第一章　习题解答

1.2 给定三个矢量 $\vec{A}$，$\vec{B}$，$\vec{C}$：

$$\vec{A}=\vec{a}_x+2\vec{a}_y-3\vec{a}_z$$

$$\vec{B}=-4\vec{a}_y+\vec{a}_z$$

$$\vec{C}=5\vec{a}_x-2\vec{a}_z$$

求：错误！未找到引用源。　矢量 $\vec{A}$ 的单位矢量 $\vec{a}_A$；

错误！未找到引用源。　矢量 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 的夹角 θ_{AB}；

错误！未找到引用源。　$\vec{A}\cdot\vec{B}$ 和 $\vec{A}\times\vec{B}$

错误！未找到引用源。　$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ 和 $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}$；

错误！未找到引用源。　$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ 和 $(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$

解：错误！未找到引用源。　$\vec{a}_A=\dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|}=\dfrac{\vec{A}}{\sqrt{1+4+9}}=(\vec{a}_x+2\vec{a}_y-3\vec{a}_z)/\sqrt{14}$

错误！未找到引用源。　$\cos\theta_{AB}=\vec{A}\cdot\vec{B}/|\vec{A}||\vec{B}|$

$$\theta_{AB}=135.5^{o}$$

错误！未找到引用源。　$\vec{A}\cdot\vec{B}=-11$，$\vec{A}\times\vec{B}=-10\vec{a}_x-\vec{a}_y-4\vec{a}_z$

错误！未找到引用源。　$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=-42$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}=-42$$

错误！未找到引用源。　$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=55\vec{a}_x-44\vec{a}_y-11\vec{a}_z$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}=2\vec{a}_x-40\vec{a}_y+5\vec{a}_z$$

1.3 有一个二维矢量场 $\vec{F}(r)=\vec{a}_x(-y)+\vec{a}_y(x)$，求其矢量线方程，并定性画出该矢量场图形。

解：由 $dx/(-y)=dy/x$，得 $x^2+y^2=c$

1.6 求数量场 $\Psi=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 通过点 P（1，2，3）的等值面方程。

解：等值面方程为 $\ln(x^2+y^2+z^2)=c$

则 c=ln(1+4+9)=ln14

那么 $x^2+y^2+z^2=14$

1.9 求标量场 $\Psi(x,y,z)=6x^2y^3+e^z$ 在点 P（2，-1，0）的梯度。

解：由 $\nabla\Psi=\vec{a}_x\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\vec{a}_y\frac{\partial\Psi}{\partial y}+\vec{a}_z\frac{\partial\Psi}{\partial z}=12xy^3\vec{a}_x+18x^2y^2\vec{a}_y+e^z\vec{a}_z$ 得

$$\nabla\Psi=-24\vec{a}_x+72\vec{a}_y+\vec{a}_z$$

1.10 在圆柱体 $x^2+y^2=9$ 和平面 x=0，y=0,z=0 及 z=2 所包围的区域，设此区域的表面为 S:

错误！未找到引用源。 求矢量场 $\vec{A}$ 沿闭合曲面 S 的通量，其中矢量场的表达式为

$$\vec{A}=\vec{a}_x3x^2+\vec{a}_y(3y+z)+\vec{a}_z(3z-x)$$

错误！未找到引用源。 验证散度定理。

解：错误！未找到引用源。 $\oint\bar{A}\bullet d\bar{s}=\int_{曲}\vec{A}\bullet d\vec{S}+\int_{xoz}\vec{A}\bullet d\vec{S}+\int_{yoz}\vec{A}\bullet d\vec{S}+\int_{上}\vec{A}\bullet d\vec{S}+\int_{下}\vec{A}\bullet d\vec{S}$

$$\int_{曲}\vec{A}\bullet d\vec{S}=\int_{曲}(3\rho^2\cos^3\theta+3\rho\sin^2\theta+z\sin\theta)d\rho d\theta=156.4$$

$$\int_{xoz}\vec{A}\bullet d\vec{S}=\int_{xoz}(3y+z)dxdz=-6$$

$$\int_{yoz}\vec{A}\bullet d\vec{S}=-\int_{yoz}3x^2dydz=0$$

$$\int_{上}\vec{A}\bullet d\vec{S}+\int_{下}\vec{A}\bullet d\vec{S}=\int_{上}(6-\rho\cos\theta)\rho d\theta d\rho+\int_{下}\rho\cos\theta d\rho d\theta=\frac{27}{2}\pi$$

$$\oint\bar{A}\bullet d\bar{s}=193$$

错误！未找到引用源。 $\int_V\nabla\bullet\bar{A}dV=\int_V(6+6x)dV=6\int_V(\rho\cos\theta+1)d\rho d\theta dz=193$

即：$\oint_s\bar{A}\bullet d\bar{s}=\int_V\nabla\bullet\bar{A}dV$

1.13 求矢量 $\vec{A}=\vec{a}_x x+\vec{a}_y xy^2$ 沿圆周 $x^2+y^2=a^2$ 的线积分，再求 $\nabla\times\vec{A}$ 对此圆周所包围的表面积分，验证斯托克斯定理。

解：$\oint_l\bar{A}\bullet d\bar{l}=\boxed{\int_L}xdx+xy^2dy=\frac{\pi}{4}a^4$

$$\nabla\times\vec{A}=\vec{a}_zy^2$$

$$\oint_S \nabla\times\bar{A}\bullet d\bar{s} = \iint_S y^2 dS = \iint_S \rho^2 \sin^2\theta \rho d\rho d\theta = \frac{\pi}{4}a^4$$

即：$\oint \bar{A}\bullet d\bar{l} = \oint_S \nabla\times\bar{A}\bullet d\bar{s}$，得证。

1.15 求下列标量场的梯度：

错误！未找到引用源。 $u=xyz+x^2$

$$\nabla u = \vec{a}_x\frac{\partial u}{\partial x}+\vec{a}_y\frac{\partial u}{\partial y}+\vec{a}_z\frac{\partial u}{\partial z}=\vec{a}_x(yz+zx)+\vec{a}_y xz+\vec{a}_z xy$$

错误！未找到引用源。 $u=4x^2y+y^2z-4xz$

$$\nabla u = \vec{a}_x\frac{\partial u}{\partial x}+\vec{a}_y\frac{\partial u}{\partial y}+\vec{a}_z\frac{\partial u}{\partial z}=\vec{a}_x(8xy-4z)+\vec{a}_y(4x^2+2yz)+\vec{a}_z(y^2-4x)$$

错误！未找到引用源。 $\nabla u = \vec{a}_x\frac{\partial u}{\partial x}+\vec{a}_y\frac{\partial u}{\partial y}+\vec{a}_z\frac{\partial u}{\partial z}=\vec{a}_x 3x+\vec{a}_y 5z+\vec{a}_z 5y$

1.16 求下列矢量场在给定点的散度

错误！未找到引用源。 $\nabla\bullet\bar{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=3x^2+3y^2+3|_{(1,0,-1)}=6$

错误！未找到引用源。 $\nabla\bullet\bar{A}=2xy+z+6z\,|_{(1,1,0)}=2$

1.17 求下列矢量场的旋度。

错误！未找到引用源。 $\nabla\times\vec{A}=\vec{0}$

错误！未找到引用源。 $\nabla\times\vec{A}=\vec{a}_x(x-x)+\vec{a}_y(y-y)+\vec{a}_z(z-z)=\vec{0}$

1.19 已知直角坐标系中的点 P(x,y,z)和点 Q(x',y',z'),求：

错误！未找到引用源。 P 的位置矢量 $\vec{r}$ 和 Q 点的位置矢量 $\vec{r}'$；

错误！未找到引用源。 从 Q 点到 P 点的距离矢量 $\vec{R}$；

错误！未找到引用源。 $\nabla\times\vec{r}$ 和 $\nabla\bullet\bar{r}$；

错误！未找到引用源。 $\nabla(\frac{1}{R})$。

解：错误！未找到引用源。 $\vec{r}=\vec{a}_x x+\vec{a}_y y+\vec{a}_z z$;

$$\vec{r}'=\vec{a}_x x'+\vec{a}_y y'+\vec{a}_z z'$$

错误！未找到引用源。 $\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}'=\vec{a}_x(x-x')+\vec{a}_y(y-y')+\vec{a}_z(z-z')$

错误！未找到引用源。 $\nabla\times\vec{r}=\vec{0}$，$\nabla\bullet\vec{r}=3$

错误！未找到引用源。 $\frac{1}{R}=\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$

$$\nabla\left(\frac{1}{R}\right)=\left(\vec{a}_x\frac{\partial}{\partial x}+\vec{a}_y\frac{\partial}{\partial y}+\vec{a}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{R}$$

$$=-\vec{a}_x\frac{\frac{1}{2}\frac{2(x-x')}{R}}{R^2}-\vec{a}_y\frac{\frac{1}{2}\frac{2(y-y')}{R}}{R^2}-\vec{a}_z\frac{\frac{1}{2}\frac{2(z-z')}{R}}{R^2}$$

$$=-\vec{a}_x\frac{x-x'}{R^3}-\vec{a}_y\frac{y-y'}{R^3}-\vec{a}_z\frac{z-z'}{R^3}$$

$$=-\frac{1}{R^3}[\vec{a}_x(x-x)+\vec{a}_y(y-y)+\vec{a}_z(z-z)]$$

$$=-\frac{\vec{R}}{R^3}$$

即：$\nabla\left(\frac{1}{R}\right)=-\frac{\vec{R}}{R^3}$

第一章 习题解答

1.2 给定三个矢量 $\vec{A}$，$\vec{B}$，$\vec{C}$：

$\vec{A}=\vec{a}_x+2\vec{a}_y-3\vec{a}_z$

$\vec{B}=-4\vec{a}_y+\vec{a}_z$

$\vec{C}=5\vec{a}_x-2\vec{a}_z$

求：错误！未找到引用源。 矢量 $\vec{A}$ 的单位矢量 $\vec{a}_A$；

错误！未找到引用源。 矢量 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 的夹角 θ_{AB}；

错误！未找到引用源。 $\vec{A}\cdot\vec{B}$ 和 $\vec{A}\times\vec{B}$

错误！未找到引用源。 $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ 和 $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}$；

错误！未找到引用源。 $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ 和 $(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$

解：错误！未找到引用源。 $\vec{a}_A=\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}=\frac{\vec{A}}{\sqrt{1+4+9}}=(\vec{a}_x+2\vec{a}_y-3\vec{a}_z)/\sqrt{14}$

错误！未找到引用源。 $\cos\theta_{AB} = \vec{A} \cdot \vec{B} / |\vec{A}||\vec{B}|$

$\theta_{AB} = 135.5^{o}$

错误！未找到引用源。 $\vec{A} \cdot \vec{B} = -11$, $\vec{A} \times \vec{B} = -10\vec{a}_x - \vec{a}_y - 4\vec{a}_z$

错误！未找到引用源。 $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = -42$

$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = -42$

错误！未找到引用源。 $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = 55\vec{a}_x - 44\vec{a}_y - 11\vec{a}_z$

$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = 2\vec{a}_x - 40\vec{a}_y + 5\vec{a}_z$

1.3 有一个二维矢量场 $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{a}_x(-y) + \vec{a}_y(x)$，求其矢量线方程，并定性画出该矢量场图形。

解：由 $dx/(-y)=dy/x$，得 $x^2 + y^2 = c$

1.6 求数量场 $\Psi = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ 通过点 P（1，2，3）的等值面方程。

解：等值面方程为 $\ln(x^2 + y^2 + z^2) = c$

则 $c=\ln(1+4+9)=\ln 14$

那么 $x^2 + y^2 + z^2 = 14$

1.9 求标量场 $\Psi(x,y,z) = 6x^2y^3 + e^z$ 在点 P（2，-1，0）的梯度。

解：由 $\nabla\Psi = \vec{a}_x\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \vec{a}_y\frac{\partial\Psi}{\partial y} + \vec{a}_z\frac{\partial\Psi}{\partial z} = 12xy^3\vec{a}_x + 18x^2y^2\vec{a}_y + e^z\vec{a}_z$ 得

$\nabla\Psi = -24\vec{a}_x + 72\vec{a}_y + \vec{a}_z$

1.10 在圆柱体 $x^2 + y^2 = 9$ 和平面 $x=0$，$y=0$，$z=0$ 及 $z=2$ 所包围的区域，设此区域的表面为 S:

错误！未找到引用源。 求矢量场 $\vec{A}$ 沿闭合曲面 S 的通量，其中矢量场的表达式为

$\vec{A} = \vec{a}_x 3x^2 + \vec{a}_y(3y+z) + \vec{a}_z(3z - x)$

错误！未找到引用源。 验证散度定理。

解：错误！未找到引用源。 $\oint \bar{A} \bullet d\bar{s} = \int_{曲}\vec{A}\bullet d\vec{S} + \int_{xoz}\vec{A}\bullet d\vec{S} + \int_{yoz}\vec{A}\bullet d\vec{S} + \int_{上}\vec{A}\bullet d\vec{S} + \int_{下}\vec{A}\bullet d\vec{S}$

$\int_{曲}\vec{A}\bullet d\vec{S} = \int_{曲}(3\rho^2\cos^3\theta + 3\rho\sin^2\theta + z\sin\theta)d\rho d\theta = 156.4$

$$\int_{xoz} \vec{A} \bullet d\vec{S} = \int_{xoz} (3y + z)dxdz = -6$$

$$\int_{yoz} \vec{A} \bullet d\vec{S} = -\int_{yoz} 3x^2 dydz = 0$$

$$\int_{上} \vec{A} \bullet d\vec{S} + \int_{下} \vec{A} \bullet d\vec{S} = \int_{上} (6 - \rho\cos\theta)\rho d\theta d\rho + \int_{下} \rho\cos\theta d\rho d\theta = \frac{27}{2}\pi$$

$$\oint \bar{A} \bullet d\bar{s} = 193$$

错误！未找到引用源。 $\int_V \nabla \bullet \bar{A} dV = \int_V (6 + 6x)dV = 6\int_V (\rho\cos\theta + 1)d\rho d\theta dz = 193$

即：$\oint_S \bar{A} \bullet d\bar{s} = \int_V \nabla \bullet \bar{A} dV$

1.13 求矢量 $\vec{A} = \vec{a}_x x + \vec{a}_y x y^2$ 沿圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ 的线积分，再求 $\nabla \times \vec{A}$ 对此圆周所包围的表面积分，验证斯托克斯定理。

解：$\oint \bar{A} \bullet d\bar{l} = \boxed{\int_L} xdx + xy^2 dy = \frac{\pi}{4}a^4$

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{a}_z y^2$$

$$\oint_S \nabla \times \bar{A} \bullet d\bar{s} = \boxed{\int_S} y^2 dS = \boxed{\int_S} \rho^2 \sin^2\theta \rho d\rho d\theta = \frac{\pi}{4}a^4$$

即：$\oint \bar{A} \bullet d\bar{l} = \oint_S \nabla \times \bar{A} \bullet d\bar{s}$，得证。

1.15 求下列标量场的梯度：

错误！未找到引用源。 $u=xyz+x^2$

$$\nabla u = \vec{a}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \vec{a}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \vec{a}_z \frac{\partial u}{\partial z} = \vec{a}_x (yz+zx) + \vec{a}_y xz + \vec{a}_z xy$$

错误！未找到引用源。 $u=4x^2y+y^2z-4xz$

$$\nabla u = \vec{a}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \vec{a}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \vec{a}_z \frac{\partial u}{\partial z} = \vec{a}_x (8xy-4z) + \vec{a}_y (4x^2+2yz) + \vec{a}_z (y^2-4x)$$

错误！未找到引用源。 $\nabla u = \vec{a}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \vec{a}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \vec{a}_z \frac{\partial u}{\partial z} = \vec{a}_x 3x + \vec{a}_y 5z + \vec{a}_z 5y$

1.16 求下列矢量场在给定点的散度

错误！未找到引用源。 $\nabla \bullet \bar{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 3x^2 + 3y^2 + 3|_{(1,0,-1)} = 6$

错误！未找到引用源。 $\nabla \bullet \vec{A} = 2xy+z+6z\,|_{(1,1,0)} = 2$

1.17 求下列矢量场的旋度。

错误！未找到引用源。 $\nabla \times \vec{A} = \vec{0}$

错误！未找到引用源。 $\nabla \times \vec{A} = \vec{a}_x(x-x) + \vec{a}_y(y-y) + \vec{a}_z(z-z) = \vec{0}$

1.19 已知直角坐标系中的点 P(x,y,z)和点 Q(x',y',z'),求：

错误！未找到引用源。 P的位置矢量 $\vec{r}$ 和 Q 点的位置矢量 $\vec{r}'$；

错误！未找到引用源。 从 Q 点到 P 点的距离矢量 $\vec{R}$；

错误！未找到引用源。 $\nabla \times \vec{r}$ 和 $\nabla \bullet \vec{r}$；

错误！未找到引用源。 $\nabla(\frac{1}{R})$。

解：错误！未找到引用源。 $\vec{r} = \vec{a}_x x + \vec{a}_y y + \vec{a}_z z$;

$\vec{r}' = \vec{a}_x x' + \vec{a}_y y' + \vec{a}_z z'$

错误！未找到引用源。 $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' = \vec{a}_x(x-x') + \vec{a}_y(y-y') + \vec{a}_z(z-z')$

错误！未找到引用源。 $\nabla \times \vec{r} = \vec{0}$， $\nabla \bullet \vec{r} = 3$

错误！未找到引用源。 $\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$

$$\nabla(\frac{1}{R}) = (\vec{a}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{a}_y\frac{\partial}{\partial y} + \vec{a}_z\frac{\partial}{\partial z})\frac{1}{R}$$

$$= -\vec{a}_x\frac{\frac{1}{2}\frac{2(x-x')}{R}}{R^2} - \vec{a}_y\frac{\frac{1}{2}\frac{2(y-y')}{R}}{R^2} - \vec{a}_z\frac{\frac{1}{2}\frac{2(z-z')}{R}}{R^2}$$

$$= -\vec{a}_x\frac{x-x'}{R^3} - \vec{a}_y\frac{y-y'}{R^3} - \vec{a}_z\frac{z-z'}{R^3}$$

$$= -\frac{1}{R^3}[\vec{a}_x(x-x') + \vec{a}_y(y-y') + \vec{a}_z(z-z')]$$

$$= -\frac{\vec{R}}{R^3}$$

即： $\nabla(\frac{1}{R}) = -\frac{\vec{R}}{R^3}$

第二章　习题解答

2.5 试求半径为 a，带电量为 Q 的均匀带电球体的电场。

解：以带电球体的球心为球心，以 r 为半径，作一高斯面，

由高斯定理 $\oint_S \vec{D}\bullet d\vec{S}=Q$，及 $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ 得，

错误！未找到引用源。 $r\le a$ 时，

由 $\oint_S \vec{D}\bullet d\vec{S}=\dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^2}\times\dfrac{4}{3}\pi r^2$，得

$$\vec{D}=\frac{Q\vec{r}}{4\pi a^3}$$

$$\vec{E}=\frac{Q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$$

错误！未找到引用源。 $r>a$ 时，

由 $\oint_S \vec{D}\bullet d\vec{S}=Q$，得

$$\vec{D}=\frac{Q\vec{r}}{4\pi r^3}$$

$$\vec{E}=\frac{Q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

2.5　两无限长的同轴圆柱体，半径分别为 a 和 b（a<b），内外导体间为空气。设同轴圆柱导体内、外导体上的电荷均匀分布，其电荷密度分别为 ρ_{S_1} 和 ρ_{S_2}，求：

错误！未找到引用源。　空间各处的电场强度；

错误！未找到引用源。　两导体间的电压；

错误！未找到引用源。　要使 $\rho>b$ 区域内的电场强度等于零，则 ρ_{S_1} 和 ρ_{S_2} 应满足什么关系？

解：错误！未找到引用源。　以圆柱的轴为轴做一个半径为 r 的圆柱高斯面，由高斯定理

$\oint_S \vec{D}\bullet d\vec{S}=q$

及 $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ 得，

当 0<r<b 时，由 $\oint_S \vec{D}\bullet d\vec{S}=q=0$，得

$\vec{D}=0$，　$\vec{E}=0$

当 $a\le r\le b$ 时，由 $\oint_S \vec{D}\bullet d\vec{S}=q$，得 $\vec{D}\times 2\pi r\times l=\rho_{S_1}\times 2\pi a\times l$

$$\vec{D}=\frac{\rho_{s_1}}{r}\vec{e}_r,\quad \vec{E}=\frac{\rho_{s_1}a}{\varepsilon_0 r}\vec{e}_r$$

当 b<r 时，由 $\oint_S \vec{D}\bullet d\vec{S}=q$,得 $D\times 2\pi r\times l=\rho_{s_1}\times 2\pi a\times l+\rho_{s_2}\times 2\pi b\times l$

$$\vec{D}=\frac{\rho_{s_1}a+\rho_{s_2}b}{r}\vec{e}_r,\quad \vec{E}=\frac{\rho_{s_1}a+\rho_{s_2}b}{\varepsilon_0 r}\vec{e}_r$$

错误！未找到引用源。 $\varnothing_{ab}=\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_a^b \frac{\rho_{s_1}a}{\varepsilon_0 r}dr=\frac{\rho_{s_1}a}{\varepsilon_0}\ln\frac{a}{b}$

错误！未找到引用源。 要使 $\rho>0$ 的区域外电场强度为 0，即：

$\vec{E}=\frac{\rho_{s_1}a+\rho_{s_2}b}{\varepsilon_0 r}\vec{e}_r=0$，得 $\rho_{s_1}=-\frac{b}{a}\rho_{s_2}$

2.9 一个半径为 a 的薄导体球壳，在其内表面覆盖了一层薄的绝缘膜，球内充满总电量为 Q 的电荷，球壳上又另充了电量为 Q 的电荷，已知内部的电场为 $\vec{E}=\vec{a}_r(\frac{r}{a})^4$，计算：

错误！未找到引用源。 球内电荷分布；

错误！未找到引用源。 球的外表面的电荷分布；

错误！未找到引用源。 球壳的电位；

错误！未找到引用源。 球心的电位。

解：错误！未找到引用源。 由 $\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho_v}{\varepsilon_0}$，得 $\rho=\frac{6\varepsilon_0 r^3}{a^4}$

错误！未找到引用源。 $\vec{E}=\vec{e}_r E$

$\rho_s=\vec{e}_r\bullet\vec{D}=\vec{e}_r\bullet\varepsilon_0\vec{E}=\varepsilon_0$

错误！未找到引用源。 由高斯定理 $\oint_S \vec{D}\bullet d\vec{S}=4\pi r^2 D=q$

当 $r\geq a$ 时，q=2Q，$Q=4\pi a^2\varepsilon_0$

$$\varphi_r=\frac{2Q}{2\pi r\varepsilon_0}=2a$$

错误！未找到引用源。 $\varphi_a=\int_0^a \vec{E}d\vec{l}=-2a$

$\varphi=\varphi_r+\varphi_a=2-2a$

2.17 一个有两层介质（ε_1，ε_2）的平行板电容器，两种介质的电导率分别为 σ_1 和 σ_2，电容器极板的面积为 S。当外加压力为 U 时，求：

错误！未找到引用源。 电容器的电场强度；

错误！未找到引用源。　两种介质分界面上表面的自由电荷密度；
错误！未找到引用源。　电容器的漏电导；
错误！未找到引用源。　当满足参数是 $\sigma_1\varepsilon_2=\sigma_2\varepsilon_1$，问 G/C=?(C 为电容器电容)

解：错误！未找到引用源。　由 $E_1D_1+E_2D_2=U,J_{1n}=J_{2n}$，得

$$E_1=\frac{\sigma_2U}{d_2\sigma_1+d_1\sigma_2},\quad E_2=\frac{\sigma_1U}{d_2\sigma_1+d_1\sigma_2}$$

错误！未找到引用源。　两介质分界面的法线由 1 指向 2

由 $\varepsilon_2E_2-\varepsilon_1E_1=\rho_s$，得

$$\rho_s=\frac{\varepsilon_2\sigma_1U}{d_2\sigma_1+d_1\sigma_2}-\frac{\varepsilon_1\sigma_2U}{d_2\sigma_1+d_1\sigma_2}$$

错误！未找到引用源。　由 $J=\frac{I}{S}=\sigma_1E_1$，知

$$\frac{I}{S\sigma_1}=\frac{\sigma_2U}{d_2\sigma_1+d_1\sigma_2}$$

$$G=\frac{I}{U}=\frac{\sigma_1\sigma_2S}{d_2\sigma_1+d_1\sigma_2}$$

错误！未找到引用源。　$C=\frac{Q}{U}=\frac{D_1S}{U}=\frac{\varepsilon_1\sigma_2S}{d_2\sigma_1+d_1\sigma_2}$

$$G/C=\frac{\sigma_1}{\varepsilon_1}$$

3.1

(1)

$$\vec{r}_1=(x,y,z-d)$$

$$\vec{r}_2=(x,y,z+d)$$

$$\phi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}}\right)$$

$$\vec{E}=-\nabla\phi$$

$$=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{x}{r_2^3}-\frac{x}{r_1^3}\right)\vec{a}_x+\left(\frac{y}{r_2^3}-\frac{y}{r_1^3}\right)\vec{a}_y+\left(\frac{z+d}{r_2^3}-\frac{z-d}{r_1^3}\right)\vec{a}_z\right]$$

(2)

在导体平面上有 $z=0$,则

$$r_1=r_2=\sqrt{x^2+y^2+d^2}$$

$$\vec{E}=-\frac{qd}{2\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(3)

由库仑定律得

$$F=\frac{q(-q)}{4\pi\varepsilon_0(2d)^2}=\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 d^2}$$

3 .6

板间电位满足泊松方程

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho_0 x}{\varepsilon_0 d}$$

边界条件为

$\phi(0)=0,\quad \phi(d)=U_0$

对方程进行两次积分得

$$\phi = -\frac{\rho_0 x^3}{6\varepsilon_0 d} + C_1 x + C_2$$

代入边界条件得

$$C_2 = 0,\quad C_1 = \frac{U_0}{d} + \frac{\rho_0 d}{\varepsilon_0 d}$$

所以 ，板间电位分布为

$$\phi = -\frac{\rho_0 x^3}{6\varepsilon_0 d} + \left(\frac{U_0}{d} + \frac{\rho_0 d}{6\varepsilon_0}\right)x$$

$$\vec{E} = -\nabla\phi = \vec{a}_x\left(\frac{\rho_0 x^2}{2\varepsilon_0 d} - \frac{U_0}{d} - \frac{\rho_0 d}{6\varepsilon_0}\right)$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} = \vec{a}_x\left(\frac{\rho_0 x^2}{2d} - \frac{\varepsilon_0 U_0}{d} - \frac{\rho_0 d}{6}\right)$$

x =0 极板上的电荷密度为

$$\rho_{s0} = \vec{a}_x\cdot\vec{D}\Big|_{x=0} = -\frac{\varepsilon_0 U_0}{d} - \frac{\rho_0 d}{6}$$

x=d 极板上的电荷密度为

$$\rho_{sd} = (-\vec{a}_x)\cdot\vec{D}\Big|_{x=d} = \frac{\varepsilon_0 U_0}{d} - \frac{\rho_0 d}{3}$$

3.8

电位分布满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2\phi = 0 \text{ 即 } \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0$$

边界条件为 $\phi|_{x=0,0\le y\le b}=0$ $\phi|_{x=a,0\le y\le b}=U$

$\phi|_{y=0,0\le x\le a}=0$ $\phi|_{y=b,0\le x\le a}=0$

分离变量，设 $\phi = f(x)g(y)$

代入方程并且两边同时除以 $f(x)g(y)$ 得

$$\frac{f''(x)}{f(x)}+\frac{g''(y)}{g(y)}=0$$

设 $\frac{f''(x)}{f(x)}=\lambda$ 则 $\frac{g''(y)}{g(y)}=-\lambda$

方程可写成以下形式

$$f''(x)-\lambda f(x)=0 \quad (1)$$

$$g''(y)+\lambda g(y)=0 \quad (2)$$

解方程 (2) 并要求满足边界条件

$\phi|_{y=0,0\le x\le a}=0$ $\phi|_{y=b,0\le x\le a}=0$ 得

只有 $\lambda > 0$ 时方程满足要求

解得 $\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{b^2}$ $g_n(y)=\sin(\frac{n\pi}{b}y)$

将代入方程 (1)，并满足边界条件

$\phi|_{x=0,0\le y\le b}=0$

解得 $f_n(x)=A_n\sinh(\frac{n\pi}{b}x)$

则 $\phi_n=A_n\sinh(\frac{n\pi}{b}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)$

则电位的通解为

$$\phi=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sinh(\frac{n\pi}{b}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)$$

代入边界条件 $\phi\big|_{x=a,0\le y\le b} = U$ 得

$$\phi\big|_{x=a} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh(\frac{n\pi}{b}a)\sin(\frac{n\pi}{b}y) = U$$

两边同时乘以 $\sin(\frac{m\pi}{b}y)$ 并对 y 从 0 到 b 积分，并由

$$n \ne m \text{时} \int_0^b \sin(\frac{n\pi}{b}y)\sin(\frac{m\pi}{b}y)dy = 0$$

$$n = m \text{时} \int_0^b \sin(\frac{n\pi}{b}y)\sin(\frac{m\pi}{b}y)dy = \frac{b}{2} \text{得}$$

$$\int_0^b \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh(\frac{n\pi}{b}a)\sin(\frac{n\pi}{b}y)dy$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^b \sinh(\frac{n\pi}{b}a)\sin(\frac{n\pi}{b}y)dy$$

$$= \frac{b}{2} A_m \sinh(\frac{m\pi}{b}a)$$

$$= \int_0^b U \sin(\frac{m\pi}{b}y)\, dy \qquad (3)$$

(1) $U=U_0$ 时，由方程 (3) 得

$$U_0\frac{b}{m\pi}(1-\cos m\pi)=\frac{b}{2}A_m\sinh(\frac{m\pi}{b}a)$$

则 $A_m=\frac{4U_0}{m\pi}\frac{1}{\sinh(\frac{m\pi}{b}a)}\quad(m=1,3,5\cdots)$

代入电位的通解求得电位为

$$\phi=\sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{4U_0}{n\pi}\frac{\sinh(\frac{n\pi}{b}x)}{\sinh(\frac{n\pi}{b}a)}\sin(\frac{n\pi}{b}y)$$

(2) $U=U_0\sin\frac{\pi y}{b}$ 时

$$\int_0^b U\sin(\frac{m\pi}{b}y)\,dy=\int_0^b U_0\sin\frac{\pi y}{b}\sin(\frac{m\pi}{b}y)\,dy$$

$$=\frac{b}{2}U_0\quad(m=1)$$

由方程 (3) 得

$$\frac{b}{2}U_0=\frac{b}{2}A_1\sinh(\frac{\pi}{b}a)$$

则 $A_1=\frac{U_0}{\sinh(\frac{\pi}{b}a)}$

代入电位的通解求得电位为

$$\phi=U_0\frac{\sinh(\frac{\pi x}{b})}{\sinh(\frac{\pi}{b}a)}\sin(\frac{\pi y}{b})$$

3.9

电位分布满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2\phi=0 \text{ 即 } \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0$$

边界条件为 $\phi|_{x=0}=0 \quad \phi|_{x=a}=0$

$\phi|_{y=0}=U_0 \quad \phi|_{y=\infty}=C$

分离变量，设 $\phi=f(x)g(y)$

代入方程并且两边同时除以 $f(x)g(y)$ 得

$$\frac{f''(x)}{f(x)}+\frac{g''(y)}{g(y)}=0$$

设 $\frac{f''(x)}{f(x)}=-\lambda$ 则 $\frac{g''(y)}{g(y)}=\lambda$

方程可写成以下形式

$$f''(x)+\lambda f(x)=0 \quad (1)$$

$$g''(y)-\lambda g(y)=0 \quad (2)$$

解方程 (1) 并要求满足边界条件

$\phi|_{x=0}=0 \quad \phi|_{x=a}=0$ 得

只有 $\lambda>0$ 时方程满足要求

解得 $\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{a^2} \qquad f_n(x)=\sin(\frac{n\pi}{a}x)$

将代入方程 (2), 并满足边界条件

$\phi|_{y=\infty}=C$

解得 $g_n(y)=A_n e^{-\frac{n\pi}{a}y}$

则 $\phi_n=A_n\sin(\frac{n\pi}{a}x)e^{-\frac{n\pi}{a}y}$

则电位的通解为

$$\phi=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(\frac{n\pi}{a}x)e^{-\frac{n\pi}{a}y}$$

代入边界条件 $\phi\big|_{y=0}=U_0$ 得

$$U_0=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(\frac{n\pi}{a}x)$$

两边同时乘以 $\sin(\frac{m\pi}{a}x)$ 并对 x 从 0 到 a 积分，并由

$m=n$ 时 $\int_0^a\sin(\frac{n\pi}{a}x)\sin(\frac{m\pi}{a}x)dx=\frac{a}{2}A_m$

$m\neq n$ 时 $\int_0^a\sin(\frac{n\pi}{a}x)\sin(\frac{m\pi}{a}x)dx=0$ 得

$$\int_0^a U_0\sin(\frac{m\pi}{a}x)=\int_0^a\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(\frac{n\pi}{a}x)\sin(\frac{m\pi}{a}x)dx=\frac{a}{2}A_m$$

既 $U_0\frac{a}{m\pi}(1-\cos m\pi)=\frac{a}{2}A_m$

则 $A_m=\frac{4U_0}{m\pi}\quad(m=1,3,5\cdots)$

代入电位的通解方程得

$$\phi=\sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{4U_0}{n\pi}\sin(\frac{n\pi}{a}x)e^{-\frac{n\pi}{a}y}$$

3.1 设一点电荷 q 与无限大接地导体平面的距离为 d，如图 3.1 所示。求：

（1）空间的电位分布和电场强度；

（2）导体平面上感应电荷密度；

（3）点电荷 q 所受的力。

(1)

$$\vec{r}_1=(x,y,z-d)$$

$$\vec{r}_2=(x,y,z+d)$$

$$\phi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}}\right)$$

$$\vec{E}=-\nabla\phi$$

$$=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(\frac{x}{r_2^3}-\frac{x}{r_1^3}\right)\vec{a}_x+\left(\frac{y}{r_2^3}-\frac{y}{r_1^3}\right)\vec{a}_y+\left(\frac{z+d}{r_2^3}-\frac{z-d}{r_1^3}\right)\vec{a}_z\right]$$

(2)

在导体平面上有 $z=0$, 则

$$r_1=r_2=\sqrt{x^2+y^2+d^2}$$

$$\vec{E}=-\frac{qd}{2\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{a}_z$$

$$\rho_s=\vec{a}_z.\varepsilon_0\vec{E}=-\frac{qd}{2\pi(x^2+y^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(3)

由库仑定律得

$$\vec{F}=\frac{q(-q)}{4\pi\varepsilon_0(2d)^2}=-\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 d^2}\vec{a}_z$$

3.6 两无限大接地平行板电极, 距离为 d, 电位分别为 0 和 U_0, 板间充满电荷密度为 $\rho_0 x/d$ 的电荷，如题 3.6 图所示。求极板间的电位分布和极板上的电荷密度。

解：板间电位满足泊松方程 $\nabla^2\phi=-\dfrac{\rho_0 x}{\varepsilon_0 d}$

边界条件为 $\phi(0)=0$, $\phi(d)=U_0$ 对方程进行两次积分得

$$\phi=-\frac{\rho_0 x^3}{6\varepsilon_0 d}+C_1x+C_2$$ 代入边界条件得 $C_2=0, C_1=\dfrac{U_0}{d}+\dfrac{\rho_0 d}{\varepsilon_0 d}$

所以,板间电位分布为

$$\phi=-\frac{\rho_0 x^3}{6\varepsilon_0 d}+\left(\frac{U_0}{d}+\frac{\rho_0 d}{6\varepsilon_0}\right)x$$

$$\vec{E} = -\nabla\phi = \vec{a}_x\left(\frac{\rho_0 x^2}{2\varepsilon_0 d} - \frac{U_0}{d} - \frac{\rho_0 d}{6\varepsilon_0}\right)$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} = \vec{a}_x\left(\frac{\rho_0 x^2}{2d} - \frac{\varepsilon_0 U_0}{d} - \frac{\rho_0 d}{6}\right)$$

x=0极板上的电荷密度为

$$\rho_{s0} = \vec{a}_x \bullet \vec{D}\big|_{x=0} = -\frac{\varepsilon_0 U_0}{d} - \frac{\rho_0 d}{6}$$

x=d极板上的电荷密度为

$$\rho_{sd} = (-\vec{a}_x) \bullet \vec{D}\big|_{x=d} = \frac{\varepsilon_0 U_0}{d} - \frac{\rho_0 d}{3}$$

3.8 一个沿 z 方向的长且中空的金属管，其横截面为矩形，金属管的三边保持零电位，而第四边的电位为 U，如题 3.8 图所示。求：

（1）当 $U = U_0$ 时，管内的电位分布；

（2）当 $U = U_0 \sin\frac{\pi y}{b}$ 时，管内的电位分布。

（1）电位分布满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2\phi = 0 \text{即} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$$

边界条件为 $\phi\big|_{x=0,0\le y\le b} = 0 \quad \phi\big|_{x=a,0\le y\le b} = U_0$

$$\phi\big|_{y=0,0\le x\le a} = 0 \quad \phi\big|_{y=b,0\le x\le a} = 0$$

分离变量，设 $\phi = f(x)g(y)$

代入方程并且两边同时除以 $f(x)g(y)$ 得

$$\frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{g''(y)}{g(y)} = 0$$

设 $\frac{f''(x)}{f(x)} = \lambda$ 则 $\frac{g''(y)}{g(y)} = -\lambda$

方程可写成以下形式

$$f''(x) - \lambda f(x) = 0 \quad (1)$$

$$g''(y) + \lambda g(y) = 0 \quad (2)$$

解方程 (2) 并要求满足边界条件

$\phi\big|_{y=0,0\le x\le a} = 0 \quad \phi\big|_{y=b,0\le x\le a} = 0$ 得

只有 $\lambda > 0$ 时方程满足要求

解得 $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{b^2} \qquad g_n(y) = \sin(\frac{n\pi}{b}y)$

将代入方程（1),并满足边界条件

$\phi|_{x=0,0\le y\le b}=0$

解得 $f_n(x)=A_n\sinh(\frac{n\pi}{b}x)$

则 $\phi_n=A_n\sinh(\frac{n\pi}{b}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)$

则电位的通解为 $\phi=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sinh(\frac{n\pi}{b}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)$

代入边界条件 $\phi|_{x=a,0\le y\le b}=U$ 得

$\phi|_{x=a}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sinh(\frac{n\pi}{b}a)\sin(\frac{n\pi}{b}y)=U$

两边同时乘以 $\sin(\frac{m\pi}{b}y)$ 并对 y 从 0 到 b 积分，并由

$n\ne m$ 时 $\int_0^b\sin(\frac{n\pi}{b}y)\sin(\frac{m\pi}{b}y)dy=0$

$n=m$ 时 $\int_0^b\sin(\frac{n\pi}{b}y)\sin(\frac{m\pi}{b}y)dy=\frac{b}{2}$ 得

$$\int_0^b\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sinh(\frac{n\pi}{b}a)\sin(\frac{n\pi}{b}y)dy$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\int_0^b\sinh(\frac{n\pi}{b}a)\sin(\frac{n\pi}{b}y)dy$$

$$=\frac{b}{2}A_m\sinh(\frac{m\pi}{b}a)$$

$$=\int_0^b U\sin(\frac{m\pi}{b}y)\,dy \quad (3)$$

(1) $U=U_0$ 时，由方程 (3) 得

$$U_0\frac{b}{m\pi}(1-\cos m\pi)=\frac{b}{2}A_m\sinh(\frac{m\pi}{b}a)$$

则 $A_m=\frac{4U_0}{m\pi}\frac{1}{\sinh(\frac{m\pi}{b}a)}\quad(m=1,3,5\cdots)$

代入电位的通解求得电位为

$$\phi=\sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{4U_0}{n\pi}\frac{\sinh(\frac{n\pi}{b}x)}{\sinh(\frac{n\pi}{b}a)}\sin(\frac{n\pi}{b}y)$$

(2) $U = U_0 \sin\frac{\pi y}{b}$时

$$\int_0^b U\sin(\frac{m\pi}{b}y)\,dy = \int_0^b U_0 \sin\frac{\pi y}{b}\sin(\frac{m\pi}{b}y)\,dy$$

$$= \frac{b}{2}U_0 \quad (m=1)$$

由方程 (3)得

$$\frac{b}{2}U_0 = \frac{b}{2}A_1\sinh(\frac{\pi}{b}a)$$

则 $A_1 = \dfrac{U_0}{\sinh(\frac{\pi}{b}a)}$

代入电位的通解求得电位为

$$\phi = U_0\frac{\sinh(\frac{\pi x}{b})}{\sinh(\frac{\pi}{b}a)}\sin(\frac{\pi y}{b})$$

3.9 一个沿 +y 方向无限长的导体槽， 其底面保持电位为 U_0，其余两面的电位为零， 如图 3.9 所示。求槽内的电位函数。

电位分布满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2\phi = 0 即\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$$

边界条件为 $\phi|_{x=0} = 0 \quad \phi|_{x=a} = 0$

$$\phi|_{y=0} = U_0 \quad \phi|_{y\to\infty} = C$$

分离变量，设 $\phi = f(x)g(y)$

代入方程并且两边同时除以 $f(x)g(y)$得

$$\frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{g''(y)}{g(y)} = 0$$

设 $\dfrac{f''(x)}{f(x)} = -\lambda$则 $\dfrac{g''(y)}{g(y)} = \lambda$

方程可写成以下形式

$$f''(x) + \lambda f(x) = 0 \quad (1)$$

$$g''(y) - \lambda g(y) = 0 \quad (2)$$

解方程 (1)并要求满足边界条件

$\phi|_{x=0} = 0 \quad \phi|_{x=a} = 0$ 得

只有 $\lambda > 0$时方程满足要求

解得 $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2}$　　$f_n(x) = \sin(\frac{n\pi}{a}x)$

将代入方程（2),并满足边界条件

$\phi|_{y\to\infty} = C$

解得 $g_n(y) = A_n e^{-\frac{n\pi}{a}y}$

则 $\phi_n = A_n \sin(\frac{n\pi}{a}x)e^{-\frac{n\pi}{a}y}$

则电位的通解为

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\frac{n\pi}{a}x)e^{-\frac{n\pi}{a}y}$$

代入边界条件 $\phi|_{y=0} = U_0$ 得

$$U_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\frac{n\pi}{a}x)$$

两边同时乘以 $\sin(\frac{m\pi}{a}x)$ 并对 x 从0到 a 积分，并由

$m = n$ 时 $\int_0^a \sin(\frac{n\pi}{a}x)\sin(\frac{m\pi}{a}x)dx = \frac{a}{2}A_m$

$m \neq n$ 时 $\int_0^a \sin(\frac{n\pi}{a}x)\sin(\frac{m\pi}{a}x)dx = 0$ 得

$$\int_0^a U_0 \sin(\frac{m\pi}{a}x) = \int_0^a \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\frac{n\pi}{a}x)\sin(\frac{m\pi}{a}x)dx = \frac{a}{2}A_m$$

既 $U_0 \frac{a}{m\pi}(1-\cos m\pi) = \frac{a}{2}A_m$

则 $A_m = \frac{4U_0}{m\pi}$　$(m = 1,3,5\cdots)$

代入电位的通解方程得

$$\phi = \sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty} \frac{4U_0}{n\pi}\sin(\frac{n\pi}{a}x)e^{-\frac{n\pi}{a}y}$$

4.3 若半径为 a、电流为 I 的无线长圆柱导体置于空气中，已知导体的磁导率为 μ_0，求导体内、外的磁场强度 H 和磁通密度 B。

解：（1）导体内： $0 \le \rho < a$

由安培环路定理，$\oint_l \bar{H} \bullet d\bar{l} = I'$

$I' = \frac{I}{\pi a^2}.\pi\rho^2 = \frac{I\rho^2}{a^2}$　　所以，$H_1 2\pi\rho = \frac{I\rho^2}{a^2}$，$H_1 = \frac{I\rho}{2\pi a^2}$，

$$\vec{H}_1=\frac{I\rho}{2\pi a^2}\vec{e}\varphi\ ,\qquad \vec{B}_1=\mu_0\vec{H}_1=\frac{\mu_0 I\rho}{2\pi a^2}\vec{e}\varphi$$

（2）导体外： $a\le\rho<+\infty$

$\oint \bar{H}\bullet d\bar{l}=I$，所以 $H_2.2\pi\rho=I$，$\vec{H}_2=\frac{I}{2\pi\rho}\vec{e}\varphi$，$\vec{B}_2=\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\vec{e}\varphi$

4.5 在下面的矢量中，哪些可能是磁通密度 B？如果是，与它相应的电流密度 J 为多少？

（1） $\vec{F}=\vec{a}_\rho\rho$

解：$\nabla.\vec{F}=\frac{1}{\rho}.\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho F_\rho)=\frac{1}{\rho}.2\rho=2\neq 0$ 所以 $\vec{F}$ 不是磁通密度

（2） $\vec{F}=-\vec{a}_x y+\vec{a}_y x$

解：$\nabla.\vec{F}=-\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial x}{\partial y}=0$ 所以 F 是磁通密度

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ -y & x & 0\end{vmatrix}=2\vec{e}_z \qquad \text{所以}\quad \vec{J}=\frac{2}{\mu_0}\vec{e}_z$$

（3） $\vec{F}=\vec{a}_x x-\vec{a}_y y$

$\nabla.\vec{F}=0$ $\vec{F}$ 是磁通密度

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x & -y & 0\end{vmatrix}=0 \qquad \text{所以}\ \vec{J}=0$$

（4） $\vec{F}=-\vec{a}_\varphi r$

$\nabla.\vec{F}=0$ 所以 $\vec{F}$ 是磁通密度

$$\nabla\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\frac{\vec{a}_r}{r^2\sin\theta} & \frac{\vec{a}_\theta}{r\sin\theta} & \frac{\vec{a}_\varphi}{r}\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi}\\ 0 & 0 & -r^2\sin\theta\end{vmatrix}=-\vec{a}_r\cot\theta+2\vec{a}_\theta=\mu_0\vec{J}$$

所以 $\vec{J}=\frac{-\cot\theta}{\mu_0}\vec{a}_r+\frac{2}{\mu_0}\vec{a}_\theta$

4.6 已知某电流在空间产生的磁矢位是 $\vec{A}=\vec{a}_x x^2 y+\vec{a}_y x y^2+\vec{a}_z(y^2-z^2)$ 求磁感应强度 $\vec{B}$

解： $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x^2y & xy^2 & y^2-z^2\end{vmatrix}=2y\vec{e}_x+\vec{e}_z(y^2-z^2)$

4.13 已知钢在某种磁饱和情况下的磁导率为 $\mu_1=2000\mu_0$，当钢中的磁通密度为 $B_1=0.5\times10^{2}$ T，$\theta_1=75°$ 时，试求此时的磁力线由钢进入自由空间一侧后，磁通密度 B_2 的大小及 B_2 与法线的夹角 θ_2。

解：由折射定律得 $\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}=\frac{\mu_1}{\mu_2}$ 所以 $\tan\theta_2=\frac{\mu_1}{\mu_2}\tan\theta_1$ $\theta_2=0.107^0$

$B_{1n}=B_{2n}$ 即 $B_1\cos\theta_1=B_2\cos\theta_2$ $B_2=\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}B_1$ $B_2=0.13\times10^{-2}$ T

4.15 通有电流 I_1 的平行直导线，两轴线距离为 d，两导线间有一载有电流 I_2 的矩形线圈，求两平行直导线对线圈的互感。

解：左边长直导线作用： $B=\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$ 所以

$$\varphi_{m1}=\int_s\vec{B}\cdot d\vec{s}=\int_{a+R}^{b+R}\frac{\mu_0 I_1}{2\pi\rho}c\,d\varphi$$

$$=\frac{\mu_0 I_1 c}{2\pi}\ln\frac{b+R}{a+R}$$

右边长直导线作用

$$\varphi_{m2} = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_{d-b-R}^{d-a-R} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\rho} \cdot c d\varphi$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 c}{2\pi} \ln \frac{d-a-R}{d-b-R}$$

合成后

$$\varphi_m = \varphi_{m1} + \varphi_{m2}$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 c}{2\pi} \ln \left(\frac{b+R}{a+R}\right)\left(\frac{d-a-R}{d-b-R}\right)$$

$$M = \frac{\varphi_m}{I_1} = \frac{\mu_0 c}{2\pi} \ln \left(\frac{b+R}{a+R}\right)\left(\frac{d-a-R}{d-b-R}\right)$$

4.17 无限炒年糕直导线附近有一矩形回路，回路与导线不共面。证明：它们之间的互感为

$$M = \frac{-\mu_0 a}{2\pi} \ln \frac{R}{\left[2b(R^2-C^2)^{1/2} + b^2 + R^2\right]^{1/2}}$$

解：$B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$ ，

$$\varphi_m = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_R^{\left[\left((R^2-C^2)^{1/2}+b\right)^2+c^2\right]^{1/2}} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\rho} \cdot a d\rho$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 a}{2\pi}\left(\ln\left[\left((R^2-C^2)^{1/2}+b\right)^2+c^2\right]^{1/2} - \ln R\right) = \frac{-\mu_0 a I_1}{2\pi} \ln \frac{R}{\left[2b(R^2-C^2)^{1/2}+b^2+R^2\right]^{1/2}}$$

所以互感 $M = \dfrac{\varphi_m}{I_1} = \dfrac{-\mu_0 a}{2\pi} \ln \dfrac{R}{\left[2b(R^2-C^2)^{1/2}+b^2+R^2\right]^{1/2}}$

5.3 设 y=0 为两种磁介质的分界面， y<0 为媒质 1，其磁导率为 μ_1，y>0 为媒质 2，其磁导率为 μ_2，分界面上有电流密度 $\vec{J}_s = 2\vec{a}_x A/m$ 分布的面电流，已知媒质 1 中磁场强度为

$$\vec{H}_1 = \vec{a}_x + 2\vec{a}_y + 3\vec{a}_z A/m$$

求媒质 2 中磁场强度 $\vec{H}_2$

解：

设电磁波由媒质 1到媒质 2

则由 $\bar{n}\times(\bar{H}_2-\bar{H}_1)=J_S$ 其中 $\bar{n}=-\bar{a}_y$

$$\bar{H}_2=\bar{a}_x+2\frac{\mu_1}{\mu_2}\bar{a}_y+5\bar{a}_z A/m$$

5.6 已知在空气中，电场强度矢量为 $\vec{E}=\vec{a}_y 0.1\sin(10\pi x)\cos(6\pi\times10^9 t-\beta z)V/m$ 求磁场强度 $\vec{H}$ 和相位常数 β

解：

$$由\ \nabla\times\vec{E}=-jw\vec{B},\ \vec{B}=\mu\vec{H}$$

$$得\ \vec{H}=-\vec{a}_x 0.23\times10^{-3}\sin(10\pi x)\cos(6\pi\times10^9 t-54.41z)$$

$$-\vec{a}_z 0.13\times10^{-3}\cos(10\pi x)\sin(6\pi\times10^9 t-54.14z)$$

$$相位常数：\quad \eta=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}=\omega\div\nu=20\pi\ rad/m$$

5.7 自由空间中，已知电场强度矢量为 $\vec{E}=\vec{a}_x 4\cos(\omega t-\beta z)+\vec{a}_y 3\cos(\omega t-\beta z)$ 求（1）磁场强度的复数表达式（ 2）坡印廷矢量的瞬时表达式（ 3）平均坡印廷矢量

解:

(1)

$$\bar{E}_{(z)}=\bar{a}_x 4e^{-j\beta z}+\bar{a}_y 3e^{-j\beta z}$$

$$由\ \nabla\times\bar{E}=-j\omega\bar{B}得$$

$$\bar{H}=\frac{1}{\mu}\bar{B}=\frac{1}{120\pi}(\bar{a}_x 3-\bar{a}_y 4)e^{-j\beta z}V/m$$

(2)

$$\bar{E}_{(z,t)}=\bar{a}_x 4\cos(\omega t-\beta z)+\bar{a}_y 3\cos(\omega t-\beta z)$$

$$\bar{H}_{(z,t)}=\frac{1}{120\pi}(\bar{a}_x 3-\bar{a}_y 4)\cos(\omega t-\beta z)$$

$$所以\ \bar{S}=\bar{E}\times\bar{H}=\bar{a}_z\frac{5}{24\pi}\cos^2(\omega t-\beta z)\quad w/m^2$$

(3)

$$\bar{S}_{av}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\bar{E}\times\bar{H}^*\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{120\pi}\left[(\bar{a}_x 4+\bar{a}_y 3)\times(\bar{a}_x 3-\bar{a}_y 4)\right]$$

$$=\bar{a}_z\frac{5}{48\pi}$$

5.9 将下列复数形式的场矢量变换成瞬时表达式，或作用反的变换

（1） $\vec{E} = \vec{a}_x 4e^{-j\beta z} + \vec{a}_y 3je^{-j\beta z}$

$$\vec{E}_{(z,t)} = \vec{a}_x 4\,\mathrm{Re}[e^{j(\omega t-\beta z)}] + \vec{a}_y 3\,\mathrm{Re}[e^{j(\omega t-\beta z+\frac{\pi}{2})}]$$

$$= \vec{a}_x 4\cos(\omega t-\beta z) + \vec{a}_y 3\cos(\omega t-\beta z+\frac{\pi}{2})$$

$$= \vec{a}_x 4\cos(\omega t-\beta z) - \vec{a}_y 3\sin(\omega t-\beta z)$$

（2） $\vec{E} = \vec{a}_x 4\sin(\frac{\pi}{a}x)\sin(\omega t-\beta z) + \vec{a}_z\cos(\frac{\pi}{a}x)\cos(\omega t-\beta z)$

$$\vec{E}_{(z,t)} = \vec{a}_x 4\sin(\frac{\pi}{a}x)\cos(\omega t-\beta z-\frac{\pi}{2}) + \vec{a}_z\cos(\frac{\pi}{a}x)\cos(\omega t-\beta z)$$

$$= \vec{a}_x 4\sin(\frac{\pi}{a}x)\,\mathrm{Re}[e^{j(\omega t-\beta z-\frac{\pi}{2})}] + \vec{a}_z\cos(\frac{\pi}{a}x)\,\mathrm{Re}[e^{j(\omega t-\beta z)}]$$

$$\vec{E}_{(z)} = \vec{a}_x 4\sin(\frac{\pi}{a}x)e^{j(-\beta z-\frac{\pi}{2})} + \vec{a}_z\cos(\frac{\pi}{a}x)e^{-j\beta z}$$

$$= \vec{a}_x\,-4j\sin(\frac{\pi}{a}x)e^{-j\beta z} + \vec{a}_z\cos(\frac{\pi}{a}x)e^{-j\beta z}$$

（3） $\vec{E} = \vec{a}_x\cos(\omega t-\beta z) + \vec{a}_y 2\sin(\omega t-\beta z)$

$$\vec{E}_{(z,t)} = \vec{a}_x\cos(\omega t-\beta z) + \vec{a}_y 2\cos(\omega t-\beta z-\frac{\pi}{2})$$

$$= \vec{a}_x\,\mathrm{Re}[e^{j(\omega t-\beta z)}] + \vec{a}_y 2\,\mathrm{Re}[e^{j(\omega t-\beta z-\frac{\pi}{2})}]$$

$$\vec{E}_{(z)} = \vec{a}_x e^{-j\beta z} - \vec{a}_y 2je^{-j\beta z}$$

（4） $\vec{E} = \vec{a}_y 3j\cos(k_x\cos\theta)e^{-jkz\sin\theta}$

$$\vec{E}_{(z)} = \vec{a}_y 3\cos(k_x\cos\theta)e^{-j(kz\sin\theta-\frac{\pi}{2})}$$

$$\vec{E}_{(z,t)} = \vec{a}_y 3\cos(k_x\cos\theta)\,\mathrm{Re}[e^{j(\omega t-kz\sin\theta+\frac{\pi}{2})}]$$

$$= \vec{a}_y 3\cos(k_x\cos\theta)\cos(\omega t-kz\sin\theta+\frac{\pi}{2})$$

$$= \vec{a}_y\,-3\cos(k_x\cos\theta)\sin(\omega t-kz\sin\theta)$$

（5） $\vec{E} = \vec{a}_y 2\sin(\omega t-\beta z+\varphi)$

$$\vec{E}_{(z,t)} = \vec{a}_y 2\cos(\omega t - \beta z + \phi - \frac{\pi}{2})$$

$$= \vec{a}_y - 2j\,\mathrm{Re}[e^{j(\omega t - \beta z + \phi)}]$$

$$\vec{E}_{(z)} = \vec{a}_y - 2je^{j(-\beta z + \phi)}$$

5.12 对于线性，均匀和各向同性导电媒质，设媒质的介电常数为，磁导率为电导率为，试证明无源区域中时谐电磁场所满足的波动方程为 $\nabla^2\vec{E} = jw\mu\sigma\vec{E} - k^2\vec{E}$，$\nabla^2\vec{H} = jw\mu\sigma\vec{H} - k^2\vec{H}$ 式中 $k^2 = w^2\mu\varepsilon$

解:

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + j\omega\bar{D} = \sigma\bar{E} + j\omega\varepsilon\bar{E}$$

$$\nabla \times \nabla \times \bar{H} = \nabla \times (\sigma\bar{E} + j\omega\varepsilon\bar{E})$$

将 $\nabla(\nabla \cdot \bar{H}) = \nabla^2\bar{H} + \nabla \times \nabla \times \bar{H}$

$\nabla \times E = -j\omega\mu\bar{H}$ 代入上式

$$\nabla(\nabla \cdot \bar{H}) - \nabla^2\bar{H} = (\sigma + j\omega\varepsilon)\cdot(-j\omega\mu)\bar{H}$$

$$\because \nabla \cdot \bar{H} = 0$$

$$\therefore \nabla^2\bar{H} = j\omega\mu\sigma\bar{H} - \omega^2\mu\varepsilon\bar{H}$$

即 $\nabla^2\bar{H} = j\omega\mu\sigma\bar{H} - k^2\bar{H}$

同理 $:\nabla^2\bar{E} = j\omega\mu\sigma\bar{E} - k^2\bar{E}$

5.15 设电场强度和磁场强度分别为 $\vec{E} = \vec{E}_0\cos(\omega t + \phi_e)$，$\vec{H} = \vec{H}_0\cos(\omega t + \phi_m)$ 求其平均坡印廷矢量。

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*]$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\vec{E}_0 e^{j\phi_e} \times \vec{H}_0 e^{-j\phi_m}]$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{E}_0 \times \vec{H}_0)\,\mathrm{Re}[e^{j(\phi_e - \phi_m)}]$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{E}_0 \times \vec{H}_0)\cos(\phi_e - \phi_m)$$

6.2 自由空间中一均匀平面波的磁场强度为

$$\bar{H} = (\bar{a}_y + \bar{a}_z)H_0\cos(wt - \pi x)\ \ A/m$$

求：（1）波的传播方向；（2）波长和频率；（3）电场强度 ；（4）瞬时坡印廷矢量。

解：$\bar{H} = (\bar{a}_y + \bar{a}_z)H_0\cos(wt - \pi x)\ \ A/m$

(1) 波沿 +x 方向传播

(2) 由题意得： k= π rad/m ， 波长 $\lambda = \frac{2\pi}{k} = 2m$ ， 频率 $f = \frac{c}{\lambda} = 1.5 \times 10^8\ Hz$

（3） $\bar{E}=\eta\bar{H}\times\bar{a}_x=(\bar{a}_y-\bar{a}_z)120\pi H_0\cos(wt-\pi x)\ v/m$

（4） $\bar{S}=\bar{E}\times\bar{H}=\bar{a}_x 240\pi H_0\cos^2(wt-\pi x)\ w/m^2$

6.3 无耗媒质的相对介电常数 $\varepsilon_r=4$，相对磁导率 $\mu_r=1$，一平面电磁波沿 +z 方向传播，其电场强度的表达式为 $\bar{E}=\bar{a}_y E_0\cos(6\times10^8 t-\beta z)$

求：（1）电磁波的相速；（2）波阻抗和 β；（3）磁场强度的瞬时表达式；（4）平均坡印廷矢量。

解：

（1） $v_p=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}=1.5\times10^8 m/s$

（2） $\eta=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}=\sqrt{\frac{\mu_0\mu_r}{\varepsilon_0\varepsilon_r}}=60\pi(\Omega)$ ， $\beta=w\sqrt{\mu\varepsilon}=\frac{w\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}{c}=4rad/m$

（3） $\bar{H}=\frac{1}{\eta}\bar{a}_z\times\bar{E}=-\bar{a}_x\frac{E_0}{60\pi}\cos(6\times10^8 t-4z)\quad A/m$

（4） $\bar{S}_{av}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\bar{E}\times\bar{H}^*]=\bar{a}_z\frac{E_0^2}{120\pi}\quad w/m^2$

6.4 一均匀平面波从海水表面（ x=0）沿 +x 方向向海水中传播。在 x=0 处，电场强度为 $\bar{E}=\bar{a}_y 100\cos(10^7\pi t)v/m$，若海水的 $\varepsilon_r=80$， $\mu_r=1$， $\gamma=4s/m$。

求：（1）衰减常数、相位常数、波阻抗、相位速度、波长、趋肤深度；

（2）写出海水中的电场强度表达式；

（3）电场强度的振幅衰减到表面值的 1%时，波传播的距离；

（4）当 x=0.8m 时，电场和磁场得表达式；

（5）如果电磁波的频率变为 f=50kHz，重复（ 3）的计算。比较两个结果会得到什么结论？

解：

（1）

$$\frac{\gamma}{\omega\varepsilon}=\frac{\gamma}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_r}=180>>1$$

$$\therefore\ \alpha=\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}=2\sqrt{2\pi}\approx8.9(Np/m)$$

$$\beta=\sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}=8.9(rad/m)$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}(1+j) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}(1+j)\Omega$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = 3.53\times 10^6 m/s$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 0.707\ m$$

$$\delta_c = \frac{1}{\alpha} = 0.11 m$$

(2) $\bar{E} = \bar{a}_y 100 e^{-8.9x}\cos(10^7\pi t - 8.9x) v/m$

(3) $\because\ e^{-8.9x} = 1\% \therefore\ x = 0.52m$

(4) $\eta = \frac{\pi}{\sqrt{2}}(1+j) = \pi e^{j\frac{\pi}{4}}$

$$\dot{E} = \bar{a}_y 100 e^{-8.9x} e^{-j8.9x}$$

$$\therefore \dot{H} = \frac{1}{\eta}\bar{a}_x \times \dot{E} = \bar{a}_z \frac{100}{\pi} e^{-8.9x} e^{-j8.9x - j\frac{\pi}{4}} A/m$$

$$\therefore \bar{H} = \mathrm{Re}[\dot{H}e^{j\omega t}] = \bar{a}_z \frac{100}{\pi} e^{-8.9x}\cos(10^7\pi - 8.9x - \frac{\pi}{4}) A/m$$

当 x=0.8m 时,

$$\bar{E} = \bar{a}_y 0.082\cos(10^7\pi t - 7.11) v/m$$

$$H = a_z 0.026\cos(10^7\pi t - 7.9) A/m$$

（5）当 f=50KHz 时,

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}} = \sqrt{\pi f\mu\gamma} = 0.89 Np/m$$

$$\therefore\ e^{-0.89x} = 1\%$$

$$\therefore\ x = 5.2m$$

结论：频率越大，电磁波衰减越快。

6.5 判断下面表示的平面波的极化形式：

（1） $\bar{E} = \bar{a}_x\cos(wt - \beta z) + \bar{a}_y 2\sin(wt - \beta z)$

（2） $\bar{E} = \bar{a}_x\sin(wt - \beta z) + \bar{a}_y\cos(wt - \beta z)$

（3） $\bar{E} = \bar{a}_x\sin(wt - \beta z) + \bar{a}_y 5\sin(wt - \beta z)$

(4) $\bar{E} = \bar{a}_x \cos(wt - \beta z - \frac{\pi}{4}) + \bar{a}_y \sin(wt - \beta z + \frac{\pi}{4})$

解：(1) $\bar{E} = \bar{a}_x \cos(wt - \beta z) + \bar{a}_y 2\sin(wt - \beta z)$

$$\therefore E_x = \cos(wt - \beta z),\quad E_y = 2\sin(wt - \beta z) = 2\cos(wt - \beta z - \frac{\pi}{2})$$

$\therefore E_x^2 + \frac{E_y^2}{4} = 1, \phi_x - \phi_y = \frac{\pi}{2}$　　所以，该平面波为右旋椭圆极化波。

(2) $\bar{E} = \bar{a}_x \sin(wt - \beta z) + \bar{a}_y \cos(wt - \beta z)$

$$\therefore E_x = \sin(wt - \beta z) = \cos(wt - \beta z - \frac{\pi}{2}), E_y = \cos(wt - \beta z)$$

$\therefore E_x^2 + E_y^2 = 1, \phi_x - \phi_y = -\frac{\pi}{2}$　　所以，该平面波为左旋椭圆极化波。

(3) $\bar{E} = \bar{a}_x \sin(wt - \beta z) + \bar{a}_y 5\sin(wt - \beta z)$

$\because \phi_x = \phi_y$　所以，该平面波为线极化波。

(4) $\bar{E} = \bar{a}_x \cos(wt - \beta z - \frac{\pi}{4}) + \bar{a}_y \sin(wt - \beta z + \frac{\pi}{4})$

$$= \bar{a}_x \cos(wt - \beta z - \frac{\pi}{4}) + \bar{a}_y \cos(wt - \beta z - \frac{\pi}{4})$$

$\therefore \phi_x = \phi_y$　所以，该平面波为线极化波。

6.6 均匀平面电磁波频率 f=100MHz，从空气垂直入射到 x=0 的理想导体上，设入射波电场沿+y 方向，振幅 $E_m = 6mV/m$。试写出：(1) 入射波电场和磁场表达式；(2) 入射波电场和磁场表达式；(3) 空气中合成波的电场和磁场；(4) 空气中离导体表面最近的第一个波腹点的位置。

解：(1) $k = w\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi \times 10^8}{3\times 10^8} = \frac{2\pi}{3} (rad/m)$

$$\therefore \bar{E}_i = \bar{a}_y 6e^{-j\frac{2\pi}{3}x} (mV/m) \qquad \bar{H}_i = \frac{1}{\eta}\bar{a}_x \times \bar{E}_i = \frac{\bar{a}_z}{20\pi} e^{-j\frac{2\pi}{3}x} (mA/m)$$

(2) $\because$ 电磁波垂直入射到理想导体上

$\therefore R = -1, T = 0$

$$\therefore \bar{E}_r = -\bar{a}_y 6e^{j\frac{2\pi}{3}x} (mV/m)$$

$$\bar{H}_r = \frac{1}{\eta}(-\bar{a}_x) \times \bar{E}_r = \frac{\bar{a}_z}{20\pi} e^{j\frac{2\pi}{3}x} (mA/m)$$

（3）空气中合成波的电场 $\vec{E}=\vec{E}_i+\vec{E}_r=-\vec{a}_y 12j\sin(\frac{2\pi x}{3})(mV/m)$

磁场 $\vec{H}=\vec{H}_i+\vec{H}_r=\frac{\vec{a}_z}{10\pi}\cos(\frac{2\pi x}{3})(mA/m)$

（4）$\because \lambda=\frac{2\pi}{k}=3m$ $\therefore$ 空 气 中 离 导 体 表 面 最 近 的 第 一 个 波 腹 点 的 位 置 为 $-\frac{\lambda}{4}=-\frac{3}{4}m$

6.8 自由空间中一均匀平面电场波垂直入射到半无限大无耗介质平面上，已知自由空间与介质分界面上的反射系数为 0.5，且分界面为电场波腹点，介质内透射波的波长是自由空间波长的 $1/6$，求介质的相对磁导率和相对介电常数。

解：设自由空间 $\mu_1=\mu_0, \varepsilon_1=\varepsilon_0$，无耗介质 $\mu_{2,}\varepsilon_2$

$$\because R=\frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}=0.5$$

$$\eta_1=\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}=120\pi\Omega, \eta_2=\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}=120\pi\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}\Omega$$

$$\therefore \frac{\mu_r}{\varepsilon_r}=9$$

$$\because \lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{1}{f\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

$$\therefore \lambda_1=\frac{1}{f\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}}=\frac{1}{f\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

$$\lambda_2=\frac{1}{f\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}}=\lambda_1\frac{1}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}$$

$$\therefore \frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{1}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}=\frac{1}{6}$$

$$\therefore \mu_r\varepsilon_r=36$$

由 得：$\mu_r=18, \varepsilon_r=2$

6.15 在无线电装置中常配有电磁屏蔽罩，屏蔽罩由铜制成，要求铜的厚度至少为 5 个趋肤深度，为防止 200kHz～3GHz 的无线电干扰，求铜的厚度；若要屏蔽 10kHz～3GHz 的电磁干扰，铜的厚度又是多少？

解：铜的电导率为 $\gamma=5.8\times10^7 s/m$

趋肤深度 $\delta_c=\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\sqrt{\pi f\mu\gamma}}$

（1）$\because f_{1min}=200kHz, \mu=4\pi\times10^{-7}H/m$

$$\therefore \delta_{c1} = \frac{1}{\sqrt{\pi f_{1min}\mu\gamma}} = 1.48\times10^{-4}m$$

$$\therefore d_1 = 5\delta_{c1} = 7.4\times10^{-4}m$$

（2） $\because f_{2min} = 10kHz, \mu = 4\pi\times10^{-7}H/m$

$$\therefore \delta_{c2} = \frac{1}{\sqrt{\pi f_{2min}\mu\gamma}} = 6.61\times10^{-4}m$$

$$\therefore d_2 = 5\delta_{c2} = 3.3\times10^{-3}m$$

6.17 一均匀平面波从空间（媒质 1）沿+z 方向垂直入射到 $\varepsilon_r = 8$、$\mu_r = 2$（媒质 2）的理想介质表面上，电磁波的频率为 100MHz，入射波电场的振幅为 E_0、极化为 +x 方向。

试求：（1）入射波电场强度的表达式；

（2）入射波磁场强度的表达式；

（3）反射系数和透射系数；

（4）媒质 1 中的电场表达式；

（5）媒质 2 中的电场表达式。

解：（1） $k_1 = w\sqrt{\mu_1\varepsilon_1} = \frac{w}{c} = \frac{2\pi}{3}rad/m$

$$\therefore \bar{E}_i = \bar{a}_x E_0 e^{-j\frac{2\pi}{3}z}$$

（2） $\bar{H}_i = \frac{1}{\eta_1}\bar{a}_z\times\bar{E}_i = \bar{a}_y\frac{E_0}{120\pi}e^{-j\frac{2\pi}{3}z}$

（3）

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\Omega$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_0\mu_r}{\varepsilon_0\varepsilon_r}} = 60\pi\Omega$$

$$\therefore R = \frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1} = -\frac{1}{3}, \quad T = \frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1} = \frac{2}{3}$$

（4） $\bar{E}_r = \bar{a}_x R E_0 e^{j\frac{2\pi}{3}z} = -\bar{a}_x\frac{E_0}{3}e^{j\frac{2\pi}{3}z}$ $\quad \bar{E}_r = \bar{a}_x R E_0 e^{j\frac{2\pi}{3}z} = -\bar{a}_x\frac{E_0}{3}e^{j\frac{2\pi}{3}z}$

（5） $k_2 = w\sqrt{\mu_2\varepsilon_2} = \frac{w}{c}\sqrt{\mu_r\varepsilon_r} = \frac{8\pi}{3}rad/m$ $\quad \bar{E}_t = \bar{a}_x T E_0 e^{-j\frac{8\pi}{3}z} = \bar{a}_x\frac{2E_0}{3}e^{-j\frac{8\pi}{3}z}$