§2.2 卷积　　2.2.1 卷积积分

1. 定义

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(\quad \tau)d\tau$$

1.换元（t→τ)

2.反折：$f_2(\tau)\to f_2(-\tau)$

3.时移　　$f_2(t-\tau)$

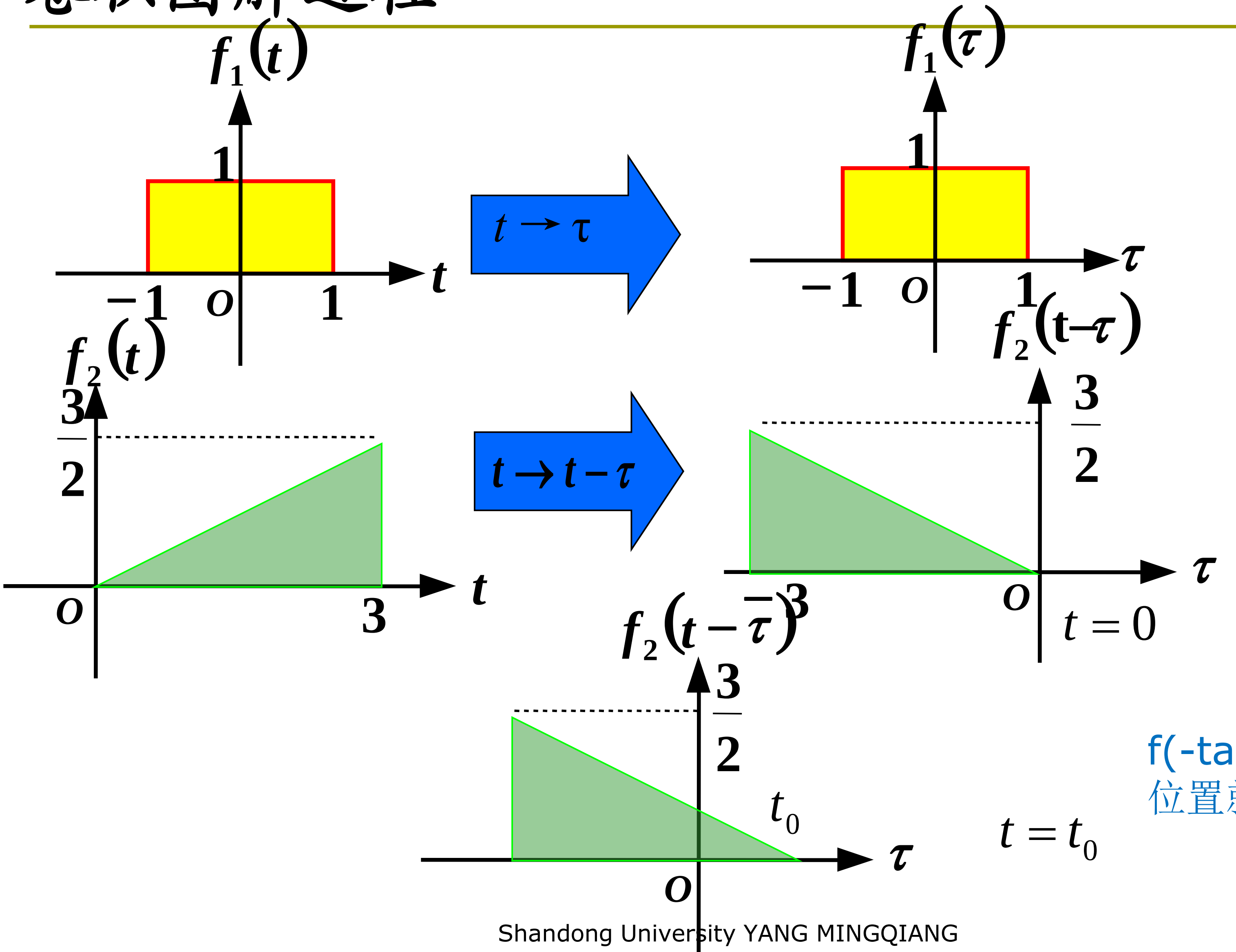
4.相乘　$f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)$

5.积分　　**求函数** $f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)$ **的面积。**

二、图解法：换元 - 反折(*Flip*) - 时移(*Slide*) - 相乘(*Multiply*) - 积分(*Integrate*)

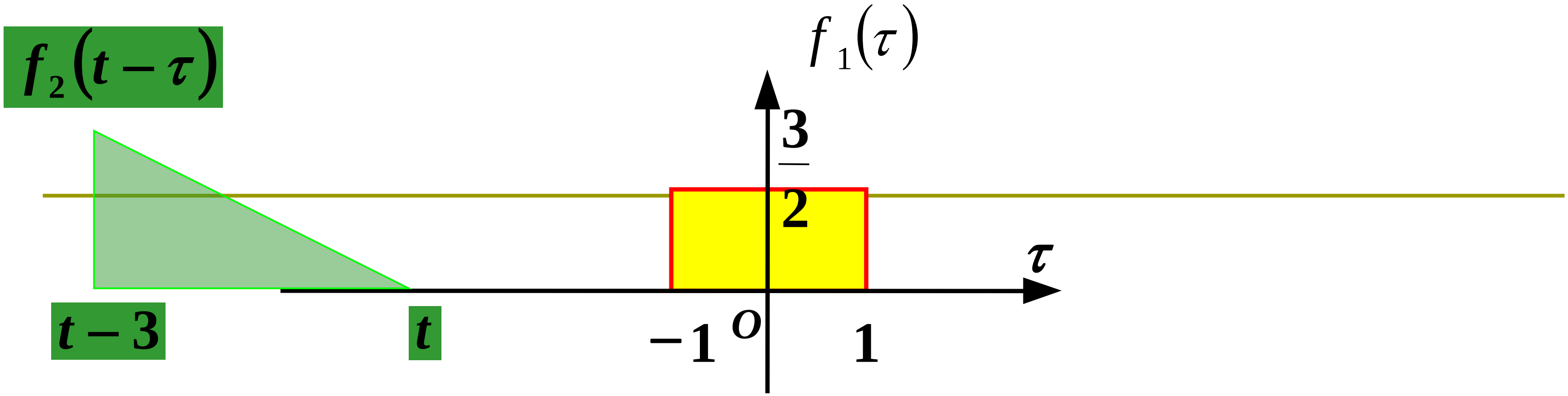
例：$f_1(t)=G_2(t),\ f_2(t)=\frac{t}{2}[u(t)-u(t-3)]$

卷积图解过程

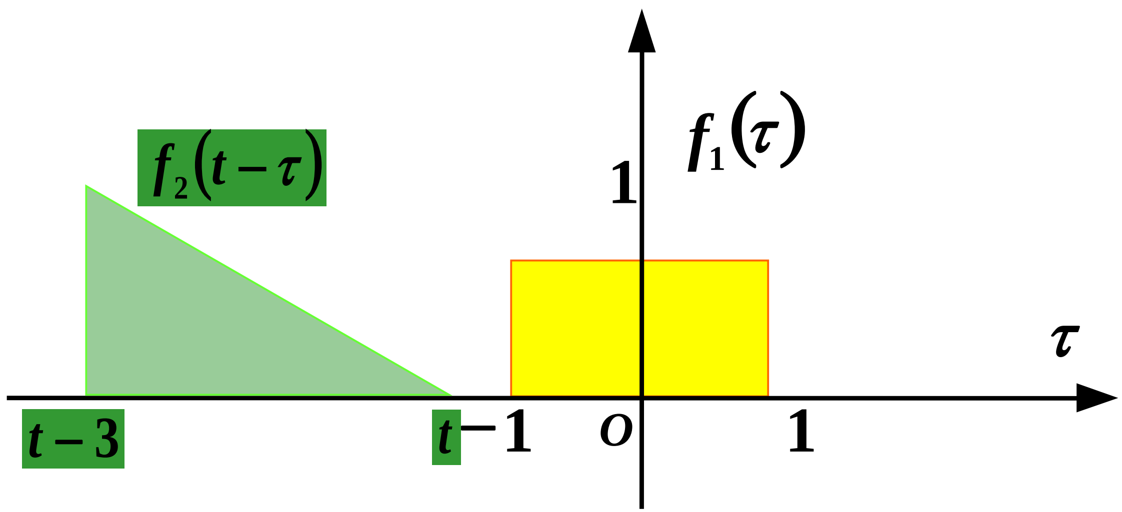


阅读p2-8内容，根据上一页卷积的方法，理解卷积的过程，并说明卷积运算的重点步骤是什么？

f(-tao)原点所在的位置就是t的数值



$t \leq$-1

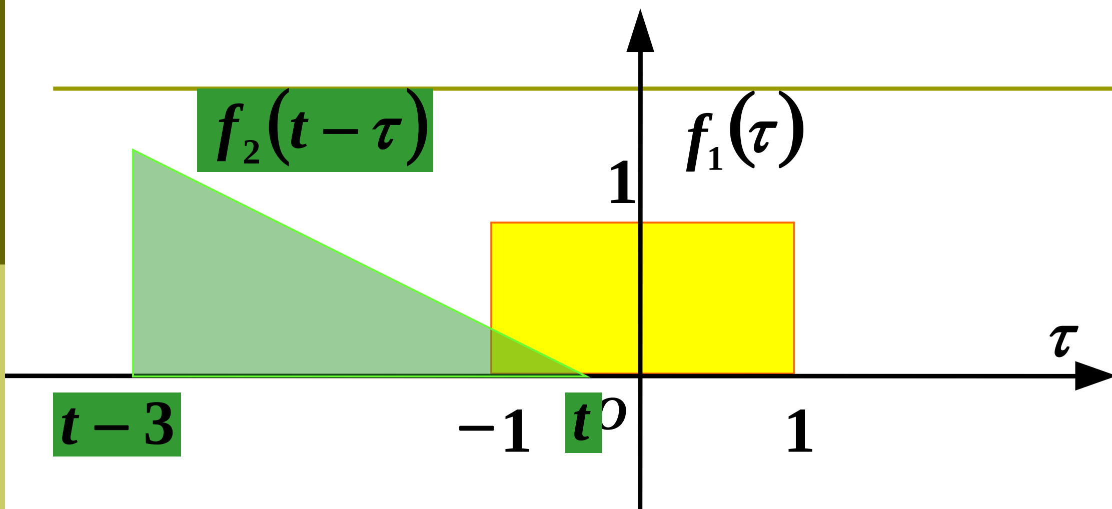


$t \leq -1$ **两波形没有公共处，二者乘积为0，即积分为0**

$$f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)=0 \qquad f(t)=f_1(t)* f_2(t)=0$$

$-1 \le t < 1$

$f_2(t-\tau)$向右移

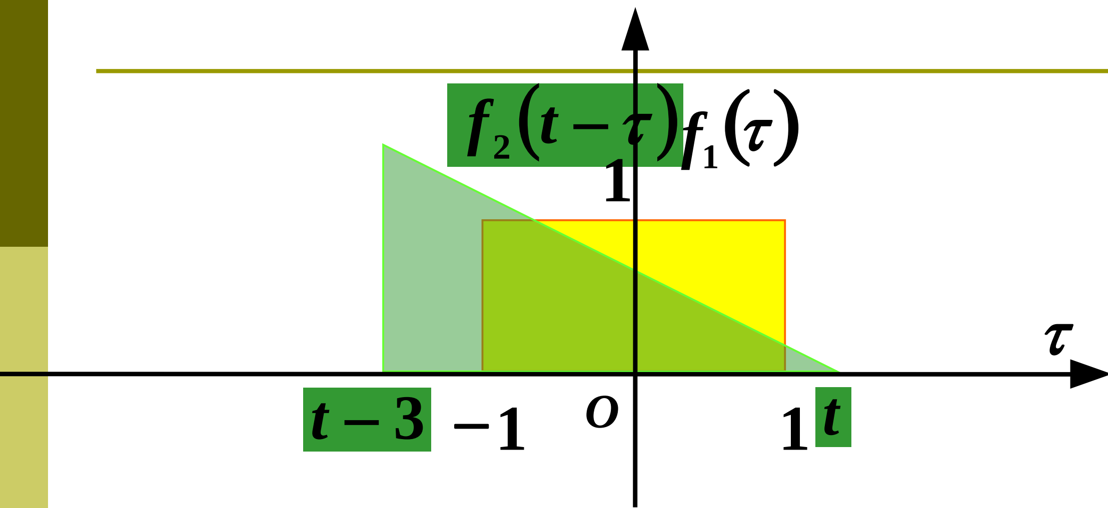


$-1 < t < 1$ **时两波形有公共部分，积分开始不为0，积分下限-1，上限t，t为移动时间;**

$$f(t) = \int_{-1}^{t} f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{-1}^{t} \frac{1}{2}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$= \left(\frac{t\tau}{2} - \frac{\tau^2}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{t} = \frac{t^2}{4} + \frac{t}{2} + \frac{1}{4}$$

$1 \le t < 2$

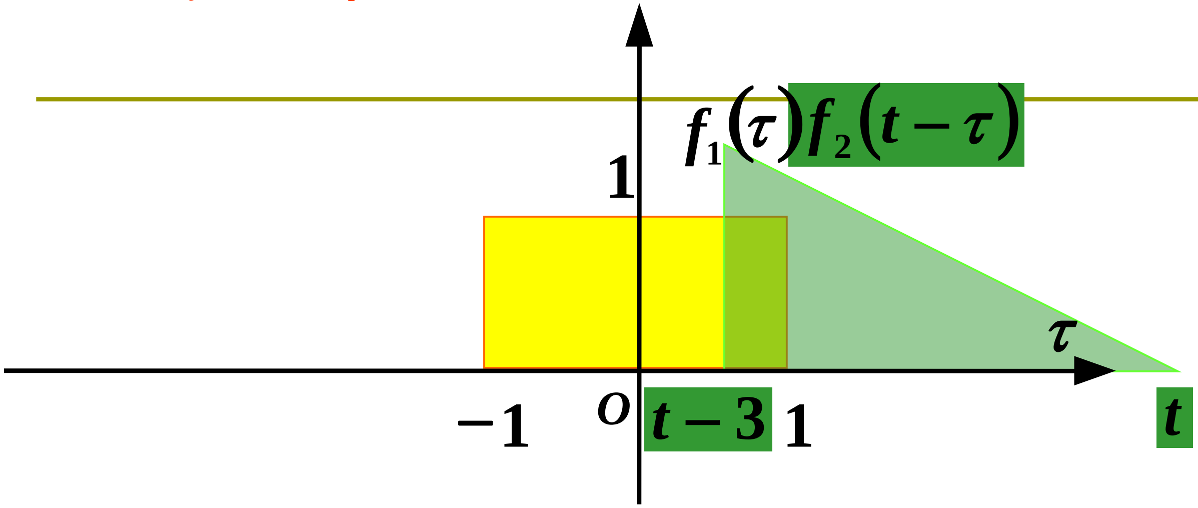


$$\begin{cases} t-3 < -1 \\ t \ge 1 \end{cases}$$

即$1 \le t < 2$

$$f(t) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = t$$

$2 \le t < 4$

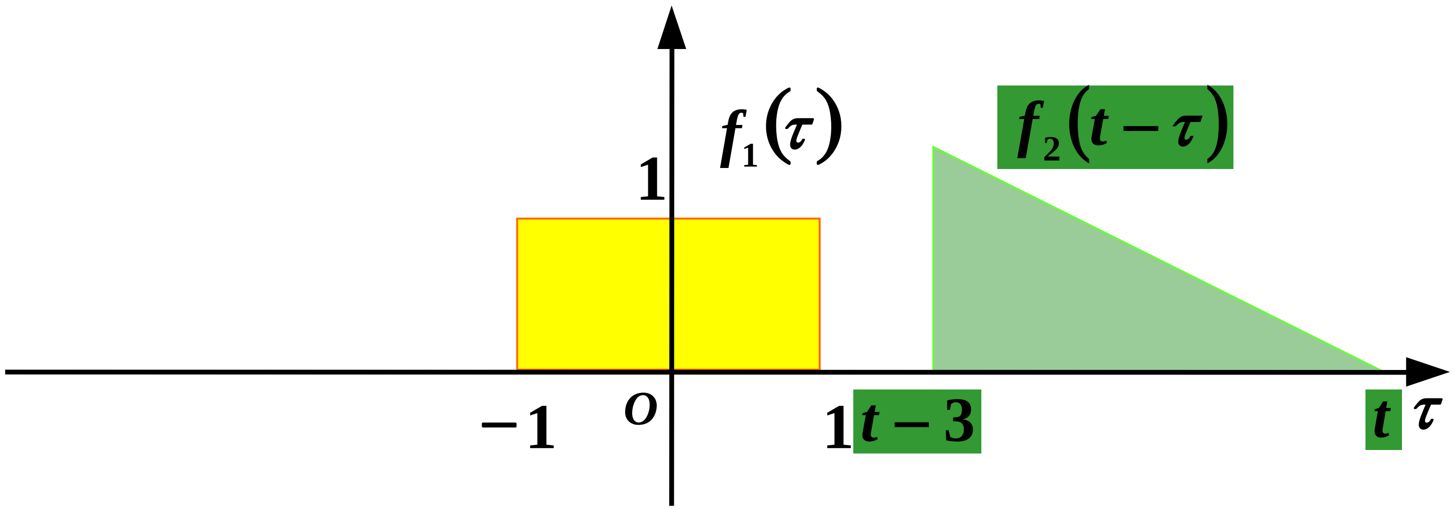


$$\begin{cases} t-3 \ge -1 \\ t-3 < 1 \end{cases}$$

即$2 \le t < 4$

$$f(t) = \int_{t-3}^{1} \frac{1}{2}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = -\frac{t^2}{4} + \frac{t}{2} + 2$$

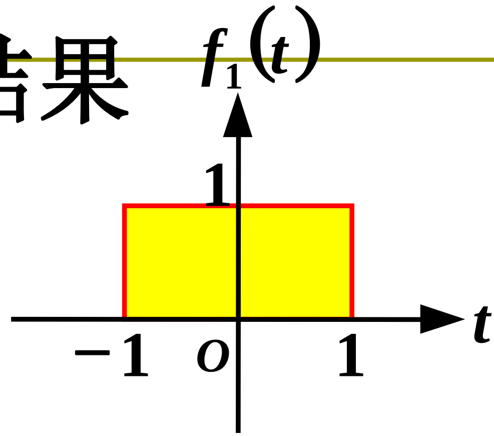
$t \geq 4$

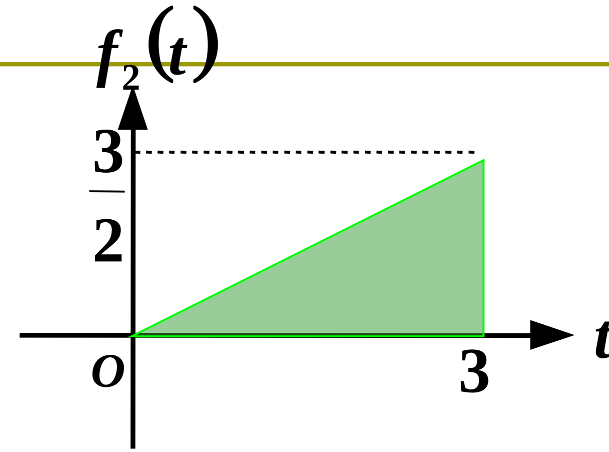


t-3≥1　　即$t \geq 4$

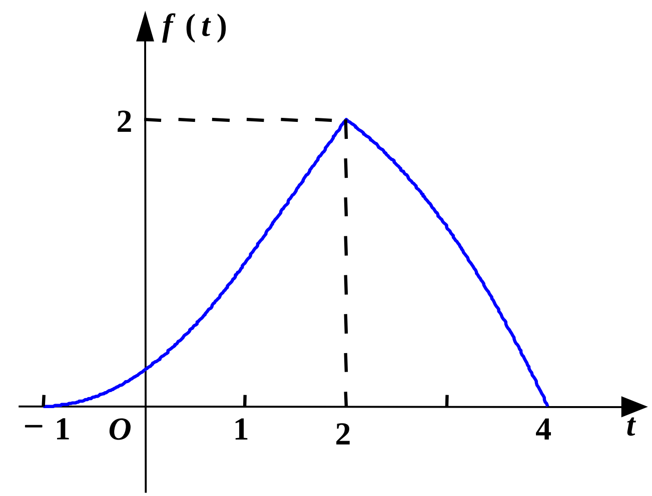
$$f(t) = 0$$

卷积结果

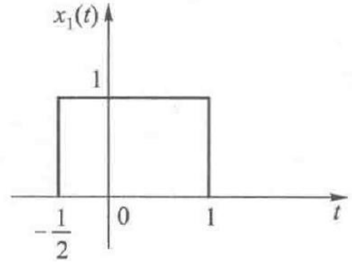


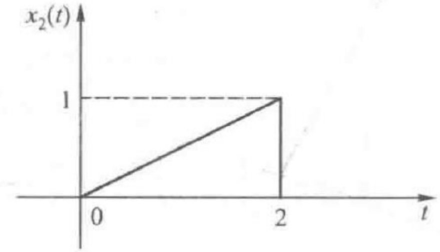


$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{t^2}{4}+\dfrac{t}{2}+\dfrac{1}{4} & -1\le t\le 1\\ t & 1\le t\le 2\\ -\dfrac{t^2}{4}+\dfrac{t}{2}+2 & 2\le t\le 4\\ 0 & \text{余}t\end{cases}$$



例2-1： 解析法





$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\mathrm{u}\left(\tau + \frac{1}{2}\right) - \mathrm{u}(\tau - 1)\right] \frac{1}{2}(t-\tau)\left[\mathrm{u}(t-\tau) - \mathrm{u}(t-\tau-2)\right]\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{u}\left(\tau + \frac{1}{2}\right)(t-\tau)\mathrm{u}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{u}(\tau-1)(t-\tau)\mathrm{u}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau -$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{u}\left(\tau + \frac{1}{2}\right)(t-\tau)\mathrm{u}(t-\tau-2)\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{u}(\tau-1)(t-\tau)\mathrm{u}(t-\tau-2)\,\mathrm{d}\tau$$

由阶跃函数的定义有

$$\boxed{x_1(t) * x_2(t) = \frac{1}{2}\left[\int_{-\frac{1}{2}}^{t}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau - \int_{1}^{t}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau - \int_{-\frac{1}{2}}^{t-2}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_{1}^{t-2}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]}$$

t t $t>=b$

运用解析法时，由于积分上限 $t-a$ 不小于下限 b，即 $t-a \geqslant b$，故 t 的范围为 $t \geqslant a+b$，所以去掉积分符号时，生成的卷积结果应乘以 $\mathrm{u}(t-a-b)$，即

$u(t-b)$

$$x_1(t) * x_2(t) = \left(\frac{t^2}{4} + \frac{t}{4} + \frac{1}{16}\right)\mathrm{u}\left(t + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{t^2}{4} - \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\right)\mathrm{u}(t-1)$$

$$-\left(\frac{t^2}{4} + \frac{t}{4} - \frac{15}{16}\right)\mathrm{u}\left(t - \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{t^2}{4} - \frac{t}{2} - \frac{3}{4}\right)\mathrm{u}(t-3)$$

P53 例2-2  用例2-1的结论，如何计算

注意

(1)时间分段原则

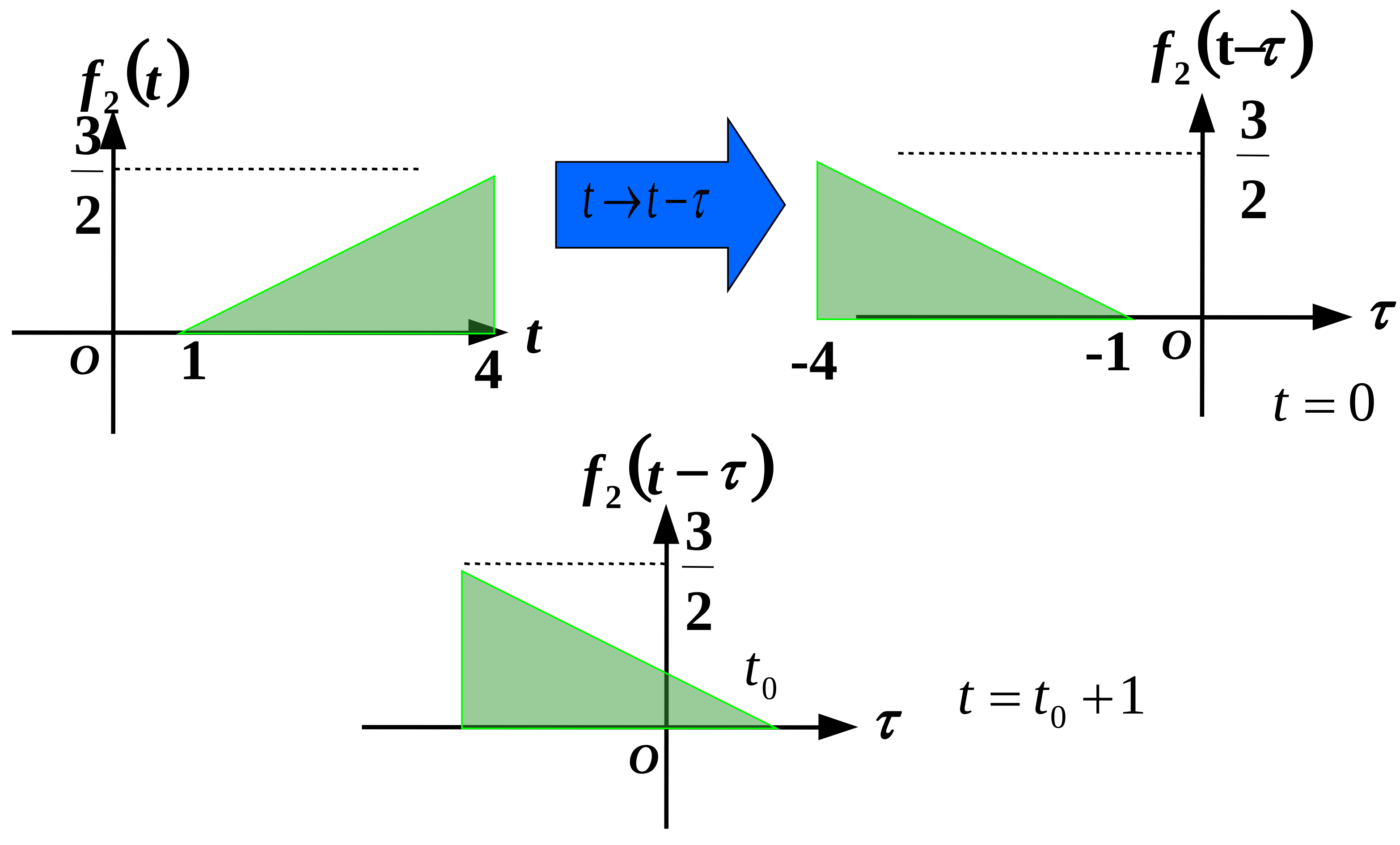
按$f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)$乘积有值的区间划分。

(2)各段上积分上下限的确定

一般规律：

卷积结果所占的时宽＝两卷积函数所占的时宽之和

注意:　$f_1(t)=G_2(t),\ f_2(t)=\dfrac{t-1}{2}[u(t-1)-u(t-4)]$



2. 性质

1）代数性质

(i)交换律 $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$

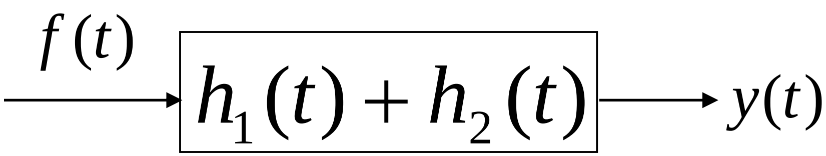
$$f(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

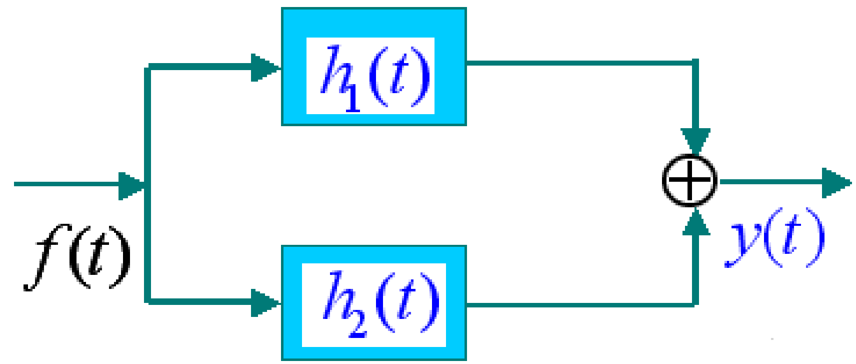
系统特性

$$h(t) \longrightarrow \boxed{f(t)} \longrightarrow y(t)$$

(ii) 分配律

$$f(t)*[h_1(t)+h_2(t)] = f(t)*h_1(t) + f(t)*h_2(t)$$



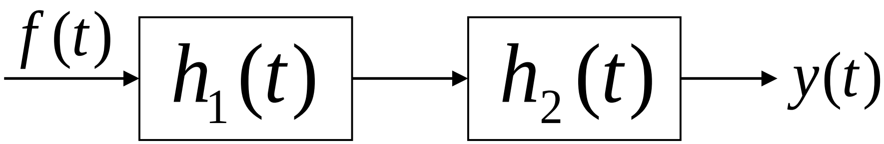


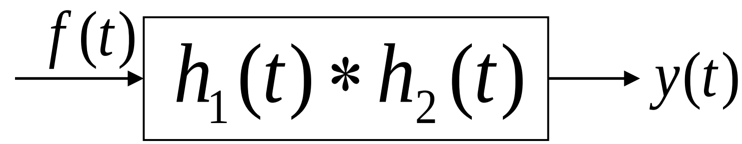
Parallel

结论：子系统并联时，总系统的系统特性等于各子系统系统特性之和。

(iii) 结合律

$$[f(t)*h_1(t)]*h_2(t)=f(t)*[h_1(t)*h_2(t)]$$





Cascade

结论：时域中，子系统级联时，总的系统特性等于各子系统系统特性的卷积；且总的系统特性与各子系统的级联顺序无关。

2)卷积积分的微分与积分性质

设$y(t) = f(t) * h(t)$，有

(i)卷积的微分性质

$$y'(t) = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h'(t-\tau)d\tau$$

$$= f(t) * h'(t)$$

同理可证 $y'(t) = f'(t) * h(t)$

所以 $f(t) * h'(t) = f'(t) * h(t)$

(ii)卷积的积分性质

$$y^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau$$

$$y^{(-1)}(t) = f(t) * h^{(-1)}(t) = f^{(-1)}(t) * h(t)$$

(iii)卷积的微积分性质

$$y(t) = f'(t) * h^{(-1)}(t) = f^{(-1)}(t) * h'(t)$$

推广 $y^{(m+n)}(t) = f^{(m)}(t) * h^{(n)}(t)$, m、n为整数

当m、n为正整数时，表示求导数的阶数;

当m、n为负整数时，表示求重积分的次数。

注意：

应用微积分性质时，被积分的函数应为可积函数，被求导的函数在 $t=-\infty$ 处应为零值。

$$f_1(t) * f_2(t) = f_1'(t) * f_2^{(-1)}(t)$$

3)与奇异函数的卷积积分

说明本页每一步推导的原理。

$$f(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\delta(\tau)d\tau=f(t)$$

$$\boxed{f(t-t_1)*\delta(t-t_2)=f(t-t_1-t_2)}$$

$$f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)u(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$f(t)*\delta'(t)=f'(t) \qquad f(t)*\delta^{(k)}(t)=f^{(k)}(t)$$

推论：延时性质 设：$y(t)=f_1(t)*f_2(t)$

$$f_1(t-t_1)*f_2(t-t_2)=f_1(t)*\delta(t-t_1)*f_2(t)*\delta(t-t_2)$$

$$=f_1(t)*f_2(t)*\delta(t-t_1-t_2)$$

$$=y(t-t_1-t_2)$$

$$\boxed{f_1(t)*f_2(t-t_2-t_1)}$$

$$f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)u(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

如果 $f(t)=u(t)$

$$u(t)*u(t)=\int_0^t d\tau = t\,u(t)=R(t)$$

即: $u(t-t_0)*u(t-t_1)=R(t-t_0-t_1)$

$$=(t-t_0-t_1)\,u(t-t_0-t_0)$$

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f'(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

可以使用卷积的哪个性质来解释？

卷积性质归纳：

1. 卷积的平滑效应
   多次卷积更加平滑，其结果趋近高斯函数

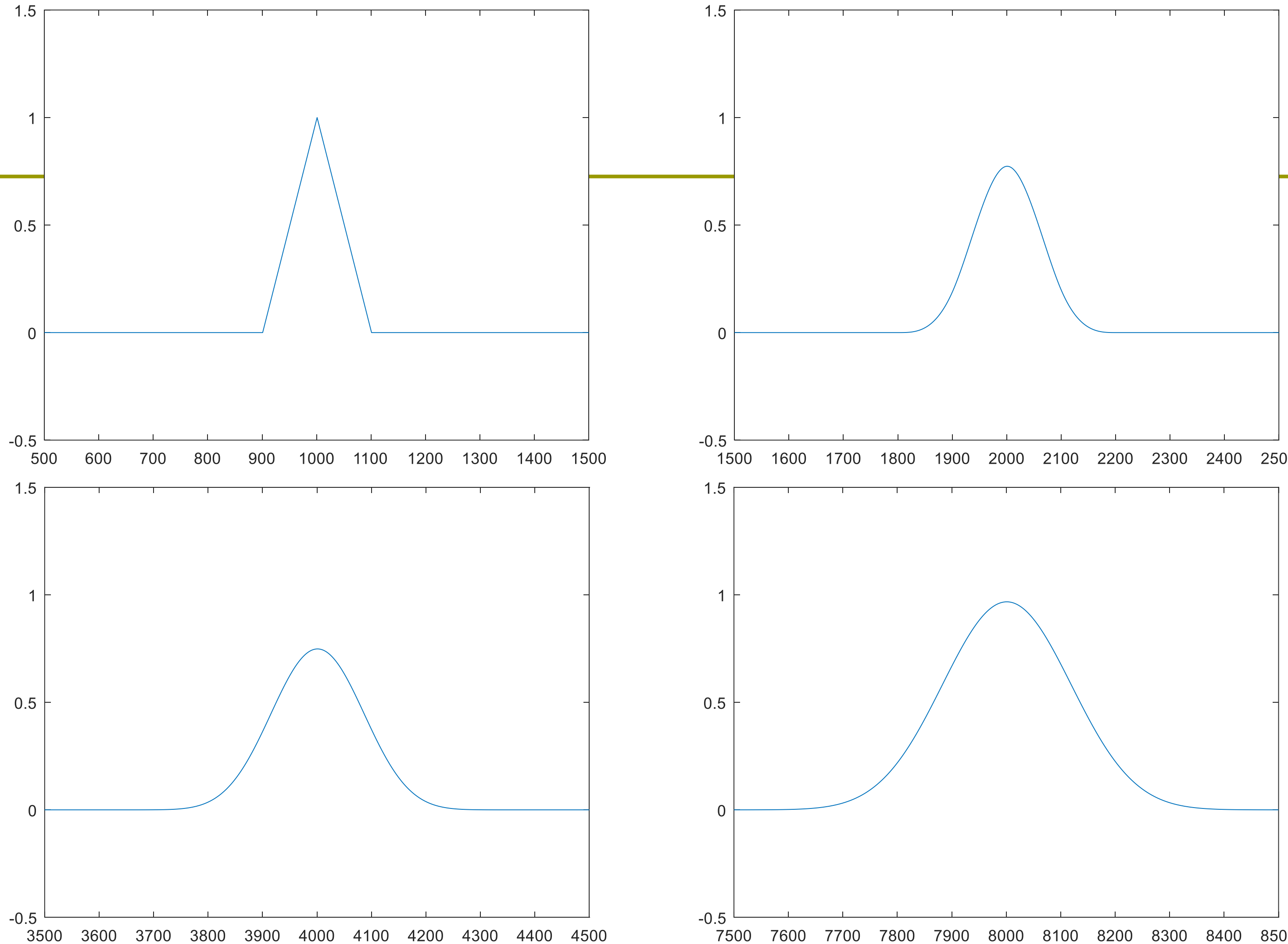
2. 卷积的展宽效应
结果的宽度等于各函数宽度之和

3. 特例：sinc(t) 既无展宽效应，也无平滑效应
sinc(t) * sinc(t) = sinc(t)

4. 解析法对于指数函数、多项式函数有效；
   图解法适于时限函数；求某点时刻的卷积值。

5. （补充）常数c和函数f(x)作卷积，等于f(x)从负无穷到正无穷的积分的c倍。

P56 表2-1 记住1、2、3、4、6、11，其它会推导



三角形函数卷积三次的结果

例2-3 已知$f(t)=\sin tu(t), h(t)=\delta'(t)+u(t)$

求$f(t)*h(t)$

解

$$f(t)*h(t)=\sin tu(t)*[\delta'(t)+u(t)]$$

$$=\sin tu(t)*\delta'(t)+\sin tu(t)*u(t)$$

$$=\frac{d}{dt}[\sin tu(t)]+\int_0^t \sin\tau d\tau$$

$$=\sin t\delta(t)+\cos tu(t)+[1-\cos t]u(t)$$

$$=u(t)$$

说明本页每一步推导的原理。

p57

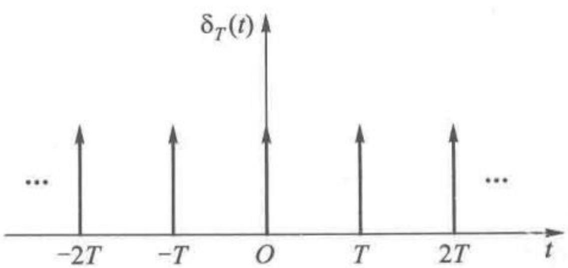
例2-4 注意结果中u(t)和u(t-2)

例 2-4 设 $x(t)=e^{-t}u(t)$，$h(t)=u(t)-u(t-2)$，试求 $x(t)*h(t)$。

解：$x(t)*h(t)=x^{(-1)}(t)*h'(t)=x^{(-1)}(t)-x^{(-1)}(t-2)$

$$=\int_0^t e^{-\lambda}d\lambda-\int_2^t e^{-(\lambda-2)}d\lambda=(1-e^{-t})u(t)-[1-e^{-(t-2)}]u(t-2)$$

例2-5 引入冲激序列（即 comb函数 或 梳状函数）



$$\delta_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$$

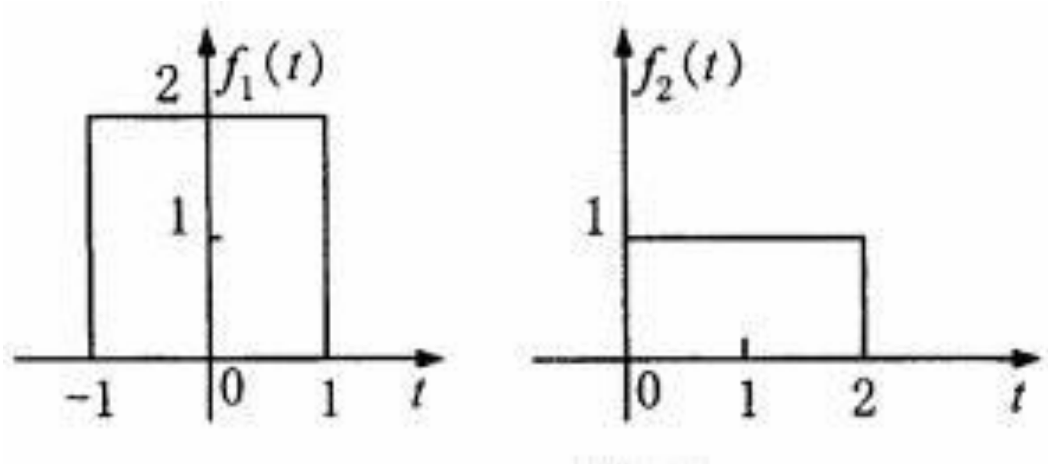
$$x(t)*\delta_T(t)=x(t)*\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(t-kT)$$

作用：**1**、在一定条件下，任意周期信号可以通过其核函数与**comb**的卷积获得。**2**、**comb**函数与任意连续信号相乘，生成离散信号。

填空题 0分

此题未设置答案，请点击右侧设置按钮

信号f1(t), f2(t)波形如图所示， 设f(t)=f1(t)*f2(t)，则f(0)为



正常使用填空题需3.0以上版本雨课堂

作答

$$\int_{0_-}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2}t[\delta(t-1)+\delta(t+1)]dt=$$

$$f(t-\tau)*\delta(t+\tau)=$$

$$u(t-2)*u(t+3)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)\,\mathrm{d}t=$$

$$\int_{-a}^{+a} f(t)\delta(t)\,dt=$$

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\delta(\tau)\,d\tau=$$

$$\int_{-\infty}^{t} f(t-\tau)\delta(\tau)\,d\tau=$$

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau-t)\delta(\tau)\,d\tau=$$

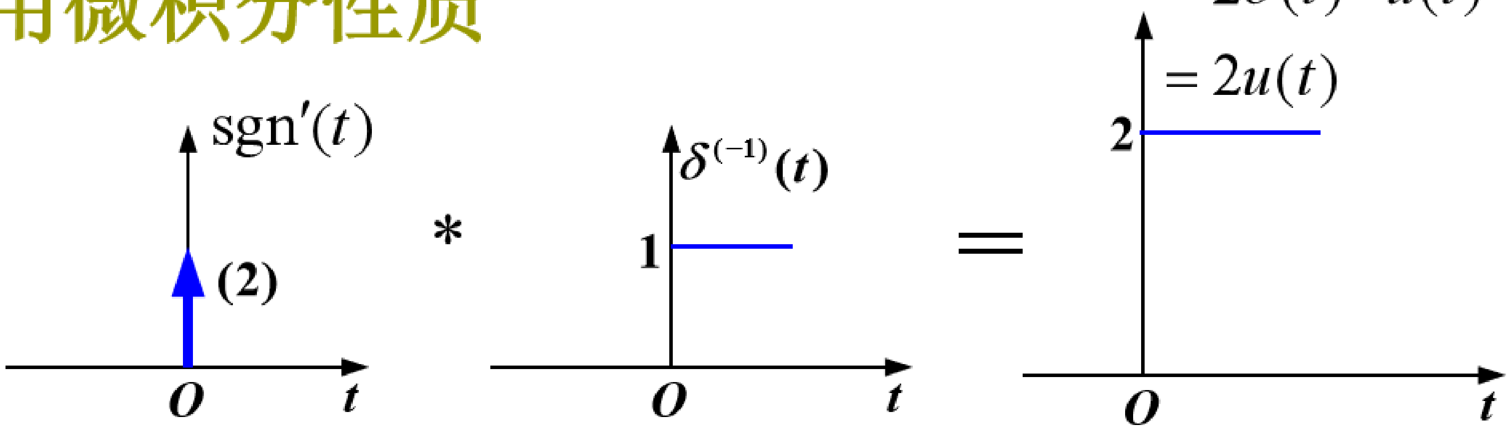
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau-t)\delta(\tau)\,d\tau=$$

对应的总结冲激函数的导数相关算式

思考 $\operatorname{sgn}(t) * \delta(t)$

用微积分性质

$$\delta^{(-1)}(t) * \operatorname{sgn}'(t)$$
$$= 2\delta(t) * u(t)$$
$$= 2u(t)$$



$$f(t) = \delta^{(-1)}(t) * \operatorname{sgn}'(t) = u(t) * 2\delta(t) = 2u(t)$$

作答

2.2.2 卷积和

1．定义

$$x_1(n)*x_2(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_1(m)x_2(n-m)$$

图解过程：换元 - 反折 - 移序 - 相乘 - 累加和

2．性质

代数性质

- 交换率 $x_1(n)*x_2(n)=x_2(n)*x_1(n)$
- 分配率 $x(n)*\left[h_1(n)+h_2(n)\right]=x(n)*h_1(n)+x(n)*h_2(n)$
- 结合率 $x(n)*h_1(n)*h_2(n)=x(n)*[h_1(n)*h_2(n)]$

与$\delta(n)$卷积: $x(n)*\delta(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)=x(n)\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(n-m)=x(n)$

与$u(n)$卷积: $x(n)*u(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)u(n-m)=\sum_{m=-\infty}^{n}x(m)$ （m<=n时有值）

移序 / 延时特性

设: $x(n) = x_1(n) * x_2(n)$

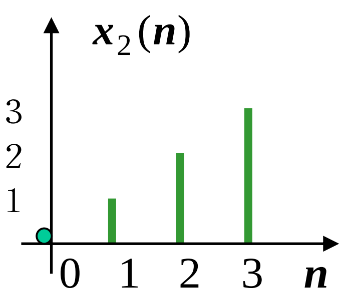
则: $x_1(n-m_1) * x_2(n-m_2) = x(n-m_1-m_2)$

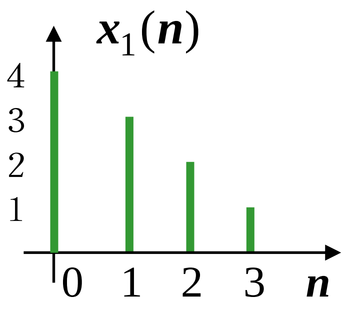
例：设$x_1(n) = \left\{ \underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{4}, 3, 2, 1 \right\}$, $x_2(n) = n[u(n) - u(n-4)]$,

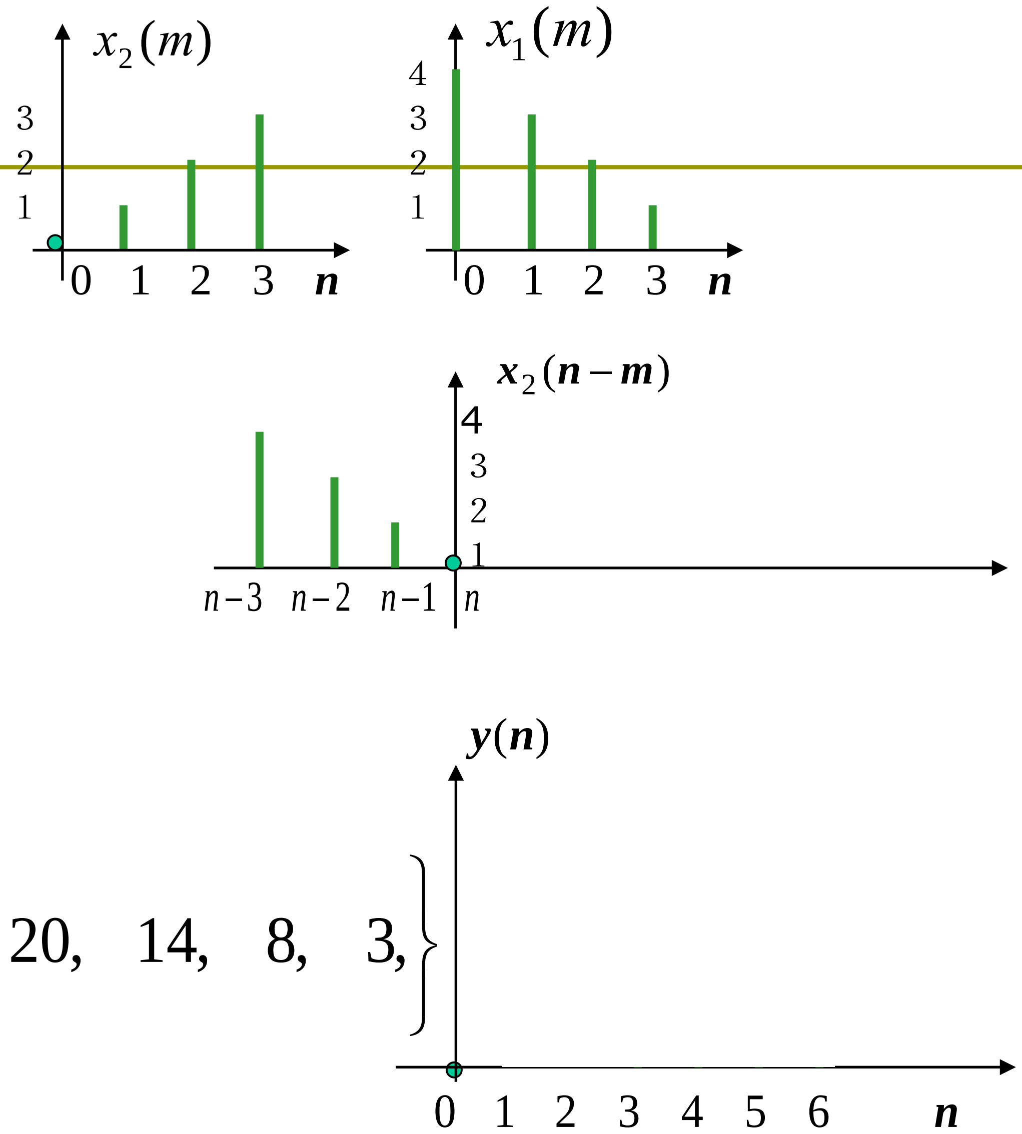
求: $y(n) = x_1(n) * x_2(n)$

解：两序列如图所示

图解法:







$$y(n)=\{\underset{\substack{\uparrow\\ n=0}}{0},\quad 4,\quad 11,\quad 20,\quad 14,\quad 8,\quad 3,\}$$

方法二：列表法

$x_2(n)$ \ $x_1(n)$	4	3	2	1
0	0	0	0	0
1	4	3	2	1
2	8	6	4	2
3	12	9	6	3

$$\therefore y(n) = \{\underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{0} \quad 4 \quad 11 \quad 20 \quad 14 \quad 8 \quad 3\}$$

注意：此例序列是从零时刻起始的，如果是非零时刻起始需要修正算法。（利用时移性质）

方法三：不进位乘法

对于两个有限长序列的卷积和计算，可以采用更为简便实用的方法计算。这种方法不需要画出序列图形，只要把两个序列排成两行，按普通乘法运算进行相乘，但中间结果不进位，最后将位于同一列的中间结果相加得到卷积和序列。例如：

例 已知离散信号

$$f_1(k)=\begin{cases}1 & k=0\\ 3 & k=1\\ 2 & k=2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_2(k)=\begin{cases}4-k & k=0,1,2,3\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求卷积和$f_1(k)*f_2(k)$。

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 4 & \boxed{3} & 2 & 1 \\
 & & \times & & 1 & 3 & \boxed{2} \\
\hline
 & & & 8 & \boxed{6} & 4 & 2 \\
 & & 12 & 9 & 6 & 3 & \\
+ & 4 & 3 & 2 & 1 & & \\
\hline
 & 4 & 15 & 19 & \boxed{13} & 7 & 2
\end{array}
$$

$$
f(k) = f_1(k) * f_2(k) = \{ \underset{\substack{\uparrow \\ k=0}}{4} \quad 15 \quad 19 \quad 13 \quad 7 \quad 2 \}
$$

p64 倒数2行 改错

p64 例2-7 解析法

图解法自学

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}[u(m)-u(m-N)]\left(\frac{1}{2}\right)^{n-m}u(n-m)$$

$$y(n)=\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-m}-\sum_{m=N}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-m}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}[\sum_{m=0}^{n}2^{m}-\sum_{m=N}^{n}2^{m}]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left[\frac{1-2^{n+1}}{1-2}u(n)-\frac{2^{N}-2^{n+1}}{1-2}u(n-N)\right]$$

$$=\left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]u(n)-\left[2-2^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]u(n-N)$$

卷积和总结

1.运用图解法重点在于确定横轴的时间分段;

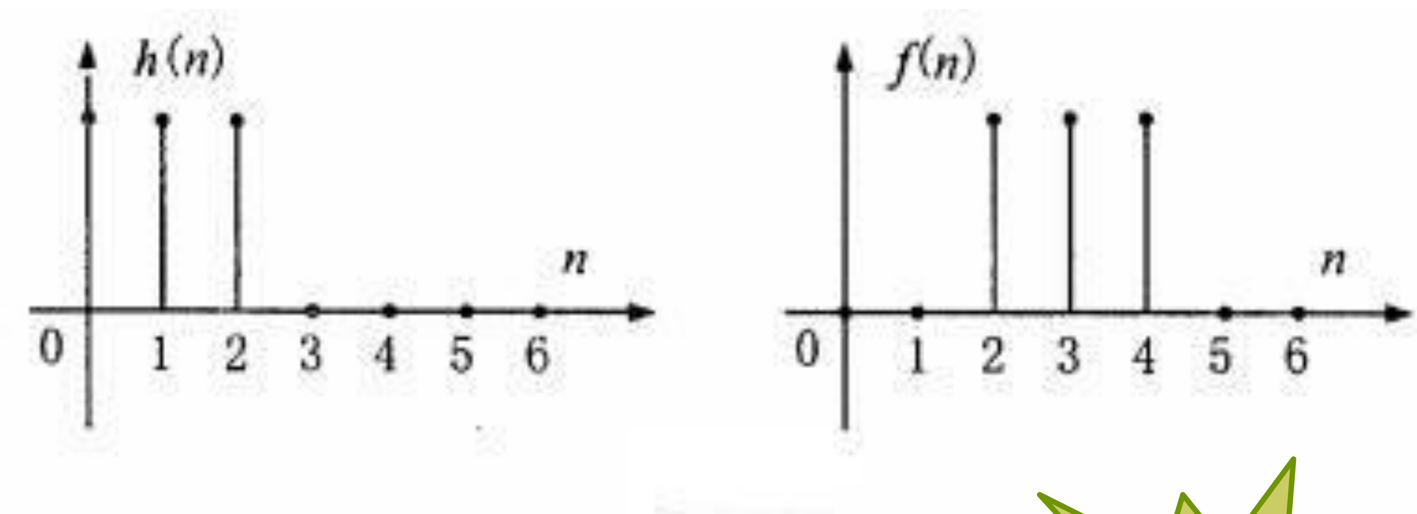
2.运用解析法时：累加上限为n, 下限为n2时，卷积结果要乘以u(n-n2);

3.若x 的长度为N，h 的长度为M，则x*h 的长度L=N+M-1。

表2-4 常用序列的卷积和公式。 记住 1,2,3,4

表2-5 等比级数求和公式，做题参考

已知离散系统的单位序列响应h(n)和系统输入f(n)如图所示，f(n)作用于系统引起的零状态响应为y(n)，那么y(n)序列不为零的点数为



$u(n) * u(n) =$

$u(t) * u(t) =$

注意

*反卷积

在$y(k)=f(k)*h(k)$中，

若已知$y(k)$，$h(k)$，如何求$f(k)$（信号恢复）；

如语音识别。

若已知$y(k)$，$f(k)$，如何求$h(k)$（系统辩识）；

如地震信号处理、地质勘探、考古、石油勘探等问题。

这两类问题都是求反卷积的问题。

对离散系统容易写出：

$$y(k)=\sum_{m=0}^{k} f(m)h(k-m)$$

写成矩阵形式

$$y(k)=\sum_{m=0}^{k} f(m)h(k-m)$$

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \cdots \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(0) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h(1) & h(0) & 0 & \cdots & 0 \\ h(2) & h(1) & h(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h(k) & h(k-1) & h(k-2) & \cdots & h(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ \cdots \\ f(k) \end{bmatrix}$$

目的：反求$f(k)$

$$f(0)=y(0)/h(0)$$

$$f(1)=\left[y(1)-f(0)h(1)\right]/h(0)$$

$$f(2)=\left[y(2)-f(0)h(2)-f(1)h(1)\right]/h(0)$$

$$\cdots$$

$$f(k)=\left[y(k)-\sum_{m=0}^{k-1} f(m)h(k-m)\right]\Big/ h(0)$$

同理

$$h(k)=\left[y(k)-\sum_{m=0}^{k-1} h(m)f(k-m)\right]\Big/ f(0)$$

对连续系统不易写出明确的关系式，只针对特殊情况可以计算反卷积。

例：$$f_1(t)*tu(t)=(t+e^{-t}-1)u(t)$$

求 $f_1(t)$

解：对 $f_1(t)*tu(t)=(t+e^{-t}-1)u(t)$ 求两次导数

第一次求导

$$f_1(t)*u(t)=u(t)-e^{-t}u(t)+e^{-t}\delta(t)-\delta(t)=u(t)-e^{-t}u(t)$$

第二次求导

$$f_1(t)*\delta(t)=e^{-t}u(t)$$

即 $f_1(t)=e^{-t}u(t)$

完成实验三