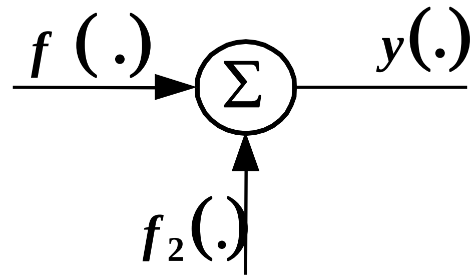
2.5 线性时不变系统的模拟与特性

数学模拟：用来模拟的装置和原来系统的输入输出关系上可以用同样的微分方程来描写。

目的：可以在获得实际设备之前，预先知道输入输出的关系，用来确定该系统是否满足要求。

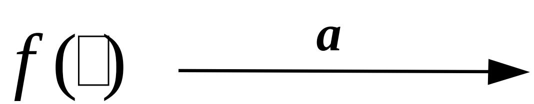
描述线性系统的数学模型所用的基本运算器：

1）加法器



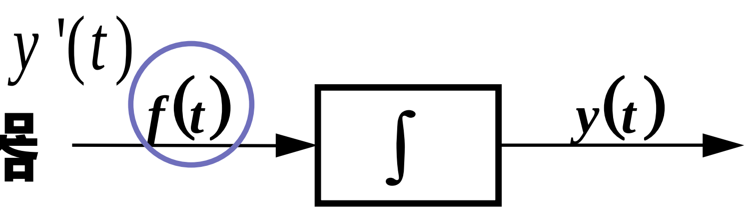
$$y(\cdot)=f_1(\cdot)+f_2(\cdot)$$

2）数乘器



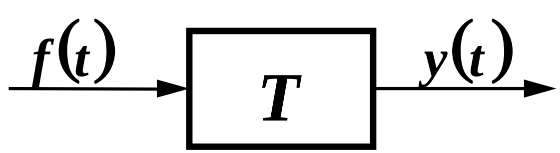
$$y(\cdot)=af(\cdot)$$

3）积分器



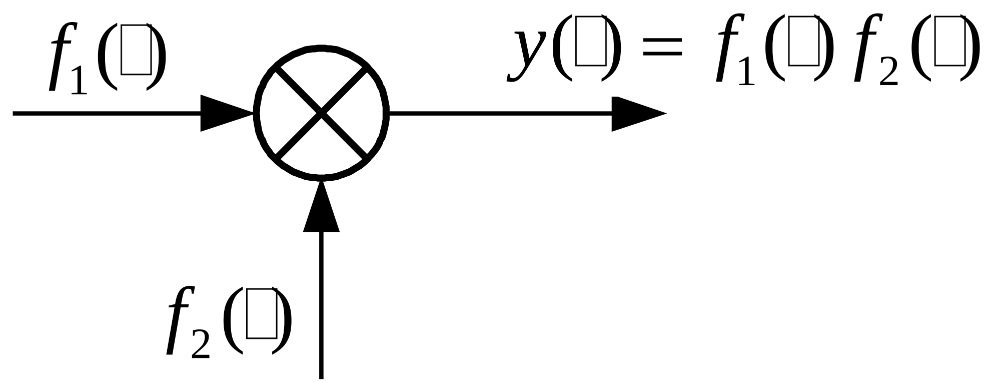
$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)\mathrm{d}x$$

4）连续延时器

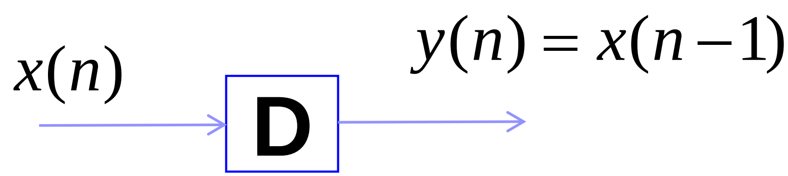


$$y(t)=f(t-T)$$

5）乘法器



6）单位延迟器



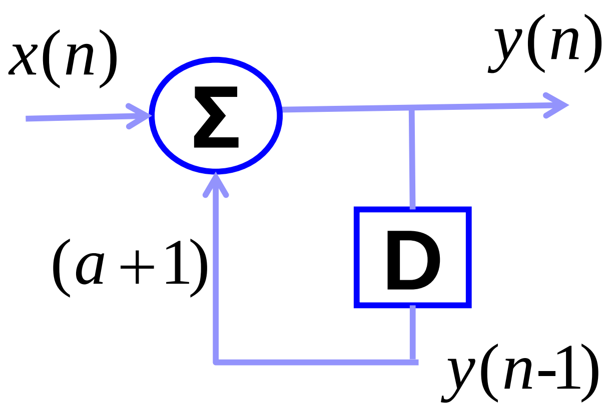
1. 连续系统

见 L10

2. 离散系统

$$y(n)-(a+1)y(n-1)=x(n)$$

$$y(n)=x(n)+(a+1)y(n-1)$$

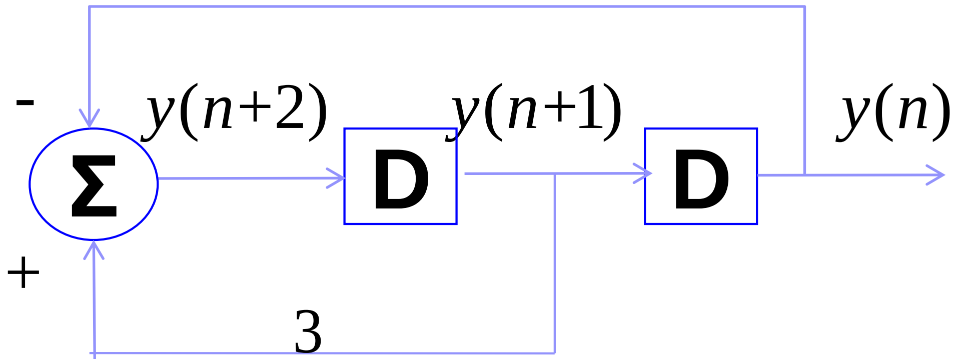


方框图画法总结：

将序号最高的输出项留在等号的左端，其它移到等号的右端。

输入为零时方框图画法，例

$$y(n+2)-3y(n+1)+y(n)=0 \qquad y(n+2)=3y(n+1)-y(n)$$



一般离散系统的数学模型 （由差分方程到模拟图）

$$y(n)+a_1y(n-1)+a_2y(n-2)$$
$$=b_0x(n)+b_1x(n-1)+b_2x(n-2)$$

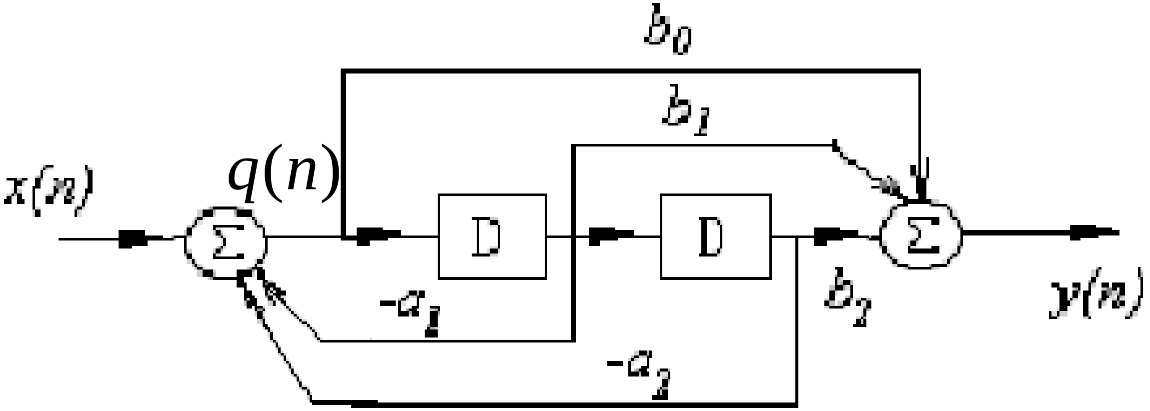
方法1：引入辅助函数q(n)，

令： $q(n)+a_1q(n-1)+a_2q(n-2)=x(n)$ (1)

则 $y(n)=b_0q(n)+b_1q(n-1)+b_2q(n-2)$ (2)

则移项整理：

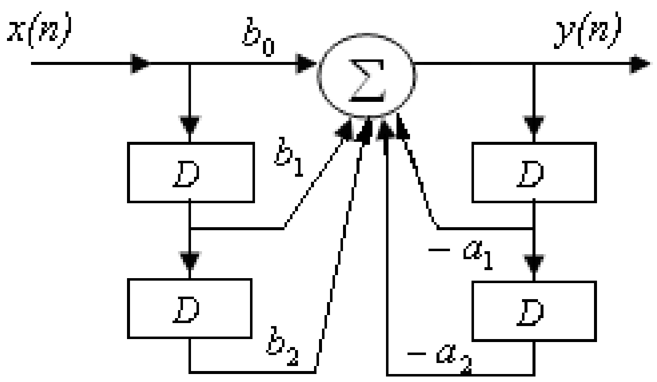
$$q(n)=x(n)-a_1q(n-1)-a_2q(n-2)$$



方法2：移项：

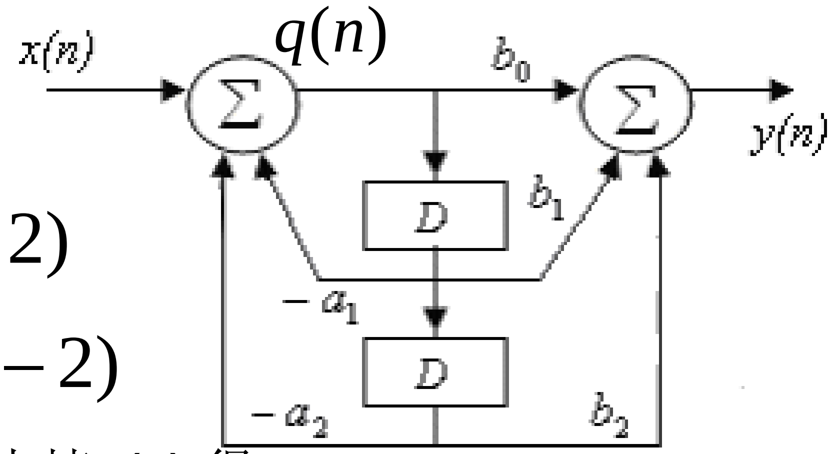
$$y(n)+a_1y(n-1)+a_2y(n-2)$$
$$=b_0x(n)+b_1x(n-1)+b_2x(n-2)$$

$$y(n)=b_0x(n)+b_1x(n-1)+b_2x(n-2)\text{-}a_1y(n-1)\text{-}a_2y(n-2)$$



实际现实： { **使用最少的 乘法器** → **运算速度提高**
单位延迟器 → **存储单元减少**

一般离散系统的数学模型 （由模拟图到差分方程）



第一个加法器的输出端信号设为q(n),则

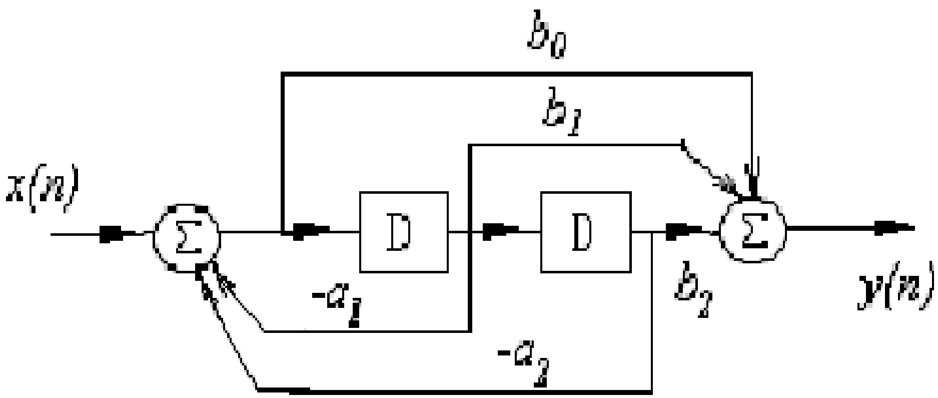
$$q(n)=x(n)-a_1q(n-1)-a_2q(n-2)$$

$$y(n)=b_0q(n)+b_1q(n-1)+b_2q(n-2)$$

经数乘和时移处理，教材p95式2-89,2-90,去掉q(n),得

$$y(n)+a_1y(n-1)+a_2y(n-2)$$

$$=b_0x(n)+b_1x(n-1)+b_2x(n-2)$$



$$y(n)+a_1y(n-1)+a_2y(n-2)+\cdots+a_Ny(n-N)$$

$$=b_0x(n)+b_1x(n-1)+\cdots+b_Mx(n-M)=\sum_{j=0}^{M}b_jx(n-j)$$

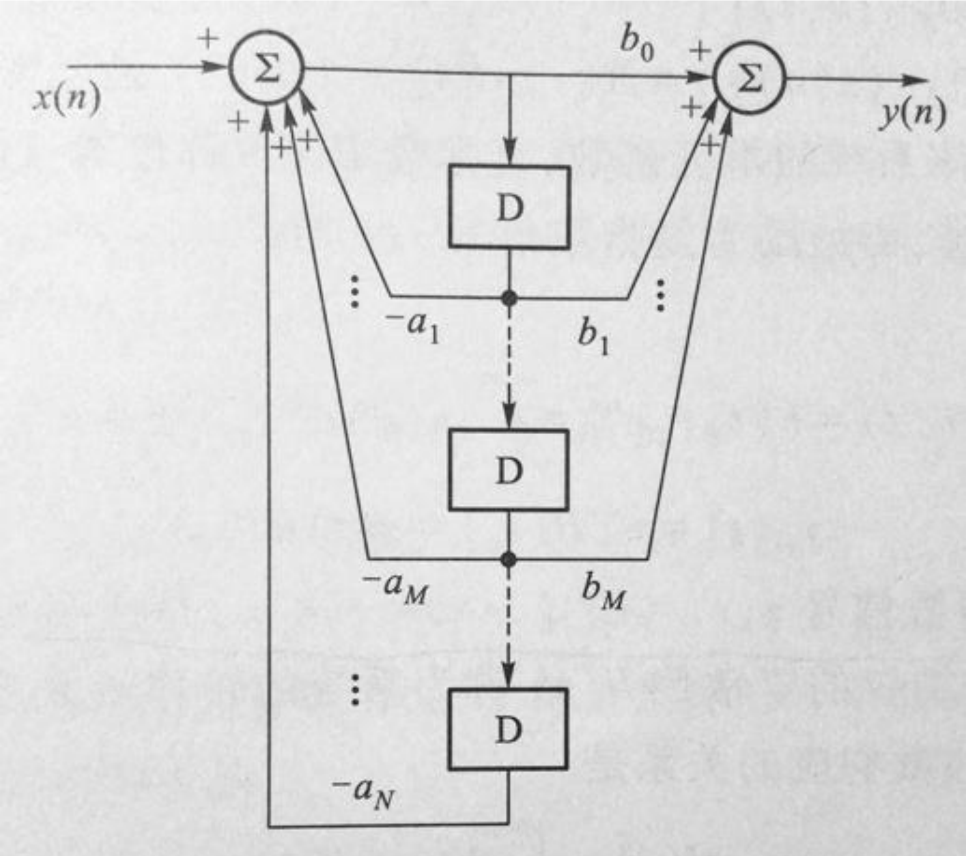


图 2-39　一般 n 阶离散系统的模拟框图

一般n阶差分方程框图，设M<N

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1y'(t)+a_0y(t)=b_mx^{(m)}(t)+\cdots+b_1x'(t)+b_0x(t)$$

m<n

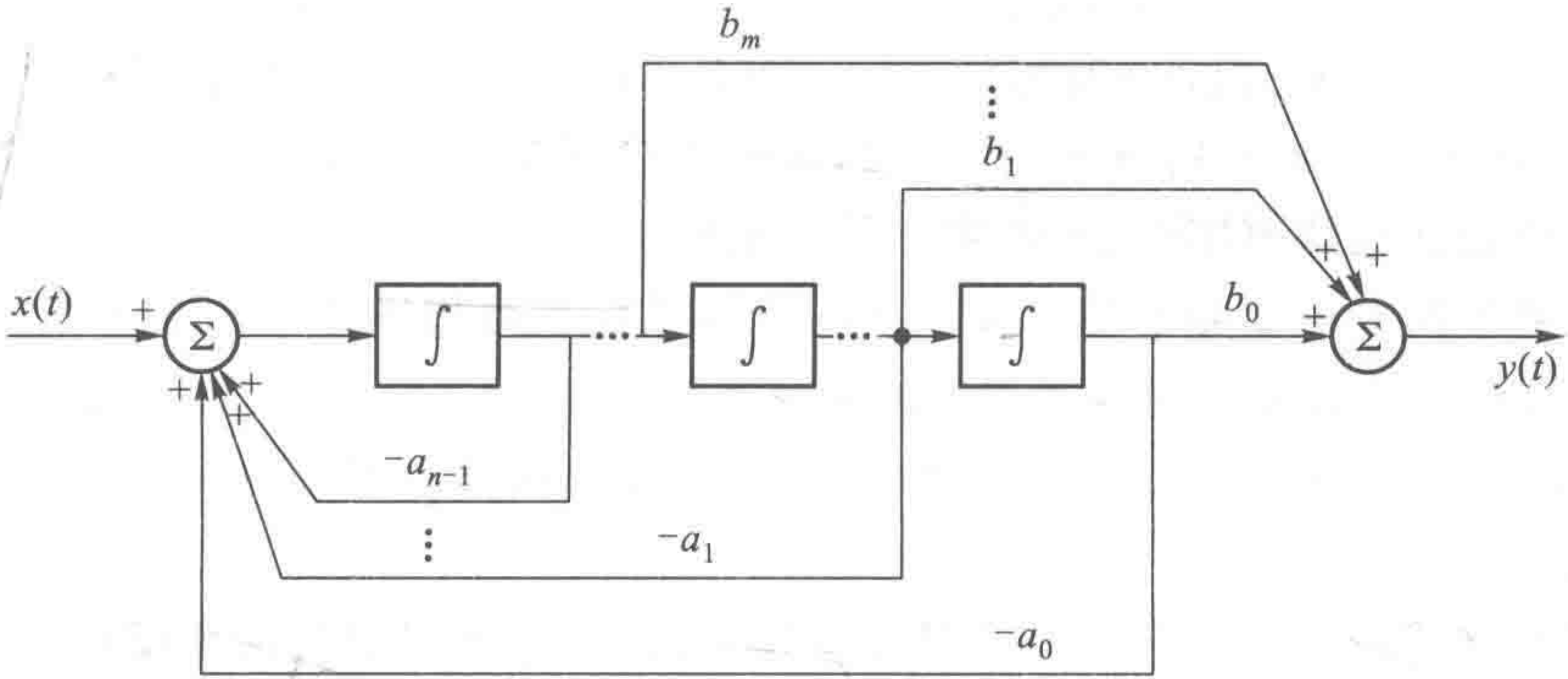
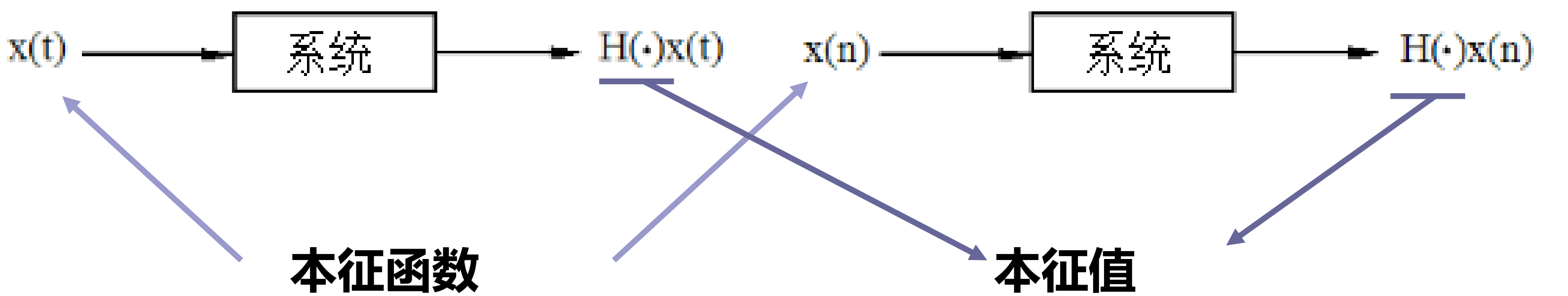


图 2-34　一般 n 阶连续系统的模拟框图

2.5.2 本征函数 **(Eigenfunction 固有函数 特征函数)**

当一本征函数输送至一个系统时，系统的输出响应仍保持原来的**函数形式不变**，只是幅值产生变化，或相位产生延迟，即此时输出函数与输入函数之比是一个复常数。



p97 例：2-27 L11+

1、对于LTI系统，激励为 $x(t) = e^{s_0 t}$

$$s_0 = \sigma_0 + j\omega_0 \qquad -\infty < t < \infty$$

$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{s_0(t-\tau)} d\tau = e^{s_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-s_0 \tau} d\tau$$

令： $H(s_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-s_0 \tau} d\tau$

H(s)是系统的转移函数，或称系统函数

结论：$x(t) = e^{s_0 t} \qquad -\infty < t < \infty$ 是LTI的本征函数。

$\boxed{\text{这是拉普拉斯变换的基本概念}}$

例：已知某系统的冲激响应为h(t),求激励为

$$x(t)=e^{t}+2e^{2t}+6e^{3t} \qquad -\infty<t<\infty$$ 时 $y_{zs}(t)$

显然：$y_{zs}(t)=H(1)e^{t}+2H(2)e^{2t}+6H(3)e^{3t} \qquad -\infty<t<\infty$

这里： $$H(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)e^{-st}dt$$

2、对于LTI系统，激励为$x(t)=e^{j\omega_0 t}$

即： $\sigma_0=0 \qquad -\infty<t<\infty$

$$y_{zs}(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)e^{j\omega_0(t-\tau)}d\tau=e^{j\omega_0 t}\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)e^{-j\omega_0\tau}d\tau$$

令： $H(\omega_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)e^{-j\omega_0\tau}d\tau$

$H(\omega_0)$是系统的转移函数，或称系统函数

结论：$x(t)=e^{j\omega_0 t} \qquad -\infty<t<\infty$ 也是LTI的本征函数。

这是傅里叶变换的基本概念

3、对于离散LTI系统，激励为$x(n) = z_0{}^n \quad -\infty < n < \infty$

系统零状态响应：

$$y_{zs}(n) = x(n) * h(n) = z_0{}^n * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) z_0{}^{n-m} = z_0{}^n \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) z_0{}^{-m}$$

令：$H(z_0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) z_0{}^{-m}$

$$y_{zs}(n) = z_0{}^n H(z_0) = x(n) H(z_0)$$

结论：$x(n) = z_0{}^n \quad -\infty < n < \infty$ 是离散LTI的本征函数。

这是z变换的基本概念

4、对于离散LTI系统，激励为$x(n)=e^{j\Omega_0 n} \quad -\infty<n<\infty$

系统零状态响应：

$$y_{zs}(n)=x(n)*h(n)=e^{j\Omega_0 n}*h(n)$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)e^{j\Omega_0(n-m)}=e^{j\Omega_0 n}\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)e^{-j\Omega_0 m}$$

$$y_{zs}(n)=z_0{}^n H(z_0)\Big|_{z_0=e^{j\Omega_0}}=x(n)H(e^{j\Omega_0})$$

结论：$x(n)=e^{j\Omega_0 n} \quad -\infty<n<\infty$ 是离散LTI的本征函数。

$$H(e^{j\Omega_0})=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)e^{-j\Omega_0 m}$$

这是离散时间傅里叶变换的基本概念

结论：不同的LTI系统可能有不同的特征函数，但复指数信号是唯一能够成为**一切LTI系统**本征函数的信号。

连续LTI系统

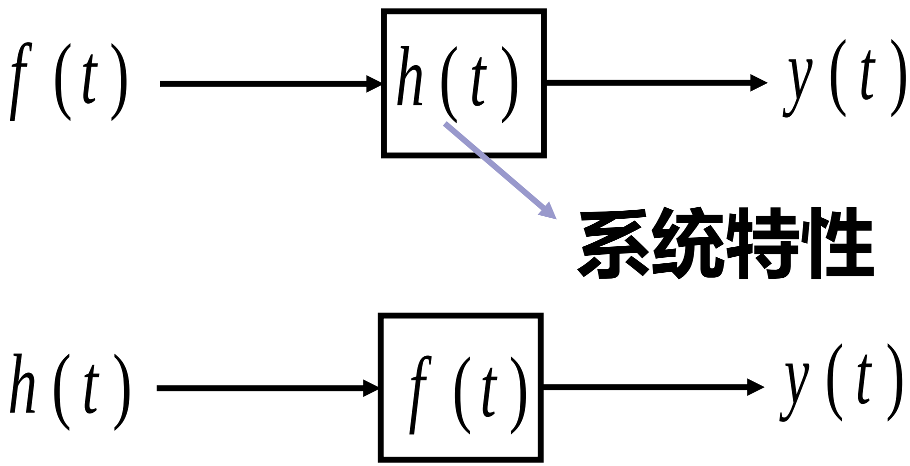
$$\begin{cases} e^{st}, -\infty < t < \infty \to y_{zs}(t) = e^{st}H(s) \\ e^{i\omega t}, -\infty < t < \infty \to y_{zs}(t) = e^{i\omega t}H(\omega) \end{cases}$$

离散LTI系统

$$\begin{cases} z_0{}^n, -\infty < n < \infty \to y_{zs}(n) = z_0{}^n H(z_0) \\ e^{i\Omega_0 n}, -\infty < n < \infty \to y_{zs}(n) = e^{i\Omega_0 n} H(e^{i\Omega_0}) \end{cases}$$

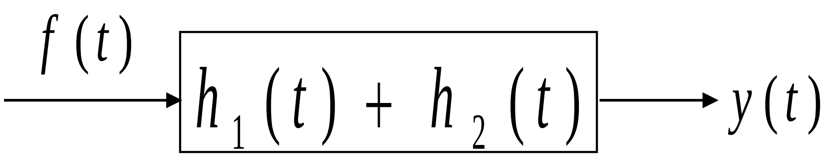
2.5.3 系统特性

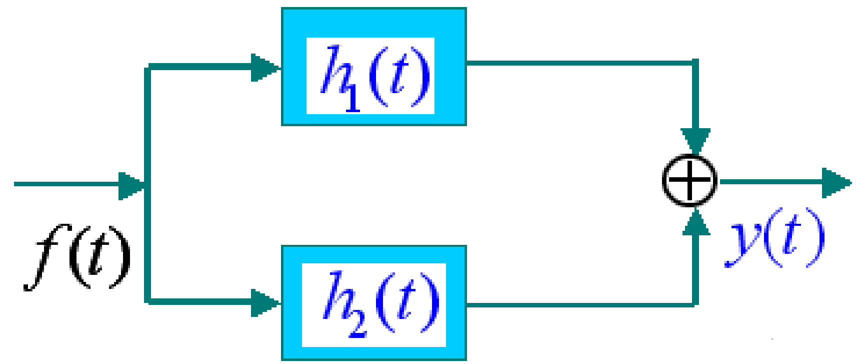
1.交换律　$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$



2. 分配律

$$f(t)*[h_1(t)+h_2(t)] = f(t)*h_1(t)+f(t)*h_2(t)$$



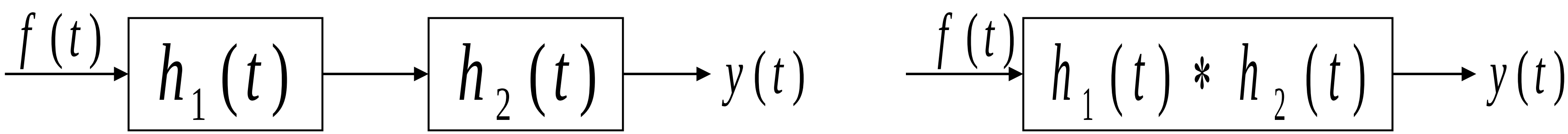


Parallel

结论：子系统并联时，总系统的系统特性等于各子系统系统特性之和。

3. 结合律

$$[f(t)*h_1(t)]*h_2(t)=f(t)*[h_1(t)*h_2(t)]$$

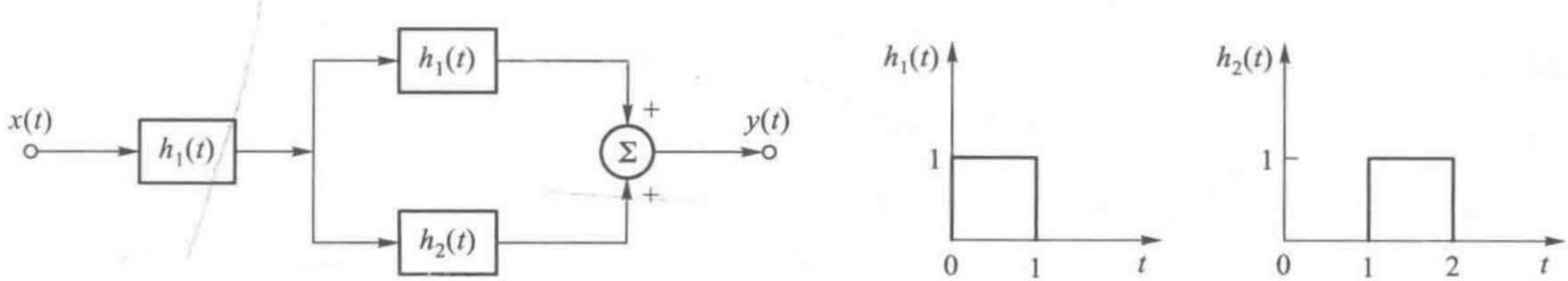


Cascade

结论：时域中，子系统级联时，总的系统特性等于各子系统系统特性的卷积；且总的系统特性与各子系统的级联顺序无关。

教材p101

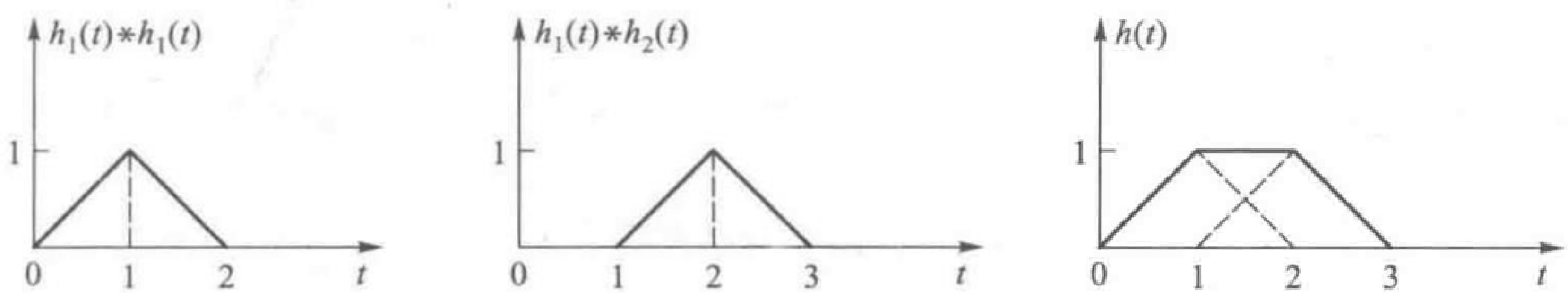
例 2-28 求图 2-44 所示复合系统的冲激响应 $h(t)$，其中 $h_1(t)$、$h_2(t)$ 如图 2-45 所示。



解： $h(t) = h_1(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = h_1(t) * h_1(t) + h_1(t) * h_2(t)$

$$= [u(t) - u(t-1)] * [u(t) - u(t-1)] + [u(t) - u(t-1)] * [u(t-1) - u(t-2)]$$

$$= tu(t) - (t-1)u(t-1) - (t-2)u(t-2) + (t-3)u(t-3)$$



4、因果系统：系统的输出与将来的输入无关

充要条件：

h(·) = 0 , for t < 0 or n < 0　　$h(\cdot)=h(\cdot)u(\cdot)$

5、稳定系统：输入有界输出也有界。充要条件：

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt<\infty \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty$$

证明见L11+++

注意：不是　$|h(t)|<\infty$　$\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|\,dt=0$

下列系统中的不稳定系统是（　　　　　　　　）。

$$h(t)=te^{-t}u(t) \qquad h(t)=3\frac{\sin t}{t}$$

$$h(n)=(\frac{1}{3})^n u(n) \qquad h(n)=(-3)^n u(n)$$

例 4 积分 $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 收敛，但非绝对收敛.

证 由 Dirichlet 判别法，取 $g(x)=\frac{1}{x}$，$f(x)=\sin x$，由于

$$\left|\int_0^A \sin x dx\right| = |\cos 0-\cos A| \leqslant 2$$

故知 $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 收敛，但非绝对收敛. 这是因为

$$\int_0^{\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx$$

$$\geqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\sin x|dx = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty .$$

6、记忆和无记忆系统： 输出仅取决于同一时刻的输入值为无记忆系统

$h(\cdot) = 0$, for $t \neq 0$ or $n \neq 0$ $\qquad h(\cdot) = a\delta(\cdot)$

7、可逆系统： 若系统h(n)可逆，可以找到一个系统，当两个系统级联时，输出是原来的输入。其逆系统的单位样值响应$h_1(.)$满足：

$$h(\cdot) * h_1(\cdot) = \delta(\cdot)$$

证明可逆性

例 2-29 若 $h(t)=u(t)$，试问该系统可逆否。

解: 设系统可逆，其逆系统用 $h_1(t)$ 表示，则应满足

$$u(t)*h_1(t)=\delta(t)*\int_{-\infty}^{t}h_1(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}h_1(\tau)d\tau=\delta(t)$$

$$h_1(t)=\delta'(t)$$

第四章 拉普拉斯变换更容易实现

例 2-30 若 $h(n)=u(n)$，试问该系统可逆否。

解: 设系统可逆，其逆系统用 $h_1(n)$ 表示，则应满足

$$u(n)*h_1(n)=\delta(n)=u(n)-u(n-1)$$

当 $h_1(n)=\delta(n)-\delta(n-1)$ 时，上式成立

$$h_1(n)=\delta(n)-\delta(n-1)$$

第五章 Z变换更容易实现

练习：已知某线性时不变系统的单位冲激响应 $h(t)=\varepsilon(t-1)$

利用卷积积分求系统对输入 $f(t)=e^{-3t}\varepsilon(t)$ 的零状态响应 $y(t)$。

解I：$y(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{-3(t-\tau)}\varepsilon(\tau-1)d\tau=\int_{1}^{t}e^{-3(t-\tau)}d\tau$

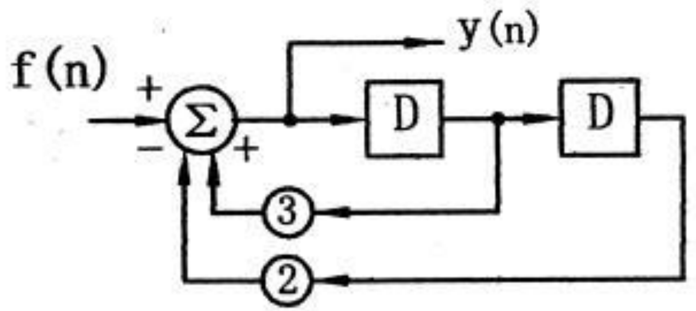
$$=e^{-3t}\int_{1}^{t}e^{3\tau}d\tau=e^{-3t}\frac{1}{3}[e^{3t}-e^{3}]\varepsilon(t-1)=\frac{1}{3}[1-e^{3(1-t)}]\varepsilon(t-1)$$

解II：

$$y(t)=\int_{0}^{t-1}e^{-3\tau}d\tau=-\frac{1}{3}e^{-3\tau}\Big|_{0}^{t-1}=\frac{1}{3}[1-e^{3(1-t)}]\varepsilon(t-1)$$

因为 $f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau$

思考：某离散系统如图所示，写出该系统的差分方程，并求单位冲激响应 h(n) 。



解：$y(n) = f(n) + 3y(n-1) - 2y(n-2)$

$$\begin{cases} h(n) - 3h(n-1) + 2h(n-2) = \delta(n) \\ h(-1) = 0 \quad h(0)=1 \end{cases}$$

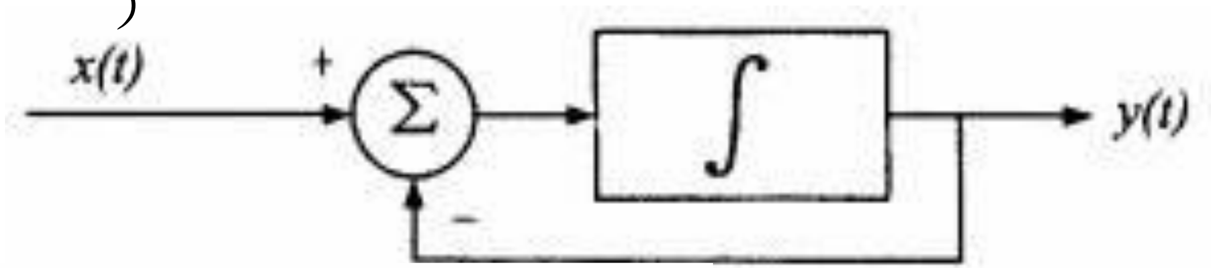
$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \qquad \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2 \qquad h(n) = c_1 1^n + c_2 2^n$

$h_0(0) = 1 \qquad h(-1)=0$

$h(0) = c_1 + c_2 = 1 \qquad h(\text{-}1) = c_1 + \dfrac{1}{2} c_2 = 0 \qquad c_1 = -1, c_2 = 2$

$h(n) = (-1 + 2 \times 2^n)\varepsilon(n) = (2^{n+1} - 1)\varepsilon(n)$

思考：系统结构框图如图示，该系统的单位冲激响应h(t)满足的方程式为（　　　）



A. $\dfrac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$

B. $h(t) = x(t) - y(t)$

C. $\dfrac{dh(t)}{dt} + h(t) = \delta(t)$

D. $h(t) = \delta(t) - y(t)$

教材p103
本章总结

预习：

阅读：https://blog.csdn.net/qq_32770097/article/details/89070100

在不看任何数学公式的情况下理解傅里叶分析

视频：https://mbd.baidu.com/newspage/data/videolanding?nid=sv_3531646832557072021&sourceFrom=share

信号处理，图像压缩，听歌识曲，为什么傅里叶的名字无处不在？

第二章作业：

2.1节

1. （a）

2.

2.2节

3.

4.（1）

5.（a）

6

2.3节

8.

9.

10.（1）

11.

12.（1）

13.

15.（3）

2.4节

18. （3）

19.

20.（1） （2）

2.5节

21. （1）

23.

24.

26.

27.

28.

30.

31.（2） （4） （5）

32.

35.

36.

37.

问题：19
21 （1）23 （3） 24 32 35