

例1-7-1

判断下述微分方程所对应的系统是否为线性系统？

$$\frac{dr(t)}{dt} + 10r(t) + 5 = e(t), t > 0$$

解答

分析：根据线性系统的定义，证明此系统是否具有均匀性和叠加性。可以证明：

系统不满足均匀性

系统不具有叠加性

∴此系统为非线性系统。

请看下面证明过程

证明均匀性

设信号 $e(t)$ 作用系统，响应为 $r(t)$

当 $Ae(t)$ 作用于系统时，若此系统具有线性，则

$$\frac{d Ar(t)}{d t} + 10 Ar(t) + 5 = Ae(t) \quad t > 0 \quad (1)$$

原方程两端乘 A ：

$$A \left[\frac{d r(t)}{d t} + 10 r(t) + 5 \right] = Ae(t) \quad t > 0 \quad (2)$$

(1),(2)两式矛盾。故此系统不满足均匀性

证明叠加性

假设有两个输入信号 $e_1(t)$ 及 $e_2(t)$ 分别激励系统，则由所给微分方程式分别有：

$$\frac{d r_1(t)}{d t} + 10 r_1(t) + 5 = e_1(t) \quad t > 0 \quad (3)$$

$$\frac{d r_2(t)}{d t} + 10 r_2(t) + 5 = e_2(t) \quad t > 0 \quad (4)$$

当 $e_1(t) + e_2(t)$ 同时作用于系统时，若该系统为线性系统，应有

$$\frac{d}{d t} [r_1(t) + r_2(t)] + 10 [r_1(t) + r_2(t)] + 5 = e_1(t) + e_2(t) \quad t > 0 \quad (5)$$

(3)+(4)得

$$\frac{d}{d t} [r_1(t) + r_2(t)] + 10 [r_1(t) + r_2(t)] + 10 = e_1(t) + e_2(t) \quad t > 0 \quad (6)$$

(5)、(6)式矛盾，该系统为不具有叠加性

例1-7-2

判断下列两个系统是否为时不变系统.

系统1: $r(t) = \cos e(t) \quad t > 0$

系统2: $r(t) = e(t) \cdot \cos t \quad t > 0$

解答

1. 系统的作用是对输入信号作余弦运算。

$$(1) e(t) \xrightarrow{\text{时移} t_0} e(t - t_0) \xrightarrow{\text{经过系统}} r_{11}(t) = \cos e(t - t_0) \quad t > 0$$

$$(2) e(t) \xrightarrow{\text{经过系统}} \cos e(t) \xrightarrow{\text{时移} t_0} r_{12}(t) = \cos e(t - t_0) \quad t > 0$$

$$r_{11}(t) = r_{12}(t)$$

\therefore 此系统为时不变系统。

系统2: $r(t) = e(t) \cdot \cos t \quad t > 0$

系统作用: 输入信号乘 $\cos(t)$

$$(1) e(t) \xrightarrow{\text{时移 } t_0} e(t - t_0) \xrightarrow{\text{经过系统}} r_{21}(t) = e(t - t_0) \cos t \quad t > 0$$

$$(2) e(t) \xrightarrow{\text{经过系统}} e(t) \cos t \xrightarrow{\text{时移 } t_0} r_{22}(t) = e(t - t_0) \cos(t - t_0) \quad t > 0$$

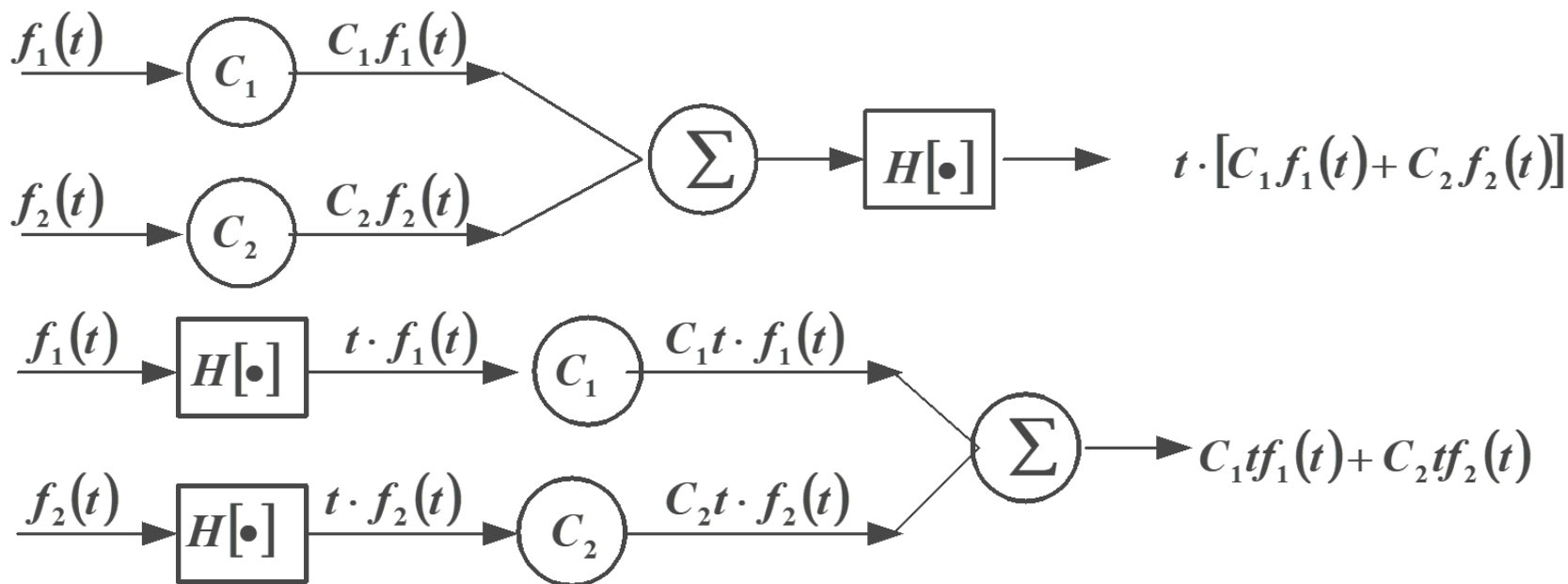
$$r_{21}(t) \neq r_{22}(t)$$

此系统为时变系统。

例1-7-3

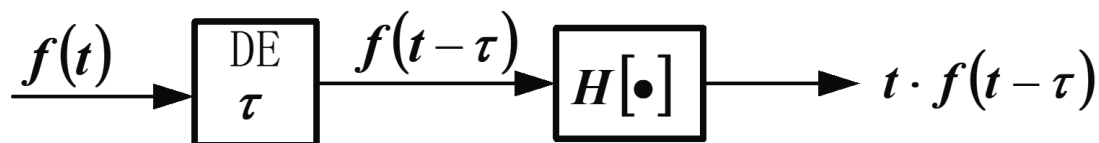
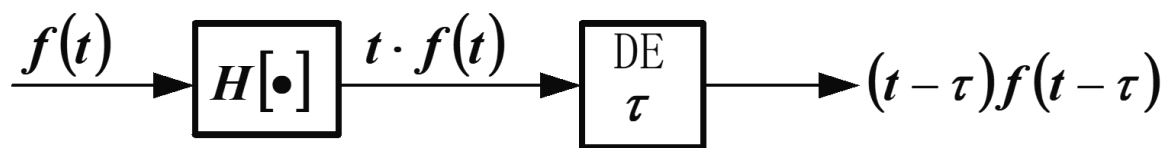
$y(t) = t \cdot f(t)$ 判断系统是否为线性时不变系统

解答 是否为线性系统?



可见,先线性运算,再经系统 = 先经系统,再线性运算,所以此系统是线性系统

是否为时不变系统？



可见，时移、再经系统 \neq 经系统、再时移，
所以此系统是时变系统。

判断系统是否为线性非时变系统

$$y'(t) + \sin t y(t) = f(t)$$

若 $f_1(t) \rightarrow y_1(t), f_2(t) \rightarrow y_2(t)$

则 $y_1'(t) + \sin t y_1(t) = f_1(t) \quad ①$

$y_2'(t) + \sin t y_2(t) = f_2(t) \quad ②$

若 $a f_1(t) + b f_2(t) \rightarrow a y_1(t) + b y_2(t)$

$$[a y_1(t) + b y_2(t)]' + \sin t (a y_1(t) + b y_2(t)) = a f_1(t) + b f_2(t)$$

即: $a y_1'(t) + \sin t \cdot a y_1(t) + b y_2'(t) + \sin t \cdot b y_2(t) = a f_1(t) + b f_2(t)$

将 $a \times ① + b \times ②$ 结果同上。所以假设成立，
原式为线性系统。

若 $f(t-t_0) \rightarrow y(t-t_0)$ 则 $y'(t-t_0) + \sin t y(t-t_0) = f(t-t_0)$

对原式同时平移 t_0 , 得 $y'(t-t_0) - \sin(t-t_0) y(t-t_0) = f(t-t_0)$

其结果不能使假设成立, 即原式为时变系统。

下列各表达式所表示的系统既是线性的又是时不变的系统是 ()

A. $y_f(t) = |f(t)|$

B. $y_f(k) = (k-2)f(k)$

C. $y'(t) + 2y(t) = f'(t) - 2f(t)$

D. $y_f(k) = \frac{1}{2}kx(0) + f(k-2)f(k)$