第六章习题《基础物理 I 波动理论导引》

习题 6.1：筋疲力尽的旅行者经常在远处看到一个虚幻的“湖”，称为海市蜃楼现象。沙漠中的热沙将空气加热到接近地面的位置，从而形成一层密度较小且折射率较低的空气。在 20° C 温度下，可见光区域的空气折射率约为 1.000271374，而在 35° C 时约为 1.000257559。求空气界面的全反射角，并解释海市蜃楼现象的物理原因。

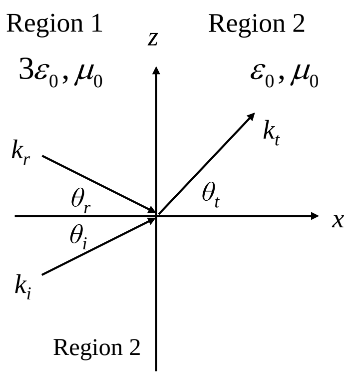
解： $\theta_c = \sin^{-1}\left(n_2/n_1\right) = 89.7°$ 。

习题 6.2：太阳光照射到平面反射后变为部分线性偏振光。试求：（a）当透射介质介电常数为 $\varepsilon_t = 9\varepsilon_0$，求布鲁斯特角和反射后光的偏振特性。（b）偏光太阳镜可以吸收特定的线偏振光，让特定偏振光透过镜片，试解释这一现象。

解：（a）布鲁斯特角 $\theta_B = \tan^{-1}\sqrt{\varepsilon_t} = \tan^{-1}\sqrt{9} = 71.57°$，反射为 TE 光。

（b）偏光太阳镜可以有效吸收 TE 入射波，TM 波可以穿过镜片被人眼接收。

习题 6.3：如图所示，一个平面波从 $\varepsilon = 3\varepsilon_0$ 的半无限大介质区域入射到空气。



试求：

（1） 区域 1 的布鲁斯特角；

（2） 假设透射电场为

$$\vec{E}_t = \hat{y}\frac{E_0}{\sqrt{2}}\exp\left(-jk_{tx}x - jk_{tz}z\right) + E_0\frac{\hat{z} - \hat{x}\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\exp\left(-jk_{tx}x - jk_{tz}z + j\frac{\pi}{2}\right)$$

求（i）入射角 θ_i 和透射角 θ_t；

（ii）求透射波的极化状态，如果是圆极化波，请说明旋性；

（iii）求反射波的极化状态，如果是圆极化波，请说明旋性；

（iv）给出入射波和反射波电场的表达式 $\vec{E}_i$ 和 $\vec{E}_r$

（v）写出入射波、反射波和透射波的坡印廷矢量，并说明能量守恒。

解：

（1） 布鲁斯特角是 $\theta_B = \tan^{-1}\dfrac{\sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{3\varepsilon_0}} = \tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = 30°$

（2） 根据透射电场表达式，我们有

$$\vec{k}_t \cdot \vec{E}_t = \left(\hat{x}k_{tx} + \hat{z}k_{tz}\right)\cdot\left(\frac{\hat{z}-\hat{x}\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right) = 0 \quad => \quad k_{tz} = \sqrt{3}k_{tx}$$

（i） 透射角 $\theta_t = \tan^{-1}\dfrac{k_{tz}}{k_{tx}} = \tan^{-1}\sqrt{3} = 60°$

根据折射定律：$\dfrac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \dfrac{n_2}{n_1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ => 入射角 $\theta_i = \sin^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin 60°\right) = 30°$

（ii） $\vec{E}_t = E_0\left[\hat{y}\dfrac{1}{\sqrt{2}} + j\left(\dfrac{\hat{z}-\hat{x}\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)\right]\exp\left(-jk_{tx}x - jk_{tz}z\right)$

$$\vec{E}_R = \hat{y}\frac{1}{\sqrt{2}}，\quad \vec{E}_I = \frac{\hat{z}-\hat{x}\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}，\quad \vec{E}_R \times \left(-\vec{E}_I\right) = \hat{y}\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\hat{x}\sqrt{3}-\hat{z}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\left(-\hat{z}\frac{\sqrt{3}}{2} - \hat{x}\frac{1}{2}\right) \propto -\vec{k}_t$$

随着时间变化，电场矢量从 $\vec{E}_R$ 转向 $-\vec{E}_I$，作图根据关系可知透射波是左旋圆极化波。

（iii）

$\theta_i + \theta_t = 90°$，因此是布鲁斯特角，TM 波全透射，反射波为 TE 波。

（iv）

TE 波的反射和透射系数为

$$R^{TE} = \frac{\eta_2\cos\theta_i - \eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t} = \frac{\sqrt{3}\cos 30° - \cos 60°}{\sqrt{3}\cos 30° + \cos 60°} = \frac{1}{2}$$

$$T^{TE} = \frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t} = \frac{2\sqrt{3}\cos 30°}{\sqrt{3}\cos 30° + \cos 60°} = \frac{3}{2}$$

根据边界条件，TM 波全透射，反射为 0，利用 TM 波横向电场连续，电场方向与 k 波矢方向垂直的条件（入射波矢 $\vec{k}_i = \hat{x}k_{ix} + \hat{z}k_{iz} = \left(\hat{x}\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \hat{z}\dfrac{1}{2}\right)\sqrt{3}k_0$），得到因此

入射波表达式为

$$\vec{E}_i = \hat{y}\frac{2E_0}{3\sqrt{2}}\exp\left(-jk_{ix}x - jk_{iz}z\right) + E_0\frac{\hat{z}-\hat{x}/\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\exp\left(-jk_{ix}x - jk_{iz}z + j\frac{\pi}{2}\right)$$

反射波表达式为

$$\vec{E}_r = \hat{y}\frac{E_0}{3\sqrt{2}}\exp\left(-jk_{rx}x - jk_{rz}z\right)$$

(v)

$$r^{TE} = \frac{-\hat{x}\cdot\left\langle \vec{S}_r \right\rangle}{\hat{x}\cdot\left\langle \vec{S}_i \right\rangle} = \left|R^{TE}\right|^2 = \frac{1}{4}$$

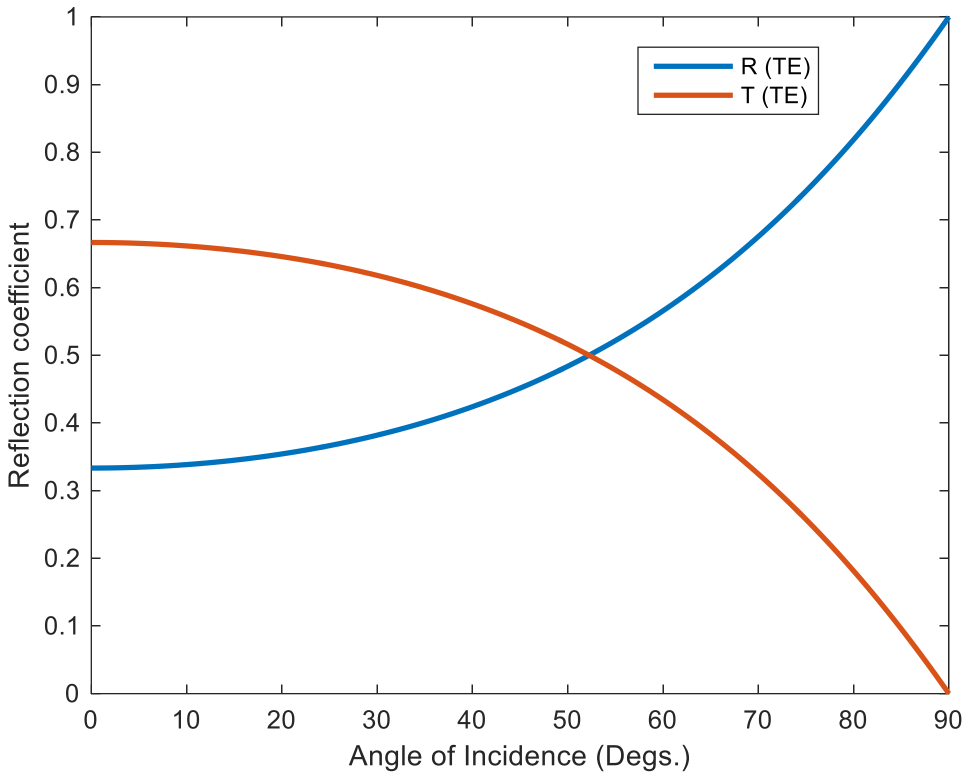
$$t^{TE} = \frac{\hat{x}\cdot\left\langle \vec{S}_t \right\rangle}{\hat{x}\cdot\left\langle \vec{S}_i \right\rangle} = \frac{\eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i}\left|T^{TE}\right|^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ}\left|\frac{3}{2}\right|^2 = \frac{3}{4}$$

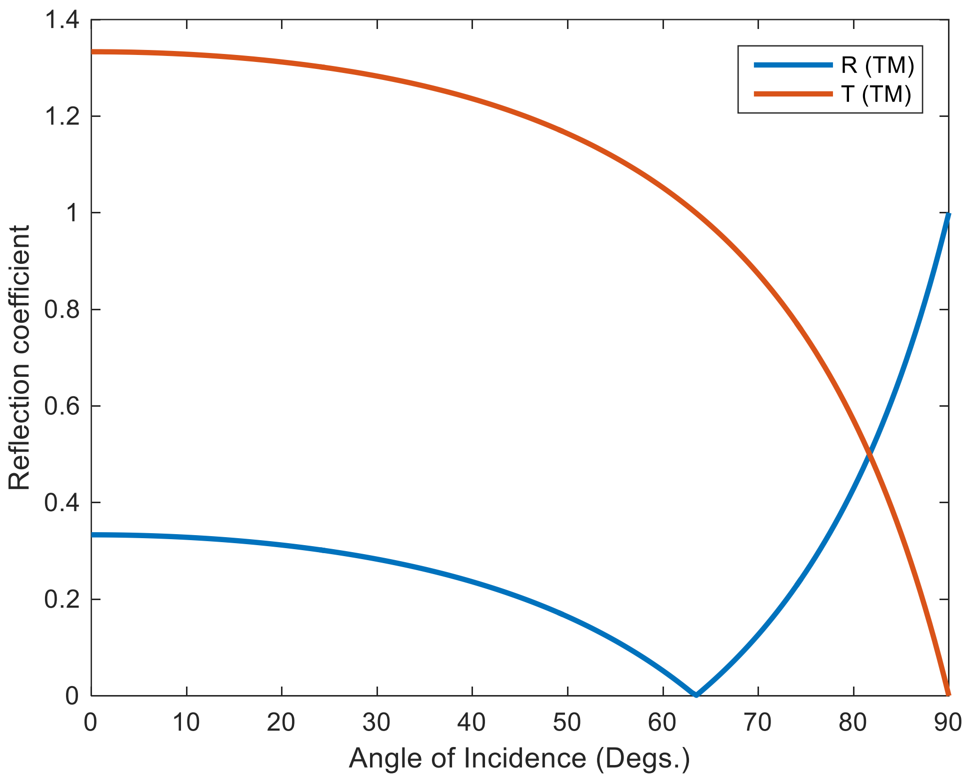
⇨ $r^{TE} + t^{TE} = 1$，因此 TE 波能量守恒

TM 波为全透射，易得能量守恒。

习题 6.4：平面波从空气入射到介电常数 $\varepsilon = 4\varepsilon_0$ 的半无限大区域，分别绘制 TE 波和 TM 波的透射谱和反射谱随入射角度变化的曲线，从曲线中标出全反射角和布鲁斯特角。（提示：可以用 MATLAB 工具计算，描出曲线）。

解：





画图代码：

clear all; close all; clc;

n1 = 1; n2 = 2; Z12 = n2/n1;

```
theta_i = [0:0.5:90]/180*pi;
theta_t = asin(sin(theta_i)*n1/n2);
R_TE = (cos(theta_i)-cos(theta_t)*Z12)./(cos(theta_i)+cos(theta_t)*Z12);
T_TE = (2*cos(theta_i))./(cos(theta_i)+cos(theta_t)*Z12);
R_TM = (cos(theta_i)*Z12-cos(theta_t))./(cos(theta_i)*Z12+cos(theta_t));
T_TM = (2*cos(theta_i)*Z12)./(cos(theta_i)*Z12+cos(theta_t));
figure; hold on; box on;
h1 = plot(theta_i*180/pi,abs(R_TE));
h2 = plot(theta_i*180/pi,abs(T_TE));
h1.LineWidth = 2; h2.LineWidth = 2;
xlabel('Angle of Incidence (Degs.)');
ylabel('Reflection coefficient');
legend('R (TE)','T (TE)');
figure; hold on; box on;
h1 = plot(theta_i*180/pi,abs(R_TM));
h2 = plot(theta_i*180/pi,abs(T_TM));
h1.LineWidth = 2; h2.LineWidth = 2;
xlabel('Angle of Incidence (Degs.)');
ylabel('Reflection coefficient');
legend('R (TM)','T (TM)');
```