



连续时间系统——微分方程描述

变换域分析:拉氏变换法

离散时间系统——差分方程描述

「时域分析 { 经典解法: 齐次解+特解 工程解法: 零输入响应+零状态响应

变换域分析:z变换法

学习:注意与连续系统分析方法上的联系、区别与对比。

2.4.1 离散线性系统的数学模型

例2-18 某人第n个月初存款x(n)元,月息a,写出第n个月本利和的数学关系(按复利计)。

若第n-1月时的总存数 y(n-1),则第n个月本利和y(n)为:

$$y(n) = y(n-1) + ay(n-1) + x(n)$$

 $y(n) - (a+1)y(n-1) = x(n)$

形如

$$y(n+2)-3y(n+1)+y(n)=0$$

前向差分方程,又称增序差分方程

形如

$$y(n) - (a+1)y(n-1) = x(n)$$

后向差分方程,又称减序差分方程

对于线性常系数差分方程,各序列号同时增加或减少同样的数目,方程描述系统的输入输出关系保持不变。

离散时间系统的一般模型:

$$y(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + \dots + a_N y(n-N)$$

$$= b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \dots + b_M x(n-M) = \sum_{j=0}^{M} b_j x(n-j)$$

$$\sum_{j=0}^{N} a_j y(n-j) = \sum_{j=0}^{M} b_j x(n-j) \qquad a_0 = 1$$

差分方程的阶数为响应序号的最高值与最低值之差。

常系数线性差分方程时域解,也即对单输入-单输出线性时不变离散系统的分析方法:包括迭代法、经典法、零状态响应的卷积解法(时域零输入零状态法)。

2.4.2 迭代法

特点:概念清晰

方法简单

易于编程(极大优势)

但一般不易得到差分方程解析形式的(闭合)解



例2-20: 若描述某系统的差分方程为

$$y(n) + 3y(n-1) + 2y(n-2) = x(n)$$

已知初始条件y(0)=0,y(1)=2,激励x(n)=2nu(n),求y(n)

##:
$$y(n) = -3y(n-1) - 2y(n-2) + x(n)$$

 $y(2) = -3y(1) - 2y(0) + x(2) = -2$
 $y(3) = -3y(2) - 2y(1) + x(3) = 8 \dots$

2.4.3 经典解法



阅读p7-13及教材对应内容,比较 离散线性系时不变统经典解法与连续 线性时不变系统经典解法(上一节 p7~12)的异同。

$$\sum_{i=0}^{N} a_i y(n-i) = \sum_{j=0}^{M} b_j x(n-j)$$
 的异同。 $a_0 = 1$

与微分方程经典解类似, $y(n) = y_h(n) + y_p(n)$ 齐次解 特解

差分方程对应齐次方程形式:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i y(n+i) = 0 \, \text{Div} \quad \sum_{i=0}^{N} a_i y(n-i) = 0$$

前向差分方程,或增序差分方程

后向差分方程,或减序差分方程

满足这一方程的解, 即为齐次解



求齐次解步骤:

- 1. 写特征方程, 求特征根, 写出齐次解形式
- 2. 由激励函数的形式写出特解通式,代入原 方程求出待定系数
- 3. 写出原方程求解的一般形式(齐次解+特解)
- 4. 代入全解边界条件,确定齐次解待定系数



1. 齐次解

齐次方程:
$$y(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + \dots + a_N y(n-N) = 0$$

则
$$\lambda^{N} + a_{1}\lambda^{N-1} + ... + a_{N} = 0$$
 或 $1 + a_{1}\lambda^{-1} + ... + a_{N}\lambda^{-N} = 0$ 为差分方程的**特征方程**

进行因式分解: $(\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)\cdots(\lambda - \alpha_N) = 0$ α_i 为差分方程的**特征根,**也叫系统的自然频率(固有频率)。



一阶差分方程的齐次解y(n)的形式为:

$$y(n) + \alpha_i y(n-1) = 0 \qquad -\alpha_i = \frac{y(n)}{y(n-1)}$$

y(n)为一个公比为 $-\alpha_i$ 的等比级数

$$y_h(n) = C_i(-\alpha_i)^n$$
 - α_i 为该一阶系统的特征根, C_i 是待定系数。

当N阶系统的特征根全部为一阶根时,若 λ_i 是特征根,则齐次解的形式为:

$$y_h(n) = \sum_{i=1}^N C_i \lambda_i^n$$

$$y_h(t) = (A_1 + A_2 t + \dots + A_m t^{m-1}) e^{\lambda_1 t} + \sum_{i=m+1}^N A_i e^{\lambda_i t}$$
 若 λ_1 为m阶重根,则齐次解的形式为:
$$y_h(t) = \sum_{i=1}^N A_i e^{\lambda_i t}$$

若λ₁为m阶重根,则齐次解的形式为:

$$y_h(n) = (C_1 + C_2 n + C_3 n^2 + \dots + C_m n^{m-1}) \lambda_1^n + \sum_{i=m+1}^N C_i \lambda_i^n$$



2. 特解: 线性时不变系统输入与输出有相同的形式

输入	特解 $y_p(n)$	
常数	\boldsymbol{B}	
a^n	Ba^n Bn^ra^n	a 不等于特征根 a是一个r 阶特征根
n^k	$B_0 + B_1 n + \dots + B_k n^k$ $(B_0 + B_1 n + \dots + B_k n^k) n^r$	所有特征根均不等于1 有r阶等于1的特征根
$sin \beta n \not\equiv cos \beta $	$B_0 \sin \beta n + B_1 \cos \beta n$	$e^{\pm jeta}$ 不等于特征根

将特解带入原方程, 求得待定系数



3.全解 $y(n) = y_h(n) + y_p(n)$

代入完全解边界条件获得齐次解待定系数。

(边界条件是激励时刻及以后的系统状态)

若激励为0时刻加入,边界条件指y(0),y(1),...,y(N-1)。

全解只对n>=0有效。

算法: 若特征根全部为一阶根,则: $y_h(n) = \sum_{i=1}^{N} C_i \alpha_i^n$

$$y(0) = C_1 + C_2 + \dots + C_N + y_p(0)$$

$$y(1) = C_1 \alpha_1 + C_2 \alpha_2 + \dots + C_N \alpha_N + y_p(1)$$

$$\vdots$$

$$y(N-1) = C_1 \alpha_1^{N-1} + C_2 \alpha_2^{N-1} + \dots + C_N \alpha_N^{N-1} + y_p(N-1)$$

联立求得待定系数 C_i 。



说明:

自由响应,即对应齐次解:由初始状态和激励共同决定解的系数;换句话说,齐次解的待定系数由完全解的边界条件确定。所以,对于激励为零的差分方程,自由响应就是零输入响应。

完全解的边界条件: 当激励在n=0时加入时,完 全解的边界条件指y(0), y(1)....

p85 例2-21

求差分方程 y(n) - 4y(n-1) + 3y(n-2) = x(n) 的全解,其中 $x(n) = 2^n u(n)$,边 界条件为 $y(0) = -\frac{1}{2}$, y(1) = 0。

解:① 齐次解。

齐次方程为

其特征方程可写为

特征根为

所以齐次解的形式为

y(n) - 4y(n-1) + 3y(n-2) = 0 $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = 3$

 $y_h(n) = A_1 + A_2 3^n$

此处无u(n)

② 特解。

根据表 2-7 可知其特解形式为

$$y_{p}(n) = B2^{n} \quad (n \geqslant 0)$$

将特解代入系统差分方程,比较方程两边的对应项,则有

$$B2^{n} - 4B2^{n-1} + 3B2^{n-2} = 2^{n}$$

解得 B = - 4, 则特解为

$$y_n(n) = -4 \cdot 2^n$$
 ($n \ge 0$) 此处无u(n)

比较p73例2-11,形式一致

③ 全解的形式为

$$y(n) = y_b(n) + y_p(n) = A_1 + A_2 - 4 \cdot 2^n \qquad (n \ge 0)$$
代人边界条件 $y(0) = -\frac{1}{2}$ 、 $y(1) = 0$ 有
$$A_1 + A_2 - 4 \times 1 = -\frac{1}{2}$$

$$A_1 + 3A_2 - 4 \times 2 = 0$$
公解得
$$A_1 = \frac{5}{4} \quad A_2 = \frac{9}{4}$$

由此解得

所以其全解为

$$y(n) = \frac{5}{4} + \frac{9}{4}3^{n} - 4 \cdot 2^{n} \qquad (n \ge 0)$$

因为激励在n=0时刻加入,且输出的最高阶与输入的最高阶相同,所以边界条件为 y(0), y(1) y(n) - 4y(n-1) + 3y(n-2) = x(n)

如果差分方程为 y(n+2)-4y(n+1)+3y(n)=x(n)

激励仍然在n=0时刻加入,完全响应的边界条件为

例 2-22 已知 y(n) - 2y(n-1) = 2u(n), y(-1) = 0, 求响应 y(n)。

解:显然特征根 $\lambda = 2$,齐次解形式为

$$y_h(n) = A(2)^n$$

由激励写出特解 $y_p(n) = B$, 代回原方程得 $y_p(n) = -2$, 写出全响应为

$$y(n) = A(2)^n - 2$$

由于 y(-1) = 0 是激励加入之前的边界条件,由迭代法可递推写出 y(0) = 2u(0) + 2y(0-1) = 2 + y(-1) = 2 (全解边界条件)

$$A - 2 = 2$$
 $A = 4$
 $y(n) = (4 \times 2^{n} - 2) u(n) = 2(2^{n+1} - 1) u(n)$



反转课堂

2.4.4 零输入响应和零状态响应

1. 零输入响应

激励为零,由系统的非零状态产生的响应:

$$y_{zi}(n) \xrightarrow{\mathbb{R} \cap \mathbb{R}} y_h(n)$$

无重根时:
$$y_{zi}(n) = \sum_{i=1}^{N} C_i \alpha_i^n$$

若 α_1 为r阶重根,则解为:

$$y_{zi}(n) = (C_1 + C_2 n + C_3 n^2 + \dots + C_r n^{r-1})\alpha_1^n + \sum_{i=r+1}^N C_i \alpha_i^n$$

与齐次解的不同在于:求待定系数 C_i 需要代入激励加入前的系统初始状态。

激励加入前的系统初始状态的判断方法:



系统差分方程为 y(n+2) + y(n+1) + y(n) = u(n), 试确定系统的初始状态。

因为激励在n=0时刻加入,且输出的最高阶为y(2),所以激励加入之前的边界条件为y(1), y(0)。

系统差分方程为 y(n) + y(n-1) + y(n-2) = u(n), 试确定系统的初始状态。

因为激励在n=0时刻加入,且输出的最高阶为y(0),所以激励加入之前的边界条件为y(-1), y(-2)。

激励加入前的系统初始状态的判断方法:

判断方法总结:

- 1、先获得激励加入的前一时刻a; (例2-23、24中a=-1)
- 2、再将a替代比例是最高阶中的n,代数结果即是零输入响应的边界条件(激励加入前的系统状态)。(例2-23中响应最高阶y(n+2),由a=-1替代n,得a+2=-1+2=1,即y(1)是加激励前的时刻的状态,y(1)、y(0)是零输入响应的边界条件;同理例2-24中y(-1)、y(-2)是零输入响应的边界条件。)

零输入响应 与 自由响应 的关系: (仔细理解下面的结论)

初始状态为零时,零输入响应为零,但自由响应不一定为零。 激励为零时,自由响应就是零输入响应。

零输入响应是自由响应的一部分。

2. 冲激响应和阶跃响应

单位脉冲响应h[n]是激励为单位脉冲序列 $\delta(n)$ 作用于离散时间LTI系统所产生的零状态响应。

单位阶跃响应g[n]是激励为单位阶跃序列u(n)作用于离散时间LTI系统所产生的零状态响应。

因为
$$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$$

依据LTI系统性质:

$$h(n) = g(n) - g(n-1)$$

$$u(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta(m)$$

$$\mathrm{u}(\mathrm{n}) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k)$$

$$g[n] = \sum_{m = -\infty}^{n} h[m]$$
$$g(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(n-k)$$



求冲激响应的方法:

一、差分方程阶数N=0,则式2-57

$$y(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + \dots + a_N y(n-N)$$

$$= b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \dots + b_M x(n-M) = \sum_{j=0}^{M} b_j x(n-j)$$

写作:
$$y(n) = \sum_{j=0}^{M} b_j x(n-j)$$

对应的冲激响应:
$$h(n) = \sum_{j=0}^{M} b_j \delta(n-j)$$

则冲激响应h(n)由有限个 $\delta(n)$ 的移位构成,称为有限冲击响应(FIR)滤波器

二、差分方程阶数 $N \neq 0$,则式2-57写作_M

$$h(n) + a_1 h(n-1) + \dots + a_N h(n-N) = \sum_{j=0}^{M} b_j \delta(n-j)$$

若输入仅有一个 $\delta(n)$ 时,原方程化简为:

$$h_0(n) + a_1 h_0(n-1) + \dots + a_N h_0(n-N) = \delta(n)$$

由于n>0时,输入为0

输入为0 γ 所以 $h_0(n)$ 形式同齐次解。

无重根时: $h_0(n) = \sum_{i=1}^N A_{h_i} (\lambda_i)^n$

注意:连续系统求 冲激响应要加u(t)

若 λ_1 为**r**阶重根: $h_0(n) = (A_{h_1} + A_{h_2}n + ... + A_{h_r}n^{r-1})\lambda_1^n + \sum_{i=r+1}^N A_{h_i}\lambda_i^n$

求待定系数: A_{h_i} 需要N个边界条件

n=0时,
$$h_0(0) + a_1 h_0(-1) + \dots + a_N h_0(-N) = \delta(0) = 1$$

因为: $h_0(i) = 0$ i = -1, -2, ..., -N + 1 所以: $h_0(0) = 1$

N个边界条件(固定),可得到待定系数 A_{h_i}

注意:将n<1代入求系数时, $h_0(n)$ 后面不加u(n),但最后 $h_0(n)$ 要加u(n).

Shandong University YANG MINGQIANG



3、通式求系统的冲激响应

$$h(n) + a_1 h(n-1) + \dots + a_N h(n-N) = \sum_{j=0}^{M} b_j \delta(n-j)$$

曲2知:
$$\delta(n) \Rightarrow h_0(n)$$

$$\delta(n-j) \Rightarrow h_0(n-j)$$

$$b_j \delta(n-j) \Rightarrow b_j h_0(n-j)$$

$$\sum_{j=0}^{M} b_j \delta(n-j) \Rightarrow \sum_{j=0}^{M} b_j h_0(n-j)$$

$$\therefore h(n) = \sum_{j=0}^{M} b_j h_0(n-j)$$

结论: 先求单一冲激激励的响应,再根据 LTI系统性质,得到 系统的冲激响应。该 方法称为间接法。

注意,此处与连续系 统求冲激响应的不同;

t = 0 时刻微分方程左 右两端的 $\delta(t)$ 及各阶 导数应该持平衡状态。

注意:此处无u(n)

例 2-25 已知系统的数学模型为

$$y(n) - 5y(n-1) + 6y(n-2) = x(n) - 3x(n-2)$$

求系统的单位冲激响应 h(n)。

解:由间接法,设单一 $\delta(n) \rightarrow h_0(n)$,则有

$$\begin{cases} h_0(n)-5h_0(n-1)+6h_0(n-2)=\delta(n)\\ h_0(0)=1,h(-1)=0 \end{cases}$$
特征根为 $\lambda_1=2,\,\lambda_2=3,\,$ 所以 $h_0(n)=A_12^n+A_23^n,$ 代入上述边界条件有

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1 \\ \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{3}A_2 = 0 \end{cases}$$
 if
$$A_1 = -2$$

$$A_2 = 3$$

所以 $h_0(n) = (3^{n+1} - 2^{n+1})(u(n))$, 依据方程右端的形式及系统特性有

此处加u(n) 注意:

第五章z变换同样可解

3. 零状态响应



解释本页每一步推导的依据

如果 $\delta(k) \rightarrow h(k)$

$$\delta(k-i) \rightarrow h(k-i)$$

 $x(i)\delta(k-i) \rightarrow x(i)h(k-i)$

$$x(k) = x(k) * \delta(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i) \delta(k-i) \to \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i) h(k-i) = x(k) * h(k)$$

$$y_{zs}(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)h(k-i) = x(k)*h(k)$$

如果x(k)是因果函数,且系统为因果系统,则

$$y_{zs}(k) = \sum_{i=0}^{k} x(i)h(k-i)$$

系统的全响应为:

$$y(k) = y_{zi}(k) + y_{zs}(k)$$



4. 全响应不同分解方法之间的关系



如果特征根均为单根,则

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n)$$

由该公式说明自由响应、受迫响 应、零输入响应、零状态响应之 间的包容关系。

$$= \sum_{i=1}^{N} A_i \lambda_i^n + y_p(n) = \sum_{i=1}^{N} A_{zii} \lambda_i^n + \sum_{i=1}^{N} A_{zsi} \lambda_i^n + y_p(n)$$

$$= y_{zi}(n) + y_{zs}(n)$$

系统的零输入响应是自由响应的一部分; 受迫响应是零状态响应的一部分; 零输入响应和零状态响应中的齐次解部分之和是自由响应。

例2-26 教材p90 找出其中一处错误

例 2-26 离散线性时不变系统用下面差分方程来描述

$$y(n+2) - 0.7y(n+1) + 0.1y(n) = 7x(n+2) - 2x(n+1)$$

已知该系统的输入为x(n) = u(n); 边界条件为y(0) = 9, y(1) = 13.9, 求系统的零输入响应与零状态响应,并指出全响应中的自由响应与强迫响应、暂态响应与稳态响应分量。

解:根据前面的讨论,将所有序列序号同时减2,将前向差分方程转换为后向差分方程后再做分析。

$$y(n) - 0.7y(n-1) + 0.1y(n-2) = 7x(n) - 2x(n-1)$$

① 求系统的特征根(自然频率),由差分方程写出

$$\lambda^{2} - 0.7\lambda + 0.1 = 0$$

$$(\lambda - 0.5)(\lambda - 0.2) = 0$$

$$\lambda_{1} = 0.5 \quad \lambda_{2} = 0.2$$

分解因式得

所以有

② 判断系统的初始状态。将 x(n) = u(n) 代入方程,有

$$y(n) - 0.7y(n-1) + 0.1y(n-2) = 7u(n) - 2u(n-1)$$

可知 n = 0 时加入了激励,初始状态应为 y(-1)、y(-2) 的一组数据,题中所给的是全解的边界条件,所以用倒递推法求初始状态。 由0,1推至-1、-2

$$n = 1$$
 时, $y(1) - 0.7y(0) + 0.1y(-1) = 7u(1) - 2u(0)$,得 $y(-1) = -26$ 。
 $n = 0$ 时, $y(0) - 0.7y(-1) + 0.1y(-2) = 7u(0) - 2u(-1)$,得 $y(-2) = -202$ 。

③ 求零输入响应。

$$y_{ii}(n) = y_h(n) = A_1(0.5)^n + A_2(0.2)^n$$
 此处不加u(n)

代入初始状态(零输入响应的边界条件)得

$$\begin{cases} y(-1) = A_1 \cdot 0.5^{-1} + A_2 \cdot 0.2^{-1} = -26 \\ y(-2) = A_1 \cdot 0.5^{-2} + A_2 \cdot 0.2^{-2} = -202 \end{cases}$$

求出

$$A_1 = 12$$
 $A_2 = -10$

所以得

$$y_{xi}(n) = [12 (0.5)^n - 10 (0.2)^n] u(n)$$

此处加u(n)

④ 求系统的单位冲激响应 h(n)。

设等式右端为单一激励 δ(n) 时,方程改写为

$$h_0(n) - 0.7h_0(n-1) + 0.1h_0(n-2) = \delta(n)$$

于是

$$h_0(n) = B_1 (0.5)^n + B_2 (0.2)^n$$

此处不加u(n)

代人固定边界条件求系数有

$$\begin{cases} h_0(0) = B_1 + B_2 = 1 \\ h_0(-1) = 2B_1 + 5B_2 = 0 \end{cases}$$

求得

$$B_1 = \frac{5}{3}$$
 $B_2 = -\frac{2}{3}$

所以

$$h_0(n) = \left[\frac{5}{3} (0.5)^n - \frac{2}{3} (0.2)^n\right] u(n)$$

此处加u(n)

根据系统的线性时不变性质,激励为 78(n) - 28(n-1) 时的响应为

$$h(n) = 7[h_0(n)] - 2[h_0(n-1)]$$

$$= 7\left[\frac{5}{3}(0.5)^n - \frac{2}{3}(0.2)^n\right] u(n) - 2\left[\frac{5}{3}(0.5)^{n-1} - \frac{2}{3}(0.2)^{n-1}\right] u(n-1)$$

$$= 7\delta(n) + [2.5 \times (0.5)^{n-1} + 0.4 \times (0.2)^{n-1}] u(n)$$

$$= [5(0.5)^n + 2(0.2)^n] u(n)$$

⑤ 求 x(n) = u(n) 时的零状态响应。

$$y_{ss}(n) = u(n) * h(n) = \sum_{m=0}^{n} [5 (0.5)^{m} + 2 (0.2)^{m}]$$

$$= \left[5 \frac{1 - (0.5)^{n+1}}{1 - 0.5} + 2 \frac{1 - (0.2)^{n+1}}{1 - 0.2}\right] u(n)$$

$$= [12.5 - 5 (0.5)^{n} - 0.5 (0.2)^{n}] u(n)$$

可以看出 $y_{ss}(n)$ 是由激励与系统结构共同决定的,所以零状态响应中既包含自由响应,又包含强迫响应。其中和激励形式相同的分量为强迫分量,即 12.5u(n)。

⑥ 求全响应。

$$y(n) = y_{zi}(n) + y_{zs}(n) = [12.5 + 7(0.5)^{n} - 10.5(0.2)^{n}]u(n)$$

强迫响应为 12.5u(n), 自由响应为 [7(0.5)" - 10.5(0.2)"]u(n);

稳态响应为 12.5u(n), 暂态响应为 [7(0.5)" - 10.5(0.2)"]u(n)。

完成实验四

待定系数确定方法总结

差分方程

微分方程

齐次解y_h(.)

待定系数保留在**齐次解**中

特解y_p(.)

代入原方程,利用对应项相等确定待定系数

全解y(.)

将边界条件(输入时刻及之后)代入**全解y(.)**,解代数方 程确定待定系数

零输入响应yzi(.)

将边界条件(输入时刻之前)代入**零输入响应y**_{zi}(.),解 代数方程确定待定系数

由一个冲激函数产 生的冲激响应 $h_0(n)$ 将**固定边界条件**代入h₀(n) 解代数方程确定待定系数

没有该过程

冲激响应h(.)

根据差分方程输入形式, 叠加平移 $h_0(n)$ 将h(t)(必须加u(t))代入 原方程,利用冲激函数平 衡准则,确定待定系数

零状态响应y_{zs}(.) 全解y(.)

系数已经确定

中间过程只有求h(t)时才加u(t),其它都不加u(t)

м

•若LTI离散系统的阶跃响应为 g(k) , 求其单位序列响应 其中: $g(k) = (\frac{1}{2})^k \varepsilon(k)$