复变函数部分习题解答分析

作业卷（一）

一 判断题

1.复数 $7+6i>1+3i$.

×. 两个复数, 只有都是实数时, 才可比较大小.

2.若 z 为纯虚数,则 $z\neq\bar{z}$.

√. 按书上定义, 纯虚数指 yi, $y\neq 0$, 若 $z=yi$, 则 $\bar{z}=-yi$.

3.函数 $w=\arg(z)$ 在 $z=-3$ 处不连续.

√. 当 z 从下方 $\to -3$时, $w=\arg(z)$ 的极限为 $-\pi$; 当 z 从上方 $\to -3$ 时, $w=\arg(z)$ 的极限为 π.

4. $f(z)=u+iv$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 点连续的充分必要条件是 $u(x,y)$, $v(x,y)$ 在$(x_0,\,y_0)$ 点连续.

√. Th1.4.3.

5.参数方程 $z=t^2+ti$（t 为实参数)所表示的曲线是抛物线 $y=x^2$.

×. $x=y^2$.

二 填空题

1.若等式 $i(5-7i)=(x+i)(y-i)$ 成立,则 x=_________, $y=$_________.

分析: 两复数相等的定义. $x=-6,y=-1,\quad$ 或$x=1,y=6$.

2.方程 $\mathrm{Im}(i-\bar{z})=3$ 表示的曲线是_________.

分析: 由复数相等, $\mathrm{Im}(i-\bar{z})=\mathrm{Im}[i-(x-iy)]=\mathrm{Im}[-x+(1+y)i]=1+y=3$, 故填 $y=2$.

3.方程$z^3+27=0$的根为______________________________________.

分析: $z^3=27e^{i\pi},z=27^{1/3}(\cos(\frac{\pi+2k\pi}{3})+\sin(\frac{\pi+2k\pi}{3})),k=0,1,2,\ z=-3,\ \frac{3}{2}\pm\frac{3}{2}\sqrt{3}i$.

4.复变函数 $w=\frac{z-2}{z+1}$ 的实部 $u(x,y)=$ __________, 虚部 $v(x,y)=$ __________.

分析:将 $z=x+iy$ 代入, 分离实部、虚部, 得 $u(x,y)=\frac{x^2-x+y^2-2}{(x+1)^2+y^2}$, $v(x,y)=\frac{3y}{(x+1)^2+y^2}$.

5.设 $z_1=2i,z_2=1-i$, 则 $\mathrm{Arg}(z_1z_2)=$ ________________________.

分析: $\arg(z_1)=\frac{\pi}{2}$, $\arg(z_2)=-\frac{\pi}{4}$, $\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+2k\pi=\frac{\pi}{4}+2k\pi,(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

6.复数 $z=-\sqrt{12}-2i$ 的三角表示式为___________________,指数表示式为___________________.

分析: $4[\cos(-\frac{5}{6}\pi)+i\sin(-\frac{5}{6}\pi)]$, $4e^{i(-\frac{5}{6}\pi)}$.

三 计算、证明题

1.求出复数 $z=(-1+\sqrt{3}i)^4$ 的模和辐角.

解 $z=(-1+\sqrt{3}i)^4=2^4(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})^4=16e^{i\frac{8\pi}{3}},|z|=16,\quad \mathrm{Arg}(z)=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

2.设 $z=x+iy$ 满足 $\mathrm{Re}(z^2+3)=4$, 求 x 与 y 的关系式.

解 $\mathrm{Re}(z^2+4)=\mathrm{Re}(x^2-y^2+3+2xyi)=4$, $x^2-y^2=1$.

3.求 $f(z)=\frac{1}{z}$ 将平面上的直线 $y=1$ 所映射成 w 平面上的曲线方程.

解 由 $w=\frac{1}{z}$ 得 $z=\frac{1}{w},x+iy=\frac{1}{u+iv}=\frac{u}{u^2+v^2}-\frac{v}{u^2+v^2}i$. 又由 $y=1$ 得 $-\frac{v}{u^2+v^2}=1$, $u^2+v^2+v=0$.

4.求角形域 $0<\arg(z)<\frac{\pi}{3}$ 在映射 $w=\bar{z}$ 下的象.

解 $\arg(w)=\arg(\bar{z})$, 而 $-\frac{\pi}{3}<\arg(\bar{z})<0$, 角形域 $0<\arg(z)<\frac{\pi}{3}$ 在映射 $w=\bar{z}$ 下的象为 $-\frac{\pi}{3}<\arg(w)<0$.

5.将直线方程 $2x+3y=1$ 化为复数形式.

解 将 $x=\frac{z+\bar{z}}{2},y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$ 代入 $2x+3y=1$ 并整理得 $(1-\frac{3}{2}i)z+(1+\frac{3}{2}i)\bar{z}=1$.

作业卷（二）

一 判断题

1.若 $f'(z)$ 在区域 D 内处处为零, 则 $f(z)$ 在 D 内必恒为常数.

$\surd$. 在 D 内 $f'(z)=u_x+iv_x\equiv 0, u_x=v_x=0$. 从而 $v_y=u_x=0, u_y=-v_x=0$. 综上结论成立.

2.若 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 可导,则 $f(z)=u+iv$ 也可导.

$\times$. 若 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 可导,则 u, v之间一般没有什么直接关系. $f(z)=u+iv$ 可导, u, v 之间一个几乎完全确定另一个(活动的余地只是一个常数).

3.若 $f(z)$ 在 z_0 点不解析, 则 $f(z)$ 在点 z_0 必不可导.

$\times$. 参见三2.

4. $|\sin z|\le 1$.

$\times$.复变函数中, $\sin z$ 无界. 如 $|\sin ik|=|\frac{e^{iik}-e^{-iik}}{2i}|=|\frac{e^k-e^{-k}}{2}|\to+\infty(k\to+\infty,k>0)$.

5.函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在点 $z_0=x_0+iy_0$ 可微等价于 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在点 $(x_0,\, y_0)$ 可微.

$\times$. 函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在点 $z_0=x_0+iy_0$ 可微等价于 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微且满足 $C-R$ 条件. 反例 $u=x$, $v=-y$. $du=dx+0dy$, $dv=0dx-dy$, u, v 都可微但 $f(z)=u+iv=x-iy$ 无处可微.

6.函数 e^z 是周期函数.

$\surd$. $2\pi i$ 为其周期.

二 填空题

1.设 $e^z=-3+4i$, 则 $\mathrm{Re}(iz)=$ ________________

分析：对 $z=-3+4i$ 两边取自然对数，有 $z=\mathrm{Ln}(-3+4i)=\ln|-3+4i|+i\arg(-3+4i)+2k\pi i$, 从而 $\mathrm{Re}(iz)=i[iarg(-3+4i)+2k\pi i]=\arctan\frac{4}{3}+(2k+1)\pi$.(注：这里是从集合角度说)

2. $3^i=$ ________________

分析：$3^i=e^{i\mathrm{Ln}3}=e^{i[ln3+i\arg(3)+2k\pi i]}=e^{i[ln3+2k\pi i]}=e^{2k\pi}(\cos\ln 3+i\sin\ln 3)$.

3. $(1+i)^i=$ ________________

分析：$(1+i)^i=e^{i\mathrm{Ln}(1+i)}=e^{i[\ln|1+i|+i\arg(1+i)+2k\pi i]}=e^{i[\ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}+2k\pi i]}=e^{2k\pi-\frac{\pi}{4}}(\cos\ln\sqrt{2}+i\sin\ln\sqrt{2})$

4. $\cos 2i=$ ________________

分析：$\cos 2i=\frac{e^{i2i}+e^{-i2i}}{2}=\frac{e^2+e^{-2}}{2}=\cosh 2$.(注：后两结果都可)

5. 方程 $e^{iz}=e^{-iz}$ 的解为 $z=$ ________________

分析：两边同乘以 e^{iz}, 得$e^{2iz}=1$. 两边取自然对数，得 $2iz=\mathrm{Ln}1=\ln|1|+i\arg(1)+2k\pi i=2k\pi i$, $z=k\pi$.

6. 设 $z=x+iy$, 则 e^{i-2z} 的模为________________

分析：$|e^{i-2z}|=|e^{i-2(x+iy)}|=e^{-2x}$.

7. 函数 $f(z)=u+iv$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 点连续是 $f(z)$ 在该点解析的________条件.

分析：$f(z)$ 在该点解析, 则 $f(z)$ 在该点的某一个邻域内可导，在该点当然连续。填必要.

三 计算、证明题

1. 问 k 取何值时，$f(z)=k\ln(x^2+y^2)+i\arctan\frac{y}{x}$ 在域 $x>0$ 内是解析函数.

分析: 解析的充要条件. $u_x=\frac{2kx}{x^2+y^2}, u_y=\frac{2ky}{x^2+y^2}, v_y=\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y}{x}^2}=\frac{x}{x^2+y^2}, v_x=\frac{y}{x^2+y^2}$. 由 $u_x=v_y, u_y=-v_x$ 得: $k=\frac{1}{2}$, 即 $k=\frac{1}{2}$ 时 $f(z)$ 在域 $x>0$ 内是解析函数.

2. 讨论函数 $f(z)=(x-y)^2+2(x+y)i$ 在何处可导, 何处解析, 并求其可导点处的导数.

分析: 可导与解析的概念及其联系, 可导与解析的充要条件. $u_x=2(x-y)$, $u_y=2(y-x)$, $v_x=2$, $v_y=2$. 由 $u_x=v_y$, $u_y=-v_x$ 得 $x-y=1$. 故 $f(z)$ 仅在 $x-y=1$ 上可导, $f'(z)=u_x+iv_x=2+2i$, 无处解析.

3. 若函数 $f(z)=u+iv$ 解析, 且 $u=v^2$, 求证 $f(z)$ 为一常数.

分析: 解析的充要条件. $\frac{\partial u}{\partial x}=2vv_x=v_y$, $\frac{\partial u}{\partial y}=2vv_y=-v_x$ 两式相乘并整理得 $(4v^2+1)v_xv_y=0$. 由以上三式易得$v_x\equiv v_y\equiv 0$, v为常数. 又 $u=v^2$, u 为常数, 从而 $f(z)=\text{const}$..

4.若函数 $f(z)=u+iv$ 解析, 且 $u-v=(x-y)(x^2+4xy+y^2)$, 试求 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$.

分析: 解析的充要条件. 由 $u-v=(x-y)(x^2+4xy+y^2)$ (0), 得 $u=v+x^3+3x^2y-3xy^2-y^3$. 又由 $u_x=v_y, u_y=-v_x$, 得: $v_x+3x^2+6xy-3y^2=v_y$ (1) $v_y+3x^2-6xy-3y^2=-v_x$ (2) 由(1),(2)得 $v_y=6xy\Rightarrow v=3xy^2+C(x)$ (3). $u_x=v_y=6xy\Rightarrow u=3x^2y+D(y)$ (4) 将(3),(4)代入(0)式,得 $u=3x^2y-y^3+C, v=3xy^2-x^3+C$.

5. 求方程 $\text{ch}z=0$ 的全部解.

分析: 双曲函数的定义. 解法一 $\text{ch}z=\text{ch}(-z)=\text{ch}(iiz)=\cos(iz)=0$, $z=(k+\frac{1}{2})\pi i$. 解法二 $\text{ch}z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}=0$, $e^{2z}+1=0$. $2z=\text{Ln}(-1)=\ln|-1|+i\arg(-1)+2k\pi i$, $z=(k+\frac{1}{2})\pi i$.

作业卷（三）

一 判断题

1.设 C 为 $f(z)$ 的解析域 D 内的一条简单正向闭曲线，则$\oint_C f(z)\,dz=0$.

$\times$.分析：$f(z)$的解析域D不足以保证$f(z)$在C上及内解析。关键词 单连通区域.反例 $f(z)=\frac{1}{z}$ 在 $0<|z|<2$ 内解析，C 取 $|z|=1$, 则 $\oint_C \frac{1}{z}dz=2\pi i\neq 0$

2.若 u，v 都是调和函数，则 $f(z)=u+iv$ 是解析函数.

$\times$.分析: 解析对 u，v 的要求很高,它们之间有本质的内在联系即 Cauchy-Riemann 方程,知道其一, 另一若不考虑差一个常数, 则完全确定. 调和这一要求达不到. 反例俯拾即是 $u(x,y)=x, v(x,y)=-y$ 都是调和函数,但 $f(z)=x-yi$ 不解析.

3.设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, $F(z)$ 是 $f(z)$ 的一个原函数, C 为 D 内的一条正向闭曲线,则 $\oint_C F^{(n)}(z)\,dz=0$.

$\surd$.分析:由题设, $F(z)$ 在单连通区域 D 内解析, 从而 $F^{(n)}(z)$ 在单连通区域 D 内解析. C 为 D 内的一条正向闭曲线,则 $\oint_C F^{(n)}(z)\,dz=0$.

4. 设 $v=v(x,y)$ 是区域 D 内的调和函数, 则函数 $f(z)=v'_y+iv'_x$ 在 D 内解析.

$\surd$. 分析: $v=v(x,y)$ 是区域 D 内的调和函数, 则设 u 的共轭调和函数为 v, $F(z)=u+iv$ 在 D 内解析,从而 $f(z)=F'(z)=v'_y+iv'_x$ 解析.

5. 若函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 D 内解析, 则函数 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$.

$\surd$. 分析: $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ 存在且连续为 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ 的充分条件. 若函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 D 内解析, 则 $f(z)$ 的任意阶导函数在 D 内解析,从而 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ 存在且连续. u 的二阶偏导数 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$.

二 填空题

1.设 C 为从点 $z_1=-i$ 到点 $z_2=0$ 的直线段，则 $\int_C z\,dz=$ __________

$\frac{1}{2}$. 分析: 被积函数 $f(z)$ 在整个复平面上解析, 其一原函数为 $\frac{1}{2}z^2$, 故 $\int_C z\,dz=\frac{1}{2}z^2|_{-i}^{0}=\frac{1}{2}$.

2.若 C 为正向圆周 $|z|=2$, 则 $\oint_C \frac{1}{\bar z}dz=$ __________

0. 分析: 由于 $z\bar z=|z|^2$, 在 C 上 $\frac{1}{\bar z}=\frac{z}{|z|^2}=\frac{z}{4}$, $\oint_C \frac{1}{\bar z}dz=\oint_C \frac{z}{4}dz=0$.

3.若 C 为正向圆周 $|z|=1$, 则 $\oint_C[\ln(z+2)+(z^2+1)\cos(z^5+1)]dz=$ __________

0. 分析: 在 C 上及 C 内, 被积函数解析. Cauchy积分定理.

4.若函数 $f(x,y)=e^{px}\sin y$ 为区域 D 内的调和函数，则p=__________

± 1. 分析: $f_{xx}+f_{yy}=p^2e^{px}\sin y-e^{px}\sin y=(p^2-1)e^{px}\sin y\equiv 0$.

5.若 $f(\xi)=\oint\limits_{|z|=2}\frac{2z^2+z+1}{z-\xi}dz, |\xi|\neq 2$, 则 $f(3+5i)=(\qquad)$, $f(1)=(\qquad)$, $f'(1)=(\qquad)$.

分析: 由 $f(z)$ 的表达式, Cauchy积分定理及Cauchy积分公式,得:

$$f(\xi)=\begin{cases}2\pi i(\xi^2+\xi+1), & \text{if } |\xi|>0,\\ 0, & \text{if } |\xi|<0\end{cases}$$

于是, $f(3+5i)=0$, $f(1)=2\pi i(2+1+1)=8\pi i$, $f'(1)=2\pi i(4z+1)_{z=1}=10\pi i$. (说明: 由于提取出了 $f(z)$ 的表达式, 后面的计算异常简单.)

三 计算、证明题

1.设点 A, B 分别为 $z_1=i$ 和 $z_2=1+i$, 试计算 $\int_C |z|^2\,dz$ 的值,其中 C 为

(1)点 $z=0$ 到点 z_2 的直线段; (2)由点 $z=0$ 沿直线到 z_1 再到 z_2 的折线段 $\overline{OAB}$.

解: (1)该直线段的参数方程: $x=t$, $y=t, 0\le t\le 1$. $\int_C |z|^2\,dz=\int_0^1(t^2+t^2)\,d(t+it)=\frac{2}{3}+i\frac{2}{3}$.

(2) Oz_1 段参数方程: $x=0$, $y=y$, $0\le y\le 1$. z_1z_2 段参数方程: $x=x$, $y=1$, $0\le x\le 1$. $\int_C |z|^2\,dz=\int_0^1 y^2\,d(iy)+\int_0^1(x^2+1)\,d(x+i1)=\frac{4}{3}+\frac{1}{3}i$.

2.设 C 为从 -2 到 2 的上半圆周,计算积分 $\int_C \frac{2z-3}{z}\,dz$ 的值.

解法一: $I=\int_C(2-\frac{3}{z})\,dz=(2z-3\ln z)|_{-2}^{2}=8+3\pi i$.

解法二: 该半圆周参数方程: $x=2\cos\theta$, $y=2\sin\theta$, θ 从 π 到 0. $I=\int_\pi^0\frac{2e^{i\theta}-3}{2e^{i\theta}}\,d(2e^{i\theta})=8+3\pi i$.

3.计算 $\int_0^i\cos z\,dz$

解: $I=\sin z|_0^1=\sin i=i\frac{e-e^{-1}}{2}$.

4.计算 $\oint_C\frac{2z+1+2i}{(z+1)(z+2i)}\,dz$, 其中 C 为正向圆周 $|z|=3$.

解法一: $I=\oint_C\frac{1}{z+1}\,dz+\oint_C\frac{1}{z+2i}\,dz=2\pi i+2\pi i=4\pi i$.

解法二: 作两正向小圆 $C_1: |z+1|=\frac{1}{10}$, $C_2: |z+2i|=\frac{1}{10}$, 则由复合闭路定理, $I=\oint_{C_1}\frac{\frac{2z+1+2i}{z+2i}}{z+1}dz+\oint_{C_2}\frac{\frac{2z+1+2i}{z+1}}{z+2i}dz=2\pi i\frac{2z+1+2i}{z+2i}|_{z=-1}+2\pi i\frac{2z+1+2i}{z+1}|_{z=-2i}=4\pi i$.

5.计算积分 $\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{e^z}{z(1-z)^3}\,dz$, (1)当点 0 在 C 内,点 1 在 C 外; (2)当点 1 在 C 内,点 0 在 C 外; (3)当点 0, 1 均在 C 内; (4)当点 $0,1$ 均在 C 外.

(1) $I=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{\frac{e^z}{(1-z)^3}}{z}\,dz=\frac{e^z}{(1-z)^3}|_{z=0}=1$. (2) $I=\frac{-1}{2\pi i}\oint_C\frac{\frac{e^z}{z}}{(z-1)^3}\,dz=\frac{-1}{2!}(\frac{e^z}{z})''|_{z=1}=-\frac{e}{2}$. (3)$1-\frac{e}{2}$. (4)0.

6.证明 $u(x,y)=y^3-3x^2y$ 为调和函数, 再求其共轭调和函数 $v(x,y)$, 并写出 $f(z)=u+iv$ 关于 z 的表达式.

证: $u_x=-6xy$, $u_{xx}=-6y$, $u_{xy}=-6x$, $u_y=3y_3^2x^2$, $u_{yx}=-6x$, $u_{yy}=6y$, u 的所有二阶偏导数存在且连续, $u_{xx}+u_{yy}=0$, $u(x,y)$为调和函数.

$v_y=u_x=-6xy$, $v=\int(-6xy)\,dy=-3xy^2+\varphi(x)$. $u_y=3y^2-3x^2=-v_x=3y^2-\varphi'(x)$, $\varphi(x)=x^3+C$. $v=x^3-3xy^2+C$.

为求 $f(z)$ 的表达式,先考察 $f'(z)$. $f'(z)=u_x+iv_x=u_x-iu_y=-6xy-i(3y^2-3x^2)=3iz^2$. 从而 $f(z)=iz^3+iC$, 其中 C 为实的常数.

说明: 此题也可这样做: 由 u 先求 f' $(f'=u_x-iu_y)$, 求出 f 后再根据 $f=u+iv$ 定 v. 这样定的 u, v, 由解析函数性质,均为调和函数,且 v 为 u 的共轭调和函数. 这样做显然简单.

求 $f(z)$ 的表达式另法: $f(x)=f(x+i0)=u(x,0)+iv(x,0)=i(x^3+C)=ix^3+iC$, 故 $f(z)=iz^3+iC$. (此法理论依据是什么？一解析函数的惟一性定理)

已知调和函数 u 求解析函数 $f(z)=u+iv$ 公式: $f(z)=2u(\frac{z}{2},\frac{z}{2i})-u(0,0)+iC$ $\quad(u(x,y)=\frac{1}{2}[f(x+iy)+\bar{f}(x-iy)]$, $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$, $\bar{f}(x-iy)=u(x,y)-iv(x,y))$.

作业卷（四）

一 判断题

1.数列 $z_n=\frac{n+(-1)^n i}{n}$ 必收敛.

$\surd$. 分析: 收敛到1. 注意区分数列收敛与级数收敛.

2.设 $z_n = x_n + iy_n$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛的充要条件是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 都收敛.

$\surd$. 分析: Th4.1.2.

3.每个幂级数必在其收敛圆上收敛.

$\times$. 反例: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ 在其收敛圆 $|z| = 1$ 上的点 $z = 1$ 处发散.

4.若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-1)^n$ 在点 $z = i$ 收敛则它必在点 $z = -i$ 收敛.

$\times$. 反例: $a_n = \frac{1}{n}\frac{1}{(-1-i)^n}$, 则在 $z = i$ 点收敛($\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\frac{(-1+i)^n}{(-1-i)^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(-i)^n$), 在 $z = -i$ 点发散($\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\frac{(-1-i)^n}{(-1-i)^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$).

5.若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 在 $z = 2i$ 处收敛,则它必在 $z = -1$ 处收敛.

$\surd$. Th4.2.1(Abel定理).

二 填空题

1.设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径为 R, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} z^n$ 的收敛半径为_________. R

说明：原题“设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛域为 $|z| < R$, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} z^n$ 的收敛域为__________.”只能由具体问题而定, 一般不会得到 $|z+1| < R$. 反例: $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ 收敛域为 $|z| < 1$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{n}$ 的收敛域显然不是 $|z+1| < 1$.

2.幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}(z-i)^n$ 的收敛圆的中心为_____, 收敛半径为_____. i, 2.

3.函数 $f(z) = \tan z$ 在 $z_0 = \frac{\pi}{4}$ 处所展泰勒级数的收敛半径为_____.

$\frac{\pi}{4}$. 说明: 收敛圆的中心到其最近奇点的距离.

4.设 $f(z) = \frac{\cos z}{z^2(z-i)}$ 的洛朗级数展开式为 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-i)^n$, 则其收敛圆环域为_____.

$(A) 1 < |z-i| < +\infty$; $(B) 0 < |z| < 1$或$1 < |z| < +\infty$;

$(C) 0 < |z-i| < 1$或$1 < |z-i| < +\infty$; $(D) 1 < |z-i| < +\infty$.

分析 (C). 在 $f(z)$ 的解析区域中的所有收敛圆环域.

三 计算、证明题

1.将函数 $f(z) = \int_0^z e^{z^2}\,dz$ 在 $z_0 = 0$ 处展成泰勒级数,并指出其收敛半径.

解: $e^{z^2} = 1 + z^2 + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \cdots + \frac{z^{2n}}{n!} + \cdots$, $\int_0^z e^{z^2}\,dz = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{2!}\frac{z^5}{5} + \frac{1}{3!}\frac{z^7}{7} + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{n!(2n+1)}$. $R = +\infty$.

2.将 $f(z) = \frac{1}{z(1-z)^2}$ 分别在下列圆环域内展成洛朗级数

(1) $0 < |z| < 1$ (2) $1 < |z-1| < +\infty$

解:(1) $\frac{1}{(z-1)^2} = (\frac{1}{1-z})' = (1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots)' = 1 + 2z + \cdots + nz^{n-1} + \cdots$

$f(z) = \frac{1}{z(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-2}$.

(2) $f(z) = \frac{1}{z(1-z)^2} = \frac{1}{(z-1)^3}\frac{1}{1+\frac{1}{z-1}} = \frac{1}{(z-1)^3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(z-1)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+3}}$.

3.将 $f(z) = \frac{1}{z^2(z+2)^3}$ 在圆环域 $0 < |z+2| < 1$ 内展成洛朗级数.

解: $f(z) = \frac{1}{z^2(z+2)^3} = \frac{1}{(z+2)^3}(\frac{1}{2-(z-2)})' = \frac{1}{(z+2)^3}\cdot\frac{1}{2}(\frac{1}{1-\frac{z+2}{2}})' = \frac{1}{(z+2)^3}\cdot\frac{1}{2}(1 + \frac{z+2}{2} + \frac{(z+2)^2}{2^2} + \cdots + \frac{(z+2)^n}{2^n} + \cdots)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(z+2)^{n-4}}{2^{n+1}}$.

作业卷（五）

一 判断题

1. $z = 0$ 必为 $f(z) = z\sin\frac{1}{z}$ 的可去奇点.

$\times$. $\sin\frac{1}{z}$ 不再有界. ($z\sin\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!z^{2n}}$.)

2. 若 $f(z) = (z-z_0)^m g(z)$, 且 $g(z)$ 在 z_0 点解析, 则 z_0 必是 $f(z)$ 的 m 级零点.

$\times$. $g(z)$ 有没有贡献? 不确定.

3. 若 z_0 是 $f(z)$ 的 m 级($m>1$)极点, 则 z_0 必为 $f'(z)$ 的 $m+1$ 级极点.

√. $f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}=\varphi(z)(z-z_0)^{-m}, f'(z)=\varphi'(z)(z-z_0)^{-m}-m\varphi(z)(z-z_0)^{-m-1}=\frac{(z-z_0)\varphi'(z)-m\varphi(z)}{(z-z_0)^{m+1}}$.

4. $z_0=0$ 是 $\frac{\tan z}{z}$ 的可去奇点.

√. $\lim_{z\to z_0}\frac{tanz}{z}=1$.

5. 已知$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^{-n-2}$在$1<|z-2|<+\infty$内成立,由式中$c_{-1}=0$知, $\text{Res}[\frac{1}{(z-1)(z-2)},2]=0$.

×. $c_{-1}=0$指的是在2的某<u>空心邻域</u>内的展式. 事实上,$\text{Res}[\frac{1}{(z-1)(z-2)},2]=\lim_{z\to 2}(z-2)\frac{1}{(z-1)(z-2)}=1$.

二 选择、填空题

1. $z_0=1$为函数$(z-1)^2e^{\frac{1}{z-1}}$的_____.

(A) 二级零点; (B) 一级极点; (C)可去奇点; (D) 本性奇点; .

D. $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$; $(z-1)^2e^{\frac{1}{z-1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(z-1)^{n-2}}$.

2. $z_0=-1$是$f(z)=\ln(1+z)$的_____.

(A)非孤立奇点; (B)一级极点; (C)可去奇点; (D) 本性奇点; .

A. 参考 $\ln(z)$ 的解析性.

3. $z_0=0$为函数$\frac{\cos z}{z^2\sin z}$的_____级极点.

3. 分子$\cos 0=1\neq 0$; $z_0=0$为分母$z^2\sin z$的3级零点.

4. $\text{Res}[\frac{z}{(z+2i)^2},-2i]=$_____.

1. $\text{Res}[\frac{z}{(z+2i)^2},-2i]=\frac{1}{(2-1)!}\lim\limits_{z\to -2i}\frac{d}{dz}[(z+2i)^2\frac{z}{(z+2i)^2}]=1$.

三 计算、证明题

1.判断下列函数的孤立奇点的类型，对其极点, 指出其级数:

(1) $f(z)=\tan z$

$z_k=k\pi+\frac{\pi}{2}, k$ 取所有整数, 一级极点.

(2) $g(z)=\frac{e^z}{z^2(e^z-1)}$

$z_0=0$为3级极点, $z_k=2k\pi i, k\neq 0$ 一级极点.

2. 求下列函数在有限孤立奇点处的留数:

(1) $f(z)=\frac{1-\cos z}{z^2}$ (2)$f(z)=\frac{z+1}{z^2-2z}$ (3)$f(z)=\frac{1-e^{2z}}{z^4}$ (4)$f(z)=\frac{1+z^4}{(z^2+1)^3}$ (5)$f(z)=ze^{\frac{3}{z}}$

解(1)法1 $f(z)$的有限孤立奇点仅有$z=0, f(z)=\frac{1}{2}-\frac{z^2}{4!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-2}}{(2n)!}+\cdots$, 由此得$\text{Res}(f,0)=c_{-1}=0$

法2 $f(z)$的有限孤立奇点仅有$z=0, \lim\limits_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z^2}=\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{2z}=\lim\limits_{z\to 0}\frac{\cos z}{2}=\frac{1}{2}$(罗比达法则), 0为$f(z)$的可去奇点, $Res(f,0)=0$

注 有判断错奇点类型的情况(如一阶极点、二阶极点等),可最终留数正确. 为什么? 言多必有失,少说为妙.

(2) $\text{Res}(f,0)=\lim\limits_{z\to 0}zf(z)=\lim\limits_{z\to 0}\frac{z+1}{z-2}=-\frac{1}{2}$, $\text{Res}(f,2)=\lim\limits_{z\to 2}(z-2)f(z)=\lim\limits_{z\to 2}\frac{z+1}{z}=\frac{3}{2}$.

(3)法1 $f(z)=\frac{1-e^{2z}}{z^4}=\frac{1}{z^4}\{1-[1+2z+\frac{(2z)^2}{2!}+\frac{(2z)^3}{}+\cdots+\frac{(2z)^n}{n!}+\cdots]\}$, 由此得 $\text{Res}(f,0)=c_{-1}=-\frac{4}{3}$.

法2 $\text{Res}(f,0)=\frac{1}{(4-1)!}\lim\limits_{z\to 0}(z^4f(z))'''=\frac{1}{6}\lim\limits_{z\to 0}(1-e^{2z})'''=-\frac{4}{3}$.

(4) $\text{Res}(f,i)=\frac{1}{2!}\lim\limits_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}[(z-i)^3\frac{1+z^4}{(z+i)^3(z-i)^3}]=-\frac{3}{8}i$, $\text{Res}(f,-i)=\frac{1}{2!}\lim\limits_{z\to -i}\frac{d^2}{dz^2}[(z+i)^3\frac{1+z^4}{(z+i)^3(z-i)^3}]$
$=\frac{3}{8}i$.

(5) $f(z)=ze^{\frac{3}{z}}=z(1+\frac{3}{z}+\frac{3^2}{2!z^2}+\cdots+\frac{3^n}{n!z^n}+\cdots)$, $\text{Res}(f,0)=c_{-1}=\frac{9}{2}$.

作业卷（六）

1. 求 $f(z)=\frac{\cot \pi z}{(z-1)^2}$ 的孤立奇点.

解$f(z)=\frac{\cos \pi z}{(z-1)^2\sin \pi z}$, $z=1$ 为 $f(z)$ 的三级极点, $z=0,-1,\pm 2,\pm 3,\cdots$ 为一级极点.

2. 设 C 为圆周 $|z|=2$ 的正向, 求 $\oint_C \frac{z}{z^4-1}\,dz$.

解 $\frac{z}{z^4-1}$ 有四个奇点: $1,\ -1,\ i,\ -i$. $\quad \mathrm{Res}(f,\,1)=\lim\limits_{z\to 1}(z-1)\frac{z}{(z^2+1)(z+1)(z-1)}=\frac{1}{4}$, $\quad \mathrm{Res}(f,\,-1)=\lim\limits_{z\to -1}(z+1)\frac{z}{(z^2+1)(z+1)(z-1)}=\frac{1}{4}$, $\quad \mathrm{Res}(f,\,i)=\lim\limits_{z\to i}(z-i)\frac{z}{(z^2-1)(z+i)(z-i)}=-\frac{1}{4}$, $\quad \mathrm{Res}(f,\,-i)=\lim\limits_{z\to -i}(z+i)\frac{z}{(z^2-1)(z+i)(z-i)}=-\frac{1}{4}$. 故 $\oint_C \frac{z}{z^4-1}\,dz=2\pi i\sum_{n=1}^4 \mathrm{Res}(f,\,z_i)=0$, 其中 z_i 指上述奇点, $i=1,\,2,\,3,\,4$.

3. 计算$\oint_{|z|=1} z^4\sin\frac{1}{z}\,dz$.

解原式$=\oint_{|z|=1} z^4(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-\cdots)\,dz=2\pi i\cdot\frac{1}{5!}=\frac{\pi}{60}i$.

4. 求 $\int_C \frac{\cos z-1}{\sin z}\,dz$, 其中 C 为 $|z-\frac{3}{4}\pi|=\frac{\pi}{2}$ 的正向.

解 $\frac{\cos z-1}{\sin z}$ 的奇点为 $z=k\pi, k$ 为任意整数. 但在 C 内只有奇点 $z=\pi, C$ 上无奇点, 故

原式 $=2\pi i\mathrm{Res}(f,\pi)=2\pi i\lim\limits_{z\to\pi}(z-\pi)\frac{\cos z-1}{\sin z}=2\pi i\lim\limits_{z\to\pi}\frac{1}{\cos\pi}\cdot(-2)=4\pi i$.

5. 设 z_0 为 $f(z)$ 的一级极点,且 $\mathrm{Res}[f(z),z_0]=a$, 而 $\varphi(z)$ 在 z_0 点解析, $\varphi(z_0)=b\neq 0$, 试证: $\mathrm{Res}[f(z)\varphi(z),z_0]=ab$.

证由 $\mathrm{Res}[f(z),z_0]=a$, 及 z_0 为 $f(z)$ 的一级极点, 可设 $f(z)=\sum_{n=-1}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n$, $c_{-1}=a$. 由 $\varphi(z)$ 在点 z_0 解析, 可设 $\phi(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}d_n(z-z_0)^n$, $d_0=b$. 则 $f(z)\varphi(z)=\sum_{n=-1}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n\sum_{n=0}^{+\infty}d_n(z-z_0)^n$, 其中 z_{-1} 项系数为 $c_{-1}d=ab$, 即$\mathrm{Res}[f(z)\varphi(z),z_0]=ab$. (注: 由证明可以看出, $b\neq 0$ 无关紧要.)

也可用一阶极点留数的求法证.

6. 计算积分 $\int_0^2\pi\frac{1}{2+cos\theta}\,d\theta$.

cf 课本p.94 例5.4.1.

7. 计算积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+4}\,dx$.

解$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2+4}\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^2+4}\,dx+i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+4}\,dx=2\pi i\lim\limits_{z\to 2i}(z-2i)\frac{ze^{iz}}{(z+2i)(z-2i)}=\pi e^{-2}i$, 由此得 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+4}\,dx=\pi e^{-2}$.

作业卷（七）

一 选择、填空题

1. 矢量场 $\vec{A}=yz^2\vec{i}+zx^2\vec{j}+xy^2\vec{k}$ 在点 $P(1,1,-1)$ 处的散度 $\mathrm{div}\vec{A}=$_____, 旋度 $\mathrm{rot}\vec{A}=$_____.

解 $\mathrm{div}\vec{A}(P)=(\frac{\partial yz^2}{\partial x}+\frac{\partial zx^2}{\partial y}+\frac{\partial xy^2}{\partial z})|_{(1,1,-1)}=0$, $\mathrm{rot}\vec{A}(P)=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ yz^2&zx^2&xy^2\end{vmatrix}_{(1,1,-1)}=\{1,-3,-3\}$.

2. 矢量场 $\vec{A}=\{x^3,y^3,z^3\}$ 穿出闭曲面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 外侧的通量 $\Phi=$_____

解 $\Phi=\iint\limits_S\vec{A}\cdot d\vec{S}=\iint\limits_S x^3\,dydz+y^3\,dzdx+z^3\,dxdy=\iiint\limits_V(\frac{\partial x^3}{\partial x}+\frac{\partial y^3}{\partial y}+\frac{\partial z^3}{\partial z})\,dV=\iiint\limits_V 3(x^2+y^2+z^2)\,dV=3\iiint\limits_V r^2\,dxdydz=3\int_0^\pi\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{2\pi}\,d\theta\int_0^R r^4\,dr=3\cdot 2\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{5}R^5=\frac{12}{5}\pi R^5$.

3 设 $u(x,y,z)$ 为数量函数, $\vec{A}(x,y,z)$ 为矢量函数, 则下列有意义的式子的序号为_________.

① $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{A})$; ② $\mathrm{grad}(\mathrm{grad}u)$; ③ $\mathrm{div}(\mathrm{div}\vec{A})$; ④ $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\vec{A})$; ⑤ $\mathrm{grad}(\mathrm{rot}\vec{A})$; ⑥ $\mathrm{grad}(\mathrm{div}\vec{A})$

解 ① $\mathrm{rot}\vec{A}$ 为矢量,可求散度. ② $\mathrm{grad}u$ 为矢量,不可求梯度. ③ $\mathrm{div}\vec{A}$为散度, 标量,不可求散度. ④ 旋度为矢量,可再求旋度. ⑤ 旋度为矢量, 不可对矢量求梯度. ⑥ 散度为矢量,可求散度的梯度. 故①,④,⑥.

4. 若矢量场 $\vec{A}=\{ax+by,\,2ax+by+2z,\,2y-6z\}$ 为调和场, 则 $a=$_____, $b=$_____.

解由 $\vec{A}$ 调和, $\mathrm{div}\vec{A}=\frac{\partial}{\partial x}(ax+by)+\frac{\partial}{\partial y}(2ax+by+2z)+\frac{\partial}{\partial z}(2y-6z)=a+b-6=0$; $\mathrm{rot}\vec{A}=$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ax+by & 2ax+by+2z & 2y-6z \end{vmatrix} = \{0,0,2a-b\} = \vec{0}.$$ 由此得 $a=2,\ b=4$.

5.数量场 $u = 3x^2z - xy + z^2$ 在点 $P(1,-1,0)$ 处沿方向 $\vec{\Gamma} =$ _______ 的方向导数最大, 其最大值为_____.

解 $\mathrm{grad}u|_P = \{6xz - y,\ -x\,3x^2+2z\}|_(1,-1,0) = \{1,-1,3\},\ |\{1,-1,3\}| = \sqrt{1^2+9-1)^2+3^2} = \sqrt{11}.$

6. 设 $u = f(x,y,z)$ 具有二阶连续偏导数, 则 $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}u) =$ _____.

解 $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}u) = \mathrm{rot}\{u_x,u_y,u_z\} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = \vec{0}.$

7. 矢量场 $\vec{A} = (x^2+xy^2)\vec{i} + (y^2+x^2y)\vec{j} + e\vec{k}$ 必是_____.

解 $\mathrm{div}\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2+x^2y) + \frac{\partial}{\partial z}(e) = 2x+y^2+2y+x^2$ 不恒等于零, $\vec{A}$ 不是无源场, 不是调和场. $\mathrm{rot}A = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2+xy^2 & y^2+x^2y & e \end{vmatrix} = \vec{0}$, $\vec{A}$ 是无旋场;由于所讨论的区域为整个平面为线单连域, 从而 $\vec{A}$ 也是有势场. B,D.

8. 矢量场 $\vec{A} = -y\vec{i} + x\vec{j} + 3\vec{k}$ 沿正向圆周曲线$\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ z=0 \end{cases}$ 的环量为_____.

解该正向圆周曲线的参数方程为$\begin{cases} x = 3\cos\theta \\ y = 3\sin\theta,\ 0\le\theta<2\pi, \\ z=0 \end{cases}$ $\oint_C \vec{A}\cdot dl = \oint_C -ydx+xdy = \iint\limits_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ -y & x \end{vmatrix} dxdy = 2\iint\limits_D dxdy = 2\cdot\pi 3^2 = 18\pi.$

二 计算题

1. 求 $u = \ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在 $A(1,0,1)$ 点处从 A 指向 $B(3,-2,2)$ 的方向导数.

解 $\mathrm{grad}u|_A = \left(\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}},\ \frac{\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}}{x+\sqrt{y^2+z^2}},\ \frac{\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\right)_{(1,0,1)} = \{\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\},\ \vec{AB} = \{2,-2,1\}$, 所求方向导数 $= \{\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\}\cdot\frac{1}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}\{2,-2,1\} = \frac{1}{2}$

2. 设 $\vec{\gamma} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},\ \gamma = |\vec{\gamma}|,\ \vec{a},\ \vec{b}$ 为常矢量, $f(r)$ 为可微函数, 试求:

(1)$\mathrm{div}[f(r)\vec{r}]$ (2)$\mathrm{grad}(\vec{r},\vec{a})$ (3)$\mathrm{rot}[f(r)\vec{b} + (\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{a}]$ (4)$\mathrm{div}[f(r)\vec{r}\times\vec{a}]$

解 (1)$\mathrm{div}[f(r)\vec{r}] = \frac{\partial}{\partial x}[f(r)x] + \frac{\partial}{\partial y}[f(r)y] + \frac{\partial}{\partial z}[f(r)z] = 3f(r) + f'(r)r.$

(2)$\mathrm{grad}(\vec{r},\vec{a}) = \mathrm{grad}(xa_1+ya_2+za_3) = \vec{a}.$

(3)$\mathrm{rot}[f(r)\vec{b}] = \frac{f'(r)}{r}(b_3y-b_2z,\ b_1z-b_3x,\ b_2x-b_1y)$, $\mathrm{rot}[(\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{a}] = \vec{0}$, $\mathrm{rot}[f(r)\vec{b} + (\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{a}] = [\nabla f(r)]\times\vec{b}$

(4)$\mathrm{div}[f(r)\vec{r}\times\vec{a}] = \mathrm{div}[f(r)(a_3y-a_2z),\ f(r)(a_1z-a_3x,\ f(r)(a_2x-a_1y)] = f'(r)\frac{1}{r}(a_3xy-a_2xz+a_1yz-a_3xy+a_2xz-a_1yz) = 0$

3. 设力场 $\vec{F} = 2xyz^3\vec{i} + x^2z^3\vec{j} + 3x^2yz^2\vec{k}$, (1) 试证 $\vec{F}$ 为有势场, 并求出 $\vec{F}$ 的所有原函数 $u(x,y,z)$ 及势函数 $v(x,y,z)$; (2) 求质点在力场内从 $A(1,4,1)$ 移动到 $B(2,3,1)$ 所作的功.

解(1) $\mathrm{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xyz^3 & x^2y^3 & 3x^2yz^2 \end{vmatrix} \equiv \vec{0}$, 故 $\vec{F}$ 为有势场. $u = \int_0^x 0\,dx + \int_0^y 0\,dy + \int_0^z 3x^2yz^2\,dz + C = x^2yz_3 + C,\ v = -x^2yz^3 + C$

(2) $w = u(2,3,1) - u(1,4,1) = 12 - 4 = 8.$

4. 函数 $u=\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点 $P(1,1,1)$ 处沿曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在该点内侧法向量的方向导数.

解 $F_x=4x$, $F_y=6y$, $F_z=2z$, P 点内侧法向量: $-(4,\ 6,\ 2)$. $\mathrm{grad}u|_p=(\frac{6x}{z\sqrt{6x^2+8y^2}},\ \frac{8y}{z\sqrt{6x^2+8y^2}},\ \sqrt{6x^2+8y^2(-\frac{1}{z^2})})|_p$ $(\frac{6}{\sqrt{14}},\ \frac{8}{\sqrt{14}},\ -\sqrt{14})$, 所求方向导数: $(\frac{6}{\sqrt{14}},\ \frac{8}{\sqrt{14}},\ -\sqrt{14})\cdot\frac{-1}{\sqrt{56}}(4,6,2)=-\frac{11}{7}$.

作业卷（八）

1. 写出下列Laplace变换结果

$L[e^{-3t}\cos 2t]=$________. $L[\int_0^1\cos 2t\,dt]=$________. $L[t\cos 2t]=$________. $L[(t-1)^2e^{-t}]=$________.

解 (1)$L[\cos 2t]=\frac{s}{s^2+4}$, 由位移性质, $L[e^{-3t}\cos 2t]=\frac{s+3}{(s+3)^2+4}$. (2)$L[\int_0^1\cos 2t\,dt]=L[\frac{\sin 2}{2}]=\frac{\sin 2}{2s}$ (3)$L[\cos 2t]=\frac{s}{s^2+4}$, 由象函数的微分性质, $L[t\cos 2t]=-\frac{d}{ds}\frac{s}{s^2+4}=\frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$. (4)$L[(t-1)^2e^{-t}]=L[(t^2-2t+1)e^{-t}]=L[t^2e^{-t}]-L[2te^{-t}]+L[e^{-t}]=(-1)^2\frac{d^2}{ds^2}\frac{1}{s+1}-2(-1)\frac{d}{ds}\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+1}=\frac{s^2+1}{(s+1)^3}$

2. 求下列函数的拉氏变换

(1) $f(t)=\begin{cases}3 & 0\le t<2\\ 2 & t\ge 2\end{cases}$ (2) $f(t)=\int_0^t\frac{\sin t}{t}\,dt$ (3) $f(t)=\sin^2 kt$ (4) $f(t)=1+\delta(t)+u(t-\frac{1}{2})$

解 (1) $\mathcal{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}\,dt=\int_0^2 3e^{-st}\,dt+\int_2^{+\infty}2e^{-st}\,dt=\frac{3}{s}-\frac{1}{s}e^{-2s}$.

(2) $\mathcal{L}[f(t)]=\frac{1}{s}\mathcal{L}[\frac{\sin t}{t}]=\frac{1}{s}\int_s^\infty\frac{1}{s^2+1}\,ds=\frac{1}{s}\arctan s|_s^\infty=\frac{1}{s}\mathrm{arccots}$.

(3) $\mathcal{L}[f(t)]=\mathcal{L}[\frac{1-\cos 2kt}{2}]=\frac{1}{2}\{\mathcal{L}[1]-\mathcal{L}[\cos 2kt]\}=\frac{1}{2}\{\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4k^2}\}=\frac{2k^2}{s(s^2+4k^2)}$.

(4) $\mathcal{L}[1+\delta(t)+u(t-\frac{1}{2})]=\frac{1}{s}+1+\frac{1}{s}e^{-\frac{s}{2}}$.

3. 求拉式逆变换 (1) $L^{-1}[\frac{1}{s^4}]=Res(\frac{e^{st}}{s^4},0)\overset{\text{展开}}{=}\frac{t^3}{6}$.

(2) $L^{-1}[\frac{1}{s^2(s-1)}]=L^{-1}[\frac{-1}{s}+\frac{-1}{s^2}+\frac{1}{s-1}]=e^t-t-1$.

(3) $L^{-1}[\frac{s^2+2s-1}{s(s-1)^2}]=L^{-1}[\frac{-1}{s}+\frac{2}{s-1}+\frac{2}{(s-1)^2}]=-1+2e^t+2te^t=2(1+t)e^t-1$.

4. 求下列函数的拉氏变换 (1) $f(t)=\frac{e^t-e^{2t}}{t}$ (2) $f(t)=t\int_0^t e^{-3t}\cos 2t\,dt$

解 (1) $\mathcal{L}[e^t-e^{2t}]=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s-2}$, 故 $\mathcal{L}[\frac{e^t-e^{2t}}{t}]=\int_s^\infty(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s-2})\,ds=\ln\frac{s-2}{s-1}$.

(2) $\mathcal{L}[\cos 2t]=\frac{s}{s^2+4}$, $\mathcal{L}[e^{-3t}\cos 2t]=\frac{s+3}{(s+3)^2+4}$, $\mathcal{L}[\int_0^t e^{-3t}\cos 2t\,dt]=\frac{1}{s}\frac{s+3}{(s+3)^2+4}$, $\mathcal{L}[t\int_0^t e^{-3t}\cos 2t\,dt]=-(\frac{s+3}{s(s^2+6s+13)})'=\frac{2s^3+15s^2+36s+39}{s^2(s^2+6s+13)^2}$.

5. 求下列象函数的拉氏逆变换 (1) $F(s)=\frac{s^2+2s+2}{(s+1)(s+2)^2}$ (2) $F(s)=\ln\frac{s+2}{s-2}$

解 (1) $\mathcal{L}[F(s)=[\frac{1}{s+1}-\frac{2}{(s+2)^2}]=e^{-t}-2te^{-2t}$.

(2) $F'(s)=\frac{-2\cdot 2}{s^2-4}$, $\mathcal{L}^{-1}[F'(s)]=-2\mathrm{sh}2t$, $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\mathcal{L}^{-1}[-\int_s^\infty F'(s)\,ds]=\frac{2\mathrm{sh}2t}{t}$.

6. 已知 $L[\cos 2t]=\frac{s}{s^2+4}$, 试用Laplace变换计算广义积分 $\int_0^{+\infty}te^{-3t}\cos 2t\,dt$.

解 $\int_0^{+\infty}e^{-st}\cos 2t\,dt=\frac{s}{s^2+4}$, $-\frac{d}{ds}\int_0^{+\infty}e^{-st}\cos 2t\,dt=\int_0^{+\infty}te^{-st}\cos 2t\,dt=-\frac{d}{ds}\frac{s}{s^2+4}=\frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$, 故 $\int_0^{+\infty}te^{-3t}\cos 2t\,dt=\frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}|_{s=3}=\frac{5}{169}$.

7. 利用Laplace变换求微分方程 $y''+2y'-3y=e^{-t}$ 满足条件 $y(0)=0$, $y'(0)=1$ 的特解.

解 $\mathcal{L}[y''+2y'-3y]=\mathcal{L}[e^{-t}]$, $s^2F(s)-sy(0)-y'(0)+2sF(s)-2y(0)-3F(s)=\frac{1}{s+1}$, $F(s)=\frac{s+2}{(s+3)(s+1)(s-1)}$, $y=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\Sigma\mathrm{Res}[F(s)e^{st},\ s_k]=\lim\limits_{s\to-3}(s+3)\frac{s+2}{(s+3)(s+1)(s-1)}e^{st}+\lim\limits_{s\to-1}(s+1)\frac{s+2}{(s+3)(s+1)(s-1)}e^{st}+\lim\limits_{s\to 1}(s-1)\frac{s+2}{(s+3)(s+1)(s-1)}e^{st}=\frac{3}{8}e^t-\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{8}e^{-3t}$.

解法二(部分分式) $F(s)=\frac{s+2}{(s+3)(s+1)(s-1)}=\frac{A}{s+3}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{s-1}$, $s+2=A(s+1)(s-1)+B(s+3)(s-1)+C(S+3)(S+1)$. 分别令 $s\to-3$, -1 1, 得 $A=-\frac{1}{8}$, $B=-\frac{1}{4}$, $C=\frac{3}{8}$. 逐项求逆变换,即得所求特解.