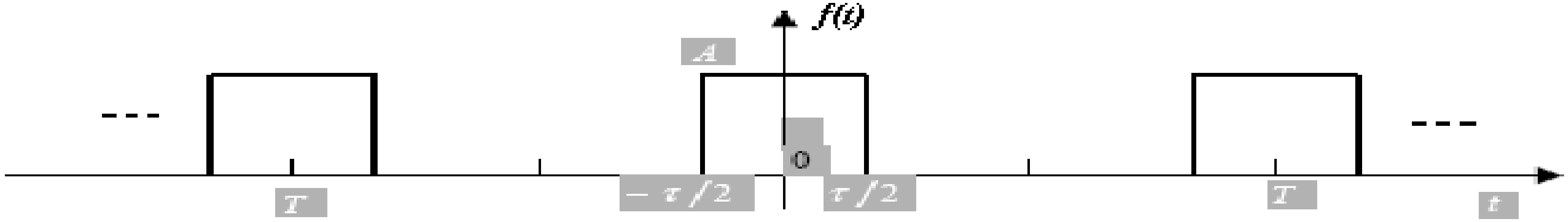
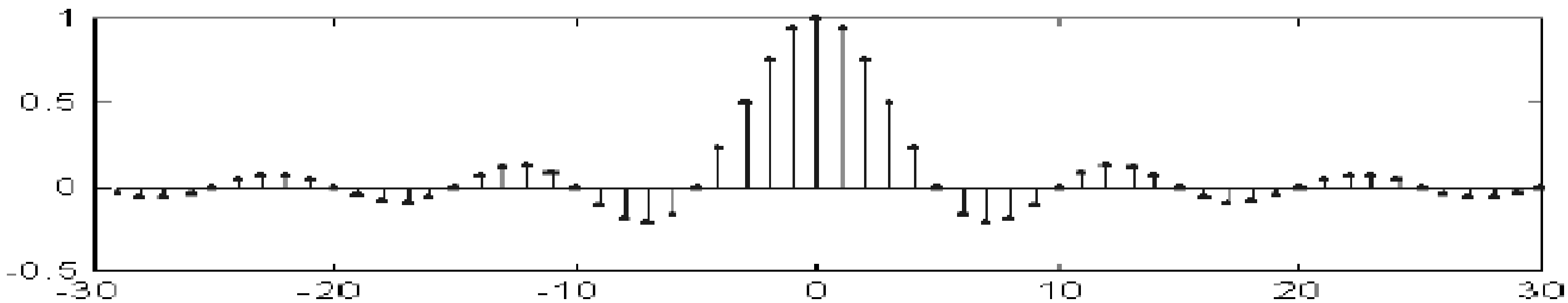
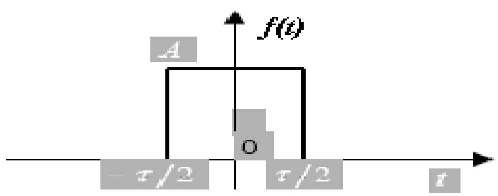
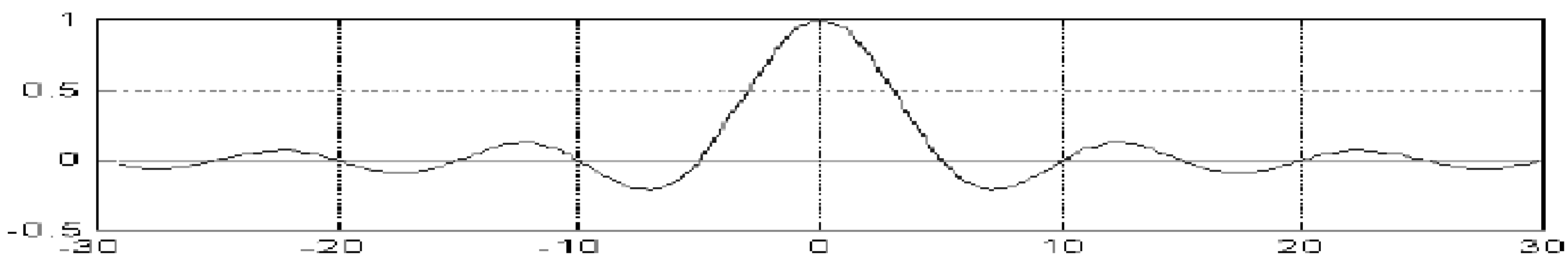
§3.2 傅立叶变换
（上）

图形示意：周期——非周期信号









周期信号：$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{in\omega_1 t}$

其中：$F_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \tilde{x}(t) e^{-in\omega_1 t} \mathrm{d}t$

$= F(n\omega_1)$

τ固定， B 或B_f不变；

T变大时：

- **ω_1减小，谱线稠密**
- **$|F_n|$谱线振幅减小，收敛速率缓慢。**

当 $T \rightarrow \infty$ **时**

$$\left\{\begin{array}{l} \text{周期信号}\tilde{x}(t) \rightarrow \text{非周期信号}x(t) \\ \omega_1 \rightarrow d\omega \\ \text{离散谱}n\omega_1 \rightarrow \text{连续谱}\omega \\ \sum \rightarrow \int \\ \text{谱线高度}|F_n| \rightarrow \text{无穷小量} \end{array}\right.$$

但这些无穷小量间的比例关系不变

频谱密度函数

为了表明无穷小的振幅间的相对差别，有必要引入一个新的量——称为“频谱密度函数”。

$$X(\omega) \overset{def}{=} \lim_{f_1 \to 0} \frac{F(n\omega_1)}{f_1} = \lim_{\omega_1 \to 0} \frac{2\pi F(n\omega_1)}{\omega_1}$$

$$= \lim_{T_1 \to \infty} T_1 F(n\omega_1) = \lim_{T_1 \to \infty} T_1 \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \tilde{x}(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega_1 t} \, \mathrm{d}\, t$$

$$= \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \, \mathrm{d}\, t}$$

$X(\omega)$ 的其它表达方式

$X(j\omega)$或$X(e^{j\omega})$

$$X(\omega) \overset{def}{=} \lim_{f_1 \to 0} \frac{F(n\omega_1)}{f_1}$$

频谱密度的定义

$$x(t) = \lim_{T\to\infty} \tilde{x}(t) = \lim_{T\to\infty} \sum_{n=\infty}^{\infty} F_n e^{in\omega_1 t}$$

$$= \lim_{f_1\to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F(n\omega_1)}{f_1} e^{in\omega_1 t} f_1 \quad = \int_{-\infty}^{\infty} X(2\pi f)\, e^{i2\pi f t} df$$

$$\boxed{= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega}$$

$$\left.\begin{aligned} F(\omega) &= \mathscr{F}[f(t)] \\ f(t) &= \mathscr{F}^{-1}[F(\omega)] \end{aligned}\right\}$$

意义：任意非周期信号都可以分解为无数频率连续分布、振幅为的 $\frac{1}{2\pi}X(\omega)d\omega$ 复指数信号 $e^{i\omega t}$ 的线性组合。

可简记为

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$$

$$\begin{cases} X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{--i\omega t} dt \text{——傅立叶正变换} \\ x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega \text{——傅立叶逆变换} \end{cases}$$

说明：

实部　　虚部

1、复函数$F(\omega)=|F(\omega)|e^{i\phi(\omega)}=R(\omega)+iX(\omega)$

模　　相位

$$|F(\omega)|=\sqrt{R^2(\omega)+X^2(\omega)}$$ Even

$$\phi(\omega)=\arctan\frac{X(\omega)}{R(\omega)}$$ Odd

幅度频谱、幅度特性或幅度谱　　相位频谱、相位特性或相位谱

实信号　$f(t)=f_e(t)+f_o(t)$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}[f_e(t)+f_o(t)]\cdot[\cos\omega t-i\sin\omega t]\,dt$$

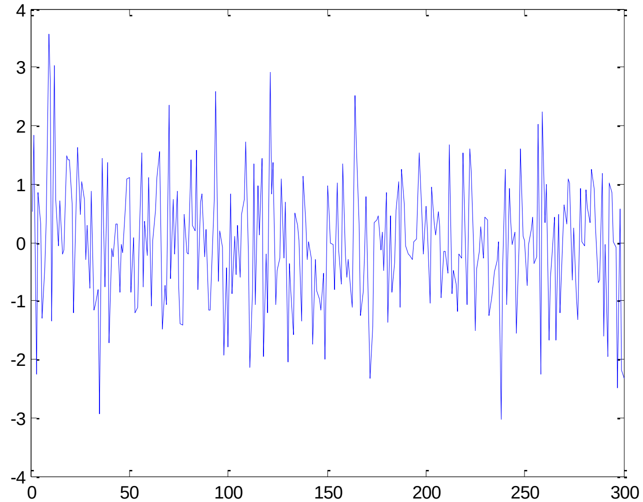
$$=2\int_{0}^{\infty}f_e(t)\cos\omega t\,dt-i2\int_{0}^{\infty}f_o(t)\sin\omega t\,dt$$

实部,偶函数　　虚部,奇函数

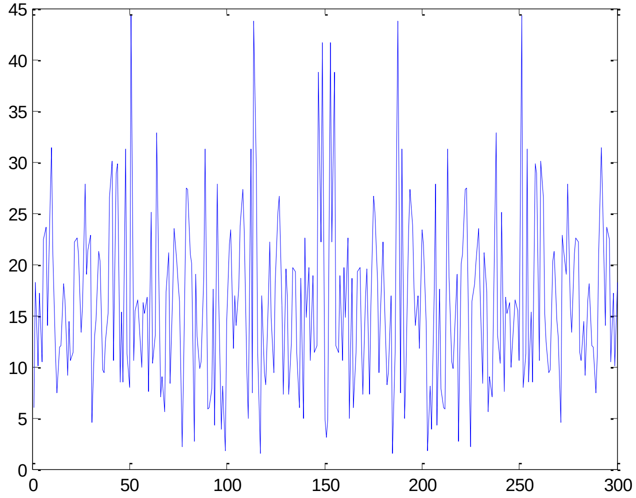
注意：f(t)是实信号

讨论理解每一步推导原理

时域

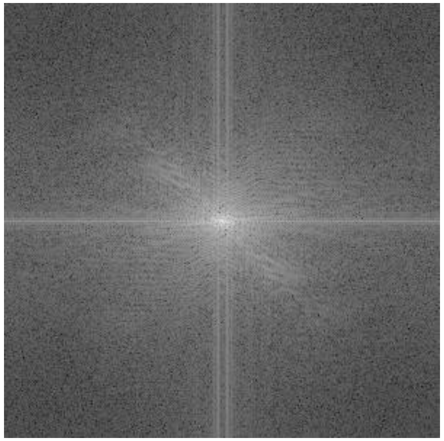


频率域



空间域

频率域

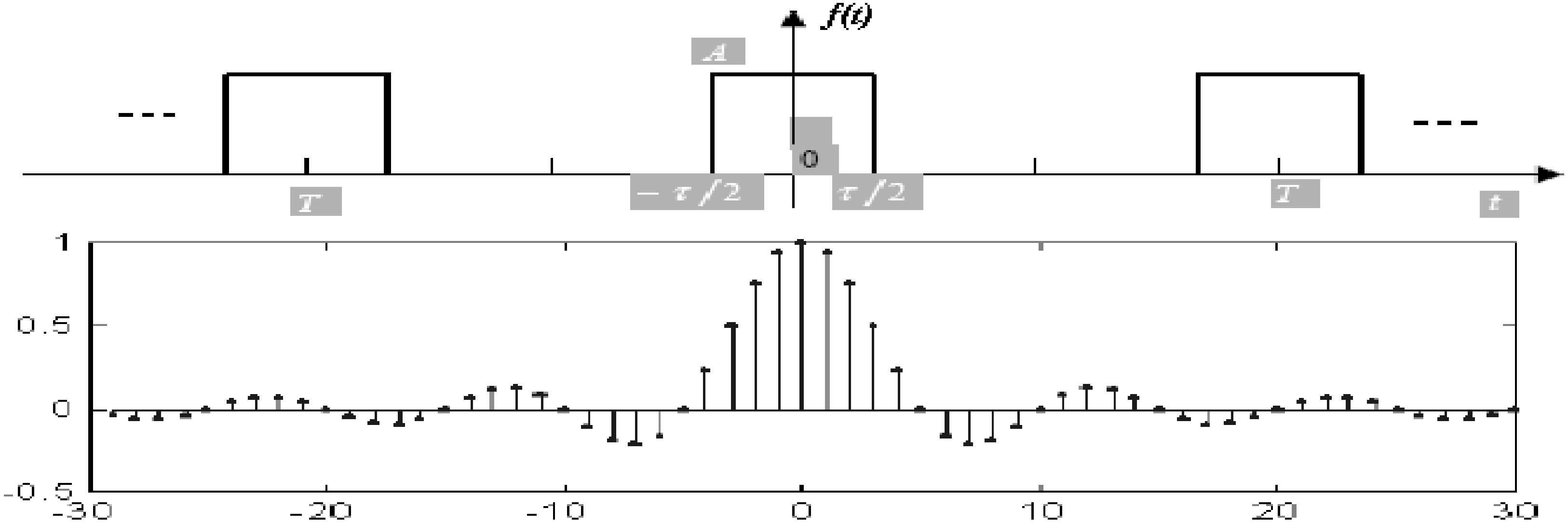


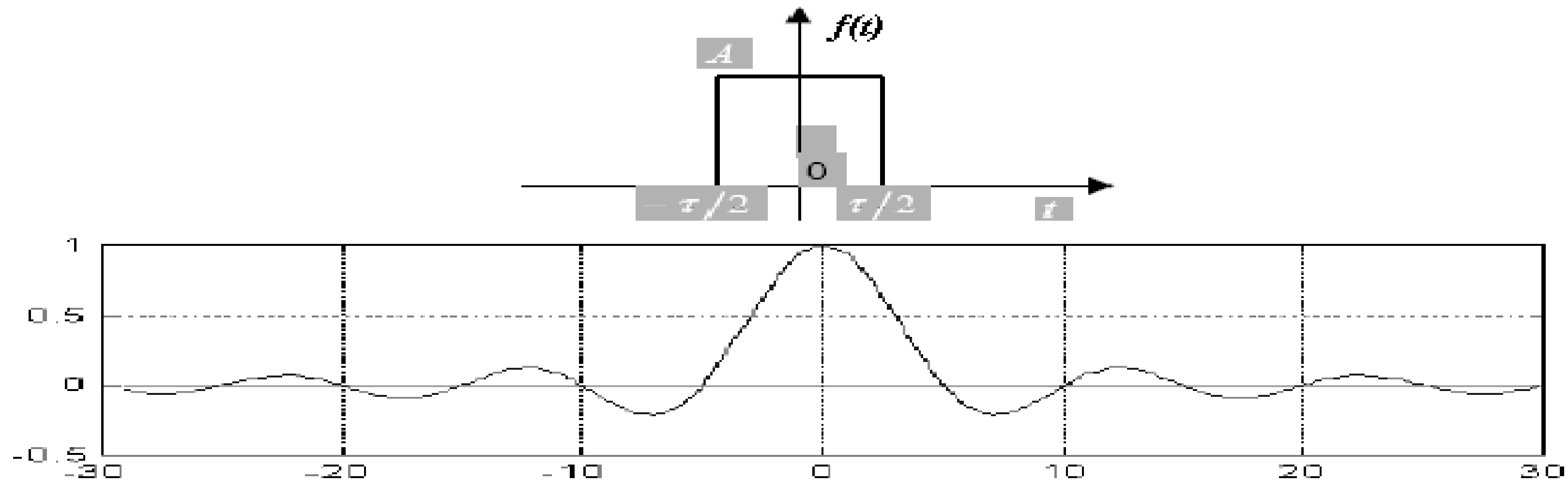
$$2、f(t) \xleftrightarrow{\text{充分条件：Dirichlet条件}} F(\omega)$$

3、物理意义：非周期信号可以分解成无数连续频率分布、振幅为 $\frac{1}{2\pi}F(\omega)d\omega$ 的复指数信号之线性组合。

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega$$

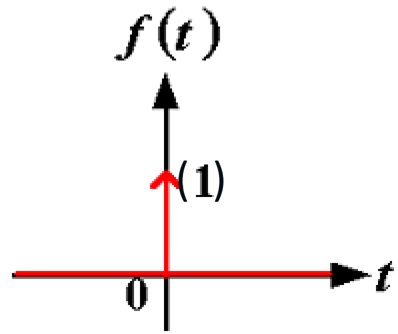
4、周期信号的频谱对应非周期信号频谱的样本；非周期信号的频谱对应周期信号频谱的包络。

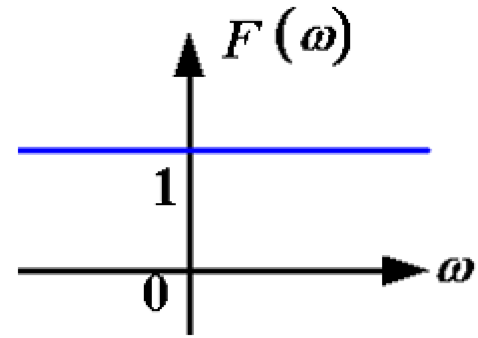




3.2.2 典型非周期信号的频谱

1、单位冲激信号





$$f(t) = \delta(t) \leftrightarrow \quad 1$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt \quad = 1$$

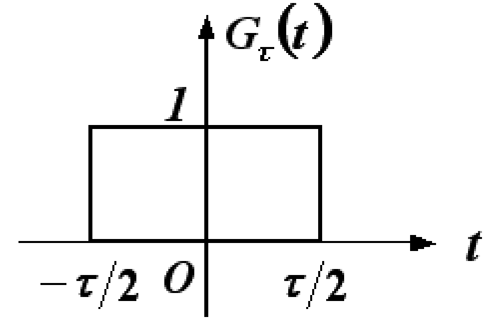
$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} d\omega$$

阅读p10~18，讨论学习典型非周期信号的频谱推导方法

尖脉冲干扰

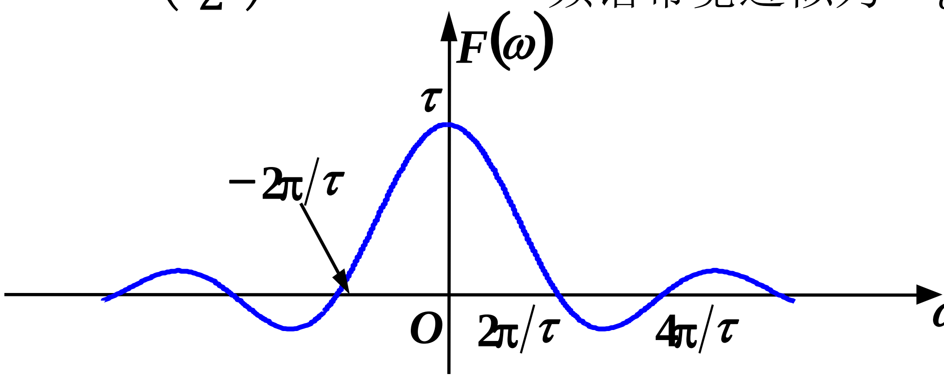
2、门函数Gτ(t)

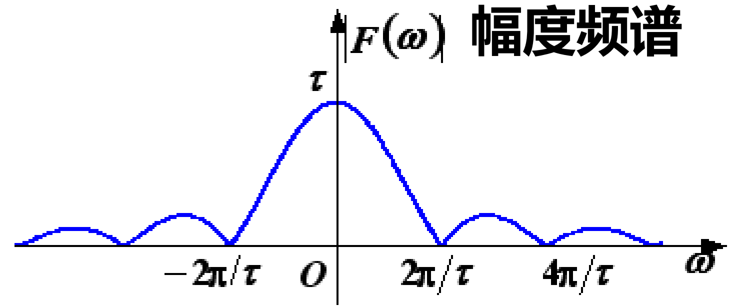
$$F(\omega)=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}\mathrm{e}^{-i\omega\,t}\,\mathrm{d}\,t=\frac{1}{-i\omega}\mathrm{e}^{-i\omega\,t}\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}=\frac{\tau}{\omega\frac{\tau}{2}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{i\omega\frac{\tau}{2}}-\mathrm{e}^{-i\omega\frac{\tau}{2}}}{2i}$$



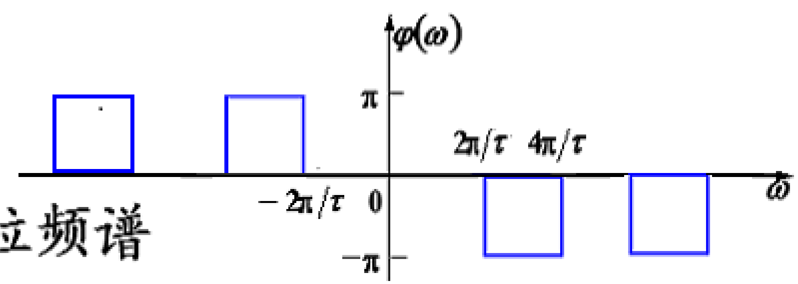
$$=\tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

频谱带宽近似为 $B_\omega=\dfrac{2\pi}{\tau}(rad/s)$ $B_f=\dfrac{1}{\tau}(Hz)$





幅度频谱

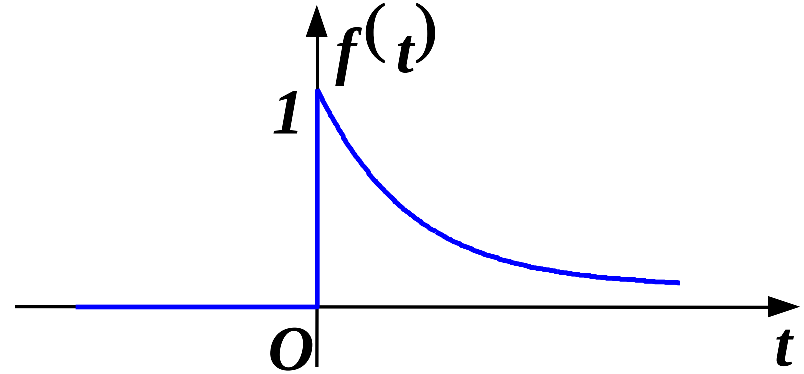


相位频谱

对相位频谱的说明：对于傅里叶变换为实数的相位频谱，由于相位为 π 或 $-\pi$ 均可以使幅值取反，所以在幅值为负值的频率范围内相位可以为 π 或 $-\pi$。但由于需要与相频特性为奇函数这一性质一致，需要在频率正半轴与负半轴分别取 $-\pi$ 和 π 。

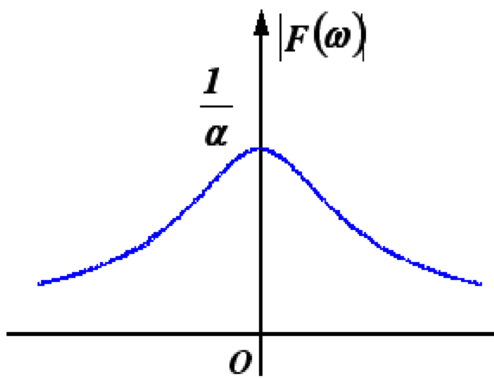
3、单边指数信号

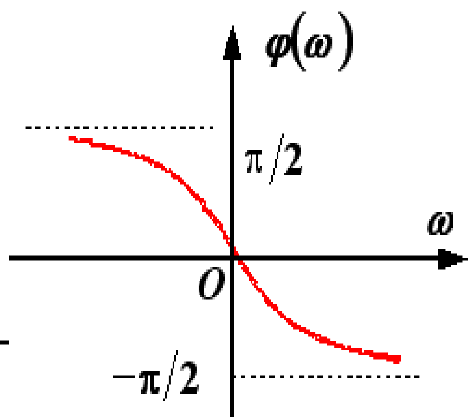
$$f(t) = e^{-\alpha t}u(t) \quad \alpha > 0$$



$$F(\omega) = \mathrm{F}[f(t)] = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(\alpha+i\omega)\,t}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{\alpha + i\omega}$$

$$e^{-\alpha t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha + i\omega}$$



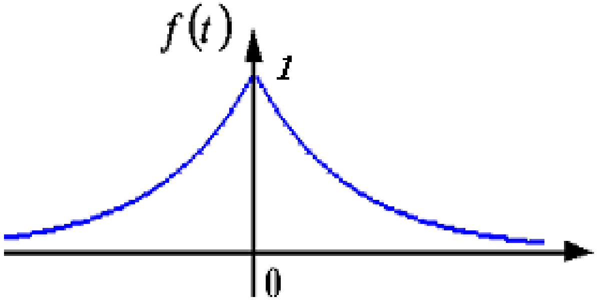


幅度频谱： $$|F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$$

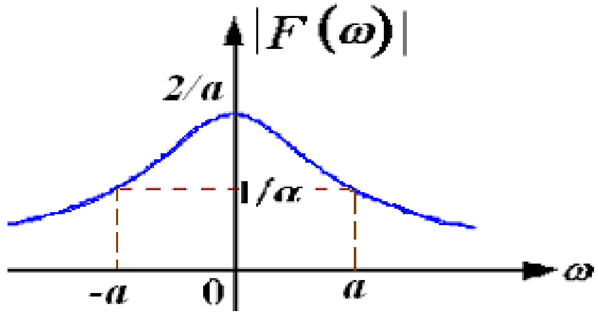
相位频谱： $$\phi(\omega) = -\arctan\frac{\omega}{\alpha}$$

4、双边指数信号

$$f(t) \overset{a>0}{=} e^{-a|t|} = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)$$



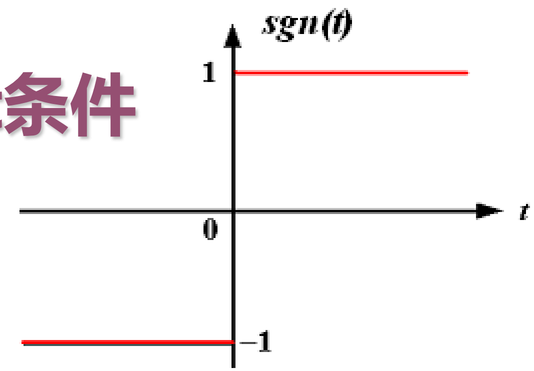
$$F(\omega) = \frac{1}{a + i\omega} + \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha\, t} e^{-i\omega\, t} dt$$



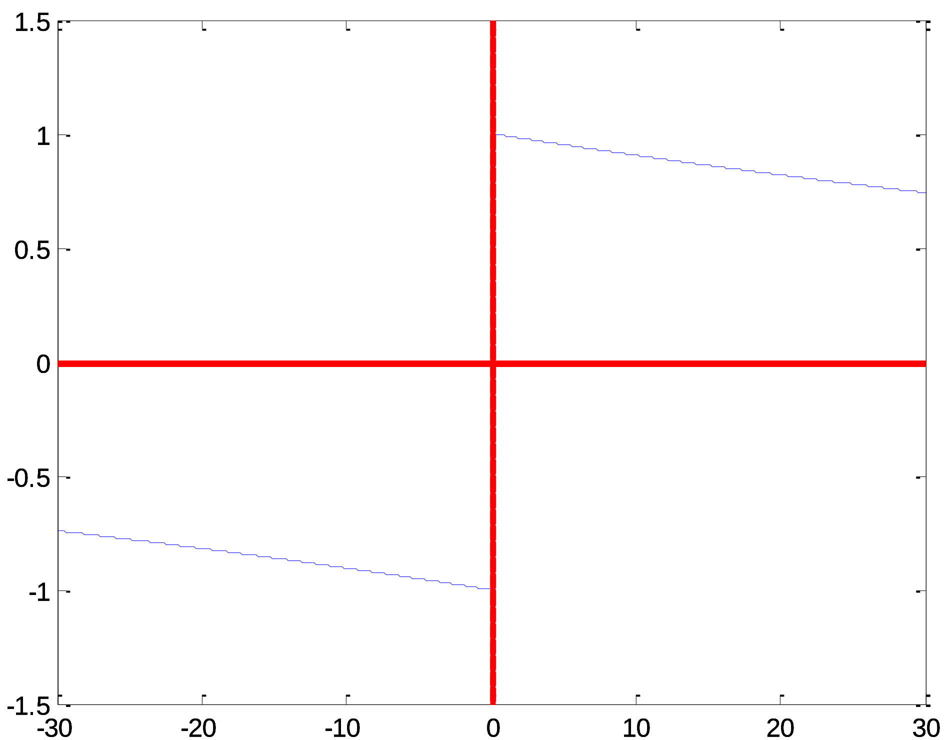
$$= \frac{1}{\alpha + i\omega} + \frac{1}{\alpha - i\omega} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

5、符号函数

不符合Dirichlet条件



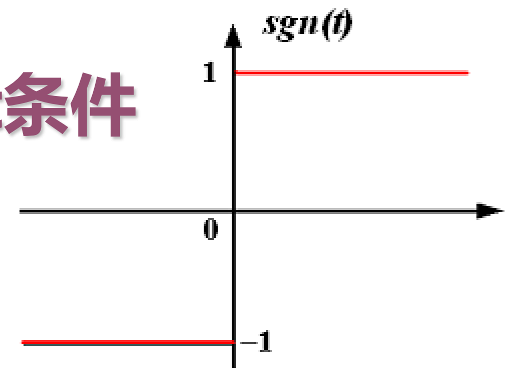
$$f(t) = \mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} +1 & (t > 0) \\ -1 & (t < 0) \end{cases}$$



$$e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)$$

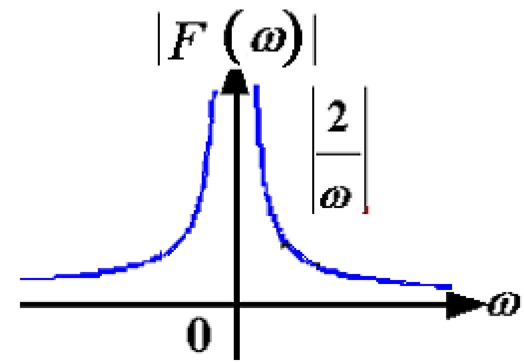
5、符号函数

不符合Dirichlet条件

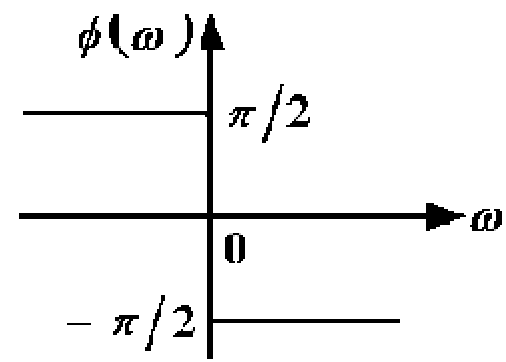


$$f(t) = \mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} +1 & (t > 0) \\ -1 & (t < 0) \end{cases}$$

$$= \lim_{a \to 0} [e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)] \quad (a > 0)$$



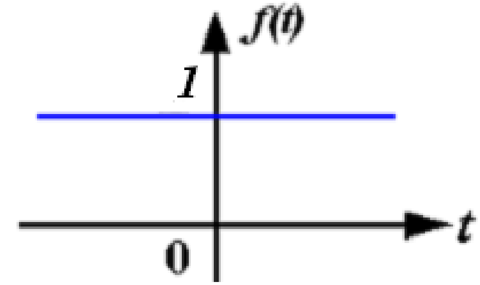
$$= \frac{2}{i\omega}$$



$$|F(\omega)| = \frac{2}{\omega} \qquad \phi(\omega) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} & (\omega > 0) \\ +\dfrac{\pi}{2} & (\omega < 0) \end{cases}$$

6、直流信号

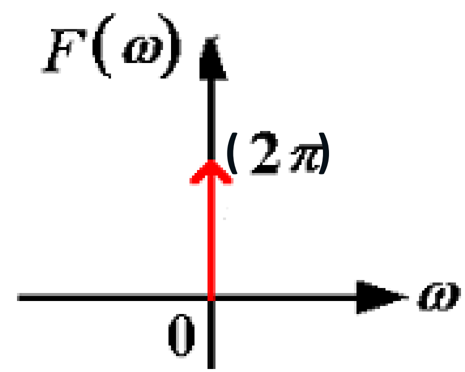
不符合Dirichlet条件



双边指数信号：$F(\omega)=\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$，当$\alpha$趋近于零时，$\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$

$=\begin{cases}0, & \omega\neq 0\\ \infty, & \omega=0\end{cases}$，为冲击信号，其强度为 $\lim\limits_{\alpha\to 0}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}d\omega=2\pi$

$$1\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$



或$F^{-1}[\delta(\omega)]=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega)e^{i\omega t}d\omega$

$$=\frac{1}{2\pi}$$

7、冲激函数的导数

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta\ '(t) f(t) dt = -f'(0)$$

$$\mathrm{F}[\delta'(\mathrm{t})] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(\mathrm{t}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\,\mathrm{t}} dt \quad = i\omega$$

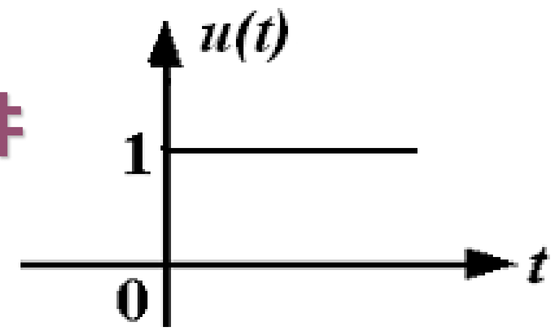
$$\delta'(t) \leftrightarrow i\omega \qquad \delta^{(n)}(t) \leftrightarrow (i\omega)^n$$

$$\mathrm{F}^{-1}[\delta'(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad = \frac{1}{2\pi}(-it) = \frac{t}{i2\pi}$$

$$t \leftrightarrow i2\pi\delta'(\omega) \qquad t^n \leftrightarrow i^n 2\pi \delta^{(n)}(\omega)$$

8、单位阶跃函数

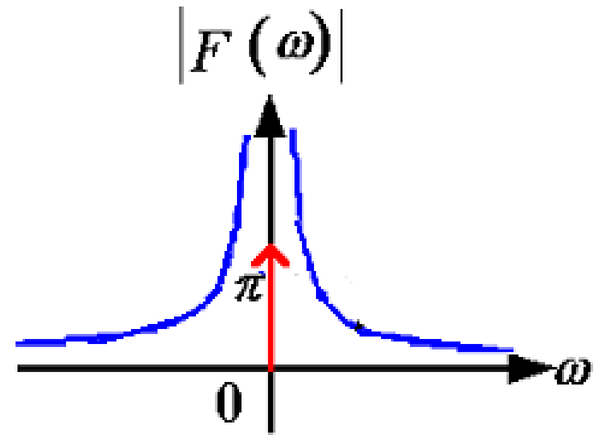
不符合Dirichlet条件



$$u(t) = u_e(t) + u_o(t)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)$$

$$\mathrm{F}[u(\mathrm{t})] \;= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}$$



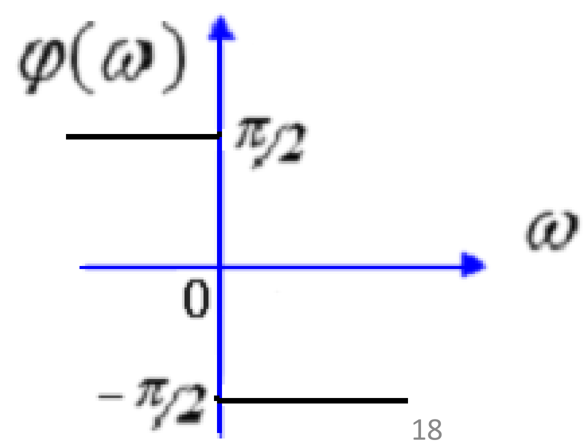


表 常用傅里叶变换对

编 号	$f(t)$	$F(\mathrm{j}\omega)$
1	$g_\tau(t)$	$\tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
2	$\tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\tau t}{2}\right)$	$2\pi g_\tau(\omega)$
3	$\mathrm{e}^{-\alpha t}\varepsilon(t)$, $\alpha>0$	$\frac{1}{\alpha+\mathrm{j}\omega}$
4	$t\mathrm{e}^{-\alpha t}\varepsilon(t)$, $\alpha>0$	$\frac{1}{(\alpha+\mathrm{j}\omega)^2}$
5	$\mathrm{e}^{-\alpha\|t\|}$, $\alpha>0$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$
6	$\delta(t)$	1
7	1	$2\pi\delta(\omega)$
8	$\delta(t-t_0)$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$
9	$\cos\omega_0 t$	$\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$
10	$\sin\omega_0 t$	$\frac{\pi}{\mathrm{j}}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$

续表

编　号	$f(t)$	$F(\mathrm{j}\omega)$
11	$\varepsilon(t)$	$\pi\delta(\omega)+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}$
12	$\mathrm{Sgn}(t)$	$\dfrac{2}{\mathrm{j}\omega}$，$F(0)=0$
13	$\dfrac{1}{\pi t}$	$-\mathrm{j}\ \mathrm{Sgn}(\omega)$
14	$\delta_T(t)$	$\Omega\delta_\Omega(\omega)$
15	$\sum\limits_{n=\infty}^{\infty} F_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}$	$2\pi\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} F_n\delta(\omega-n\Omega)$
16	$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-at}\varepsilon(t)$，$a>0$	$\dfrac{1}{(a+\mathrm{j}\omega)^n}$

记住该表中傅立叶变换对（**16**可以不记）

3.2.3 傅里叶变换的性质

1、线性性质

设 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

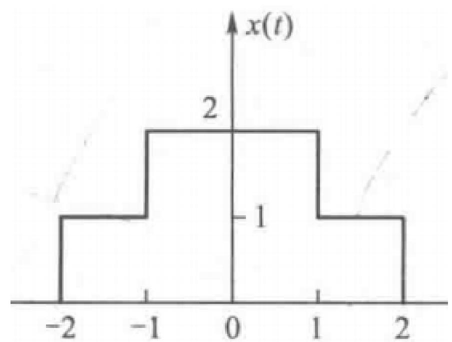
$$af_1(t) + bf_2(t) \leftrightarrow aF_1(\omega) + bF_2(\omega)$$

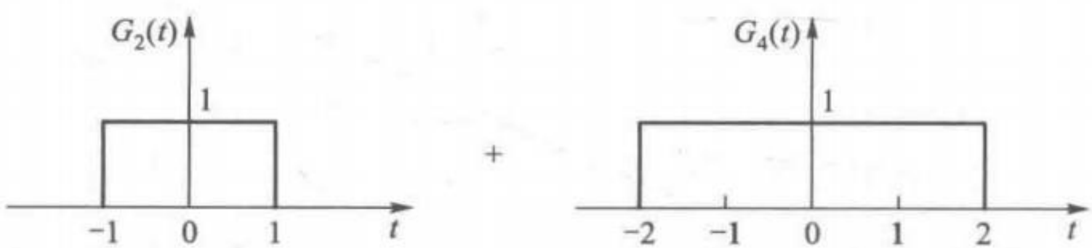
p140 例3-8 求图 3-27 所示信号 $x(t)$ 的频谱函数。

解：信号 $x(t)$ 可以分解为两个宽度不同的门函数

$$x(t) = G_2(t) + G_4(t)$$

$$X(\omega) = 2\mathrm{Sa}(\omega) + 4\mathrm{Sa}(2\omega)$$





学习本小节（3.2.3）及教材对应内容，讨论学习傅立叶变换性质的推导方法。回答利用该性质可以做什么？

2、对称性 $F(t) \leftrightarrow 2\pi\ f(-\omega)$

证明：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega$$

$$-t \to t \qquad f(-t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{-i\omega t} d\omega$$

$$t \leftrightarrow \omega \qquad f(-\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, e^{-i\omega t} dt$$

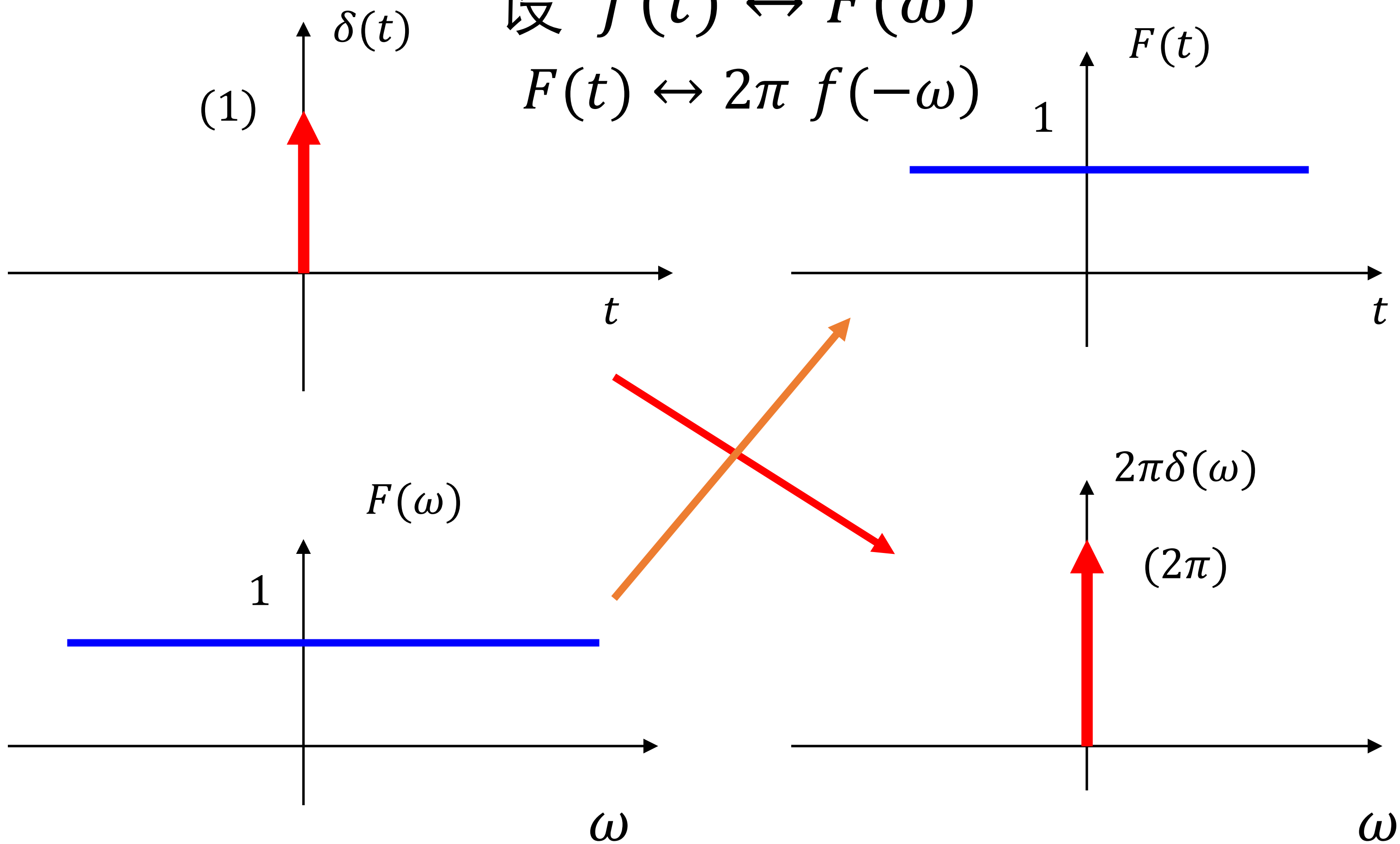
$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, e^{-i\omega t} dt$$

对称性举例

直流信号和冲激函数

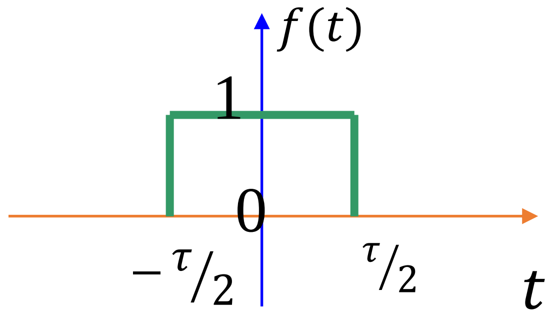
设 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

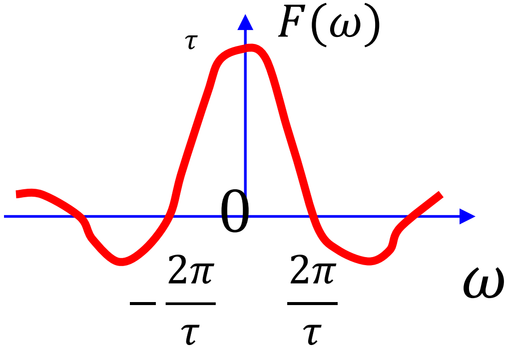
$F(t) \leftrightarrow 2\pi\, f(-\omega)$



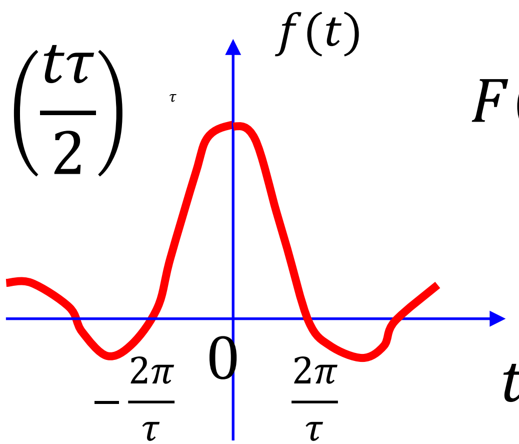
若f(t)为偶函数，则时域和频域完全对称

例：已知 $G_\tau(t)\longleftrightarrow\tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$

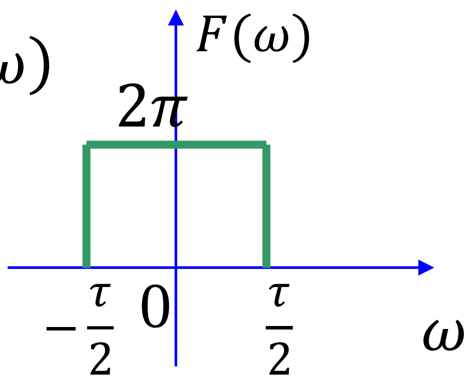




$\tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{t\tau}{2}\right)$



$F(t)\leftrightarrow 2\pi\, f(-\omega)$



$$\tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{t\tau}{2}\right)\longleftrightarrow 2\pi G_\tau(-\omega)\ =2\pi G_\tau(\omega)$$

例： 求FT： $f_1(t) = \dfrac{1}{t}.$

解：

$\because \quad sgn(t) \leftrightarrow \dfrac{2}{i\omega} \qquad \dfrac{2}{it} \leftrightarrow 2\pi\, sgn(-\omega)$

$\dfrac{1}{t} \leftrightarrow i\pi\, sgn(-\omega)$ 或 $\dfrac{1}{t} \leftrightarrow -i\pi\, sgn(\omega)$

3．尺度变换 $f(at) \leftrightarrow \dfrac{1}{|a|}F(\dfrac{\omega}{a})$ $(a \neq 0$常数$)$

证明： $$\mathrm{F}[f(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,\mathrm{d}\,t$$

当$a > 0$，令$x = at, t = \dfrac{x}{a}, \mathrm{d}\,t = \dfrac{1}{a}\mathrm{d}\,x$

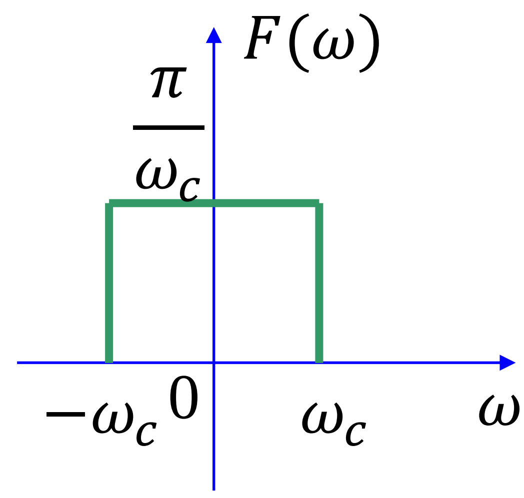
理解推导过程

$$\mathrm{F}[f(at)] = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\frac{\omega}{a}x}dx = \frac{1}{a}F(\frac{\omega}{a})$$

当$a < 0$，

$$\mathrm{F}[f(at)] = \frac{1}{a}\int_{\infty}^{-\infty} f(x)e^{-i\frac{\omega}{a}x}dx = \frac{1}{-a}F(\frac{\omega}{a})$$

例： 求FT: $\mathrm{Sa}(\omega_c t)$



已知 $\omega_c\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega_c t}{2}\right) \longleftrightarrow 2\pi G_{\omega_c}(\omega)$

$$\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega_c t}{2}\right) \longleftrightarrow \frac{2\pi}{\omega_c} G_{\omega_c}(\omega)$$

$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

$Sa(\omega_c t) = Sa\left(2\frac{\omega_c t}{2}\right)$ 根据尺度变换性质：这里a=2

$$\longleftrightarrow \frac{2\pi}{|2|\omega_c} G_{\omega_c}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\pi}{\omega_c} G_{\omega_c}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\pi}{\omega_c} G_{2\omega_c}(\omega)$$

讨论

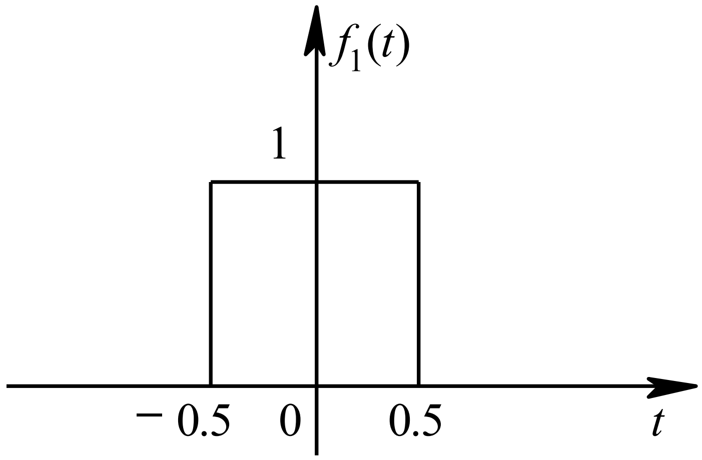
1. $a=-1$时，$\quad f(-t)\leftrightarrow F(-\omega)$

2. $a>1$时 **时域压缩** $\longrightarrow$ $\begin{cases} \text{频域扩展a倍} \\ \text{幅值下降为原来的1/a倍} \end{cases}$

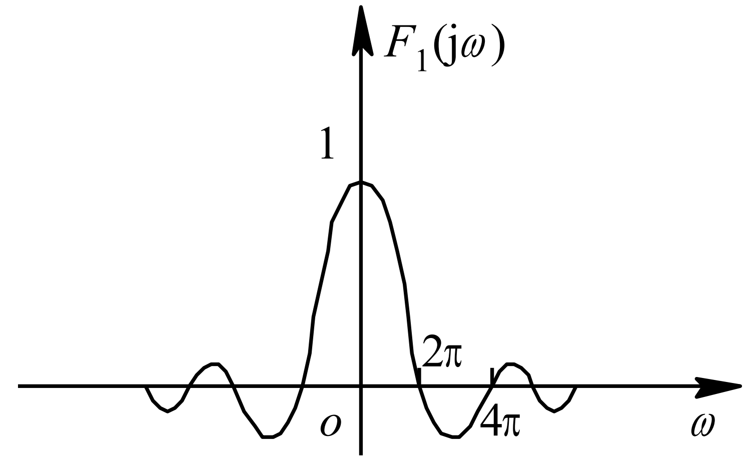
$$f(at)\leftrightarrow \frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a}) \quad (a\neq 0\text{常数})$$

compressed in time $\Leftrightarrow$
stretched in frequency

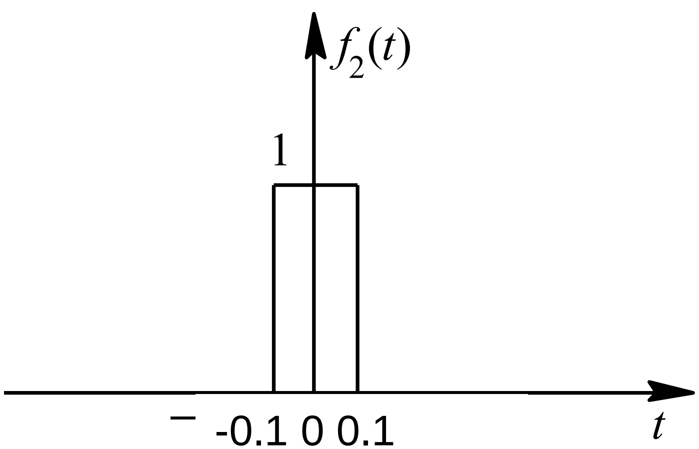
尺度
变换


$f_1(t)$
1
-0.5
0
0.5
t

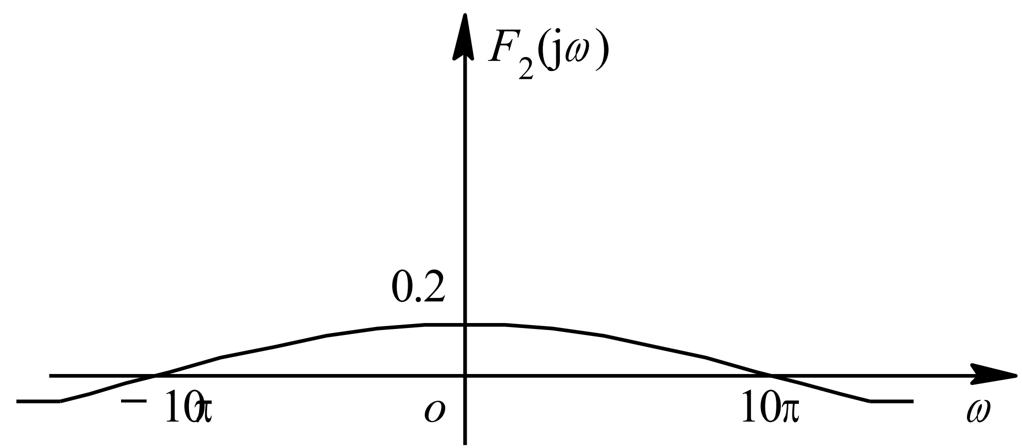
(a)


$F_1(j\omega)$
1
2π
o
4π
ω

(b)


$f_2(t)$
1
−
-0.1 0 0.1
t

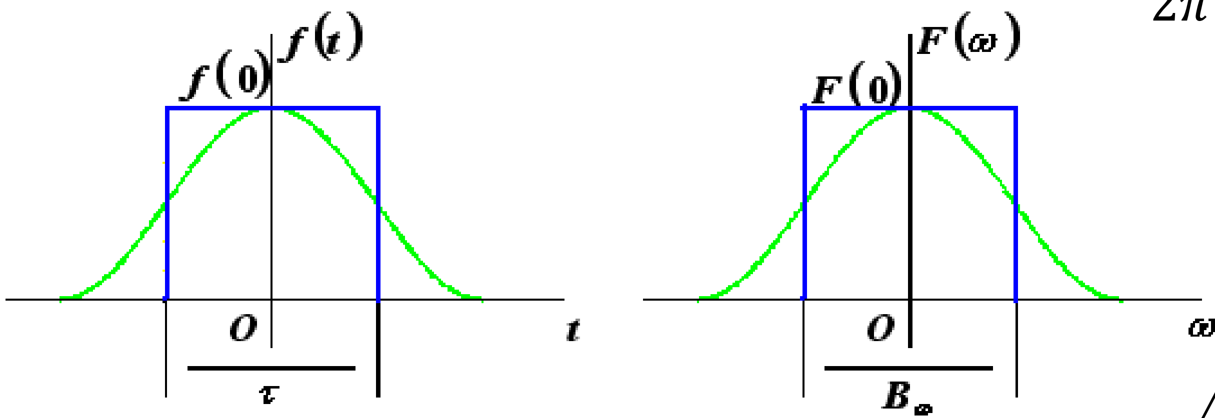
(c)


$F_2(j\omega)$
0.2
-10π
o
10π
ω

(d)

3．等效脉冲宽度与等效频带宽度

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\,e^{i\omega t}d\omega$$



$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,\mathrm{d}\,t\ \underline{\text{找一合适的}\tau}\quad f(0)\tau\ =F(0)$$ f(t)波形覆盖的面积

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\,\mathrm{d}\,\omega\ \underline{\text{找一合适的}B_\omega}\quad F(0)B_\omega\ =2\pi f(0)$$

$$B_\omega\ =2\pi\frac{f(0)}{F(0)}=\frac{2\pi}{\tau}\qquad B_f\ =\frac{f(0)}{F(0)}=\frac{1}{\tau}$$

等效脉冲宽度τ与占有的等效带宽B_ω成反比。

(Pulse width in t)•(Pulse width in *f*)=1 **Uncertainty Principle!**