§3.2 傅立叶变换

（下）

4．奇偶虚实性

设$f(t)$是实函数

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\,\mathrm{d}\,t \quad =\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}\,t - i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\,\mathrm{d}\,t$$

显然

$$\left.\begin{aligned} R(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}\,t \\ X(\omega) &= -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\omega t)\,\mathrm{d}\,t \end{aligned}\right\}$$

关于ω 的偶函数 $R(\omega)=R(-\omega)$

关于ω 的奇函数 $X(\omega)=-X(-\omega)$

所以 $F(-\omega)=R(\omega)-iX(\omega)=F^*(\omega)$

又已知:$f(-t)\leftrightarrow F(-\omega)$ $\qquad \therefore f(-t)\leftrightarrow F^*(\omega)$

（ $f(t)$为虚函数或复函数情况相似，自证）

时域		频域
实函数 — 实偶函数：	$X(\omega)=0\,;R(\omega)=R(-\omega)$	$F(\omega)=R(\omega)$
实函数 — 实奇函数：	$X(\omega)=-X(-\omega)\,;R(\omega)=0$	$F(\omega)=iX(\omega)$
纯虚函数 — 虚偶函数：	$X(\omega)=X(-\omega)\,;R(\omega)=0$	$F(\omega)=iX(\omega)$
纯虚函数 — 虚奇函数：	$X(\omega)=0\,;R(\omega)=-R(-\omega)$	$F(\omega)=R(\omega)$

即： 实偶_实偶

实奇_虚奇

虚偶_虚偶

虚奇_实奇

例3-10 教材p145

例 3-10 设 $x(t)$ 的傅里叶变换 $X(\omega)$ 满足以下条件：

① $x(t)$ 为实值信号，且 $x(t)=0,\ t\leqslant 0$；

② $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}\left[X(\omega)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega=\mathrm{e}^{-|t|}$。

试确定 $x(t)$。

解：由条件① $x(t)$ 为实值信号，设

$$x(t)\leftrightarrow X(\omega)=\mathrm{Re}\left[X(\omega)\right]+\mathrm{jIm}\left[X(\omega)\right]$$

则有 $\mathrm{Re}\left[X(-\omega)\right]=\mathrm{Re}\left[X(\omega)\right]\qquad \mathrm{Im}\left[X(-\omega)\right]=-\mathrm{Im}\left[X(\omega)\right]$

依据反折性质，有 $x(-t)\leftrightarrow X(-\omega)=\mathrm{Re}\left[X(\omega)\right]-\mathrm{jIm}\left[X(\omega)\right]$

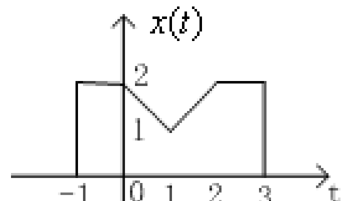
整合以上两式，得 $x(t)+x(-t)\leftrightarrow 2\mathrm{Re}\left[X(\omega)\right]$ 或 $\boxed{x_e(t)\leftrightarrow \mathrm{Re}\left[X(\omega)\right]}$

由条件②可知 $x_e(t)=\mathrm{e}^{-|t|}=\mathrm{e}^{-t}\mathrm{u}(t)+\mathrm{e}^{t}\mathrm{u}(-t)=\frac{x(t)+x(-t)}{2}$

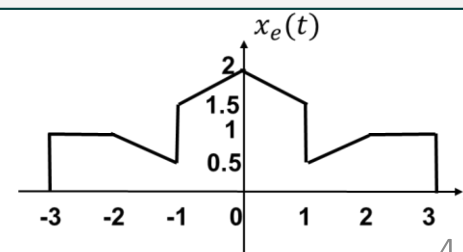
结合条件①，有 $x(t)=2\mathrm{e}^{-t}\mathrm{u}(t)$

得到结论： 实函数的偶分量的傅里叶变换是原函数傅里叶变换的实部；实函数的奇分量的傅里叶变换是原函数傅里叶变换的虚部*j；

思考：画出谱函数实部Re[X(ω)]的傅里叶反变换信号的波形图



答：



5、时移特性 $f(t-t_0) \leftrightarrow F(\omega)e^{-i\omega t_0}$

证明：

$$\mathrm{F}[f(t-t_0)] \overset{x=t-t_0}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega\,(x+t_0)}dx$$

$$= e^{-i\omega t_0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx = e^{-i\omega t_0}F(\omega)$$

讨论：$f\,(at-b)$的FT.

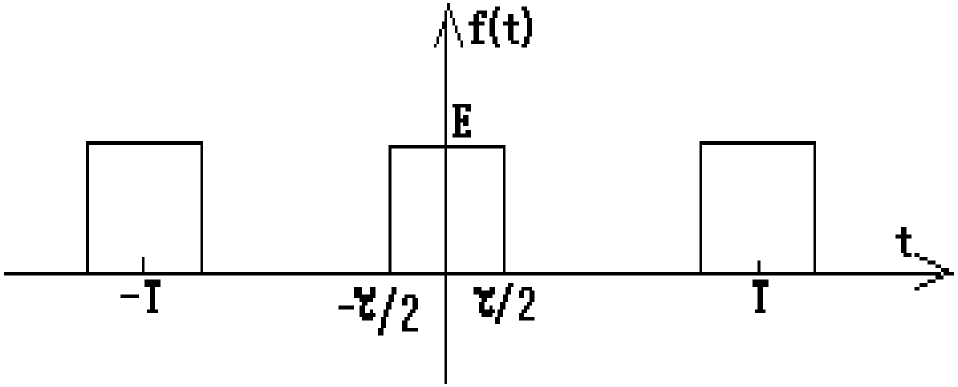
理解推导过程

$$f(t-b) \leftrightarrow F(\omega)e^{-i\omega b}$$

$$f(at-b) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})e^{-i\frac{\omega}{a}b} = \frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})e^{-i\frac{b}{a}\omega}$$

或：$f\,(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})$ $\quad f[a(t-\frac{b}{a})] \leftrightarrow \frac{1}{|a|}F(\frac{\omega}{a})e^{-i\frac{b}{a}\,\omega}$

例：求三脉冲信号的频谱

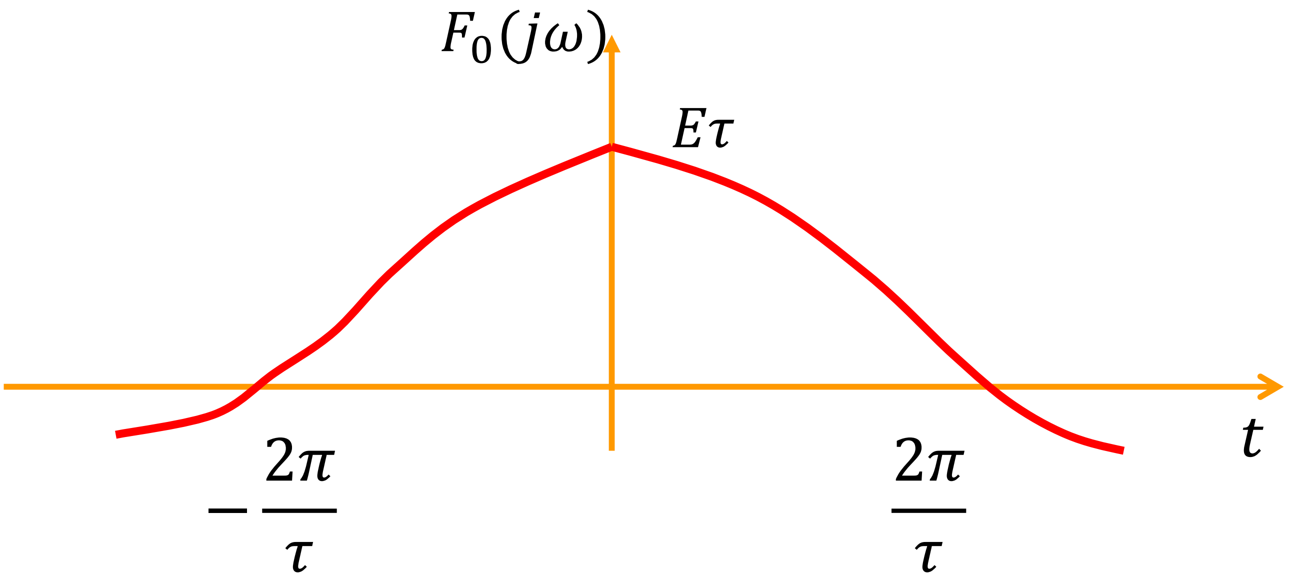


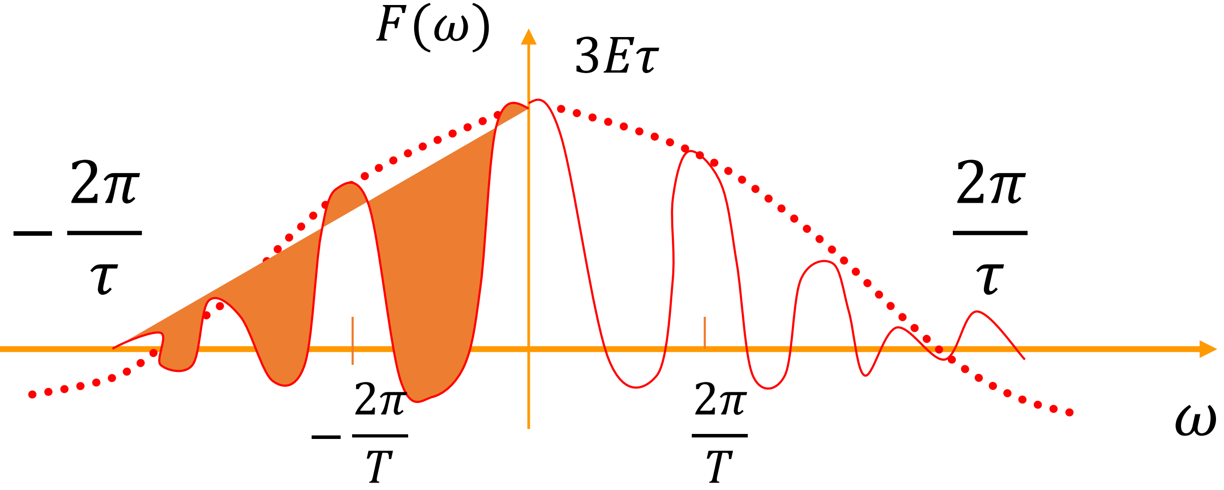
单矩形脉冲 $f_0(t)$ 的频谱为 $F_0(j\omega) = E\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$

有三脉冲信号 $f(t) = f_0(t) + f_0(t+T) + f_0(t-T)$

其频谱为

$$
\begin{aligned}
F(j\omega) &= F_0(j\omega)(1 + e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}) \\
&= F_0(j\omega)(1 + 2\cos\omega T) \\
&= E\tau\ Sa(\frac{\omega\tau}{2})(1 + 2\cos\omega T)
\end{aligned}
$$


$F_0(j\omega)$
$E\tau$
t
$-\frac{2\pi}{\tau}$
$\frac{2\pi}{\tau}$


$F(\omega)$
$3E\tau$
$-\frac{2\pi}{\tau}$
$\frac{2\pi}{\tau}$
$-\frac{2\pi}{T}$
$\frac{2\pi}{T}$
ω

6、频移特性 $f(t)e^{i\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega-\omega_0)$

证明： $\mathcal{F}[\,f(t)e^{i\omega_0 t}\,] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega_0 t}e^{-i\omega t}dt$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(\omega-\omega_0)t}dt = F(\omega-\omega_0)$$

讨论:1. $f(t)\cos\omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2}[F(\omega+\omega_0)+F(\omega-\omega_0)]$

$f(t)\sin\omega_0 t \leftrightarrow \frac{i}{2}[F(\omega+\omega_0)-F(\omega-\omega_0)]$

调制定理

$$f(t)\cos\omega_0 t = f(t)\frac{e^{i\omega_0 t}+e^{-i\omega_0 t}}{2} \leftrightarrow \frac{1}{2}[F(\omega-\omega_0)+F(\omega+\omega_0)]$$

$$f(t)\sin\omega_0 t = f(t)i\frac{e^{i\omega_0 t}-e^{-i\omega_0 t}}{2} \leftrightarrow \frac{i}{2}[F(\omega+\omega_0)-F(\omega-\omega_0)]$$

调制定理

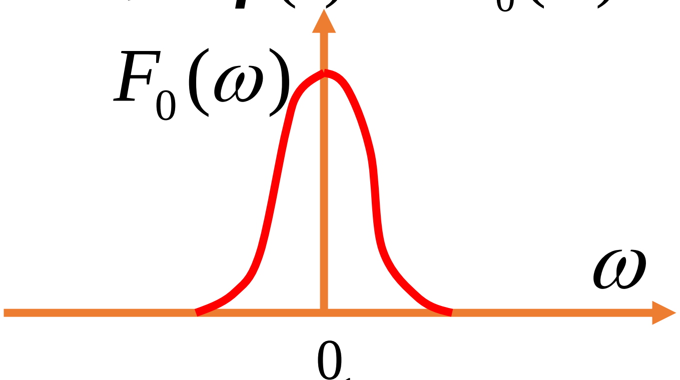
$$\mathscr{F}[\,f(t)\cos\omega_0 t\,]$$

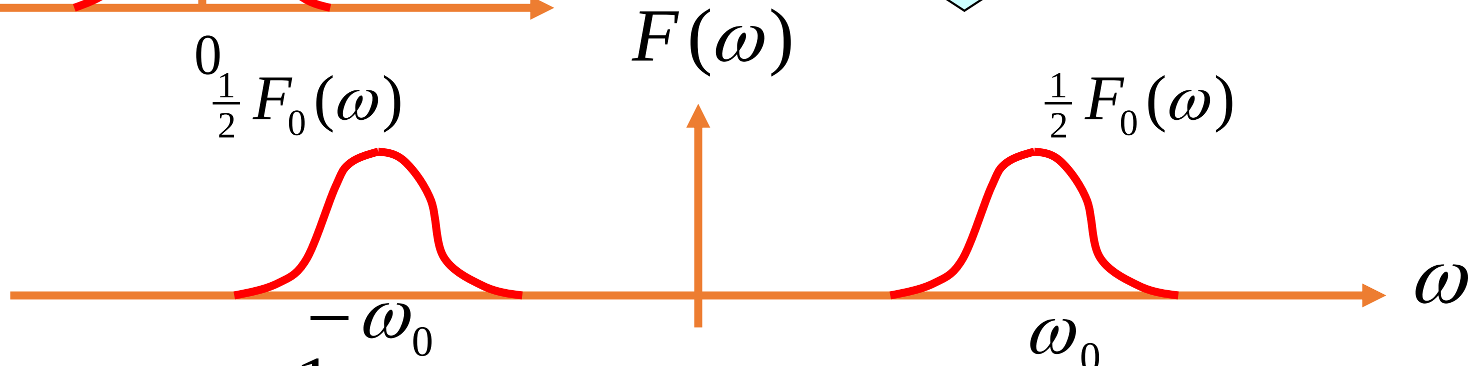
设：$f(t) \leftrightarrow F_0(\omega)$

$$\frac{1}{2}f(t)[e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}]$$

频移特性

Amplitude modulation (AM)





$$\frac{1}{2}[F_0(\omega+\omega_0)+F_0(\omega-\omega_0)]$$

在时域中用高频余弦函数（载波信号），去乘一个具有低频特性的信号（调制信号），反映在频域中，是把调制信号的频谱搬移到高频处，成为高频窄带信号，$f(t)\cos\omega_0 t$ 叫已调幅信号，确切地称之抑制载波双边带调幅信号。

2. $e^{i\omega_0 t} \leftrightarrow ?$

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \qquad f(t)e^{i\omega_0 t} \leftrightarrow \boldsymbol{F}(\omega-\omega_0)$$

$$e^{i\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega\text{-}\omega_0)$$

3. $\cos\omega_0 \boldsymbol{t} \leftrightarrow \pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$

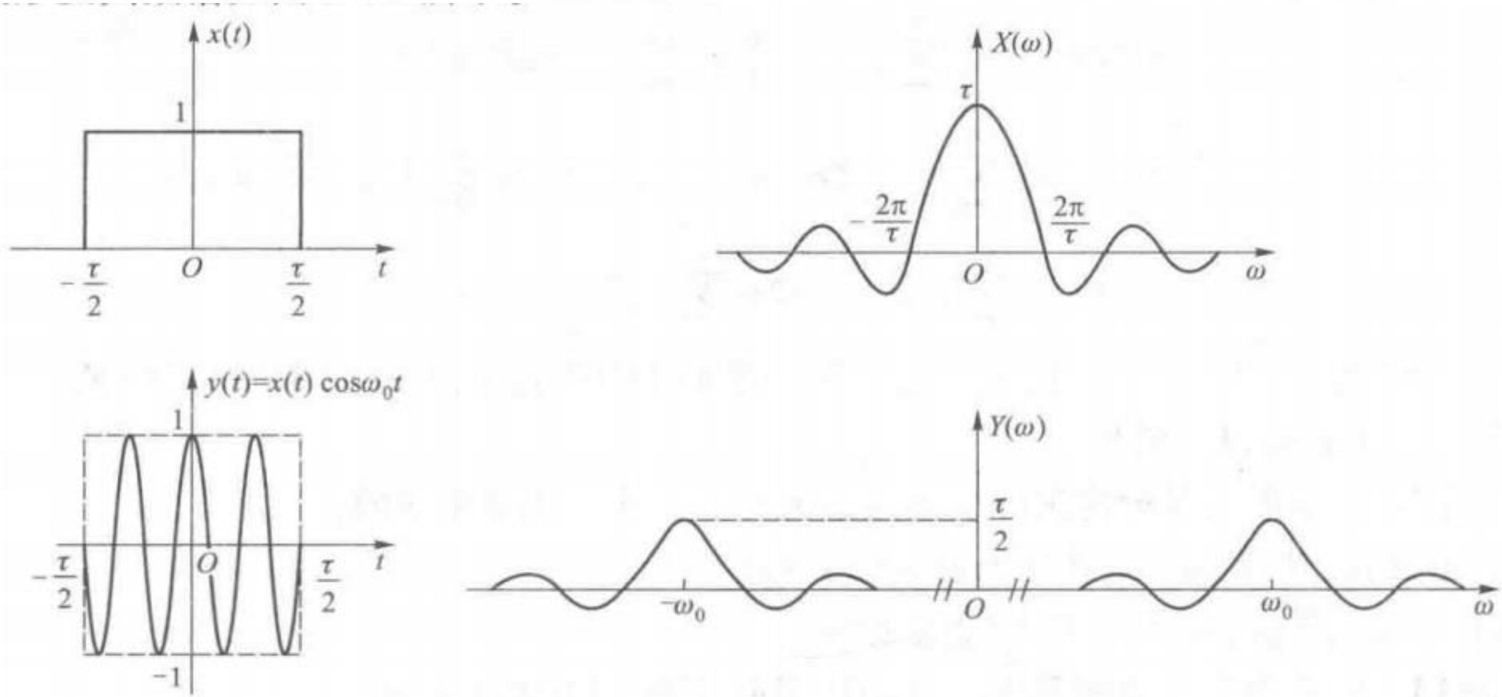
$$\sin\omega_0 \boldsymbol{t} \leftrightarrow i\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$$

例3-12 教材p147

例 3-12 求信号 $y(t)=G_\tau(t)\cos\omega_0 t$ 的频谱 $Y(\omega)$，并画出其频谱。

解：设 $x(t)=G_\tau(t)$，频谱 $X(\omega)=\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$，利用调制定理有

$$Y(\omega)=\frac{\tau}{2}\left\{\mathrm{Sa}\left[\frac{\tau}{2}(\omega-\omega_0)\right]+\mathrm{Sa}\left[\frac{\tau}{2}(\omega+\omega_0)\right]\right\}$$



4. 一般周期信号的傅里叶变换（对应p148 (2)）

设信号周期：$T=\dfrac{2\pi}{\omega_1}$

理解推导过程

由傅里叶级数的指数形式： $\tilde{f}(t)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n \mathrm{e}^{in\omega_1 t}$

其傅立叶变换

$$\tilde{F}(\omega)=\mathrm{F}\left[\tilde{f}(t)\right]=\mathrm{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n \mathrm{e}^{in\omega_1 t}\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\,\mathrm{F}\left[\mathrm{e}^{in\omega_1 t}\right]$$

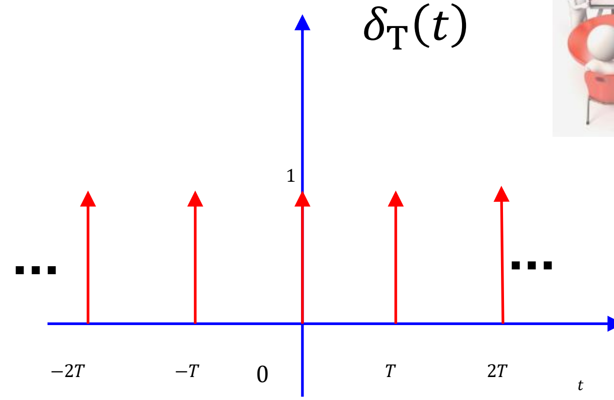
$$=\sum_{-\infty}^{\infty}F_n\cdot 2\pi\delta(\omega-n\omega_1)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\cdot\delta(\omega-n\omega_1)$$

$$\therefore\ \tilde{f}(t)\leftrightarrow 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\omega_1)\qquad\left\{\begin{array}{l}\textbf{离散性}\\ \textbf{谐波性}\\ \textbf{收敛性}\end{array}\right.$$

例3-13 单位冲激序列的FT

$$\therefore \tilde{f}(t) \leftrightarrow 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_1)$$

$$\delta_{\mathrm{T}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

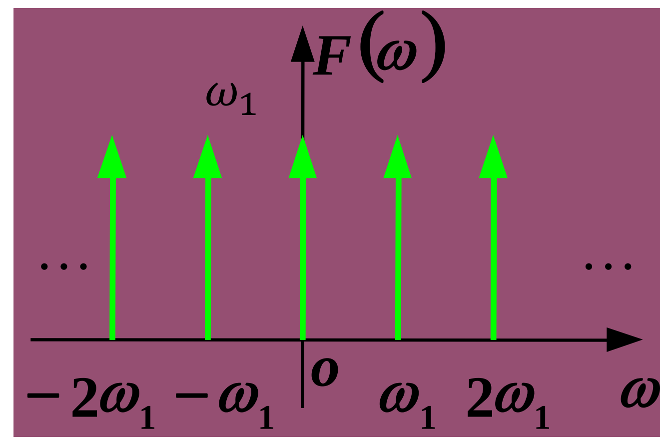


$\delta_{\mathrm{T}}(t)$的傅氏级数谱系数

$$F_n = \frac{1}{T}\int_T f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \qquad F_n = \frac{1}{T}$$

$$F(\omega) = \mathrm{F}[\delta_{\mathrm{T}}(t)] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \delta(\omega - n\omega_1)$$

$$= \omega_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_1) = \omega_1 \delta_{\omega_1}(\omega)$$



$$\therefore \delta_T(t) \leftrightarrow \omega_1 \delta_{\omega_1}(\omega)$$

$\delta_{\mathrm{T}}(t)$ 的频谱密度函数仍是冲激序列，强度和间隔都是 ω_1。

7、微分特性 Differentiation property

时域 : $\dfrac{df(t)}{dt} \leftrightarrow i\omega F(\omega)$

频域 : $(-it)f(t) \leftrightarrow \dfrac{d}{d\omega}F(\omega)$

理解推导过程

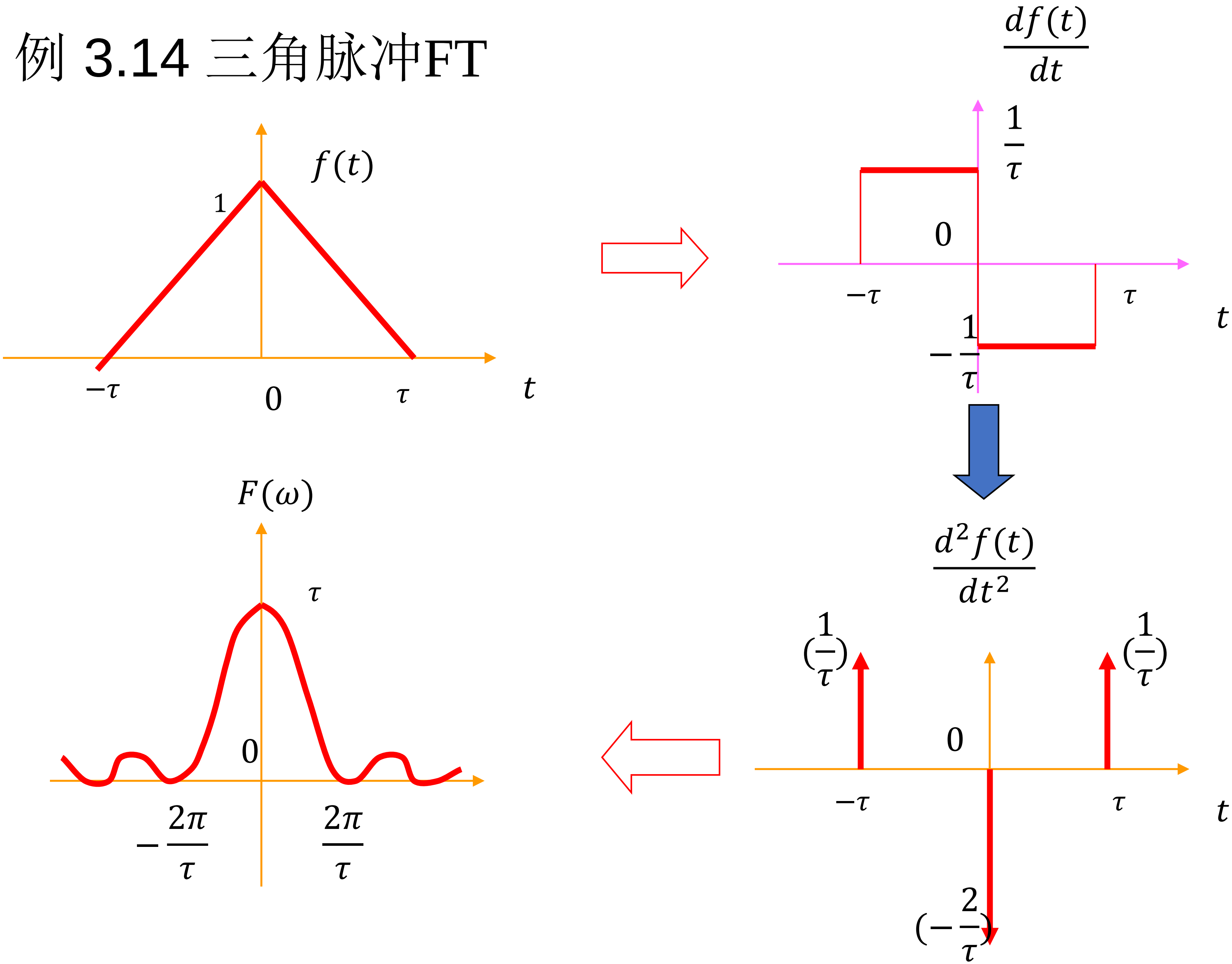
证明: $f'(t) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,(i\omega)e^{i\omega t}d\omega \leftrightarrow i\omega F(\omega)$

物理解释：时域微分在频域中的表现为频谱正比于频率，即可以增强高频分量，同时产生 $\pi/2$ 附加相移。

$$F'(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-it)e^{-i\omega t}dt \leftrightarrow (-it)f(t)$$

推广 : $(-it)^n f(t) \leftrightarrow F^{(n)}(\omega)$ $f^{(n)}(t) \leftrightarrow (i\omega)^n F(\omega)$

例 3.14 三角脉冲FT



$f(t)$
1
$-\tau$
0
τ
t
$\frac{df(t)}{dt}$
$\frac{1}{\tau}$
0
$-\tau$
τ
t
$-\frac{1}{\tau}$
$\frac{d^2f(t)}{dt^2}$
$(\frac{1}{\tau})$
$(\frac{1}{\tau})$
0
$-\tau$
τ
t
$(-\frac{2}{\tau})$
$F(\omega)$
τ
0
$-\frac{2\pi}{\tau}$
$\frac{2\pi}{\tau}$

三角脉冲 $f(t)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{\tau}|t| & (|t|<\tau)\\ 0 & (|t|>\tau)\end{cases}$ 的频谱

利用二阶导数的FT

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2}=\frac{1}{\tau}[\delta(t+\tau)+\delta(t-\tau)-2\delta(t)]\leftrightarrow\frac{1}{\tau}(e^{j\omega\tau}+e^{-j\omega\tau}-2)$$

$$=\frac{1}{\tau}(2\cos\omega\tau-2)=-\frac{2}{\tau}(1-\cos\omega\tau)=-\frac{4}{\tau}(\frac{1-\cos\omega\tau}{2})$$

$$=-\frac{4}{\tau}\sin^2(\frac{\omega\tau}{2})=-\omega^2\tau Sa^2(\frac{\omega\tau}{2})\ =(j\omega)^2F(\omega)$$

$$F(\omega)=\frac{1}{(j\omega)^2}(-\omega^2)\tau Sa^2(\frac{\omega\tau}{2})=\tau Sa^2(\frac{\omega\tau}{2})$$

应用条件：f(t)的导数的直流分量为零，并且f(t)在负无穷处为零

例3-15 教材p150

例 3-15 求斜变信号 $R(t)=t\mathrm{u}(t)$ 的频谱。

解：由 $\mathrm{u}(t)\leftrightarrow\pi\delta(\omega)+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}$，运用频域微分性质，有

$$(-\mathrm{j}t)\mathrm{u}(t)\leftrightarrow\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\right]=\pi\delta'(\omega)+\frac{\mathrm{j}}{\omega^2}$$

$$t\mathrm{u}(t)\leftrightarrow\mathrm{j}\pi\,\delta'(\omega)-\frac{1}{\omega^2}$$

8. 卷积定理

时域 $$f_1(t)*f_2(t)\leftrightarrow F_1(\omega)F_2(\omega)$$

频域 $$f_1(t)f_2(t)\leftrightarrow \frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega)$$ **(自证)**

证明：

$$\mathrm{F}[f_1(t)*f_2(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right]e^{-i\omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(t-\tau)\,e^{-i\omega t}dt\right]d\tau$$

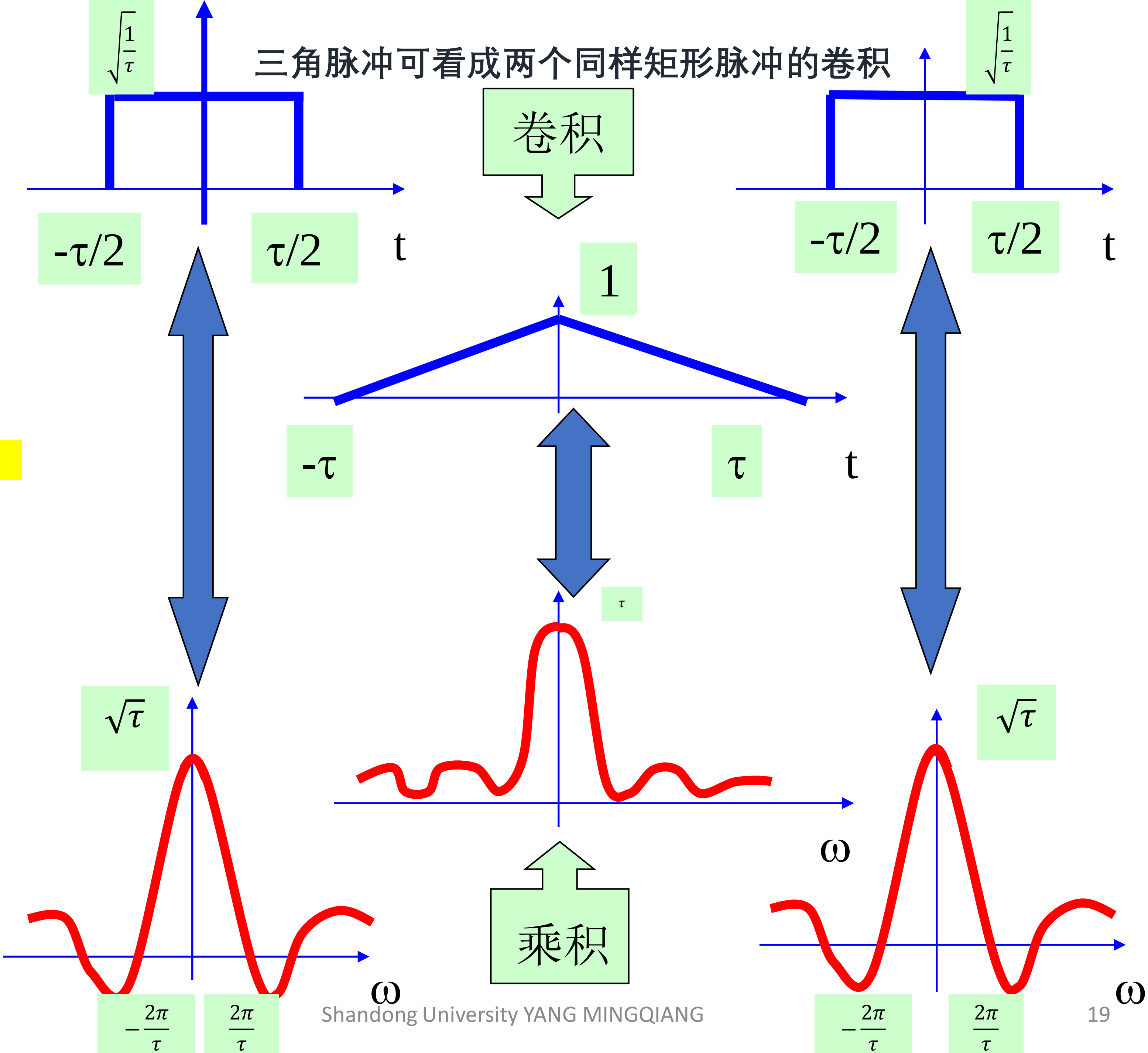
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)F_2\,(\omega)e^{-i\omega\tau}d\tau\;=F_1(\omega)F_2(\omega)$$

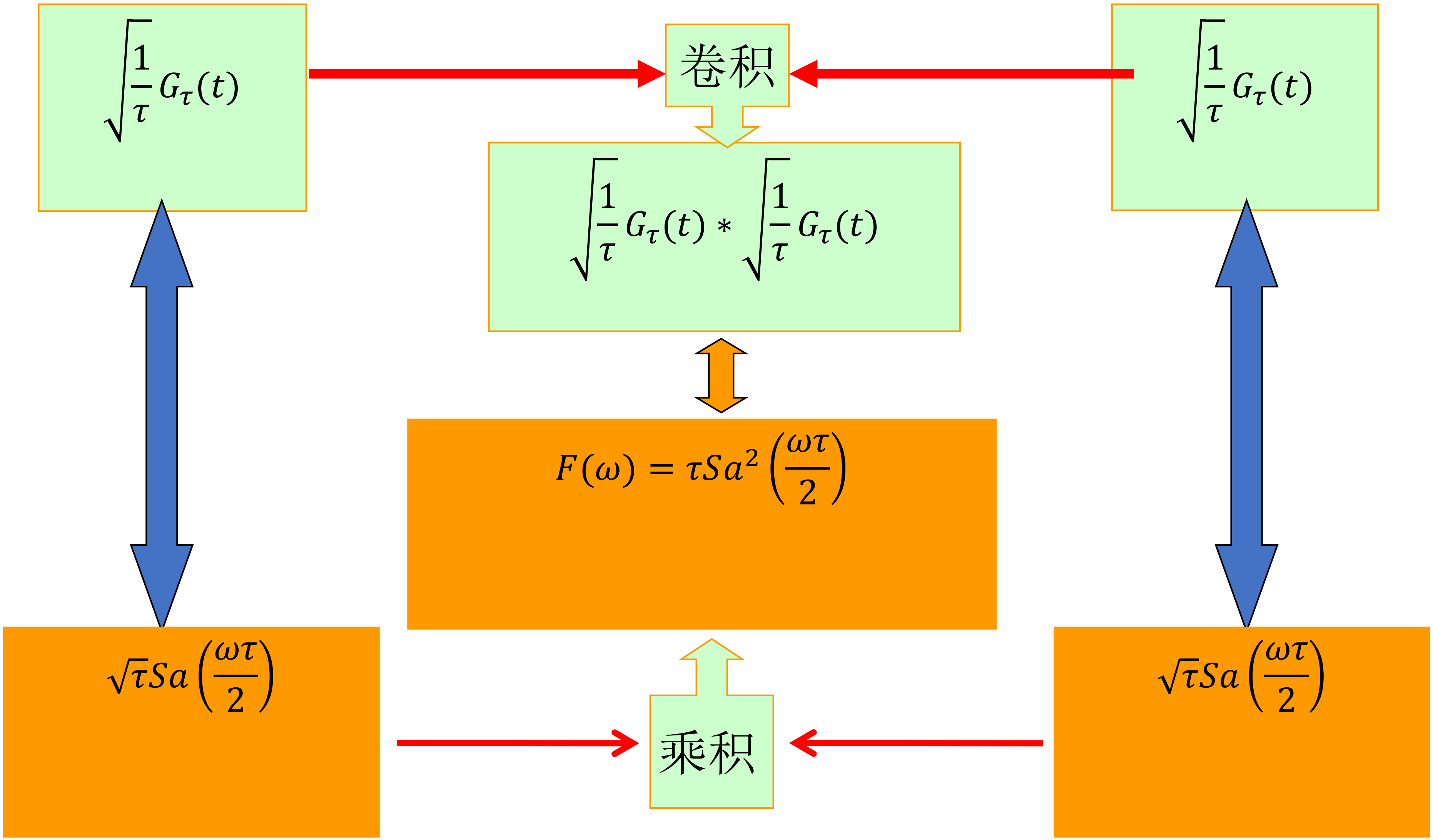
理解推导过程

例3.16 求三角脉冲的频谱

门函数高度的确定：三角脉冲顶端高度除以门宽后再开方

三角脉冲可看成两个同样矩形脉冲的卷积





$\sqrt{\frac{1}{\tau}}G_\tau(t)$
卷积
$\sqrt{\frac{1}{\tau}}G_\tau(t)$
$\sqrt{\frac{1}{\tau}}G_\tau(t) * \sqrt{\frac{1}{\tau}}G_\tau(t)$
$F(\omega) = \tau Sa^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
$\sqrt{\tau}Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
乘积
$\sqrt{\tau}Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$

例3-17　任意周期信号：

$$\therefore \tilde{f}(t) \leftrightarrow 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_1)$$

$$\tilde{f}(t) = f_0(t) * \delta_T(t)$$

$$\mathrm{F}[\tilde{f}(t)] = F_0(\omega)\omega_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_1)$$

$$= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F_0(\omega)}{T} \delta(\omega - n\omega_1) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F_0(n\omega_1)}{T} \delta(\omega - n\omega_1)$$

$$\boxed{\therefore F_n = \frac{F_0(\omega)}{T}\bigg|_{\omega = n\omega_1}}$$

$$F_n = \frac{1}{T}\int_T f(t).\, e^{-in\omega_1 t} dt$$

任意周期信号 ➡

傅立叶级数：$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{in\omega_1 t}$

傅立叶变换: $F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_1)$

总结：求周期信号的频谱：

$$\therefore \tilde{f}(t) \leftrightarrow 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_1)$$

***Fn*是周期信号指数级数展开系数，可由以下两种方法求得：**

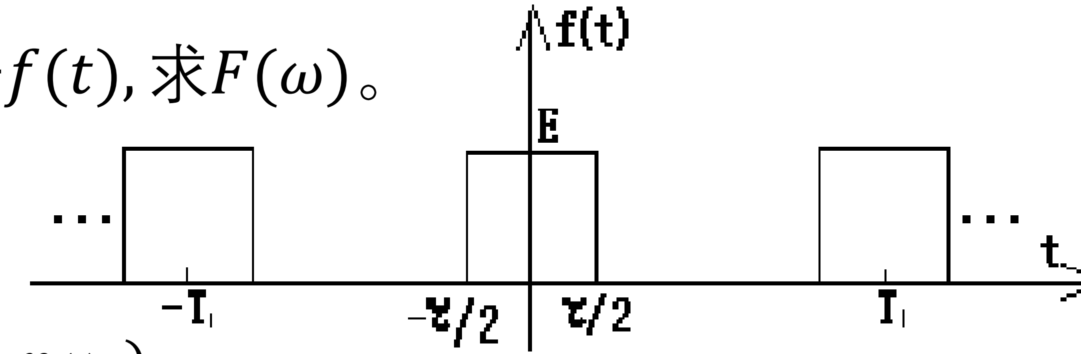
方法1：定义法 $F_n = \dfrac{1}{T}\int_T f(t).e^{-in\omega_1 t}dt$

方法2：由一个周期内的傅氏变换系数得到，即

$$\therefore F_n = \frac{F_0(\omega)}{T}\Big|\omega = n\omega_1$$

补充例：

如图示信号$f(t)$，求$F(\omega)$。

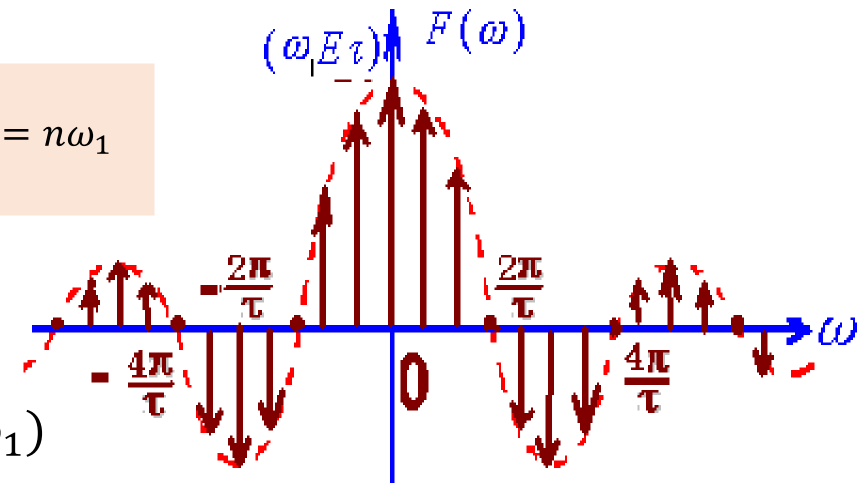


解：方法1：

$$\text{由} f(t) \leftrightarrow 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n\,\delta(\omega - n\omega_1)$$

$$F_n = \frac{F_0(\omega)}{T}\Big|_{\omega = n\omega_1}$$

$$F_n = \frac{\tau}{T} ESa(\frac{n\omega_1\tau}{2})$$



$$F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\tau}{T} E\, Sa(\frac{n\omega_1\tau}{2})\delta(\omega - n\omega_1)$$

$$= \omega_1\tau E \sum_{n=-\infty}^{\infty} Sa(\frac{n\omega_1\tau}{2})\delta(\omega - n\omega_1)$$

从频域看，周期信号的傅里叶变换为对信号一个周期频谱包络的等间隔的抽样冲激，频域抽样间隔=2π / T1

方法2：

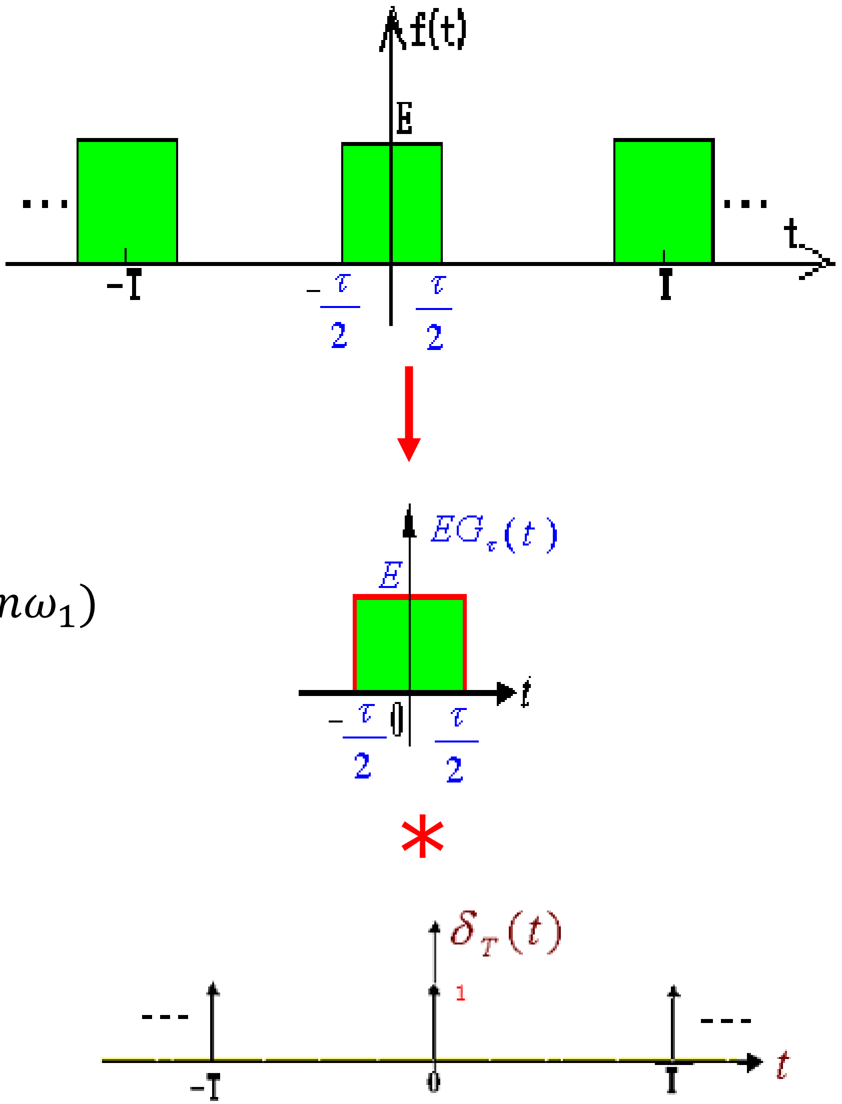
$$f(t) = EG_\tau(t) * \delta_T(t)$$

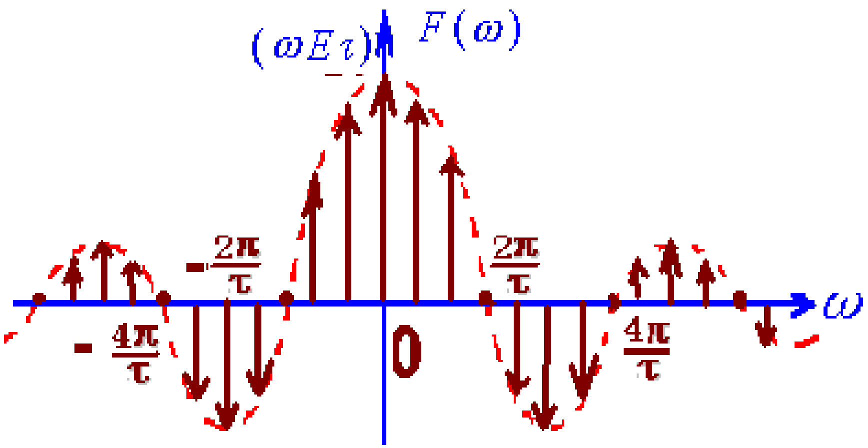
$$EG_\tau(t) \leftrightarrow E\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2})$$

$$\delta_T(t) \leftrightarrow 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T}\delta(\omega - n\omega_1)$$

$$\therefore \quad F(\omega) = E\tau Sa(\frac{\omega\tau}{2}) \cdot \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_1)$$

$$= \omega_1 \tau E \sum_{n=-\infty}^{\infty} Sa(\frac{n\omega_1\tau}{2})\delta(\omega - n\omega_1)$$





周期信号 $f(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-2n)$ 的傅立叶变换为（ ）

A. $\pi\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\pi)$　　B. $2\pi\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\pi)$

C. $\pi\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2n\pi)$　　D. $0.5\pi\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\pi)$

$$\delta_{\mathrm{T}}(t)\leftrightarrow\omega_1\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_1)$$

记住：1、周期信号傅立叶变换公式：

$$\therefore \tilde{f}(t)\leftrightarrow 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\omega_1)$$

2、周期信号指数级数展开系数可由一个周期内的傅氏变换系数得到：

$$\therefore F_n=\frac{F_0(\omega)}{T}\bigg|\omega=n\omega_1$$

- 设 $f_0(t) = u(t+1) - u(t-1)$

1、求其傅立叶变换 $F_0(\omega)$

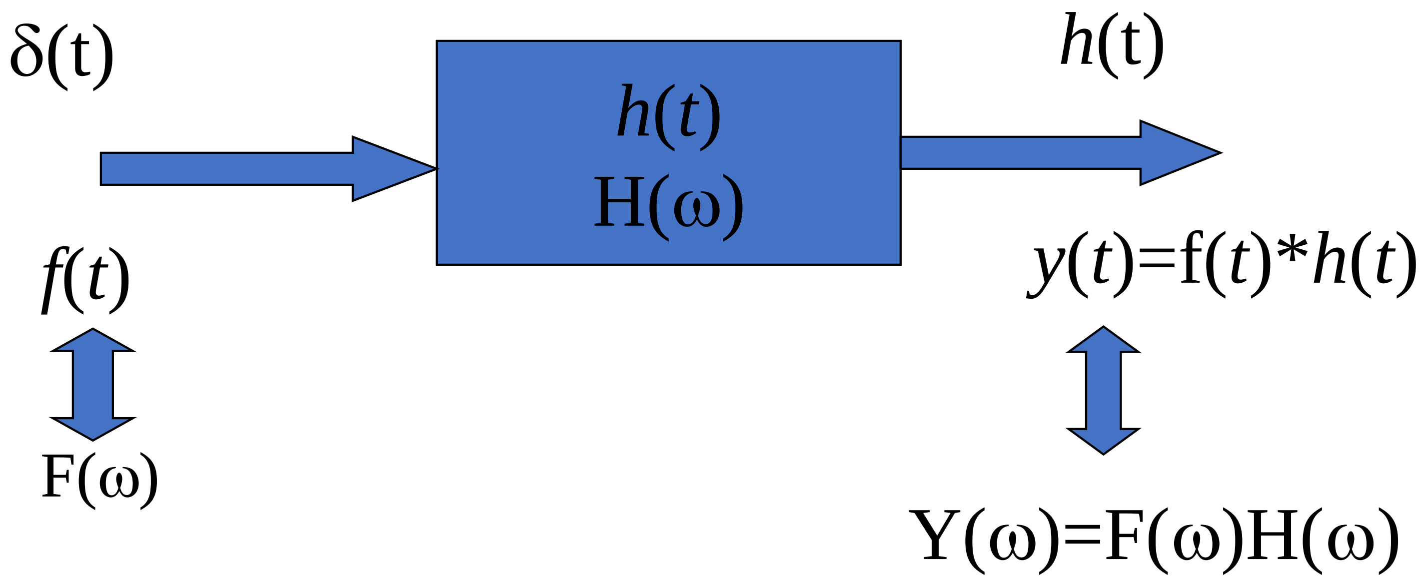
2、若以周期 $T = 10$ 重复 $f_0(t)$ ，从而构建一周期信号 $f(t)$

求该周期信号 $f(t)$ 的指数式傅立叶级数表达式，并求其频谱；

,

时域卷积定理的应用

求系统的输出



卷积定理揭示了信号时域与频域的运算关系，在通讯、信息传输等工程领域中具有重要理论意义和应用价值。

9、时域积分

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega)F_2(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{F(\omega)}{i\omega} = (\pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega})F(\omega)$$

证明： **由：** $\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau = f(t) * u(t)$

$$\mathrm{F}[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau] = (\pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega})F(\omega) = \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{F(\omega)}{i\omega}$$

理解推导过程

讨论： $1.\ F(0) = 0,\ \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{F(\omega)}{i\omega}$

意味着：$f\,(t)$不含直流分量) **时域积分有简单的形式**

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{F(\omega)}{i\omega}$$

2. 一般, 若$f(-\infty) \neq 0$, 那么 $\int_{-\infty}^{t} f'(\tau)\,d\tau = f(t) - f(-\infty)$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} f'(\tau)\,d\tau + f(-\infty)$$

设$f'(t) \leftrightarrow \Phi(\omega)$

$$\therefore F(\omega) = \pi\Phi(0)\delta(\omega) + \frac{\Phi(\omega)}{i\omega} + 2\pi f(-\infty)\delta(\omega)$$

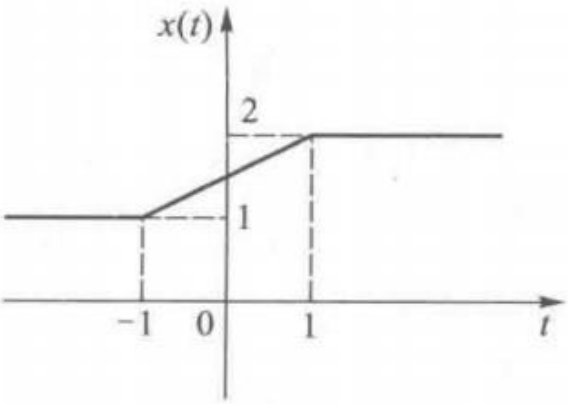
$$= [\pi\Phi(0) + 2\pi f(-\infty)]\delta(\omega) + \frac{\Phi(\omega)}{i\omega}$$

可以用积分性质公式求傅立叶变换：即如果直接求函数f(t)的傅立叶变换困难，而其导数f'(t)的傅立叶变换容易求得，那么可以通过其导数的傅立叶变换获得f(t)的傅立叶变换。

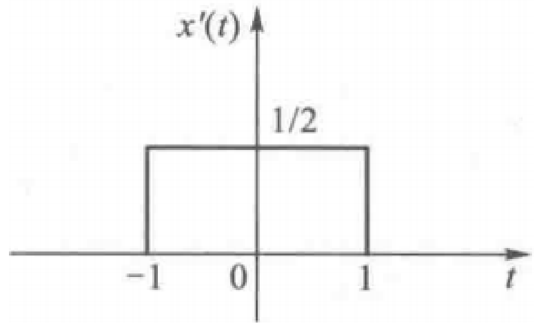
p153 例 3-18

$$[\pi\Phi(0) + 2\pi f(-\infty)]\delta(\omega) + \frac{\Phi(\omega)}{i\omega}$$

例 3−18 求图 3−38 所示信号 $x(t)$ 的频谱。



$$x'(t) = \frac{1}{2}G_2(t)$$



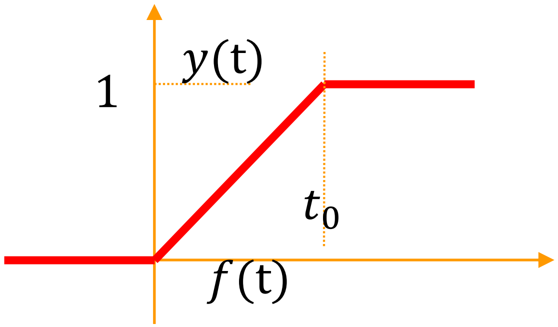
设 $x'(t) \leftrightarrow \Phi(\omega)$，则

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{2} \cdot 2\mathrm{Sa}(\omega) = \mathrm{Sa}(\omega)$$

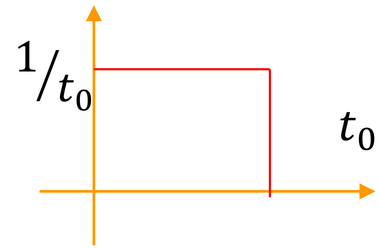
$$X(\omega) = \pi[\Phi(0) + 2x(-\infty)]\delta(\omega) + \frac{\Phi(\omega)}{\mathrm{j}\omega} = \pi(1 + 2 \times 1)\delta(\omega) + \frac{\mathrm{Sa}(\omega)}{\mathrm{j}\omega}$$

$$= 3\pi\delta(\omega) - \mathrm{j}\frac{\mathrm{Sa}(\omega)}{\omega}$$

斜平信号 $y(t)=\begin{cases} 0 & (t<0) \\ t/t_0 & (0<t<t_0) \\ 1 & (t>t_0) \end{cases}$ 的频谱



f(t)是y(t)的导数



$$f(t)=\begin{cases} 0 & (t<0) \\ 1/t_0 & (0<t<t_0) \\ 0 & (t>t_0) \end{cases}$$

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega)=Sa(\frac{\omega t_0}{2})e^{-j\frac{\omega t_0}{2}}$$

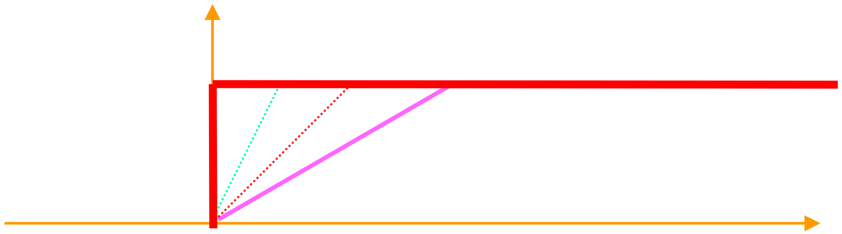
$$Y(\omega)=[\pi F(0)+2\pi y(-\infty)]\delta(\omega)+\frac{F(\omega)}{j\omega}$$

$$=\pi F(0)\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}F(\omega)=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}Sa(\frac{\omega t_0}{2})e^{-j\frac{\omega t_0}{2}}$$

求阶跃函数的傅里叶变换（方法1）：

$$\frac{1}{j\omega}Sa(\frac{\omega t_0}{2})e^{-j\frac{\omega t_0}{2}}+\pi\delta(\omega)$$

$$\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$$



求阶跃函数的傅里叶变换（方法2）：

用FT积分特性求阶跃信号的FT

$f(\tau)=\delta(\tau)$　　$FT[\delta(\tau)]=1$　　$F(0)=1\neq 0$

$$y(t)=u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau \leftrightarrow [\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)]F(\omega)=\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau \leftrightarrow (\pi\delta(\omega)+\frac{1}{i\omega})F(\omega)$$

求阶跃函数的傅里叶变换（方法3）：

$$u(t) = u_e(t) + u_o(t) \ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(\,t)$$

$$\leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}$$

思考： $G_\tau(t)=u(t+\tau/2)-u(t-\tau/2) \longleftrightarrow \tau\, Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$

如何推导？

10. 帕塞瓦尔（Parseval）定理

设 $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 \, d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega x^*(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t\right]^*\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)X^*(\omega)\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega$$

一般来说，非周期信号不是功率信号，其平均功率为零，但其能量为有限量，因而是一个能量信号。非周期信号的总能量*W*为

$$W=\int_{-\infty}^{\infty}f^2(t)dt$$

非周期信号的帕塞瓦尔定理表明，对非周期信号，在时域中求得的信号能量与频域中求得的信号能量相等。

傅里叶变换的性质表

性质名称	时域	频域
线性	$a_1f_1(t)+a_2f_2(t)$	$a_1F_1(\mathrm{j}\omega)+a_2F_2(\mathrm{j}\omega)$
时移	$f(t-t_0)$	$F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$
频移	$f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$	$F(\mathrm{j}(\omega-\omega_0))$
调制	$f(t)\cos\omega_0 t$	$\frac{1}{2}[F(\mathrm{j}(\omega-\omega_0))+F(\mathrm{j}(\omega+\omega_0))]$
	$f(t)\sin\omega_0 t$	$\frac{1}{2\mathrm{j}}[F(\mathrm{j}(\omega-\omega_0))-F(\mathrm{j}(\omega+\omega_0))]$
尺度变换	$f(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{a}\right)$
对称性	$F(\mathrm{j}t)$	$2\pi f(-\omega)$
卷积	$f_1(t)*f_2(t)$	$F_1(\mathrm{j}\omega)\cdot F_2(\mathrm{j}\omega)$
相乘	$f_1(t)\cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}F_1(\mathrm{j}\omega)*F_2(\mathrm{j}\omega)$
时域微分	$\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}$	$(\mathrm{j}\omega)^n F(\mathrm{j}\omega)$
时域积分	$\int_{-\infty}^{t} f(x)\mathrm{d}x$	$\pi F(0)\delta(\omega)+\frac{F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{j}\omega}$
频域微分	$(-\mathrm{j}t)^n f(t)$	$\frac{\mathrm{d}^n F(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{d}\omega^n}$
频域积分	$\pi f(0)\delta(t)+\frac{f(t)}{-\mathrm{j}t}$	$\int_{-\infty}^{\omega} F(\mathrm{j}\eta)\,\mathrm{d}\eta$
帕塞瓦尔等式	$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lvert F(\mathrm{j}\omega)\rvert^2\,\mathrm{d}\omega$

牢记该性质表中全部内容

例 3-19　试计算积分$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Sa}^2(\omega)\mathrm{d}\omega$。

解:因为 $G_2(t) \leftrightarrow 2\mathrm{Sa}(\omega)$，所以 $\frac{1}{2}G_2(t) \leftrightarrow \mathrm{Sa}(\omega)$，代入帕塞瓦尔定理,有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Sa}^2(\omega)\mathrm{d}\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2}G_2(t)\right]^2 \mathrm{d}t = 2\pi \cdot \frac{2}{4}\int_0^1 \mathrm{d}t = \pi$$

例 3-20　求信号 $x(t) = 2\cos(997t)\frac{\sin 5t}{\pi t}$ 的能量。

解:在时域求取信号能量比较繁琐,因此转换到频域。由

$$x(t) = 2\cos(997t)\frac{\sin 5t}{\pi t} = \frac{10}{\pi}\cos(997t) \cdot \mathrm{Sa}(5t)$$

又 $G_{10}(t) \leftrightarrow 10\mathrm{Sa}(5\omega)$，运用对称性有 $2\pi G_{10}(\omega) \leftrightarrow 10\mathrm{Sa}(5t)$，再根据调制定理可知

$$X(\omega) = G_{10}(\omega + 997) + G_{10}(\omega - 997)$$

由帕塞瓦尔定理得信号能量为

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega = \frac{2}{2\pi}\int_{992}^{1002} 1^2 \mathrm{d}\omega = \frac{10}{\pi}\ (\mathrm{J})$$

完成实验五