§ 4.4 拉普拉斯反变换

1. 直接分析法

例 4-6 求下列像函数的原函数。

① $X_1(s)=2+\dfrac{s+2}{(s+2)^2+4}\ (\sigma>-2)$；

② $X_2(s)=\dfrac{k}{(s-p_1)^r}\ (k、p_1$ 为实常数，r 为正整数，$\sigma>p_1)$。

解：① 由 $\cos\omega t\mathrm{u}(t)\leftrightarrow\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$，有 $\cos 2t\mathrm{u}(t)\leftrightarrow\dfrac{s}{s^2+4}$。

根据复频移性质，有

$$e^{-2t}\cos 2t\mathrm{u}(t)\leftrightarrow\frac{s+2}{(s+2)^2+4}$$

所以

$$x_1(t)=2\delta(t)+e^{-2t}\cos 2t\mathrm{u}(t)$$

② 由 $t^{r-1}\mathrm{u}(t)\leftrightarrow\dfrac{(r-1)!}{s^r}$，结合复频域性质，有

$$e^{p_1t}t^{r-1}\mathrm{u}(t)\leftrightarrow\frac{(r-1)!}{(s-p_1)^r}$$

所以

$$x_2(t)=\frac{k}{(r-1)!}e^{p_1t}t^{r-1}\mathrm{u}(t)$$

例4-7（类似） 求 $F(s)=\dfrac{2s+8}{s^2+4s+8}$ (σ>-2) 的原函数

解：

$$e^{-\alpha t}\cos\omega_0 t u(t) \leftrightarrow \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2} \qquad e^{-\alpha t}\sin\omega_0 t u(t) \leftrightarrow \frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$$

$$F(s)=\frac{2s+8}{(s+2)^2+4}=2[\frac{s+2+2}{(s+2)^2+2^2}]$$

$$=2[\frac{s+2}{(s+2)^2+2^2}+\frac{2}{(s+2)^2+2^2}]$$

$$\leftrightarrow 2e^{-2t}(\cos 2t+\sin 2t)\varepsilon(t)$$

2. 部分分式展开法

若$F(s)$为s的有理分式，则可表示为

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

式中，$a_i(i=0, 1, 2, ..., n-1)$、$b_i(i=0, 1, 2, ..., m)$均为实数。若$m\geq n$，则 $\frac{B(s)}{A(s)}$ 为假分式。若$m<n$，则 $\frac{B(s)}{A(s)}$ 为真分式。

若$F(s)$为假分式，可用多项式除法将F(s)分解为有理多项式与有理真分式之和， 即

$$F(s)=c_0+c_1s+\cdots+c_{n-1}s^{m-n}+\frac{D(s)}{A(s)}=N(s)+\frac{D(s)}{A(s)}$$

$$N(s)=c_0+c_1s+\cdots+c_{n-1}s^{m-n}$$

$$\delta(t)\leftrightarrow 1$$

$$\delta^{(n)}(t)\leftrightarrow s^n$$

式中，c_i(i=0, 1, 2, ..., n-1)为实数。$N(s)$为有理多项式，其逆变换为冲激函数及其一阶到m-n阶导数之和。$\dfrac{D(s)}{A(s)}$为有理真分式，可展开为部分分式后求逆变换。例如，

$$F(s)=\frac{2s^3+7s^2+10s+6}{s^2+3s+2}=(1+2s)+\frac{3s+4}{(s+1)(s+2)}$$

$$=(1+2s)+\frac{1}{s+1}+\frac{2}{s+2}$$

则

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=\delta(t)+2\delta'(t)+(e^{-t}+2e^{-2t})\varepsilon(t)$$

若 $F(s)=\dfrac{B(s)}{A(s)}$ 为有理真分式，可直接展开为部分分式后求逆变换。要把$F(s)$展开为部分分式，必须先求出$A(s)=0$的根。因为$A(s)$为s的n次多项式，所以$A(s)=0$有n个根$s_i(i=1, 2, \ldots, n)$。s_i可能为单根，也可能为重根；可能为实根，也可能为复根。s_i又称为$F(s)$的**极点**。$F(s)$展开为部分分式的具体形式取决于s_i的上述性质。

1. $F(s)$仅有单极点（分母多项式无重根）

若$A(s)=0$仅有n个单根$s_i(i=1, 2, ..., n)$，无论s_i是实根还是复根，都可将$F(s)$展开为

$$F(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{B(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i}{s-s_i}$$

式中，各部分分式项的系数K_i为

$$K_i=(s-s_i)F(s)\Big|_{s=s_i}$$

由于

$$e^{s_i t}\varepsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{s - s_i}$$

故$F(s)$的单边拉普拉斯逆变换可表示为

$$f(t) = F^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^{n} K_i e^{s_i t}\varepsilon(t)$$

例 4-8（类似）　已知 $F(s)=\dfrac{s+5}{s^2+5s+6}\qquad \sigma>-2$ ，

求$F(s)$的单边拉氏逆变换(原函数)$f(t)$。

解 $F(s)$的分母多项式$A(s)=0$的两个根分别为$s_1=-2$, $s_2=-3$。因此，$F(s)$的部分分式展开式为

$$F(s)=\frac{s+5}{(s+2)(s+3)}=\frac{K_1}{s+2}+\frac{K_2}{s+3}$$

$$K_1=(s+2)\cdot\frac{s+5}{(s+2)(s+3)}\bigg|_{s=-2}=3$$

$$K_2 = (s+3)\cdot\frac{s+5}{(s+2)(s+3)}\Big|_{s=-3} = -2$$

所以

$$F(s) = \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+3}$$

于是得

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = (3e^{-2t} - 2e^{-3t})\varepsilon(t)$$

2. $F(s)$有重极点（分母多项式有重根）

若$A(s)=0$在$s=p_1$处有r重根，而其余$(n-r)$个根$p_j(j=r+1, \ldots, n)$是单根，这些根的值是实数或复数：

$$F(s)=\frac{K_{11}}{(s-p_1)^r}+\frac{K_{12}}{(s-p_1)^{r-1}}+\cdots+\frac{K_{1i}}{(s-p_1)^{r-i+1}}\cdots+\frac{K_{1r}}{(s-p_1)}+\frac{E(s)}{D(s)}$$

$$K_{11}=(s-p_1)^r F(s)\Big|_{s=p_1}$$

设：$$F_1(s)=(s-p_1)^r F(s)$$

即：$$F_1(s)=K_{11}+(s-p_1)K_{12}+\cdots+(s-p_1)^{r-1}K_{1r}+(s-p_1)^r\frac{E(s)}{D(s)}$$

$$K_{12}=\frac{d}{ds}F_1(s)\Big|_{s=p_1}$$

$$K_{1i}=\frac{1}{(i-1)!}\frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}}F_1(s)\Big|_{s=p_1}$$

求$F(s)$的逆变换，因为 $t^i\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{i!}{s^{i+1}}$ 或 $t^{i-1}\varepsilon(t)\boxed{\leftrightarrow}\frac{(i-1)!}{s^i}$

$$\frac{1}{(i-1)!}t^{i-1}\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{1}{s^i}$$

由复频移性质，可得

$$\frac{1}{(i-1)!}e^{p_1t}t^{i-1}\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{1}{(s-p_1)^i}$$

$F(s)$的单边拉普拉斯逆变换为

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=\sum_{i=1}^{r}\frac{K_{1i}}{(r-i)!}t^{r-i}e^{p_1t}\varepsilon(t)+\sum_{j=r+1}^{n}K_je^{p_jt}\varepsilon(t)$$

例 4-9 求 $X(s)=\dfrac{1}{3s^2(s^2+4)}$ $(\sigma>0)$ 的原函数。

解:分母 $D(s)=0$ 有四个根,一个二重根 $p_1=0$,一对共轭根 $p_{2,3}=\pm \mathrm{j}2$。此函数用前述方法展开成部分分式为

$$X(s)=\boxed{\frac{1}{3s^2(s^2+4)}}=\frac{1}{3}\left[\frac{k_{11}}{s^2}+\frac{k_{12}}{s}+\frac{a_1s+a_2}{s^2+4}\right]$$

由式(4-50)确定其系数 k_{11}、k_{12};$D(s)=0$ 中的共轭根在展开为部分分式时作为一整体处理会较为简单,但 a_1、a_2 只能通过普通通分方式来获取。

$$k_{11}=(s-p_1)'X(s)\big|_{s=p_1}=\frac{1}{s^2+4}\bigg|_{s=0}=\frac{1}{4}$$ 不严谨

$$k_{12}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[(s-p_1)'X(s)]\big|_{s=p_1}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{s^2+4}\right)\bigg|_{s=0}=0$$

通分解得系数为 $a_1=0$, $a_2=-\dfrac{1}{4}$。故

$$X(s)=\frac{1}{3s^2(s^2+4)}=\frac{1}{3}\left[\frac{\frac{1}{4}}{s^2}-\frac{\frac{1}{4}}{(s^2+4)}\right]=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{2}\,\frac{2}{s^2+4}\right)$$

根据斜变函数和正弦函数的拉普拉斯变换特点,可得

$$x(t)=\frac{1}{12}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\mathrm{u}(t)$$

例 4-10（类似） 已知求$F(s)=\dfrac{3s+5}{(s+1)^2(s+3)}$，$F(s)$的单边拉氏逆变换。

解 $F(s)$有二重极点$s=-1$和单极点$s=-3$。因此，$F(s)$可展开为

$$F(s)=\frac{K_{11}}{(s+1)^2}+\frac{K_{12}}{s+1}+\frac{K_3}{s+3}$$

$$\left(\frac{v(x)}{u(x)}\right)'=\frac{u(x)v'(x)-u'(x)v(x)}{[u(x)]^2}$$

$$K_{11}=(s+1)^2\frac{3s+5}{(s+1)^2(s+3)}\bigg|_{s=-1}=1$$

$$K_{12}=\frac{d}{ds}\left[(s+1)^2\frac{3s+5}{(s+1)^2(s+3)}\right]\bigg|_{s=-1}=1$$

$$K_3 = (s+3)\frac{3s+5}{(s+1)^2(s+3)}\Big|_{s=-3} = -1$$

于是得

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3}$$

$$\boxed{f(t) = L^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^{r}\frac{K_{1i}}{(r-i)!}t^{r-i}e^{p_1 t}\varepsilon(t) + \sum_{j=r+1}^{n}K_j e^{p_j t}\varepsilon(t)}$$

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = (te^{-t} + e^{-t} - e^{-3t})\varepsilon(t)$$

补充例1： 已知 $F(s)=\dfrac{(s+4)e^{-2s}}{s(s+2)}$ ，求$F(s)$的单边拉氏逆变换。

解 $F(s)$不是有理分式，但$F(s)$可以表示为

$$F(s)=F_1(s)e^{-2s}$$

式中，F_1（s）

$$F_1(s)=\frac{s+4}{s(s+2)}=\frac{2}{s}-\frac{1}{s+2}$$

由线性和常用变换对得到

$$f_1(t)=L^{-1}[F_1(s)]=(2-e^{-2t})\varepsilon(t)$$

由时移性质得

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=L^{-1}[F_1(s)e^{-2s}]$$

$$=[2-e^{-2(t-2)}]\varepsilon(t-2)$$

补充例2: 已知单边拉氏变换 $F(s)=\dfrac{2s}{(s^2+1)^2}$，求$F(s)$的原函数$f(t)$。

解 $F(s)$为有理分式，可用部分分式法求$f(t)$。但$F(s)$又可表示为

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$F(s)=\frac{d}{ds}\left(\frac{-1}{s^2+1}\right)$$

因为 $-\sin t\cdot\varepsilon(t)\leftrightarrow-\dfrac{1}{s^2+1}$， 根据复频域微分性质，

则$F(s)$的原函数为

$$f(t)=L^{-1}[F(s)]=(-t)[-\sin t\cdot\varepsilon(t)]=t\sin t\cdot\varepsilon(t)$$

补充例3： 已知 $F(s)=\dfrac{2s+3}{(s+1)(s+2)}$， -2 < Re［s］< -1。

求$F(s)$的拉氏逆变换。 不是单边拉氏逆变换

解：

$$F(s)=\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+1}$$

反因果信号 $f_3(t)=-e^{-\beta t}\varepsilon(-t)$ （$\beta>0$）

$$F_3(s)=\frac{1}{s+\beta} \qquad \mathrm{Re}[s]<-\beta$$

极点s_1=-1， s_2=-2 分别位于收敛域的左右两侧，故：

第一项对应因果函数 $e^{-2t}u(t)$ ，第二项对应反因果函数 $-e^{-t}u(-t)$

$$f(t)=e^{-2t}u(t)-e^{-t}u(-t)$$

特例：

求像函数 $F(s)=\dfrac{1}{1+e^{-s}}$ $\sigma>0$ 的拉普拉斯逆变换。

根据：$\boldsymbol{f_2(t)=\delta(t)+\delta(t-T)+\delta(t-2T)+\cdots}$

$$F_2(s)=1+e^{-sT}+e^{-2sT}+\cdots=\frac{1}{1-e^{-sT}}\qquad \sigma>0$$

(公比小于1)

分子分母同乘1-exp(-s)，得：

$$F(s)=\frac{1}{1-e^{-2s}}-\frac{e^{-s}}{1-e^{-2s}}\leftrightarrow f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\delta(t-2n)-\delta(t-2n-1)\right]$$

反变换题类型总结：

1、可直接分解的（分母单根例4-8；分母复根例4-10）；

2、分母为$(s+a)^2+b$形式或$(s+a)^r$，直接套用公式（例4-6）

3、分母有共轭极点，配为二项式平方后，套用公式（例4-7）

4、不是有理分式的，套用性质（时移等）（补充例1）

5、分母极为复杂的，灵活处理（求导等）（补充例2）

6、收敛域不是右边区域的，注意双边LT的表示方法（补充例3）