



第七章 角度调制与解调电路

(8课时)

重点:

- 调频波的基本特性 (数学表达式, 波形图, 频谱图, 频带宽度, P_{av})
- 变容二极管直接调频电路的典型电路, 工作原理及分析
- 变容二极管调相——间接调频电路。
- 鉴频的原理与实现方法。

难点:

- 调频与调相的区别。
- 变容二极管直接调频电路。



7.1 角度调制信号的基本特性

7.1.1 角度调制信号的数学表达式

1. 调频、调相——统称调角

调频 (FM) : 用调制信号去控制高频振荡频率, 使高频振荡的瞬时频率随调制信号规律作线性变化的过程。

调相 (PM) : 用调制信号去控制高频振荡相位, 使高频振荡的瞬时相位随调制信号规律作线性变化的过程。



设：调制信号为 $v_{\Omega}(t)$

载波信号为 $v_c = V_{cm} \cos(\omega_c t + \varphi_0)$

若为振幅调制 (AM) , 则

$$V(t) = V_{cm} + k_a v_{\Omega}(t) = V_{cm} + \Delta V(t)$$

调幅波的数学表达式

$$v_{AM} = V(t) \cos(\omega_c t + \varphi_0) = [V_{cm} + \Delta V(t)] \cos(\omega_c t + \varphi_0)$$

ω_c, φ_0 不变。其中 k_a 为由调制电路决定的比例常数，表示单位调制信号电压引起的载波振幅的变化量。



FM: $\omega(t) = \omega_c + \Delta\omega(t) = \omega_c + k_f v_\Omega(t)$ V_{cm} 不变。

PM: $\varphi(t) = (\omega_c t + \varphi_0) + \Delta\varphi(t) = (\omega_c t + \varphi_0) + k_p v_\Omega(t)$ V_{cm} 不变。

2. 调角特点:

- 抗干扰能力强
- FM广播音质好，但BW宽，波段内容纳的电台数小；
主要用于超短波波段。
如：调频广播：(88 ~ 108) MHz, BW=150KHZ.
- 调频/调相信号所需的发射功率小。



一、调频波、调相波的一般表达式

(一) 调频信号

调频 (Frequency Modulation 简称FM) :

设高频载波 $v_c = V_{cm} \cos(\omega_c t + \varphi_0)$

调制信号为 $v_{\Omega}(t)$

根据定义, FM波的瞬时角频率为: $\omega(t) = \omega_c + k_f v_{\Omega}(t)$

式中 k_f 为由调制电路确定的比例系数, 单位是: rad/s.v
表示单位电压引起的角频率的变化量。 ω_c 为中心角频率。



FM波的瞬时相位为：

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \int_0^t \omega(t) dt + \phi_0 \\ &= \omega_c t + k_f \int_0^t v_{\Omega}(t) dt + \phi_0 \\ &= \omega_c t + \phi_0 + \Delta\phi(t)\end{aligned}$$

调频波的一般表达式：

$$v_{FM} = V_{cm} \cos \varphi(t) = V_{cm} \cos[\omega_c t + \varphi_0 + \int_0^t k_f v_{\Omega}(t) dt]$$

由上分析知：

调频波的瞬时角频偏 $\Delta\omega(t) = k_f v_{\Omega}(t) \propto v_{\Omega}(t)$

瞬时相位偏移 $\Delta\varphi(t) = k_f \int_0^t v_{\Omega}(t) dt \propto v_{\Omega}(t)$ **的积分**



最大角频偏

$$\Delta\omega_m = k_f \left| v_\Omega(t) \right|_{\max}$$

最大相偏

$$\Delta\varphi_m = k_f \left| \int_0^t v_\Omega(t) dt \right|_{\max}$$

(调频波相位变化的最大值)

(二) 调相 (Phase Modulation 简称PM)

设高频载波为 $v_c = V_{cm} \cos(\omega_c t + \varphi_0)$

调制信号为 $v_\Omega(t)$



由定义知：

调相信号的瞬时相位

$$\varphi(t) = \omega_c t + \varphi_0 + \Delta\varphi(t) = \omega_c t + \varphi_0 + k_p v_{\Omega}(t)$$

瞬时角频率 $\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega_c + k_p \frac{dv_{\Omega}(t)}{dt} = \omega_c + \Delta\omega(t)$

式中 k_p 为由调制电路确定的比例系数，单位是rad/v，
表示单位电压引起的相位变化量。

调相波的一般表达式：

$$v_{PM} = V_{cm} \cos \varphi(t) = V_{cm} \cos[\omega_c t + \varphi_0 + k_p v_{\Omega}(t)]$$



由上分析知：

调相信号的瞬时相位偏移： $\Delta\varphi(t) = k_p v_{\Omega}(t)$

瞬时角频偏： $\Delta\omega(t) = k_p \frac{dv_{\Omega}(t)}{dt}$

最大角频偏： $\Delta\omega_m = k_p \left| \frac{dv_{\Omega}(t)}{dt} \right|_{\max}$

最大相偏： $\Delta\varphi_m = k_p \left| v_{\Omega}(t) \right|_{\max}$

(调相波相位变化的最大值)



二、单音频信号调制时调频波、调相波的数学表达式

调制信号为单音频信号 $v_{\Omega}(t) = V_{\Omega m} \cos \Omega t$ 时，对

$v_c = V_{cm} \cos \omega_c t$ 进行调频，调相。

设 $\omega_c \gg \Omega$ 可分别写出调频波和调相波的数学表达式。

1. 调频 (FM) 时

$$\Delta\omega(t) = k_f v_{\Omega}(t) = k_f V_{\Omega m} \cos \Omega t = \Delta\omega_m \cos \Omega t$$

其中 $\Delta\omega_m = k_f V_{\Omega m}$ 为最大角频偏



$$\Delta\varphi(t) = k_f \int_0^t \nu_{\Omega}(t) dt = \frac{k_f V_{\Omega m}}{\Omega} \sin \Omega t = M_f \sin \Omega t$$

其中 $M_f = \Delta\varphi_m = \frac{k_f V_{\Omega m}}{\Omega}$ 为最大相位偏移，称为调频波的
“调频指数”。

瞬时角频率

$$\omega(t) = \omega_c + \Delta\omega(t) = \omega_c + \Delta\omega_m \cos \Omega t$$

瞬时相位

$$\varphi(t) = \omega_c t + \Delta\varphi(t) = \omega_c t + M_f \sin \Omega t$$

于是得到调频波的数学表达式

$$\nu_{FM}(t) = V_{cm} \cos(\omega_c t + M_f \sin \Omega t)$$



结论：(1) $\Delta\omega_m = k_f V_{\Omega m} \propto V_{\Omega m}$

$$(2) M_f = \frac{k_f V_{\Omega m}}{\Omega} = \frac{\Delta\omega_m}{\Omega} = \frac{\Delta f_m}{F} \propto \frac{V_{\Omega m}}{\Omega}$$

2. 调相 (PM) 时

$$\Delta\varphi(t) = k_p v_{\Omega}(t) = k_p V_{\Omega m} \cos \Omega t = M_p \cos \Omega t$$

其中 $M_p = \Delta\varphi_m = k_p V_{\Omega m}$ 为最大相位偏移，称为调相波的“调相指数”。

$$\Delta\omega(t) = k_p \frac{dv_{\Omega}(t)}{dt} = -k_p V_{\Omega m} \Omega \sin \Omega t = -\Delta\omega_m \sin \Omega t$$

其中 $\Delta\omega_m = k_p V_{\Omega m} \Omega$



$$\omega(t) = \omega_c + \Delta\omega(t) = \omega_c - \Delta\omega_m \sin \Omega t$$

$$\varphi(t) = \omega_c t + \Delta\varphi(t) = \omega_c t + M_p \cos \Omega t$$

于是得到调相波的数学表达式

$$v_{PM}(t) = V_{cm} \cos(\omega_c t + M_p \cos \Omega t)$$

结论: (1) $\Delta\varphi_m = M_p = k_p V_{\Omega m}$

(2) $\Delta\omega_m = k_p V_{\Omega m} \Omega = M_p \Omega$

三、调频波、调相波的时域波形

设 $v_{\Omega}(t) = V_{\Omega m} \cos \Omega t$, 对 $v_c(t) = V_{cm} \cos \omega_c t$ 进行调频和调相, 所得到的 $\Delta\omega(t)$ 、 $\Delta\varphi(t)$ 及 v_{FM} 、 v_{PM} 波形如图 7.1.1 所示。

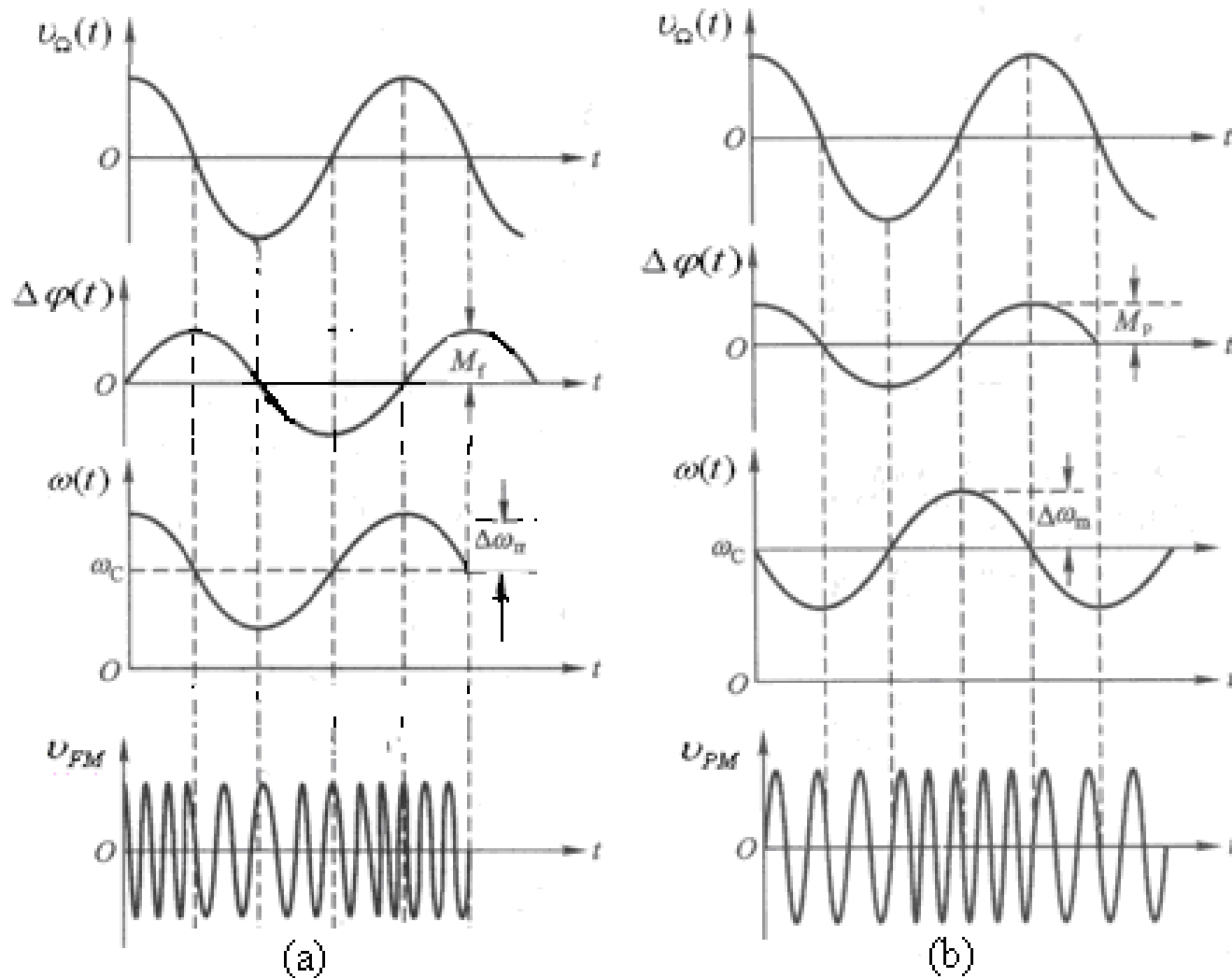


图7.1.1 单音频调制时调频波、调相波波形
(a) 调频波 (b) 调相波



当 $v_{\Omega}(t)$ 为三角波时，对 $v_c(t) = V_{cm} \cos \omega_c t$ 进行调制，得到的 $\Delta\omega(t)$ 、 $\Delta\phi(t)$ 及 v_{FM} 、 v_{PM} 波形如图7.1.2所示。

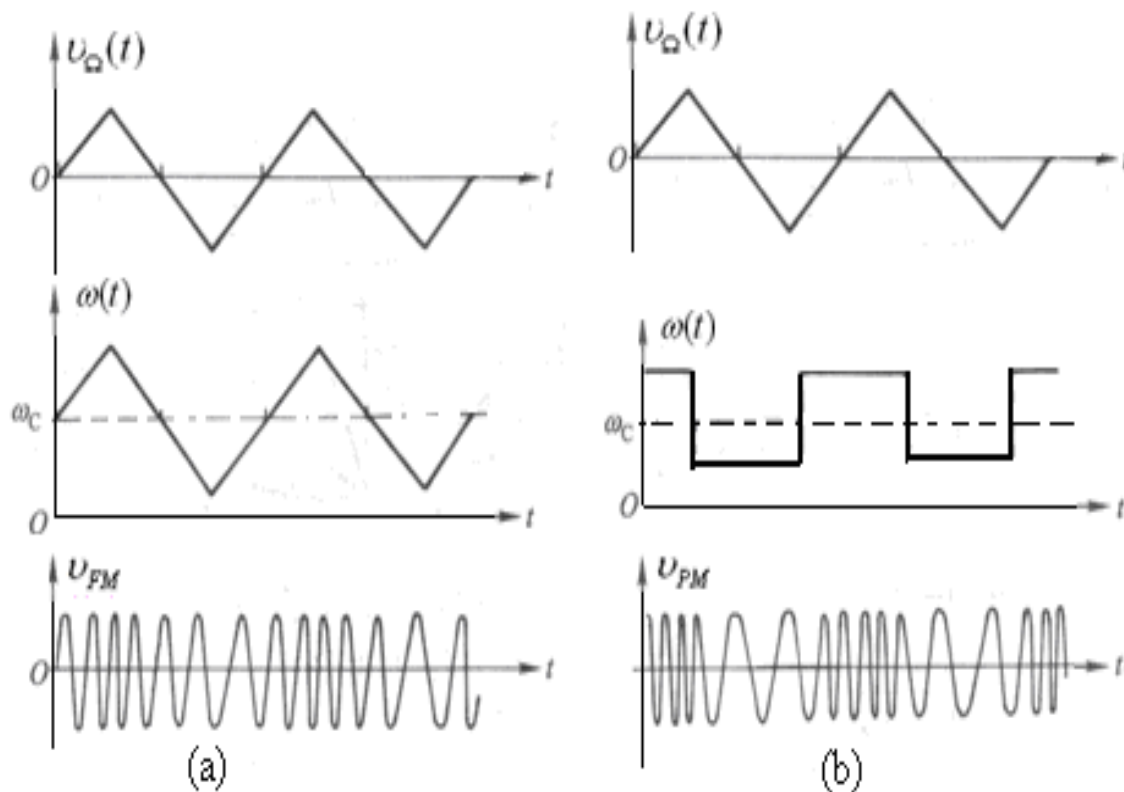


图7.1.2 三角波调制时调频波、调相波波形
(a) 调频波 (b) 调相波



四、小结

1、单音调制的调频波和调相波的表达式均可用 M_f (或 M_p) 以及定义截然不同的三个角频率参数 ω_c 、 Ω 和 $\Delta\omega_m$ 来描述。

其中 ω_c 为载波角频率，即瞬时角频率变化的平均值；

Ω 为调制信号的角频率，表示瞬时频率变化快慢的程度。

$\Delta\omega_m$ 为最大角频偏，表示瞬时角频率偏离中心频率 ω_c 的最大值。



2、单音调制时两种调制波的 $\Delta\omega(t)$ 和 $\Delta\varphi(t)$ 均为简谐波，但是它们的最大角频偏 $\Delta\omega_m$ 和调频指数 M_f （或调相指数 M_p ）随 $V_{\Omega m}$ 和 Ω 变化规律不同，如图7.1.3所示

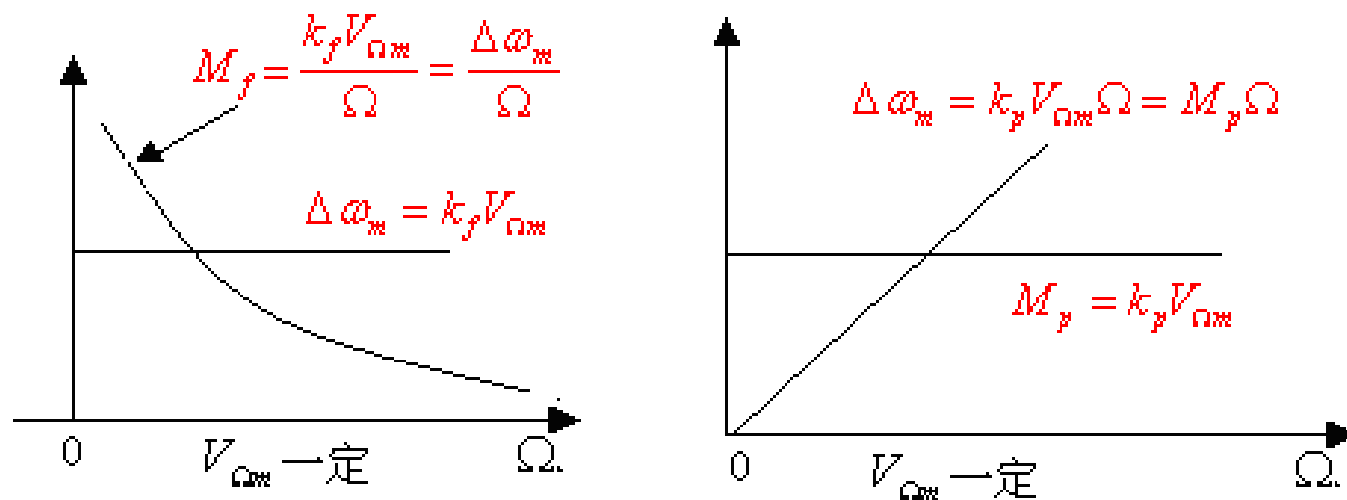


图7.1.3 $V_{\Omega m}$ 一定时， $\Delta\omega_m$ 和 M_f （或 M_p ）随 Ω 变化的曲线



3、通式：

$$\Delta\omega_m = M\Omega \quad \text{或} \quad \Delta f_m = MF$$

$$\text{其中 } \Delta\omega_m = 2\pi\Delta f_m, \quad \Omega = 2\pi F$$

例7.1.1 有一正弦调制信号，频率为300~3400Hz，调制信号中各频率分量的振幅相同，调频时最大频偏 $\Delta f_m = 75\text{kHz}$ ；调相时最大相移 $M_p = 1.5 \text{ rad}$ 。试求调频时调制指数 M_f 的最大范围和调相时最大频偏 Δf_m 的变化范围。



解：在调频时，因为 $\Delta\omega_m = k_f V_{\Omega m}$ 与 Ω 无关，当 F (Ω) 变化时， $\Delta\omega_m$ 不变；

而
$$M_f = \frac{\Delta\omega_m}{\Omega} = \frac{\Delta f_m}{F}$$

所以
$$M_{f \max} = \frac{\Delta f_m}{F_{\min}} = \frac{75}{0.3} = 250(\text{rad})$$

$$M_{f \max} = \frac{\Delta f_m}{F_{\max}} = \frac{75}{3.4} = 22(\text{rad})$$

显然， $M_f \propto \frac{1}{F}$ 且大于1。



调相时, 因为 $M_p = k_p V_{\Omega m}$ 与 Ω 无关, 当 $F(\Omega)$ 变化时, M_p 不变;

而
$$\Delta\omega_m = M_p \Omega = M_p 2\pi F$$

所以
$$\Delta f_{m\min} = M_p F_{\min} = 1.5 \times 300 = 450(\text{Hz})$$

$$\Delta f_{m\max} = M_p F_{\max} = 1.5 \times 3400 = 5100(\text{Hz})$$

显然调相时, 随着 $F(\Omega)$ 的变化, Δf_m 会产生很大的变化。



7.1.2 调角信号的频谱

由于在 $\nu_{\Omega}(t)$ 为单频率信号时

$$\nu_{FM} = V_{cm} \cos(\omega_c t + M_f \sin \Omega t) \text{ 和}$$

$$\nu_{PM} = V_{cm} \cos(\omega_c t + M_p \cos \Omega t) \text{ 相似;}$$

瞬时相移 $\Delta\varphi_{FM}(t) = M_f \sin \Omega t, \Delta\varphi_{PM}(t) = M_p \cos \Omega t$

ν_{FM} 和 ν_{PM} 无本质区别，所以，可将单频率调制时的调角信号（调频、调相信号）写成统一的表达式：

$$\nu(t) = V_{cm} \cos(\omega_c t + M \sin \Omega t)$$

其中M代替 M_f 或 M_p ，因而调频、调相信号具有相似的频谱。



$$\begin{aligned} v(t) &= V_{cm} \cos(\omega_c t + M \sin \Omega t) = V_{cm} \operatorname{Re}[e^{j(\omega_c t + M \sin \Omega t)}] \\ &= V_{cm} \operatorname{Re}[e^{j\omega_c t} \cdot e^{jM \sin \Omega t}] \end{aligned}$$

式中 $e^{jM \sin \Omega t}$ 是 Ω 的周期性函数，其傅立叶级数展开式为：

$$e^{jM \sin \Omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(M) e^{jn\Omega t}$$

式中 $J_n(M) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{jM \sin \Omega t} e^{-jn\Omega t} d\Omega t$

$J_n(M)$ 是以 M 为参数的 n 阶第一类贝塞尔函数，随 M

的变化曲线如图7.1.4所示。

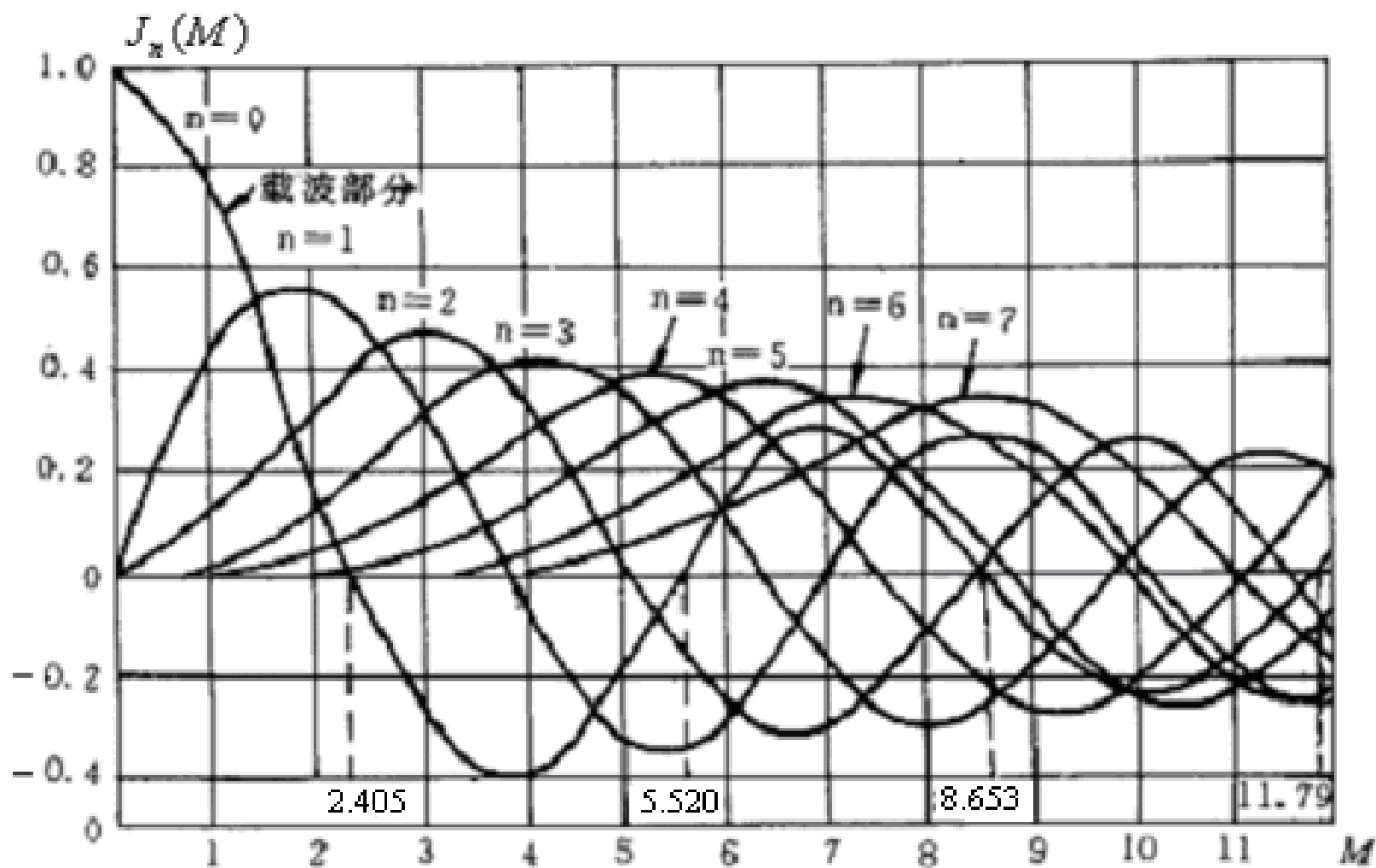


图7.1.4 贝塞尔函数曲线



$J_n(M)$ 具有下列性质

(1) $J_n(M)$ 随着 M 的增加近似周期性地变化，且其

峰值下降；

$$(2) J_n(M) = \begin{cases} J_{-n}(M) & n \text{ 为偶数} \\ -J_{-n}(M) & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

$$(3) \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(M) = 1$$

(4) 对于某些固定的 M ，有如下近似关系

当 $n > M + 1$ 时， $J_n(M) \approx 0$



于是代入调角信号表达式得：

$$v(t) = V_{cm} \operatorname{Re} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(M) e^{j(\omega_c t + n\Omega t)} \right]$$

其傅立叶级数展开式为：

$$\begin{aligned} v(t) = & V_{cm} J_0(M) \cos \omega_c t \\ & + J_1(M) V_{cm} [\cos(\omega_c + \Omega)t - \cos(\omega_c - \Omega)t] \\ & + J_2(M) V_{cm} [\cos(\omega_c + 2\Omega)t + \cos(\omega_c - 2\Omega)t] \\ & + J_3(M) V_{cm} [\cos(\omega_c + 3\Omega)t - \cos(\omega_c - 3\Omega)t] \\ & + \dots \\ & \dots \end{aligned}$$



由上式得到 $v(t)$ 中包含的成分：

载频： ω_c

振幅： $V_{cm} J_0(M)$

第一对边频： $\omega_c \pm \Omega$

振幅： $J_1(M) V_{cm}$

第二对边频： $\omega_c \pm 2\Omega$

振幅： $J_2(M) V_{cm}$

⋮

第n对边频： $\omega_c \pm n\Omega$

振幅： $V_{cm} J_n(M)$



结论：调角波的特点

(1) 单频率调制的调角波，有无穷多对边频分量，对称的分布在载频两边，各频率分量的间隔为 F 。所以FM，PM实现的是调制信号频谱的非线性搬移。

(2) 各边频分量振幅为 $V_{\Omega m} = J_n(M_f)V_{cm}$ ，由对应的贝塞尔函数确定。奇数次分量上下边频振幅相等，相位相反；偶数次分量上下边频振幅相等，相位相同。



(3) 由贝塞尔函数特性知：对应于某些 M 值，载频和某些边频分量为零，利用这一点，可以将载频功率转移到边频分量上去，使传输效率增加。

调角波的频谱结构与调制指数 M 密切相关。

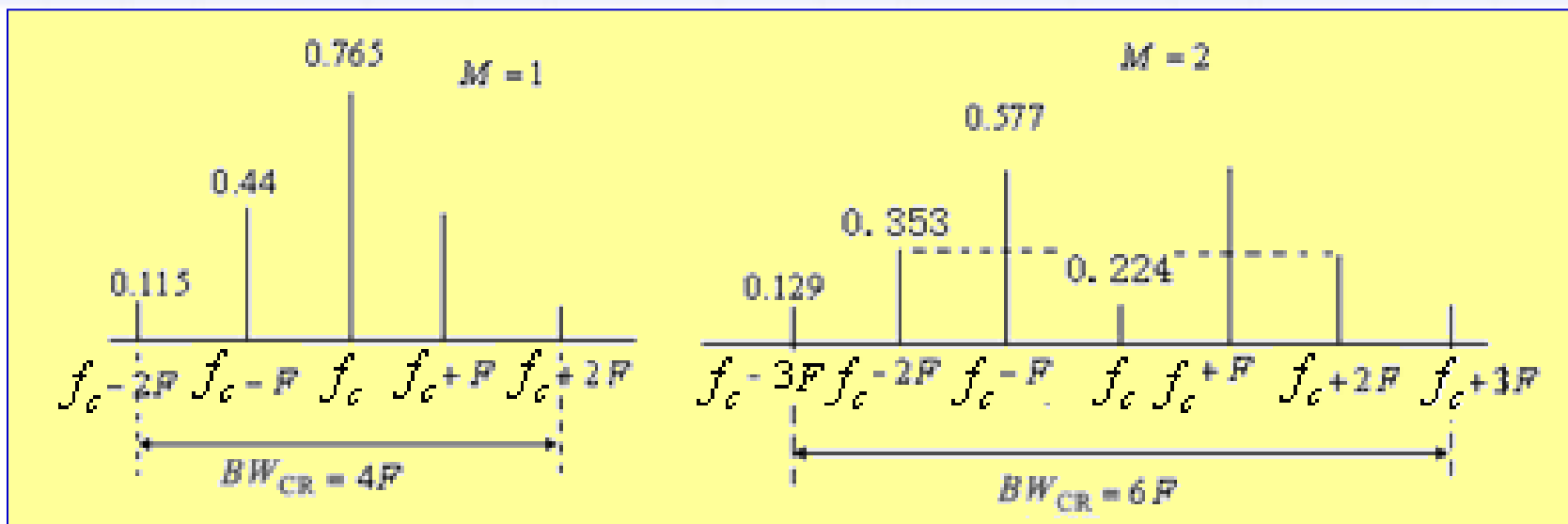


图7.1.5 $M=1$ 和 $M=2$ 时调角波的频谱图

调幅波在调制信号为单音频余弦波时，仅有两个边频分量，边频分量的数目不会因调幅指数 M_a 的改变而变化。调角波则不同，它的频谱结构与调制指数 M 有密切关系， M 越大，具有较大振幅的边频分量数越多，如图7.1.5所示，这是调角波频谱的主要特点。



图7.1.6 中画出了当 $V_{\Omega m}$ 一定 ($\Delta f_m = k_f V_{\Omega m} / 2\pi$ 一定) , 调制信号频率变化时调频波、调相波的频谱图。

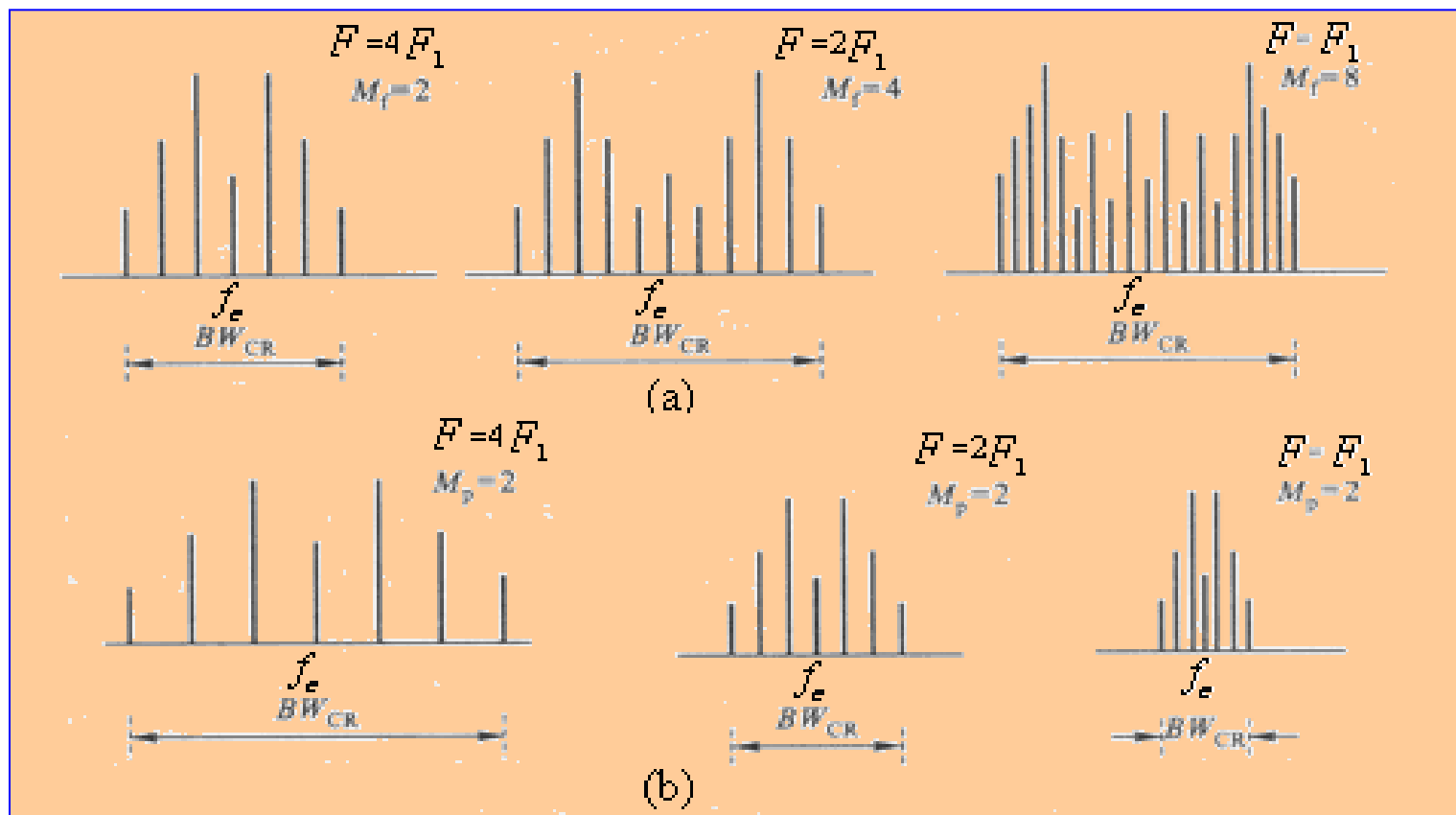


图7.1.6 $V_{\Omega m}$ 一定，调制信号频率 F 变化时调频波、调相波的频谱图。

(a) 调频波频谱

(b) 调相波频谱



(4) 调角信号的平均功率 (在单位负载上)

$$\begin{aligned} P_{av} &= J_0^2(M) \frac{V_{cm}^2}{2} + J_1^2(M) \frac{V_{cm}^2}{2} + J_{-1}^2(M) \frac{V_{cm}^2}{2} + \dots \\ &= \frac{1}{2} V_{cm}^2 [J_0^2(M) + J_1^2(M) + J_{-1}^2(M) + J_2^2(M) + J_{-2}^2(M) + \dots] \\ &= \frac{1}{2} V_{cm}^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(M) = \frac{1}{2} V_{cm}^2 = P_c = \text{载波功率} \end{aligned}$$

所以，调制前后功率不变，只是功率的重新分配。



∴保留下来的边频分量确定了带宽。

理论上，调角信号的带宽为无限宽，但通常规定 $J_n(M)V_{cm} < V_{cm}$ 的 1% (或10%) 可忽略。

7.1.3 调角信号的频谱宽度

例如：若忽略 $\frac{J_n(M)V_{cm}}{V_{cm}} < 1\% = 0.01$ 的分量

表7.1.1中列出了忽略 $\frac{J_n(M)V_{cm}}{V_{cm}} < 1\% = 0.01$ 的分量时，

宗数为M的n阶第一类贝塞尔函数表。



表7.1.1 宗数为M的n阶第一类贝塞尔函数表

$J_n(M)$ $n \backslash M$	0	0.5	1	2	3	4	5	6
0	1	0.939	0.765	0.224	-0.261	-0.397	-0.178	0.151
1		0.242	0.440	0.577	0.339	-0.066	-0.328	-0.277
2		0.03	0.115	0.353	0.486	0.364	0.047	-0.243
3			0.020	0.129	0.309	0.430	0.365	0.115
4			0.003	0.034	0.132	0.281	0.391	0.358
5				0.007	0.043	0.132	0.261	0.362
6					0.011	0.049	0.131	0.246
7					0.003	0.015	0.053	0.130
8						0.004	0.018	0.057



调角信号实际占据的有效频谱宽度为：

$$BW_{\varepsilon} = 2LF$$

式中， L 为有效的上边频（或下边频）分量的数目， F 为调制信号的频率。

在高质量的通信系统中，取 $\varepsilon = 0.01$ ，即忽略 $J_n(M) < 1\%$ 的分量，相应的 BW_{ε} 用 $BW_{0.01}$ 表示；

在中等质量通信系统中，取 $\varepsilon = 0.1$ ，即忽略 $J_n(M) < 10\%$ 的分量，相应的 BW_{ε} 用 $BW_{0.1}$ 表示；



如果L不是整数，应该用大于并靠近该数值的正整数取代。

用卡森公式近似表示调角信号的有效频谱宽度，即

$$BW_{CR} = 2(M + 1)F$$

BW_{CR} 介于 $BW_{0.01}$ 与 $BW_{0.1}$ 之间，但比较接近 $BW_{0.1}$ 。由于

$\Delta f_m = MF$ ，上式又可表示为

$$BW_{CR} = 2(\Delta f_m + F)$$



当 $M_f \ll 1$ ，为窄带调制，此时

$$BW_{CR} \approx 2F \quad (\Delta f_m \ll F)$$

显然，窄带调频时，频带宽度与调幅波基本相同，窄带调频广泛应用于移动通信台中。

当 $M \ll 1$ ，为宽带调制时，此时有

$$BW_{CR} \approx 2\Delta f_m \quad (\Delta f_m \ll F)$$



例7.1.2 已知音频调制信号的最低频率 $F_{\min} = 20\text{Hz}$ ，最高频率

$F_{\max} = 15\text{kHz}$ ，若要求最大频偏 $\Delta f_m = 45\text{kHz}$ ，求出相应调频信号的调

频指数 M_f ，带宽BW和带宽内各频率分量功率之和（假定调频信号

总功率为1W，画出 $F=15\text{kHz}$ 对应的频谱图，并求出相应调相信号的

调相指数 M_p 、带宽和最大频偏。

解：调频信号的调频指数 M_f 与调制频率成反比，即

$$M_f = \frac{\Delta\omega_m}{\Omega} = \frac{\Delta f_m}{F}$$



所以 $M_{f \max} = \frac{\Delta f_m}{F_{\min}} = \frac{45 \times 10^3}{20} = 2250(\text{rad})$

$$M_{f \min} = \frac{\Delta f_m}{F_{\max}} = \frac{45 \times 10^3}{15 \times 10^3} = 3(\text{rad})$$

$$BW_{CR} = 2 \times (3 + 1) \times 15 \times 10^3 = 120(\text{kHz})$$

因为 $F=15\text{kHz}$ 对应的 $M_f=3$ ，从表7.1.1可查出

$$J_0(3) = -0.261, J_1(3) = 0.339, J_2(3) = 0.486,$$

$$J_3(3) = 0.309, J_4(3) = 0.132,$$

由此可画出对应调频信号带宽内的频率图，共9条谱线，如图所示。

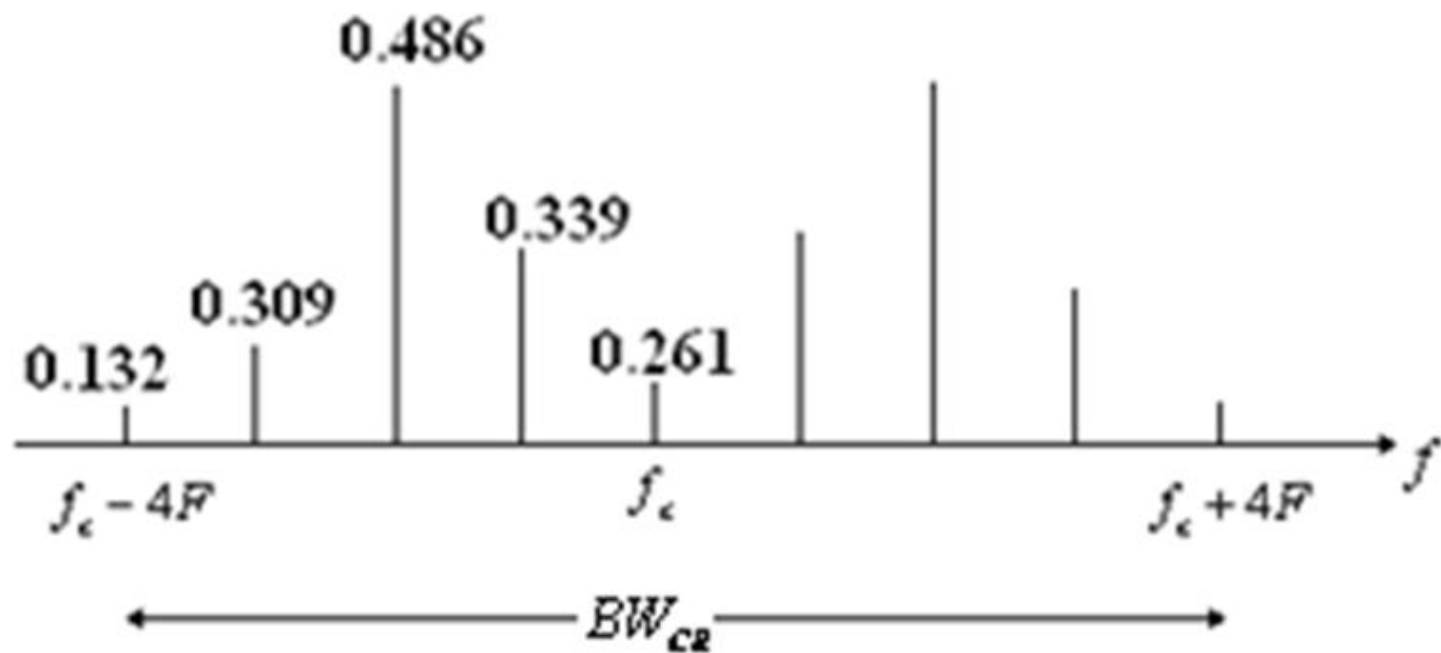


图7.1.7 例题7.1.2的频谱



因为调频信号总功率为1W，故 $V_{cm} = \sqrt{2}V$ ，所以带宽内功率之和

$$P = \frac{J_0^2(3)V_{cm}^2}{2} + 2\sum_{n=1}^4 \frac{J_n^2(3)V_{cm}^2}{2} = \frac{V_{cm}^2}{2} [J_0^2(3) + 2\sum_{n=1}^4 J_n^2(3)] \approx 0.996(\text{W})$$

调相信号的最大频偏是与调制信号频率成正比的，为了保证所有调制频率对应的最大频偏不超过45kHz，除了最高调制频率外，其余调制频率对应的最大频偏必然小于45kHz。另外，调相信号的调相指数 M_p 与调制频率无关。



由 $\Delta f_m = M_p F$ 可得 $M_p = \frac{\Delta f_{m\max}}{F_{\max}} = \frac{45 \times 10^3}{15 \times 10^3} = 3$

调相波的 $M_p = k_p V_{\Omega m}$ 与 F 无关

所以 $\Delta f_{m\min} = M_p F_{\min} = 3 \times 20 = 60(\text{Hz})$

$$\Delta f_{m\max} = M_p F_{\min} = 3 \times 15 = 45(\text{kHz})$$

$$BW_{CR\max} = 2 \times (3 + 1) \times 15 \times 10^3 = 120(\text{kHz})$$

$$BW_{CR\min} = 2 \times (3 + 1) \times 20 = 160(\text{Hz})$$



由以上结果可知，若调相信号最大频偏限制在45kHz以内，则带宽仍为120kHz，与调频信号相同，但各调制频率对应的最大频偏变化很大，最小者仅为60Hz。



作业:

7.7 7.8 7.9 7.10 7.11 7.12

预习: 7.2 7.3