

## 4.5 线性系统的复频域分析法

复频域分析法：在复频域上对系统进行分析

优势1：将求解微分方程**转化**为求解代数方程

优势2：**自动**引入初始条件，获得全解

优势3：根据复频域系统函数判断**系统特性**（因果性、稳定性）



## 4.5.1 微分方程的变换解



p3~8讨论学习：  
拉普拉斯变换方法解线性常系数微分方程。

设二阶连续系统的微分方程为

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_2 f''(t) + b_1 f'(t) + b_0 f(t)$$

式中， $a_0$ 、 $a_1$ 和 $b_0$ 、 $b_1$ 、 $b_2$ 为实常数； $f(t)$ 为因果信号，因此， $f(0^-)$ 、 $f'(0^-)$ 均为零。设初始时刻 $t_0=0$ ， $y(t)$ 的单边拉普拉斯变换为 $Y(s)$ ，对上式两端取单边拉普拉斯变换，根据时域微分性质，得

$$\begin{aligned} & [s^2 Y(s) - s y(0^-) - y'(0^-)] + a_1 [s Y(s) - y(0^-)] + a_0 Y(s) \\ &= b_2 s^2 F(s) + b_1 s F(s) + b_0 F(s) \end{aligned}$$

$$(s^2 + a_1s + a_0)Y(s) = [(s + a_1)y(0^-) + y'(0^-)] \\ + (b_2s^2 + b_1s + b_0)F(s)$$

分别令

$$A(s) = s^2 + a_1s + a_0$$

$$B(s) = b_2s^2 + b_1s + b_0$$

$$M(s) = (s + a_1)y(0^-) + y'(0^-)$$

$$Y(s) = \frac{M(s)}{A(s)} + \frac{B(s)}{A(s)} F(s)$$

对上式取单边拉普拉斯逆变换，就得到系统的完全响应  $y(t)$ 、零输入响应  $y_{zi}(t)$  和零状态响应  $y_{zs}(t)$ ，即

$$y(t) = L^{-1} \left[ \frac{M(s)}{A(s)} + \frac{B(s)}{A(s)} F(s) \right]$$

$$y_{zi}(t) = L^{-1} \left[ \frac{M(s)}{A(s)} \right]$$

$$y_{zs}(t) = L^{-1} \left[ \frac{B(s)}{A(s)} F(s) \right]$$

$$M(s) = (s + a_1)y(0^-) + y'(0^-)$$

可以看出初始状态与零输入响应具有线性关系。（当限定一个（ $y(0)$ 或 $y'(0)$ ）为零时，另一个满足齐次性和可加性）

由于  $Y_f(s) = H(s)F(s)$ ，则二阶系统的系统函数为：

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

例 4-11（类似） 已知线性系统的微分方程为

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 3f'(t) + f(t)$$

$$f(t) = e^{-t}\varepsilon(t), y(0^-) = 1, y'(0^-) = 2$$

求系统的零输入响应 $y_{zi}(t)$ 、零状态响应 $y_{zs}(t)$ 和完全响应 $y(t)$

解：根据单边拉氏变换的时域微分性质，对系统微分方程取单边拉氏变换，得

$$\begin{aligned} & [s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-)] + 5[sY(s) - y(0^-)] + 6Y(s) \\ & = 3sF(s) + F(s) \end{aligned}$$

$$[s^2 Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-)] + 5[sY(s) - y(0^-)] + 6Y(s) = 3sF(s) + F(s)$$

$$Y(s) = \frac{(s+5)y(0^-) + y'(0^-)}{s^2 + 5s + 6} + \frac{3s+1}{s^2 + 5s + 6} F(s)$$

$$= \frac{s+7}{s^2 + 5s + 6} + \frac{3s+1}{s^2 + 5s + 6} F(s)$$

$f(t)$ 的单边拉氏变换为  $F(s) = L[e^{-t}\varepsilon(t)] = \frac{1}{s+1}$

求 $Y(s)$ 、 $Y_{zi}(s)$ 、 $Y_{zs}(s)$ 的单边拉氏逆变换，得：

$$y(t) = (10e^{-2t} - 8e^{-3t} - e^{-t})\varepsilon(t)$$

$$y_{zi}(t) = (5e^{-2t} - 4e^{-3t})\varepsilon(t)$$

$$y_{zs}(t) = (5e^{-2t} - 4e^{-3t} - e^{-t})\varepsilon(t)$$

根据特征频率知：

$$y_h(t) =$$

$$y_p(t) =$$

思考：某系统的微分方程  $\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = 2f'(t)$   
则系统的阶跃响应  $g(t)$  应为 (  )。

A.  $\frac{1}{2}e^{-3t}\varepsilon(t)$

B.  $2e^{-3t}\varepsilon(t)$

C.  $2e^{3t}\varepsilon(t)$

D.  $\frac{1}{2}e^{3t}\varepsilon(t)$

思路：复频域分析解微分方程



## 4.5.2 线性动态电路的s域模型

### 1. 基本元件的s域模型

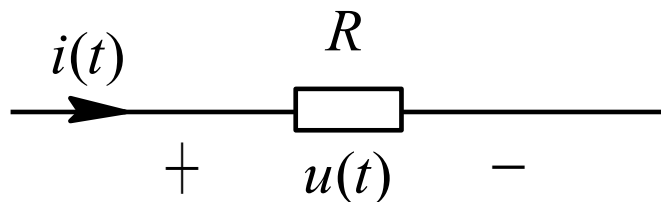


p9~16讨论学习：  
基本元件的s域模型  
表达方式

电阻：设线性时不变电阻 $R$ 上电压 $u(t)$ 和电流 $i(t)$ 的参考方向关联，则 $R$ 上电流和电压关系（VAR）的时域形式为： $u(t) = Ri(t)$

电阻 $R$ 的时域模型如图所示。设 $u(t)$ 和 $i(t)$ 的象函数分别为 $U(s)$ 和 $I(s)$ ，对上式取单边拉普拉斯变换，得  $U(s) = RI(s)$

则电阻s域模型如图：

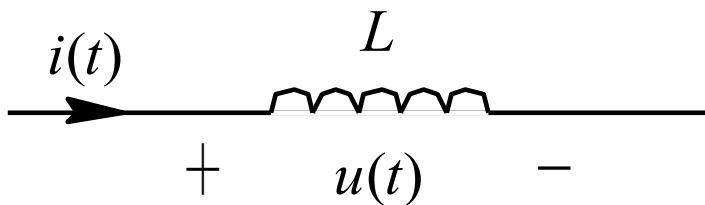


(a)

**电感：** 设线性时不变电感 $L$ 上电压 $u(t)$ 和电流 $i(t)$ 的参考方向关联， 则电感元件VAR的时域形式为 $u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$

电感 $L$ 的时域模型如图所示。设 $i(t)$ 的初始值 $i(0^-)=0$ (零状态)， $u(t)$ 和 $i(t)$ 的单边拉普拉斯变换分别为 $U(s)$ 和 $I(s)$ ， 对上式取单边拉普拉斯变换，根据时域微分、积分性质， 得 $U(s) = sLI(s)$

则电感 $s$ 域模型如图

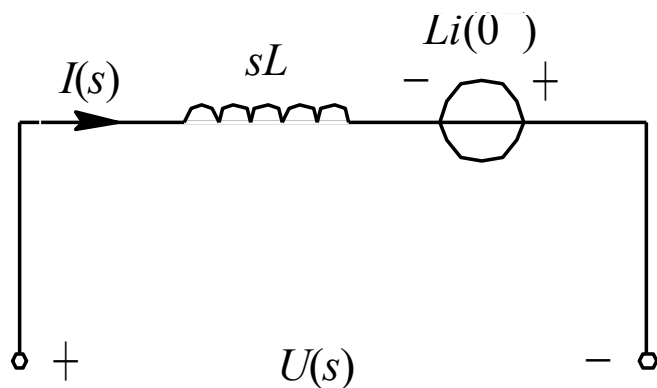


(a)

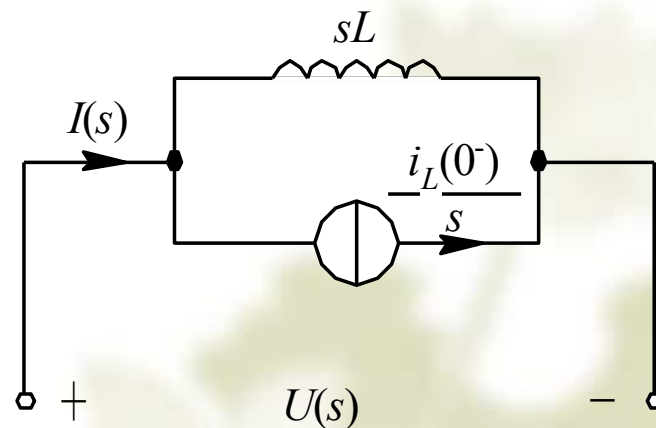
若电感 $L$ 的电流 $i(t)$ 的初始值 $i(0^-)$ 不等于零，对上式取单边拉普拉斯变换，可得

$$U(s) = sLI(s) - Li(0^-)$$

$$I(s) = \frac{1}{sL}U(s) + \frac{i(0^-)}{s}$$



(a)



(b)

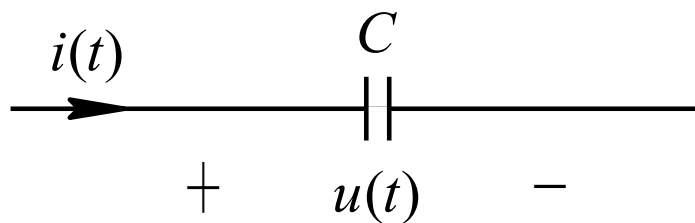
(a) 串联模型； (b) 并联模型

**电容：** 设线性时不变电容元件 $C$ 上电压 $u(t)$ 和电流 $i(t)$ 的参考方

向关联， 则电容元件VAR的时域形式为 $i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$

电容元件的时域模型如图所示。若 $u(t)$ 的初始值 $u(0^-)=0$ (零状态)， $u(t)$ 和 $i(t)$ 的单边拉普拉斯变换分别为 $U(s)$ 和 $I(s)$ ， 对上式取单边拉普拉斯变换， 得  $I(s) = sCU(s)$ ， 或 $U(s) = \frac{1}{sC} I(s)$

则电容s域模型如图



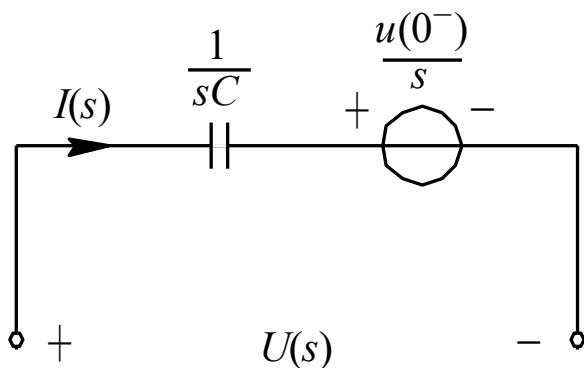
(a)



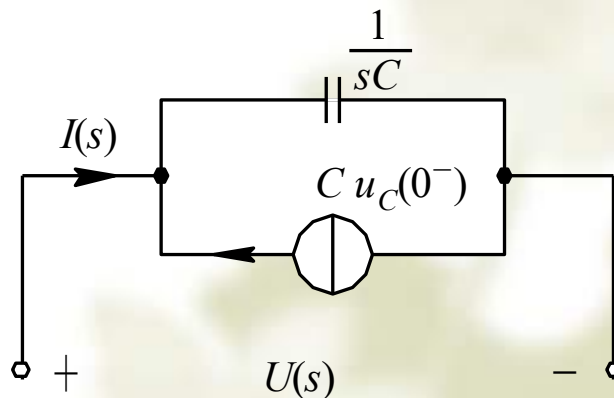
若电容元件 $C$ 上电压 $u(t)$ 的初始值 $u(0^-)$ 不等于零，对上式取单边拉普拉斯变换，得

$$U(s) = \frac{1}{sC} I(s) + \frac{u(0^-)}{s}$$

$$I(s) = sCU(s) - Cu(0^-)$$



(a)



(b)

(a) 串联模型； (b) 并联模型

## 2. 基尔霍夫定律的复频域形式

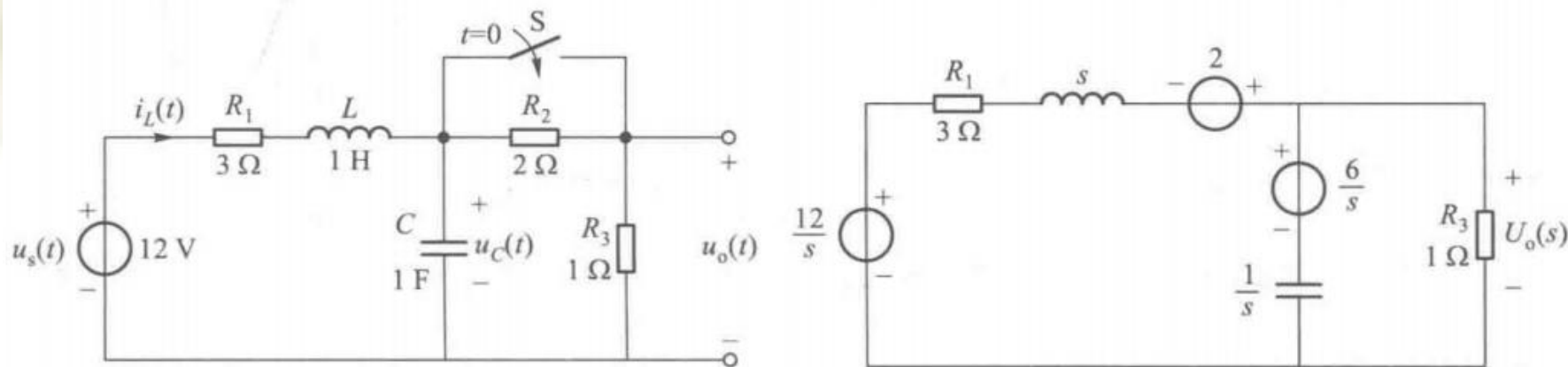
$$\sum_{k=1}^m I_k(s) = 0$$

基尔霍夫电流定律（**KCL**）复频域形式

$$\sum_{k=1}^m U_k(s) = 0$$

基尔霍夫电压定律（**KVL**）复频域形式

**例 4-12** 图 4-12 所示的电路中, 设  $R_1 = 3\Omega$ ,  $R_2 = 2\Omega$ ,  $R_3 = 1\Omega$ ,  $C = 1\text{F}$ ,  $L = 1\text{H}$ ,  $u_s(t) = 12\text{V}$ , 已知  $t < 0$  时开关 S 打开, 电路已工作于稳定状态。设  $t = 0$  时刻闭合开关 S, 求  $t > 0$  时电阻  $R_3$  两端电压  $u_o(t)$  的零输入响应和零状态响应。



(1) 计算初始状态

$$i_L(0_-) = \frac{u_s(t)}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{12}{3 + 2 + 1} \text{A} = 2\text{A}$$

(2) 画出S域电路模型

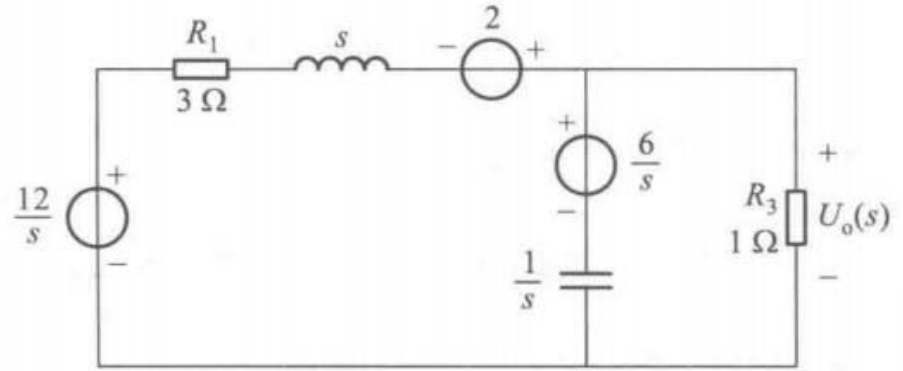
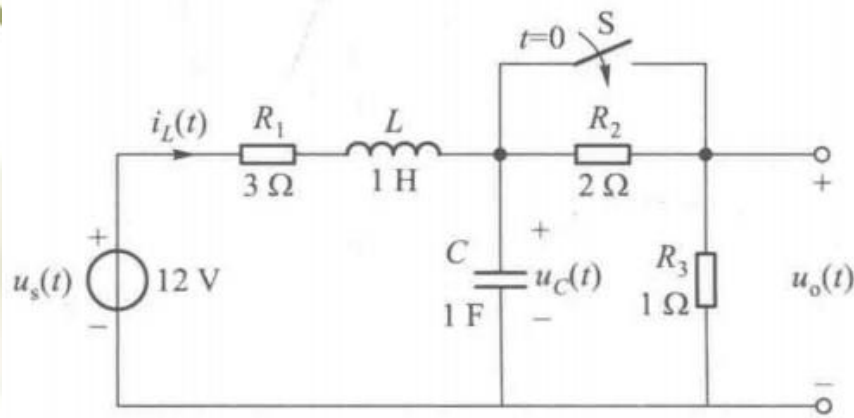
$$u_C(0_-) = u_s(t) \frac{R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 12 \cdot \frac{2 + 1}{3 + 2 + 1} \text{V} = 6\text{V}$$

应用叠加定理

(3) 求零状态响应

$$U_{\text{ozs}}(s) = \frac{12}{s} \frac{\frac{1}{s+1}}{s+3+\frac{1}{s+1}} = \frac{12}{s(s+2)^2} = \frac{3}{s} - \frac{6}{(s+2)^2} - \frac{3}{s+2}$$

$$u_{\text{ozs}}(t) = 3(1 - 2te^{-2t} - e^{-2t})u(t)$$

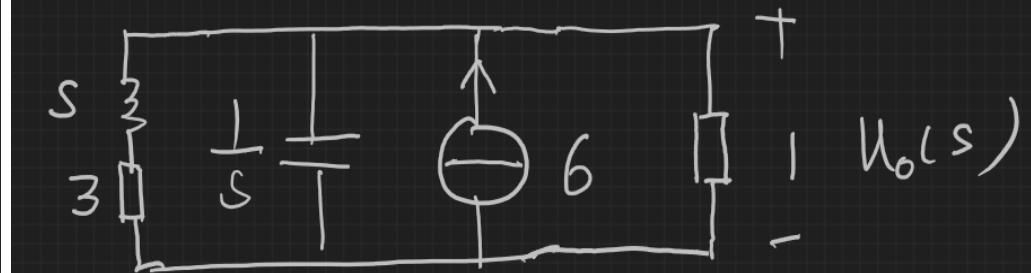


(4) 求零输入响应

$$U_{\text{dzi}}(s) = 2 \cdot \frac{\frac{1}{s+1}}{s+3+\frac{1}{s+1}} + 6 \cdot \frac{1}{\frac{1}{s+3}+s+1} = \frac{2(3s+10)}{(s+2)^2} = \frac{8}{(s+2)^2} + \frac{6}{s+2}$$

$$u_{\text{dzi}}(t) = 2(4t+3)e^{-2t}u(t)$$

$$\frac{6}{s} \cdot \frac{\frac{s+3}{1+s+3}}{\frac{1}{s} + \frac{s+3}{1+s+3}} = \dots$$

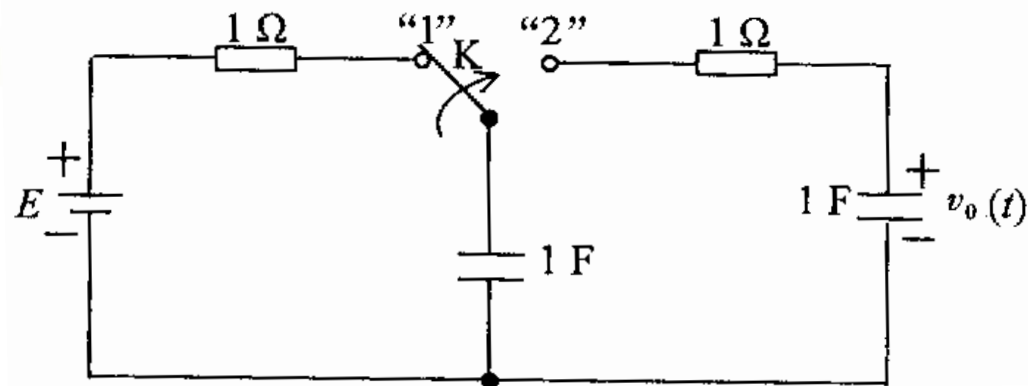




线性系统的复频域分析方法一般步骤如下：

- (1) 根据换路前的电路(即 $t < 0$ 时的电路)求  $t = 0^-$  时刻电感的初始电流  $i_L(0^-)$  和电容的初始电压  $u_C(0^-)$  ；
- (2) 求电路激励(电源)的拉普拉斯变换(即像函数)；
- (3) 画出换路后电路(即 $t > 0$ 时的电路)的复频域电路模型；
- (4) 应用节点法、割集法、网孔法、回路法及电路的各种等效变换、电路定理(齐次定理、叠加定理、等效定理、替代定理、互易定理)等，对复频域电路模型列写KCL，KVL方程组，并求解此方程组，从而求得全响应解的像函数；
- (5) 对所求得的全响应解的像函数进行拉普拉斯反变换，即得时域中的全响应解。

如图所示电路已处于稳态， $t=0$ 时，开关K从“1”打到“2”，用S域模型法求 $V_0(t)$



## 4.5.3 系统函数

### 1、定义

若线性时不变连续系统(LTI)的输入为 $f(t)$ , 零状态响应为 $y_f(t)$ , 冲激响应为 $h(t)$ , 由连续系统的时域分析可知:

$$y_f(t) = f(t) * h(t)$$

取拉普拉斯变换得

$$Y_{zs}(s) = F(s)H(s)$$

$H(s)$  为系统函数, 又称转移函数

$$H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{F(s)}$$

由  $Y(s) = \frac{M(s)}{A(s)} + \frac{B(s)}{A(s)} F(s)$  得

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

分母多项式A(s)为系统的特征多项式；

H(s)的各项系数取决于系统微分方程的系数。回顾：

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_2 f''(t) + b_1 f'(t) + b_0 f(t)$$

$$\begin{aligned} & [s^2 Y(s) - s y(0^-) - y'(0^-)] + a_1 [s Y(s) - y(0^-)] + a_0 Y(s) \\ &= b_2 s^2 F(s) + b_1 s F(s) + b_0 F(s) \end{aligned}$$

$$(s^2 + a_1 s + a_0) Y(s) = [(s + a_1) y(0^-) + y'(0^-)] + (b_2 s^2 + b_1 s + b_0) F(s)$$

结论：H(s)只取决于系统的内因，与激励和状态无关。



H(s)的物理意义:

$$1. H(s) = \int_{0^-}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \int_{0^-}^{\infty} h(t) e^{-st} dt = L[h(t)]$$

2. 由本征函数知, 当  $e^{st} - \infty < t < \infty$  作用于冲激响应为  $h(t)$  的线性系统时, 系统的零状态响应是  $y_{zs}(t) = e^{st} H(s)$

其变化规律与激励相同, 且均为同一复频率。可见:  $H(s)$  就是当激励为  $e^{st} - \infty < t < \infty$  时系统的零状态响应的加权函数。

3. 根据电路中输入、输出定义的位置不同, 系统函数可能是系统阻抗、导纳、电流或电压传输系数等。

# 总结：时间信号分解模型

1. 
$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

任何连续时间信号都可以被分解成时移加权的单位冲激信号的线性组合。

2. 
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

任何连续时间信号都可以被分解成振幅为  $\frac{1}{2\pi} F(\omega) d\omega$  的复指数信号  $e^{i\omega t}$  的线性组合。

3. 
$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F_b(s) e^{st} ds$$

任何连续时间信号都可以被分解成振幅为  $\frac{1}{2\pi j} F_b(s) ds$  的复指数信号  $e^{st}$  的线性组合。

系统的零状态响应可按以下步骤求解：

- (1) 求系统输入 $f(t)$ 的单边拉普拉斯变换 $F(s)$ ;
- (2) 求系统函数 $H(s)$ ;
- (3) 求零状态响应的单边拉普拉斯变换 $Y_{zs}(s)$ ,  $Y_{zs}(s)=H(s)F(s)$ ;
- (4) 求 $Y_{zs}(s)$ 的单边拉普拉斯逆变换 $y_{zs}(t)$ ;

例 已知线性连续系统的输入为 $f_1(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$ 时，零状态响应 $y_{zs1}(t)=(e^{-t}-e^{-2t})\varepsilon(t)$ 。若输入为 $f_2(t)=t\varepsilon(t)$ ，求系统的零状态响应 $y_{zs2}(t)$ 。

$$F_1(s) = L[f_1(t)] = \frac{1}{s+1}$$

$$Y_{zs1}(s) = L[Y_{zs1}(t)] = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$$H(s) = \frac{Y_{zs1}(s)}{F_1(s)} = \frac{1}{s+2}$$



$f_2(t)$ 的单边拉氏变换为

$$F_2(s) = L[f_2(t)] = \frac{1}{s^2}$$

$y_{f_2}(t)$ 的单边拉氏变换为

$$\begin{aligned} Y_{zs2}(s) &= L[y_{zs2}(t)] = H(s)F_2(s) \\ &= \frac{1}{s^2(s+2)} = \frac{1}{4} \left( \frac{2}{s^2} + \frac{1}{(s+2)} - \frac{1}{s} \right) \end{aligned}$$

于是得

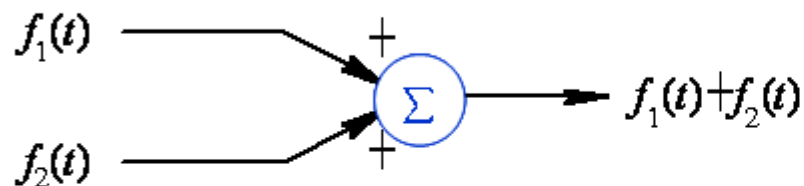
$$y_{zs2}(t) = L^{-1}[Y_{zs2}(s)] = \frac{1}{4} (2t + e^{-2t} - 1) \varepsilon(t)$$

## 2.系统框图与系统函数

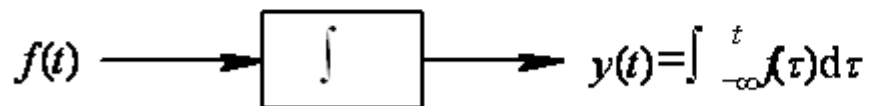
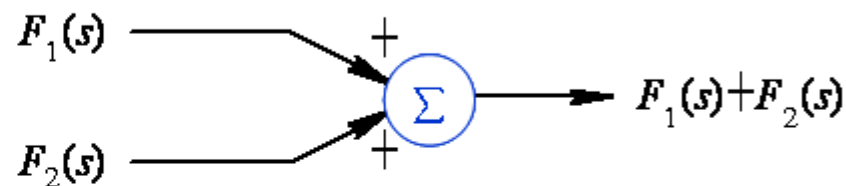
$$f(t) \xrightarrow{a} af(t)$$

(a)

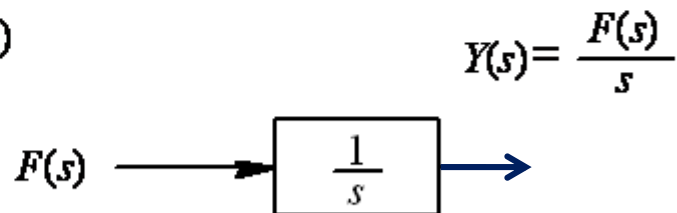
$$F(s) \xrightarrow{a} aF(s)$$



(b)



(c)

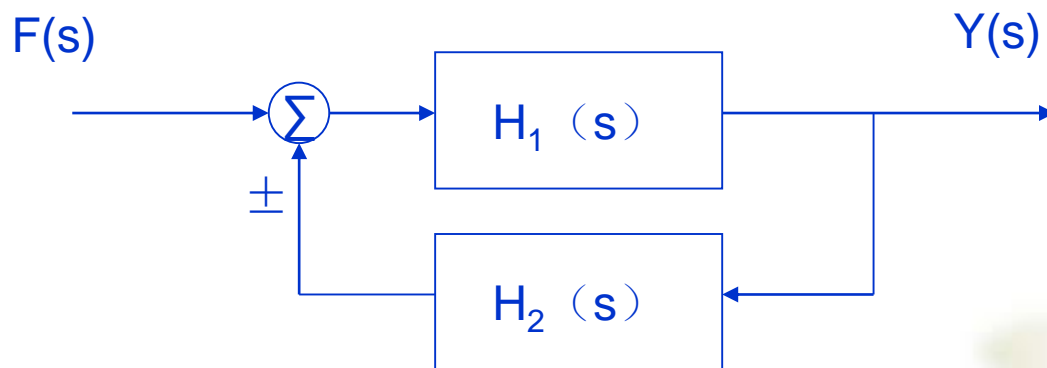


基本运算器的时域和S域模型

(a) 数乘器; (b) 加法器; (c) 积分器

几个系统的组合连接又可构成一个复杂系统，称为**复合系统**。组成复合系统的每一个系统又称为**子系统**。系统的组合连接方式有**串联**、**并联**及这两种方式的**混合连接**。

### 例：反馈系统



$$Y(s) = H_1(s)[F(s) \pm H_2(s)Y(s)]$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{H_1(s)}{1 \mp H_1(s)H_2(s)}$$

## 教材p232 三种条件下求系统函数的方法

例 4-13 求下列系统的系统函数。

- ①  $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = x'(t) + 3x(t)$ ;
- ② 系统框图如图 4-16 所示;
- ③ 系统电路如图 4-17 所示,其中运算放大器为理想运放。

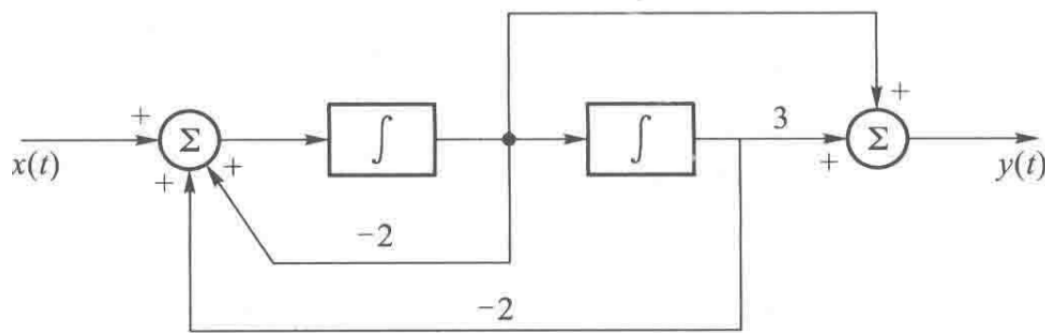


图 4-16 例 4-13(2) 题图

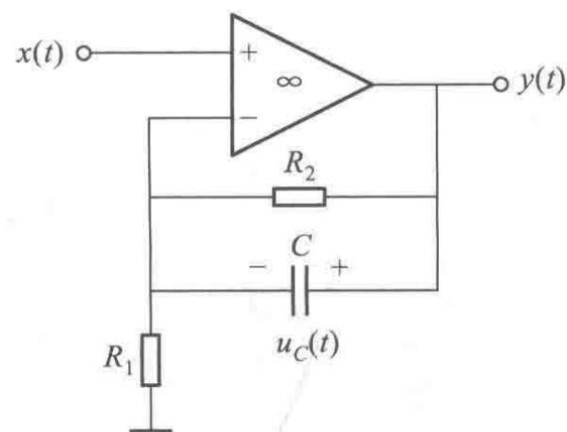


图 4-17 例 4-13(3) 题图

1. 
$$H(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 2s + 2}$$

2.

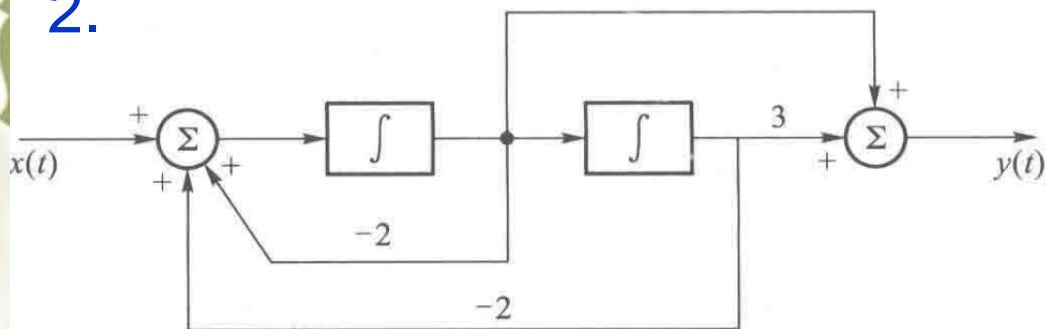


图 4-16 例 4-13(2) 题图

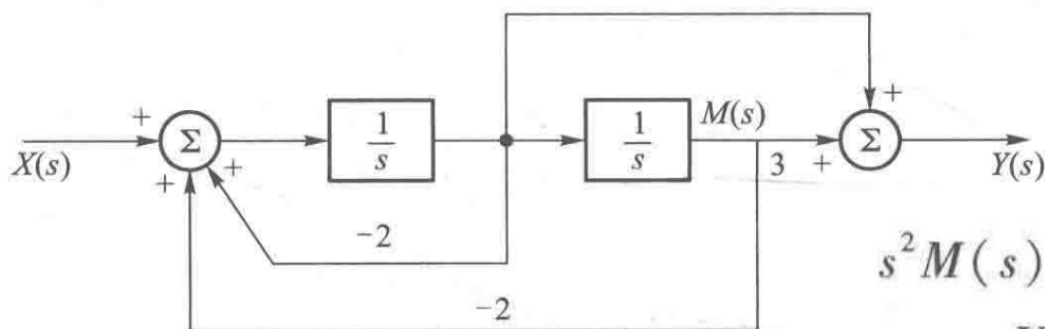


图 4-18 例 4-13(2) 题复频域模拟框图

$$s^2 M(s) = X(s) - 2sM(s) - 2M(s)$$

$$Y(s) = sM(s) + 3M(s)$$

$$Y(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 2s + 2} X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s + 3}{s^2 + 2s + 2}$$

3.

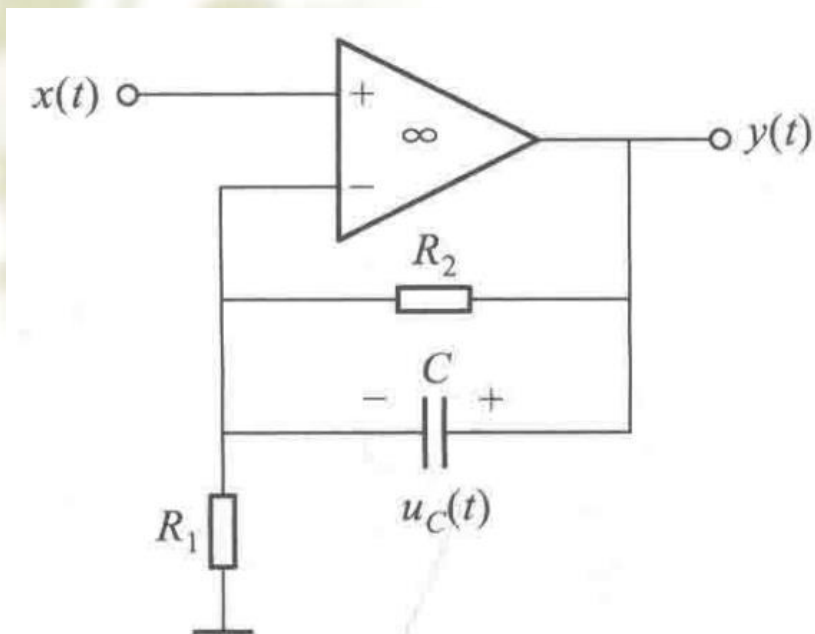


图 4-17 例 4-13(3) 题图

$$\frac{X(s)}{R_1} = \frac{Y(s) - X(s)}{\frac{1}{\frac{1}{R_2} + sC}}$$

$$Y(s) = \left[ \frac{R_2}{R_1(sR_2C + 1)} + 1 \right] X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = 1 + \frac{\frac{1}{R_1C}}{s + \frac{1}{R_2C}}$$

## 课后思考：

- 1、本页例题与p69 例2-10相比较，有什么异同？
- 2、由微分方程  $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = f(t)$  表示系统，分别用时域分析法和复频域分析法求其冲激响应 $h(t)$ ，比较两种方法的复杂度。



### 3. 系统函数的零极点图与冲激响应的关系

#### $H(s)$ 的零点和极点

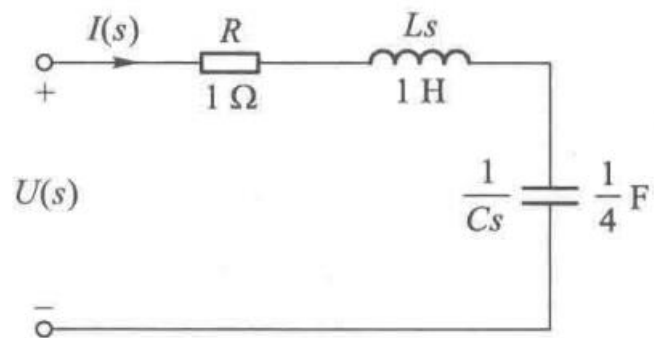
线性时不变连续系统的系统函数 $H(s)$ 通常是复变量 $s$ 的有理分式， 可以表示为

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$
$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m (s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} = \frac{b_m \prod_{j=1}^m (s - s_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_j)}$$

极点又称为系统的自然频率或固有频率， 没有零极点抵消时， 极点也是系统微分方程的特征根

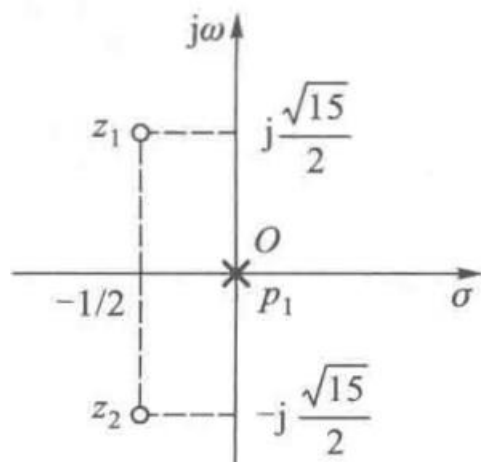
# 教材p233

**例 4-14** 求图 4-19 所示电路的输入阻抗  $Z(s)$  与输入导纳  $Y(s)$ ，并分别画出其零极图。

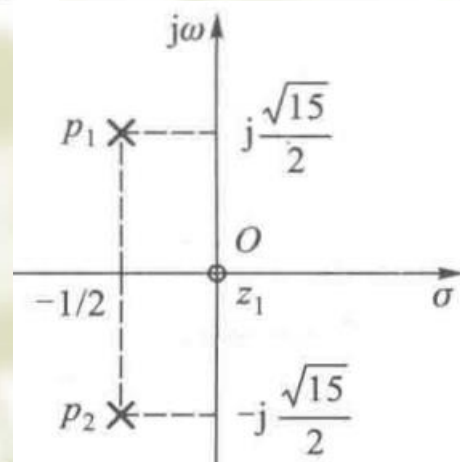


$$Z(s) = \frac{U(s)}{I(s)} = R + sL + \frac{1}{sC} = 1 + s + \frac{4}{s} = \frac{s^2 + s + 4}{s} = \frac{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}}{s}$$

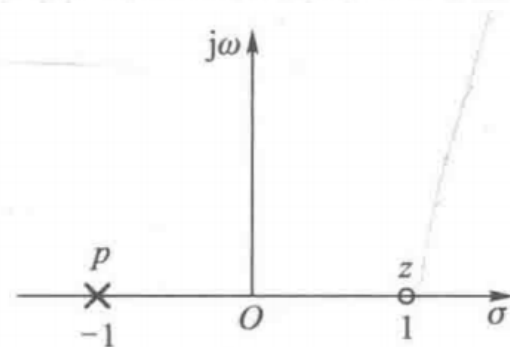
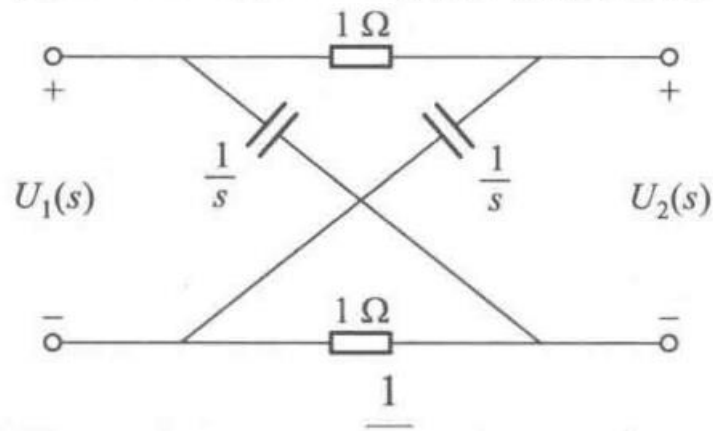
一个极点  $p = 0$ ，两个零点  $z_1 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{15}}{2}$ 、 $z_2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{15}}{2}$ 。



$$Y(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = \frac{1}{Z(s)} = \frac{s}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}}$$



**例 4-15** 图 4-21 所示电路,试求其系统函数  $H(s)$ , 并画出  $H(s)$  的零极图。



$$U_2(s) = U_1(s) \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{s}} - U_1(s) \frac{1}{1 + \frac{1}{s}} = U_1(s) \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{s}} = U_1(s) \frac{1-s}{s+1}$$

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1-s}{s+1}$$

$H(s)$  有一个零点  $z=1$ , 一个极点  $p=-1$ , 其零点与极点的分布关于  $j\omega$  轴左右对称  
称为全通网络或全通系统

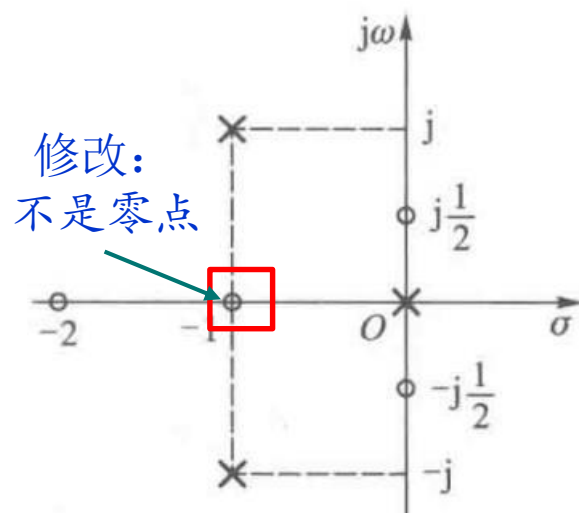
例 4-16 已知某个系统传递函数  $H(s)$  的零极图如图 4-23 所示, 设  $H(\infty) = 4$ , 求  $H(s)$

3个极点, 3个零点

$$H(s) = \boxed{H_0} \frac{(s+2)(s^2 + \frac{1}{4})}{s[(s+1)^2 + 1]}$$

由  $H(\infty) = 4$ , 可知  $H_0 = 4$  ?

$$H(s) = 4 \frac{(s+2)(s^2 + \frac{1}{4})}{s[(s+1)^2 + 1]}$$



系统函数的零、极点对冲激响应的影响：

$$H_1(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 4} \quad \sigma > -1$$

$$h_1(t) = e^{-t} \cos 2t u(t)$$

$$H_2(s) = \frac{s}{(s+1)^2 + 4} \quad \sigma > -1$$

$$\begin{aligned} h_2(t) &= e^{-t} \left( \cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) u(t) \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} e^{-t} \cos \left( 2t + \tan^{-1} \frac{1}{2} \right) u(t) \end{aligned}$$

零点分布仅影响系统特性的振幅和相位，极点分布则决定系统特性的时域变化模式，又称系统模态。

# $H(s)$ 的极点与时域响应

## 1. 左半平面极点

若 $H(s)$ 在左半平面负实轴上有一阶极点 $p=-\alpha(\alpha>0)$ , 则 $H(s)$ 的分母 $A(s)$ 就有因子 $(s+\alpha)$ ,  $h(t)$ 中就有对应的函数 $Ke^{-\alpha t}\varepsilon(t)$ ; 若 $p=-\alpha$ 为 $r$ 重极点, 则 $A(s)$ 中就有因子 $(s+\alpha)^r$ ,  $h(t)$ 中就有对应的函数 $K_i t^i e^{-\alpha t} \varepsilon(t) (i=0, 1, 2, \dots, r-1)$ 。  $K$ 、 $K_i$ 为实常数。

若 $H(s)$ 在左半平面负实轴以外有一阶共轭复极点 $p_{1,2}=-\alpha \pm j\beta$ , 则 $A(s)$ 中就有因子 $[(s+\alpha)^2+\beta^2]$ ,  $h(t)$ 中就有对应的函数 $Ke^{-\alpha t}\cos(\beta t+\theta)\varepsilon(t)$ ; 若 $p_{1,2}=-\alpha \pm j\beta$ 为 $r$ 重极点, 则 $A(s)$ 中有因子 $[(s+\alpha)^2+\beta^2]^r$ ,  $h(t)$ 中就有对应的函数 $K_i t^i e^{-\alpha t}\cos(\beta t+\theta_i)\varepsilon(t) (i=0, 1, 2, \dots, r-1)$ 。  $K$ ,  $K_i$ ,  $\theta_i$ 为实常数。



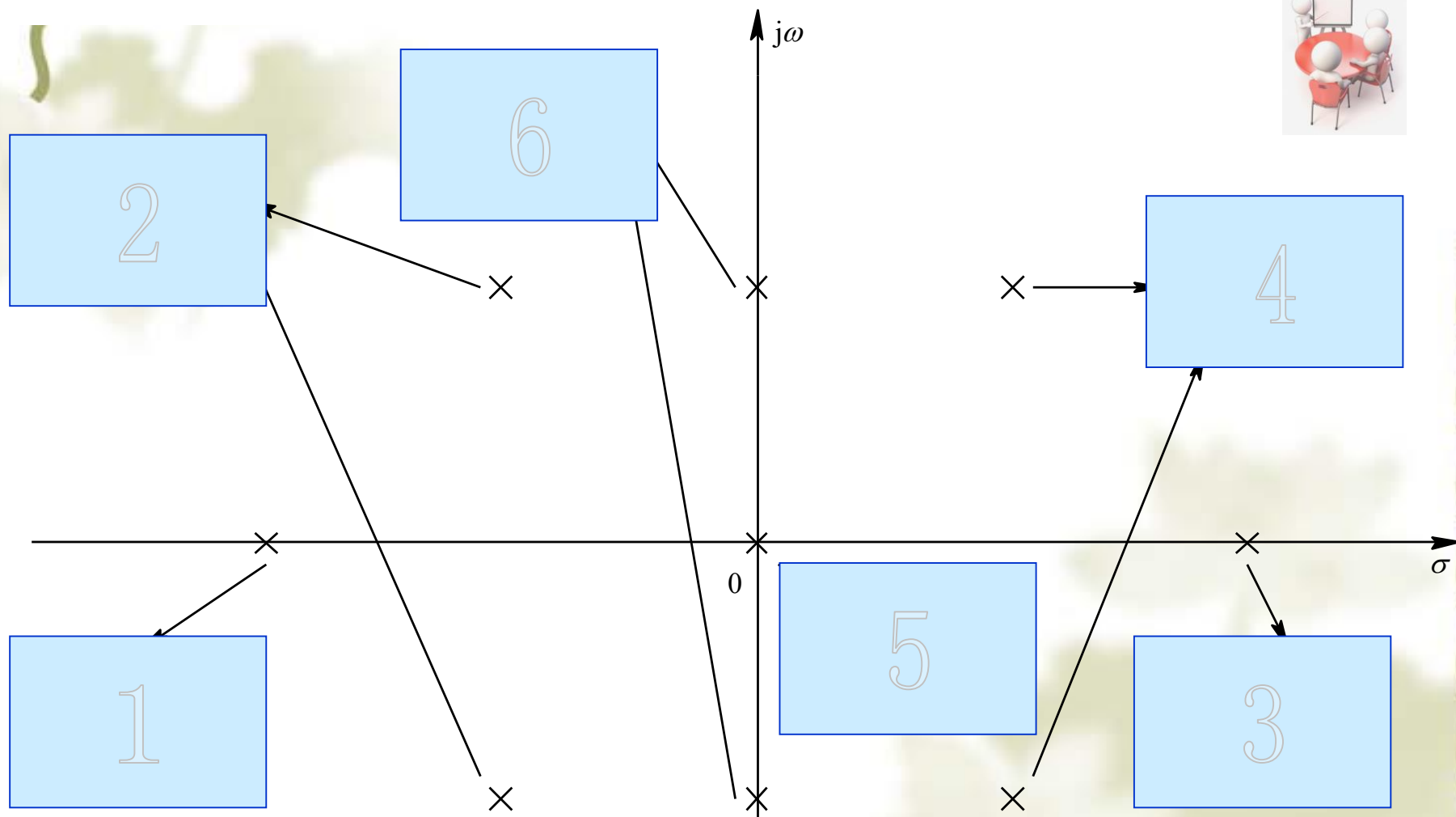
## 2. 右半平面极点

若 $H(s)$ 在右半平面正实轴上有一阶极点 $p=\alpha(\alpha>0)$ , 则 $H(s)$ 的分母 $A(s)$ 就有因子 $(s-\alpha)$ ,  $h(t)$ 中就有对应的函数 $Ke^{\alpha t}\varepsilon(t)$ ; 若 $p=\alpha$ 为 $r$ 重极点, 则 $A(s)$ 中就有因子 $(s-\alpha)^r$ ,  $h(t)$ 中就有对应的函数 $K_i t^i e^{\alpha t}\varepsilon(t)(i=0, 1, 2, \dots, r-1)$ 。  $K$ 、 $K_i$ 为实常数。

若 $H(s)$ 在右半平面正实轴以外有一阶共轭复极点 $p_{1,2}=\alpha\pm j\beta$ , 则 $A(s)$ 中就有因子 $[(s-\alpha)^2+\beta^2]$ ,  $h(t)$ 中就有对应的函数 $Ke^{\alpha t}\cos(\beta t+\theta)\varepsilon(t)$ ; 若 $p_{1,2}=\alpha\pm j\beta$ 为 $r$ 重极点, 则 $A(s)$ 中有因子 $[(s-\alpha)^2+\beta^2]^r$ ,  $h(t)$ 中就有对应的函数 $K_i t^i e^{\alpha t}\cos(\beta t+\theta_i)\varepsilon(t)(i=0, 1, 2, \dots, r-1)$ 。  $K$ ,  $K_i$ ,  $\theta_i$ 为实常数。

### 3. 虚轴上极点

若 $H(s)$ 在坐标原点有一阶极点 $p=0$ ，则 $A(s)$ 中有因子 $s$ ， $h(t)$ 中就有对应函数 $K\varepsilon(t)$ ， $K$ 为常数；若 $p=0$ 为 $r$ 重极点，则 $A(s)$ 中有因子 $s^r$ ， $h(t)$ 中就有对应函数 $K_i t^i \varepsilon(t) (i=1, 2, \dots, r-1)$ ， $K_i$ 为实常数；若 $H(s)$ 在虚轴上有一阶共轭虚极点 $p_{1,2}=\pm j\beta$ ，则 $A(s)$ 中有因子 $(s^2+\beta^2)$ ， $h(t)$ 中就有对应函数 $K\cos(\beta t+\theta)\varepsilon(t)$ ， $K$ 、 $\theta$ 为实常数；若 $p_{1,2}=\pm j\beta$ 为 $r$ 重极点，则 $A(s)$ 中有因子 $(s^2+\beta^2)^r$ ， $h(t)$ 中就有对应函数 $K_i t^i \cos(\beta t+\theta_i)\varepsilon(t) (i=1, 2, \dots, r-1)$ ， $K_i$ 、 $\theta_i$ 为实常数。



$H(s)$ 的极点分布与时域函数的对应关系

## 总结（教材p235）

- （1）位于坐标原点上的单阶极点所对应的  $h(t)$  是阶跃信号,位于坐标原点二阶以上的极点所对应的  $h(t)$ , 振幅随时间的增长而增长;
- （2）位于  $j\omega$  轴上的单阶共轭极点所对应的  $h(t)$  是等幅正弦振荡信号,而位于  $j\omega$  轴上的重阶共轭极点所对应的  $h(t)$  是增幅正弦振荡;
- （3）位于  $s$  平面的负实轴上的极点所对应的  $h(t)$  为衰减指数函数;位于左半  $s$  平面上的共轭极点所对应的  $h(t)$  是衰减振荡信号;
- （4）位于  $s$  平面的正实轴上的极点所对应的  $h(t)$  为增长指数函数;位于右半  $s$  平面上的共轭极点所对应的  $h(t)$  是增幅振荡信号。

思考：下列说法不正确的是（ ）。

A、 $H(s)$ 在左半平面的极点所对应的响应函数为衰减的。

即当 $t \rightarrow \infty$ 时，响应均趋于0。

B、 $H(s)$ 在虚轴上的一阶极点所对应的响应函数为稳态分量。

C、 $H(s)$ 在虚轴上的高阶极点或右半平面上的极点，其所对应的响应函数都是递增的。

D、 $H(s)$ 的零点在左半平面所对应的响应函数为衰减的。

即当 $t \rightarrow \infty$ 时，响应均趋于0。

## 4. 系统函数与零输入响应

系统函数分子、分母多项式没有公因式抵消时， $\mathbf{H(s)}$ 的极点就是系统微分方程的特征根（自然频率、固有频率）

由特征根获得零输入响应：

$$y_{zi}(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{p_i t} \quad \text{单根}$$

$$y_{zi}(t) = (A_0 + A_1 t + \cdots + A_{k-1} t^{k-1}) e^{p_1 t} + \sum_{i=k}^n A_i e^{p_i t} \quad p_1 \text{ 重根}$$

由起始状态  $y^{(k)}(0_-)$  ( $k = 0, 1, \cdots, n-1$ )

可确定零输入响应中的待定系数

如果部分极点被消去，则结果错误！



例 4-17 已知输入  $x(t) = e^{-t}u(t)$ , 初始状态为  $y(0_-) = 2$ ,  $y'(0_-) = 1$ , 系统函数  $H(s) = \frac{s+5}{s^2+5s+6}$ , 求系统的全响应  $y(t)$ , 并标出受迫分量与自由分量、瞬态分量与稳态分量。

解: 由系统函数求零输入响应

$$H(s) = \frac{s+5}{s^2+5s+6} = \frac{s+5}{(s+2)(s+3)}$$

$$y_{zi}(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-3t}$$

$$\begin{cases} y_{zi}(0_-) = A_1 + A_2 = 2 \\ y'_{zi}(0_-) = -2A_1 - 3A_2 = 1 \end{cases}$$

$$y_{zi}(t) = (7e^{-2t} - 5e^{-3t})u(t)$$

求零状态响应

$$X(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{s+5}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{2}{s+1} - \frac{3}{s+2} + \frac{1}{s+3}$$

$$y_{zs}(t) = (2e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{-3t})u(t) = 2e^{-t}u(t) + (-3e^{-2t} + e^{-3t})u(t)$$

求全响应  $y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) = 2e^{-t}u(t) + 4(e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$

第一项为受迫响应分量, 第二项为自由响应分量

只有暂态分量, 而稳态分量为零

思考：已知一线性时不变系统的系统函数为  $H(s) = \frac{1}{s^2 + 6s + 8}$

，求输入为  $f(t) = e^{-t}u(t)$ ，且  $y(0_-) = 0, y'(0_-) = 1$  时系统的完全响应  $y(t)$ 。

解I：方法同例4-17

解II：由原题知  $s^2Y(s) + 6sY(s) + 8Y(s) = F(s)$  因为初始状态不为0，所以对应的拉氏变换为  $s^2Y(s) - sy(0_-) - y'(0_-) + 6sY(s) - 6y(0_-) + 8Y(s) = F(s)$

$$Y(s) = \frac{1 + \frac{1}{s+1}}{s^2 + 6s + 8} = \frac{s+2}{(s+1)(s+2)(s+4)} = \frac{1}{(s+1)(s+4)} = \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s+1}$$

$$A = (s+4)Y(s)_{s=-4} = -\frac{1}{3} \quad B = (s+1)Y(s)_{s=-1} = \frac{1}{3}$$

$$Y(s) = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+4} \right]$$

$$y(t) = \frac{1}{3} (e^{-t} - e^{-4t}) \varepsilon(t)$$

思考：若输入为  $f(t) = e^{-t}$  时，求其零状态响应。(ppt 3.3 p8; 4.5 p20)

$$y_{zs}(t) = H(-1)e^{-t} = \frac{1}{3}e^{-t}$$



# 零输入响应、零状态响应 与自然响应、受迫响应的关系

- ❖ 系统的完全响应即可分解为自由响应和强迫响应，也可分解为零输入响应和零状态响应，它们的关系为：

$$\begin{aligned} r(t) &= r_h(t) + r_p(t) = \underbrace{\sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda_i t}}_{\text{自然响应}} + \underbrace{r_p(t)}_{\text{受迫响应}} \\ &= r_{zi}(t) + r_{zs}(t) = \underbrace{\sum_{i=1}^n A_{zi} e^{\lambda_i t}}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{\left[ \sum_{i=1}^n A_{zs_i} e^{\lambda_i t} + r_p(t) \right]}_{\text{零状态响应}} \end{aligned}$$

自然响应=零输入响应+零状态响应中的齐次解

- 自然响应的 $A_i$ 由初始状态和激励共同决定；
- 零输入响应的 $A_{zi_i}$ 由初始状态决定。

思考：已知系统微分方程为  $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 2f(t)$ ，若

$$y(0_-) = \frac{4}{3}, f(t) = \varepsilon(t), \text{ 解得全响应为 } y(t) = \frac{1}{3}e^{-2t} + 1 \quad t > 0$$

，则全响应中  $\frac{1}{3}e^{-2t}$  为 ( C )

- A. 零输入响应分量      B. 零状态响应分量  
C. 自由响应分量        D. 强迫响应分量

验证：利用系统函数求零输入响应得：  $y(t) = \frac{4}{3}e^{-2t} \quad t > 0$

由于激励是  $\varepsilon(t)$ ，所以  $\frac{1}{3}e^{-2t}$  必然是自由响应分量。

## 4.5.4 双边拉普拉斯变换

双边信号：因果信号与非因果信号叠加而成

$$x(t) = x_1(t)u(t) + x_2(t)u(-t)$$

前者为因果信号，用单边拉普拉斯变换方法

对于后者非因果信号： $L[x_2(t)u(-t)] = \int_{-\infty}^0 x_2(t)e^{-st} dt$

$$\text{令 } -t=t = \int_{\infty}^0 x_2(-t)e^{st} d(-t) = \int_0^{\infty} x_2(-t)e^{st} dt$$

比较  $L[x_2(-t)u(t)] = \int_0^{\infty} x_2(-t)e^{-st} dt$

知：非因果信号的双边拉普拉斯变换是其反折后信号的单边拉普拉斯变换的 $s$ 取反： $L[x_2(t)u(-t)] = L[x_2(-t)u(t)]|_{-s \rightarrow s}$

步骤：正变换

对于非因果函数求双边拉普拉斯变换方法：先将 $t$ 取反，作单边拉普拉斯变换，然后再将结果中变量 $s$ 取反。

p238

例 4-18 试确定例 4-1 中  $-e^{at}u(-t)$  的双边拉普拉斯变换

解：因为  $-e^{-at}u(t) \leftrightarrow -\frac{1}{s+a}$ ,

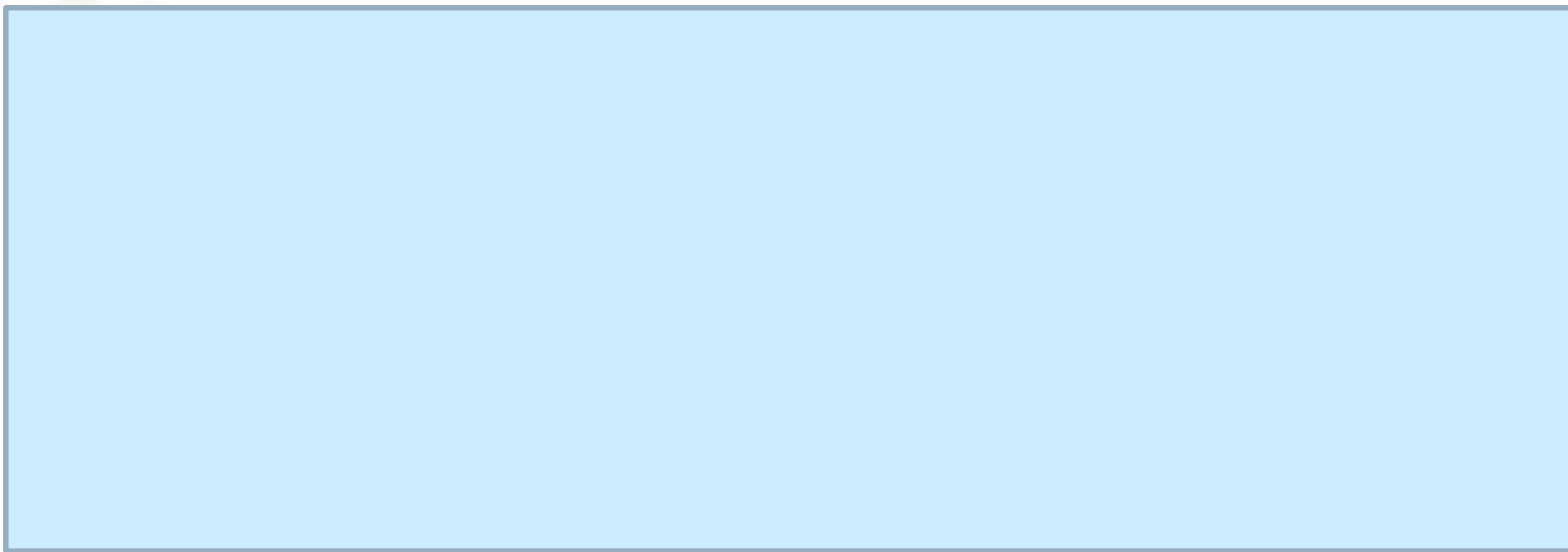
$$\mathcal{L}[-e^{at}u(-t)] = \mathcal{L}[-e^{-at}u(t)] \Big|_{-s \rightarrow s} = -\frac{1}{s+a} \Big|_{-s \rightarrow s} = \frac{1}{s-a} \quad (\sigma < a)$$

逆变换

如果收敛域小于某一值，则知：该像函数是由非因果信号经双边拉普拉斯变换而来。求其反变换方法：先将 $s$ 取反，进行拉普拉斯反变换，然后再将时域中变量 $t$ 取反。



一连续LTI系统的输入输出方程  $y''(t) - y'(t) - 2y(t) = x(t)$  ,  
如果该系统既不是因果的也不是稳定的, 求系统的冲激响应 $h(t)$ 。





p48~51讨论学习：  
系统的稳定性和因果性分别与系统函数收敛域的关系。

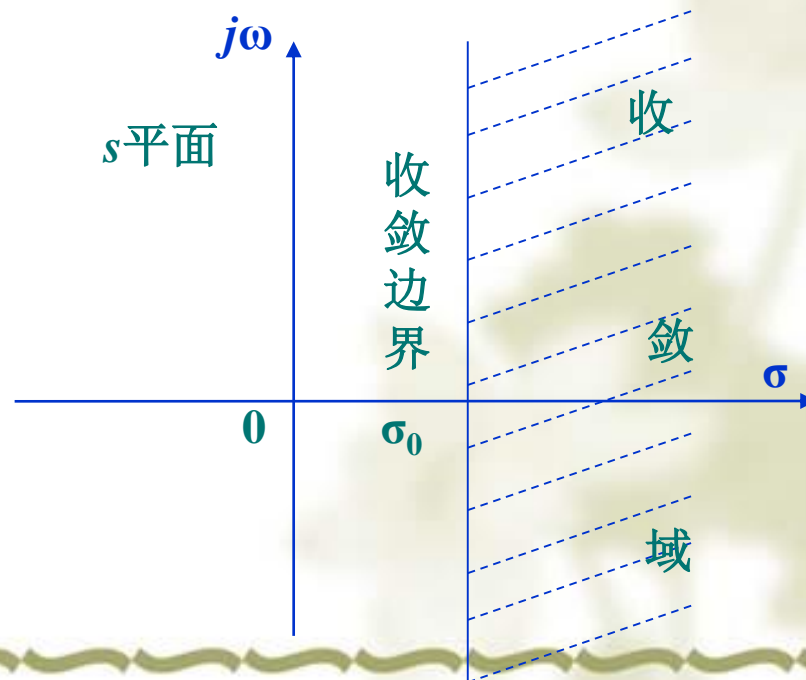
## 4.5.5 线性时不变系统的性质

### 1. 因果性：响应不超前于激励发生的系统。

时域角度看： $h(t) = 0 \quad t < 0$  或  $h(t) = h(t)u(t)$

系统函数角度看： $H(s)$ 的收敛域是最右边极点对应收敛边界的右边域。

与收敛边界在虚轴的  
左右没有关系



## 因果性 总结

因果离散系统的充分必要条件:  $k < 0$        $h(k) = 0$

因果连续系统的充分必要条件:  $t < 0$        $h(t) = 0$

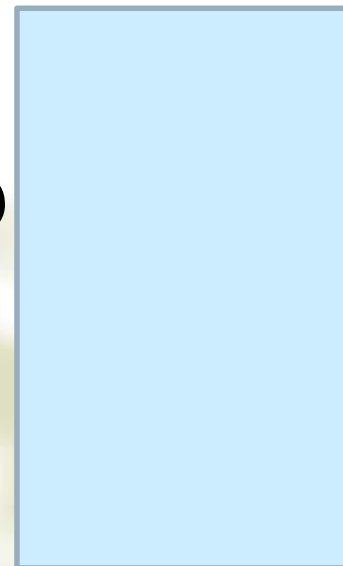
$$y(k) = x(k - 1) \quad y(k) = kx(k)$$

$$y(k) = x(k + 1), \quad y(k) = x(k^2), \quad y(k) = x(-k)$$

$$h(k) = \delta(k + 4)$$

$$h(k) = 0.5^k \varepsilon(-k)$$

$$h(k) = 2^k \varepsilon(k)$$



**2. 稳定性：**对于有界的输入，其零状态响应也是有界。

系统稳定性的充分必要条件：其单位冲击响应绝对可积

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < M \quad M \text{是有界正实常数}$$

**1) 当因果系统所有的特征根 $s_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ )均具有负实部**  
**(位于s平面的左半平面)**

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A_i e^{s_i t} \rightarrow 0 \quad \text{自由响应收敛, 系统稳定}$$

**2) 当因果系统有任一 $s_k$ 具有正实部 (位于s平面的右半平面)**

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{s_k t} \rightarrow \infty \quad \text{自由响应发散, 系统不稳定}$$

3) 当因果系统有一阶特征根位于s平面的虚轴上，其余极点位于s平面的左半平面

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A_i e^{s_i t} \rightarrow A_k e^{\pm j\omega t} \quad \text{或} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A_i e^{s_i t} \rightarrow A_k$$

自由响应等幅振动或常数，系统不稳定。

临界稳定

4) 当因果系统有两阶或以上特征根位于s平面的虚轴上，及右半平面极点，系统为不稳定系统。

结论：线性时不变系统是否稳定，完全取决于系统的特征根。

# 稳定性 总结

稳定系统的充分必要条件：

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty \quad \text{单位响应绝对可和}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| < \infty \quad \text{冲激响应绝对可积}$$

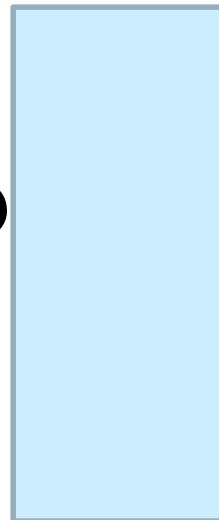
例如

$$y(k) = kx(k)$$

$$h(k) = 0.5^k \varepsilon(-k)$$

$$h(k) = 2^k \varepsilon(k)$$

$$h(k) = 0.5^k \varepsilon(k)$$





## 线性时不变系统稳定的充要条件:

若因果系统的全部特征根（传递函数 $H(s)$ 的全部极点）均具有**负实部**（位于 $s$ 平面的左半平面），则系统稳定。推广之：任意系统的系统函数的收敛域包含虚轴 $j\omega$ 时，系统稳定。

高阶系统判断方法：

（1）稳定的必要条件（只能判断不稳定而不能判断稳定）

特征方程  $D(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0$

特征方程不缺项；系数同号。

例 4-19 判断下列系统是否稳定？

①  $D(s) = s^5 + 6s^4 + 9s^3 - 2s^2 + 8s - 12 = 0$

②  $D(s) = s^5 + 4s^4 + 6s^2 + 9s + 8 = 0$

系统①的系数不同号，系统②缺项。

### 3. 可逆性

如果存在一个系统 $H_1(s)$ ，使得

$H(s)H_1(s)=1$ ，那么 $H(s)$ 就是可逆系统

