§4.2　常用函数的拉普拉斯变换

1. 单位冲激信号 $\delta(t) \leftrightarrow 1$

讨论学习：

$\delta(t)$、$\delta'(t)$、$e^{s_0 t}u(t)$、$t^n u(t)$

拉普拉斯变换的推导方法

$$\mathrm{L}[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-st} dt = 1$$

收敛域：整个s平面

2. 单边复指数函数 $e^{s_0 t}u(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{s - s_0}$

$$\mathrm{L}\left[e^{s_0 t}u(t)\right] = \int_0^{\infty} e^{s_0 t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-s_0)t} dt = \frac{1}{s - s_0} \qquad \sigma > \sigma_0$$

$$\text{若} s_0 = \pm a, \text{则}: e^{\pm at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s \mp a} \qquad \sigma > \pm a$$

$$\text{若} s_0 = \pm j\omega, \text{则}: e^{\pm j\omega t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s \mp j\omega} \qquad \sigma > 0$$

$$\cos\omega_0 t u(t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - j\omega_0} + \frac{1}{s + j\omega_0}\right) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

$$\sin\omega_0 t u(t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s - j\omega_0} - \frac{1}{s + j\omega_0}\right) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

若$s_0 = 0$,则:$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}$ $\quad \sigma > 0$

3、$\delta(t)$ 的导函数

$$\mathrm{L}\left[\delta'(t)\right] = \int_0^\infty \delta'(t) \cdot e^{-st} dt = s \qquad \delta^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n \qquad \sigma > -\infty$$

4、t 的正幂函数

应用公式：$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$

$$\mathcal{L}\left[t^n u(t)\right] = \int_0^\infty t^n \cdot e^{-st} dt = -\frac{1}{s}\int_0^\infty t^n \cdot d\,e^{-st}$$

$$= -\frac{1}{s}[t^n e^{-st}\Big|_0^\infty - n\int_0^\infty e^{-st} t^{n-1} dt] = \frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1} e^{-st} dt$$

$$= \frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}\int_0^\infty t^{n-2} e^{-st} dt$$

$$= \cdots = \frac{n!}{s^n}\int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad \sigma > 0$$

$$tu(t) = \frac{1}{s^2}$$

课后学习：

拉普拉斯变换的性质（**4.3**节）

按**ppt**内容顺序，并参考教材相应内容，学习理解拉普拉斯变换性质的推导方法及相关例题。

反转课堂，同学讲课