



第六章 IIR数字滤波器的设计方法

学习目标



- ◆ 理解数字滤波器的基本概念
- ◆ 了解最小相位延时系统
- ◆ 理解全通系统的特点及应用
- ◆ 掌握冲激响应不变法
- ◆ 掌握双线性变换法
- ◆ 掌握Butterworth低通滤波器的特点
- ◆ 了解利用模拟滤波器设计IIR数字滤波器的设计过程
- ◆ 了解利用频带变换法设计各种类型数字滤波器的方法

一、数字滤波器的基本概念

1、数字滤波器的分类

数字滤波器： 是指输入输出均为数字信号，通过一定运算关系改变输入信号所含频率成分的相对比例或者滤除某些频率成分的器件。

优点： 高精度、稳定、体积小、重量轻、灵活，不求阻抗匹配，可实现特殊滤波功能

经典滤波器： 选频滤波器

现代滤波器： 维纳滤波器

卡尔曼滤波器

自适应滤波器等

按滤波器幅度响应可分为：低通、高通、带通、带阻、全通滤波器

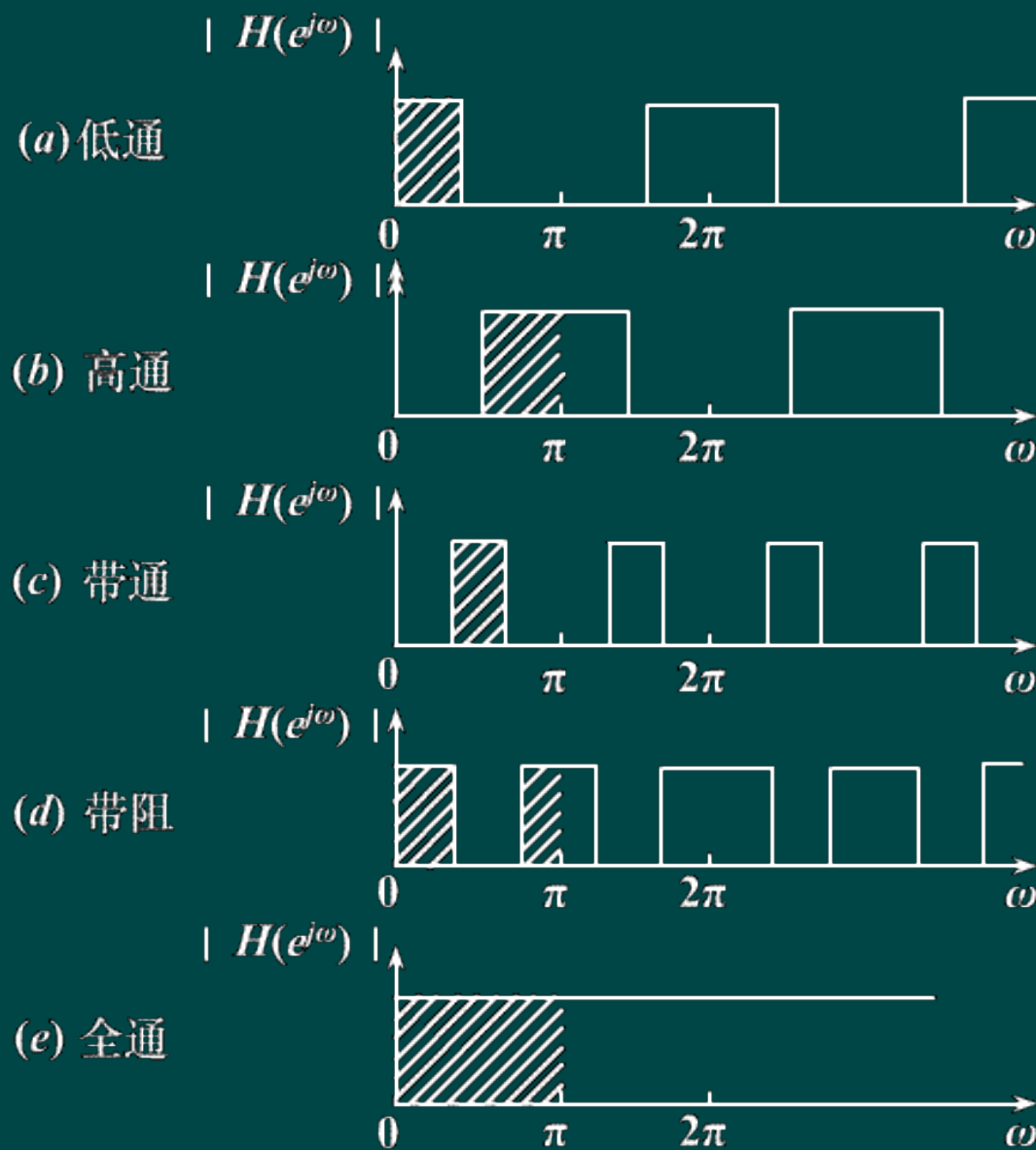
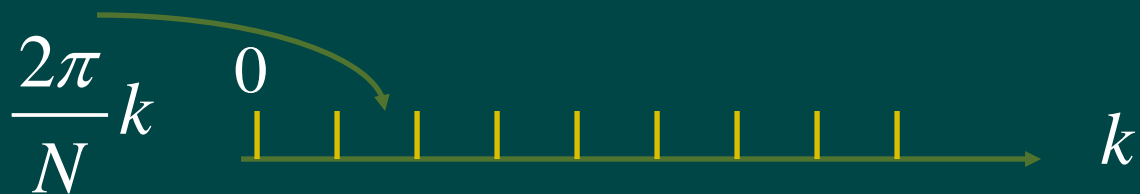
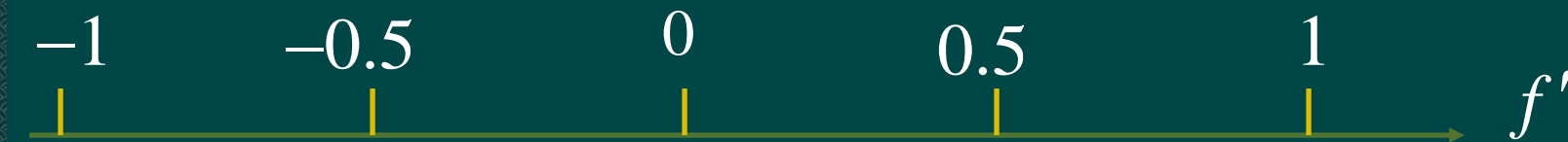
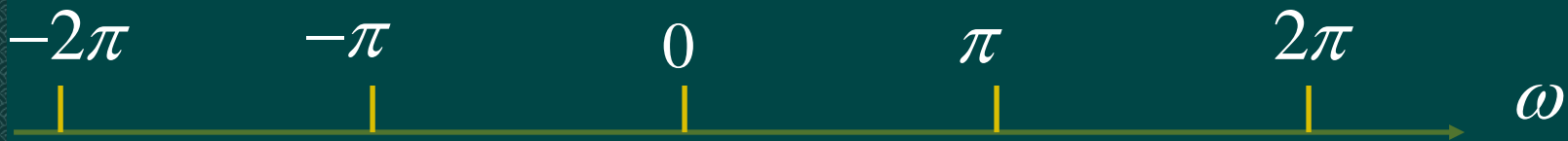


图6-2 各种数字滤波器的理想幅度频率响应

频率轴定标



按实现的网络结构或单位抽样响应分：

IIR滤波器（ M 阶）

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

FIR滤波器（ $N-1$ 阶）

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

按相位响应分：

线性相位滤波器

非线性相位滤波器





2、数字滤波器的设计过程

- 按设计任务，确定滤波器性能要求，制定技术指标
- 用一个因果稳定的离散LSI系统的系统函数 $H(z)$ 逼近此性能指标
- 利用有限精度算法实现此系统函数：如运算结构、字长的选择等
- 实际技术实现：软件法、硬件法或DSP芯片法



3、数字滤波器的技术指标

◇ 选频滤波器的频率响应：

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\beta(j\omega)}$$

$|H(e^{j\omega})|$ 为幅频特性：表示信号通过该滤波器后各频率成分的衰减情况

$\beta(j\omega)$ 为相频特性：反映各频率成分通过滤波器后在时间上的延时情况

理想滤波器不可实现，只能以实际滤波器逼近

- 通带: $|\omega| \leq \omega_p$ $1 - \delta_1 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1$
- 阻带: $\omega_{st} \leq |\omega| \leq \pi$ $|H(e^{j\omega})| \leq \delta_2$
- 过渡带: $\omega_p \leq |\omega| \leq \omega_{st}$

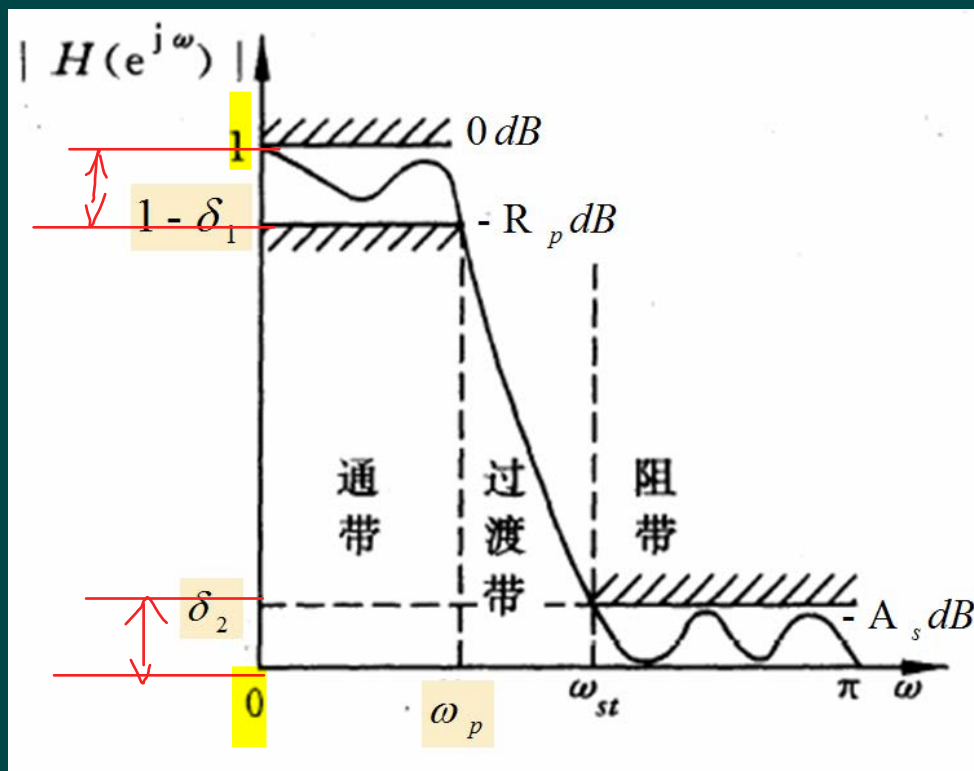
右图：理想低通滤波器逼近的误差容限

ω_p ：通带截止频率

ω_{st} ：阻带截止频率

δ_1 ：通带容限

δ_2 ：阻带容限



通带最大衰减: R_p (Passband Ripple)



$$R_p = 20\lg \frac{|H(e^{j0})|}{|H(e^{j\omega_p})|} = -20\lg |H(e^{j\omega_p})| = -20\lg(1 - \delta_1)$$

阻带最小衰减: A_s (Stopband Attenuation)

$$A_s = 20\lg \frac{|H(e^{j0})|}{|H(e^{j\omega_{st}})|} = -20\lg |H(e^{j\omega_{st}})| = -20\lg \delta_2$$

其中: $|H(e^{j0})| = 1$

当 $|H(e^{j\omega_p})| = \sqrt{2} / 2 = 0.707$ 时, $R_p = 3dB$

称 ω_p 为3dB通带截止频率

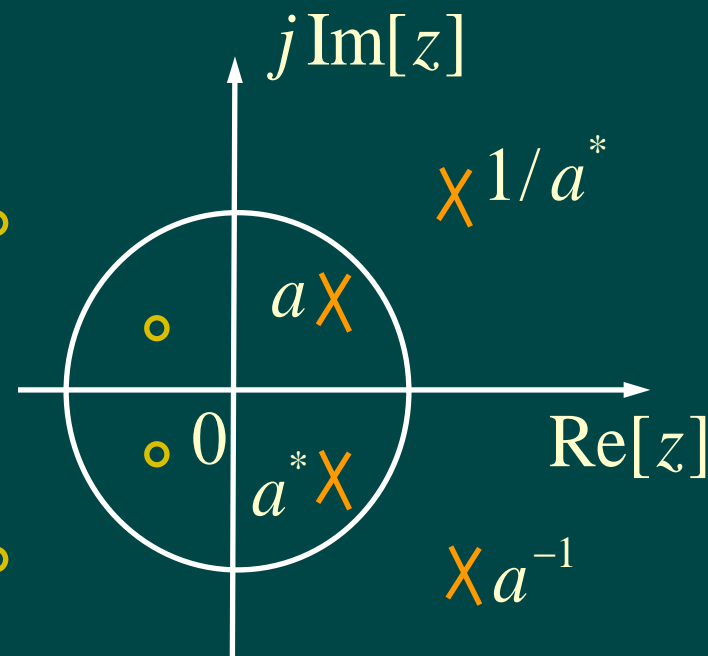
4、表征滤波器频率响应的特征参量

◆ 幅度平方响应

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega})|^2 &= H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) \\ &= H(e^{j\omega})H(e^{-j\omega}) = H(z)H(z^{-1}) \Big|_{z=e^{j\omega}} \end{aligned}$$

$H(z)H(z^{-1})$ 的极点既是共轭的，又是以单位圆成镜像对称的

$H(z)H(z^{-1})$ 在单位圆内的极点属于 $H(z)$ ，单位圆外的极点属于 $H(z^{-1})$



◇ 相位响应

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\beta(e^{j\omega})} = \operatorname{Re}[H(e^{j\omega})] + j \operatorname{Im}[H(e^{j\omega})]$$

$$\text{相位响应: } \beta(e^{j\omega}) = \arctan \left\{ \frac{\operatorname{Im}[H(e^{j\omega})]}{\operatorname{Re}[H(e^{j\omega})]} \right\}$$

$$H^*(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{-j\beta(e^{j\omega})} \quad \frac{H(e^{j\omega})}{H^*(e^{j\omega})} = e^{2j\beta(e^{j\omega})}$$

$$\beta(e^{j\omega}) = \frac{1}{2j} \ln \left[\frac{H(e^{j\omega})}{H^*(e^{j\omega})} \right] = \frac{1}{2j} \ln \left[\frac{H(z)}{H(z^{-1})} \right]_{z=e^{j\omega}}$$

↓

$$H(e^{-j\omega})$$

- 群延迟响应

相位对角频率的导数的负值

$$\begin{aligned}\tau(e^{j\omega}) &= -\frac{d\beta(e^{j\omega})}{d\omega} \\ &= -\operatorname{Re}\left[z \frac{dH(z)}{\underline{dz}} \frac{1}{H(z)}\right]_{\underline{z=e^{j\omega}}}\end{aligned}$$

若滤波器通带内 $\tau(e^{j\omega}) = \text{常数}$,

则为线性相位滤波器

5、IIR数字滤波器的设计方法



用一因果稳定的离散
LSI系统逼近给定的
性能要求：

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

即为求滤波器的各系数： a_k, b_k

s 平面逼近：模拟滤波器

z 平面逼近：数字滤波器

- ◇ 先设计模拟滤波器，再转换为数字滤波器
- 计算机辅助设计法

二、最小与最大相位延时系统、最小与最大相位超前系统

LSI系统的系统函数：

$$H(z) = K \frac{\prod_{m=1}^M (1 - c_m z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})} = K z^{(N-M)} \frac{\prod_{m=1}^M (z - c_m)}{\prod_{k=1}^N (z - d_k)}$$

频率响应：

$$H(e^{j\omega}) = K e^{j(N-M)\omega} \frac{\prod_{m=1}^M (e^{j\omega} - c_m)}{\prod_{k=1}^N (e^{j\omega} - d_k)} = |H(e^{j\omega})| e^{j \arg[H(e^{j\omega})]}$$



◇ 模:

$$\left| \frac{H(e^{j\omega})}{K} \right| = \frac{\prod_{m=1}^M |e^{j\omega} - c_m|}{\prod_{k=1}^N |e^{j\omega} - d_k|} = \frac{\text{各零矢量模的连乘积}}{\text{各极矢量模的连乘积}}$$

• 相角:

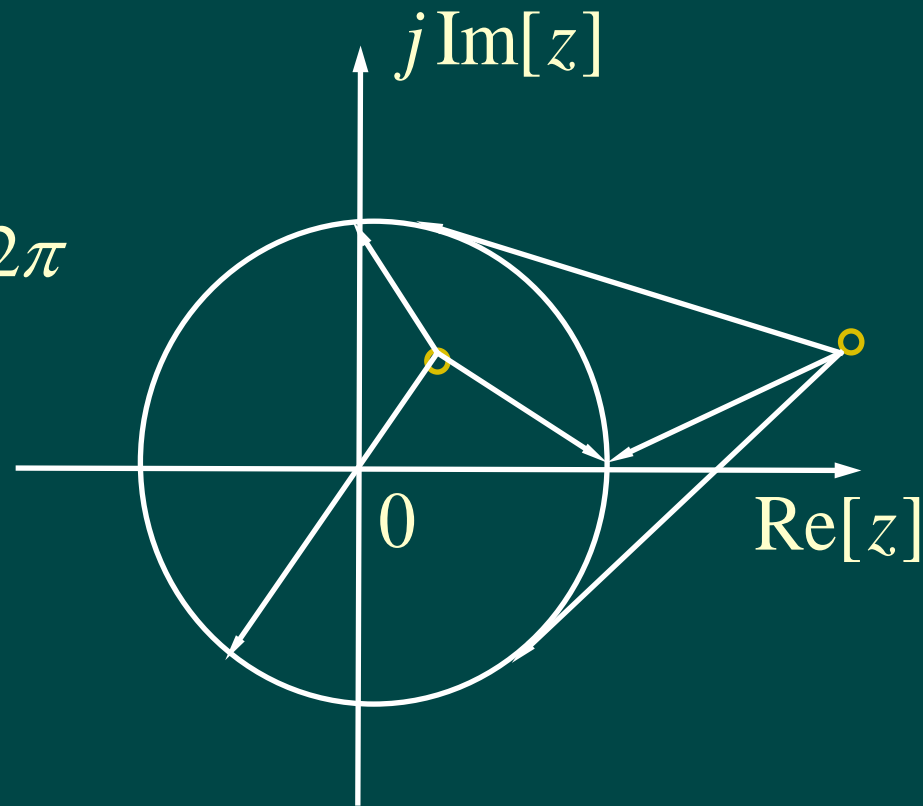
$$\arg \left[\frac{H(e^{j\omega})}{K} \right] = \sum_{m=1}^M \arg[e^{j\omega} - c_m] - \sum_{k=1}^N \arg[e^{j\omega} - d_k] + (N - M)\omega$$


$$\arg \left[\frac{H(e^{j\omega})}{K} \right] = \sum_{m=1}^M \arg[e^{j\omega} - c_m] - \sum_{k=1}^N \arg[e^{j\omega} - d_k] + (N - M)\omega$$

当 $\omega = 0 \rightarrow 2\pi$, $\Delta\omega = 2\pi$

位于单位圆内的零/极矢量角度变化为 2π

位于单位圆外的零/极矢量角度变化为 0




$$\arg \left[\frac{H(e^{j\omega})}{K} \right] = \sum_{m=1}^M \arg[e^{j\omega} - c_m] - \sum_{k=1}^N \arg[e^{j\omega} - d_k] + (N - M)\omega$$

令： 单位圆内零点数为 m_i

$$m_i + m_o = M$$

单位圆外的零点数为 m_o

单位圆内的极点数为 p_i

$$p_i + p_o = N$$

单位圆外的极点数为 p_o

则：

$$\Delta \arg \left[\frac{H(e^{j\omega})}{K} \right]_{\Delta \omega = 2\pi} = 2\pi(N - M) + 2\pi m_i - 2\pi p_i$$

◇ 因果稳定系统

对于因果稳定系统而言，其 $N=M$

$$|z| > r, r < 1 \quad n < 0 \text{ 时}, h(n) = 0$$

全部极点在单位圆内： $p_o = 0, p_i = N$

$$\begin{aligned} \Delta \arg \left[\frac{H(e^{j\omega})}{K} \right]_{\Delta\omega=2\pi} &= 2\pi m_i - 2\pi p_i + 2\pi(N - M) \\ &= 2\pi m_i - 2\pi M = -2\pi m_o \leq 0 \end{aligned}$$

相位延时系统

1) 全部零点在单位圆内： $m_i = M, m_o = 0$

$\Delta \arg[] = 0$ 为最小相位延时系统

2) 全部零点在单位圆外： $m_i = 0, m_o = M$

$\Delta \arg[] = -2\pi M$ 为最大相位延时系统



◇ 逆因果稳定系统 $|z| < r, r > 1$ $n > 0$ 时, $h(n) = 0$

全部极点在单位圆外: $p_o = N, p_i = 0$

$$\begin{aligned}\Delta \arg \left[\frac{H(e^{j\omega})}{K} \right]_{\Delta \omega = 2\pi} &= 2\pi m_i - 2\pi p_i + 2\pi(N - M) \\ &= 2\pi m_i + 2\pi(N - M) \geq 0\end{aligned}$$

相位超前系统

1) 全部零点在单位圆内: $m_i = M, m_o = 0$

$\Delta \arg[] = 2\pi N$ 为最大相位超前系统

2) 全部零点在单位圆外: $m_i = 0, m_o = M$

$\Delta \arg[] = 2\pi(N - M)$ 为最小相位超前系统

◆ 最小相位延时系统的性质

1) 在 $H(e^{j\omega})$ 相同的系统中, 具有最小的相位滞后

2) 最小相位延时系统的能量集中在 $n = 0$ 附近,
而总能量相同

$$\sum_{n=0}^m |h(n)|^2 < \sum_{n=0}^m |h_{\min}(n)|^2 \quad m < N-1$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} |h(n)|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |h_{\min}(n)|^2$$

3) 最小相位序列的 $h_{\min}(0)$ 最大: $h_{\min}(0) > h(0)$

4) 在 $|H(e^{j\omega})|$ 相同的系统中, $h_{\min}(n)$ 唯一

5) 级联一个全通系统, 可以将一最小相位系统
转变成一相同幅度响应的非最小相位延时系统

三、全通系统

对所有 ω ，满足： $|H_{ap}(e^{j\omega})|=1$

称该系统为全通系统

◆ 一阶全通系统:

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}} \quad \begin{array}{l} a \text{ 为实数} \\ 0 < |a| < 1 \end{array}$$

极点: $z = a$ 零点: $z = 1/a$

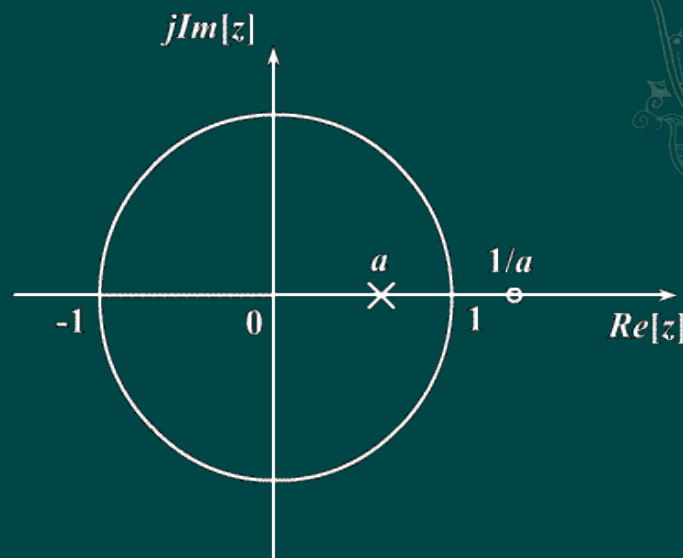


图6-3 a 为实数, $0 < a < 1$ 时, 一阶全通系统的零点-极点位置

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} \quad \begin{array}{l} a \text{ 为复数} \\ 0 < |a| < 1 \end{array}$$

极点: $z = a$ 零点: $z = 1/a^*$

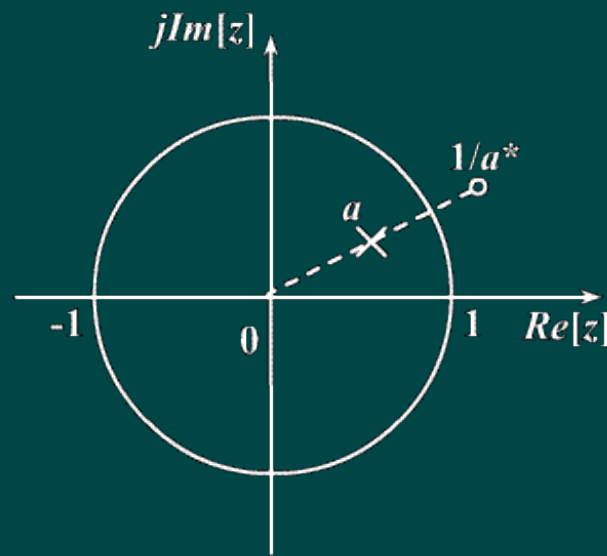


图6-4 a 为复数, $0 < |a| < 1$ 时, 一阶全通节的零点-极点位置

零极点以单位圆为镜像对称

◇ 实系数二阶全通系统

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - az^{-1}} \cdot \frac{z^{-1} - a}{1 - a^* z^{-1}} \quad |a| < 1$$

极点： $z = a, a^*$

零点： $z = 1/a^*, 1/a$

两个零点（极点）共轭
对称

零点与极点以单位圆为
镜像对称

更详细地来说是零极点连线的中垂线是单位圆的切线

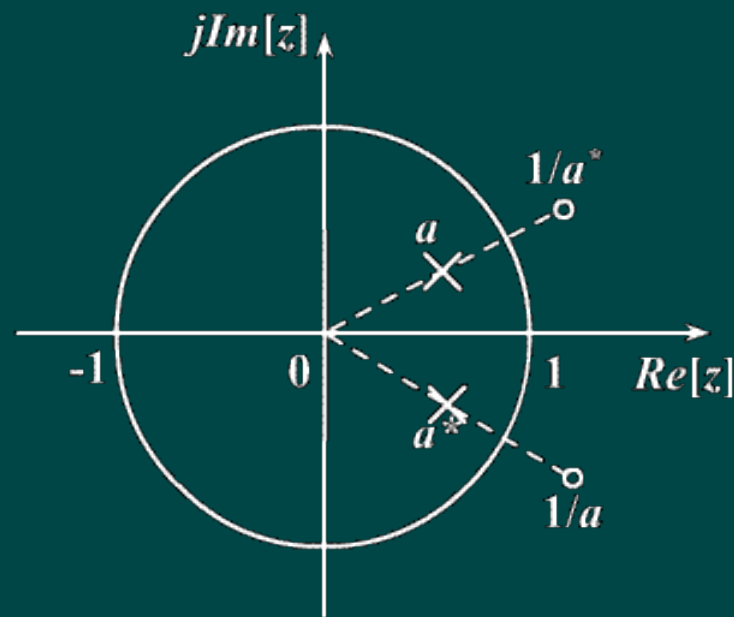


图6-5 二阶全通系统的零点-极点位置



◆ N 阶数字全通滤波器

$$\begin{aligned} H_{ap}(z) &= \pm \prod_{k=1}^N \frac{z^{-1} - a_k^*}{1 - a_k z^{-1}} \\ &= \pm \frac{d_N + d_{N-1}z^{-1} + \dots + d_1z^{-(N-1)} + z^{-N}}{1 + d_1z^{-1} + \dots + d_{N-1}z^{-(N-1)} + d_Nz^{-N}} \\ &= \pm \frac{z^{-N}D(z^{-1})}{D(z)} \end{aligned}$$

极点: $D(z)$ 的根 $z_p = re^{\pm j\omega} \quad r < 1$

零点: $D(z^{-1})$ 的根 $z_o = \frac{1}{r}e^{\pm j\omega} \quad r < 1$



◇ 全通系统的应用

1) 任一因果稳定系统 $H(z)$ 都可以表示成全通系统 $H_{ap}(z)$ 和最小相位系统 $H_{min}(z)$ 的级联

$$H(z) = H_{min}(z) \cdot H_{ap}(z)$$

令： $H(z) = H_1(z)(z^{-1} - z_0)(z^{-1} - z_0^*)$

其中： $H_1(z)$ 为最小相位延时系统，

$1/z_0, 1/z_0^*, |z_0| < 1$ 为单位圆外的一对共轭零点



$$\begin{aligned} H(z) &= H_1(z) \left(z^{-1} - z_0 \right) \left(z^{-1} - z_0^* \right) \frac{1 - z_0^* z^{-1}}{1 - z_0^* z^{-1}} \cdot \frac{1 - z_0 z^{-1}}{1 - z_0 z^{-1}} \\ &= H_1(z) \left(1 - z_0^* z^{-1} \right) \left(1 - z_0 z^{-1} \right) \frac{z^{-1} - z_0}{1 - z_0^* z^{-1}} \cdot \frac{z^{-1} - z_0^*}{1 - z_0 z^{-1}} \\ &= H_{\min}(z) \cdot H_{ap}(z) \end{aligned}$$

把 $H(z)$ 单位圆外的零点： $z = 1/z_0, 1/z_0^*, |z_0| < 1$

映射到单位圆内的镜像位置： $z = z_0, z_0^*$

构成 $H_{\min}(z)$ 的零点。

而幅度响应不变：

$$\left| H(e^{j\omega}) \right| = \left| H_{\min}(e^{j\omega}) \right| \cdot \left| H_{ap}(e^{j\omega}) \right| = \left| H_{\min}(e^{j\omega}) \right|$$

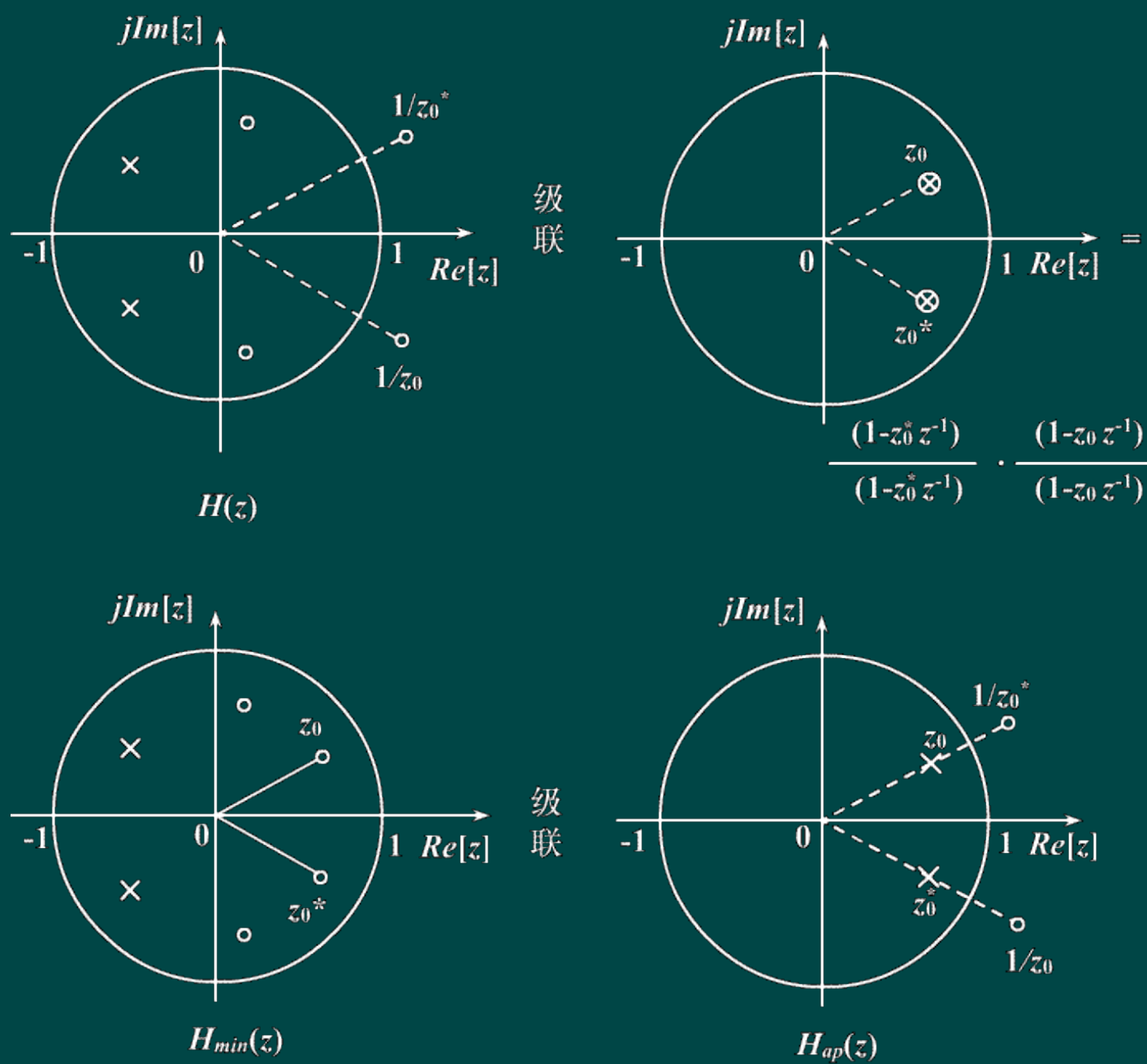


图6-6 系统的等效变换



2) 级联一个全通系统可以使非稳定滤波器变成一个稳定滤波器

单位圆外极点: $z = \frac{1}{r}e^{\pm j\theta}, |r| < 1$

$$H(z) = \frac{1}{\left(z^{-1} - re^{j\theta}\right)\left(z^{-1} - re^{-j\theta}\right)}$$

则可级联一个以下的全通系统

$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - re^{j\theta}}{1 - re^{-j\theta}z^{-1}} \cdot \frac{z^{-1} - re^{-j\theta}}{1 - re^{j\theta}z^{-1}}$$

把非稳定系统的单位圆外的极点映射到单位圆内



3) 作为相位均衡器，校正系统的非线性相位，而不改变系统的幅度特性

$$H(z) = H_d(z) \cdot H_{ap}(z)$$

$$H(e^{j\omega}) = H_d(e^{j\omega}) \cdot H_{ap}(e^{j\omega})$$

$$= |H_d(e^{j\omega})| \cdot |H_{ap}(e^{j\omega})| \cdot e^{j[\varphi_d(\omega) + \varphi_{ap}(\omega)]}$$

$$\text{群延时 } \tau(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = \tau_d(\omega) + \tau_{ap}(\omega) = \tau_0 \text{ (常数)}$$

$$e^2 = [\tau(\omega) - \tau_0]^2 = [\tau_{ap}(\omega) + \tau_d(\omega) - \tau_0]^2$$

利用均方误差最小准则求均衡器 $H_{ap}(z)$ 的有关参数

四、用模拟滤波器设计IIR数字滤波器

◇ 设计思想:

s 平面 \rightarrow z 平面

模拟系统 $H_a(s) \rightarrow H(z)$ 数字系统

- $H(z)$ 的频率响应要能模仿 $H_a(s)$ 的频率响应，映射前后的频率轴必须相对应，即 s 平面的虚轴映射到 z 平面的单位圆
- 因果稳定的 $H_a(s)$ 映射到因果稳定的 $H(z)$ ，即 s 平面的左半平面 $\text{Re}[s] < 0$ 映射到 z 平面的单位圆内 $|z| < 1$ 。



◆ 设计方法:

- 冲激响应不变法

- 双线性变换法

- 阶跃响应不变法

五、冲激响应不变法

1、变换原理

使数字滤波器的单位抽样响应 $h(n)$ 逼近模拟滤波器的单位冲激响应 $h_a(t)$

$$\begin{array}{ccc} h(n) = h_a(t) \Big|_{t=nT} & & T \text{— 抽样周期} \\ \downarrow \quad \quad \downarrow & & \\ H(z) & H_a(s) \end{array}$$

$$H(z) \Big|_{z=e^{sT}} = \hat{H}_a(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a \left(s - j \frac{2\pi}{T} k \right)$$

当 $z = e^{sT}$ 时，理想抽样时，抽样序列的z变换等于理想抽样信号的Laplace变换，理想抽样信号的Laplace变换是其连续时间信号的Laplace变换的周期延拓。

$$H(z)\Big|_{z=e^{sT}} = \hat{H}_a(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(s - j\frac{2\pi}{T}k\right)$$

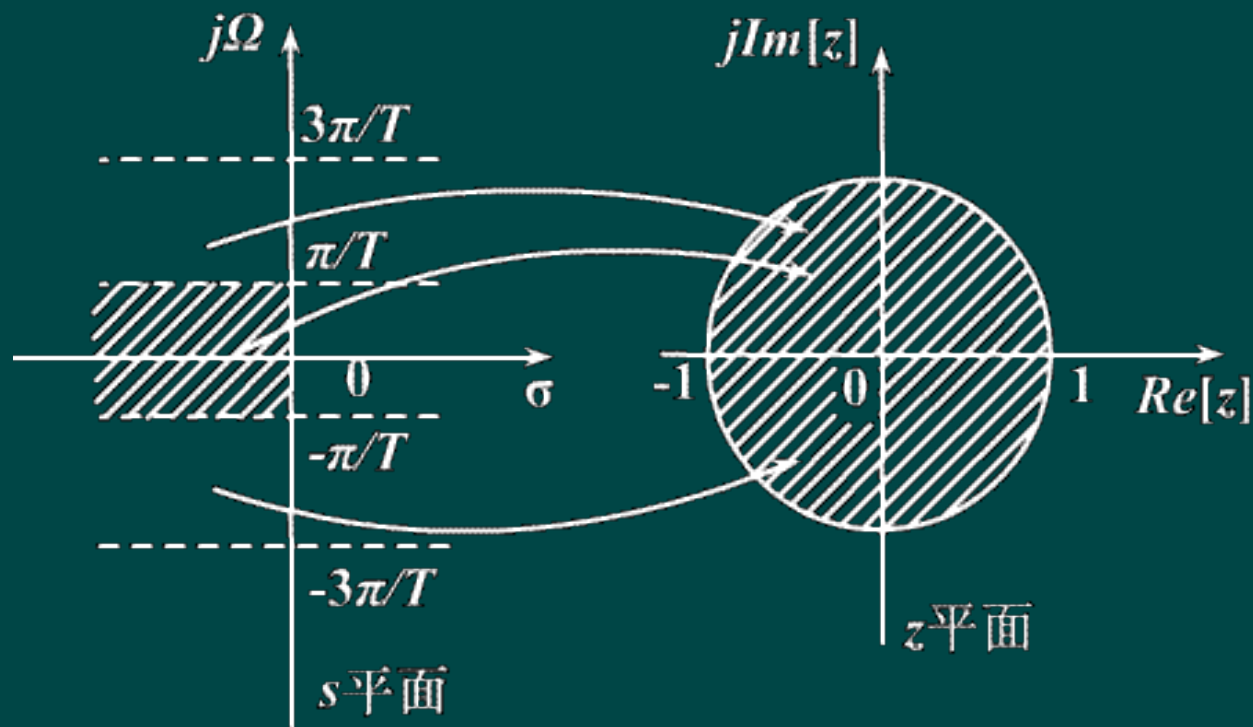


图6-7 冲激响应不变法映射关系

2、混迭失真

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(j\frac{\omega - 2\pi k}{T}\right)$$

数字滤波器的频率响应是模拟滤波器频率响应的周期延拓，周期为 $2\pi/T$

$$\text{仅当 } H_a(j\Omega) = 0 \quad |\Omega| \geq \frac{\pi}{T} = \frac{\Omega_s}{2}$$

即模拟滤波器的频率响应带限于折叠频率之内时，数字滤波器的频率响应才能重现模拟滤波器的频率响应而不产生混迭失真：

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} H_a\left(j\frac{\omega}{T}\right) \quad |\omega| < \pi$$



- 实际系统不可能严格限带，都会混迭失真，在 $|\Omega| > \Omega_s/2$ 处衰减越快，失真越小

- $f_s \uparrow \quad T \downarrow \quad \frac{\pi}{T} \uparrow \quad \frac{\Omega_s}{2} \uparrow \quad \text{混迭} \downarrow$

- 当滤波器的设计指标以数字域频率 ω_c 给定时，不能通过提高抽样频率来改善混迭现象

$$f_s \uparrow \quad T \downarrow \quad \frac{\pi}{T} \uparrow \quad \left[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T} \right] \uparrow$$
$$T \downarrow \quad \Omega_c = \frac{\omega_c}{T} \uparrow$$

即模拟滤波器的截止频率也会增加，此时只能使其阻带衰减比指标要求更大来减小失真

3、模拟滤波器的数字化方法

$$H_a(s) \rightarrow h_a(t) \rightarrow h_a(nT) \rightarrow h(n) \rightarrow H(z)$$


$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k}$$

$$h_a(t) = L^{-1}[H_a(s)] = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k t} u(t)$$


$$h(n) = h_a(nT) = \sum_{k=1}^N A_k e^{s_k nT} u(n) = \sum_{k=1}^N A_k \left(e^{s_k T} \right)^n u(n)$$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^N A_k \left(e^{s_k T} \right)^n z^{-n}$$

$$= \sum_{k=1}^N A_k \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{s_k T} z^{-1} \right)^n = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$


$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k} \quad \rightarrow \quad H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

- 极点: s 平面 $s = s_k \rightarrow$ $z \neq e^{s_k T}$
平面
- 系数相同: A_k
- 稳定性不变: s 平面 $\text{Re}[s_k] < 0 \rightarrow$ $|e^{s_k T}| < 1$
 z 平面


$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} H_a \left(j \frac{\omega}{T} \right)$$

当 T 很小时，数字滤波器增益很大，易溢出，需修正

令： $h(n) = T h_a(nT)$

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{T A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

则： $H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a \left(j \frac{\omega - 2\pi k}{T} \right)$

$$\approx H_a \left(j \frac{\omega}{T} \right) \quad |\omega| < \pi$$



例：设模拟滤波器的系统函数为

$$H_a(s) = \frac{2}{s^2 + 4s + 3} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3}$$

试用冲激响应不变法，设计IIR数字滤波器

解：据题意，得数字滤波器的系统函数：

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{T}{1 - e^{-T} z^{-1}} - \frac{T}{1 - e^{-3T} z^{-1}} \\ &= \frac{T(e^{-T} - e^{-3T})z^{-1}}{1 - (e^{-T} + e^{-3T})z^{-1} + e^{-4T}z^{-2}} \end{aligned}$$

设 $T = 1\text{s}$ ，则

$$H(z) = \frac{0.318z^{-1}}{1 - 0.4177z^{-1} + 0.01831z^{-2}}$$

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k}$$

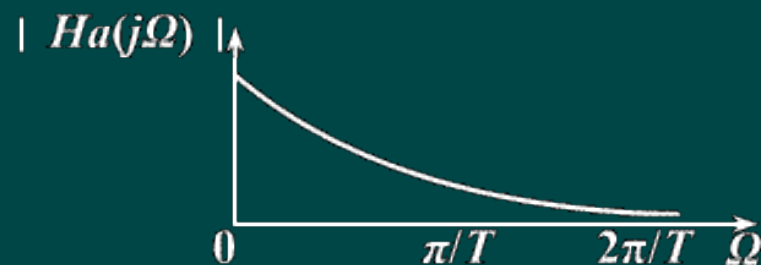


$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{TA_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{0.318z^{-1}}{1 - 0.4177z^{-1} + 0.01831z^{-2}}$$

模拟滤波器的频率响应:

$$H_a(j\Omega) = \frac{2}{(3 - \Omega^2) + j4\Omega}$$



数字滤波器的频率响应:

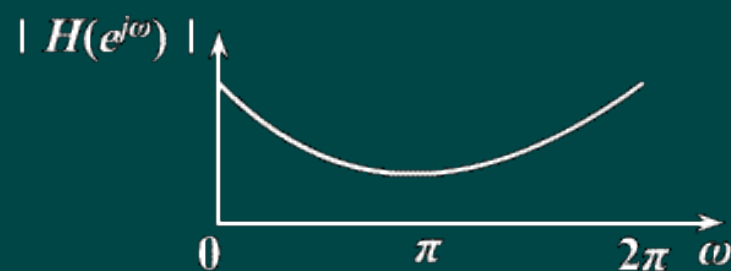


图6-8 冲激响应不变法的频率响应幅度

$$H(e^{j\omega}) = \frac{0.318e^{-j\omega}}{1 - 0.4177e^{-j\omega} + 0.01831e^{-j2\omega}}$$



4、优缺点

- 优点：
 - $h(n)$ 完全模仿模拟滤波器的单位抽样响应 $h_a(t)$
时域逼近良好
 - 保持线性关系： $\omega = \Omega T$
线性相位模拟滤波器转变为线性相位数字滤波器
- 缺点：
 - 频率响应混叠
只适用于限带的低通、带通滤波器

六、双线性变换法

1、变换原理

使数字滤波器的频率响应

与模拟滤波器的频率响应相似。

冲激响应不变法：时域模仿逼近

缺点是产生频率响应的混叠失真

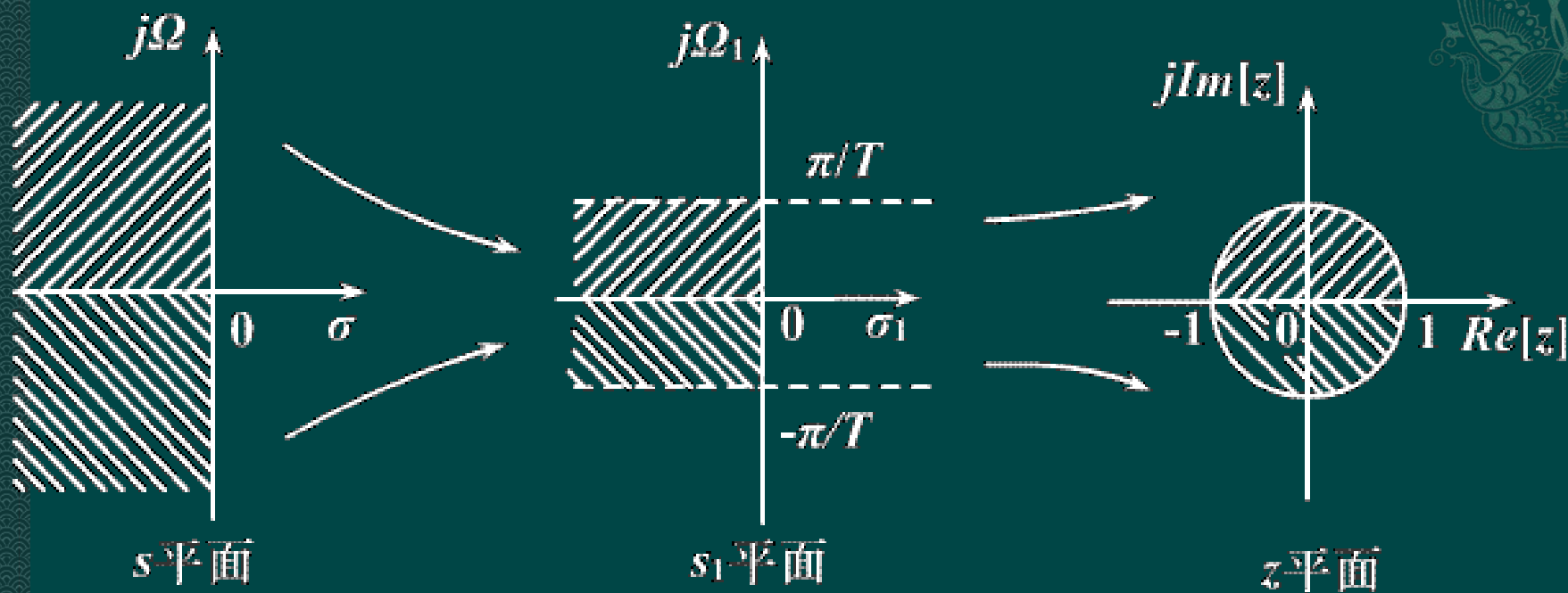


图6-11 双线性变换的映射关系

$$\Omega : [-\infty, \infty] \quad \Omega_1 : \left[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T} \right]$$

$$\Omega = \operatorname{tg} \frac{\Omega_1 T}{2} \quad z = e^{s_1 T}$$



$$\Omega = \operatorname{tg} \frac{\Omega_1 T}{2} = \frac{\sin \frac{\Omega_1 T}{2}}{\cos \frac{\Omega_1 T}{2}} = \frac{\frac{e^{j\frac{\Omega_1 T}{2}} - e^{-j\frac{\Omega_1 T}{2}}}{2j}}{\frac{e^{j\frac{\Omega_1 T}{2}} + e^{-j\frac{\Omega_1 T}{2}}}{2}}$$

$$s = j\Omega$$

$$s_1 = j\Omega_1$$

$$s = j\Omega = \frac{e^{j\frac{\Omega_1 T}{2}} - e^{-j\frac{\Omega_1 T}{2}}}{e^{j\frac{\Omega_1 T}{2}} + e^{-j\frac{\Omega_1 T}{2}}} = \frac{e^{\frac{s_1 T}{2}} - e^{-\frac{s_1 T}{2}}}{e^{\frac{s_1 T}{2}} + e^{-\frac{s_1 T}{2}}} \times \frac{e^{-\frac{s_1 T}{2}}}{e^{-\frac{s_1 T}{2}}}$$

$$= \frac{1 - e^{-s_1 T}}{1 + e^{-s_1 T}} = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

$$z = e^{s_1 T}$$

$$\therefore s = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad z = \frac{1 + s}{1 - s}$$



- ◆ 为使模拟滤波器某一频率与数字滤波器的任一频率有对应关系($\Omega * T = \omega$)，引入系数 c

$$\Omega = c \cdot \operatorname{tg} \frac{\Omega_1 T}{2}$$

$$s = c \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad z = \frac{c + s}{c - s}$$

- 使得至少在某些需要的点（如低频端，特定截止频率点等）上满足： $\Omega * T = \omega$



2、变换常数 c 的选择

1) 低频处有较确切的对应关系: $\Omega \approx \Omega_1$

$$\Omega_1 \approx \Omega = c \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\Omega_1 T}{2} \right) \approx c \cdot \frac{\Omega_1 T}{2} \quad c = \frac{2}{T}$$

2) 某一特定频率严格相对应: $\Omega_c \leftrightarrow \omega_c$

$$\Omega_c = c \cdot \operatorname{tg} \frac{\Omega_{1c} T}{2} = c \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega_c}{2} \quad c = \Omega_c \operatorname{ctg} \frac{\omega_c}{2}$$

特定频率处频率响应严格相等，可以较准确地控制截止频率位置，即: $\Omega_{1c} \cdot T = \omega_c$



3、逼近情况

$$1) \quad s = c \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = c \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}} = jc \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = j\Omega$$

$$s = j\Omega \text{ 平面虚轴} \longleftrightarrow z = e^{j\omega} \text{ 平面单位圆}$$

$$2) \quad z = \frac{c + s}{c - s} = \frac{c + \sigma + j\Omega}{c - \sigma - j\Omega} \quad |z| = \frac{\sqrt{(c + \sigma)^2 + \Omega^2}}{\sqrt{(c - \sigma)^2 + \Omega^2}}$$

$$s \text{ 平面} \longleftrightarrow z \text{ 平面}$$

$$\sigma < 0 \quad |z| < 1 \quad \text{左半平面} \longleftrightarrow \text{单位圆内}$$

$$\sigma > 0 \quad |z| > 1 \quad \text{右半平面} \longleftrightarrow \text{单位圆外}$$

$$\sigma = 0 \quad |z| = 1 \quad \text{虚轴} \longleftrightarrow \text{单位圆上}$$

4、优缺点

◆ 优点：避免了频率响应的混迭现象

$$\Omega = c \cdot \tan \frac{\omega}{2}$$

s 平面与 z 平面为单值变换

$$\Omega > 0 \quad \omega > 0$$

$$\Omega < 0 \quad \omega < 0$$

$$\Omega \rightarrow \infty \quad \omega = \pi$$

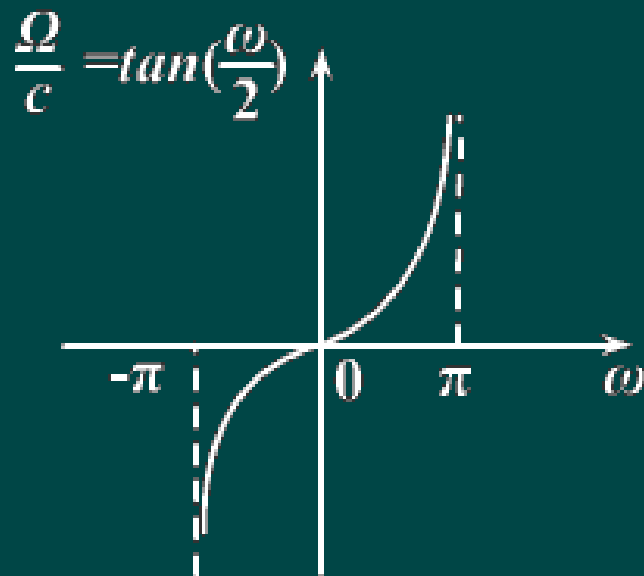


图6-12 双线性变换的频率间非线性关系

◆ 缺点：除了零频率附近， Ω 与 ω 之间严重非线性

1) 线性相位模拟滤波器 \rightarrow 非线性相位数字滤波器

2) 模拟滤波器的幅频响应为分段常数型，不然会产生畸变

分段常数型模拟滤波器经变换后仍为分段常数型数字滤波器，但临界频率点产生畸变

$$\Omega_1 = \omega_1 / T$$

$$\omega = 2 \cdot \tan^{-1} \left(\frac{\Omega_1}{c} \right) \neq \omega_1$$

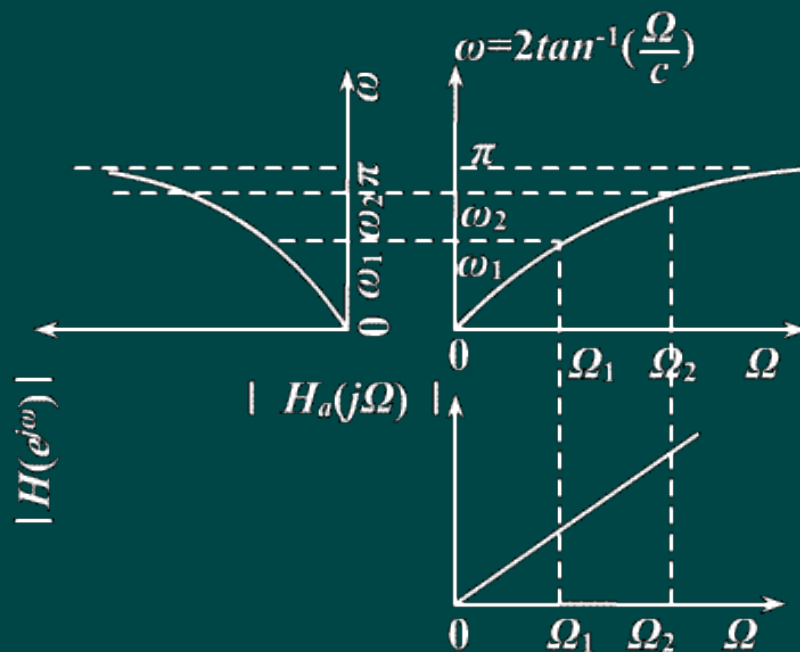


图6-13 理想微分器经双线性变换后幅频响应产生畸变

◆ 预畸变

给定数字滤波器的截止频率 ω_1 ，则

$$\Omega_1 = c \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega_1}{2}$$

按 Ω_1 设计模拟滤波器，经双线性变换后，即可得到 ω_1 为截止频率的数字滤波器

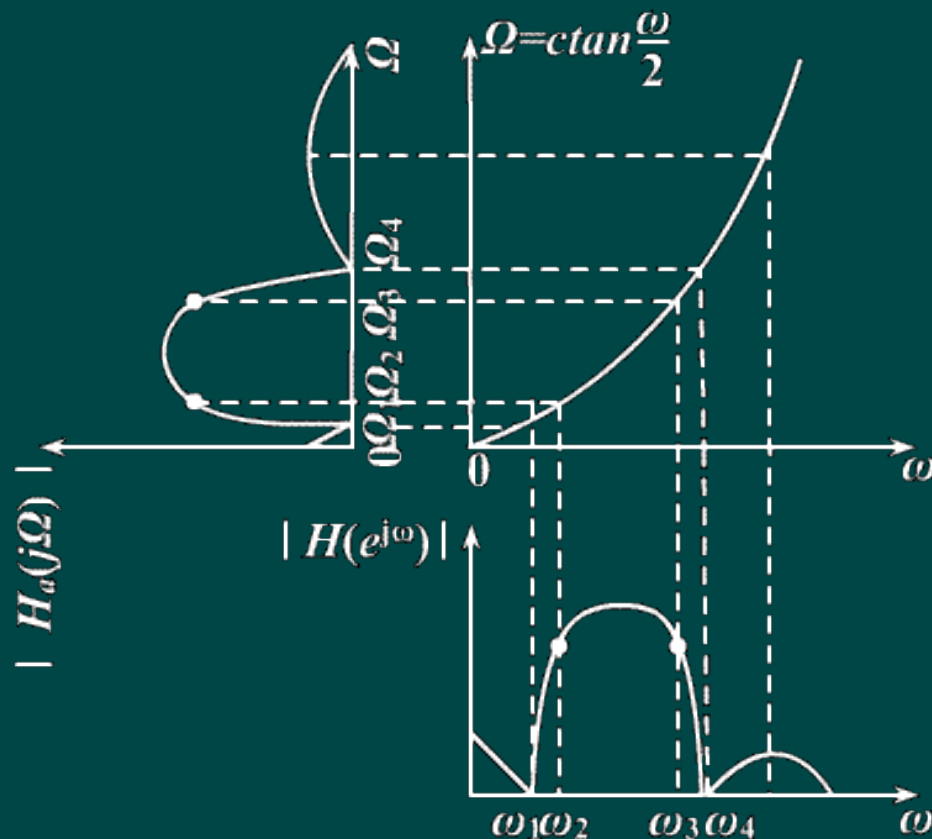


图6-14 双线性变换的频率非线性预畸



6、模拟滤波器的数字化方法

$$H(z) = H_a(s) \bigg|_{s=c \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = H_a \left(c \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)$$



可分解成级联的低阶子系统

$$H_a(s) = H_{a_1}(s)H_{a_2}(s)\cdots H_{a_m}(s)$$

$$H(z) = H_1(z)H_2(z)\cdots H_m(z)$$

$$\text{其中: } H_i(z) = H_{a_i}(s) \bigg|_{s=c\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

可分解成并联的低阶子系统

$$H_a(s) = \bar{H}_{a_1}(s) + \bar{H}_{a_2}(s) + \cdots + \bar{H}_{a_m}(s)$$

$$H(z) = \bar{H}_1(z) + \bar{H}_2(z) + \cdots + \bar{H}_m(z)$$

$$\text{其中: } \bar{H}_i(z) = \bar{H}_{a_i}(s) \bigg|_{s=c\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \quad i = 1, 2, \dots, m$$



七、常用模拟低通滤波器特性

◇ 将数字滤波器技术指标转变成模拟滤波器技术指标，设计模拟滤波器，再转换成数字滤波器

■ 模拟滤波器

- 巴特沃斯 Butterworth 滤波器
- 切比雪夫 Chebyshev 滤波器
- 椭圆 Ellipse 滤波器
- 贝塞尔 Bessel 滤波器

1、由幅度平方函数 $|H_a(j\Omega)|^2$ 确定模拟滤波器的系统函数 $H_a(s)$

$$\begin{aligned}|H_a(j\Omega)|^2 &= H_a(j\Omega)H_a^*(j\Omega) \\&= H_a(j\Omega)H_a(-j\Omega) \\&= H_a(s)H_a(-s)\Big|_{s=j\Omega}\end{aligned}$$

$h(t)$ 是实函数

将左半平面的极点归 $H_a(s)$

将以虚轴为对称轴的对称零点的任一半作为 $H_a(s)$ 的零点，虚轴上的零点一半归 $H_a(s)$

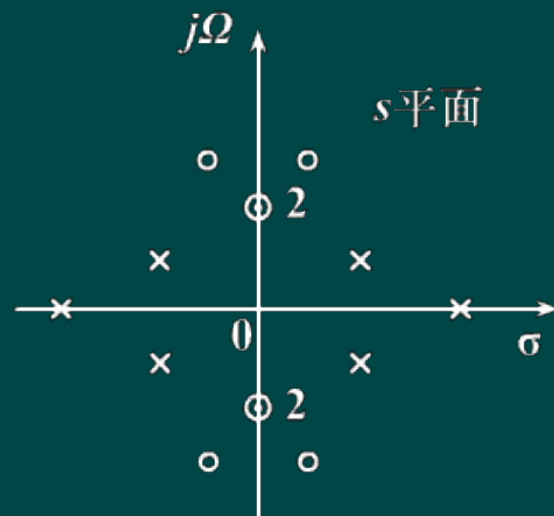


图6-16 $H_a(s)H_a(-s)$ 的零点、极点分布(成象限对称，虚轴零点上的“2”字表示是二阶零点)

由 $|H_a(j\Omega)|^2$ 确定 $H_a(s)$ 的方法



- ◆ 由幅度平方函数得象限对称的 s 平面函数
- 将 $H_a(s)H_a(-s)$ 因式分解，得到各零极点
- 对比 $H_a(j\Omega)$ 和 $H_a(s)$ ，确定增益常数
- 由零极点及增益常数，得 $H_a(s)$

例：已知幅度平方函数：

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{16(25 - \Omega^2)^2}{(49 + \Omega^2)(36 + \Omega^2)}, \quad \text{求系统函数 } H_a(s)$$

解： $H_a(s)H_a(-s) = |H_a(j\Omega)|^2_{\Omega^2=-s^2} = \frac{16(25 + s^2)^2}{(49 - s^2)(36 - s^2)}$

极点： $s = \pm 7, s = \pm 6$ 零点： $s = \pm j5$ （二阶）

$H_a(s)$ 的极点： $s = -7, s = -6$ 零点： $s = \pm j5$

设增益常数为 K_0 $H_a(s) = \frac{K_0(s^2 + 25)}{(s + 7)(s + 6)}$

由 $H_a(s)|_{s=0} = H_a(j\Omega)|_{\Omega=0}$ ，得 $K_0 = 4$

$$\therefore H_a(s) = \frac{4(s^2 + 25)}{(s + 7)(s + 6)} = \frac{4s^2 + 100}{s^2 + 13s + 42}$$



2、Butterworth 低通逼近

幅度平方函数:
$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

N 为滤波器的阶数

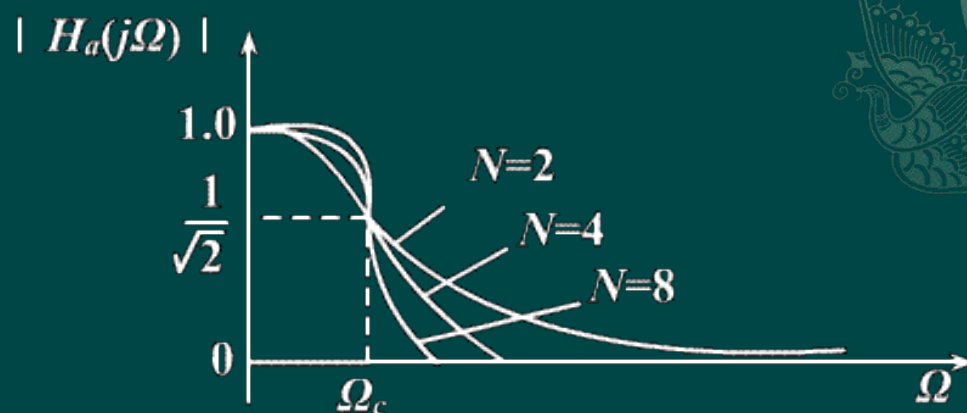
Ω_c 为通带截止频率

当 $|H_a(j\Omega_c)|^2 = 1/2$ 时
$$\delta_1 = 20\lg \left| \frac{H_a(j0)}{H_a(j\Omega_c)} \right| = 3dB$$

称 Ω_c 为Butterworth低通滤波器的3分贝带宽

1) 幅度函数特点:

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$



■ $\Omega = 0$ $|H_a(j\Omega)|^2 = 1$ 图6-17 巴特沃思滤波器幅度特性及其与 N 的关系

■ $\Omega = \Omega_c$ $|H_a(j\Omega)|^2 = 1/2$ $\delta_1 = 3dB$ 3dB不变性

◆ $\Omega < \Omega_c$ 通带内有最大平坦的幅度特性, 单调减小

◆ $\Omega > \Omega_c$ 过渡带及阻带内快速单调减小

当 $\Omega = \Omega_{st}$ (阻带截止频率) 时, 衰减 δ_2 为阻带最小衰减



2) 幅度平方特性的极点分布:

$$\left| H_a(j\Omega) \right|_{\Omega=s/j}^2 = H_a(s)H_a(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\Omega_c} \right)^{2N}}$$

Butterworth滤波器是一个全极点滤波器，其极点：

$$s_k = (-1)^{\frac{1}{2N}} j\Omega_c = \Omega_c e^{j\left[\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2N}\right]\pi} \quad k = 1, 2, \dots, 2N$$



- 极点在 s 平面呈象限对称，分布在Buttterworth圆上(不是单位圆)，共 $2N$ 个极点
- 极点间的角度间隔为 $\pi / N \text{ rad}$
- 极点不落在虚轴上，这样滤波器才可能是稳定的
- N 为奇数，实轴上有极点， N 为偶数，实轴上无极点

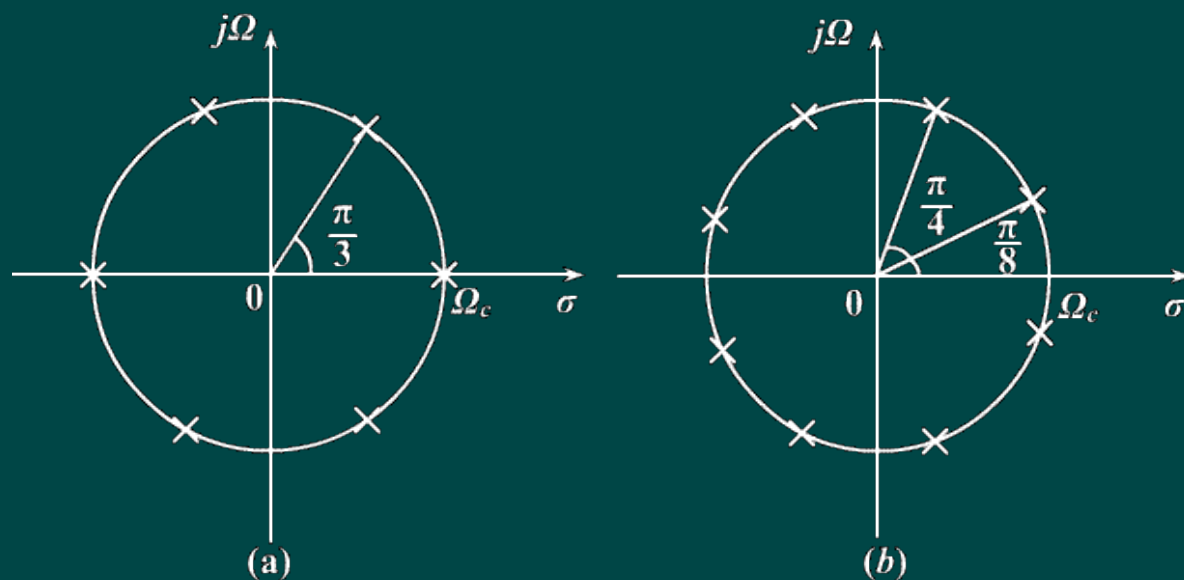


图6-18 巴特沃思滤波器 $Ha(s)Ha(-s)$ 在 s 平面的极点位置
(a) $N=3$ (三阶);(b) $N=4$ (四阶)

3) 滤波器的系统函数:



$$H_a(s)H_a(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N}} \quad H_a(s) = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=1}^N (s - s_k)}$$

$$s_k = \Omega_c e^{j\left[\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2N}\right]\pi} \quad k = 1, 2, \dots, N$$

归一化系统的系统函数 $H_{an}(s) = H_a(s) \Big|_{\Omega_c=1}$

去归一化, 得 $H_a(s) = H_{an}(s') \Big|_{s'=\frac{1}{\Omega_c}s} = H_{an}\left(\frac{s}{\Omega_c}\right)$



4) 滤波器的设计步骤:

- 确定技术指标: Ω_p δ_1 Ω_s δ_2
- 根据技术指标求出滤波器阶数 N :

$$\text{由 } \delta_1 = -20 \lg |H_a(j\Omega_p)| \quad |H_a(j\Omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

$$\text{得: } 1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{0.1\delta_1}$$

$$\text{同理: } 1 + \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{0.1\delta_2} \quad \left. \vphantom{1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}} \right\} \Rightarrow \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_s}\right)^N = \sqrt{\frac{10^{0.1\delta_1} - 1}{10^{0.1\delta_2} - 1}}$$

$$\text{令 } \lambda_{sp} = \frac{\Omega_s}{\Omega_p} \quad k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1\delta_1} - 1}{10^{0.1\delta_2} - 1}} \quad \text{则: } N = -\frac{\lg k_{sp}}{\lg \lambda_{sp}}$$

◆ 求出归一化系统函数：
$$H_{an}(s) = \frac{1}{\prod_{k=1}^N (s - s_k)}$$

其中极点：

$$s_k = \Omega_c e^{j\left[\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2N}\right]\pi} \quad k = 1, 2, \dots, N$$

或者由 N ，直接查表得 $H_{an}(s)$

■ 去归一化

$$H_a(s) = H_{an}\left(\frac{s}{\Omega_c}\right)$$

其中技术指标 Ω_c 给出或由下式求出：

$$\Omega_c = \Omega_p \left(10^{0.1\delta_1} - 1\right)^{-\frac{1}{2N}} \quad \text{阻带指标有富裕}$$

$$\text{或} \quad \Omega_c = \Omega_s \left(10^{0.1\delta_2} - 1\right)^{-\frac{1}{2N}} \quad \text{通带指标有富裕}$$

- 例：设计Butterworth数字低通滤波器，要求在频率低于 $0.2\pi \text{ rad}$ 的通带内幅度特性下降小于 1dB 。在频率 0.3π 到 π 之间的阻带内，衰减大于 15dB 。分别用冲激响应不变法和双线性变换法。

1、用冲激响应不变法设计

1) 由数字滤波器的技术指标：

$$\omega_p = 0.2\pi \text{ rad} \quad \delta_1 = 1\text{dB}$$

$$\omega_s = 0.3\pi \text{ rad} \quad \delta_2 = 15\text{dB}$$

2) 得模拟滤波器的技术指标：选 $T = 1 \text{ s}$

$$\Omega_p = \omega_p / T = 0.2\pi \text{ rad} / \text{s} \quad \delta_1 = 1\text{dB}$$

$$\Omega_s = \omega_s / T = 0.3\pi \text{ rad} / \text{s} \quad \delta_2 = 15\text{dB}$$



3) 设计Butterworth模拟低通滤波器

a) 确定参数

$$\lambda_{sp} = \Omega_s / \Omega_p = 1.5 \quad k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1\delta_1} - 1}{10^{0.1\delta_2} - 1}} = 0.092$$

$$N = -\lg k_{sp} / \lg \lambda_{sp} = 5.884 \quad \text{取} N = 6$$

$$\Omega_c = \Omega_p \left(10^{0.1\delta_1} - 1\right)^{-\frac{1}{2N}} = 0.7032 \quad rad / s$$

用通带技术指标，使阻带特性较好，改善混迭失真

b) 求出极点（左半平面）

$$s_k = \Omega_c e^{j\left[\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2N}\right]\pi} \quad k = 1, 2, \dots, 6$$

c) 构造系统函数

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^6}{\prod_{k=1}^6 (s - s_k)}$$

或者

b') 由 $N = 6$ ，直接查表6.2可得

$$H_{an}(s) = \frac{1}{1 + 3.8637s + 7.4641s^2 + 9.1416s^3 + 7.4641s^4 + 3.8637s^5 + s^6}$$

c') 去归一化

$$H_a(s) = H_{an}\left(\frac{s}{\Omega_c}\right) = \frac{0.1209}{s^6 + 2.716s^5 + 3.691s^4 + 3.179s^3 + 1.825s^2 + 0.121s + 0.1209}$$



4) 将 $H_a(s)$ 展成部分分式形式:

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k}$$

变换成Butterworth数字滤波器:

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{k=1}^N \frac{TA_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}} \\ &= \frac{0.2871 - 0.4466z^{-1}}{1 - 0.1297z^{-1} + 0.6949z^{-2}} + \frac{-2.1428 + 1.1454z^{-1}}{1 - 1.0691z^{-1} + 0.3699z^{-2}} \\ &\quad + \frac{1.8558 - 0.6304z^{-1}}{1 - 0.9972z^{-1} + 0.2570z^{-2}} \end{aligned}$$

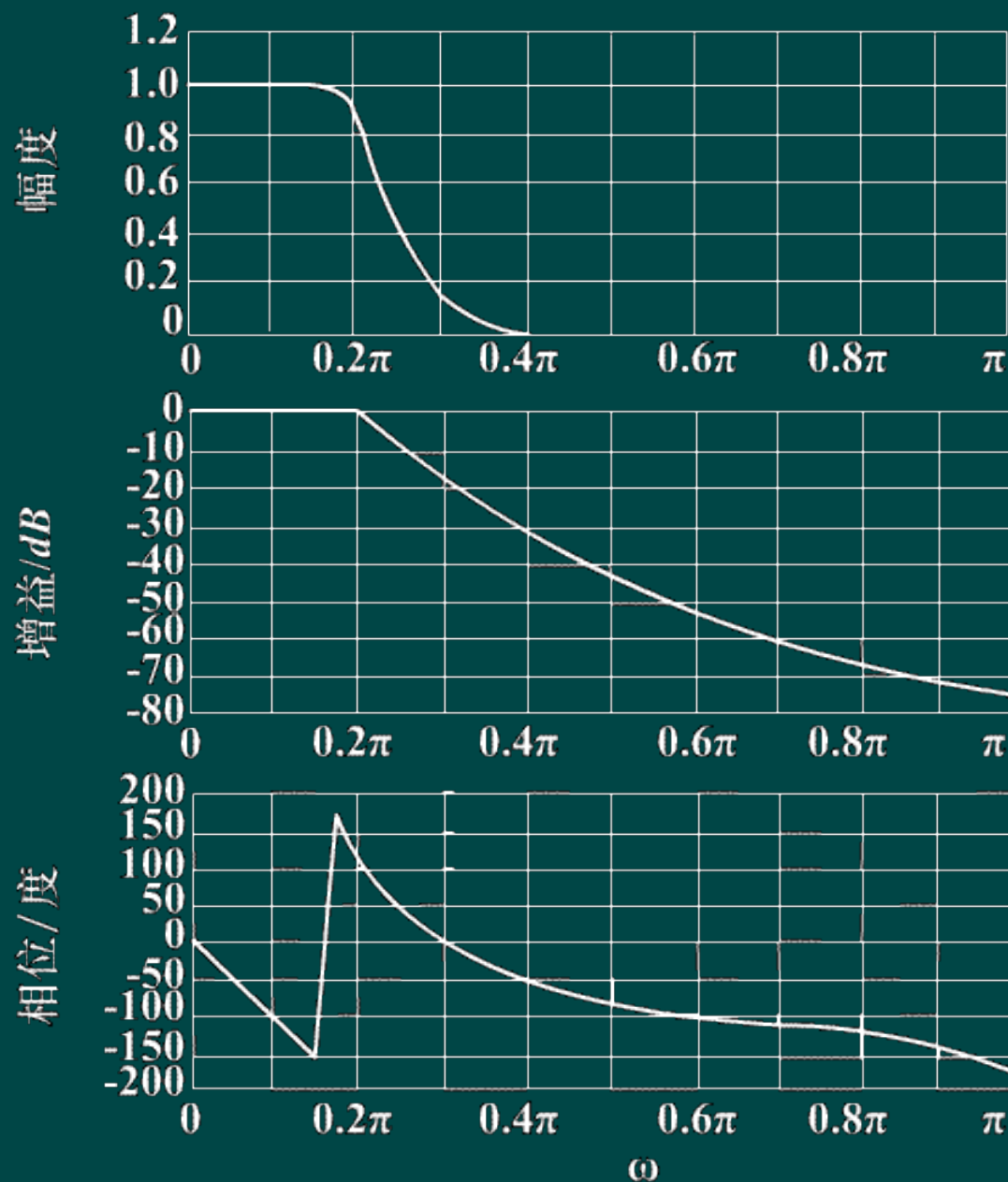


图6-24 用冲激响应不变法设计出的六阶巴特沃思低通数字滤波器频率响应



2、用双线性变换法设计

1) 由数字滤波器的技术指标:

$$\omega_p = 0.2\pi \text{ rad} \quad \delta_1 = 1\text{dB}$$

$$\omega_s = 0.3\pi \text{ rad} \quad \delta_2 = 15\text{dB}$$

2) 考虑预畸变, 得模拟滤波器的技术指标:

选 $T = 1\text{s}$

$$\Omega_p = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega_p}{2} = 0.65 \text{ rad/s} \quad \delta_1 = 1\text{dB}$$

$$\Omega_s = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega_s}{2} = 1.019 \text{ rad/s} \quad \delta_2 = 15\text{dB}$$



3) 设计Butterworth模拟低通滤波器

a) 确定参数

$$\lambda_{sp} = \Omega_s / \Omega_p = 1.568 \quad k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1\delta_1} - 1}{10^{0.1\delta_2} - 1}} = 0.092$$

$$N = -\lg k_{sp} / \lg \lambda_{sp} = 5.306 \quad \text{取} N = 6$$

$$\Omega_c = \Omega_s \left(10^{0.1\delta_2} - 1\right)^{-\frac{1}{2N}} = 0.7662 \quad rad / s$$

用阻带技术指标，使通带特性较好，因无混迭问题



b) 求出极点（左半平面）

$$s_k = \Omega_c e^{j\left[\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2N}\right]\pi} \quad k = 1, 2, \dots, 6$$

c) 构造系统函数

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^6}{\prod_{k=1}^6 (s - s_k)}$$

或者

b') 由 $N = 6$, 直接查表得

$$H_{an}(s) = \frac{1}{1 + 3.8637s + 7.4641s^2 + 9.1416s^3 + 7.4641s^4 + 3.8637s^5 + s^6}$$

c') 去归一化

$$H_a(s) = H_{an}\left(\frac{s}{\Omega_c}\right)$$

$$= \frac{0.2024}{(s^2 + 0.396s + 0.5871)(s^2 + 1.083s + 0.5871)(s^2 + 1.480s + 0.5871)}$$



4) 将 $H_a(s)$ 变换成 Butterworth 数字滤波器:

$$\begin{aligned} H(z) &= H_a(s) \bigg|_{s=\frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \\ &= \frac{1}{(1-1.268z^{-1}+0.7051z^{-2})} \cdot \frac{1}{(1-1.010z^{-1}+0.358z^{-2})} \\ &\quad \cdot \frac{1}{(1-0.9044z^{-1}+0.2155z^{-2})} \end{aligned}$$





小结：利用模拟滤波器设计IIR数字滤波器的步骤

■ 确定数字滤波器的技术指标：

通带截止频率 ω_p 、通带衰减 δ_1

阻带截止频率 ω_s 、阻带衰减 δ_2

■ 将数字滤波器的技术指标转变成模拟滤波器的技术指标

■ 冲激响应不变法

通带截止频率 $\Omega_p = \omega_p / T$

阻带截止频率 $\Omega_s = \omega_s / T$

■ 双线性变换法

δ_1 、 δ_2 不变

通带截止频率 $\Omega_p = c \cdot \text{tg}(\omega_p / 2)$

阻带截止频率 $\Omega_s = c \cdot \text{tg}(\omega_s / 2)$



- ◆ 按模拟滤波器的技术指标设计模拟低通滤波器
 - Butterworth低通滤波器
 - Chebyshev低通滤波器
- 将模拟低通滤波器转换成数字低通滤波器
 - 冲激响应不变法
 - 双线性变换法

八、设计IIR滤波器的频率变换法

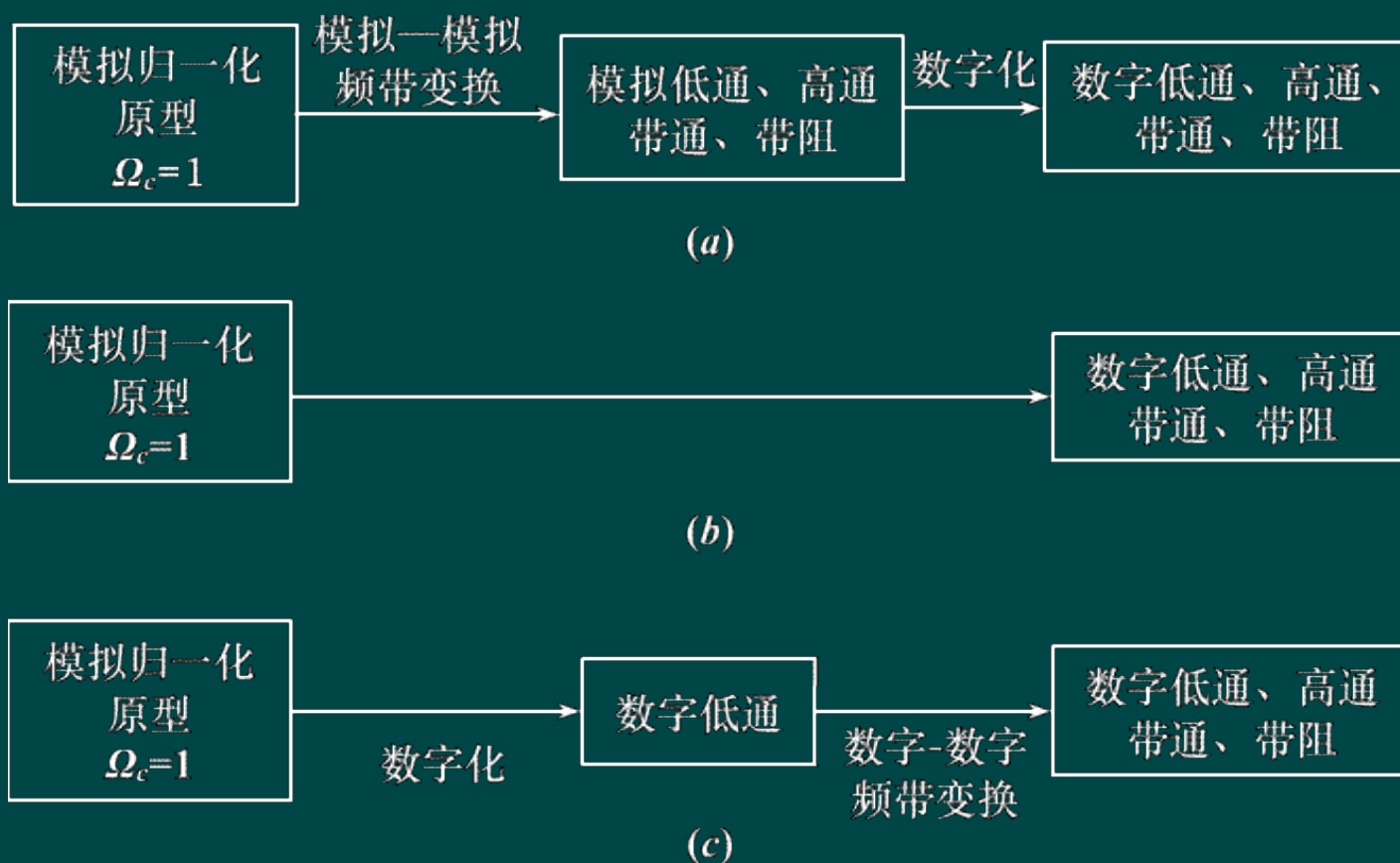
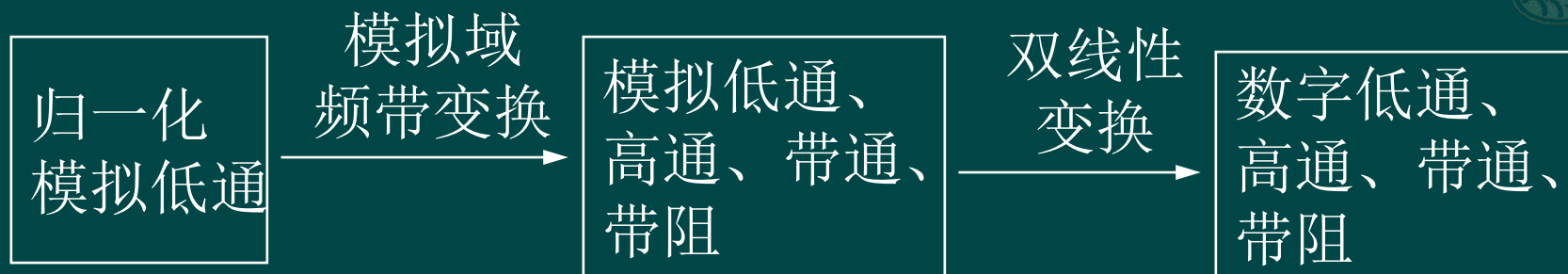


图6-23 设计IIR数字滤波器的频率变换法
(a)先模拟频带变换，再数字化;(b)把(a)的两步合成一步直接设计;
(c)先数字化，再进行数字频带变换

九、模拟域频带变换法



$$H_{an}(\bar{s})$$

$$H_a(s)$$

$$H(z)$$

$$\bar{s} = \bar{\sigma} + j\bar{\Omega}$$

$$s = \sigma + j\Omega$$

$$\bar{s} = G(s)$$

$$j\bar{\Omega} = G(j\Omega)$$

$$H_a(s) = H_{an}(\bar{s}) \Big|_{\bar{s}=G(s)}$$

$$H_a(j\Omega) = H_{an}(j\bar{\Omega}) \Big|_{j\bar{\Omega}=G(j\Omega)}$$

1. 从归一化模拟低通—模拟低通

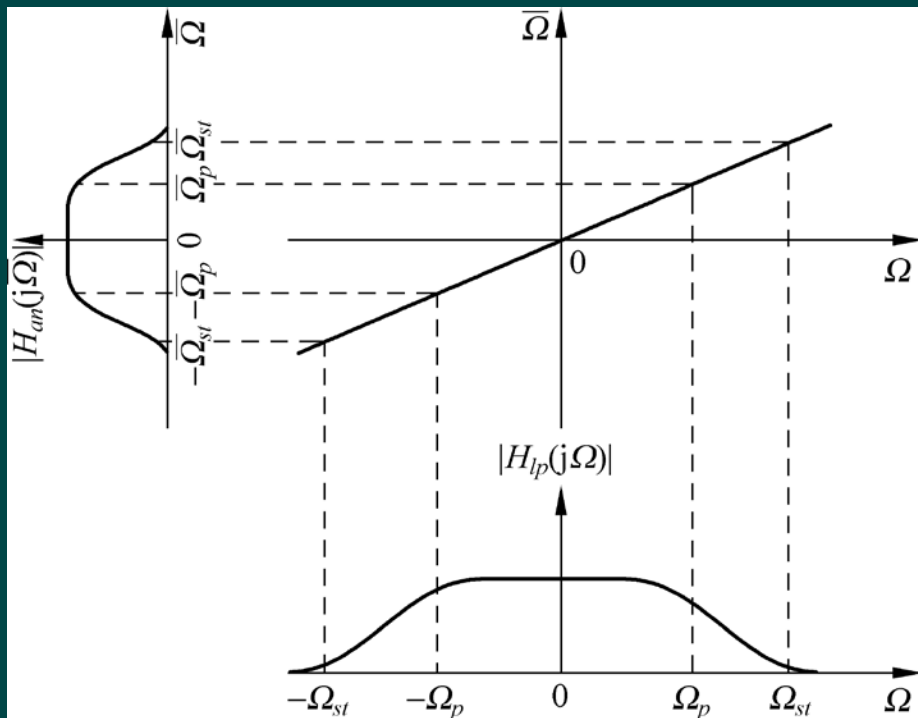


图6.17 模拟低通到模拟低通的频率变换

$$\bar{s} = sd, \quad \bar{\Omega} = \Omega d$$

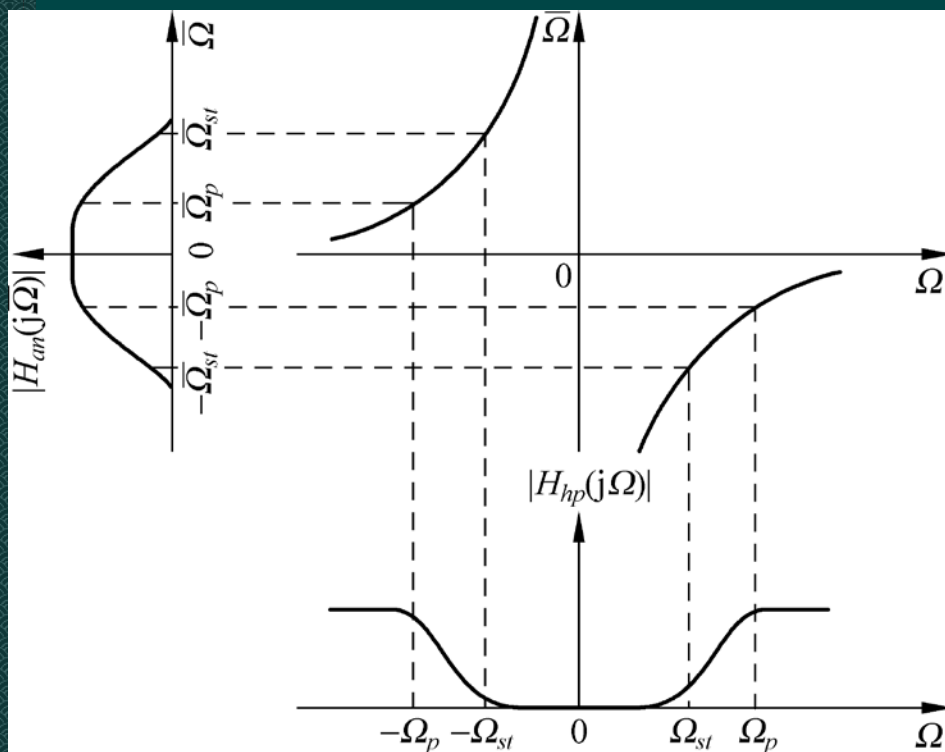
$$d = \frac{1}{\Omega_p}$$

$$\textcircled{1} \quad \bar{\Omega} = 0 \longrightarrow \Omega = 0, \quad \bar{\Omega} = \pm \infty \longrightarrow \Omega = \pm \infty$$

$$\textcircled{2} \quad \bar{\Omega} = \pm \bar{\Omega}_p = \pm 1 \longrightarrow \Omega = \pm \Omega_p$$

$$\bar{s} = \frac{s}{\Omega_p}, \quad \bar{\Omega} = \frac{\Omega}{\Omega_p}$$

2、从归一化模拟低通—模拟高通



① $\bar{\Omega}$ 从 $-\infty$ 到 0 $\rightarrow \Omega$ 从 0 到 $+\infty$

$\bar{\Omega}$ 从 0 到 $+\infty \rightarrow \Omega$ 从 $-\infty$ 到 0

② $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_p = 1 \rightarrow \Omega = -\Omega_p$

$\bar{\Omega} = -\bar{\Omega}_p = -1 \rightarrow \Omega = \Omega_p$

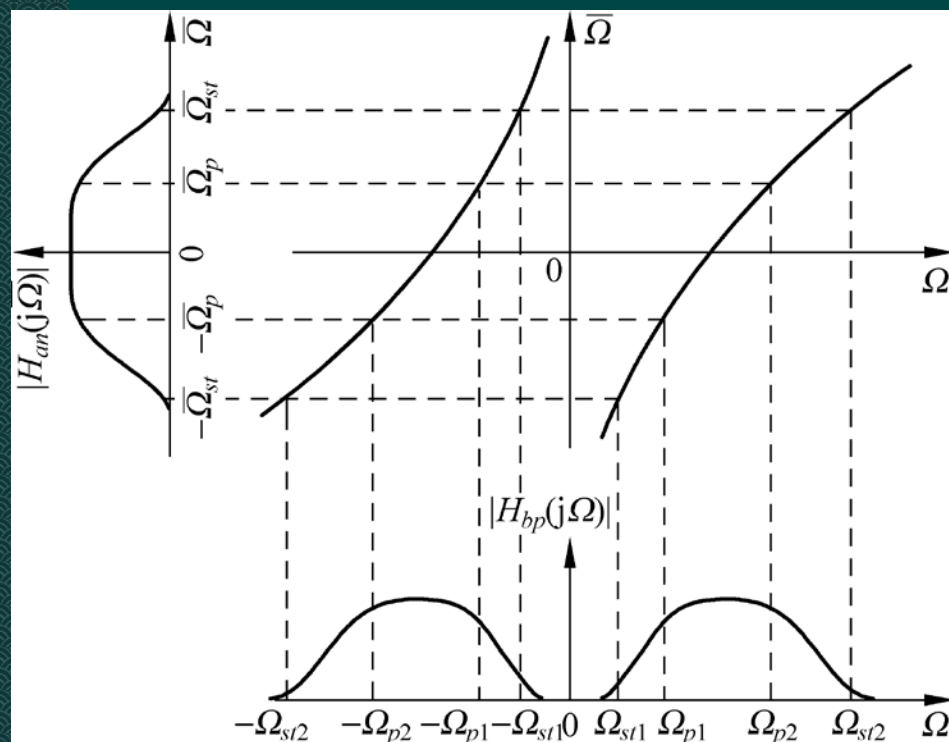
$$\bar{s} = \frac{d}{s}, \quad \bar{\Omega} = -\frac{d}{\Omega}$$

$$d = \Omega_p$$

图6.18 模拟低通到模拟高通的频率变换

$$\bar{s} = \frac{\Omega_p}{s}, \quad \bar{\Omega} = -\frac{\Omega_p}{\Omega}$$

3、从归一化模拟低通—模拟带通



- ① $\bar{\Omega} = -\infty \rightarrow \Omega = -\infty, 0^+$
- ② $\bar{\Omega} = 0 \rightarrow \Omega = -\Omega_{p0}, +\Omega_{p0} \quad (\Omega_{p0} \text{ 是极点})$
- ③ $\bar{\Omega} = +\infty \rightarrow \Omega = 0^-, +\infty$
- ④ $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_p = 1 \rightarrow \Omega = \Omega_{p2}, -\Omega_{p1}$
 $\bar{\Omega} = -\bar{\Omega}_p = -1 \rightarrow \Omega = \Omega_{p1}, -\Omega_{p2}$

$$\bar{s} = \frac{d(s^2 + b^2)}{s}, \quad \bar{\Omega} = \frac{d(\Omega^2 - b^2)}{\Omega}$$

$$1 = \frac{d(\Omega_{p2}^2 - b^2)}{\Omega_{p2}}, \quad -1 = \frac{d(\Omega_{p1}^2 - b^2)}{\Omega_{p1}}$$

$$b^2 = \Omega_{p1}\Omega_{p2} = \Omega_{p0}^2$$

图6.19 模拟低通到模拟带通的频率变换



$$d = \frac{1}{\Omega_{p2} - \Omega_{p1}} = \frac{1}{B_p}$$

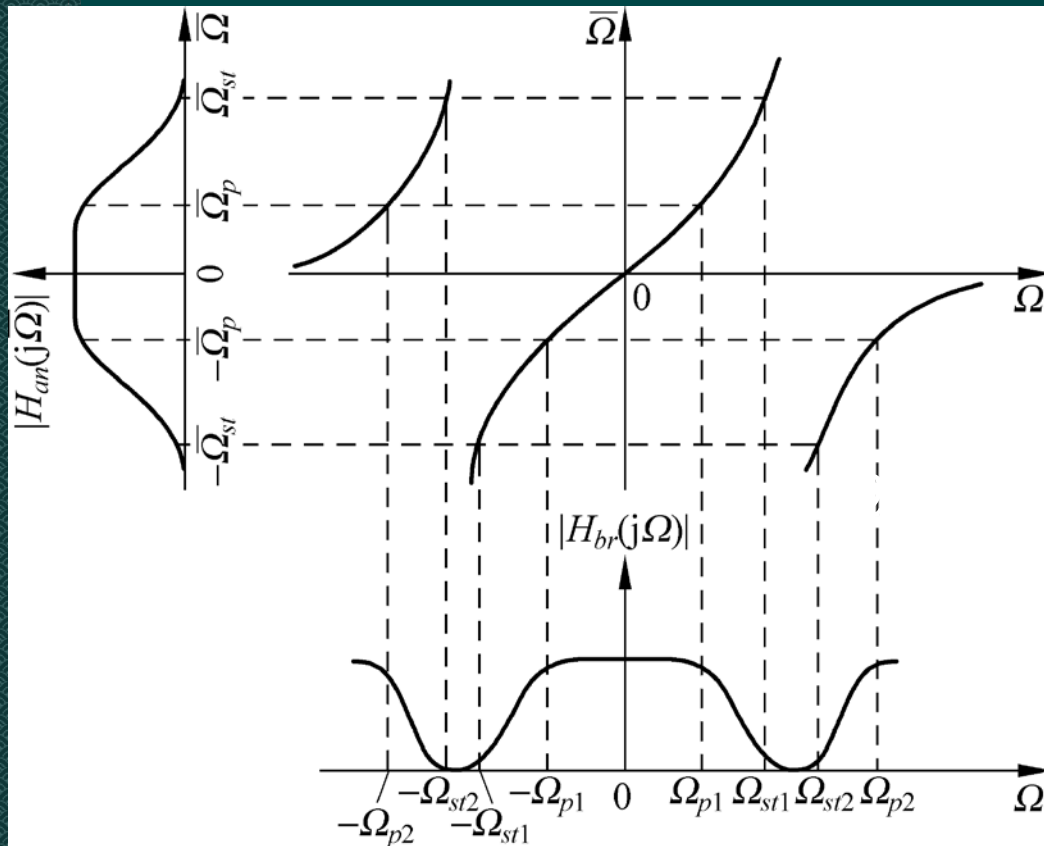
$$\Omega_{p0} = \sqrt{\Omega_{p1}\Omega_{p2}} \quad (6.6.7)$$

$$B_p = \Omega_{p2} - \Omega_{p1} \quad (6.6.8)$$

$$\frac{\bar{s}}{s} = \frac{s^2 + \Omega_{p0}^2}{B_p s} = \frac{s^2 + \Omega_{p1}\Omega_{p2}}{(\Omega_{p2} - \Omega_{p1})s} \quad (6.6.9)$$

$$\frac{\bar{\Omega}}{\Omega} = \frac{\Omega^2 - \Omega_{p0}^2}{B_p \Omega} = \frac{\Omega^2 - \Omega_{p1}\Omega_{p2}}{(\Omega_{p2} - \Omega_{p1})\Omega} \quad (6.6.10)$$

4、从归一化模拟低通—模拟带阻



$$(1) \bar{\Omega} = \infty \rightarrow \Omega = \pm \Omega_{st0}$$

$$(2) \bar{\Omega} = -\infty \rightarrow \Omega = \pm \Omega_{st0}$$

Ω_{st0} 为阻带的几何中心频率

$$(3) \bar{\Omega} = 0 \rightarrow \Omega = 0, \pm\infty$$

图6.20 模拟低通到模拟带阻的频率变换

$$\bar{s} = \frac{sd}{s^2 + a^2}, \quad \bar{\Omega} = \frac{\Omega d}{a^2 - \Omega^2}$$



$$\bar{\Omega}_{st} = \frac{\Omega_{st1} d}{a^2 - \Omega_{st1}^2}, \quad -\bar{\Omega}_{st} = \frac{\Omega_{st2} d}{a^2 - \Omega_{st2}^2}$$

$$a^2 = \Omega_{st1} \Omega_{st2} = \Omega_{st0}^2$$

$$d = \bar{\Omega}_{st} (\Omega_{st2} - \Omega_{st1}) = \bar{\Omega}_{st} B_s$$

$$\Omega_{st0} = \sqrt{\Omega_{st1} \Omega_{st2}} \quad (6.6.12)$$

$$B_s = \Omega_{st2} - \Omega_{st1} \quad (6.6.13)$$

$$\bar{s} = \frac{\bar{\Omega}_{st} B_s s}{s^2 + \Omega_{st0}^2} = \frac{\bar{\Omega}_{st} (\Omega_{st2} - \Omega_{st1}) s}{s^2 + \Omega_{st1} \Omega_{st2}} \quad (6.6.14)$$

$$\bar{\Omega} = \frac{\bar{\Omega}_{st} B_s \Omega}{\Omega_{st0}^2 - \Omega^2} = \frac{\bar{\Omega}_{st} (\Omega_{st2} - \Omega_{st1}) \Omega}{\Omega_{st1} \Omega_{st2} - \Omega^2} \quad (6.6.15)$$

表 6.8 模拟-模拟频带变换

$H_{an}(\bar{s})$: 归一化低通滤波器, $\bar{s} = j\bar{\Omega}$, $\bar{\Omega}_p = 1$, $\bar{\Omega}_{st}$

$H_a(s)$: 变换后的 4 种滤波器 $H_{lp}(s)$, $H_{hp}(s)$, $H_{bp}(s)$, $H_{bs}(s)$, $s = j\Omega$

$G(s)$: 变换函数 $\bar{s} = G(s)$

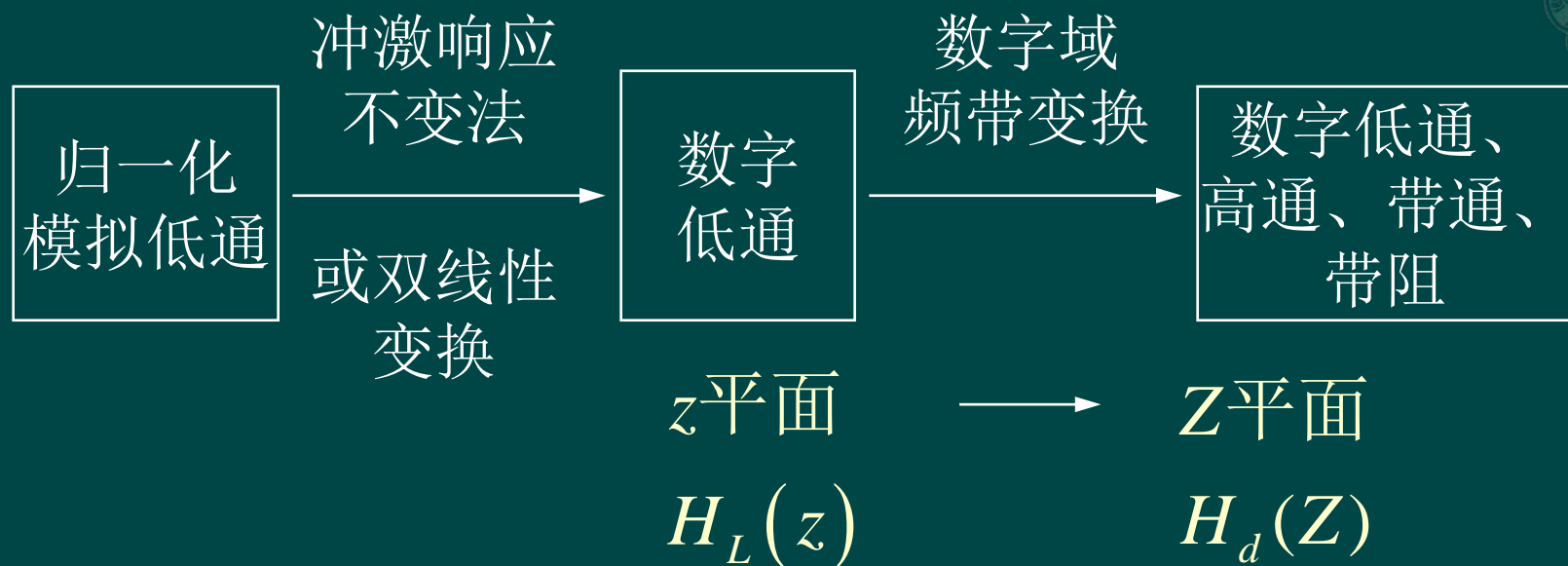
$$H_a(s) = H_{an}(\bar{s}) \Big|_{\bar{s}=G(s)} = H_{an}(G(s))$$

| $H_a(s)$ | $\bar{s} = G(s)$ | $j\bar{\Omega} = G(j\Omega)$ |
|--|--|---|
| 低通 $H_{lp}(s)$ (通带截止频率 Ω_p) | $\bar{s} = \frac{s}{\Omega_p}$ | $\bar{\Omega} = \frac{\Omega}{\Omega_p}$ |
| 高通 $H_{hp}(s)$ (通带截止频率 Ω_p) | $\bar{s} = \frac{\Omega_p}{s}$ | $\bar{\Omega} = -\frac{\Omega_p}{\Omega}$ |
| 带通 $H_{bp}(s)$ (通带截止频率 Ω_{p1}, Ω_{p2}) | $\bar{s} = \frac{s^2 + \Omega_{p0}^2}{B_p s}$ | $\bar{\Omega} = \frac{\Omega^2 - \Omega_{p0}^2}{B_p \Omega}$, $\Omega_{p0} = \sqrt{\Omega_{p1} \Omega_{p2}}$, $B_p = \Omega_{p2} - \Omega_{p1}$ |
| 带阻 $H_{bs}(s)$ (阻带截止频率 $\Omega_{st1}, \Omega_{st2}$) | $\bar{s} = \frac{\bar{\Omega}_{st} B_s s}{s^2 + \Omega_{st0}^2}$ | $\bar{\Omega} = \frac{\bar{\Omega}_{st} B_s \Omega}{\Omega_{st0}^2 - \Omega^2}$, $\Omega_{st0} = \sqrt{\Omega_{st1} \Omega_{st2}}$, $B_s = \Omega_{st2} - \Omega_{st1}$ |

注(1) 在对应的频率点上, 转换前、后两系统的频率响应的衰减值是相同的(例如低通 \rightarrow 带通变换中 $\bar{\Omega}_p = 1$ (低通)与 $\Omega = \Omega_{p2}$ (带通)点上衰减值, 例如 2dB)是相同的。

(2) 对巴特沃思滤波器, 由于 $H_{an}(\bar{s})$ 是对 3dB 衰减处截止频率 $\bar{\Omega}_c$ 归一化的, 当 $R_p \neq 3\text{dB}$ 时, 则必须由 $R_p (\neq 3\text{dB})$ 衰减处 $\bar{\Omega}_p = 1$ 的归一化滤波器来找出其 3dB 衰减处的 $\bar{\Omega}_c$ [利用 (6.5.27) 式], 然后将 $H_{an}(\bar{s})$ 用 $\bar{\Omega}_c$ 去归一化为 $H_a(\bar{s}) = H_{an}(\bar{s}/\bar{\Omega}_c)$, 此 $H_a(\bar{s})$ 就是满足衰减为 $R_p (\neq 3\text{dB})$ $\bar{\Omega}_p = 1$ 的归一化低通滤波器; 当 $R_p = 3\text{dB}$ 时, 则可直接利用 $H_{an}(\bar{s})$ 作为归一化低通滤波器。对切贝雪夫滤波器则可直接利用求出的归一化低通滤波器 $H_{an}(\bar{s})$ 。

十、数字域频带变换法



要求：

$$= H_L(z)_{z^{-1}=G(Z^{-1})}$$

- 1) z 平面单位圆 \rightarrow Z 平面单位圆，使频率响应相对应
- 2) 保持因果稳定： z 平面单位圆内 \rightarrow Z 平面单位圆内
- 3) 系统函数 $G(Z^{-1})$ 是 Z^{-1} 的有理函数

$$H_d(Z) = H_L(z)_{z^{-1}=G(Z^{-1})}$$

$$\text{令 } z = e^{j\theta}, \quad Z = e^{j\omega}$$

$$\text{则: } z^{-1} = e^{-j\theta} = G(Z^{-1}) = G(e^{-j\omega}) = |G(e^{-j\omega})| e^{j \arg[G(e^{-j\omega})]}$$

$$\text{即: } \begin{cases} |G(e^{-j\omega})| = 1 \\ \theta = -\arg[G(e^{-j\omega})] \end{cases} \quad \text{为全通函数}$$

$$z^{-1} = G(Z^{-1}) = \pm \prod_{k=1}^N \frac{Z^{-1} - a_k^*}{1 - a_k Z^{-1}}$$

$$\text{极点: } a_k, |a_k| < 1$$

$$\text{零点: } 1/a_k^*$$

$$\omega: 0 \rightarrow \pi \quad \Delta \arg[G(e^{-j\omega})] = N\pi \quad \text{阶数: } N$$

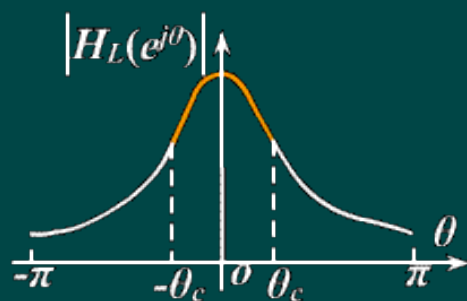
选择合适的 N , a_k , 即得各类变换

1、数字低通 — 数字低通

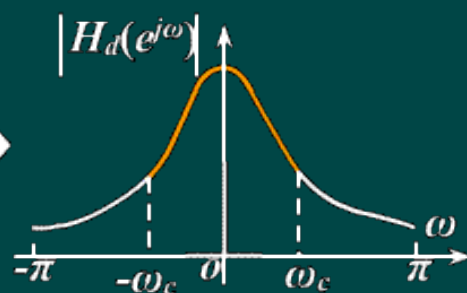
$$\omega: 0 \rightarrow \pi \quad \theta: 0 \rightarrow \pi \quad \therefore N=1$$

$$\therefore z^{-1} = G(Z^{-1}) = \frac{Z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha Z^{-1}}$$

$H_L(z)$ 幅度响应



$H_d(Z)$ 幅度响应



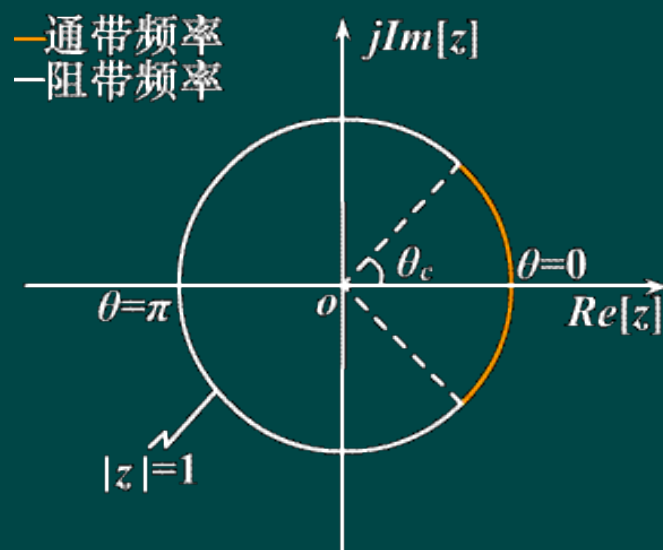
$$\theta=0 \longrightarrow \omega=0$$

$$\theta=\pi \longrightarrow \omega=\pi$$

$$\theta=\theta_c \longrightarrow \omega=\omega_c$$

$$\theta=-\theta_c \longrightarrow \omega=-\omega_c$$

z 平面单位圆



Z 平面单位圆

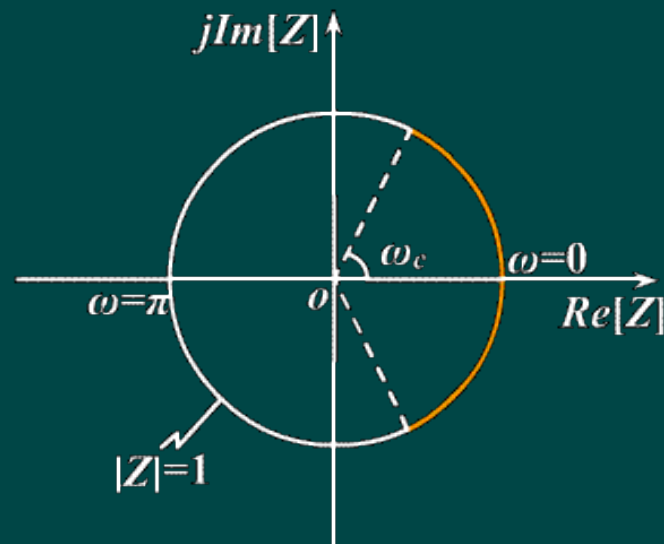


图6-35 数字低通-数字低通的变换



$$Z: \quad -1 \quad e^{-j\omega_c} \quad 1 \quad 1 \quad e^{j\omega_c} \quad -1$$

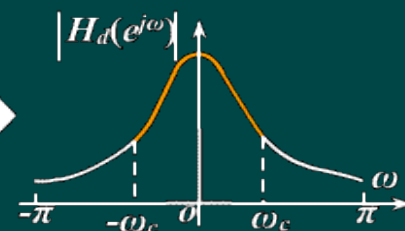
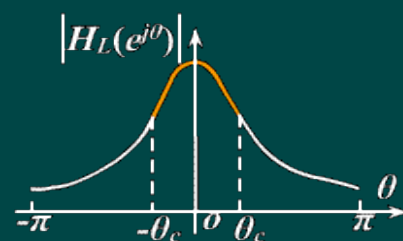
$$\omega: \quad -\pi \quad -\omega_c \quad 0 \quad 0 \quad \omega_c \quad \pi$$

$$\theta: \quad -\pi \quad -\theta_c \quad 0 \quad 0 \quad \theta_c \quad \pi$$

$$z: \quad -1 \quad e^{-j\theta_c} \quad 1 \quad 1 \quad e^{j\theta_c} \quad -1$$

$H_L(z)$ 幅度响应

$H_d(Z)$ 幅度响应



$$\begin{aligned} \theta=0 &\longrightarrow \omega=0 & \theta=\pi &\longrightarrow \omega=\pi \\ \theta=\theta_c &\longrightarrow \omega=\omega_c & \theta=-\theta_c &\longrightarrow \omega=-\omega_c \end{aligned}$$

z 平面单位圆

Z 平面单位圆

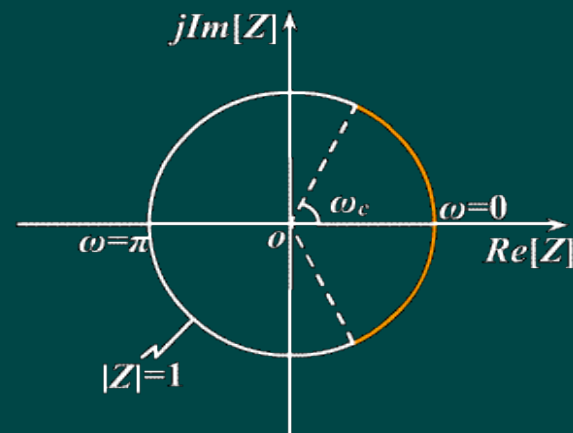
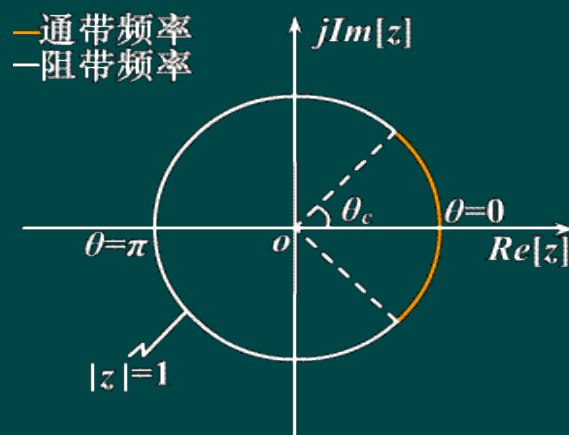


图6-35 数字低通-数字低通的变换

$$z^{-1} = G(Z^{-1}) = \frac{Z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha Z^{-1}}$$

$$\theta_c \leftrightarrow \omega_c$$

由

$$e^{-j\theta_c} = \frac{e^{-j\omega_c} - \alpha}{1 - \alpha e^{-j\omega_c}}$$

得：

$$\alpha = \frac{\sin \frac{\theta_c - \omega_c}{2}}{\sin \frac{\theta_c + \omega_c}{2}}$$

$\alpha > 0$ 频率压缩

$\alpha < 0$ 频率扩张

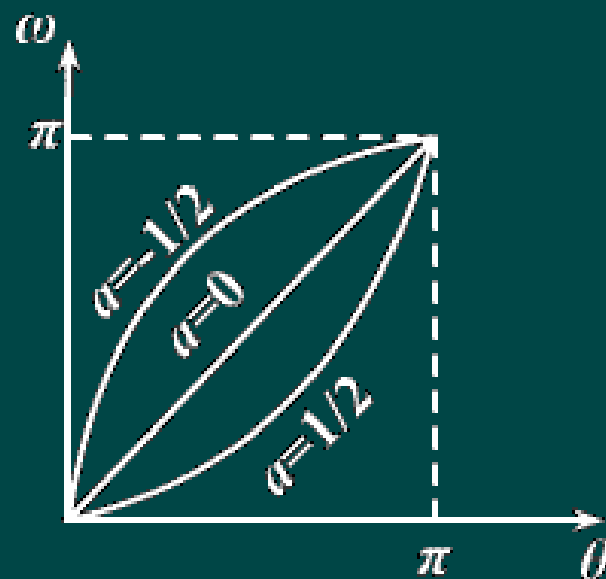


图6-36 数字低通-数字低通变换的频率间非线性关系

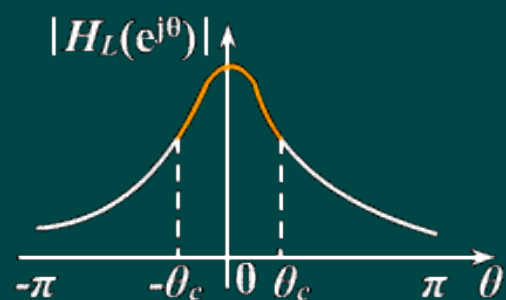
2、数字低通 — 数字高通



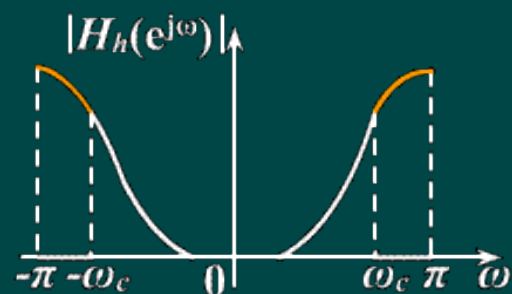
低通频率响应在单位圆上旋转 180° ，即得高通频率响应： $Z \rightarrow -Z$

$$z^{-1} = G(Z^{-1}) = \frac{-Z^{-1} - \alpha}{1 + \alpha Z^{-1}} = -\frac{Z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha Z^{-1}}$$

$H_L(z)$ 幅度响应

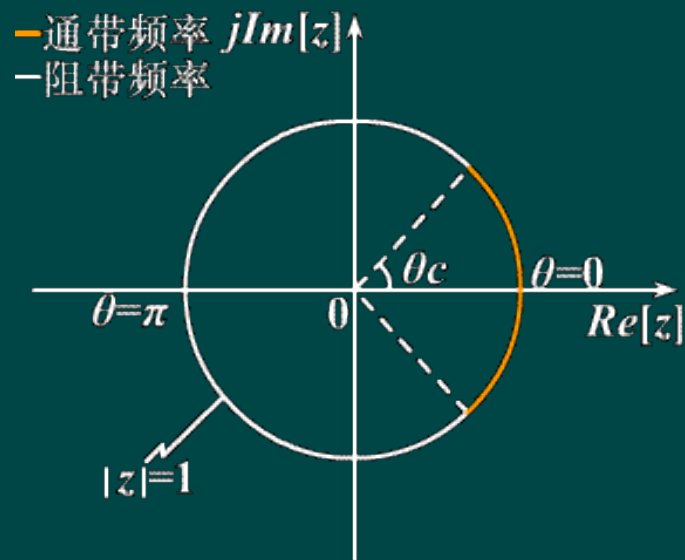


$H_h(Z)$ 幅度响应



$$\begin{aligned}\theta=0 &\rightarrow \omega=\pi & \theta=\pi &\rightarrow \omega=0 \\ \theta=\theta_c &\rightarrow \omega=-\omega_c & \theta=-\theta_c &\rightarrow \omega=\omega_c\end{aligned}$$

z 平面单位圆



Z 平面单位圆

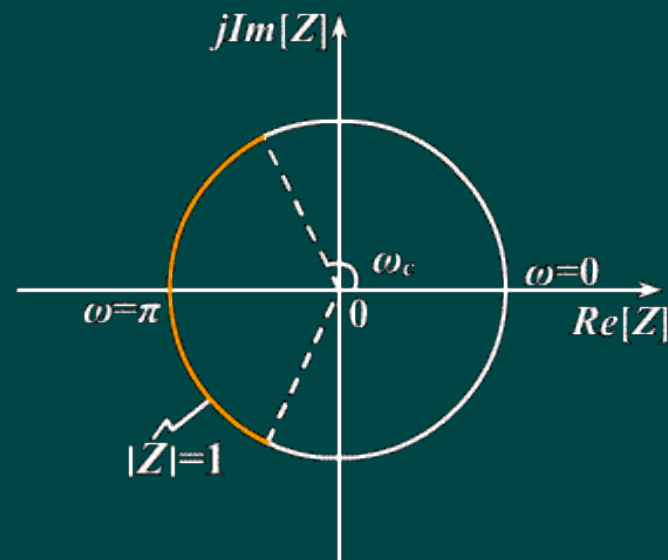


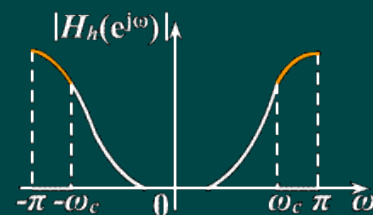
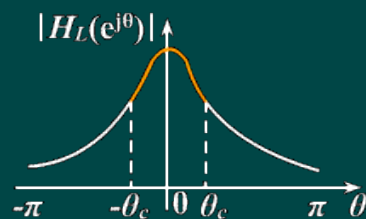
图6-37 数字低通-数字高通的变换



$$\begin{array}{llllll} Z: & -1 & e^{-j\omega_c} & 1 & 1 & e^{j\omega_c} & -1 \\ \omega: & -\pi & -\omega_c & 0 & 0 & \omega_c & \pi \\ \theta: & 0 & \theta_c & \pi & -\pi & -\theta_c & 0 \\ z: & 1 & e^{j\theta_c} & -1 & -1 & e^{-j\theta_c} & 1 \end{array}$$

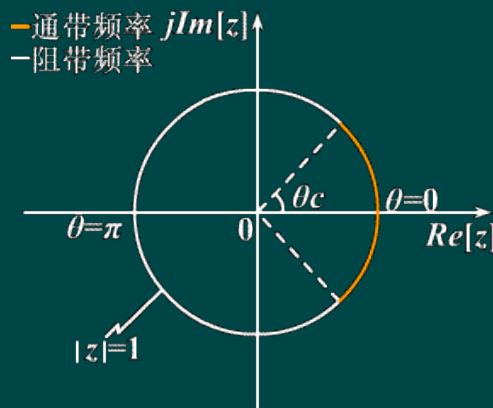
$H_L(z)$ 幅度响应

$H_h(Z)$ 幅度响应



$$\begin{array}{ll} \theta=0 \rightarrow \omega=\pi & \theta=\pi \rightarrow \omega=0 \\ \theta=\theta_c \rightarrow \omega=-\omega_c & \theta=-\theta_c \rightarrow \omega=\omega_c \end{array}$$

z 平面单位圆



Z 平面单位圆

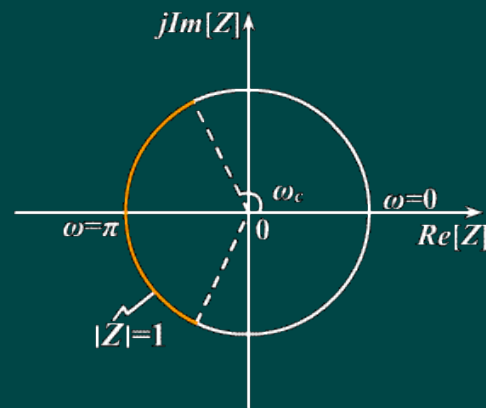


图6-37 数字低通-数字高通的变换

$$z^{-1} = G(Z^{-1}) = -\frac{Z^{-1} + \alpha}{1 + \alpha Z^{-1}}$$

$$\theta_c \leftrightarrow -\omega_c$$

由
$$e^{-j\theta_c} = -\frac{e^{j\omega_c} + \alpha}{1 + \alpha e^{j\omega_c}}$$

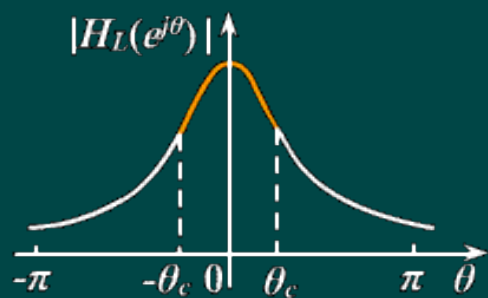
得:
$$\alpha = -\frac{\cos \frac{\theta_c + \omega_c}{2}}{\cos \frac{\theta_c - \omega_c}{2}}$$

3、数字低通 — 数字带通

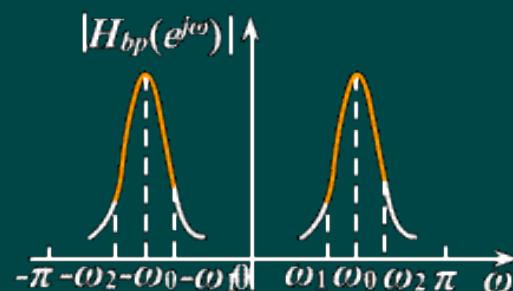
$$\omega: 0 \rightarrow \pi \quad \theta: -\pi \rightarrow \pi \quad \therefore N = 2$$

$$\therefore z^{-1} = G(Z^{-1}) = \pm \frac{Z^{-2} + d_1 Z^{-1} + d_2}{d_2 Z^{-2} + d_1 Z^{-1} + 1}$$

$H_L(z)$ 幅度响应



$H_{bp}(Z)$ 幅度响应



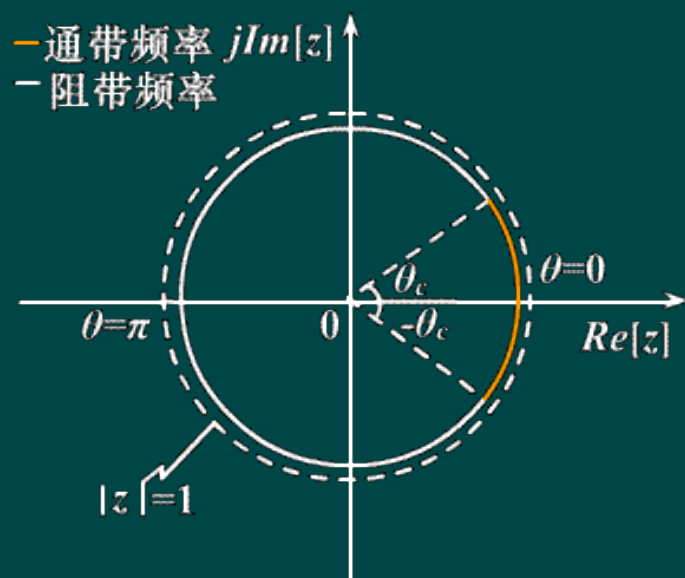
$$\theta=\pi \rightarrow \omega=\pi, 0$$

$$\theta=0 \rightarrow \omega=-\omega_0, \omega_0$$

$$\theta=-\theta_c \rightarrow \omega=-\omega_2, \omega_1$$

$$\theta=\theta_c \rightarrow \omega=-\omega_1, \omega_2$$

z 平面单位圆



Z 平面单位圆

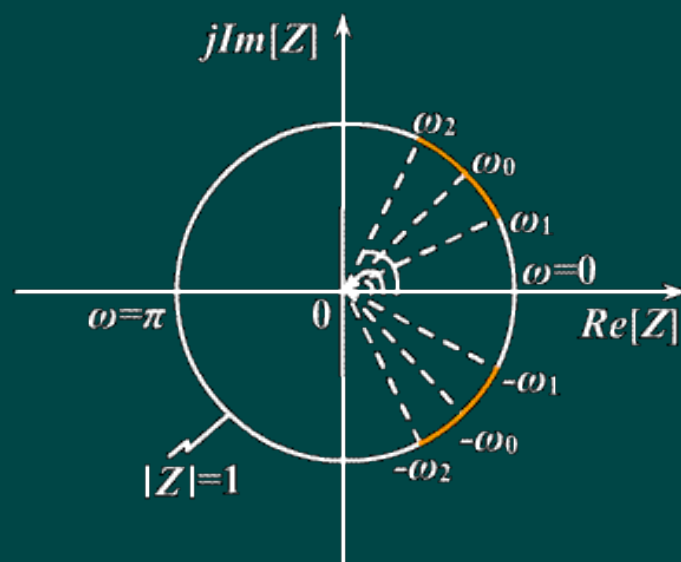


图 6-38 数字低通-----数字带通的变换

| | | | | | | | | | | |
|------------|--------|------------------|------------------|------------------|-------|--------|------------------|-----------------|-----------------|-------|
| Z : | -1 | $e^{-j\omega_2}$ | $e^{-j\omega_0}$ | $e^{-j\omega_1}$ | 1 | 1 | $e^{j\omega_1}$ | $e^{j\omega_0}$ | $e^{j\omega_2}$ | -1 |
| ω : | $-\pi$ | $-\omega_2$ | $-\omega_0$ | $-\omega_1$ | 0 | 0 | ω_1 | ω_0 | ω_2 | π |
| θ : | $-\pi$ | $-\theta_c$ | 0 | θ_c | π | $-\pi$ | $-\theta_c$ | 0 | θ_c | π |
| z : | -1 | $e^{-j\theta_c}$ | 1 | $e^{j\theta_c}$ | -1 | -1 | $e^{-j\theta_c}$ | 1 | $e^{j\theta_c}$ | -1 |



$$\begin{array}{ll}
 \theta=\pi \rightarrow \omega=\pi, 0 & \theta=0 \rightarrow \omega=-\omega_0, \omega_0 \\
 \theta=-\theta_c \rightarrow \omega=-\omega_2, \omega_1 & \theta=\theta_c \rightarrow \omega=-\omega_1, \omega_2
 \end{array}$$

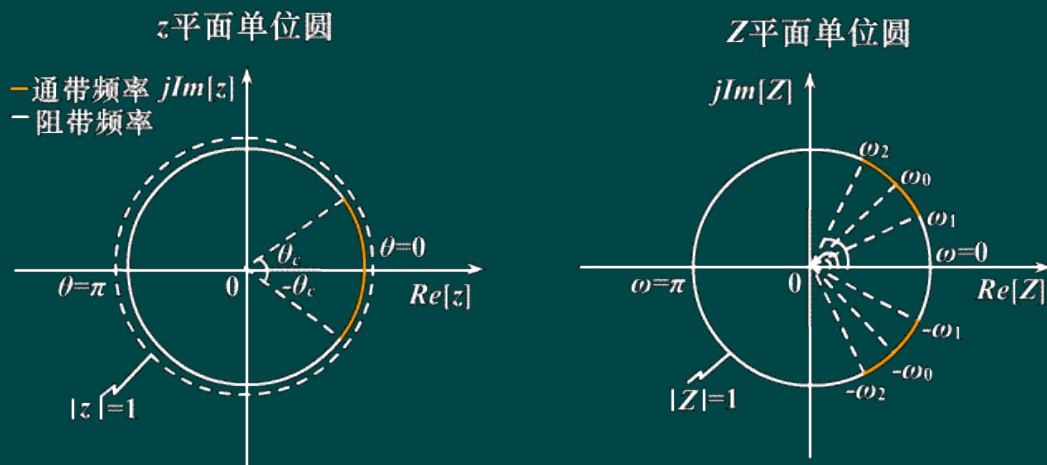



图 6-38 数字低通-----数字带通的变换


$$\therefore z^{-1} = G(Z^{-1}) = \pm \frac{Z^{-2} + d_1 Z^{-1} + d_2}{d_2 Z^{-2} + d_1 Z^{-1} + 1}$$

$$\text{由 } \begin{cases} z^{-1} = -1 \rightarrow Z^{-1} = -1 \\ z^{-1} = -1 \rightarrow Z^{-1} = 1 \end{cases}$$

得上式应取负号，即：

$$z^{-1} = -\frac{Z^{-2} + d_1 Z^{-1} + d_2}{d_2 Z^{-2} + d_1 Z^{-1} + 1}$$

$$Z^{-1} = -\frac{Z^{-2} + d_1 Z^{-1} + d_2}{d_2 Z^{-2} + d_1 Z^{-1} + 1} \quad \theta_c \leftrightarrow \omega_2 \quad -\theta_c \leftrightarrow \omega_1$$

由

$$\begin{cases} e^{j\theta_c} = -\frac{e^{-j2\omega_1} + d_1 e^{-j\omega_1} + d_2}{d_2 e^{-j2\omega_1} + d_1 e^{-j\omega_1} + 1} \\ e^{-j\theta_c} = -\frac{e^{-j2\omega_2} + d_1 e^{-j\omega_2} + d_2}{d_2 e^{-j2\omega_2} + d_1 e^{-j\omega_2} + 1} \end{cases}$$

得

$$d_1 = \frac{-2\alpha k}{k+1} \quad d_2 = \frac{k-1}{k+1}$$

其中：

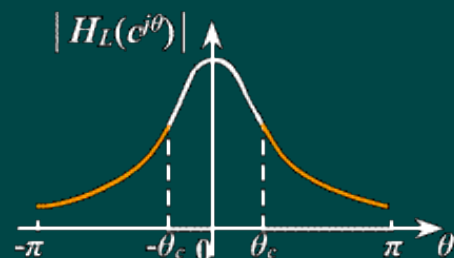
$$k = \operatorname{tg} \frac{\theta_c}{2} \operatorname{ctg} \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \quad \alpha = \frac{\cos \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}}{\cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}} = \cos \omega_0$$

4、数字低通 — 数字带阻

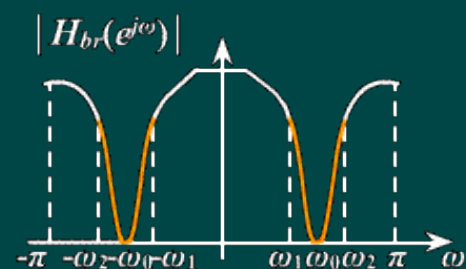
$$\omega: 0 \rightarrow \pi \quad \theta: -\pi \rightarrow \pi \quad \therefore N = 2$$

$$\therefore z^{-1} = G(Z^{-1}) = \pm \frac{Z^{-2} + d_1 Z^{-1} + d_2}{d_2 Z^{-2} + d_1 Z^{-1} + 1}$$

$H_L(z)$ 幅度响应



$H_{br}(Z)$ 幅度响应



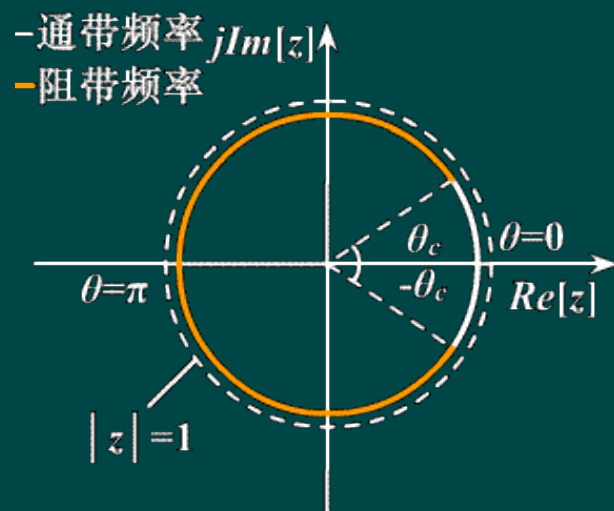
$$\theta=0 \rightarrow \omega=0, \pi$$

$$\theta=\theta_c \rightarrow \omega=\omega_1, -\omega_2$$

$$\theta=-\theta_c \rightarrow \omega=\omega_2, -\omega_1$$

$$\theta=\pi \rightarrow \omega=\omega_0, -\omega_0$$

z 平面单位圆



Z 平面单位圆

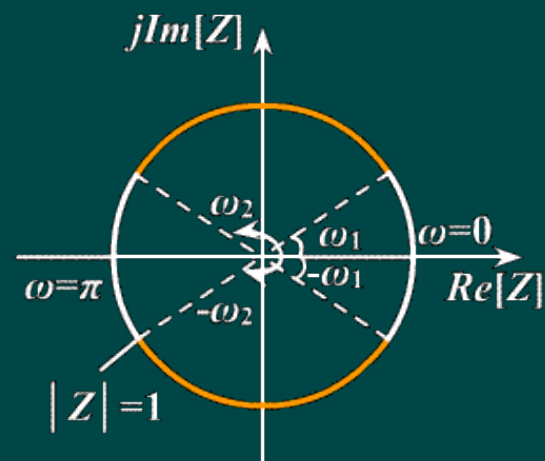
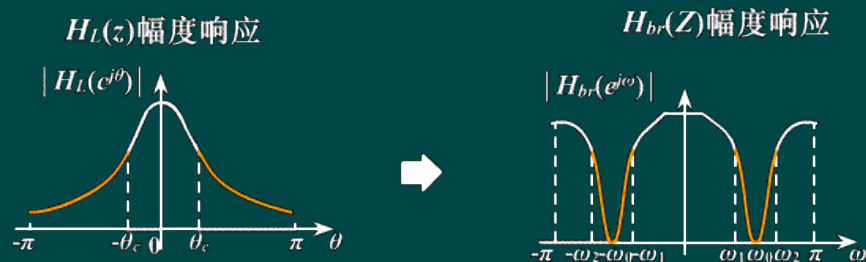


图6-39 数字低通—数字带阻的变换

| | | | | | | | | | | |
|-----------|--------|------------------|------------------|------------------|-----|-----|-----------------|-----------------|------------------|-------|
| $Z:$ | -1 | $e^{-j\omega_2}$ | $e^{-j\omega_0}$ | $e^{-j\omega_1}$ | 1 | 1 | $e^{j\omega_1}$ | $e^{j\omega_0}$ | $e^{j\omega_2}$ | -1 |
| $\omega:$ | $-\pi$ | $-\omega_2$ | $-\omega_0$ | $-\omega_1$ | 0 | 0 | ω_1 | ω_0 | ω_2 | π |
| $\theta:$ | 0 | θ_c | $\pm\pi$ | $-\theta_c$ | 0 | 0 | θ_c | $\pm\pi$ | $-\theta_c$ | 0 |
| $z:$ | 1 | $e^{j\theta_c}$ | -1 | $e^{-j\theta_c}$ | 1 | 1 | $e^{j\theta_c}$ | -1 | $e^{-j\theta_c}$ | 1 |



$$\begin{aligned}
 \theta=0 &\longrightarrow \omega=0, \pi & \theta=\theta_c &\longrightarrow \omega=\omega_1, -\omega_2 \\
 \theta=-\theta_c &\longrightarrow \omega=\omega_2, -\omega_1 & \theta=\pi &\longrightarrow \omega=\omega_0, -\omega_0
 \end{aligned}$$

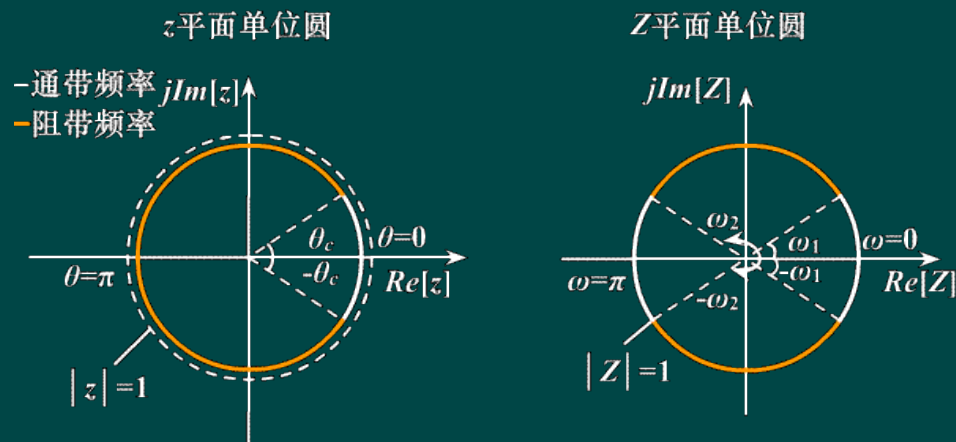



图6-39 数字低通—数字带阻的变换


$$\therefore z^{-1} = G(Z^{-1}) = \pm \frac{Z^{-2} + d_1 Z^{-1} + d_2}{d_2 Z^{-2} + d_1 Z^{-1} + 1}$$

$$\text{由 } \begin{cases} z^{-1} = 1 \rightarrow Z^{-1} = -1 \\ z^{-1} = 1 \rightarrow Z^{-1} = 1 \end{cases}$$

得上式应取正号，即：

$$z^{-1} = \frac{Z^{-2} + d_1 Z^{-1} + d_2}{d_2 Z^{-2} + d_1 Z^{-1} + 1}$$

$$z^{-1} = \frac{Z^{-2} + d_1 Z^{-1} + d_2}{d_2 Z^{-2} + d_1 Z^{-1} + 1} \quad \theta_c \leftrightarrow \omega_1 \quad -\theta_c \leftrightarrow \omega_2$$

由

$$\begin{cases} e^{j\theta_c} = -\frac{e^{-j2\omega_2} + d_1 e^{-j\omega_2} + d_2}{d_2 e^{-j2\omega_2} + d_1 e^{-j\omega_2} + 1} \\ e^{-j\theta_c} = -\frac{e^{-j2\omega_1} + d_1 e^{-j\omega_1} + d_2}{d_2 e^{-j2\omega_1} + d_1 e^{-j\omega_1} + 1} \end{cases}$$

得

$$d_1 = \frac{-2\alpha}{1+k} \quad d_2 = \frac{1-k}{1+k}$$

其中：

$$k = \operatorname{tg} \frac{\theta_c}{2} \operatorname{tg} \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \quad \alpha = \frac{\cos \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}}{\cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}} = \cos \omega_0$$



5、数字低通 — 多通带

◇ 全通函数的阶数 N 为 $[-\pi, \pi]$ 内通带的数目

■ $\omega = 0$ 时是通带，全通函数取“+”号

$\omega = \pi$ 时是阻带，全通函数取“-”号

作业



1. 教材6.10(1): 用冲激响应不变法将以下 $H_a(s)$ 变为 $H(z)$, 抽样周期为 T 。

$$(1) \quad H_a(s) = (s + a) / \left[(s + a)^2 + b^2 \right]$$

2. 设有一模拟滤波器 $H_a(s) = 1 / (s^2 + s + 1)$
抽样周期 $T = 2$, 试用双线性变换法将它转变为数字系统函数 $H(z)$ 。