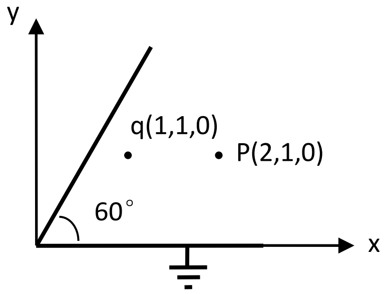
第四章习题《基础物理 I 波动理论导引》

习题 4.1：一个点电荷 q 放在 60° 的接地导体角域内的点（1,1,0）处，如图所示。试求：（1）所有镜像电荷的位置和大小；（2）点 P（2,1,0）处的电位。



解：（1）用镜像法求解，各镜像电荷位置坐标和大小如下：

$$q_1'\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2},\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right), q_1'=-q$$

$$q_2'\left(-\frac{\sqrt{3}+1}{2},\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right), q_1'=q$$

$$q_3'\left(-\frac{\sqrt{3}+1}{2},-\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right), q_1'=-q$$

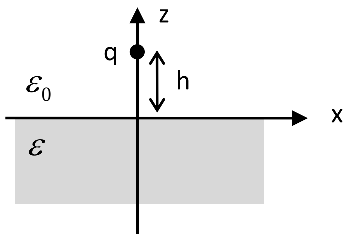
$$q_4'\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2},-\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right), q_1'=q$$

$$q_5'(1,-1), q_1'=-q$$

（2）P 点的电位为

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_0}-\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}-\frac{1}{R_5}\right)\\ &= \frac{q}{\pi\varepsilon_0}\left(1-\frac{1}{\sqrt{8-3\sqrt{3}}}+\frac{1}{\sqrt{10+\sqrt{3}}}-\frac{1}{\sqrt{8+3\sqrt{3}}}+\frac{1}{\sqrt{10-\sqrt{3}}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\\ &\approx 2.8\times10^{9}q\ (\mathrm{V})\end{aligned}$$

习题 4.2：如图所示，在 $z<0$ 的下半空间是介电常数为 ε 的电介质，上半空间为空气，距离介质平面 h 处有一点电荷 q。试求：（1）$z>0$ 和 $z<0$ 的两个半空间内的电位分布；（2） 电介质表面上的极化电荷密度，并证明表面上的极化电荷总量等于镜像电荷 q'。



解：

（1） 由镜像法得知，q' 和 q'' 为镜像电荷，其大小和位置分别为

$$\begin{cases} q' = -\dfrac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0} q \\ z = -h \end{cases} \qquad \begin{cases} q'' = \dfrac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0} q \\ z = h \end{cases}$$

z > 0 时，由叠加原理

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R'} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+(z-h)^2}} - \frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{r^2+(z+h)^2}}\right)$$

z < 0 时，由叠加原理

$$\varphi = \frac{q+q''}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{q}{2\pi(\varepsilon+\varepsilon_0)}\frac{1}{\sqrt{r^2+(z-h)^2}}$$

（2） 由于在 z = 0 的分界面上无电荷分布，故极化电荷面密度为

$$\hat{n}\cdot\left(\vec{D}_1-\vec{D}_2\right)=0 \quad => \quad \hat{n}\cdot\left[\left(\varepsilon_0\vec{E}_1\right)-\left(\varepsilon_0\vec{E}_2+\vec{P}_2\right)\right]=0$$

$$=> \quad \hat{n}\cdot\vec{P}_2 = \hat{n}\cdot\left(\varepsilon_0\vec{E}_1-\varepsilon_0\vec{E}_2\right)$$

$$\sigma_P = \hat{n}\cdot\vec{P}_2 = \varepsilon_0\left(E_{1z}-E_{2z}\right)|_{z=0} = \varepsilon_0\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)|_{z=0} = -\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)hq}{2\pi(\varepsilon+\varepsilon_0)\left(r^2+h^2\right)^{3/2}}$$

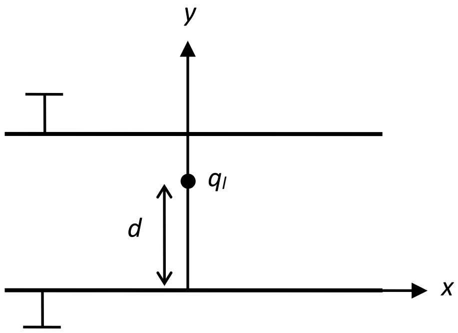
则极化电荷量为

$$q_P = \int_S \sigma_P dS = \int_0^\infty \sigma_P 2\pi r dr = -\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)hq}{(\varepsilon+\varepsilon_0)}\int_0^\infty \frac{r}{\left(r^2+h^2\right)^{3/2}}dr$$

$$= \frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)hq}{(\varepsilon+\varepsilon_0)}\int_0^\infty d\,\frac{1}{\left(r^2+h^2\right)^{1/2}} = -\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)}{(\varepsilon+\varepsilon_0)}q$$

$$=> \quad q_P = q'$$

习题 4.3：两块无限大接地导体板，两板之间有一与 z 轴平行的线电荷 q_l，其位置为（0，d），求板间的电位分布。



解：设 yz 平面左右两侧区域的电位函数分布为 φ_1、φ_2

线电荷 q_l 可表示成电荷面密度 $\sigma(y)=q_l\delta(y-d)$

电位函数应满足的边界条件为：

（1）　$\varphi_1(x,0)=\varphi_1(x,a)=0$

（2）　$\varphi_2(x,0)=\varphi_2(x,a)=0$

（3）　当 $|x|\to\infty$ 时，$\varphi_1(x,y)=\varphi_2(x,y)=0$

（4）　$\varphi_1(0,y)=\varphi_2(0,y)$

（5）　$\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}|_{x=0}=\frac{1}{\varepsilon_0}q_l\delta(y-d)$

通解形式为：

$$\boxed{\varphi(x,y)=(A_0x+B_0)(C_0y+D_0)+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\sin k_nx+B_n\cos k_nx)(C_n\sinh k_ny+D_n\cosh k_ny)}$$

或

$$\boxed{\varphi(x,y)=(A_0x+B_0)(C_0y+D_0)+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\sinh k_nx+B_n\cosh k_nx)(C_n\sin k_ny+D_n\cos k_ny)}$$

由条件（1）~（3）可设 φ_1 和 φ_2 的通解为

$$\varphi_1=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left(\sin\frac{n\pi}{a}y\right)\left(e^{-\frac{n\pi}{b}x}\right),\quad 0<x<\infty$$

$$\varphi_2=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\left(\sin\frac{n\pi}{a}y\right)\left(e^{\frac{n\pi}{b}x}\right),\quad -\infty<x<0$$

由条件（4）可得：$A_n = B_n$

由条件（5）可得

$$\varphi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(\sin \frac{n\pi}{a} y \right) \left(e^{\frac{n\pi}{b} x} \right), \quad -\infty < x < 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\sin \frac{n\pi}{a} y \right) \frac{n\pi}{b} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\sin \frac{n\pi}{a} y \right) \frac{n\pi}{b} = \frac{1}{\varepsilon_0} q_l \delta\left(y - d \right)$$

简化得：

$$2\sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\sin \frac{n\pi}{a} y \right) \frac{n\pi}{b} = \frac{1}{\varepsilon_0} q_l \delta\left(y - d \right)$$

将上式两边同乘以 $\sin \frac{n\pi}{a} y$，并从 0 到 a 对 y 积分，有

$$A_n = \frac{q_l}{n\pi\varepsilon_0} \sin\left(\frac{n\pi d}{a} \right)$$

所以，我们得到

$$\varphi_1 = \frac{q_l}{\pi\varepsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi d}{a} \right) \left(\sin \frac{n\pi}{a} y \right) \left(e^{-\frac{n\pi}{b} x} \right), \quad 0 < x < \infty$$

$$\varphi_2 = \frac{q_l}{\pi\varepsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi d}{a} \right) \left(\sin \frac{n\pi}{a} y \right) \left(e^{\frac{n\pi}{b} x} \right), \quad -\infty < x < 0$$