2017-2018学年第二学期期末考试B卷参考答案

一、单项选择题(每小题3分，共6个小题，总共18分).

1.【正解】$\frac{20}{29}$;独立

【解析】$P(A|A\cup B)=\frac{P(A(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A\cup B)}=\frac{0.4}{0.58}=\frac{20}{29}$,由于$P(A\cup B)=P(A)+P(B$
$-P(AB)$,得到$P(AB)=0.4+0.3-0.58=0.12=P(A)P(B)$,因此$A$与$B$相互.

【考点延伸】《考试宝典》第一章 随机事件与概率 1.4、概率的基本公式

2.【正解】$2,\frac{2}{e^2-1}$

【解析】有$DX=\lambda=2$,$P\{X=1|X\geqslant1\}=\frac{P\{X=1,X\geqslant1\}}{P\{X\geqslant1\}}=\frac{P\{X=1\}}{1-P\{X=0\}}=\frac{2e^{-2}}{1-e^{-2}}$
$=\frac{2}{e^2-1}$.

【考点延伸】《考试宝典》第二章 一维随机变量及分布 2.2、离散型随机变量及分布

3.【正解】$0.5,\frac{3}{4}$

【 解 析 】 有 $X-Y-1\sim N(0,8)$ ，则 $P\{X-1>Y\}=P\{X-Y-1>0\}=0.5$ ，
$Cov(2X+Y,2X-Y)$
$=Cov(2X,2X)-Cov(2X,Y)+Cov(Y,2X)-Cov(Y,Y)=4DX-DY=12$, $D(2X-Y)=4DX+$
$-2Cov(2X,Y)=16+4-4\cdot\rho_{XY}\cdot\sqrt{DXDY}=20-4\cdot0.75\cdot4=8$,同理得到$D(2X+Y)=32$,因

$$\rho=\frac{Cov(2X+Y,2X-Y)}{\sqrt{D(2X+Y)\cdot D(2X-Y)}}=\frac{12}{\sqrt{8\cdot32}}=\frac{3}{4}.$$

【考点延伸】《考试宝典》第四章 随机变量的数字特征 4.4、协方差与相关系数

4.【正解】$\frac{3}{4},\frac{13}{3},0.16$

【解析】

$P\{\max(X_1,X_2)>2\}=1-P\{\max(X_1,X_2)\leqslant2\}=1-P\{X_1\leqslant2\}P\{X_2\leqslant2\}=1-\left(\frac{2-1}{3-1}\right)^2=$

$$\text{有}EX=2,DX=\frac{1}{3},\text{则}P\left(\bar{X}>\frac{49}{24}\right)=P\left(\frac{\bar{X}-2}{\sqrt{\frac{\frac{1}{3}}{192}}}>\frac{\frac{49}{24}-2}{\sqrt{\frac{\frac{1}{3}}{192}}}\right)=1-P\left(\frac{\bar{X}-2}{\sqrt{\frac{\frac{1}{3}}{192}}}\leqslant\frac{\frac{49}{24}-2}{\sqrt{\frac{\frac{1}{3}}{192}}}\right)$$

$\approx1-\Phi(1)=1-0.84=0.16$.

【考点延伸】《考试宝典》第五章 大数定律与中心极限定理 5.2、大数定理

5.【正解】16,(1.396,6.134),0.1,接受

【解析】有 $\bar{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{16}\right)\Rightarrow\frac{4\left(\bar{X}-\mu\right)}{\sigma}\sim N(0,1)$,则当$a=16$时,有$\frac{a\bar{X}^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(1)$.$\sigma^2$的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)=\left(\frac{15\times1.6^2}{27.5},\frac{15\times1.6^2}{6.26}\right)=(1.396,6.134)$$

选取 t 检验$T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S}\sqrt{n}\sim t(n-1)$,则$|t|=1.34$,拒绝域$T\leqslant -t_\alpha(n-1)=1.75$,故接受原假设

【考点延伸】《考试宝典》第九章 假设检验

二.【解析】(1)$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^1 axdx+\int_1^2 a(x-1)dx=a$

(2)$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0,x<0\\ \frac{x^2}{2},0\leqslant x<1\\ \frac{x^2}{2}-x+1,1\leqslant x<2\\ 1,x\geqslant 2\end{cases}$

(3)$F(c)=P\{X\leqslant c\}=0.32\Rightarrow 0<c<1,F(c)=\frac{c^2}{2}=0.32\Rightarrow c=0.8$

(4)$E[(X-1)^2]=\int_0^1 x(x-1)^2dx+\int_1^2(x-1)^3dx=\frac{1}{3}$.

【考点延伸】《考试宝典》第二章 一维随机变量及分布 2.5、一维随机变量的函数的分布

三.【解析】(1) $P(X=0)=0.6,P(X=1)=0.4,P(Y=0)=0.36,P(Y=1)=0.48$,

$P(Y=2)=0.16$,$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0\Rightarrow E(XY)=0.32$,所以

$E(XY)=P(X=1,Y=1)+2P(X=1,Y=2)=P(X=1,Y=1)=0.32$

$P(X=0,Y=1)=P(Y=1)-P(X=1,Y=1)=0.16,P(X=0,Y=2)=P(Y=2)=0.16$

$P(X=1,Y=0)=P(X=1)-P(X=1,Y=1)-P(X=1,Y=2)=0.08$

$P(X=0,Y=0)=0.28$

(2) $P(X=1,Y=2)=0\neq P(X=1)P(Y=2)=P(X=1,Y=1)=0.064$,所以$X$与$Y$不独立.

【考点延伸】《考试宝典》第三章 二维随机变量及分布 3.2、二维离散型随机变量及分布

四.(13分)【解析】(1) $F(1,0.5)=\int_{0.5}^{1}\mathrm{d}x\int_{1-x}^{0.5}3x\,\mathrm{d}y=\frac{5}{16}$;

(2)$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_{1-x}^{1}3x\,\mathrm{d}y=3x^2, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$;

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_{1-y}^{1}3x\,\mathrm{d}x=3y-3y^2/2, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$,则可以得到$X$与$Y$不独立,因为有

$$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y),\quad 0<x,y<1$$

(3) $E(XY)=\int_0^1 dx\int_{1-x}^1 3x^2 y dy=\frac{9}{20}$, $E(X)=\int_0^1 dx\int_{1-x}^1 3x^2 dy=\frac{3}{4}$,

$E(Y)=\int_0^1 dx\int_{1-x}^1 3xy dy=\frac{5}{8}$, $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{-3}{160}<0$, 则 X 与 Y 相关.

【考点延伸】《考试宝典》第三章 二维随机变量及分布 3.6、二维随机变量函数的分布

五.(8 分)【解析】

X的取值	(0,1]	(1,1.5]	(1.5,2]	(2,2.5]	(2.5,3
频数	15	27	36	56	82
理论概率	$\frac{8}{216}$	$\frac{19}{216}$	$\frac{37}{216}$	$\frac{61}{216}$	$\frac{91}{216}$
理论频数	8	19	37	61	91

$\chi^2=\sum_{k=1}^{n}\frac{n_k^2}{np_k}-n=10.82>\chi^2_{0.05}(4)=9.49$,拒绝原假设

【考点延伸】《考试宝典》第九章 假设检验

六.【解析】(1)矩估计法: $\mu_1=E(X)=\frac{\theta}{2}$, $\hat{\mu}_1=\bar{X}$,所以θ的矩估计量$\hat{\theta}=2\bar{X}$

极大似然估计:似然函数$L(\theta)=\theta^{-n}$, $0\le x_i\le\theta, i=1,\dots,n$,似然函数是$\theta$的单调函数,且

$\theta\ge\max\{X_1,\dots,X_n\}$,所以$\theta$的极大似然估计量为$\hat{\theta}=\max\{X_1,\dots,X_n\}$.

(2) $E(\hat{\theta}_1)=E(2X_1)=\theta$, $E(\hat{\theta}_2)=\theta_2$, $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$均是$\theta$的无偏估计,计算得$M=\max\{X_1,X_2\}$得密度函数

$f_M(x)=\begin{cases}\frac{2x}{\theta^2}, 0\le x\le\theta,\\ 0, \quad 其它.\end{cases}$ $E(\hat{\theta}_3)=\frac{3}{2}\int_0^\theta\frac{2x^2}{\theta^2}dx=\frac{3}{2}\times\frac{2\theta}{3}=\theta$; 则$\hat{\theta}_3$也是$\theta$的无偏估计

(3) $\mathrm{Var}(\hat{\theta}_1)=\mathrm{Var}(2X_1)=\frac{\theta^2}{3}$, $\mathrm{Var}(\hat{\theta}_2)=2\mathrm{Var}(X_1)=\frac{\theta^2}{6}$, $E(\hat{\theta}_3^2)=\frac{9\theta^2}{8}$, $\mathrm{Var}(\hat{\theta}_3)=\frac{\theta^2}{8}$

因此$\hat{\theta}_3$最有效.

【考点延伸】《考试宝典》第七章 点估计 7.1、点估计