Q ；(2) $x=d/2$ 和 $x=d$ 区域内的总电荷量 Q' 。

解 (1) $Q = \int_{\tau} \rho d\tau = \int_0^d \left(-\frac{4}{9}\epsilon_0 U_0 d^{-4/3} x^{-2/3}\right)^3 S dx = -\frac{4}{3d}\epsilon_0 U_0 S = -4.72 \times 10^{-11} C$

(2) $Q' = \int_{\tau'} \rho d\tau = \int_{d/2}^d \left(-\frac{4}{9}\epsilon_0 U_0 d^{-4/3} x^{-2/3}\right)^3 S dx = -\frac{4}{3d}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\epsilon_0 U_0 S = -0.97 \times 10^{-11} C$

2.2 一个体密度为 $\rho = 2.32 \times 10^{-7} C/m^3$ 的质子束，通过 $1000V$ 的电压加速后形成等速的质子束，质子束内的电荷均匀分布，束直径为 $2mm$ ，束外没有电荷分布，试求电流密度和电流。

解 质子的质量 $m = 1.7 \times 10^{-27} kg$ 、电量 $q = 1.6 \times 10^{-19} C$ 。由

$$\frac{1}{2}mv^2 = qU$$

得 $v = \sqrt{2mqU} = 1.37 \times 10^6 m/s$

故 $J = \rho v = 0.318 A/m^2$

$$I = J\pi(d/2)^2 = 10^{-6} A$$

2.3 一个半径为 a 的球体内均匀分布总电荷量为 Q 的电荷，球体以匀角速度 ω 绕一个直径旋转，求球内的电流密度。

解 以球心为坐标原点，转轴（一直径）为 z 轴。设球内任一点 P 的位置矢量为 r ，且 r 与 z 轴的夹角为 θ ，则 P 点的线速度为

$$v = \omega \times r = e_{\phi} \omega r \sin \theta$$

球内的电荷体密度为

$$\rho = \frac{Q}{4\pi a^3/3}$$

故 $J = \rho v = e_{\phi} \frac{Q}{4\pi a^3/3} \omega r \sin \theta = e_{\phi} \frac{3Q\omega}{4\pi a^3} r \sin \theta$

2.4 一个半径为 a 的导体球带总电荷量为 Q ，同样以匀角速度 ω 绕一个直径旋转，求球表面的面电流密度。

解 以球心为坐标原点，转轴（一直径）为 z 轴。设球面上任一点 P 的位置矢量为 r ，且 r 与 z 轴的夹角为 θ ，则 P 点的线速度为

$$v = \omega \times r = e_{\phi} \omega a \sin \theta$$

球面的上电荷面密度为

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi a^2}$$

故 $J_s = \sigma v = e_{\phi} \frac{Q}{4\pi a^2} \omega a \sin \theta = e_{\phi} \frac{Q\omega}{4\pi a} \sin \theta$

2.5 两点电荷 $q_1 = 8\text{C}$ 位于 z 轴上 $z = 4$ 处, $q_2 = -4\text{C}$ 位于 y 轴上 $y = 4$ 处, 求 $(4,0,0)$ 处的电场强度。

解 电荷 q_1 在 $(4,0,0)$ 处产生的电场为

$$\mathbf{E}_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1'|^3} = \frac{2}{\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{e}_x 4 - \mathbf{e}_z 4}{(4\sqrt{2})^3}$$

电荷 q_2 在 $(4,0,0)$ 处产生的电场为

$$\mathbf{E}_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_2'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2'|^3} = -\frac{1}{\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{e}_x 4 - \mathbf{e}_y 4}{(4\sqrt{2})^3}$$

故 $(4,0,0)$ 处的电场为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z 2}{32\sqrt{2}\pi\epsilon_0}$$

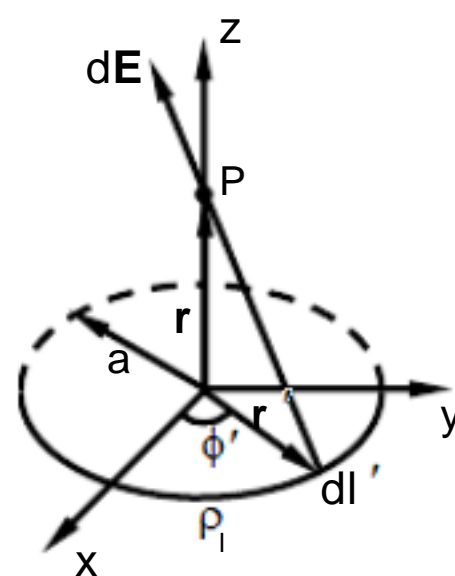
2.6 一个半圆环上均匀分布线电荷 ρ_l , 求垂直于圆平面的轴线上 $z = a$ 处的电场强度 $\mathbf{E}(0,0, a)$, 设半圆环的半径也为 a , 如题 2.6 图所示。

解 半圆环上的电荷元 $\rho_l dl' = \rho_l a d\phi'$ 在轴线上 $z = a$ 处的电场强度为

$$d\mathbf{E} = \frac{\rho_l a}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{(\sqrt{2}a)^3} d\phi' = \frac{\rho_l}{8\sqrt{2}\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{e}_z - (\mathbf{e}_x \cos\phi' + \mathbf{e}_y \sin\phi')}{a} d\phi'$$

在半圆环上对上式积分, 得到轴线上 $z = a$ 处的电场强度为

$$\mathbf{E}(0,0, a) = \int d\mathbf{E} = \frac{\rho_l}{8\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\mathbf{e}_z - (\mathbf{e}_x \cos\phi' + \mathbf{e}_y \sin\phi')] d\phi' = \frac{\rho_l (\mathbf{e}_z \pi - \mathbf{e}_x 2)}{8\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a}$$



题 2.6 图

2.7 三根长度均为 L , 均匀带电荷密度分别为 ρ_{l1} 、 ρ_{l2} 和 ρ_{l3} 的线电荷构成等边三角形。设 $\rho_{l1} = 2\rho_{l2} = 2\rho_{l3}$, 计算三角形中心处的电场强度。

解 建立题 2.7 图所示的坐标系。三角形中心到各边的距离为

$$d = \frac{L}{2} \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{6} L$$

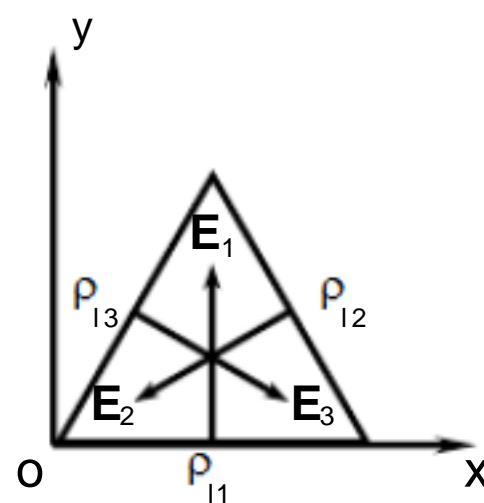
则

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_y \frac{\rho_{l1}}{4\pi\epsilon_0 d} (\cos 30^\circ - \cos 150^\circ) = \mathbf{e}_y \frac{3\rho_{l1}}{2\pi\epsilon_0 L}$$

$$\mathbf{E}_2 = -(\mathbf{e}_x \cos 30^\circ + \mathbf{e}_y \sin 30^\circ) \frac{3\rho_{l2}}{2\pi\epsilon_0 L} = -(\mathbf{e}_x \sqrt{3} + \mathbf{e}_y) \frac{3\rho_{l1}}{8\pi\epsilon_0 L}$$

$$\mathbf{E}_3 = (\mathbf{e}_x \cos 30^\circ - \mathbf{e}_y \sin 30^\circ) \frac{3\rho_{l3}}{2\pi\epsilon_0 L} = (\mathbf{e}_x \sqrt{3} - \mathbf{e}_y) \frac{3\rho_{l1}}{8\pi\epsilon_0 L}$$

故等边三角形中心处的电场强度为



题 2.7 图

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 =$$

$$\mathbf{e}_y \frac{3\rho_{l1}}{2\pi\epsilon_0 L} - (\mathbf{e}_x \sqrt{3} + \mathbf{e}_y) \frac{3\rho_{l1}}{8\pi\epsilon_0 L} + (\mathbf{e}_x \sqrt{3} - \mathbf{e}_y) \frac{3\rho_{l1}}{8\pi\epsilon_0 L} = \mathbf{e}_y \frac{3\rho_{l1}}{4\pi\epsilon_0 L}$$

2.8 - 点电荷 $+q$ 位于 $(-a, 0, 0)$ 处, 另 - 点电荷 $-2q$ 位于 $(a, 0, 0)$ 处, 空间有没有电场强度 $\mathbf{E} = 0$ 的点?

解 电荷 $+q$ 在 (x, y, z) 处产生的电场为

$$\mathbf{E}_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{e}_x(x+a) + \mathbf{e}_y y + \mathbf{e}_z z}{[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}$$

电荷 $-2q$ 在 (x, y, z) 处产生的电场为

$$\mathbf{E}_2 = -\frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{e}_x(x-a) + \mathbf{e}_y y + \mathbf{e}_z z}{[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}$$

(x, y, z) 处的电场则为 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ 。令 $\mathbf{E} = 0$, 则有

$$\frac{\mathbf{e}_x(x+a) + \mathbf{e}_y y + \mathbf{e}_z z}{[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} = \frac{2[\mathbf{e}_x(x-a) + \mathbf{e}_y y + \mathbf{e}_z z]}{[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}$$

由上式两端对应分量相等, 可得到

$$(x+a)[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2} = 2(x-a)[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}$$

$$y[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2} = 2y[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}$$

$$z[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2} = 2z[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}$$

当 $y \neq 0$ 或 $z \neq 0$ 时, 将式 或式 代入式, 得 $a = 0$ 。所以, 当 $y \neq 0$ 或 $z \neq 0$ 时无解;

当 $y = 0$ 且 $z = 0$ 时, 由式, 有

$$(x+a)(x-a)^3 = 2(x-a)(x+a)^3$$

解得

$$x = (-3 \pm 2\sqrt{2})a$$

但 $x = -3a + 2\sqrt{2}a$ 不合题意, 故仅在 $(-3a - 2\sqrt{2}a, 0, 0)$ 处电场强度 $\mathbf{E} = 0$ 。

2.9 一个很薄的无限大导电带电面, 电荷面密度为 σ 。证明: 垂直于平面的 z 轴上 $z = z_0$ 处的电场强度 \mathbf{E} 中, 有一半是有平面上半径为 $\sqrt{3}z_0$ 的圆内的电荷产生的。

解 半径为 r 、电荷线密度为 $\rho_l = \sigma dr$ 的带电细圆环在 z 轴上 $z = z_0$ 处的电场强度为

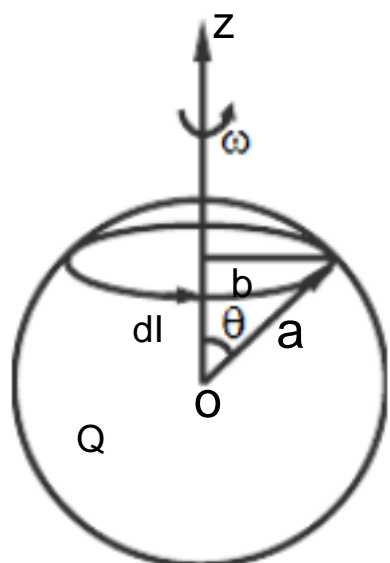
$$d\mathbf{E} = \mathbf{e}_z \frac{r\sigma z_0 dr}{2\epsilon_0(r^2 + z_0^2)^{3/2}}$$

故整个导电带电面在 z 轴上 $z = z_0$ 处的电场强度为

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_z \int_0^\infty \frac{r\sigma z_0 dr}{2\epsilon_0(r^2 + z_0^2)^{3/2}} = \mathbf{e}_z \frac{\sigma z_0}{2\epsilon_0} \frac{1}{(r^2 + z_0^2)^{1/2}} \Big|_0^\infty = \mathbf{e}_z \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

而半径为 $\sqrt{3}z_0$ 的圆内的电荷产生在 z 轴上 $z = z_0$ 处的电场强度为

$$\mathbf{E}' = \mathbf{e}_z \int_0^{\sqrt{3}z_0} \frac{r\sigma z_0 dr}{2\epsilon_0(r^2 + z_0^2)^{3/2}} = \mathbf{e}_z \frac{\sigma z_0}{2\epsilon_0} \frac{1}{(r^2 + z_0^2)^{1/2}} \Big|_0^{\sqrt{3}z_0} = \mathbf{e}_z \frac{\sigma}{4\epsilon_0} = \frac{1}{2} \mathbf{E}$$



题 2.10 图

2.10 一个半径为 a 的导体球带电荷量为 Q ，当球体以均匀角速度 ω 绕一个直径旋转，如题 2.10 图所示。求球心处的磁感应强度 \mathbf{B} 。

解 球面上的电荷面密度为

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi a^2}$$

当球体以均匀角速度 ω 绕一个直径旋转时，球面上位置矢量 $\mathbf{r} = \mathbf{e}_r a$ 点处的电流面密度为

$$\mathbf{J}_s = \sigma \mathbf{v} = \sigma \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \sigma \mathbf{e}_z \omega \times \mathbf{e}_r a = \mathbf{e}_\phi \omega \sigma a \sin \theta = \mathbf{e}_\phi \frac{\omega Q}{4\pi a} \sin \theta$$

将球面划分为无数个宽度为 $d\mathbf{l} = a d\theta$ 的细圆环，则球面上任一个宽度为 $d\mathbf{l} = a d\theta$ 细圆环

的电流为 $dI = J_s d\mathbf{l} = \frac{\omega Q}{4\pi} \sin \theta d\theta$

细圆环的半径为 $b = a \sin \theta$ ，圆环平面到球心的距离 $d = a \cos \theta$ ，利用电流圆环的轴线上的磁场公式，则该细圆环电流在球心处产生的磁场为

$$d\mathbf{B} = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 b^2 dI}{2(b^2 + d^2)^{3/2}} = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 \omega Q a^2 \sin^3 \theta d\theta}{8\pi (a^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 \omega Q \sin^3 \theta d\theta}{8\pi a}$$

故整个球面电流在球心处产生的磁场为 $\mathbf{B} = \mathbf{e}_z \int_0^\pi \frac{\mu_0 \omega Q \sin^3 \theta}{8\pi a} d\theta = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 \omega Q}{6\pi a}$

2.11 两个半径为 b 、同轴的相同线圈，各有 N 匝，相互隔开距离为 d ，如题 2.11 图所示。电流 I 以相同的方向流过这两个线圈。

(1) 求这两个线圈中心点处的磁感应强度 $\mathbf{B} = \mathbf{e}_x B_x$ ；

(2) 证明：在中点处 dB_x/dx 等于零；

(3) 求出 b 与 d 之间的关系，使中点处 $d^2 B_x/dx^2$ 也等于零。

解 (1) 由细圆环电流在其轴线上的磁感应强度 $\mathbf{B} = \mathbf{e}_z \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}$

得到两个线圈中心点处的磁感应强度为 $\mathbf{B} = \mathbf{e}_x \frac{\mu_0 N I b^2}{(b^2 + d^2/4)^{3/2}}$

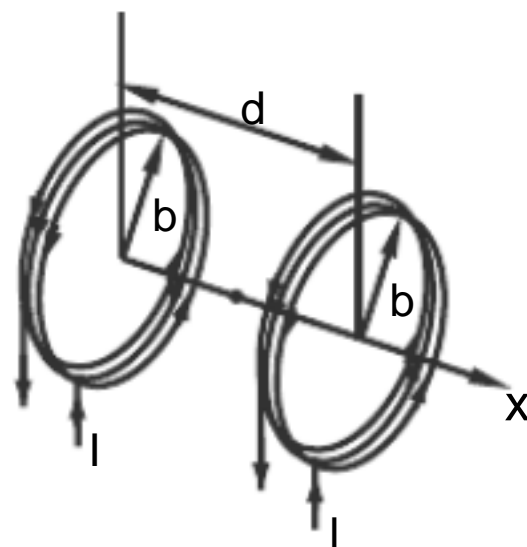
(2) 两线圈的电流在其轴线上 x ($0 < x < d$) 处的磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \mathbf{e}_x \left\{ \frac{\mu_0 N I b^2}{2(b^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{\mu_0 N I b^2}{2[b^2 + (d-x)^2]^{3/2}} \right\}$$

所以 $\frac{dB_x}{dx} = -\frac{3\mu_0 N I b^2 x}{2(b^2 + x^2)^{5/2}} + \frac{3\mu_0 N I b^2 (d-x)}{2[b^2 + (d-x)^2]^{5/2}}$

故在中点 $x = d/2$ 处，有

$$\frac{dB_x}{dx} = -\frac{3\mu_0 N I b^2 d/2}{2[b^2 + d^2/4]^{5/2}} + \frac{3\mu_0 N I b^2 d/2}{2[b^2 + d^2/4]^{5/2}} = 0$$



题 2.11 图

$$(3) \quad \frac{d^2 B_x}{dx^2} = \frac{15\mu_0 N I b^2 x^2}{2(b^2 + x^2)^{7/2}} - \frac{3\mu_0 N I b^2}{2(b^2 + x^2)^{5/2}} +$$

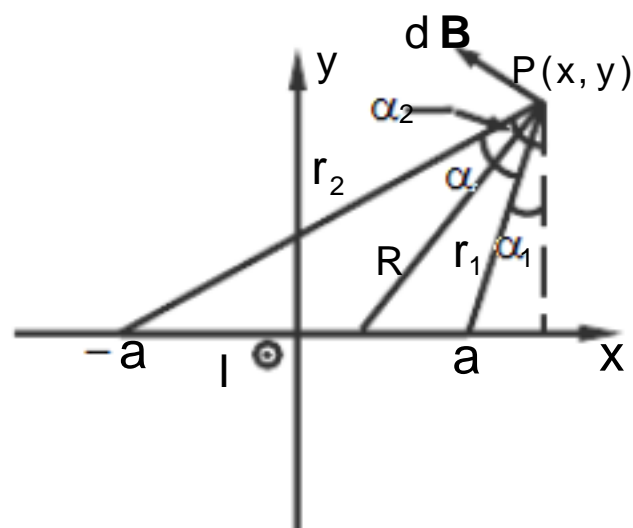
$$\frac{15\mu_0 N I b^2 (d-x)^2}{2[b^2 + (d-x)^2]^{7/2}} - \frac{3\mu_0 N I b^2}{2[b^2 + (d-x)^2]^{5/2}}$$

令 $\frac{d^2 B_x}{dx^2} \Big|_{x=d/2} = 0$, 有 $\frac{5d^2/4}{[b^2 + d^2/4]^{7/2}} - \frac{1}{[b^2 + d^2/4]^{5/2}} = 0$

即 $5d^2/4 = b^2 + d^2/4$

故解得 $d = b$

2.12 一条扁平的直导体带, 宽为 $2a$, 中心线与 z 轴重合, 通过的电流为 I 。证明在第一象限内的磁感应强度为 $B_x = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \alpha$, $B_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \ln \frac{r_2}{r_1}$ 式中 α 、 r_1 和 r_2 如题 2.12 图所示。



题 2.12 图

解 将导体带划分为无数个宽度为 dx' 的细条带, 每一细条带的电流 $dI = \frac{I}{2a} dx'$ 。由安培环路定理, 可得位于 x' 处的细条带的电流 dI 在点 $P(x, y)$ 处的磁场为

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I dx'}{4\pi a R} = \frac{\mu_0 I dx'}{4\pi a [(x-x')^2 + y^2]^{1/2}}$$

则 $dB_x = -dB \sin \theta = -\frac{\mu_0 I y dx'}{4\pi a [(x-x')^2 + y^2]^{1/2}}$

$$dB_y = dB \cos \theta = \frac{\mu_0 I (x-x') dx'}{4\pi a [(x-x')^2 + y^2]^{1/2}}$$

所以

$$B_x = -\int_{-a}^a \frac{\mu_0 I y dx'}{4\pi a [(x-x')^2 + y^2]^{1/2}} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \arctan \left(\frac{x'-x}{y} \right) \Big|_{-a}^a =$$

$$-\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left[\arctan \left(\frac{a-x}{y} \right) - \arctan \left(\frac{-a-x}{y} \right) \right] = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left[\arctan \left(\frac{x+a}{y} \right) - \arctan \left(\frac{x-a}{y} \right) \right] =$$

$$-\frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\alpha_2 - \alpha_1) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \alpha$$

$$B_y = \int_{-a}^a \frac{\mu_0 I (x-x') dx'}{4\pi a [(x-x')^2 + y^2]^{1/2}} = -\frac{\mu_0 I}{8\pi a} \ln [(x-x')^2 + y^2] \Big|_{-a}^a = \frac{\mu_0 I}{8\pi a} \ln \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

2.13 如题 2.13 图所示, 有一个电矩为 p_1 的电偶极子, 位于坐标原点上, 另一个电矩为 p_2 的电偶极子, 位于矢径为 r 的某一点上。试证明两偶极子之间相互作用力为

$$F_r = \frac{3p_1 p_2}{4\pi \epsilon_0 r^4} (\sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \phi - 2\cos \theta_1 \cos \theta_2)$$

式中 $\theta_1 = \angle(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1)$, $\theta_2 = \angle(\mathbf{r}, \mathbf{p}_2)$, ϕ 是两个平面 $(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1)$ 和 $(\mathbf{r}, \mathbf{p}_2)$ 间的夹角。并问两个偶极子在怎样的相对取向向下这个力值最大？

解 电偶极子 \mathbf{p}_1 在矢径为 \mathbf{r} 的点上产生的电场为

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_1}{r^3} \right]$$

所以 \mathbf{p}_2 与 \mathbf{p}_1 之间的相互作用能为

$$W_e = -\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{E}_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{r^3} \right]$$

因为 $\theta_1 = \angle(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1)$, $\theta_2 = \angle(\mathbf{r}, \mathbf{p}_2)$, 则

$$\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r} = p_1 r \cos \theta_1$$

$$\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r} = p_2 r \cos \theta_2$$

又因为 ϕ 是两个平面 $(\mathbf{r}, \mathbf{p}_1)$ 和 $(\mathbf{r}, \mathbf{p}_2)$ 间的夹角, 所以有

$$(\mathbf{r} \times \mathbf{p}_1) \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_2) = r^2 p_1 p_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \phi$$

另一方面, 利用矢量恒等式可得

$$(\mathbf{r} \times \mathbf{p}_1) \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_2) = [(\mathbf{r} \times \mathbf{p}_1) \times \mathbf{r}] \cdot \mathbf{p}_2 = [r^2 \mathbf{p}_1 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}_1) \mathbf{r}] \cdot \mathbf{p}_2 = r^2 (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2) - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}_1)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}_2)$$

因 此

$$(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2) = \frac{1}{r^2} [(\mathbf{r} \times \mathbf{p}_1) \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_2) + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}_1)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}_2)] = p_1 p_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \phi + p_1 p_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2$$

于是得到
$$W_e = \frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} (\sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \phi - 2 \cos \theta_1 \cos \theta_2)$$

故两偶极子之间的相互作用力为

$$F_r = - \left. \frac{\partial W_e}{\partial r} \right|_{\theta = \text{const}} = - \frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0} (\sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \phi - 2 \cos \theta_1 \cos \theta_2) \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^3} \right) = \frac{3 p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^4} (\sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \phi - 2 \cos \theta_1 \cos \theta_2)$$

由上式可见, 当 $\theta_1 = \theta_2 = 0$ 时, 即两个偶极子共线时, 相互作用力值最大。

2.14 两平行无限长直线电流 I_1 和 I_2 , 相距为 d , 求每根导线单位长度受到的安培力 \mathbf{F}_m 。

解 无限长直线电流 I_1 产生的磁场为
$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{e}_\phi \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

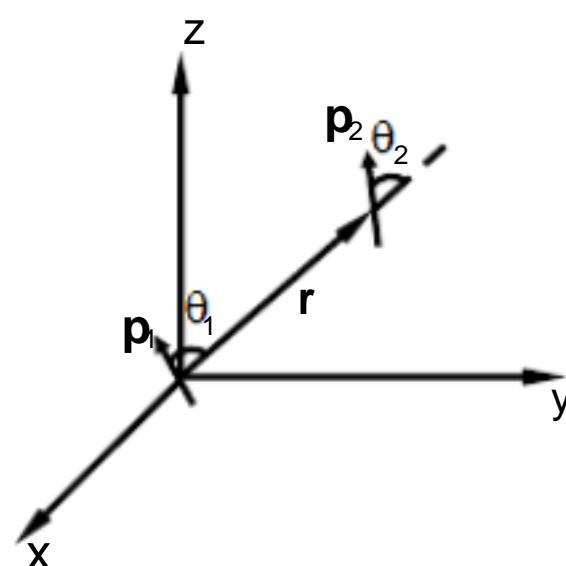
直线电流 I_2 每单位长度受到的安培力为

$$\mathbf{F}_{m12} = \int_0^1 I_2 \mathbf{e}_z \times \mathbf{B}_1 dz = -\mathbf{e}_{12} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

式中 \mathbf{e}_{12} 是由电流 I_1 指向电流 I_2 的单位矢量。

同理可得, 直线电流 I_1 每单位长度受到的安培力为
$$\mathbf{F}_{m21} = -\mathbf{F}_{m12} = \mathbf{e}_{12} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

2.15 一根通电流 I_1 的无限长直导线和一个通电流 I_2 的圆环在同一平面上, 圆心与导线的距离为 d , 如题 2.15 图所示。证明: 两电流间相互作用的安培力为



题 2.13 图

$$F_m = \mu_0 I_1 I_2 (\sec \alpha - 1)$$

这里 α 是圆环在直线最接近圆环的点所张的角。

解 无限长直线电流 I_1 产生的磁场为

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{e}_\phi \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

圆环上的电流元 $I_2 d\mathbf{l}_2$ 受到的安培力为

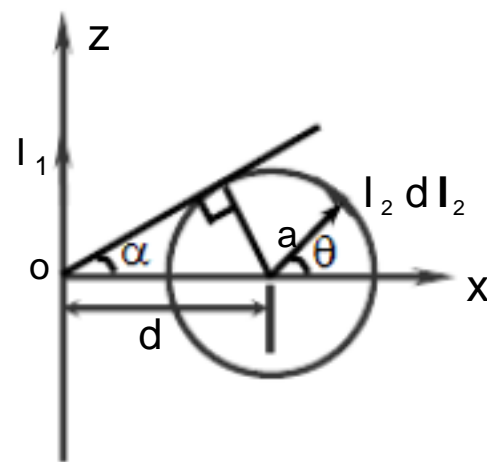
$$d\mathbf{F}_m = I_2 d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}_1 = d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{e}_y \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x}$$

由题 2.15 图可知 $d\mathbf{l}_2 = (-\mathbf{e}_x \sin \theta + \mathbf{e}_z \cos \theta) a d\theta$

$$x = d + a \cos \theta$$

所以

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_m &= \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 a I_1 I_2}{2\pi (d + a \cos \theta)} (-\mathbf{e}_z \sin \theta - \mathbf{e}_x \cos \theta) d\theta = \\ &= -\mathbf{e}_x \frac{\mu_0 a I_1 I_2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{(d + a \cos \theta)} d\theta = -\mathbf{e}_x \frac{\mu_0 a I_1 I_2}{2\pi} \left(-\frac{2\pi}{a} + \frac{d}{a} \frac{2\pi}{\sqrt{d^2 - a^2}} \right) = -\mathbf{e}_x \mu_0 I_1 I_2 (\sec \alpha - 1) \end{aligned}$$



题 2.15 图

2.16 证明在不均匀的电场中，某一电偶极子 \mathbf{p} 绕坐标原点所受到的力矩为 $\mathbf{r} \times (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E} + \mathbf{p} \times \mathbf{E}$ 。

解 如题 2.16 图所示，设 $\mathbf{p} = qd\mathbf{l}$ ($d\mathbf{l} \ll 1$)，则电偶极子 \mathbf{p} 绕坐标原点所受到的力矩为

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{r}_2 \times q\mathbf{E}(\mathbf{r}_2) - \mathbf{r}_1 \times q\mathbf{E}(\mathbf{r}_1) = \\ &= \left(\mathbf{r} + \frac{d\mathbf{l}}{2} \right) \times q\mathbf{E}\left(\mathbf{r} + \frac{d\mathbf{l}}{2} \right) - \left(\mathbf{r} - \frac{d\mathbf{l}}{2} \right) \times q\mathbf{E}\left(\mathbf{r} - \frac{d\mathbf{l}}{2} \right) = \\ &= q\mathbf{r} \times [\mathbf{E}(\mathbf{r} + \frac{d\mathbf{l}}{2}) - \mathbf{E}(\mathbf{r} - \frac{d\mathbf{l}}{2})] + \frac{q}{2} d\mathbf{l} \times [\mathbf{E}(\mathbf{r} + \frac{d\mathbf{l}}{2}) + \mathbf{E}(\mathbf{r} - \frac{d\mathbf{l}}{2})] \end{aligned}$$

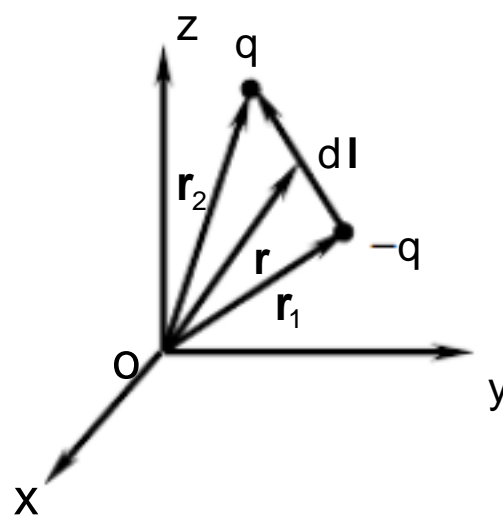
当 $d\mathbf{l} \ll 1$ 时，有

$$\mathbf{E}(\mathbf{r} + \frac{d\mathbf{l}}{2}) \approx \mathbf{E}(\mathbf{r}) + (\frac{d\mathbf{l}}{2} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r} - \frac{d\mathbf{l}}{2}) \approx \mathbf{E}(\mathbf{r}) - (\frac{d\mathbf{l}}{2} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

故得到

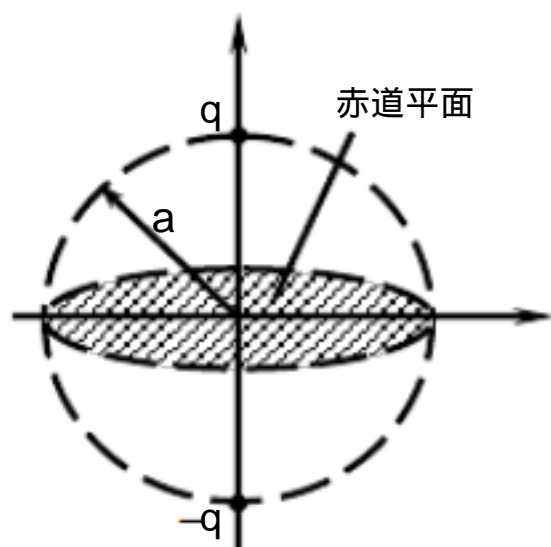
$$\begin{aligned} \mathbf{T} &\approx \mathbf{r} \times (qd\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r}) + qd\mathbf{l} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \\ &= \mathbf{r} \times (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E} + \mathbf{p} \times \mathbf{E} \end{aligned}$$



题 2.16 图

三章习题解答

3.1 真空中半径为 a 的一个球面，球的两极点处分别设置点电荷 q 和 $-q$ ，试计算球赤道平面上电通密度的通量 Φ (如题 3.1 图所示)。



题 3.1 图

解 由点电荷 q 和 $-q$ 共同产生的电通密度为

$$\mathbf{D} = \frac{q}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{R}_+}{R_+^3} - \frac{\mathbf{R}_-}{R_-^3} \right] = \frac{q}{4\pi} \left\{ \frac{\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_z(z-a)}{[r^2 + (z-a)^2]^{3/2}} - \frac{\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_z(z+a)}{[r^2 + (z+a)^2]^{3/2}} \right\}$$

则球赤道平面上电通密度的通量

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{e}_z|_{z=0} dS = \\ &= \frac{q}{4\pi} \int_0^a \left[\frac{(-a)}{(r^2 + a^2)^{3/2}} - \frac{a}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \right] 2\pi r dr = \\ &= \frac{qa}{(r^2 + a^2)^{1/2}} \Big|_0^a = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right) q = -0.293q \end{aligned}$$

3.2 1911 年卢瑟福在实验中使用的是半径为 r_a 的球体原子模型，其球体内均匀分布有总电荷量为 $-Ze$ 的电子云，在球心有一正电荷 Ze (Z 是原子序数， e 是质子电荷量)，通过实验得

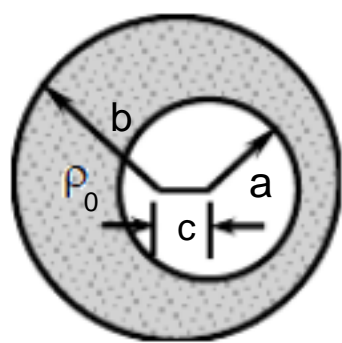
到球体内的电通量密度表达式为 $\mathbf{D}_0 = \mathbf{e}_r \frac{Ze}{4\pi} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{r_a^3} \right)$ ，试证明之。

解 位于球心的正电荷 Ze 球体内产生的电通量密度为

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{e}_r \frac{Ze}{4\pi r^2}$$

原子内电子云的电荷体密度为

$$\rho = -\frac{Ze}{4\pi r_a^3/3} = -\frac{3Ze}{4\pi r_a^3}$$



题 3.3 图 (a)

电子云在原子内产生的电通量密度则为

$$\mathbf{D}_2 = \mathbf{e}_r \frac{\rho 4\pi r^3/3}{4\pi r^2} = -\mathbf{e}_r \frac{Ze}{4\pi} \frac{r}{r_a^3}$$

故原子内总的电通量密度为

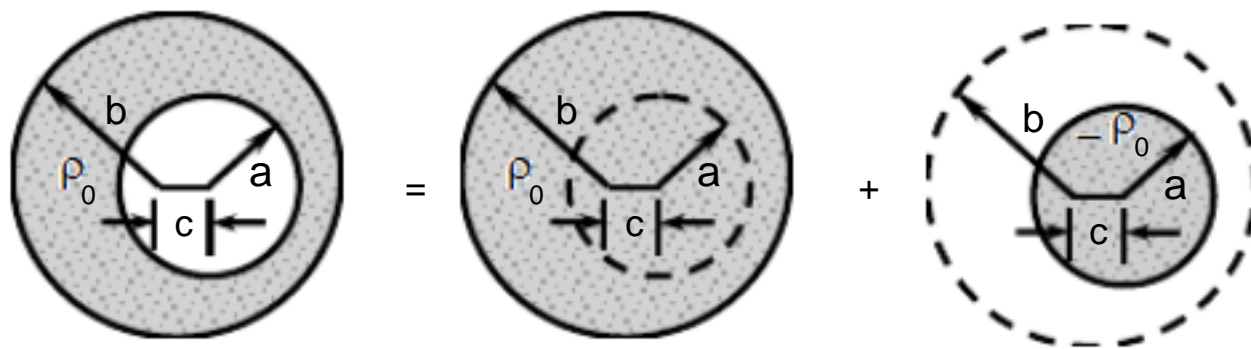
$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_1 + \mathbf{D}_2 = \mathbf{e}_r \frac{Ze}{4\pi} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{r_a^3} \right)$$

3.3 电荷均匀分布于两圆柱面间的区域中，体密度为 $\rho_0 \text{ C/m}^3$ ，两圆柱面半径分别为 a 和 b ，轴线相距为 C ($c < b - a$)，如题 3.3 图 (a) 所示。求空间各部分的电场。

解 由于两圆柱面间的电荷不是轴对称分布，不能直接用高斯定律求解。但可把半径为 a 的小圆柱面内看作同时具有体密度分别为 $\pm \rho_0$ 的两种电荷分布，这样在半径为 b 的整个圆柱体内具有体密度为 ρ_0 的均匀电荷分布，而在半径为 a 的整个圆柱体内则具有体密度为 $-\rho_0$ 的均匀电荷分布，如题 3.3 图 (b) 所示。空间任一点的电场是这两种电荷所产生的电场的叠加。

在 $r > b$ 区域中，由高斯定律 $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$ ，可求得大、小圆柱中的正、负电荷在点 P 产生

的电场分别为
$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_r \frac{\pi b^2 \rho_0}{2\pi \epsilon_0 r} = \frac{\rho_0 b^2 \mathbf{r}}{2\epsilon_0 r^2} \quad \mathbf{E}'_1 = \mathbf{e}_r \frac{-\pi a^2 \rho_0}{2\pi \epsilon_0 r'} = -\frac{\rho_0 a^2 \mathbf{r}'}{2\epsilon_0 r'^2}$$



题 3.3 图 (b)

点 P 处总的电场为
$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}'_1 = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(\frac{b^2 \mathbf{r}}{r^2} - \frac{a^2 \mathbf{r}'}{r'^2} \right)$$

在 $r < b$ 且 $r' > a$ 区域中, 同理可求得大、小圆柱中的正、负电荷在点 P 产生的电场分别为

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_r \frac{\pi r^2 \rho}{2\pi \epsilon_0 r} = \frac{\rho \mathbf{r}}{2\epsilon_0} \quad \mathbf{E}'_2 = \mathbf{e}_r \frac{-\pi a^2 \rho}{2\pi \epsilon_0 r'} = -\frac{\rho a^2 \mathbf{r}'}{2\epsilon_0 r'^2}$$

点 P 处总的电场为
$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}'_2 = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \left(\mathbf{r} - \frac{a^2 \mathbf{r}'}{r'^2} \right)$$

在 $r' < a$ 的空腔区域中, 大、小圆柱中的正、负电荷在点 P 产生的电场分别为

$$\mathbf{E}_3 = \mathbf{e}_r \frac{\pi r^2 \rho_0}{2\pi \epsilon_0 r} = \frac{\rho_0 \mathbf{r}}{2\epsilon_0} \quad \mathbf{E}'_3 = \mathbf{e}_r \frac{-\pi r'^2 \rho_0}{2\pi \epsilon_0 r'} = -\frac{\rho_0 \mathbf{r}'}{2\epsilon_0}$$

点 P 处总的电场为
$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_3 + \mathbf{E}'_3 = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \mathbf{c}$$

3.4 半径为 a 的球中充满密度 $\rho(r)$ 的体电荷, 已知电位移分布为

$$D_r = \begin{cases} r^3 + Ar^2 & (r \leq a) \\ \frac{a^5 + Aa^4}{r^2} & (r \geq a) \end{cases} \quad \text{其中 } A \text{ 为常数, 试求电荷密度 } \rho(r)。$$

解: 由 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$, 有
$$\rho(r) = \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 D_r)$$

故在 $r < a$ 区域
$$\rho(r) = \epsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r^2 (r^3 + Ar^2)] = \epsilon_0 (5r^2 + 4Ar)$$

在 $r > a$ 区域
$$\rho(r) = \epsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{(a^5 + Aa^4)}{r^2} \right] = 0$$

3.5 一个半径为 a 薄导体球壳内表面涂覆了一薄层绝缘膜, 球内充满总电荷量为 Q 的体电荷, 球壳上又另充有电荷量 Q 。已知球内部的电场为 $\mathbf{E} = \mathbf{e}_r (r/a)^4$, 设球内介质为真空。计算: (1) 球内的电荷分布; (2) 球壳外表面的电荷面密度。

解 (1) 由高斯定律的微分形式可求得球内的电荷体密度为

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0 \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E) \right] = \epsilon_0 \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{r^4}{a^4} \right) \right] = 6 \epsilon_0 \frac{r^3}{a^4}$$

(2) 球体内的总电量 Q 为 $Q = \int_V \rho d\tau = \int_0^a 6 \epsilon_0 \frac{r^3}{a^4} 4\pi r^2 dr = 4\pi \epsilon_0 a^2$

球内电荷不仅在球壳内表面上感应电荷 $-Q$ ，而且在球壳外表面上还要感应电荷 Q ，所以

球壳外表面上的总电荷为 $2Q$ ，故球壳外表面上的电荷面密度为 $\sigma = \frac{2Q}{4\pi a^2} = 2\epsilon_0$

3.6 两个无限长的同轴圆柱半径分别为 $r = a$ 和 $r = b$ ($b > a$)，圆柱表面分别带有密度为 σ_1 和 σ_2 的面电荷。(1) 计算各处的电位移 \mathbf{D}_0 ；(2) 欲使 $r > b$ 区域内 $\mathbf{D}_0 = 0$ ，则 σ_1 和 σ_2 应具有什么关系？

解 (1) 由高斯定理 $\oint_S \mathbf{D}_0 \cdot d\mathbf{S} = q$ ，当 $r < a$ 时，有 $\mathbf{D}_{01} = 0$

当 $a < r < b$ 时，有 $2\pi r D_{02} = 2\pi a \sigma_1$ ，则 $\mathbf{D}_{02} = \mathbf{e}_r \frac{a \sigma_1}{r}$

当 $b < r < \infty$ 时，有 $2\pi r D_{03} = 2\pi a \sigma_1 + 2\pi b \sigma_2$ ，则 $\mathbf{D}_{03} = \mathbf{e}_r \frac{a \sigma_1 + b \sigma_2}{r}$

(2) 令 $\mathbf{D}_{03} = \mathbf{e}_r \frac{a \sigma_1 + b \sigma_2}{r} = 0$ ，则得到 $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = -\frac{b}{a}$

3.7 计算在电场强度 $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x y + \mathbf{e}_y x$ 的电场中把带电量为 $-2 \mu\text{C}$ 的点电荷从点 $P_1(2, 1, -1)$ 移到点 $P_2(8, 2, -1)$ 时电场所做的功：(1) 沿曲线 $x = 2y^2$ ；(2) 沿连接该两点的直线。

解 (1) $W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q \int_C E_x dx + E_y dy =$
 $q \int_C y dx + x dy = q \int_1^2 y d(2y^2) + 2y^2 dy = q \int_1^2 6y^2 dy = 14q = -28 \times 10^{-6} \text{ (J)}$

(2) 连接点 $P_1(2, 1, -1)$ 到点 $P_2(8, 2, -1)$ 直线方程为

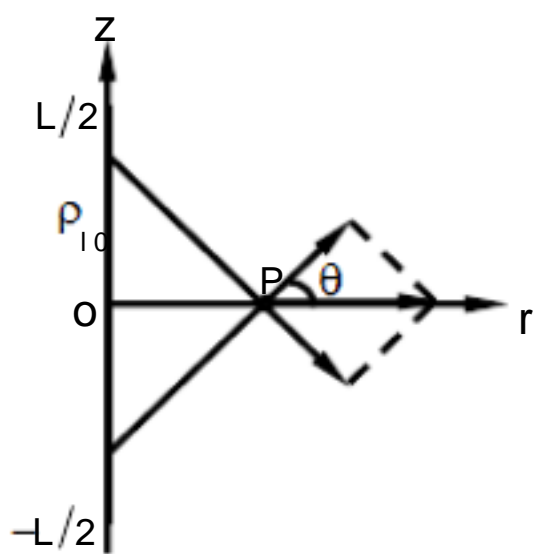
$$\frac{x-2}{y-1} = \frac{x-8}{y-2} \quad \text{即} \quad x - 6y + 4 = 0$$

故 $W = q \int_C y dx + x dy = q \int_1^2 y d(6y - 4) + (6y - 4) dy = q \int_1^2 (12y - 4) dy = 14q = -28 \times 10^{-6} \text{ (J)}$

3.8 长度为 L 的细导线带有均匀电荷，其电荷线密度为 ρ_{l0} 。(1) 计算线电荷平分面上任意点的电位 φ ；(2) 利用直接积分法计算线电荷平分面上任意点的电场 \mathbf{E} ，并用 $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ 核对。

解 (1) 建立如题 3.8 图所示坐标系。根据电位的积分表达式，线电荷平分面上任意点 P 的电位为

$$\varphi(r, 0) = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\rho_{l0} dz'}{4\pi \epsilon_0 \sqrt{r^2 + z'^2}} =$$



题 3.8 图

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_{l0}}{4\pi\epsilon_0} \ln(z' + \sqrt{r^2 + z'^2}) \Big|_{-L/2}^{L/2} = \\ & \frac{\rho_{l0}}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{r^2 + (L/2)^2} + L/2}{\sqrt{r^2 + (L/2)^2} - L/2} = \\ & \frac{\rho_{l0}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{r^2 + (L/2)^2} + L/2}{r} \end{aligned}$$

(2) 根据对称性, 可得两个对称线电荷元 $\rho_{l0}dz'$ 在点 P 的电场为

$$d\mathbf{E} = \mathbf{e}_r dE_r = \mathbf{e}_r \frac{\rho_{l0}dz'}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + z'^2}} \cos\theta = \mathbf{e}_r \frac{\rho_{l0}rdz'}{2\pi\epsilon_0 (r^2 + z'^2)^{3/2}}$$

故长为 L 的线电荷在点 P 的电场为

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E} = \mathbf{e}_r \int_0^{L/2} \frac{\rho_{l0}rdz'}{2\pi\epsilon_0 (r^2 + z'^2)^{3/2}} = \mathbf{e}_r \frac{\rho_{l0}}{2\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{z'}{\sqrt{r^2 + z'^2}} \right) \Big|_0^{L/2} = \mathbf{e}_r \frac{\rho_{l0}}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{L}{\sqrt{r^2 + (L/2)^2}}$$

由 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ 求 \mathbf{E} , 有

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = -\nabla\phi &= -\frac{\rho_{l0}}{2\pi\epsilon_0} \nabla \left[\ln \frac{L/2 + \sqrt{r^2 + (L/2)^2}}{r} \right] = \\ &= -\mathbf{e}_r \frac{\rho_{l0}}{2\pi\epsilon_0} \frac{d}{dr} \left[\ln(L/2 + \sqrt{r^2 + (L/2)^2}) - \ln r \right] = \\ &= -\mathbf{e}_r \frac{\rho_{l0}}{2\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{r}{[L/2 + \sqrt{r^2 + (L/2)^2}] \sqrt{r^2 + (L/2)^2}} - \frac{1}{r} \right\} = \mathbf{e}_r \frac{\rho_{l0}}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{L}{\sqrt{r^2 + (L/2)^2}} \end{aligned}$$

3.9 已知无限长均匀线电荷 ρ_l 的电场 $\mathbf{E} = \mathbf{e}_r \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r}$, 试用定义式 $\phi(r) = \int_r^{r_P} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ 求其电

位函数。其中 r_P 为电位参考点。

$$\text{解 } \phi(r) = \int_r^{r_P} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^{r_P} \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_P}{r}$$

由于是无限长的线电荷, 不能将 r_P 选为无穷远点。

3.10 一点电荷 $+q$ 位于 $(-a, 0, 0)$, 另一点电荷 $-2q$ 位于 $(a, 0, 0)$, 求空间的零电位面。

解 两个点电荷 $+q$ 和 $-2q$ 在空间产生的电位

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{2q}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} \right]$$

$$\text{令 } \phi(x, y, z) = 0, \text{ 则有 } \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{2}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} = 0$$

即

$$4[(x+a)^2 + y^2 + z^2] = (x-a)^2 + y^2 + z^2$$

故得

$$(x + \frac{5}{3}a)^2 + y^2 + z^2 = (\frac{4}{3}a)^2$$

由此可见，零电位面是一个以点 $(-\frac{5}{3}a, 0, 0)$ 为球心、 $\frac{4}{3}a$ 为半径的球面。

3.11 证明习题 3.2 的电位表达式为

$$\varphi(r) = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} + \frac{r^2}{2r_a} - \frac{3}{2r_a} \right)$$

解 位于球心的正电荷 Ze 在原子外产生的电通量密度为

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{e}_r \frac{Ze}{4\pi r^2}$$

电子云在原子外产生的电通量密度则为

$$\mathbf{D}_2 = \mathbf{e}_r \frac{\rho 4\pi r_a^3 / 3}{4\pi r^2} = -\mathbf{e}_r \frac{Ze}{4\pi r^2}$$

所以原子外的电场为零。故原子内电位为

$$\varphi(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_r^{r_a} D dr = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \int_r^{r_a} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{r_a^3} \right) dr = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} + \frac{r^2}{2r_a} - \frac{3}{2r_a} \right)$$

3.12 电场中有一半径为 a 的圆柱体，已知柱内外的电位函数分别为

$$\begin{cases} \varphi(r) = 0 & r \leq a \\ \varphi(r) = A(r - \frac{a^2}{r}) \cos \phi & r \geq a \end{cases}$$

(1) 求圆柱内、外的电场强度；

(2) 这个圆柱是什么材料制成的？表面有电荷分布吗？试求之。

解 (1) 由 $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ ，可得到 $r < a$ 时， $\mathbf{E} = -\nabla \varphi = 0$

$$\begin{aligned} r > a \text{ 时, } \mathbf{E} = -\nabla \varphi &= -\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \left[A(r - \frac{a^2}{r}) \cos \phi \right] - \mathbf{e}_\phi \frac{\partial}{\partial \phi} \left[A(r - \frac{a^2}{r}) \cos \phi \right] = \\ &= -\mathbf{e}_r A(1 + \frac{a^2}{r^2}) \cos \phi + \mathbf{e}_\phi A(1 - \frac{a^2}{r^2}) \sin \phi \end{aligned}$$

(2) 该圆柱体为等位体，所以是由导体制成的，其表面有电荷分布，电荷面密度为

$$\sigma = \epsilon_0 \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \Big|_{r=a} = \epsilon_0 \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{E} \Big|_{r=a} = -2\epsilon_0 A \cos \phi$$

3.13 验证下列标量函数在它们各自的坐标系中满足 $\nabla^2 \varphi = 0$

(1) $\sin(kx)\sin(ly)e^{-hz}$ 其中 $h^2 = k^2 + l^2$ ；

(2) $r^n [\cos(n\phi) + A \sin(n\phi)]$ 圆柱坐标；

(3) $r^{-n} \cos(n\phi)$ 圆柱坐标；

(4) $r \cos \phi$ 球坐标；

(5) $r^{-2} \cos \phi$ 球坐标。

解 (1) 在直角坐标系中

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

而

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\sin(kx)\sin(ly)e^{-hz}] = -k^2 \sin(kx)\sin(ly)e^{-hz}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} [\sin(kx) \sin(ly) e^{-hz}] = -l^2 \sin(kx) \sin(ly) e^{-hz}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} [\sin(kx) \sin(ly) e^{-hz}] = h^2 \sin(kx) \sin(ly) e^{-hz}$$

故
$$\nabla^2 \varphi = (-k^2 - l^2 + h^2) \sin(kx) \sin(ly) e^{-hz} = 0$$

(2) 在圆柱坐标系中
$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{r^2 \partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

而
$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} r^n [\cos(n\phi) + A \sin(n\phi)] \right\} = n^2 r^{n-2} [\cos(n\phi) + A \sin(n\phi)]$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = -n^2 r^{n-2} [\cos(n\phi) + A \sin(n\phi)]$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} r^{-n} [\cos(n\phi) + A \sin(n\phi)] = 0$$

故
$$\nabla^2 \varphi = 0$$

(3)
$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} [r^{-n} \cos(n\phi)] \right\} = n^2 r^{-n-2} \cos(n\phi)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = -n^2 r^{-n-2} \cos(n\phi)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} [r^{-n} \cos(n\phi)] = 0$$

故
$$\nabla^2 \varphi = 0$$

(4) 在球坐标系中
$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2}$$

而
$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 \frac{\partial}{\partial r} (r \cos \theta)] = \frac{2}{r} \cos \theta$$

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (r \cos \theta) \right] =$$

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (-r \sin^2 \theta) = -\frac{2}{r} \cos \theta$$

$$\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} (r \cos \theta) = 0$$

故
$$\nabla^2 \varphi = 0$$

(5)
$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} [r^2 \frac{\partial}{\partial r} (r^{-2} \cos \theta)] = \frac{2}{r^2} \cos \theta$$

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (r^{-2} \cos \theta) \right] =$$

$$\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (-r^2 \sin^2 \theta) = -\frac{2}{r^4} \cos \theta$$

$$\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi^2} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} (r^2 \cos \theta) = 0$$

故

$$\nabla^2 \phi = 0$$

3.14 已知 $y > 0$ 的空间中没有电荷，下列几个函数中哪些是可能的电位的解？

- (1) $e^{-y} \cosh x$;
- (2) $e^{-y} \cos x$;
- (3) $e^{-\sqrt{2}y} \cos x \sin x$
- (4) $\sin x \sin y \sin z$ 。

解 (1) $\frac{\partial^2}{\partial x^2} (e^{-y} \cosh x) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (e^{-y} \cosh x) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (e^{-y} \cosh x) = 2e^{-y} \cosh x \neq 0$

所以函数 $e^{-y} \cosh x$ 不是 $y > 0$ 空间中的电位的解；

(2) $\frac{\partial^2}{\partial x^2} (e^{-y} \cos x) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (e^{-y} \cos x) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (e^{-y} \cos x) = -e^{-y} \cos x + e^{-y} \cos x = 0$

所以函数 $e^{-y} \cos x$ 是 $y > 0$ 空间中可能的电位的解；

(3) $\frac{\partial^2}{\partial x^2} (e^{-\sqrt{2}y} \cos x \sin x) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (e^{-\sqrt{2}y} \cos x \sin x) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (e^{-\sqrt{2}y} \cos x \sin x) =$
 $-4e^{-\sqrt{2}y} \cos x \sin x + 2e^{-\sqrt{2}y} \cos x \sin x \neq 0$

所以函数 $e^{-\sqrt{2}y} \cos x \sin x$ 不是 $y > 0$ 空间中的电位的解；

(4) $\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sin x \sin y \sin z) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sin x \sin y \sin z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\sin x \sin y \sin z) =$
 $-3 \sin x \sin y \sin z \neq 0$

所以函数 $\sin x \sin y \sin z$ 不是 $y > 0$ 空间中的电位的解。

3.15 中心位于原点，边长为 L 的电介质立方体的极化强度矢量为 $\mathbf{P} = P_0(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z)$ 。

(1) 计算面束缚电荷密度和体束缚电荷密度； (2) 证明总的束缚电荷为零。

解 (1) $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -3P_0$

$$\sigma_p(x = \frac{L}{2}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} \Big|_{x=L/2} = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{P} \Big|_{x=L/2} = \frac{L}{2} P_0$$

$$\sigma_p(x = -\frac{L}{2}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} \Big|_{x=-L/2} = -\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{P} \Big|_{x=-L/2} = \frac{L}{2} P_0$$

同理 $\sigma_p(y = \frac{L}{2}) = \sigma_p(y = -\frac{L}{2}) = \sigma_p(z = \frac{L}{2}) = \sigma_p(z = -\frac{L}{2}) = \frac{L}{2} P_0$

(2) $q_p = \int_V \rho_p d\tau + \int_S \sigma_p dS = -3P_0 L^3 + 6L^2 \times \frac{L}{2} P_0 = 0$

3.16 一半径为 R_0 的介质球，介电常数为 $\epsilon_r \epsilon_0$ ，其内均匀分布自由电荷 ρ ，证明中心点的

电位为
$$\frac{2\varepsilon_r + 1}{2\varepsilon_r} \left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0} \right) R_0^2$$

解 由 $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q$, 可得到

$r < R_0$ 时 ,
$$4\pi r^2 D_1 = \frac{4\pi r^3}{3} \rho$$

即
$$D_1 = \frac{\rho r}{3} , \quad E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_r \varepsilon_0} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_r \varepsilon_0}$$

$r > R_0$ 时 ,
$$4\pi r^2 D_2 = \frac{4\pi R_0^3}{3} \rho$$

即
$$D_2 = \frac{\rho R_0^3}{3r^2} , \quad E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_0} = \frac{\rho R_0^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

故中心点的电位为

$$\Phi(0) = \int_0^{R_0} E_1 dr + \int_{R_0}^{\infty} E_2 dr = \int_0^{R_0} \frac{\rho r}{3\varepsilon_r \varepsilon_0} dr + \int_{R_0}^{\infty} \frac{\rho R_0^3}{3\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho R_0^2}{6\varepsilon_r \varepsilon_0} + \frac{\rho R_0^2}{3\varepsilon_0} = \frac{2\varepsilon_r + 1}{2\varepsilon_r} \left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0} \right) R_0^2$$

3.17 一个半径为 R 的介质球, 介电常数为 ε , 球内的极化强度 $\mathbf{P} = \mathbf{e}_r K/r$, 其中 K 为一常数。(1) 计算束缚电荷体密度和面密度; (2) 计算自由电荷密度; (3) 计算球内、外的电场和电位分布。

解 (1) 介质球内的束缚电荷体密度为
$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{K}{r}) = -\frac{K}{r^2}$$

在 $r = R$ 的球面上, 束缚电荷面密度为
$$\sigma_p = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}|_{r=R} = \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{P}|_{r=R} = \frac{K}{R}$$

(2) 由于 $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, 所以
$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{P} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \nabla \cdot \mathbf{D} + \nabla \cdot \mathbf{P}$$

即
$$(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}) \nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{P}$$

由此可得到介质球内的自由电荷体密度为
$$\rho = \nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{P} = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon_0} \rho_p = \frac{\varepsilon K}{(\varepsilon - \varepsilon_0) r^2}$$

总的自由电荷量
$$q = \int_V \rho d\tau = \frac{\varepsilon K}{\varepsilon - \varepsilon_0} \int_0^R \frac{1}{r^2} 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi \varepsilon R K}{\varepsilon - \varepsilon_0}$$

(3) 介质球内、外的电场强度分别为

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon - \varepsilon_0} = \mathbf{e}_r \frac{K}{(\varepsilon - \varepsilon_0)r} \quad (r < R)$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_r \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} = \mathbf{e}_r \frac{\varepsilon R K}{\varepsilon_0 (\varepsilon - \varepsilon_0) r^2} \quad (r > R)$$

介质球内、外的电位分别为

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \int_r^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_r^R E_1 dr + \int_R^\infty E_2 dr = \\ &= \int_r^R \frac{K}{(\varepsilon - \varepsilon_0)r} dr + \int_R^\infty \frac{\varepsilon RK}{\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)r^2} dr = \\ &= \frac{K}{(\varepsilon - \varepsilon_0)} \ln \frac{R}{r} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)} \frac{K}{r} \quad (r \leq R) \\ \varphi_2 &= \int_r^\infty E_2 dr = \int_r^\infty \frac{\varepsilon RK}{\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)r^2} dr = \frac{\varepsilon RK}{\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)r} \quad (r \geq R)\end{aligned}$$

3.18 (1) 证明不均匀电介质在没有自由电荷密度时可能存在束缚电荷体密度； (2) 导出束缚电荷密度 ρ_p 的表达式。

解 (1) 由 $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ ，得束缚电荷体密度为 $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\nabla \cdot \mathbf{D} + \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}$
在介质内没有自由电荷密度时， $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ ，则有 $\rho_p = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}$
由于 $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ ，有 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \nabla \varepsilon = 0$
所以 $\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\mathbf{E} \cdot \nabla \varepsilon}{\varepsilon}$
由此可见，当电介质不均匀时， $\nabla \cdot \mathbf{E}$ 可能不为零，故在不均匀电介质中可能存在束缚电荷体密度。

(2) 束缚电荷密度 ρ_p 的表达式为 $\rho_p = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \mathbf{E} \cdot \nabla \varepsilon$

3.19 两种电介质的相对介电常数分别为 $\varepsilon_{r1}=2$ 和 $\varepsilon_{r2}=3$ ，其分界面为 $z=0$ 平面。如果已知介质 1 中的电场的

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_x 2y - \mathbf{e}_y 3x + \mathbf{e}_z (5 + z)$$

那么对于介质 2 中的 \mathbf{E}_2 和 \mathbf{D}_2 ，我们可得到什么结果？能否求出介质 2 中任意点的 \mathbf{E}_2 和 \mathbf{D}_2 ？

解 设在介质 2 中

$$\mathbf{E}_2(x, y, 0) = \mathbf{e}_x E_{2x}(x, y, 0) + \mathbf{e}_y E_{2y}(x, y, 0) + \mathbf{e}_z E_{2z}(x, y, 0)$$

$$\mathbf{D}_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} \mathbf{E}_2 = 3\varepsilon_0 \mathbf{E}_2$$

在 $z=0$ 处，由 $\mathbf{e}_z \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0$ 和 $\mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = 0$ ，可得

$$\begin{cases} \mathbf{e}_x 2y - \mathbf{e}_y 3x = \mathbf{e}_x E_{2x}(x, y, 0) + \mathbf{e}_y E_{2y}(x, y, 0) \\ 2 \times 5\varepsilon_0 = 3\varepsilon_0 E_{2z}(x, y, 0) \end{cases}$$

于是得到

$$\begin{aligned}E_{2x}(x, y, 0) &= 2y \\ E_{2y}(x, y, 0) &= -3x \\ E_{2z}(x, y, 0) &= 10/3\end{aligned}$$

故得到介质 2 中的 \mathbf{E}_2 和 \mathbf{D}_2 在 $z=0$ 处的表达式分别为

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_2(x, y, 0) &= \mathbf{e}_x 2y - \mathbf{e}_y 3x + \mathbf{e}_z (10/3) \\ \mathbf{D}_2(x, y, 0) &= \varepsilon_0 (\mathbf{e}_x 6y - \mathbf{e}_y 9x + \mathbf{e}_z 10)\end{aligned}$$

不能求出介质 2 中任意点的 \mathbf{E}_2 和 \mathbf{D}_2 。由于是非均匀场，介质中任意点的电场与边界面上的

电场是不相同的。

3.20 电场中一半径为 a 、介电常数为 ε 的介质球，已知球内、外的电位函数分别为

$$\varphi_1 = -E_0 r \cos \theta + \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} a^3 E_0 \frac{\cos \theta}{r^2} \quad r \geq a$$

$$\varphi_2 = -\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 r \cos \theta \quad r \leq a$$

验证球表面的边界条件，并计算球表面的束缚电荷密度。

解 在球表面上

$$\varphi_1(a, \theta) = -E_0 a \cos \theta + \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} a E_0 \cos \theta = -\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 a \cos \theta$$

$$\varphi_2(a, \theta) = -\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 a \cos \theta$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right|_{r=a} = -E_0 \cos \theta - \frac{2(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 \cos \theta = -\frac{3\varepsilon}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 \cos \theta$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right|_{r=a} = -\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 \cos \theta$$

故有 $\varphi_1(a, \theta) = \varphi_2(a, \theta)$, $\varepsilon_0 \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right|_{r=a} = \varepsilon \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right|_{r=a}$

可见 φ_1 和 φ_2 满足球表面上的边界条件。

球表面的束缚电荷密度为

$$\sigma_p = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_2 \big|_{r=a} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{E}_2 = -(\varepsilon - \varepsilon_0) \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right|_{r=a} = \frac{3\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 \cos \theta$$

3.21 平行板电容器的长、宽分别为 a 和 b ，极板间距离为 d 。电容器的一半厚度 $(0 \sim \frac{d}{2})$

用介电常数为 ε 的电介质填充，如题 3.21 图所示。

- (1) (1) 板上外加电压 U_0 ，求板上的自由电荷面密度、束缚电荷；
- (2) (2) 若已知板上的自由电荷总量为 Q ，求此时极板间电压和束缚电荷；
- (3) (3) 求电容器的电容量。

解 (1) 设介质中的电场为 $\mathbf{E} = \mathbf{e}_z E$ ，空气中的电场为 $\mathbf{E}_0 = \mathbf{e}_z E_0$ 。由 $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0$ ，有

$$\varepsilon E = \varepsilon_0 E_0$$

又由于

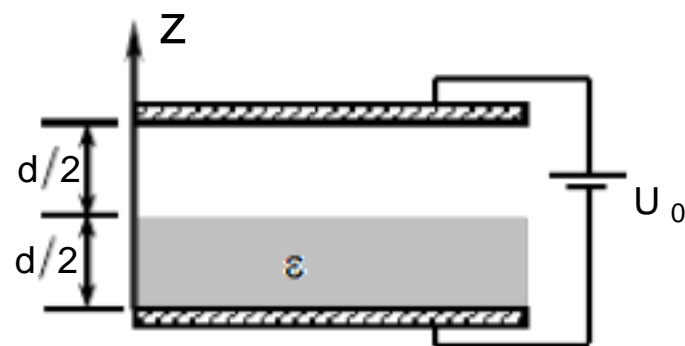
$$E \frac{d}{2} + E_0 \frac{d}{2} = -U_0$$

由以上两式解得

$$E = -\frac{2\varepsilon_0 U_0}{(\varepsilon + \varepsilon_0)d}, \quad E_0 = -\frac{2\varepsilon U_0}{(\varepsilon + \varepsilon_0)d}$$

故下极板的自由电荷面密度为

$$\sigma_{\text{下}} = \varepsilon E = -\frac{2\varepsilon_0 \varepsilon U_0}{(\varepsilon + \varepsilon_0)d}$$



题 3.21 图

上极板的自由电荷面密度为 $\sigma_{\text{上}} = -\epsilon_0 E_0 = \frac{2\epsilon_0 \epsilon U_0}{(\epsilon + \epsilon_0)d}$

电介质中的极化强度 $\mathbf{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \mathbf{E} = -\mathbf{e}_z \frac{2\epsilon_0 (\epsilon - \epsilon_0) U_0}{(\epsilon + \epsilon_0)d}$

故下表面上的束缚电荷面密度为 $\sigma_{\text{p下}} = -\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{P} = \frac{2\epsilon_0 (\epsilon - \epsilon_0) U_0}{(\epsilon + \epsilon_0)d}$

上表面上的束缚电荷面密度为 $\sigma_{\text{p上}} = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{P} = -\frac{2\epsilon_0 (\epsilon - \epsilon_0) U_0}{(\epsilon + \epsilon_0)d}$

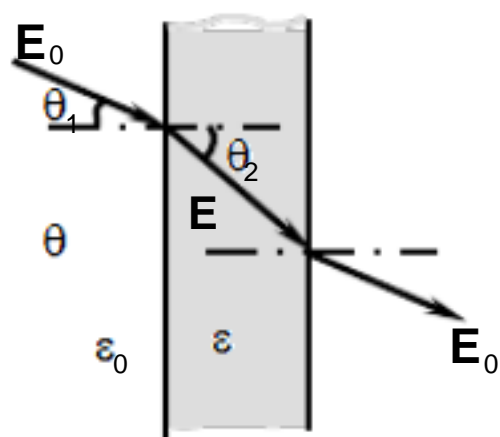
(2) 由 $\sigma = \frac{Q}{ab} = \frac{2\epsilon_0 \epsilon U}{(\epsilon + \epsilon_0)d}$

$$U = \frac{(\epsilon + \epsilon_0)dQ}{2\epsilon_0 \epsilon ab}$$

$$\sigma_{\text{p下}} = \frac{(\epsilon - \epsilon_0)Q}{\epsilon ab}$$

$$\sigma_{\text{p上}} = -\frac{(\epsilon - \epsilon_0)Q}{\epsilon ab}$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\epsilon_0 \epsilon ab}{(\epsilon + \epsilon_0)d}$$



题 3.22 图

得到

故

(3) 电容器的电容为

3.22 厚度为 t 、介电常数为 $\epsilon = 4\epsilon_0$ 的无限大介质板，放置于均匀电场 \mathbf{E}_0 中，板与 \mathbf{E}_0 成角 θ_1 ，如题 3.22 图所示。求：(1) 使 $\theta_2 = \pi/4$ 的 θ_1 值；(2) 介质板两表面的极化电荷密度。

解 (1) 根据静电场的边界条件，在介质板的表面上有 $\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon}$

由此得到 $\theta_1 = \tan^{-1} \frac{\epsilon_0 \tan \theta_2}{\epsilon} = \tan^{-1} \frac{\epsilon_0}{\epsilon} = \tan^{-1} \frac{1}{4} = 14^\circ$

(2) 设介质板中的电场为 \mathbf{E} ，根据分界面上的边界条件，有 $\epsilon_0 E_{0n} = \epsilon E_n$ ，即

$$\epsilon_0 E_0 \cos \theta_1 = \epsilon E_n$$

所以 $E_n = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} E_0 \cos \theta_1 = \frac{1}{4} E_0 \cos 14^\circ$

介质板左表面的束缚电荷面密度 $\sigma_p = -(\epsilon - \epsilon_0) E_n = -\frac{3}{4} \epsilon_0 E_0 \cos 14^\circ = -0.712 \epsilon_0 E_0$

介质板右表面的束缚电荷面密度 $\sigma_p = (\epsilon - \epsilon_0) E_n = \frac{3}{4} \epsilon_0 E_0 \cos 14^\circ = 0.712 \epsilon_0 E_0$

3.23 在介电常数为 ϵ 的无限大均匀介质中，开有如下的空腔，求各腔中的 \mathbf{E}_0 和 \mathbf{D}_0 ：

- (1) 平行于 \mathbf{E} 的针形空腔；
- (2) 底面垂直于 \mathbf{E} 的薄盘形空腔；
- (3) 小球形空腔 (见第四章 4.14 题)。

解 (1) 对于平行于 \mathbf{E} 的针形空腔，根据边界条件，在空腔的侧面上，有 $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}$ 。故在针

形空腔中

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}, \quad \mathbf{D}_0 = \epsilon_0 \mathbf{E}_0 = \epsilon_0 \mathbf{E}$$

(2) 对于底面垂直于 \mathbf{E} 的薄盘形空腔, 根据边界条件, 在空腔的底面上, 有 $\mathbf{D}_0 = \mathbf{D}$ 。故在薄盘形空腔中

$$\mathbf{D}_0 = \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{E}_0 = \frac{\mathbf{D}_0}{\epsilon_0} = \frac{\epsilon \mathbf{E}}{\epsilon_0}$$

3.24 在面积为 S 的平行板电容器内填充介电常数作线性变化的介质, 从一极板 ($y=0$) 处的 ϵ_1 一直变化到另一极板 ($y=d$) 处的 ϵ_2 , 试求电容量。

解 由题意可知, 介质的介电常数为 $\epsilon = \epsilon_1 + y(\epsilon_2 - \epsilon_1)/d$

设平行板电容器的极板上带电量分别为 $\pm q$, 由高斯定理可得

$$D_y = \sigma = \frac{q}{S}$$

$$E_y = \frac{D_y}{\epsilon} = \frac{q}{[\epsilon_1 + y(\epsilon_2 - \epsilon_1)/d] S}$$

所以, 两极板的电位差 $U = \int_0^d E_y dy = \int_0^d \frac{q}{[\epsilon_1 + y(\epsilon_2 - \epsilon_1)/d] S} dy = \frac{qd}{S(\epsilon_2 - \epsilon_1)} \ln \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$

故电容量为 $C = \frac{q}{U} = \frac{S(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{d \ln(\epsilon_2/\epsilon_1)}$

3.25 一体密度为 $\rho = 2.32 \times 10^{-7} \text{ C/m}^3$ 的质子束, 束内的电荷均匀分布, 束直径为 2 mm , 束外没有电荷分布, 试计算质子束内部和外部的径向电场强度。

解 在质子束内部, 由高斯定理可得 $2\pi r E_r = \frac{1}{\epsilon_0} \pi r^2 \rho$

故 $E_r = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} = \frac{2.32 \times 10^{-7} r}{2 \times 8.854 \times 10^{-12}} = 1.31 \times 10^4 r \text{ V/m} \quad (r < 10^{-3} \text{ m})$

在质子束外部, 有 $2\pi r E_r = \frac{1}{\epsilon_0} \pi a^2 \rho$

故 $E_r = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0 r} = \frac{2.32 \times 10^{-7} \times 10^{-6}}{2 \times 8.854 \times 10^{-12} r} = 1.31 \times 10^{-2} \frac{1}{r} \text{ V/m} \quad (r > 10^{-3} \text{ m})$

3.26 考虑一块电导率不为零的电介质 (γ, ϵ), 设其介质特性和导电特性都是不均匀的。证明当介质中有恒定电流 \mathbf{J} 时, 体积内将出现自由电荷, 体密度为 $\rho = \mathbf{J} \cdot \nabla (\epsilon/\gamma)$ 。试问有没有束缚体电荷 ρ_p ? 若有则进一步求出 ρ_p 。

解 $\rho = \nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = \nabla \cdot \left(\frac{\epsilon}{\gamma} \mathbf{J} \right) = \mathbf{J} \cdot \nabla \left(\frac{\epsilon}{\gamma} \right) + \frac{\epsilon}{\gamma} \nabla \cdot \mathbf{J}$

对于恒定电流, 有 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, 故得到 $\rho = \mathbf{J} \cdot \nabla (\epsilon/\gamma)$

介质中有束缚体电荷 ρ_p , 且

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\nabla \cdot \mathbf{D} + \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = -\mathbf{J} \cdot \nabla \left(\frac{\varepsilon}{\gamma} \right) + \varepsilon_0 \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{J}}{\gamma} \right) = -\mathbf{J} \cdot \nabla \left(\frac{\varepsilon}{\gamma} \right) + \mathbf{J} \cdot \nabla \left(\frac{\varepsilon_0}{\gamma} \right) = -\mathbf{J} \cdot \nabla \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\gamma} \right)$$

3.27 填充有两层介质的同轴电缆，内导体半径为 a ，外导体内半径为 c ，介质的分界面半径为 b 。两层介质的介电常数为 ε_1 和 ε_2 ，电导率为 γ_1 和 γ_2 。设内导体的电压为 U_0 ，外导体接地。求：(1) 两导体之间的电流密度和电场强度分布；(2) 介质分界面上的自由电荷面密度；(3) 同轴线单位长度的电容及漏电阻。

解 (1) 设同轴电缆中单位长度的径向电流为 I ，则由 $\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = I$ ，可得电流密度

$$\mathbf{J} = \mathbf{e}_r \frac{I}{2\pi r} \quad (a < r < c)$$

介质中的电场
$$\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{J}}{\gamma_1} = \mathbf{e}_r \frac{I}{2\pi r \gamma_1} \quad (a < r < b)$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{J}}{\gamma_2} = \mathbf{e}_r \frac{I}{2\pi r \gamma_2} \quad (b < r < c)$$

由于
$$U_0 = \int_a^b \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{r} + \int_b^c \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{r} = \frac{I}{2\pi\gamma_1} \ln \frac{b}{a} + \frac{I}{2\pi\gamma_2} \ln \frac{c}{b}$$

于是得到
$$I = \frac{2\pi\gamma_1\gamma_2 U_0}{\gamma_2 \ln(b/a) + \gamma_1 \ln(c/b)}$$

故两种介质中的电流密度和电场强度分别为

$$\mathbf{J} = \mathbf{e}_r \frac{\gamma_1\gamma_2 U_0}{r[\gamma_2 \ln(b/a) + \gamma_1 \ln(c/b)]} \quad (a < r < c)$$

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_r \frac{\gamma_2 U_0}{r[\gamma_2 \ln(b/a) + \gamma_1 \ln(c/b)]} \quad (a < r < b)$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_r \frac{\gamma_1 U_0}{r[\gamma_2 \ln(b/a) + \gamma_1 \ln(c/b)]} \quad (b < r < c)$$

(2) 由 $\sigma = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}$ 可得，介质 1 内表面的电荷面密度为

$$\sigma_1 = \varepsilon_1 \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{E}_1 \Big|_{r=a} = \frac{\varepsilon_1 \gamma_2 U_0}{a[\gamma_2 \ln(b/a) + \gamma_1 \ln(c/b)]}$$

介质 2 外表面的电荷面密度为

$$\sigma_2 = -\varepsilon_2 \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{E}_2 \Big|_{r=c} = -\frac{\varepsilon_2 \gamma_1 U_0}{c[\gamma_2 \ln(b/a) + \gamma_1 \ln(c/b)]}$$

两种介质分界面上的电荷面密度为

$$\sigma_{12} = -(\varepsilon_1 \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{E}_1 - \varepsilon_2 \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{E}_2) \Big|_{r=b} = -\frac{(\varepsilon_1 \gamma_2 - \varepsilon_2 \gamma_1) U_0}{b[\gamma_2 \ln(b/a) + \gamma_1 \ln(c/b)]}$$

(3) 同轴线单位长度的漏电阻为
$$R = \frac{U_0}{I} = \frac{\gamma_2 \ln(b/a) + \gamma_1 \ln(c/b)}{2\pi\gamma_1\gamma_2}$$

由静电比拟，可得同轴线单位长度的电容为
$$C = \frac{2\pi\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_2 \ln(b/a) + \varepsilon_1 \ln(c/b)}$$

3.28 半径为 R_1 和 R_2 ($R_1 < R_2$) 的两个同心的理想导体球面间充满了介电常数为 ϵ 、电导率为 $\gamma = \gamma_0(1 + K/r)$ 的导电媒质 (K 为常数)。若内导体球面的电位为 U_0 ，外导体球面接地。试求：(1) 媒质中的电荷分布；(2) 两个理想导体球面间的电阻。

解 设由内导体流向外导体的电流为 I ，由于电流密度成球对称分布，所以

$$\mathbf{J} = \mathbf{e}_r \frac{I}{4\pi r^2} \quad (R_1 < r < R_2)$$

电场强度
$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\gamma} = \mathbf{e}_r \frac{I}{4\pi\gamma_0(r + K)r} \quad (R_1 < r < R_2)$$

由两导体间的电压
$$U_0 = \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{I}{4\pi\gamma_0(r + K)r} dr = \frac{I}{4\pi\gamma_0 K} \ln \left[\frac{R_2(R_1 + K)}{R_1(R_2 + K)} \right]$$

可得到
$$I = \frac{4\pi\gamma_0 K U_0}{\ln \left[\frac{R_2(R_1 + K)}{R_1(R_2 + K)} \right]}$$

所以
$$\mathbf{J} = \mathbf{e}_r \frac{\gamma_0 K U_0}{r^2 \ln \left[\frac{R_2(R_1 + K)}{R_1(R_2 + K)} \right]}$$

媒质中的电荷体密度为
$$\rho = \nabla \cdot \left(\frac{\epsilon}{\gamma} \mathbf{J} \right) = -\frac{\epsilon K^2 U_0}{\ln \left[\frac{R_2(R_1 + K)}{R_1(R_2 + K)} \right]} \frac{1}{(r + K)^2 r^2}$$

媒质内、外表面上的电荷面密度分别为

$$\sigma_1 = \frac{\epsilon}{\gamma} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{J} \Big|_{r=R_1} = \frac{\epsilon K U_0}{\ln \left[\frac{R_2(R_1 + K)}{R_1(R_2 + K)} \right]} \frac{1}{(R_1 + K) R_1}$$

$$\sigma_2 = -\frac{\epsilon}{\gamma} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{J} \Big|_{r=R_2} = -\frac{\epsilon K U_0}{\ln \left[\frac{R_2(R_1 + K)}{R_1(R_2 + K)} \right]} \frac{1}{(R_2 + K) R_2}$$

(2) 两理想导体球面间的电阻

$$R = \frac{U_0}{I} = \frac{1}{4\pi\gamma_0 K} \ln \frac{R_2(R_1 + K)}{R_1(R_2 + K)}$$

3.29 电导率为 γ 的无界均匀电介质内，有两个半径分别为 R_1 和 R_2 的理想导体小球，两球之间的距离为 d ($d \gg R_1, d \gg R_2$)，试求两小导体球面间的电阻。

解 此题可采用静电比拟的方法求解。假设两小球分别带电荷 q 和 $-q$ ，由于两球间的距离 $d \gg R_1, d \gg R_2$ ，可近似认为小球上的电荷均匀分布在球面上。由电荷 q 和 $-q$ 的电位叠加求出两小球表面的电位差，即可求得两小导体球面间的电容，再由静电比拟求出两小导体球面间的电阻。

设两小球分别带电荷 q 和 $-q$ ，由于 $d \gg R_1, d \gg R_2$ ，可得到两小球表面的电位为

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{d-R_2} \right)$$

$$\varphi_2 = -\frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{d-R_1} \right)$$

所以两小导体球面间的电容为

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{d-R_1} - \frac{1}{d-R_2}}$$

由静电比拟，得到两小导体球面间的电导为

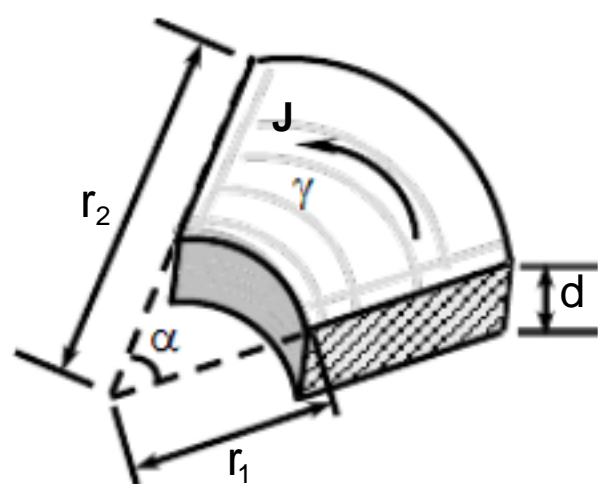
$$G = \frac{I}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{4\pi\gamma}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{d-R_1} - \frac{1}{d-R_2}}$$

故两个小导体球面间的电阻为

$$R = \frac{1}{G} = \frac{1}{4\pi\gamma} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{d-R_1} - \frac{1}{d-R_2} \right)$$

3.30 在一块厚度 d 的导电板上，由两个半径为 r_1 和 r_2 的圆弧和夹角为 α 的两半径割出的一块扇形体，如题 3.30 图所示。求：（1）沿厚度方向的电阻；（2）两圆弧面之间的电阻；沿 α 方向的两电极的电阻。设导电板的电导率为 γ 。

解（1）设沿厚度方向的两电极的电压为 U_1 ，则有



3.30 图

$$E_1 = \frac{U_1}{d}$$

$$J_1 = \gamma E_1 = \frac{\gamma U_1}{d}$$

$$I_1 = J_1 S_1 = \frac{\gamma U_1}{d} \cdot \frac{\alpha}{2} (r_2^2 - r_1^2)$$

故得到沿厚度方向的电阻为

$$R_1 = \frac{U_1}{I_1} = \frac{2d}{\alpha\gamma (r_2^2 - r_1^2)}$$

（2）设内外两圆弧面电极之间的电流为 I_2 ，则

$$J_2 = \frac{I_2}{S_2} = \frac{I_2}{\alpha r d} \quad E_2 = \frac{J_2}{\gamma} = \frac{I_2}{\gamma \alpha r d}$$

$$U_2 = \int_{r_1}^{r_2} E_2 dr = \frac{I_2}{\gamma \alpha d} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

故得到两圆弧面之间的电阻为

$$R_2 = \frac{U_2}{I_2} = \frac{1}{\gamma \alpha d} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

（3）设沿 α 方向的两电极的电压为 U_3 ，则有 $U_3 = \int_0^\alpha E_3 r d\phi$

由于 E_3 与 ϕ 无关，所以得到

$$E_3 = e \phi \frac{U_3}{\alpha r}$$

$$J_3 = \gamma E_3 = e \phi \frac{\gamma U_3}{\alpha r}$$

$$I_3 = \int_{S_3} J_3 \cdot e \phi dS = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\gamma dU_3}{\alpha r} dr = \frac{\gamma dU_3}{\alpha} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

故得到沿 α 方向的电阻为 $R_3 = \frac{U_3}{I_3} = \frac{\alpha}{\gamma d \ln(r_2/r_1)}$

3.31 圆柱形电容器外导体内半径为 b ，内导体半径为 a 。当外加电压 U 固定时，在 b 一定的条件下，求使电容器中的最大电场强度取极小值 E_{\min} 的内导体半径 a 的值和这个 E_{\min} 的值。

解 设内导体单位长度带电荷为 ρ_l ，由高斯定理可求得圆柱形电容器中的电场强度为

$$E(r) = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r}$$

由内外导体间的电压 $U = \int_a^b E dr = \int_a^b \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$

得到 $\rho_l = \frac{2\pi\epsilon_0 U}{\ln(b/a)}$

由此得到圆柱形电容器中的电场强度与电压的关系式 $E(r) = \frac{U}{r \ln(b/a)}$

在圆柱形电容器中， $r = a$ 处的电场强度最大 $E(a) = \frac{U}{a \ln(b/a)}$

令 $E(a)$ 对 a 的导数为零，即 $\frac{\partial E(a)}{\partial a} = -\frac{1}{a^2} \frac{\ln(b/a) - 1}{\ln^2(b/a)} = 0$

由此得到 $\ln(b/a) = 1$

故有 $a = \frac{b}{e} \approx \frac{b}{2.718}$

$$E_{\min} = \frac{e}{b} U = 2.718 \frac{U}{b}$$

3.32 证明：同轴线单位长度的静电储能 W_e 等于 $\frac{q_l^2}{2C}$ 。 q_l 为单位长度上的电荷量， C 为单位长度上的电容。

解 由高斯定理可求得圆柱形电容器中的电场强度为 $E(r) = \frac{q_l}{2\pi\epsilon r}$

内外导体间的电压为

$$U = \int_a^b E dr = \int_a^b \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon r} dr = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b}{a}$$

则同轴线单位长度的电容为 $C = \frac{q_l}{U} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)}$

同轴线单位长度的静电储能为 $W_e = \frac{1}{2} \int \epsilon E^2 d\tau = \frac{1}{2} \int_a^b \epsilon \left(\frac{q_l}{2\pi\epsilon r} \right)^2 2\pi r dr = \frac{1}{2} \frac{q_l^2}{2\pi\epsilon} \ln(b/a) = \frac{1}{2} \frac{q_l^2}{C}$

3.33 如题 3.33 图所示，一半径为 a 、带电量 q 的导体球，其球心位于两种介质的分界面上，此两种介质的电容率分别为 ϵ_1 和 ϵ_2 ，分界面为无限大平面。求：（1）导体球的电容；（2）总的静电能量。

解 （1）由于电场沿径向分布，根据边界条件，在两种介质的分界面上 $E_{1t} = E_{2t}$ ，故有 $E_1 = E_2 = E$ 。由于 $D_1 = \epsilon_1 E_1$ 、 $D_2 = \epsilon_2 E_2$ ，所以 $D_1 \neq D_2$ 。由高斯定理，得到

$$D_1 S_1 + D_2 S_2 = q$$

即 $2\pi r^2 \epsilon_1 E + 2\pi r^2 \epsilon_2 E = q$

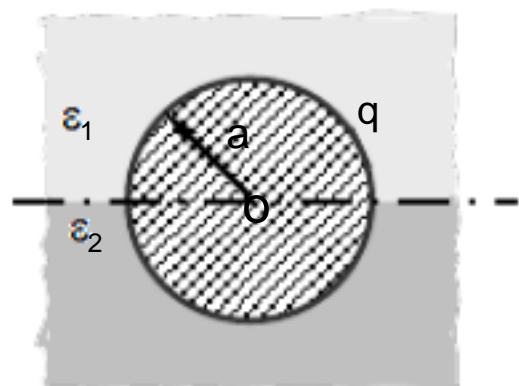
所以

$$E = \frac{q}{2\pi r^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2)}$$

导体球的电位

$$\phi(a) = \int_a^\infty E dr = \frac{q}{2\pi (\epsilon_1 + \epsilon_2)} \int_a^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{q}{2\pi (\epsilon_1 + \epsilon_2) a}$$

故导体球的电容 $C = \frac{q}{\phi(a)} = 2\pi (\epsilon_1 + \epsilon_2) a$



题 3.33 图

（2）总的静电能量为 $W_e = \frac{1}{2} q \phi(a) = \frac{q^2}{4\pi (\epsilon_1 + \epsilon_2) a}$

3.34 把一带电量 q 、半径为 a 的导体球切成两半，求两半球之间的电场力。

解 先利用虚位移法求出导体球表面上单位面积的电荷受到的静电力 f ，然后在半球面上对 f 积分，求出两半球之间的电场力。

导体球的电容为 $C = 4\pi\epsilon_0 a$

故静电能量为 $W_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$

根据虚位移法，导体球表面上单位面积的电荷受到的静电力

$$f = -\frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial W_e}{\partial a} = -\frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a} \right) = \frac{q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 a^4}$$

方向沿导体球表面的外法向，即 $f = e_r f = \frac{q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 a^4} e_r$

这里 $e_r = e_x \sin\theta \cos\phi + e_y \sin\theta \sin\phi + e_z \cos\theta$

在半球面上对 f 积分，即得到两半球之间的静电力为

$$F = \int f dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} e_r \frac{q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 a^4} a^2 \sin\theta d\theta d\phi = e_z \frac{2\pi a^2 q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 a^4} \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta = \frac{q^2}{32\pi\epsilon_0 a^2} e_z$$

3.35 如题 3.35 图所示，两平行的金属板，板间距离为 d ，竖直地插入在电容率为 ϵ 的液

体中，两板间加电压 U ，证明液面升高

$$h = \frac{1}{2\rho g}(\epsilon - \epsilon_0)\left(\frac{U}{d}\right)^2$$

其中 ρ 为液体的质量密度。

解 设金属板的宽度为 a 、高度为 L 。当金属板间的液面升高为 h 时，其电容为

$$C = \frac{\epsilon ah}{d} + \frac{\epsilon_0 a(L-h)}{d}$$

金属板间的静电能量为

$$W_e = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{aU^2}{2d}[h\epsilon + (L-h)\epsilon_0]$$

液体受到竖直向上的静电力为

$$F_e = \frac{\partial W_e}{\partial h} = \frac{aU^2}{2d}(\epsilon - \epsilon_0)$$

而液体所受重力

$$F_g = mg = ahd\rho g$$

$$F_e \text{ 与 } F_g \text{ 相平衡，即 } \frac{aU^2}{2d}(\epsilon - \epsilon_0) = ahdg$$

故得到液面上升的高度

$$h = \frac{(\epsilon - \epsilon_0)U^2}{2d^2\rho g} = \frac{1}{2\rho g}(\epsilon - \epsilon_0)\left(\frac{U}{d}\right)^2$$

3.36 可变空气电容器，当动片由 0° 至 180° 电容量由 25 至 350pF 直线地变化，当动片为 θ 角时，求作用于动片上的力矩。设动片与定片间的电压为 $U_0 = 400V$ 。

解 当动片为 θ 角时，电容器的电容为

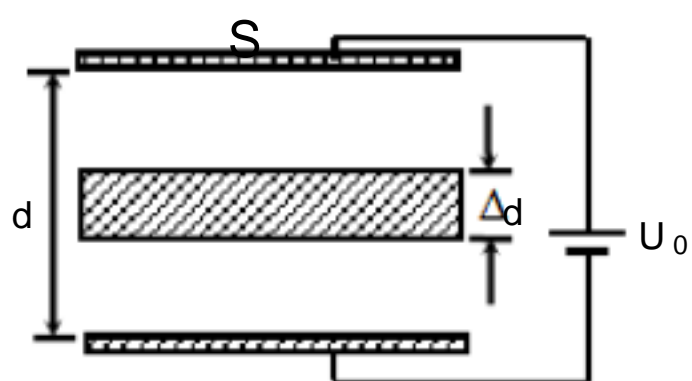
$$C_\theta = 25 + \frac{350-25}{180}\theta = 25 + 1.81\theta \text{ PF} = (25 + 1.81\theta) \times 10^{-12} \text{ F}$$

此时电容器中的静电能量为 $W_e = \frac{1}{2}C_\theta U_0^2 = \frac{1}{2}(25 + 1.81\theta) \times 10^{-12} U_0^2$

作用于动片上的力矩为 $T = \frac{\partial W_e}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \times 1.81 \times 10^{-12} U_0^2 = 1.45 \times 10^{-7} \text{ Nm}$

3.37 平行板电容器的电容是 $\epsilon_0 S/d$ ，其中 S 是板的面积， d 为间距，忽略边缘效应。

(1) 如果把一块厚度为 Δd 的不带电金属插入两极板之间，但不与两极接触，如题 3.37 (a) 图所示。则在原电容器电压 U_0 一定的条件下，电容器的能量如何变化？电容量如何变化？



题 3.37 图 (a)

(2) 如果在电荷 q 一定的条件下，将一块横截面为 ΔS 、介电常数为 ϵ 的电介质片插入电容器（与电容器极板面积基本上垂直地插入，如题 3.37 (b) 图所示，则电容器的能量如何变化？电容量又如何变化？

解 (1) 在电压 U_0 一定的条件下，未插入金属板前，极板间的电场为

$$E_0 = \frac{U_0}{d}$$

电容为 $C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d}$

静电能量为 $W_{e0} = \frac{1}{2} C_0 U_0^2 = \frac{\epsilon_0 S U_0^2}{2d}$

当插入金属板后，电容器中的电场为 $E = \frac{U_0}{d - \Delta d}$

此时静电能量和电容分别为 $W_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{U_0}{d - \Delta d} \right)^2 S(d - \Delta d) = \frac{\epsilon_0 S U_0^2}{2(d - \Delta d)}$

$$C = \frac{2W_e}{U_0^2} = \frac{\epsilon_0 S}{d - \Delta d}$$

故电容器的电容及能量的改变量分别为

$$\Delta C = C - C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d - \Delta d} - \frac{\epsilon_0 S}{d} = \frac{\epsilon_0 S \Delta d}{d(d - \Delta d)}$$

$$\Delta W_e = W_e - W_{e0} = \frac{\epsilon_0 S U_0^2 \Delta d}{2d(d - \Delta d)}$$

(2) 在电荷 q 一定的条件下，未插入电介质板前，极板间的电场为 $E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0 S}$

静电能量为 $W_{e0} = \frac{q^2}{2C_0} = \frac{dq^2}{2\epsilon_0 S}$

当插入电介质板后，由介质分界面上的边界条件 $E_{1t} = E_{2t}$ ，有 $E_1 = E_2 = E$

再由高斯定理可得 $E \epsilon \Delta S + E \epsilon_0 (S - \Delta S) = q$

于是得到极板间的电场为 $E = \frac{q}{\epsilon \Delta S + \epsilon_0 (S - \Delta S)}$

两极板间的电位差为 $U = Ed = \frac{qd}{\epsilon \Delta S + \epsilon_0 (S - \Delta S)}$

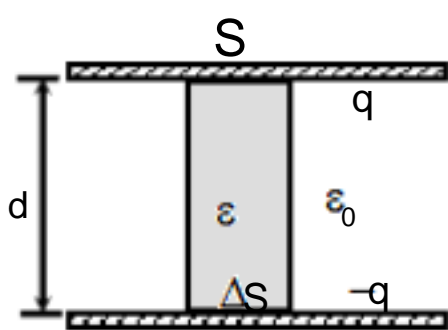
此时的静电能量为 $W_e = \frac{1}{2} qU = \frac{1}{2} \frac{q^2 d}{\epsilon \Delta S + \epsilon_0 (S - \Delta S)}$

其电容为 $C = \frac{\epsilon \Delta S + \epsilon_0 (S - \Delta S)}{d}$

故电容器的电容及能量的改变量分别为 $\Delta C = \frac{(\epsilon - \epsilon_0) \Delta S}{d}$

$$\Delta W_e = -\frac{1}{2} \frac{(\epsilon - \epsilon_0) q^2 d}{\epsilon_0 S [\epsilon \Delta S + \epsilon_0 (S - \Delta S)]}$$

3.38 如果不引入电位函数，静电问题也可以通过直接求解法求解 E 的微分方程而得解决。



题 3.37 图 (b)

(1) 证明：有源区 \mathbf{E} 的微分方程为 $\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\nabla \rho_t}{\epsilon_0}$, $\rho_t = \rho + \rho_P$;

(2) 证明： \mathbf{E} 的解是 $\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\nabla' \rho_t}{R} d\tau'$

解 (1) 由 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, 可得 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = 0$, 即 $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = 0$

又

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{P}) = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho + \rho_P)$$

故得到

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\nabla(\rho + \rho_P)}{\epsilon_0} = \frac{\nabla \rho_t}{\epsilon_0}$$

(2) 在直角坐标系中 $\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\nabla \rho_t}{\epsilon_0}$ 的三个分量方程为

$$\nabla^2 E_x = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho_t}{\partial x} , \quad \nabla^2 E_y = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho_t}{\partial y} , \quad \nabla^2 E_z = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho_t}{\partial z}$$

其解分别为

$$E_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{R} \frac{\partial \rho_t}{\partial x'} d\tau'$$

$$E_y = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{R} \frac{\partial \rho_t}{\partial y'} d\tau'$$

$$E_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{R} \frac{\partial \rho_t}{\partial z'} d\tau'$$

故

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x E_x + \mathbf{e}_y E_y + \mathbf{e}_z E_z =$$

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{R} [\mathbf{e}_x \frac{\partial \rho_t}{\partial x'} + \mathbf{e}_y \frac{\partial \rho_t}{\partial y'} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \rho_t}{\partial z'}] d\tau' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\nabla' \rho_t}{R} d\tau'$$

3.39 证明： $\int \frac{\nabla' \rho_t}{R} d\tau' = 0$

解 由于 $\nabla' \left(\frac{\rho_t}{R} \right) = \rho_t \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) + \frac{\nabla' \rho_t}{R} = \rho_t \frac{\mathbf{R}}{R^3} + \frac{\nabla' \rho_t}{R}$, 所以

$$\int \frac{\nabla' \rho_t}{R} d\tau' = \int \rho_t \frac{\mathbf{R}}{R^3} d\tau' + \int \frac{\nabla' \rho_t}{R} d\tau' = 4\pi\epsilon_0 \mathbf{E} + \int \frac{\nabla' \rho_t}{R} d\tau'$$

由题 3.38(2) 可知

$$\int \frac{\nabla' \rho_t}{R} d\tau' = -4\pi\epsilon_0 \mathbf{E}$$

故

$$\int \frac{\nabla' \rho_t}{R} d\tau' = -4\pi\epsilon_0 \mathbf{E} + 4\pi\epsilon_0 \mathbf{E} = 0$$

四章习题解答

4.1 如题 4.1 图所示为一长方形截面的导体槽，槽可视为无限长，其上有一块与槽相绝缘的盖板，槽的电位为零，上边盖板的电位为 U_0 ，求槽内的电位函数。

解 根据题意，电位 $\varphi(x, y)$ 满足的边界条件为

$$\varphi(0, y) = \varphi(a, y) = 0$$

$$\varphi(x, 0) = 0$$

$$\varphi(x, b) = U_0$$

根据条件 和 ，电位 $\varphi(x, y)$ 的通解应取为

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

由条件 ，有

$$U_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

两边同乘以 $\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$ ，并从 0 到 a 对 x 积分，得到

$$A_n = \frac{2U_0}{a \sinh(n\pi b/a)} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx =$$

$$\frac{2U_0}{n\pi \sinh(n\pi b/a)} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} \frac{4U_0}{n\pi \sinh(n\pi b/a)}, & n=1, 3, 5, \dots \\ 0, & n=2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

故得到槽内的电位分布 $\varphi(x, y) = \frac{4U_0}{\pi} \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{1}{n \sinh(n\pi b/a)} \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$

4.2 两平行无限大导体平面，距离为 b，其间有一极薄的导体片由 $y=d$ 到 $y=b$ ($-\infty < x < \infty$)。上板和薄片保持电位 U_0 ，下板保持零电位，求板间电位的解。设在薄片平面上，从 $y=0$ 到 $y=d$ ，电位线性变化， $\varphi(0, y) = U_0 y/d$ 。

解 应用叠加原理，设板间的电位为

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y)$$

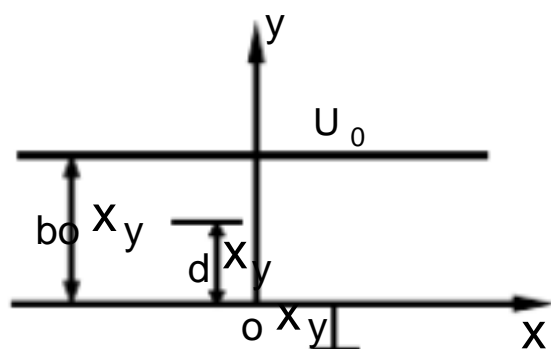
其中， $\varphi_1(x, y)$ 为不存在薄片的平行无限大导体平面间（电压为

U_0 ）的电位，即 $\varphi_1(x, y) = U_0 y/b$ ； $\varphi_2(x, y)$ 是两个电位为零的平行导体板间有导体薄片时的电位，其边界条件为：

$$\varphi_2(x, 0) = \varphi_2(x, b) = 0$$

$$\varphi_2(x, y) = 0 \quad (x \rightarrow \pm\infty)$$

$$\varphi_2(0, y) = \varphi(0, y) - \varphi_1(0, y) = \begin{cases} U_0 - \frac{U_0}{b} y & (0 \leq y \leq d) \\ \frac{U_0}{d} y - \frac{U_0}{b} y & (d \leq y \leq b) \end{cases}$$



题 4.2 图

根据条件 和 , 可设 $\varphi_2(x, y)$ 的通解为 $\varphi_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\frac{n\pi}{b}|x|}$

由条件 有
$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = \begin{cases} U_0 - \frac{U_0}{b} y & (0 \leq y \leq d) \\ U_0 \frac{y-d}{d} - \frac{U_0}{b} y & (d \leq y \leq b) \end{cases}$$

两边同乘以 $\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$, 并从 0 到 b 对 y 积分, 得到

$$A_n = \frac{2U_0}{b} \int_0^d \left(1 - \frac{y}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy + \frac{2U_0}{b} \int_d^b \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{b}\right) y \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy = \frac{2U_0}{(n\pi)^2} \frac{b}{d} \sin\left(\frac{n\pi d}{b}\right)$$

故得到 $\varphi(x, y) = \frac{U_0}{b} y + \frac{2bU_0}{d\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi d}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{-\frac{n\pi}{b}|x|}$

4.3 求在上题的解中, 除开 $U_0 y/b$ 一项外, 其他所有项对电场总储能的贡献。并按

$C_f = \frac{2W_e}{U_0^2}$ 定出边缘电容。

解 在导体板 ($y=0$) 上, 相应于 $\varphi_2(x, y)$ 的电荷面密度

$$\sigma_2 = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right|_{y=0} = -\frac{2\epsilon_0 U_0}{\pi d} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi d}{b}\right) e^{-\frac{n\pi}{b}|x|}$$

则导体板上 (沿 z 方向单位长) 相应的总电荷

$$q_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_2 dx = 2 \int_0^{\infty} \sigma_2 dx = -2 \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\epsilon_0 U_0}{\pi d} \sin\left(\frac{n\pi d}{b}\right) e^{-\frac{n\pi}{b}x} dx = -\frac{4\epsilon_0 U_0 b}{\pi^2 d} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi d}{b}\right)$$

相应的电场储能为 $W_e = \frac{1}{2} q_2 U_0 = -\frac{2\epsilon_0 b U_0^2}{\pi^2 d} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi d}{b}\right)$

其边缘电容为 $C_f = \frac{2W_e}{U_0^2} = \frac{4\epsilon_0 b}{\pi^2 d} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi d}{b}\right)$

4.4 如题 4.4 图所示的导体槽, 底面保持电位 U_0 , 其余两面电位为零, 求槽内的电位的解。

解 根据题意, 电位 $\varphi(x, y)$ 满足的边界条件为

$$\varphi(0, y) = \varphi(a, y) = 0$$

$$\varphi(x, y) \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow \infty)$$

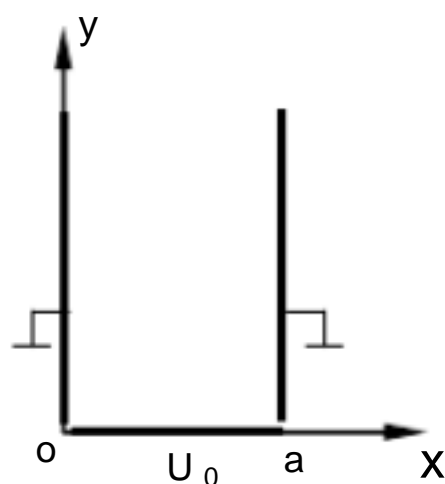
$$\varphi(x, 0) = U_0$$

根据条件 和 , 电位 $\varphi(x, y)$ 的通解应取为

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n\pi y/a} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

由条件 , 有

$$U_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$



题 4.4 图 a

两边同乘以 $\sin(\frac{n\pi x}{a})$ ，并从 0 到 a 对 x 积分，得到

$$A_n = \frac{2U_0}{a} \int_0^a \sin(\frac{n\pi x}{a}) dx = \frac{2U_0}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} \frac{4U_0}{n\pi}, & n=1,3,5,\dots \\ 0, & n=2,4,6,\dots \end{cases}$$

故得到槽内的电位分布为 $\varphi(x,y) = \frac{4U_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n} e^{-n\pi y/a} \sin(\frac{n\pi x}{a})$

4.5 一长、宽、高分别为 a、b、c 的长方体表面保持零电位，体积内填充密度为

$$\rho = y(y-b)\sin(\frac{\pi x}{a})\sin(\frac{\pi z}{c})$$

的电荷。求体积内的电位 φ 。

解 在体积内，电位 φ 满足泊松方程

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} y(y-b)\sin(\frac{\pi x}{a})\sin(\frac{\pi z}{c}) \quad (1)$$

长方体表面 S 上，电位 φ 满足边界条件 $\varphi|_S = 0$ 。由此设电位 φ 的通解为

$$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} A_{mnp} \sin(\frac{m\pi x}{a}) \sin(\frac{n\pi y}{b}) \sin(\frac{p\pi z}{c})$$

代入泊松方程 (1)，可得

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} A_{mnp} \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{c}\right)^2 \right] \times \sin(\frac{m\pi x}{a}) \sin(\frac{n\pi y}{b}) \sin(\frac{p\pi z}{c}) = y(y-b)\sin(\frac{\pi x}{a})\sin(\frac{\pi z}{c})$$

由此可得

$$\begin{aligned} A_{mnp} &= 0 \quad (m \neq 1 \text{ 或 } p \neq 1) \\ \sum_{p=1}^{\infty} A_{1n1} \left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{c}\right)^2 \right] \sin(\frac{n\pi y}{b}) &= y(y-b) \end{aligned} \quad (2)$$

由式 (2)，可得

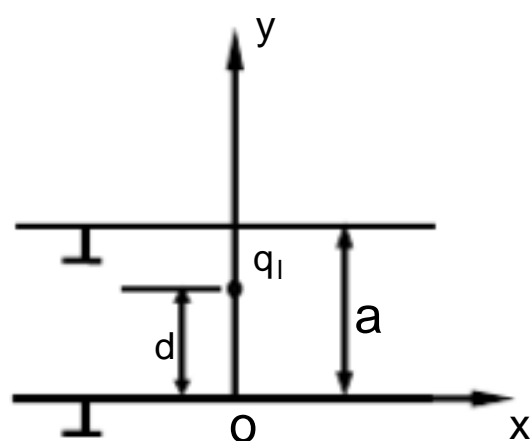
$$A_{1n1} \left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{c}\right)^2 \right] = \frac{2}{b} \int_0^b y(y-b) \sin(\frac{n\pi y}{b}) dy = \frac{4}{b} \left(\frac{b}{n\pi}\right)^3 (\cos n\pi - 1) = \begin{cases} -\frac{8b^2}{(n\pi)^3} & n=1,3,5,\dots \\ 0 & n=2,4,6,\dots \end{cases}$$

故 $\varphi(x,y,z) = -\frac{8b^2}{\pi^5 \epsilon_0} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^3 \left[\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2 \right]^2} \sin(\frac{\pi x}{a}) \sin(\frac{n\pi y}{b}) \sin(\frac{\pi z}{c})$

4.6 如题 4.6 图所示的一对无限大接地平行导体板，板间有一与 z 轴平行的线电荷 q_l ，其位置为 (0, d)。求板间的电位函数。

解 由于在 $(0, d)$ 处有一与 z 轴平行的线电荷 q_l ，以 $x = 0$ 为界将场空间分割为 $x > 0$ 和 $x < 0$ 两个区域，则这两个区域中的电位 $\varphi_1(x, y)$ 和 $\varphi_2(x, y)$ 都满足拉普拉斯方程。而在 $x = 0$ 的分界面上，可利用 δ 函数将线电荷 q_l 表示成电荷面密度 $\sigma(y) = q_l \delta(y - d)$ 。

电位的边界条件为



题 4.6 图

$$\varphi_1(x, 0) = \varphi_1(x, a) = 0$$

$$\varphi_2(x, 0) = \varphi_2(x, a) = 0$$

$$\varphi_1(x, y) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty)$$

$$\varphi_2(x, y) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow -\infty)$$

$$\varphi_1(0, y) = \varphi_2(0, y)$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = -\frac{q_l}{\epsilon_0} \delta(y - d)$$

由条件 和 ，可设电位函数的通解为

$$\varphi_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n\pi x/a} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \quad (x > 0)$$

$$\varphi_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{n\pi x/a} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \quad (x < 0)$$

由条件 ，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \quad (1)$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{n\pi}{a} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi}{a} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) = \frac{q_l}{\epsilon_0} \delta(y - d) \quad (2)$$

由式 (1)，可得

$$A_n = B_n \quad (3)$$

将式 (2) 两边同乘以 $\sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right)$ ，并从 0 到 a 对 y 积分，有

$$A_n + B_n = \frac{2q_l}{n\pi\epsilon_0} \int_0^a \delta(y - d) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) dy = \frac{2q_l}{n\pi\epsilon_0} \sin\left(\frac{n\pi d}{a}\right) \quad (4)$$

由式 (3) 和 (4) 解得

$$A_n = B_n = \frac{q_l}{n\pi\epsilon_0} \sin\left(\frac{n\pi d}{a}\right)$$

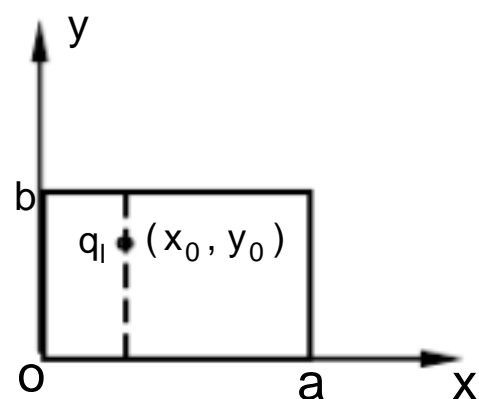
故

$$\varphi_1(x, y) = \frac{q_l}{\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi d}{a}\right) e^{-n\pi x/a} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \quad (x > 0)$$

$$\varphi_2(x, y) = \frac{q_l}{\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi d}{a}\right) e^{n\pi x/a} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

($x < 0$)

4.7 如题 4.7 图所示的矩形导体槽的电位为零，槽中有一与槽平行的线电荷 q_l 。求槽内的电位函数。



题 4.7 图

解 由于在 (x_0, y_0) 处有一与 z 轴平行的线电荷 q_l ，以 $x = x_0$ 为界将场空间分割为 $0 < x < x_0$ 和 $x_0 < x < a$ 两个区域，则这两个区域中的电位 $\varphi_1(x, y)$ 和 $\varphi_2(x, y)$ 都满足拉普拉斯方程。而在 $x = x_0$ 的分界面上，可利用 δ 函数将线电荷 q_l 表示成电荷面密度 $\sigma(y) = q_l \delta(y - y_0)$ ，电位的边界条件为

$$\varphi_1(0, y) = \varphi_2(a, y) = 0$$

$$\varphi_1(x, 0) = \varphi_1(x, b) = 0$$

$$\varphi_2(x, 0) = \varphi_2(x, b) = 0$$

$$\varphi_1(x_0, y) = \varphi_2(x_0, y)$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_0} = -\frac{q_l}{\epsilon_0} \delta(y - y_0)$$

由条件 和 ，可设电位函数的通解为

$$\varphi_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \quad (0 < x < x_0)$$

$$\varphi_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sinh\left[\frac{n\pi}{b}(a - x)\right] \quad (x_0 < x < a)$$

由条件 ，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sinh\left(\frac{n\pi x_0}{b}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sinh\left[\frac{n\pi}{b}(a - x_0)\right] \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cosh\left(\frac{n\pi x_0}{b}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cosh\left[\frac{n\pi}{b}(a - x_0)\right] = \frac{q_l}{\epsilon_0} \delta(y - y_0) \quad (2)$$

由式 (1)，可得

$$A_n \sinh\left(\frac{n\pi x_0}{b}\right) - B_n \sinh\left[\frac{n\pi}{b}(a - x_0)\right] = 0 \quad (3)$$

将式 (2) 两边同乘以 $\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$ ，并从 0 到 b 对 y 积分，有

$$A_n \cosh\left(\frac{n\pi x_0}{b}\right) + B_n \cosh\left[\frac{n\pi}{b}(a - x_0)\right] = \frac{2q_l}{n\pi\epsilon_0} \int_0^b \delta(y - y_0) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy = \frac{2q_l}{n\pi\epsilon_0} \sin\left(\frac{n\pi y_0}{b}\right) \quad (4)$$

由式 (3) 和 (4) 解得

$$A_n = \frac{2q_l}{\sinh(n\pi a/b)} \frac{1}{n\pi\epsilon_0} \sinh\left[\frac{n\pi}{b}(a - x_0)\right] \sin\left(\frac{n\pi y_0}{b}\right)$$

$$B_n = \frac{2q_l}{\sinh(n\pi a/b)} \frac{1}{n\pi\epsilon_0} \sinh\left(\frac{n\pi x_0}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y_0}{b}\right)$$

故

$$\varphi_1(x, y) = \frac{2q_l}{\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sinh(n\pi a/b)} \sinh\left[\frac{n\pi}{b}(a-x_0)\right] \sin\left(\frac{n\pi y_0}{b}\right) \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (0 < x < x_0)$$

$$\varphi_2(x, y) = \frac{2q_l}{\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sinh(n\pi a/b)} \sinh\left(\frac{n\pi x_0}{b}\right) \sin\left(\frac{n\pi y_0}{b}\right) \sinh\left[\frac{n\pi}{b}(a-x)\right] \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (x_0 < x < a)$$

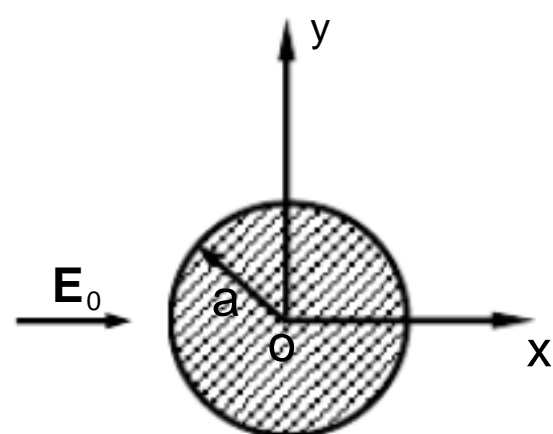
若以 $y = y_0$ 为界将场空间分割为 $0 < y < y_0$ 和 $y_0 < y < b$ 两个区域，则可类似地得到

$$\varphi_1(x, y) = \frac{2q_l}{\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sinh(n\pi b/a)} \sinh\left[\frac{n\pi}{a}(b-y_0)\right] \sin\left(\frac{n\pi x_0}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad (0 < y < y_0)$$

$$\varphi_2(x, y) = \frac{2q_l}{\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sinh(n\pi b/a)} \sinh\left(\frac{n\pi y_0}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x_0}{a}\right) \sinh\left[\frac{n\pi}{a}(b-y)\right] \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad (y_0 < y < b)$$

4.8 如题 4.8 图所示，在均匀电场 $\mathbf{E}_0 = \mathbf{e}_x E_0$ 中垂直于电场方向放置一根无限长导体圆柱，圆柱的半径为 a 。求导体圆柱外的电位 φ 和电场 \mathbf{E} 以及导体表面的感应电荷密度 σ 。

解 在外电场 \mathbf{E}_0 作用下，导体表面产生感应电荷，圆柱外的电位是外电场 \mathbf{E}_0 的电位 φ_0 与感应电荷的电位 φ_{in} 的叠加。由于导体圆柱为无限长，所以电位与变量 z 无关。在圆柱面坐标系中，外电场的电位为 $\varphi_0(r, \phi) = -E_0 x + C = -E_0 r \cos\phi + C$ （常数 C 的值由参考点确定），而感应电荷的电位 $\varphi_{in}(r, \phi)$ 应与 $\varphi_0(r, \phi)$ 一样按 $\cos\phi$ 变化，而且在无限远处为 0。由于导体是等位体，所以 $\varphi(r, \phi)$ 满足的边界条件为



题 4.8 图

$$\varphi(a, \phi) = C$$

$$\varphi(r, \phi) \rightarrow -E_0 r \cos\phi + C \quad (r \rightarrow \infty)$$

$$\text{由此可设 } \varphi(r, \phi) = -E_0 r \cos\phi + A_1 r^{-1} \cos\phi + C$$

$$\text{由条件，有 } -E_0 a \cos\phi + A_1 a^{-1} \cos\phi + C = C$$

$$\text{于是得到 } A_1 = a^2 E_0$$

故圆柱外的电位为

$$\varphi(r, \phi) = (-r + a^2 r^{-1}) E_0 \cos\phi + C$$

若选择导体圆柱表面为电位参考点，即 $\varphi(a, \phi) = 0$ ，则 $C = 0$ 。

导体圆柱外的电场则为

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi(r, \phi) = -\mathbf{e}_r \frac{\partial\varphi}{\partial r} - \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\phi} = -\mathbf{e}_r \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) E_0 \cos\phi + \mathbf{e}_\phi \left(-1 + \frac{a^2}{r^2}\right) E_0 \sin\phi$$

导体圆柱表面的电荷面密度为

$$\sigma = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial\varphi(r, \phi)}{\partial r} \right|_{r=a} = 2\epsilon_0 E_0 \cos\phi$$

4.9 在介电常数为 ε 的无限大的介质中，沿 z 轴方向开一个半径为 a 的圆柱形空腔。沿 x 轴方向外加一均匀电场 $\mathbf{E}_0 = \mathbf{e}_x E_0$ ，求空腔内和空腔外的电位函数。

解 在电场 \mathbf{E}_0 的作用下，介质产生极化，空腔表面形成极化电荷，空腔内、外的电场 \mathbf{E} 为外加电场 \mathbf{E}_0 与极化电荷的电场 \mathbf{E}_p 的叠加。外电场的电位为 $\varphi_0(r, \phi) = -E_0 x = -E_0 r \cos \phi$ 而感应电荷的电位 $\varphi_{in}(r, \phi)$ 应与 $\varphi_0(r, \phi)$ 一样按 $\cos \phi$ 变化，则空腔内、外的电位分别为 $\varphi_1(r, \phi)$ 和 $\varphi_2(r, \phi)$ 的边界条件为

$$r \rightarrow \infty \text{ 时, } \varphi_2(r, \phi) \rightarrow -E_0 r \cos \phi ;$$

$$r = 0 \text{ 时, } \varphi_1(r, \phi) \text{ 为有限值 ;}$$

$$r = a \text{ 时, } \varphi_1(a, \phi) = \varphi_2(a, \phi), \quad \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \varepsilon \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}$$

由条件 和 , 可设

$$\varphi_1(r, \phi) = -E_0 r \cos \phi + A_1 r \cos \phi \quad (r \leq a)$$

$$\varphi_2(r, \phi) = -E_0 r \cos \phi + A_2 r^{-1} \cos \phi \quad (r \geq a)$$

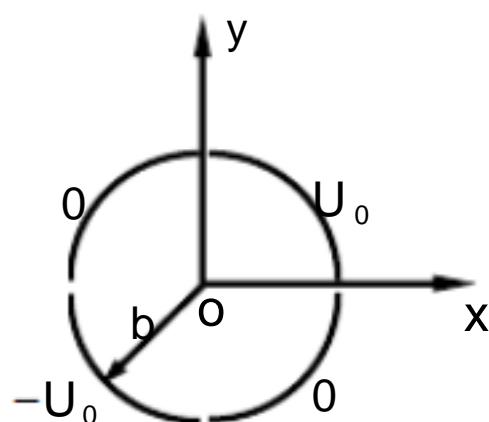
带入条件 , 有 $A_1 a = A_2 a^{-1}, -\varepsilon_0 E_0 + \varepsilon_0 A_1 = -\varepsilon E_0 - \varepsilon a^{-2} A_2$

由此解得 $A_1 = -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} E_0, \quad A_2 = -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} a^2 E_0$

所以 $\varphi_1(r, \phi) = -\frac{2\varepsilon}{\varepsilon + \varepsilon_0} E_0 r \cos \phi \quad (r \leq a)$

$$\varphi_2(r, \phi) = -\left[1 + \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} \left(\frac{a}{r}\right)^2\right] E_0 r \cos \phi \quad (r \geq a)$$

4.10 一个半径为 b 、无限长的薄导体圆柱面被分割成四个四分之一圆柱面，如题 4.10 图所示。第二象限和第四象限的四分之一圆柱面接地，第一象限和第三象限分别保持电位 U_0 和 $-U_0$ 。求圆柱面内部的电位函数。



题 4.10 图

解 由题意可知，圆柱面内部的电位函数满足边界条件为

$$\varphi(0, \phi) \text{ 为有限值 ;}$$

$$\varphi(b, \phi) = \begin{cases} U_0 & 0 < \phi < \pi/2 \\ 0 & \pi/2 < \phi < \pi \\ -U_0 & \pi < \phi < 3\pi/2 \\ 0 & 3\pi/2 < \phi < 2\pi \end{cases} ;$$

由条件 可知，圆柱面内部的电位函数的通解为

$$\varphi(r, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \sin n\phi + B_n \cos n\phi) \quad (r \leq b)$$

代入条件 , 有 $\sum_{n=1}^{\infty} b^n (A_n \sin n\phi + B_n \cos n\phi) = \varphi(b, \phi)$

由此得到

$$A_n = \frac{1}{b^n \pi} \int_0^{2\pi} \varphi(b, \phi) \sin n\phi d\phi = \frac{1}{b^n \pi} \left[\int_0^{\pi^2} U_0 \sin n\phi d\phi - \int_{\pi}^{3\pi^2} U_0 \sin n\phi d\phi \right] = \frac{U_0}{b^n n\pi} (1 - \cos n\pi) =$$

$$\begin{cases} \frac{2U_0}{n\pi b^n}, & n=1,3,5,\cdots \\ 0, & n=2,4,6,\cdots \end{cases}$$

$$B_n = \frac{1}{b^n \pi} \int_0^{2\pi} \varphi(b, \phi) \cos n\phi d\phi = \frac{1}{b^n \pi} \left[\int_0^{\pi^2} U_0 \cos n\phi d\phi - \int_{\pi}^{3\pi^2} U_0 \cos n\phi d\phi \right] =$$

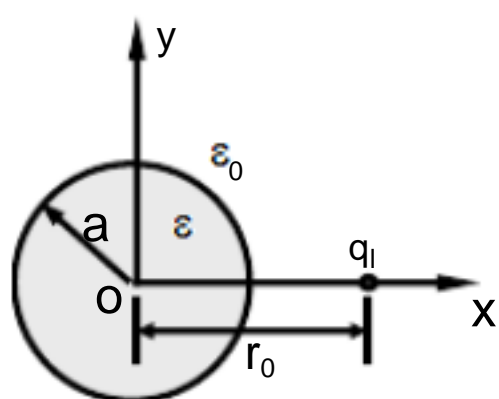
$$\frac{U_0}{b^n n\pi} \left(\sin \frac{n\pi}{2} - \sin \frac{3n\pi}{2} \right) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{2U_0}{n\pi b^n}, & n=1,3,5,\cdots \\ 0, & n=2,4,6,\cdots \end{cases}$$

故
$$\varphi(r, \phi) = \frac{2U_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{b}\right)^n [\sin n\phi + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos n\phi] \quad (r \leq b)$$

4.11 如题 4.11 图所示，一无限长介质圆柱的半径为 a 、介电常数为 ϵ ，在距离轴线 r_0 ($r_0 > a$) 处，有一与圆柱平行的线电荷 q_l ，计算空间各部分的电位。

解 在线电荷 q_l 作用下，介质圆柱产生极化，介质圆柱内外的电位 $\varphi(r, \phi)$ 均为线电荷 q_l 的电位 $\varphi_l(r, \phi)$ 与极化电荷的电位 $\varphi_p(r, \phi)$ 的叠加，即 $\varphi(r, \phi) = \varphi_l(r, \phi) + \varphi_p(r, \phi)$ 。线电荷 q_l 的电位为

$$\varphi_l(r, \phi) = -\frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \ln R = -\frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \phi} \quad (1)$$



题 4.11 图

而极化电荷的电位 $\varphi_p(r, \phi)$ 满足拉普拉斯方程，且是 ϕ 的偶函数。

介质圆柱内外的电位 $\varphi_1(r, \phi)$ 和 $\varphi_2(r, \phi)$ 满足的边界条件为分别为

$\varphi_1(0, \phi)$ 为有限值；

$\varphi_2(r, \phi) \rightarrow \varphi_l(r, \phi) \quad (r \rightarrow \infty)$

$$r = a \text{ 时, } \varphi_1 = \varphi_2, \quad \epsilon \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \epsilon_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}$$

由条件和可知， $\varphi_1(r, \phi)$ 和 $\varphi_2(r, \phi)$ 的通解为

$$\varphi_1(r, \phi) = \varphi_l(r, \phi) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \cos n\phi \quad (0 \leq r \leq a) \quad (2)$$

$$\varphi_2(r, \phi) = \varphi_l(r, \phi) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n r^{-n} \cos n\phi \quad (a \leq r < \infty) \quad (3)$$

将式 (1) ~ (3) 代入条件，可得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n a^n \cos n\phi = \sum_{n=1}^{\infty} B_n a^{-n} \cos n\phi \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_n \epsilon n a^{n-1} + B_n \epsilon_0 n a^{-n-1}) \cos n\phi = (\epsilon - \epsilon_0) \frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \frac{\partial \ln R}{\partial r} \Big|_{r=a} \quad (5)$$

当 $r < r_0$ 时, 将 $\ln R$ 展开为级数, 有 $\ln R = \ln r_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos n\phi$ (6)

带入式 (5), 得 $\sum_{n=1}^{\infty} (A_n \epsilon_n a^{n-1} + B_n \epsilon_0 n a^{-n-1}) \cos n\phi = -\frac{(\epsilon - \epsilon_0) q_l}{2\pi \epsilon_0 r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r_0}\right)^{n-1} \cos n\phi$ (7)

由式 (4) 和 (7), 有 $A_n a^n = B_n a^{-n}$

$$A_n \epsilon_n a^{n-1} + B_n \epsilon_0 n a^{-n-1} = -\frac{(\epsilon - \epsilon_0) q_l}{2\pi \epsilon_0 r_0} \left(\frac{a}{r_0}\right)^{n-1}$$

由此解得 $A_n = -\frac{q_l (\epsilon - \epsilon_0)}{2\pi \epsilon_0 (\epsilon + \epsilon_0)} \frac{1}{n r_0^n}$, $B_n = -\frac{q_l (\epsilon - \epsilon_0)}{2\pi \epsilon_0 (\epsilon + \epsilon_0)} \frac{a^{2n}}{n r_0^n}$

故得到圆柱内、外的电位分别为

$$\phi_1(r, \phi) = -\frac{q_l}{2\pi \epsilon_0} \ln \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \phi} - \frac{q_l (\epsilon - \epsilon_0)}{2\pi \epsilon_0 (\epsilon + \epsilon_0)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos n\phi \quad (8)$$

$$\phi_2(r, \phi) = -\frac{q_l}{2\pi \epsilon_0} \ln \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \phi} - \frac{q_l (\epsilon - \epsilon_0)}{2\pi \epsilon_0 (\epsilon + \epsilon_0)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{a^2}{r_0 r}\right)^n \cos n\phi \quad (9)$$

讨论: 利用式 (6), 可将式 (8) 和 (9) 中得第二项分别写成为

$$-\frac{q_l (\epsilon - \epsilon_0)}{2\pi \epsilon_0 (\epsilon + \epsilon_0)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos n\phi = \frac{q_l (\epsilon - \epsilon_0)}{2\pi \epsilon_0 (\epsilon + \epsilon_0)} (\ln R - \ln r_0)$$

$$-\frac{q_l (\epsilon - \epsilon_0)}{2\pi \epsilon_0 (\epsilon + \epsilon_0)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{a^2}{r_0 r}\right)^n \cos n\phi = \frac{q_l (\epsilon - \epsilon_0)}{2\pi \epsilon_0 (\epsilon + \epsilon_0)} (\ln R' - \ln r)$$

其中 $R' = \sqrt{r^2 + (a^2/r_0)^2 - 2r(a^2/r_0) \cos \phi}$ 。因此可将 $\phi_1(r, \phi)$ 和 $\phi_2(r, \phi)$ 分别写成为

$$\phi_1(r, \phi) = -\frac{1}{2\pi \epsilon_0} \frac{2\epsilon_0 q_l}{\epsilon + \epsilon_0} \ln R - \frac{q_l (\epsilon - \epsilon_0)}{2\pi \epsilon_0 (\epsilon + \epsilon_0)} \ln r_0$$

$$\phi_2(r, \phi) = -\frac{q_l}{2\pi \epsilon_0} \ln R - \frac{1}{2\pi \epsilon_0} \frac{-(\epsilon - \epsilon_0) q_l}{\epsilon + \epsilon_0} \ln R' - \frac{1}{2\pi \epsilon_0} \frac{(\epsilon - \epsilon_0) q_l}{\epsilon + \epsilon_0} \ln r$$

由所得结果可知, 介质圆柱内的电位与位于 $(r_0, 0)$ 的线电荷 $\frac{2\epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0} q_l$ 的电位相同, 而介

质圆柱外的电位相当于三根线电荷所产生, 它们分别为: 位于 $(r_0, 0)$ 的线电荷 q_l ; 位于 $(\frac{a^2}{r_0}, 0)$

的线电荷 $-\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0} q_l$; 位于 $r = 0$ 的线电荷 $\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0} q_l$ 。

4.12 将上题的介质圆柱改为导体圆柱, 重新计算。

解 导体圆柱内的电位为常数, 导体圆柱外的电位 $\phi(r, \phi)$ 均为线电荷 q_l 的电位 $\phi_l(r, \phi)$ 与感应电荷的电位 $\phi_{in}(r, \phi)$ 的叠加, 即 $\phi(r, \phi) = \phi_l(r, \phi) + \phi_{in}(r, \phi)$ 。线电荷 q_l 的电位为

$$\varphi_l(r, \phi) = -\frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \ln R = -\frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \phi} \quad (1)$$

而感应电荷的电位 $\varphi_{in}(r, \phi)$ 满足拉普拉斯方程，且是 ϕ 的偶函数。

$\varphi(r, \phi)$ 满足的边界条件为

$$\varphi(r, \phi) \rightarrow \varphi_l(r, \phi) \quad (r \rightarrow \infty);$$

$$\varphi(a, \phi) = C。$$

由于电位分布是 ϕ 的偶函数，并由条件可知， $\varphi(r, \phi)$ 的通解为

$$\varphi(r, \phi) = \varphi_l(r, \phi) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^{-n} \cos n\phi \quad (2)$$

将式(1)和(2)代入条件，可得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n a^{-n} \cos n\phi = C + \frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos \phi} \quad (3)$$

将 $\ln \sqrt{a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos \phi}$ 展开为级数，有

$$\ln \sqrt{a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos \phi} = \ln r_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{a}{r_0}\right)^n \cos n\phi \quad (4)$$

带入式(3)，得

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n a^{-n} \cos n\phi = C + \frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln r_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{a}{r_0}\right)^n \cos n\phi \right] \quad (5)$$

由此可得 $A_0 = C + \frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \ln r_0, \quad A_n = -\frac{q_l}{2\pi\epsilon_0 n} \left(\frac{a^2}{r_0}\right)^n$

故导体圆柱外的电为

$$\begin{aligned} \varphi(r, \phi) = & -\frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \phi} + \\ & (C + \frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \ln r_0) - \frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{a^2}{r_0 r}\right)^n \cos n\phi \end{aligned} \quad (6)$$

讨论：利用式(4)，可将式(6)中的第二项写成为

$$-\frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{a^2}{r_0 r}\right)^n \cos n\phi = \frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} (\ln R' - \ln r)$$

其中 $R' = \sqrt{r^2 + (a^2/r_0)^2 - 2r(a^2/r_0) \cos \phi}$ 。因此可将 $\varphi(r, \phi)$ 写成为

$$\varphi(r, \phi) = -\frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \ln R + \frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \ln R' - \frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \ln r + C + \frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \ln r_0$$

由此可见，导体圆柱外的电位相当于三根线电荷所产生，它们分别为：位于 $(r_0, 0)$ 的线电荷 q_l ；

位于 $(\frac{a^2}{r_0}, 0)$ 的线电荷 $-q_l$ ；位于 $r=0$ 的线电荷 q_l 。

4.13 在均匀外电场 $\mathbf{E}_0 = \mathbf{e}_z E_0$ 中放入半径为 a 的导体球，设(1)导体充电至 U_0 ；(2)导

体上充有电荷 Q 。试分别计算两种情况下球外的电位分布。

解 (1) 这里导体充电至 U_0 应理解为未加外电场 E_0 时导体球相对于无限远处的电位为 U_0 ，此时导体球面上的电荷密度 $\sigma = \epsilon_0 U_0 / a$ ，总电荷 $q = 4\pi\epsilon_0 a U_0$ 。将导体球放入均匀外电场 E_0 中后，在 E_0 的作用下，产生感应电荷，使球面上的电荷密度发生变化，但总电荷 q 仍保持不变，导体球仍为等位体。

设 $\varphi(r, \theta) = \varphi_0(r, \theta) + \varphi_{in}(r, \theta)$ ，其中

$$\varphi_0(r, \theta) = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta$$

是均匀外电场 E_0 的电位， $\varphi_{in}(r, \theta)$ 是导体球上的电荷产生的电位。

电位 $\varphi(r, \theta)$ 满足的边界条件为

$$r \rightarrow \infty \text{ 时, } \varphi(r, \theta) \rightarrow -E_0 r \cos \theta ;$$

$$r = a \text{ 时, } \varphi(a, \theta) = C_0, \quad -\epsilon_0 \oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial r} dS = q$$

其中 C_0 为常数，若适当选择 $\varphi(r, \theta)$ 的参考点，可使 $C_0 = U_0$ 。

由条件，可设 $\varphi(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + A r^{-2} \cos \theta + B_1 r^{-1} + C_1$

代入条件，可得到 $A_1 = a^3 E_0$ ， $B_1 = a U_0$ ， $C_1 = C_0 - U_0$

若使 $C_0 = U_0$ ，可得到 $\varphi(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + a^3 E_0 r^{-2} \cos \theta + a U_0 r^{-1}$

(2) 导体上充电荷 Q 时，令 $Q = 4\pi\epsilon_0 a U_0$ ，有 $U_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$

利用 (1) 的结果，得到 $\varphi(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + a^3 E_0 r^{-2} \cos \theta + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$

4.14 如题 4.14 图所示，无限大的介质中外加均匀电场 $E_0 = e_z E_0$ ，在介质中有一个半径为 a 的球形空腔。求空腔内、外的电场 E 和空腔表面的极化电荷密度（介质的介电常数为 ϵ ）。

解 在电场 E_0 的作用下，介质产生极化，空腔表面形成极化电荷，空腔内、外的电场 E 为外加电场 E_0 与极化电荷的电场 E_p 的叠加。设空腔内、外的电位分别为 $\varphi_1(r, \theta)$ 和 $\varphi_2(r, \theta)$ ，则边界条件为

$$r \rightarrow \infty \text{ 时, } \varphi_2(r, \theta) \rightarrow -E_0 r \cos \theta ;$$

$$r = 0 \text{ 时, } \varphi_1(r, \theta) \text{ 为有限值；}$$

$$r = a \text{ 时, } \varphi_1(a, \theta) = \varphi_2(a, \theta), \quad \epsilon_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \epsilon \frac{\partial \varphi_2}{\partial r}$$

由条件 和 ，可设

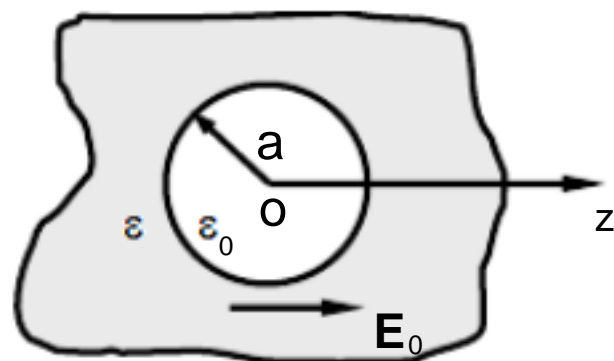
$$\varphi_1(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + A_1 r \cos \theta$$

$$\varphi_2(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + A_2 r^{-2} \cos \theta$$

带入条件，有

$$A_1 a = A_2 a^{-2}, \quad -\epsilon_0 E_0 + \epsilon_0 A_1 = -\epsilon E_0 - 2\epsilon a^{-3} A_2$$

由此解得 $A_1 = -\frac{\epsilon - \epsilon_0}{2\epsilon + \epsilon_0} E_0$ ， $A_2 = -\frac{\epsilon - \epsilon_0}{2\epsilon + \epsilon_0} a^3 E_0$



题 4.14 图

所以
$$\varphi_1(r, \theta) = -\frac{3\varepsilon}{2\varepsilon + \varepsilon_0} E_0 r \cos \theta$$

$$\varphi_2(r, \theta) = -\left[1 + \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2\varepsilon + \varepsilon_0} \left(\frac{a}{r}\right)^3\right] E_0 r \cos \theta$$

空腔内、外的电场为

$$\mathbf{E}_1 = -\nabla \varphi_1(r, \theta) = \frac{3\varepsilon}{2\varepsilon + \varepsilon_0} \mathbf{E}_0$$

$$\mathbf{E}_2 = -\nabla \varphi_2(r, \theta) = \mathbf{E}_0 - \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0) E_0}{2\varepsilon + \varepsilon_0} \left(\frac{a}{r}\right)^3 [\mathbf{e}_r 2\cos \theta + \mathbf{e}_\theta \sin \theta]$$

空腔表面的极化电荷面密度为

$$\sigma_p = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_2 \Big|_{r=a} = -(\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{E}_2 \Big|_{r=a} = -\frac{3\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)}{2\varepsilon + \varepsilon_0} E_0 \cos \theta$$

4.15 如题 4.15 图所示，空心导体球壳的内、外半径分别为 r_1 和 r_2 ，球的中心放置一个电偶极子 \mathbf{p} ，球壳上的电荷量为 Q 。试计算球内、外的电位分布和球壳上的电荷分布。

解 导体球壳将空间分割为内外两个区域，电偶极子 \mathbf{p} 在球壳内表面上引起感应电荷分布，但内表面上的感应电荷总量为零，因此球壳外表面上电荷总量为 Q ，且均匀分布在外表面上。

球壳外的场可由高斯定理求得为

$$\mathbf{E}_2(r) = \mathbf{e}_r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\varphi_2(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

外表面上的电荷面密度为
$$\sigma_2 = \frac{Q}{4\pi r_2^2}$$

设球内的电位为 $\varphi_1(r, \theta) = \varphi_p(r, \theta) + \varphi_{in}(r, \theta)$ ，其中

$$\varphi_p(r, \theta) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^2} P_1(\cos \theta)$$

是电偶极子 \mathbf{p} 的电位， $\varphi_{in}(r, \theta)$ 是球壳内表面上的感应电荷的电位。

$\varphi_{in}(r, \theta)$ 满足的边界条件为

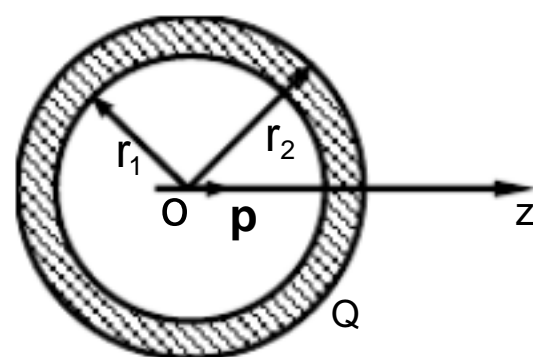
$\varphi_{in}(0, \theta)$ 为有限值；

$\varphi_1(r_1, \theta) = \varphi_2(r_2)$ ，即 $\varphi_{in}(r_1, \theta) + \varphi_p(r_1, \theta) = \varphi_2(r_2)$ ，所以

$$\varphi_{in}(r_1, \theta) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} - \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} P_1(\cos \theta)$$

由条件 可知 $\varphi_{in}(r, \theta)$ 的通解为
$$\varphi_{in}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta)$$

由条件 ，有
$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n r_1^n P_n(\cos \theta) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} - \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} P_1(\cos \theta)$$



题 4.15 图

比较两端 $P_n(\cos\theta)$ 的系数，得到

$$A_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_2}, \quad A_1 = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r_1^3},$$

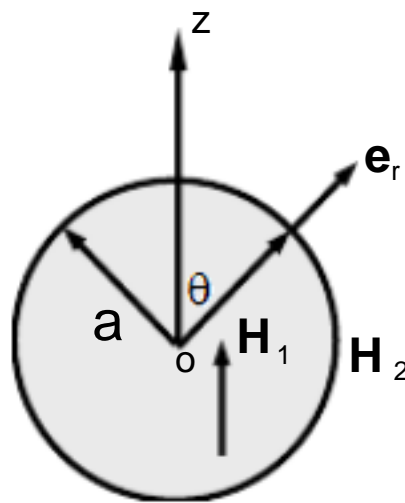
$$A_n = 0 \quad (n \geq 2)$$

最后得到
$$\varphi_1(r, \theta) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{r_1^3} \right) \cos\theta$$

球壳内表面上的感应电荷面密度为
$$\sigma_1 = -\epsilon_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \Big|_{r=r_1} = \epsilon_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = -\frac{3p}{4\pi r_1^3} \cos\theta$$

感应电荷的总量为
$$q_1 = \oint_S \sigma_1 dS = -\frac{3p}{4\pi r_1^3} \int_0^\pi \cos\theta \cdot 2\pi r_1^2 \sin\theta d\theta = 0$$

4.16 欲在一个半径为 a 的球上绕线圈使在球内产生均匀场，问线圈应如何绕（即求绕线的密度）？



解 设球内的均匀场为 $\mathbf{H}_1 = \mathbf{e}_z H_0$ ($r < a$)，球外的场为 \mathbf{H}_2 ($r > a$)，如题 4.16 图所示。根据边界条件，球面上的电流面密度为

$$\mathbf{J}_S = \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \Big|_{r=a} = \mathbf{e}_r \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{e}_z H_0) \Big|_{r=a} = \mathbf{e}_r \times \mathbf{H}_2 \Big|_{r=a} + \mathbf{e}_\theta H_0 \sin\theta$$

若令 $\mathbf{e}_r \times \mathbf{H}_2 \Big|_{r=a} = 0$ ，则得到球面上的电流面密度为 $\mathbf{J}_S = \mathbf{e}_\theta H_0 \sin\theta$ 。这表明球面上的绕线密度正比于 $\sin\theta$ ，则将在球内产生均匀场。

4.17 一个半径为 R 的介质球带有均匀极化强度 \mathbf{P} 。

题 4.16 图

(1) 证明：球内的电场是均匀的，等于 $-\frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0}$ ；

(2) 证明：球外的电场与一个位于球心的偶极子 $\mathbf{P}\tau$ 产生的电场相同， $\tau = \frac{4\pi R^3}{3}$ 。

解 (1) 当介质极化后，在介质中会形成极化电荷分布，本题中所求的电场即为极化电荷所产生的场。由于是均匀极化，介质球体内不存在极化电荷，仅在介质球面上有极化电荷面密度，球内、外的电位满足拉普拉斯方程，可用分离变量法求解。

建立如题 4.17 图所示的坐标系，则介质球面上的极化电荷面密度为

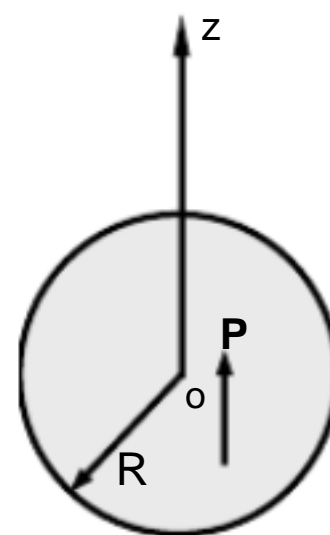
$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_r = P \cos\theta$$

介质球内、外的电位 φ_1 和 φ_2 满足的边界条件为

$$\begin{aligned} \varphi_1(0, \theta) &\text{ 为有限值；} \\ \varphi_2(r, \theta) &\rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty)； \\ \varphi_1(R, \theta) &= \varphi_2(R, \theta) \\ \epsilon_0 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} &= P \cos\theta \end{aligned}$$

因此，可设球内、外电位的通解为

$$\varphi_1(r, \theta) = A r \cos\theta$$



题 4.17 图

$$\varphi_2(r, \theta) = \frac{B_1}{r^2} \cos \theta$$

由条件 , 有 $A_1 R = \frac{B_1}{R^2}$, $\epsilon_0 (A_1 + \frac{2B_1}{R^3}) = P$

解得 $A_1 = \frac{P}{3\epsilon_0}$, $B_1 = \frac{PR^3}{3\epsilon_0}$

于是得到球内的电位 $\varphi_1(r, \theta) = \frac{P}{3\epsilon_0} r \cos \theta = \frac{P}{3\epsilon_0} z$

故球内的电场为 $\mathbf{E}_1 = -\nabla \varphi_1 = -\mathbf{e}_z \frac{P}{3\epsilon_0} = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}$

(2) 介质球外的电位为

$$\varphi_2(r, \theta) = \frac{PR^3}{3\epsilon_0 r^2} \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{4\pi R^3 P}{3} \cos \theta = \frac{P\tau}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta$$

其中 $\tau = \frac{4\pi R^3}{3}$ 为介质球的体积。故介质球外的电场为

$$\mathbf{E}_2 = -\nabla \varphi_2(r, \theta) = -\mathbf{e}_r \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} - \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} = \frac{P\tau}{4\pi\epsilon_0 r^3} (\mathbf{e}_r 2\cos \theta + \mathbf{e}_\theta \sin \theta)$$

可见介质球外的电场与一个位于球心的偶极子 $\mathbf{P}\tau$ 产生的电场相同。

4.18 半径为 a 的接地导体球，离球心 r_1 ($r_1 > a$) 处放置一个点电荷 q ，如题 4.18 图所示。用分离变量法求电位分布。

解 球外的电位是点电荷的电位与球面上感应电荷产生的电位的叠加，感应电荷的电位满足拉普拉斯方程。用分离变量法求解电位分布时，将点电荷的电位在球面上按勒让德多项式展开，即可由边界条件确定通解中的系数。

设 $\varphi(r, \theta) = \varphi_0(r, \theta) + \varphi_{in}(r, \theta)$ ，其中

$$\varphi_0(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos \theta}}$$

是点电荷 q 的电位， $\varphi_{in}(r, \theta)$ 是导体球上感应电荷产生的电位。

电位 $\varphi(r, \theta)$ 满足的边界条件为

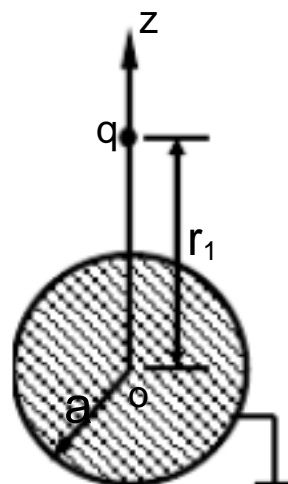
$$r \rightarrow \infty \text{ 时, } \varphi(r, \theta) \rightarrow 0 ;$$

$$r = a \text{ 时, } \varphi(a, \theta) = 0。$$

由条件 , 可得 $\varphi_{in}(r, \theta)$ 的通解为

$$\varphi_{in}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^{-n-1} P_n(\cos \theta)$$

为了确定系数 A_n ，利用 $1/R$ 的球坐标展开式



题 4.18 图

$$\frac{1}{R} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{r_1^{n+1}} P_n(\cos\theta) & (r \leq r_1) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_1^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta) & (r \geq r_1) \end{cases}$$

将 $\varphi_0(r, \theta)$ 在球面上展开为 $\varphi_0(a, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{r_1^{n+1}} P_n(\cos\theta)$

代入条件，有 $\sum_{n=0}^{\infty} A_n a^{n+1} P_n(\cos\theta) + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{r_1^{n+1}} P_n(\cos\theta) = 0$

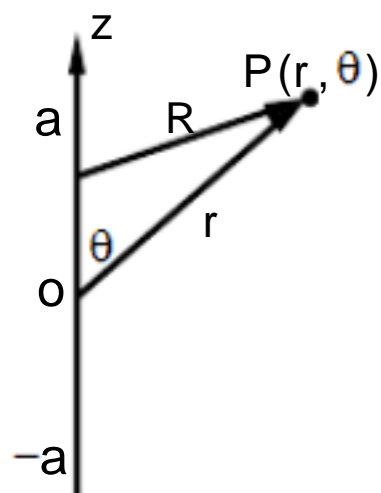
比较 $P_n(\cos\theta)$ 的系数，得到 $A_n = -\frac{qa^{2n+1}}{4\pi\epsilon_0 r_1^{n+1}}$

故得到球外的电位为 $\varphi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n+1}}{(r r_1)^{n+1}} P_n(\cos\theta)$

讨论：将 $\varphi(r, \theta)$ 的第二项与 $1/R$ 的球坐标展开式比较，可得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n+1}}{(r_1 r)^{n+1}} P_n(\cos\theta) = \frac{a/r_1}{\sqrt{r^2 + (a^2/r_1)^2 - 2r(a^2/r_1)\cos\theta}}$$

由此可见， $\varphi(r, \theta)$ 的第二项是位于 $r' = a^2/r_1$ 的一个点电荷 $q' = -qa/r_1$ 所产生的电位，此电荷正是球面上感应电荷的等效电荷，即像电荷。



题 4.19 图

4.19 一根密度为 q_l 、长为 $2a$ 的线电荷沿 z 轴放置，中心在原点上。证明：对于 $r > a$ 的点，有

$$\varphi(r, \theta) = \frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{a}{r} + \frac{a^3}{3r^3} P_2(\cos\theta) + \frac{a^5}{5r^5} P_4(\cos\theta) + \dots \right)$$

解 线电荷产生的电位为

$$\varphi(r, \theta) = \frac{q_l}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{1}{R} dz' = \frac{q_l}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{1}{\sqrt{r^2 + z'^2 - 2rz'\cos\theta}} dz'$$

对于 $r > a$ 的点，有

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + z'^2 - 2rz'\cos\theta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z')^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta)$$

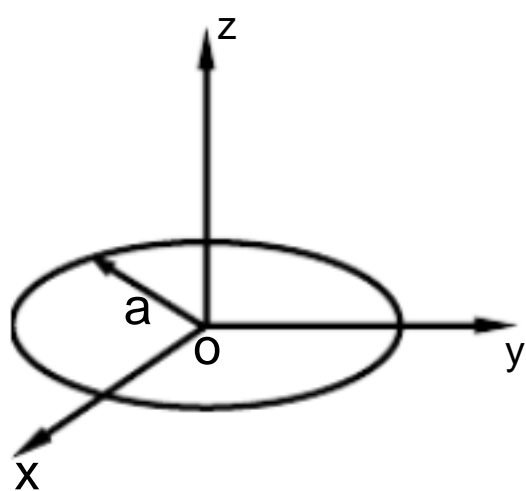
故得到

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) &= \frac{q_l}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-a}^a \frac{(z')^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta) dz' = \\ &= \frac{q_l}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \frac{a^{n+1} - (-a)^{n+1}}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta) = \frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{a}{r} + \frac{a^3}{3r^3} P_2(\cos\theta) + \frac{a^5}{5r^5} P_4(\cos\theta) + \dots \right) \end{aligned}$$

4.20 一个半径为 a 的细导线圆环，环与 xy 平面重合，中心在原点上，环上总电荷量为 Q ，如题 4.20 图所示。证明：空间任意点电位为

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{a} \right)^2 P_2(\cos\theta) + \frac{3}{8} \left(\frac{r}{a} \right)^4 P_4(\cos\theta) + \cdots \right] & (r \leq a) \\ \varphi_2 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 P_2(\cos\theta) + \frac{3}{8} \left(\frac{a}{r} \right)^4 P_4(\cos\theta) + \cdots \right] & (r \geq a)\end{aligned}$$

解 以细导线圆环所在的球面 $r = a$ 把场区分为两部分, 分别写出两个场域的通解, 并利用 δ 函数将细导线圆环上的线电荷 Q 表示成球面 $r = a$ 上的电荷面密度



题 4.20 图

$$\sigma = \frac{Q}{2\pi a^2} \delta(\cos\theta - \cos\frac{\pi}{2}) = \frac{Q}{2\pi a^2} \delta(\cos\theta)$$

再根据边界条件确定系数。

设球面 $r = a$ 内、外的电位分别为 $\varphi_1(r, \theta)$ 和 $\varphi_2(r, \theta)$, 则边界条件为:

$$\varphi_1(0, \theta) \text{ 为有限值;}$$

$$\varphi_2(r, \theta) \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty)$$

$$\varphi_1(a, \theta) = \varphi_2(a, \theta),$$

$$\epsilon_0 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right) \bigg|_{r=a} = \frac{Q}{2\pi a^2} \delta(\cos\theta)$$

根据条件 和 , 可得 $\varphi_1(r, \theta)$ 和 $\varphi_2(r, \theta)$ 的通解为

$$\varphi_1(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta) \quad (1)$$

$$\varphi_2(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-n-1} P_n(\cos\theta) \quad (2)$$

代入条件 , 有

$$A_n a^n = B_n a^{-n-1} \quad (3)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [A_n n a^{n-1} + B_n (n+1) a^{-n-2}] P_n(\cos\theta) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a^2} \delta(\cos\theta) \quad (4)$$

将式 (4) 两端同乘以 $P_m(\cos\theta) \sin\theta$, 并从 0 到 π 对 θ 进行积分, 得

$$\begin{aligned}A_n n a^{n-1} + B_n (n+1) a^{-n-2} &= \frac{(2n+1)Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \int_0^\pi \delta(\cos\theta) P_n(\cos\theta) \sin\theta d\theta = \\ &= \frac{(2n+1)Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} P_n(0)\end{aligned} \quad (5)$$

其中
$$P_n(0) = \begin{cases} 0 & n = 1, 3, 5, \cdots \\ (-1)^{n/2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots n} & n = 2, 4, 6, \cdots \end{cases}$$

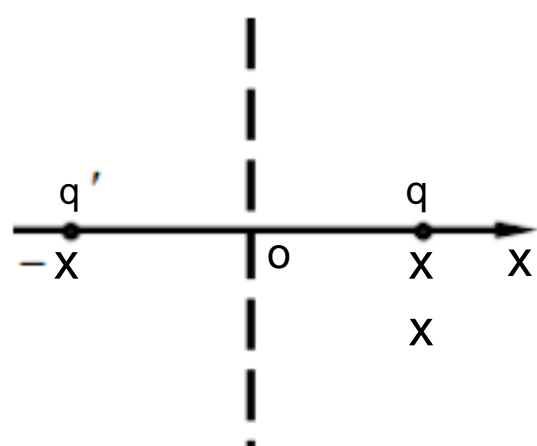
由式 (3) 和 (5), 解得
$$A_n = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^{n+1}} P_n(0), \quad B_n = \frac{Q a^n}{4\pi\epsilon_0} P_n(0)$$

代入式 (1) 和 (2), 即得到

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{a} \right)^2 P_2(\cos\theta) + \frac{3}{8} \left(\frac{r}{a} \right)^4 P_4(\cos\theta) + \dots \right] & (r \leq a) \\ \varphi_2 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 P_2(\cos\theta) + \frac{3}{8} \left(\frac{a}{r} \right)^4 P_4(\cos\theta) + \dots \right] & (r \geq a)\end{aligned}$$

4.21 一个点电荷 q 与无限大导体平面距离为 d ，如果把它移到无穷远处，需要作多少功？

解 利用镜像法求解。当点电荷 q 移动到距离导体平面为 x 的点 P 处时，其像电荷 $q' = -q$ ，与导体平面相距为 $x' = -x$ ，如题 4.21 图所示。像电荷 q' 在点 P 处产生的电场为



题 4.21 图

$$\mathbf{E}'(x) = \mathbf{e}_x \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 (2x)^2}$$

所以将点电荷 q 移到无穷远处时，电场所作的功为

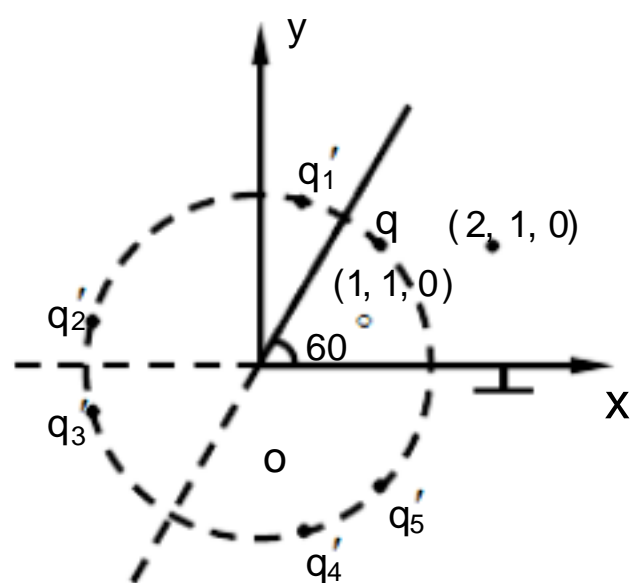
$$W_e = \int_d^\infty q \mathbf{E}'(x) \cdot d\mathbf{r} = \int_d^\infty \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0 (2x)^2} dx = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d}$$

外力所作的功为 $W_o = -W_e = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d}$

4.22 如题 4.22 图所示，一个点电荷 q 放在 60° 的接地导体角域内的点 $(1, 1, 0)$ 处。求：(1) 所有镜像电荷的位置和大小；(2) 点 $x = 2, y = 1$ 处的电位。

解 (1) 这是一个多重镜像的问题，共有 5 个像电荷，分布在以点电荷 q 到角域顶点的距离为半径的圆周上，并且关于导体平面对称，其电荷量的大小等于 q ，且正负电荷交错分布，其大小和位置分别为

$$\begin{aligned}q_1' &= -q, & \begin{cases} x_1' = \sqrt{2} \cos 75^\circ = 0.366 \\ y_1' = \sqrt{2} \sin 75^\circ = 1.366 \end{cases} \\ q_2' &= q, & \begin{cases} x_2' = \sqrt{2} \cos 165^\circ = -1.366 \\ y_2' = \sqrt{2} \sin 165^\circ = 0.366 \end{cases} \\ q_3' &= -q, & \begin{cases} x_3' = \sqrt{2} \cos 195^\circ = -1.366 \\ y_3' = \sqrt{2} \sin 195^\circ = -0.366 \end{cases} \\ q_4' &= q, & \begin{cases} x_4' = \sqrt{2} \cos 285^\circ = 0.366 \\ y_4' = \sqrt{2} \sin 285^\circ = -1.366 \end{cases} \\ q_5' &= -q, & \begin{cases} x_5' = \sqrt{2} \cos 315^\circ = 1 \\ y_5' = \sqrt{2} \sin 315^\circ = -1 \end{cases}\end{aligned}$$



题 4.22 图

(2) 点 $x = 2, y = 1$ 处电位

$$\varphi(2, 1, 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{R} + \frac{q_1'}{R_1} + \frac{q_2'}{R_2} + \frac{q_3'}{R_3} + \frac{q_4'}{R_4} + \frac{q_5'}{R_5} \right) =$$

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} (1 - 0.597 + 0.292 - 0.275 + 0.348 - 0.477) = \frac{0.321}{4\pi\epsilon_0} q = 2.88 \times 10^9 q \text{ (V)}$$

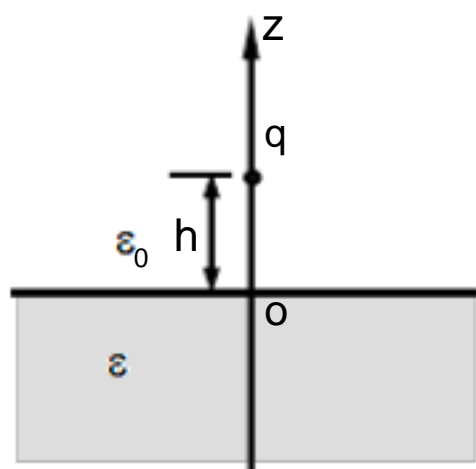
4.23 一个电荷量为 q 、质量为 m 的小带电体，放置在无限大导体平面下方，与平面相距为 h 。求 q 的值以使带电体上受到的静电力恰与重力相平衡（设 $m = 2 \times 10^{-3} \text{ kg}$ ， $h = 0.02 \text{ m}$ ）。

解 将小带电体视为点电荷 q ，导体平面上的感应电荷对 q 的静电力等于镜像电荷 q' 对 q 的作用力。根据镜像法可知，镜像电荷为 $q' = -q$ ，位于导体平面上方为 h 处，则小带电体 q 受到

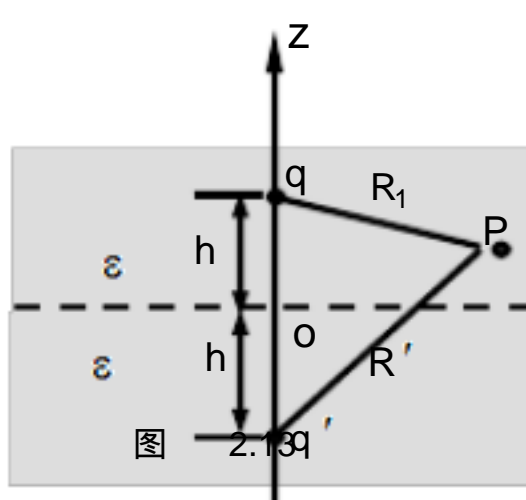
$$\text{的静电力为 } f_e = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (2h)^2}$$

$$\text{令 } f_e \text{ 的大小与重力 } mg \text{ 相等，即 } \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (2h)^2} = mg$$

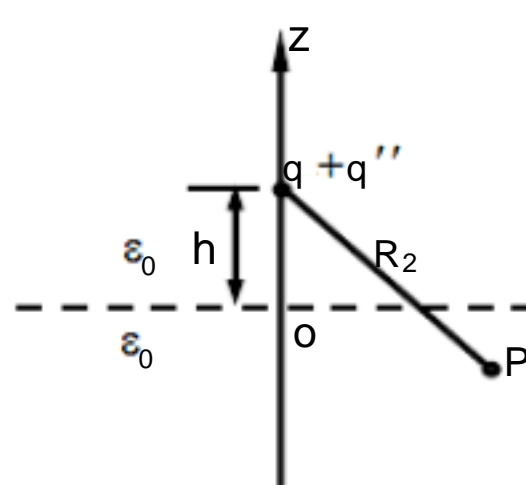
$$\text{于是得到 } q = 4h\sqrt{\pi\epsilon_0 mg} = 5.9 \times 10^{-8} \text{ C}$$



题 4.24 图 (a)



题 4.24 图 (b)



题 4.24 图 (c)

4.24 如题 4.24 (a) 图所示，在 $z < 0$ 的下半空间是介电常数为 ϵ 的介质，上半空间为空气，距离介质平面距为 h 处有一点电荷 q ，求：(1) $z > 0$ 和 $z < 0$ 的两个半空间内的电位；(2) 介质表面上的极化电荷密度，并证明表面上极化电荷总电量等于镜像电荷 q' 。

解 (1) 在点电荷 q 的电场作用下，介质分界面上出现极化电荷，利用镜像电荷替代介质分界面上的极化电荷。根据镜像法可知，镜像电荷分布为（如题 4.24 图 (b)、(c) 所示）

$$q' = -\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0} q, \text{ 位于 } z = -h$$

$$q'' = \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0} q, \text{ 位于 } z = h$$

上半空间内的电位由点电荷 q 和镜像电荷 q' 共同产生，即

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R'} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z-h)^2}} - \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z+h)^2}} \right\}$$

下半空间内的电位由点电荷 q 和镜像电荷 q'' 共同产生，即 $\varphi_2 = \frac{q + q''}{4\pi\epsilon R_2} = \frac{q}{2\pi(\epsilon + \epsilon_0)} \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z-h)^2}}$

(2) 由于分界面上无自由电荷分布，故极化电荷面密度为

$$\sigma_p = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2)_{z=0} = \epsilon_0 (E_{1z} - E_{2z})|_{z=0} = \epsilon_0 \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = - \frac{(\epsilon - \epsilon_0) h q}{2\pi (\epsilon + \epsilon_0) (r^2 + h^2)^{3/2}}$$

极化电荷总电量为

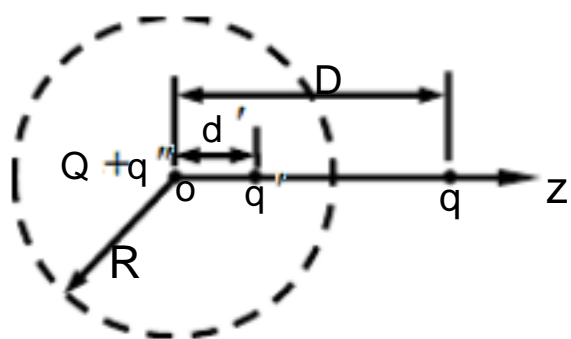
$$q_p = \int_S \sigma_p dS = \int_0^\infty \sigma_p 2\pi r dr = - \frac{(\epsilon - \epsilon_0) h q}{\epsilon + \epsilon_0} \int_0^\infty \frac{r}{(r^2 + h^2)^{3/2}} dr = - \frac{(\epsilon - \epsilon_0) q}{\epsilon + \epsilon_0} = q'$$

4.25 一个半径为 R 的导体球带有电荷量为 Q ，在球体外距离球心为 D 处有一个点电荷 q 。

(1) 求点电荷 q 与导体球之间的静电力；(2) 证明：当 q 与 Q 同号，且 $\frac{Q}{q} < \frac{RD^3}{(D^2 - R^2)^2} - \frac{R}{D}$

成立时， F 表现为吸引力。

解 (1) 导体球上除带有电荷量 Q 之外，点电荷 q 还要在导体球上感应出等量异号的两种不同电荷。根据镜像法，像电荷 q' 和 q'' 的大小和位置分别为 (如题 4.25 图所示)



题 4.25 图

$$q' = -\frac{R}{D} q, \quad d' = \frac{R^2}{D}$$

$$q'' = -q' = \frac{R}{D} q, \quad d'' = 0$$

导体球自身所带的电荷 Q 则与位于球心的点电荷 Q 等效。故点电荷 q 受到的静电力为

$$F = F_{q \rightarrow q'} + F_{q \rightarrow q''} + F_{Q \rightarrow q} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0(D-d')^2} + \frac{q(D+q'')}{4\pi\epsilon_0 D^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{Q + (R/D)q}{D^2} - \frac{Rq}{D[D - (R/D)^2]^2} \right\}$$

(2) 当 q 与 Q 同号，且 F 表现为吸引力，即 $F < 0$ 时，则应有

$$\frac{Q + (R/D)q}{D^2} - \frac{Rq}{D[D - (R/D)^2]^2} < 0$$

由此可得出 $\frac{Q}{q} < \frac{RD^3}{(D^2 - R^2)^2} - \frac{R}{D}$

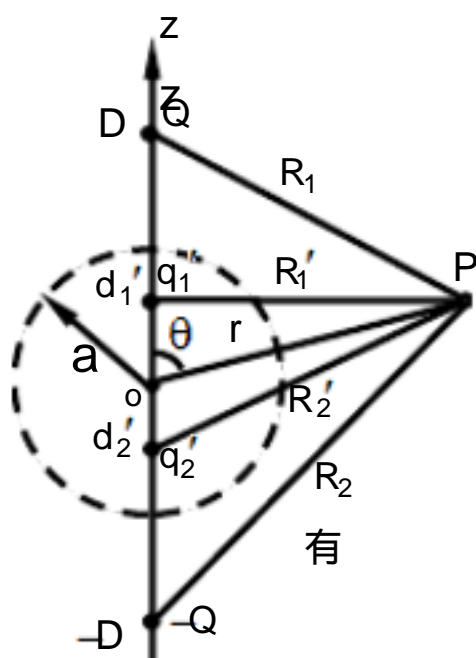
4.26 两个点电荷 Q 和 $-Q$ ，在一个半径为 a 的导体球直径的延长线上，分别位于导体球的两侧且距球心为 D 。

(1) 证明：镜像电荷构成一个电偶极子，位于球心，电偶极矩为 $p = \frac{2a^3 Q}{D^2}$ ；

(2) 令 D 和 Q 分别趋于无穷，同时保持 $\frac{Q}{D^2}$ 不变，计算球外的电场。

解 (1) 点电荷 Q 和 $-Q$ 都要在球面上引起等量异号的感应电荷，可分别按照点电荷与不接地导体球面的镜像确定其等效的像电荷。根据镜像法，点电荷 Q 的像电荷为

$$q_1' = -\frac{a}{D} Q, \quad \text{位于: } d_1' = \frac{a^2}{D}$$



题 4.26 图

$$q_1'' = -q_1' = \frac{a}{D}Q, \text{ 位于: } d_1'' = 0$$

而点电荷 $-Q$ 的像电荷为

$$q_2' = \frac{a}{D}Q, \text{ 位于: } d_2' = -\frac{a^2}{D}$$

$$q_2'' = -q_2' = -\frac{a}{D}Q, \text{ 位于: } d_2'' = 0$$

如题 4.26 图所示。由此可见，像电荷 q_1'' 和 q_2'' 等值异号，且同时位于球心，故球心处总的像电荷为零；而像电荷 q_1' 和 q_2' 也等值异号，且位置关于球心对称，故构成位于球心的电偶极子，其电偶极矩为

$$p = q_2'(2d_1') = \frac{a}{D}Q \cdot \frac{2a^2}{D} = \frac{2a^3Q}{D^2}$$

(2) 球外的电位由 Q 和 $-Q$ 以及像电荷 q_1' 和 q_2' 共同产生，即

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q_1'}{4\pi\epsilon_0 R_1'} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q_2'}{4\pi\epsilon_0 R_2'} = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2 + D^2 - 2rD\cos\theta}} - \frac{a/D}{\sqrt{r^2 + (a^2/D)^2 - (2ra^2/D)\cos\theta}} - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\sqrt{r^2 + D^2 + 2rD\cos\theta}} + \frac{a/D}{\sqrt{r^2 + (a^2/D)^2 + (2ra^2/D)\cos\theta}} \right\} \end{aligned}$$

当 D 和 Q 分别趋于无穷，同时保持 $\frac{Q}{D^2}$ 不变时，有

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 D^2} \left\{ \frac{D^2}{\sqrt{r^2 + D^2 - 2rD\cos\theta}} - \frac{aD}{\sqrt{r^2 + (a^2/D)^2 - (2ra^2/D)\cos\theta}} - \right. \\ &\quad \left. \frac{D^2}{\sqrt{r^2 + D^2 + 2rD\cos\theta}} + \frac{aD}{\sqrt{r^2 + (a^2/D)^2 + (2ra^2/D)\cos\theta}} \right\} \approx \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 D^2} \left\{ D \left(1 + \frac{r}{D} \cos\theta \right) - \frac{aD}{r} \left(1 + \frac{a^2}{rD} \cos\theta \right) - D \left(1 - \frac{r}{D} \cos\theta \right) + \frac{aD}{r} \left(1 - \frac{a^2}{rD} \cos\theta \right) \right\} = \\ &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 a^3} r \cos\theta - \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta \end{aligned}$$

球外的电场为

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\varphi = -\left(\mathbf{e}_r \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \right) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 a^3} \left[-\mathbf{e}_r \left(1 - \frac{2a^3}{r^3} \right) \cos\theta + \mathbf{e}_\theta \left(1 + \frac{a^3}{r^3} \right) \right] = \\ &= \mathbf{e}_z \frac{p}{4\pi\epsilon_0 a^3} + \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (\mathbf{e}_r 2\cos\theta + \mathbf{e}_\theta \sin\theta) \end{aligned}$$

4.27 一根与地面平行架设的圆截面导线，半径为 a ，悬挂高度为 h 。证明：单位长度上圆

柱导线与地面间的电容为 $C_0 = \frac{2\pi\epsilon_0}{\cosh^{-1}(h/a)}$ 。

解 地面的影响可用一个像圆柱来等效。设导线单位长度带电荷为 q_l ，则像圆柱单位长度带电荷为 $-q_l$ 。根据电轴法，电荷 q_l 和 $-q_l$ 可用位于电轴上的线电荷来等效替代，如题 4.27 图所示。等效线电荷对导体轴线的偏移为

$$D = h + \sqrt{h^2 - a^2}$$

$$d = h - \sqrt{h^2 - a^2}$$

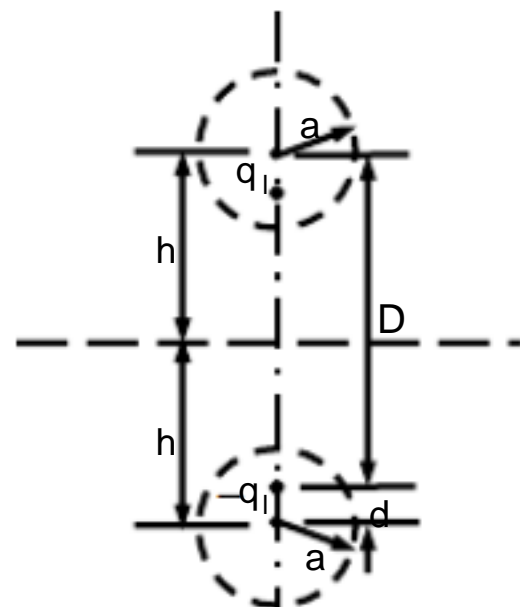
则导线与地间的电位差为

$$\varphi = \frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{a-d} - \frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{D-a} = \frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{h^2 - a^2} + (h-a)}{\sqrt{h^2 - a^2} - (h-a)} =$$

$$\frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{h^2 - a^2} + h}{a} = \frac{q_l}{2\pi\epsilon_0} \cosh^{-1}\left(\frac{h}{a}\right)$$

故单位长度上圆柱导线与地面间的电容为

$$C_0 = \frac{q_l}{\varphi} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\cosh^{-1}(h/a)}$$



题 4.27 图

4.28 在上题中设导线与地面间的电压为 U_0 。证明：地面对导线单位长度的作用力

$$F_0 = \frac{\pi\epsilon_0 U_0^2}{\left[\cosh^{-1}(h/a)\right]^2 (h^2 - a^2)^{1/2}}$$

解 导线单位长度上的电场能量为 $W_e = \frac{1}{2} C_0 U_0^2 = \frac{\pi\epsilon_0 U_0^2}{\cosh^{-1}(h/a)}$

由虚位移法，得到地面对导线单位长度的作用力为

$$F_0 = \frac{\partial W_e}{\partial h} \Big|_{U_0} = \frac{\partial}{\partial h} \left[\frac{\pi\epsilon_0 U_0^2}{\cosh^{-1}(h/a)} \right] = \frac{\pi\epsilon_0 U_0^2}{\left[\cosh^{-1}(h/a)\right]^2 (h^2 - a^2)^{1/2}}$$

五章习题解答

5.1 真空中直线长电流 I 的磁场中有一等边三角形回路，如题 5.1 图所示，求三角形回路内的磁通。

解 根据安培环路定理，得到长直导线的电流 I 产生的磁场

$$\mathbf{B} = \mathbf{e}_\phi \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

穿过三角形回路面积的磁通为

$$\Psi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_d^{d+\sqrt{3}b/2} \frac{2}{x} \left[\int_0^z dz \right] dx = \frac{\mu_0 I}{\pi} \int_d^{d+\sqrt{3}b/2} \frac{z}{x} dx$$

由题 5.1 图可知， $z = (x - d) \tan \frac{\pi}{6} = \frac{x - d}{\sqrt{3}}$ ，故得到

$$\Psi = \frac{\mu_0 I}{\sqrt{3}\pi} \int_d^{d+\sqrt{3}b/2} \frac{x - d}{x} dx = \frac{\mu_0 I}{\pi} \left[\frac{b}{2} - \frac{d}{\sqrt{3}} \ln \left(1 + \frac{\sqrt{3}b}{2d} \right) \right]$$

题 5.1 图

5.2 通过电流密度为 \mathbf{J} 的均匀电流的长圆柱导体中有一平行的圆柱形空腔，如题 5.2 图所示。计算各部分的磁感应强度 \mathbf{B} ，并证明腔内的磁场是均匀的。

解 将空腔中视为同时存在 \mathbf{J} 和 $-\mathbf{J}$ 的两种电流密度，这样可将原来的电流分布分解为两个均匀的电流分布：一个电流密度为 \mathbf{J} 、均匀分布在半径为 b 的圆柱内，另一个电流密度为 $-\mathbf{J}$ 、均匀分布在半径为 a 的圆柱内。由安培环路定律，分别求出两个均匀分布电流的磁场，然后进行叠加即可得到圆柱内外的磁场。

由安培环路定律 $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$ ，可得到电流密度为 \mathbf{J} 、均匀分布在半径为 b 的圆柱内的电

流产生的磁场为

$$\mathbf{B}_b = \begin{cases} \frac{\mu_0}{2} \mathbf{J} \times \mathbf{r}_b & r_b < b \\ \frac{\mu_0 b^2}{2 r_b^2} \mathbf{J} \times \mathbf{r}_b & r_b > b \end{cases}$$

电流密度为 $-\mathbf{J}$ 、均匀分布在半径为 a 的圆柱内的电流产生的磁场为

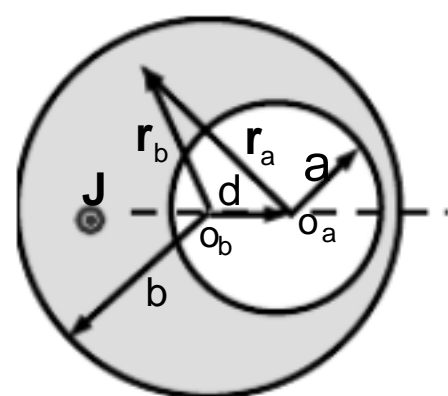
$$\mathbf{B}_a = \begin{cases} -\frac{\mu_0}{2} \mathbf{J} \times \mathbf{r}_a & r_a < a \\ -\frac{\mu_0 a^2}{2 r_a^2} \mathbf{J} \times \mathbf{r}_a & r_a > a \end{cases}$$

这里 \mathbf{r}_a 和 \mathbf{r}_b 分别是点 O_a 和 O_b 到场点 P 的位置矢量。

将 \mathbf{B}_a 和 \mathbf{B}_b 叠加，可得到空间各区域的磁场为

$$\text{圆柱外：} \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2} \mathbf{J} \times \left(\frac{b^2}{r_b^2} \mathbf{r}_b - \frac{a^2}{r_a^2} \mathbf{r}_a \right) \quad (r_b > b)$$

$$\text{圆柱内的空腔外：} \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2} \mathbf{J} \times \left(\mathbf{r}_b - \frac{a^2}{r_a^2} \mathbf{r}_a \right) \quad (r_b < b, r_a > a)$$



题 5.2 图

空腔内：
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2} \mathbf{J} \times (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_a) = \frac{\mu_0}{2} \mathbf{J} \times \mathbf{d} \quad (r_a < a)$$

式中 \mathbf{d} 是点 O_b 到点 O_a 的位置矢量。由此可见，空腔内的磁场是均匀的。

5.3 下面的矢量函数中哪些可能是磁场？如果是，求其源变量 \mathbf{J} 。

(1) $\mathbf{H} = \mathbf{e}_r ar$, $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ (圆柱坐标)

(2) $\mathbf{H} = \mathbf{e}_x(-ay) + \mathbf{e}_y ax$, $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$

(3) $\mathbf{H} = \mathbf{e}_x ax - \mathbf{e}_y ay$, $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$

(4) $\mathbf{H} = \mathbf{e}_\phi ar$, $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ (球坐标系)

解 根据恒定磁场的基本性质，满足 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 的矢量函数才可能是磁场的场矢量，否则，不是磁场的场矢量。若是磁场的场矢量，则可由 $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H}$ 求出源分布。

(1) 在圆柱坐标中
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ar^2) = 2a \neq 0$$

该矢量不是磁场的场矢量。

(2)
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial x} (-ay) + \frac{\partial}{\partial y} (ax) = 0$$

该矢量是磁场的矢量，其源分布为
$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -ay & ax & 0 \end{vmatrix} = 2a \mathbf{e}_z$$

(3)
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial x} (ax) + \frac{\partial}{\partial y} (-ay) = 0$$

该矢量是磁场的场矢量，其源分布为
$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ax & -ay & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(4) 在球坐标系中
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} B_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (ar) = 0$$

该矢量是磁场的场矢量，其源分布为

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r \mathbf{e}_\theta & r \sin \theta \mathbf{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ 0 & 0 & ar^2 \sin \theta \end{vmatrix} = \mathbf{e}_r a \cot \theta - \mathbf{e}_\theta 2a$$

5.4 由矢量位的表示式 $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} d\tau'$ 证明磁感应强度的积分公式

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} d\tau'$$

并证明 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

$$\begin{aligned} \text{解: } \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \nabla \times \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} d\tau' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \nabla \left(\frac{1}{R} \right) d\tau' = \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \left(-\frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} d\tau' \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= \nabla \cdot [\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})] = 0 \end{aligned}$$

5.5 有一电流分布 $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_z J_0 (r \leq a)$ ，求矢量位 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 和磁感应强度 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ 。

解 由于电流只有 \mathbf{e}_z 分量，且仅为 r 的函数，故 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 也只有 \mathbf{e}_z 分量，且仅为 r 的函数，即 $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_z A_z(r)$ 。在圆柱坐标系中，由 $A_z(r)$ 满足的一维微分方程和边界条件，即可求解出 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ ，然后由 $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$ 可求出 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ 。

记 $r \leq a$ 和 $r \geq a$ 的矢量位分别为 $\mathbf{A}_1(\mathbf{r})$ 和 $\mathbf{A}_2(\mathbf{r})$ 。由于在 $r \geq a$ 时电流为零，所以

$$\begin{aligned} \nabla^2 A_{z1}(r) &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_{z1}}{\partial r} \right) = -\mu_0 J_0 \quad (r \leq a) \\ \nabla^2 A_{z2}(r) &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_{z2}}{\partial r} \right) = 0 \quad (r \geq a) \end{aligned}$$

由此可解得

$$A_{z1}(r) = -\frac{1}{9} \mu_0 J_0 r^3 + C_1 \ln r + D_1$$

$$A_{z2}(r) = C_2 \ln r + D_2$$

$A_{z1}(r)$ 和 $A_{z2}(r)$ 满足的边界条件为

$r \rightarrow 0$ 时， $A_{z1}(r)$ 为有限值

$$r = a \text{ 时, } A_{z1}(a) = A_{z2}(a), \quad \left. \frac{\partial A_{z1}}{\partial r} \right|_{r=a} = \left. \frac{\partial A_{z2}}{\partial r} \right|_{r=a}$$

由条件、，有 $C_1 = 0, \quad -\frac{1}{9} \mu_0 J_0 a^3 = C_2 \ln a + D_2, \quad -\frac{1}{3} \mu_0 J_0 a^2 = C_2 \frac{1}{a}$

由此可解得 $C_2 = -\frac{1}{3} \mu_0 J_0 a^3, \quad D_2 = -\frac{1}{3} \mu_0 J_0 a^3 \left(\frac{1}{3} - \ln a \right)$

故

$$A_{z1}(r) = -\frac{1}{9} \mu_0 J_0 r^3 + D_1 \quad (r \leq a)$$

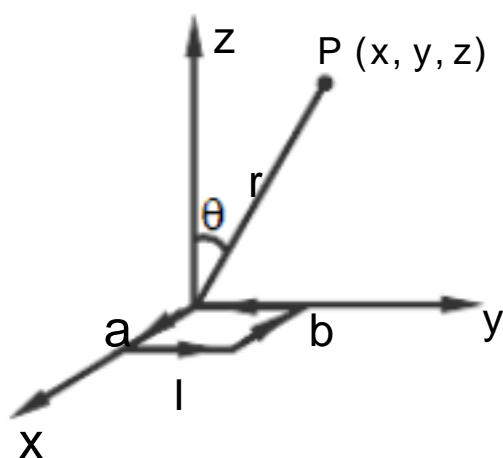
$$A_{z2}(r) = -\frac{1}{3} \mu_0 J_0 a^3 \ln r - \frac{1}{3} \mu_0 J_0 a^3 \left(\frac{1}{3} - \ln a \right) \quad (r \geq a)$$

式中常数 D_1 由参考点确定，若令 $r = 0$ 时， $A_{z1}(r) = 0$ ，则有 $D_1 = 0$ 。

空间的磁感应强度为

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}_1(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_\phi \frac{1}{3} \mu_0 J_0 r^2 \quad (r < a)$$

$$\mathbf{B}_2(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}_2(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_\phi \frac{\mu_0 J_0 a^3}{3r} \quad (r > a)$$



题 5.6 图

5.6 如题 5.6 图所示，边长分别为 a 和 b 、载有电流 I 的小矩形回路。

(1) 求远处的任一点 $P(x, y, z)$ 的矢量位 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ ，并证明它可以写成 $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \mathbf{p}_m \times \mathbf{r}}{4\pi r^3}$ 。其

中 $\mathbf{p}_m = \mathbf{e}_z lab$ ；

(2) 由 \mathbf{A} 求磁感应强度 \mathbf{B} ，并证明 \mathbf{B} 可以写成

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \nabla(d\Omega) \quad \text{式中 } d\Omega = \frac{ab \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_r}{r^2} \text{ 场点对小电流回路所张的立体角。}$$

解 (1) 电流回路的矢量位为
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{1}{R} d\mathbf{l}$$

式中：
$$R = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2]^{1/2} = [r^2 - 2r \sin \theta (x' \cos \phi + y' \sin \phi) + x'^2 + y'^2]^{1/2}$$

根据矢量积分公式 $\oint_C \Psi d\mathbf{l} = \int_S d\mathbf{S} \times \nabla \Psi$ ，有 $\oint_C \frac{1}{R} d\mathbf{l} = \int_S d\mathbf{S}' \times \nabla' \left(\frac{1}{R} \right)$

而
$$\nabla' \left(\frac{1}{R} \right) = -\nabla \left(\frac{1}{R} \right)$$

所以
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_S d\mathbf{S}' \times \nabla \left(\frac{1}{R} \right)$$

对于远区场， $r \gg x', r \gg y'$ ，所以 $R \approx r$ ，故

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_S d\mathbf{S}' \times \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[I \int_S d\mathbf{S}' \right] \times \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\mu_0}{4\pi} (\mathbf{e}_z lab) \times \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{p}_m \times \left(-\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{\mu_0 \mathbf{p}_m \times \mathbf{r}}{4\pi r^3} \end{aligned}$$

(2) 由于
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{p}_m \mathbf{e}_z \times \left(-\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \mathbf{e}_\phi \frac{\mu_0 p_m \sin \theta}{4\pi r^2}$$

故
$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{e}_r \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) - \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) = \frac{\mu_0 p_m}{4\pi r^3} (\mathbf{e}_r 2 \cos \theta + \mathbf{e}_\theta \sin \theta)$$

又由于
$$\mathbf{e}_r 2 \cos \theta + \mathbf{e}_\theta \sin \theta = -r^3 \nabla \left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right) = -r^3 \nabla \left(\frac{\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_r}{r^2} \right)$$

故
$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 p_m}{4\pi} \nabla \left(\frac{\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_r}{r^2} \right) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \nabla \left(\frac{ab \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_r}{r^2} \right) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \nabla(d\Omega)$$

5.7 半径为 a 磁介质球，具有磁化强度为

$$\mathbf{M} = \mathbf{e}_z (Az^2 + B)$$

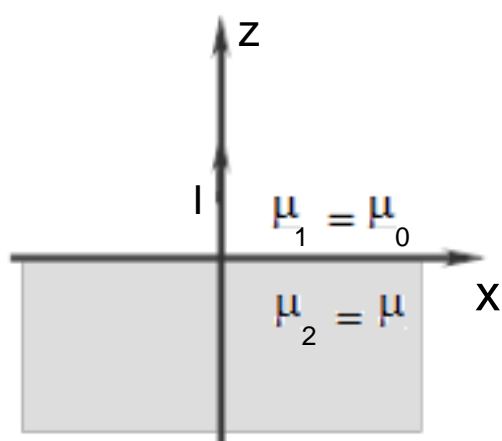
其中 A 和 B 为常数，求磁化电流和等效磁荷。

解 磁介质球内的磁化电流体密度为
$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} = -\mathbf{e}_z \times \nabla (Az^2 + B) = -\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z 2Az = 0$$

等效磁荷体密度为
$$\rho_m = -\nabla \cdot \mathbf{M} = -\frac{\partial}{\partial z} (Az^2 + B) = -2Az$$

磁介质球表面的磁化电流面密度为

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{mS} &= \mathbf{M} \times \mathbf{n} \Big|_{r=a} = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r (Aa^2 \cos^2 \theta + B) = \\ &= \mathbf{e}_\phi (Aa^2 \cos^2 \theta + B) \sin \theta \end{aligned}$$



题 5.8 图

等效磁荷面密度为

$$\sigma_m = \mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \Big|_{r=a} = \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_z (Aa^2 \cos^2 \theta + B) = (Aa^2 \cos^2 \theta + B) \cos \theta$$

5.8 如题 5.8 所示图，无限长直线电流 I 垂直于磁导率分别为 μ_1 和 μ_2 的两种磁介质的分界面，试求：（1）两种磁介质中的磁感应强度 \mathbf{B}_1 和 \mathbf{B}_2 ；（2）磁化电流分布。

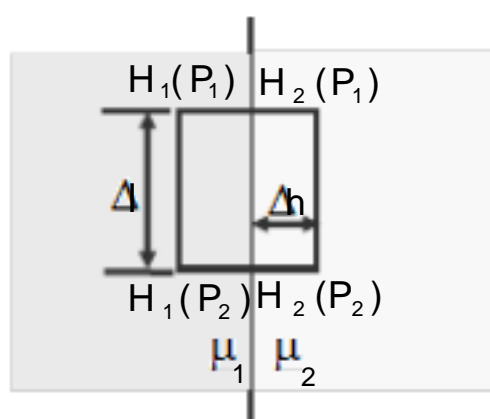
解 （1）由安培环路定理，可得 $\mathbf{H} = \mathbf{e}_\phi \frac{I}{2\pi r}$

所以得到 $\mathbf{B}_1 = \mu_0 \mathbf{H} = \mathbf{e}_\phi \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

$$\mathbf{B}_2 = \mu \mathbf{H} = \mathbf{e}_\phi \frac{\mu I}{2\pi r}$$

（2）磁介质中的磁化强度 $\mathbf{M} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_2 - \mathbf{H} = \mathbf{e}_\phi \frac{(\mu - \mu_0)I}{2\pi \mu_0 r}$

则磁化电流体密度 $\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{e}_z \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rM_\phi) = \mathbf{e}_z \frac{(\mu - \mu_0)I}{2\pi \mu_0} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{1}{r} \right) = 0$



题 5.9 图

在 $r = 0$ 处， \mathbf{B}_2 具有奇异性，所以在磁介质中 $r = 0$ 处存在磁化线电流 I_m 。以 z 轴为中心、 r 为半径作一个圆形回路 C ，由安培环路定理，

$$\text{有 } I + I_m = \frac{1}{\mu_0} \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu I}{\mu_0}$$

$$\text{故得到 } I_m = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) I$$

在磁介质的表面上，磁化电流面密度为

$$\mathbf{J}_{mS} = \mathbf{M} \times \mathbf{e}_z \Big|_{z=0} = \mathbf{e}_r \frac{(\mu - \mu_0)I}{2\pi \mu_0 r}$$

5.9 已知一个平面电流回路在真空中产生的磁场强度为 \mathbf{H}_0 ，若此平面电流回路位于磁导率分别为 μ_1 和 μ_2 的两种均匀磁介质的分界平面上，试求两种磁介质中的磁场强度 \mathbf{H}_1 和 \mathbf{H}_2 。

解 由于是平面电流回路，当其位于两种均匀磁介质的分界平面上时，分界面上的磁场只有法向分量，根据边界条件，有 $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = \mathbf{B}$ 。在分界面两侧作一个小矩形回路，分别就真空和存在介质两种不同情况，应用安培环路定律即可导出 \mathbf{H}_1 、 \mathbf{H}_2 与 \mathbf{H}_0 的关系。

在分界面两侧，作一个尺寸为 $2\Delta h \times \Delta l$ 的小矩形回路，如题 5.9 图所示。根据安培环路定律，

$$\text{有 } \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_1(P_1) \Delta h + H_2(P_1) \Delta h - H_1(P_2) \Delta h - H_2(P_2) \Delta h = I \quad (1)$$

因 \mathbf{H} 垂直于分界面，所以积分式中 $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0$ 。这里 I 为与小矩形回路交链的电流。

对平面电流回路两侧为真空的情况，则有

$$\oint_C \mathbf{H}_0 \cdot d\mathbf{l} = 2H_0(P_1) \Delta h - 2H_0(P_2) \Delta h = I \quad (2)$$

由于 P_1 和 P_2 是分界面上任意两点，由式（1）和（2）可得到 $\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 = 2\mathbf{H}_0$

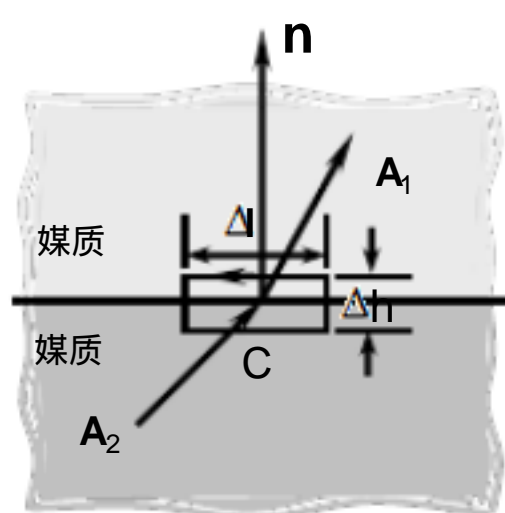
即
$$\frac{B}{\mu_1} + \frac{B}{\mu_2} = 2H_0$$

于是得到
$$B = \frac{2\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} H_0$$

故有
$$H_1 = \frac{B}{\mu_1} = \frac{2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} H_0 \quad H_2 = \frac{B}{\mu_2} = \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} H_0$$

5.10 证明：在不同介质分界面上矢量位 A 的切向分量是连续的。

解 由 $B = \nabla \times A$ 得
$$\oint_S B \cdot dS = \int_S \nabla \times A \cdot dS \stackrel{\text{高斯定理}}{=} \oint_C A \cdot dl \quad (1)$$



题 5.10 图

在介质分界面上任取一点 P ，围绕点 P 任作一个跨越分界面的狭小矩形回路 C ，其长为 Δl 、宽为 Δh ，如题 5.10 图所示。将式 (1) 应用于回路 C 上，并令 Δh 趋于零，得到

$$\oint_C A \cdot dl = A_1 \Delta l - A_2 \Delta l = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_S B \cdot dS$$

由于 B 为有限值，上式右端等于零，所以

$$A_1 \Delta l - A_2 \Delta l = 0$$

由于矢量 Δl 平行于分界面，故有

$$A_{1t} = A_{2t}$$

5.11 一根极细的圆铁杆和一个很薄的圆铁盘样品放在磁场

B_0 中，并使它们的轴与 B_0 平行，(铁的磁导率为 μ)。求两样品内的 B 和 H ；若已知 $B_0 = 1T$ 、 $\mu = 5000\mu_0$ ，求两样品内的磁化强度 M 。

解 对于极细的圆铁杆样品，根据边界条件 $H_{1t} = H_{2t}$ ，有

$$H = H_0 = B_0 / \mu_0$$

$$B = \mu H = \frac{\mu}{\mu_0} B_0$$

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) B_0 = \frac{4999}{\mu_0}$$

对于很薄的圆铁盘样品，根据边界条件 $B_{1n} = B_{2n}$ ，有

$$B = B_0$$

$$H = B / \mu = B_0 / \mu$$

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H = \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu} \right) B_0 = \frac{4999}{5000\mu_0}$$

5.12 如题 5.12 图所示，一环形螺线管的平均半径 $r_0 = 15cm$ ，其圆形截面的半径 $a = 2cm$ ，铁芯的相对磁导率 $\mu_r = 1400$ ，环上绕 $N = 1000$ 匝线圈，通过电流 $I = 0.7A$ 。

(1) 计算螺旋管的电感；

(2) 在铁芯上开一个 $l_0 = 0.1cm$ 的空气隙，再计算电感。(假设开口后铁芯的 μ_r 不变)

(3) 求空气隙和铁芯内的磁场能量的比值。

解 (1) 由于 $a \ll r_0$, 可认为圆形截面上的磁场是均匀的, 且等于截面的中心处的磁场。

由安培环路定律, 可得螺旋管内的磁场为 $H = \frac{NI}{2\pi r_0}$

与螺线管铰链的磁链为 $\Psi = NS\mu H = \frac{\mu a^2 N^2 I}{2r_0}$

故螺线管的电感为

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu a^2 N^2}{2r_0} = \frac{1400 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 0.02^2 \times 1000^2}{2 \times 0.15} = 2.346 \text{ H}$$

(2) 当铁芯上开有小空气隙时, 由于可隙很小, 可忽略边缘效应, 则在空气隙与铁芯的分界面上, 磁场只有法向分量。根据边界条件, 有 $B_0 = B_\mu = B$, 但空气隙中的磁场强度 H_0 与铁芯中的磁场强度 H_μ 不同。根据安培环路定律, 有

$$H_0 l_0 + H_\mu (2\pi r_0 - l_0) = NI$$

又由于 $B_0 = \mu_0 H_0$ 、 $B_\mu = \mu_0 \mu_r H_\mu$ 及 $B_0 = B_\mu = B$, 于是可得 $B = \frac{\mu_0 \mu_r NI}{\mu_r l_0 + (2\pi r_0 - l_0)}$

所以螺线管得磁链为 $\Psi = NSB = \frac{\pi \mu_0 \mu_r a^2 N^2 I}{\mu_r l_0 + (2\pi r_0 - l_0)}$

故螺线管得电感为

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\pi \mu_0 \mu_r a^2 N^2}{\mu_r l_0 + (2\pi r_0 - l_0)} = \frac{4\pi^2 \times 10^{-7} \times 1400 \times 0.02^2 \times 1000^2}{1400 \times 0.001 + 2 \times \pi \times 0.15 - 0.001} = 0.944 \text{ H}$$

(3) 空气隙中的磁场能量为 $W_{m0} = \frac{1}{2} \mu_0 H_0^2 S l_0$

铁芯中的磁场能量为 $W_{m\mu} = \frac{1}{2} \mu_0 \mu_r H_\mu^2 S (2\pi r_0 - l_0)$

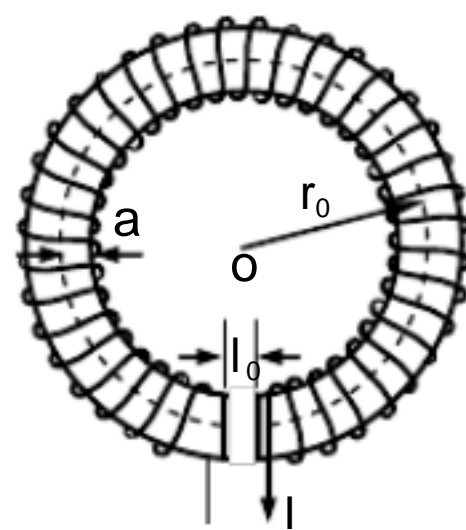
故 $\frac{W_{m0}}{W_{m\mu}} = \frac{\mu_r l_0}{2\pi r_0 - l_0} = \frac{1400 \times 0.001}{2\pi \times 0.15 - 0.001} = 1.487$

5.13 证明: 单匝线圈励磁下磁路的自感量为 $L_0 = 1/R_m$, R_m 为磁路的磁阻, 故 NI 激励下, 电感量为 $L = N^2/R_m$ 。磁路中单匝激励下的磁场储能 $W_{m0} = R_m \Phi_0^2/2$, 则 NI 激励下的 $W_m = N^2 W_{m0}$ 。

解 在单匝线圈励磁下, 设线圈中的电流为 I , 有 $\Phi_0 = L_0 I = \frac{I}{R_m}$ 。则在 NI 激励下, 磁路

的磁通为 $\Psi = N^2 \Phi_0 = \frac{N^2 I}{R_m}$

故电感量为 $L = \frac{\Psi}{I} = \frac{N^2}{R_m}$



题 5.12 图