



## 第五章 数字滤波器的基本结构

# 学习目标



- ◆ 理解数字滤波器的基本概念
- ◆ 理解数字滤波器结构的表示方法
- ◆ 掌握IIR滤波器的直接 I 型、直接 II 型、级联型、并联型结构
- ◆ 掌握FIR滤波器的直接型、级联型、线性相位结构，理解频率抽样型结构

# 数字滤波器的基本概念

数字滤波器：是指输入输出均为数字信号，通过一定运算关系改变输入信号所含频率成分的相对比例或者滤除某些频率成分的器件。

优点： 高精度、稳定、体积小、重量轻、灵活，不求阻抗匹配，可实现特殊滤波功能

经典滤波器： 选频滤波器

现代滤波器： 维纳滤波器

卡尔曼滤波器

自适应滤波器等

# 一、数字滤波器结构的表示方法

数字滤波器的z域表示——系统函数：

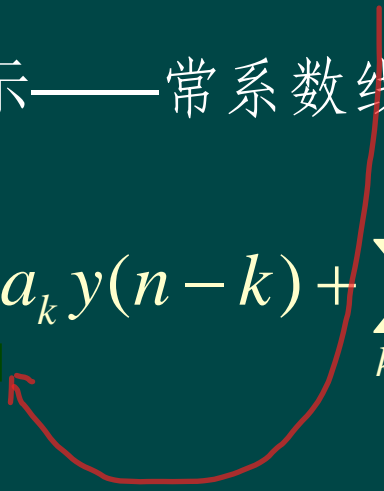
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

这里相等于把常数项提出去了

数字滤波器的时域表示——常系数线性差分方程：

$$\underline{y(n)} = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

$k=0$



$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

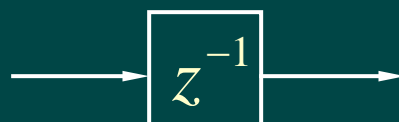


基本运算单元

方框图

信号流图

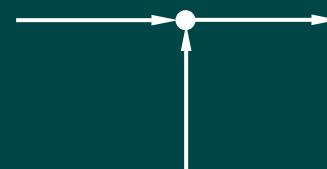
单位延时



常数乘法器



加法器



例：二阶数字滤波器

$$y(n] = a_1y[n-1] + a_2y[n-2] + b_0x[n]$$

方框图结构

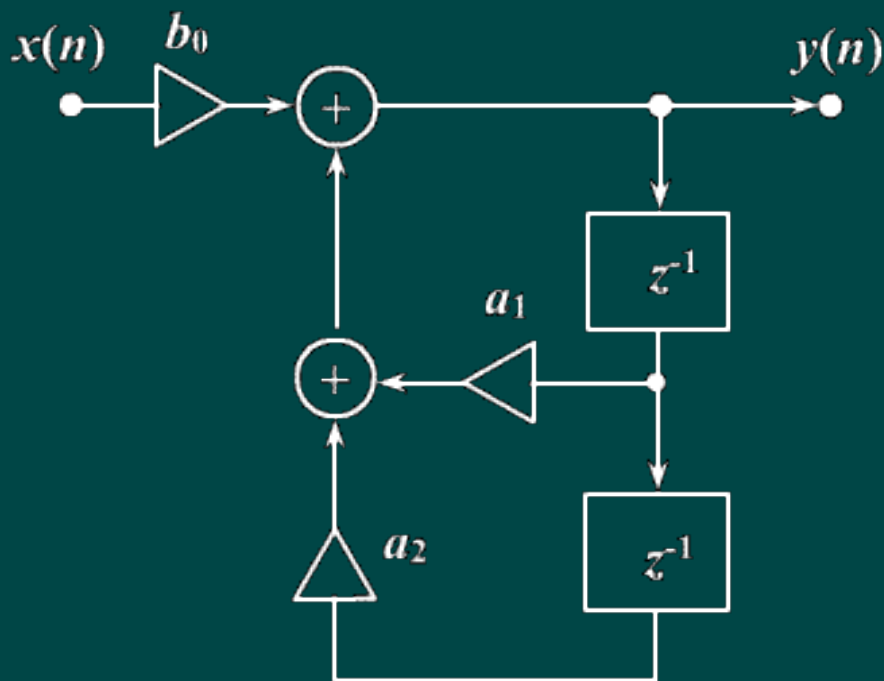


图5-2 二阶数字滤波器的方框图结构

信号流图结构

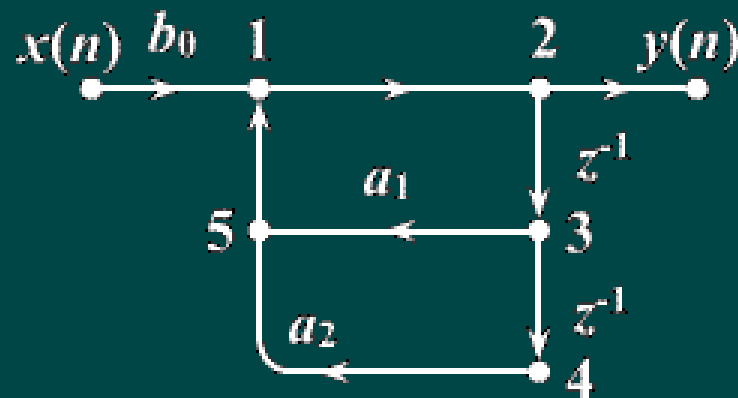


图5-3 信号流图结构

# 信号流图结构

## ◆ 节点

- 源节点
- 阱节点
- 网络节点
  - 分支节点
  - 相加器（加法器）

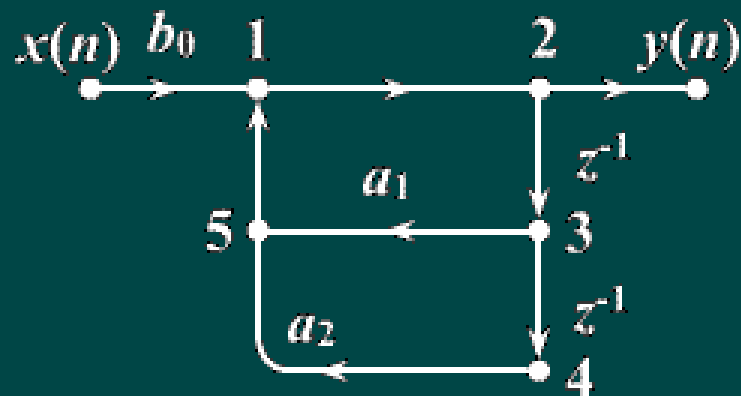


图5-3 信号流图结构

- 支路
  - 输入支路
  - 输出支路

节点的值=所有输入支路的值之和

支路的价值=支路起点处的节点值  $\times$  传输系数

## 二、IIR数字滤波器的基本结构

- IIR数字滤波器的特点:

系统函数: 
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

差分方程: 
$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

- 1) 系统的单位抽样响应  $h(n)$  无限长
- 2) 系统函数  $H(z)$  在有限  $z$  平面 ( $0 < |z| < \infty$ ) 上有极点存在
- 3) 存在输出到输入的反馈, 递归型结构





- IIR数字滤波器的基本结构:

- 直接 I 型
- 直接 II 型 ( 典范型 )
- 级联型
- 并联型

# 1、直接 I 型

差分方程: 
$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

需  $N+M$  个  
延时单元

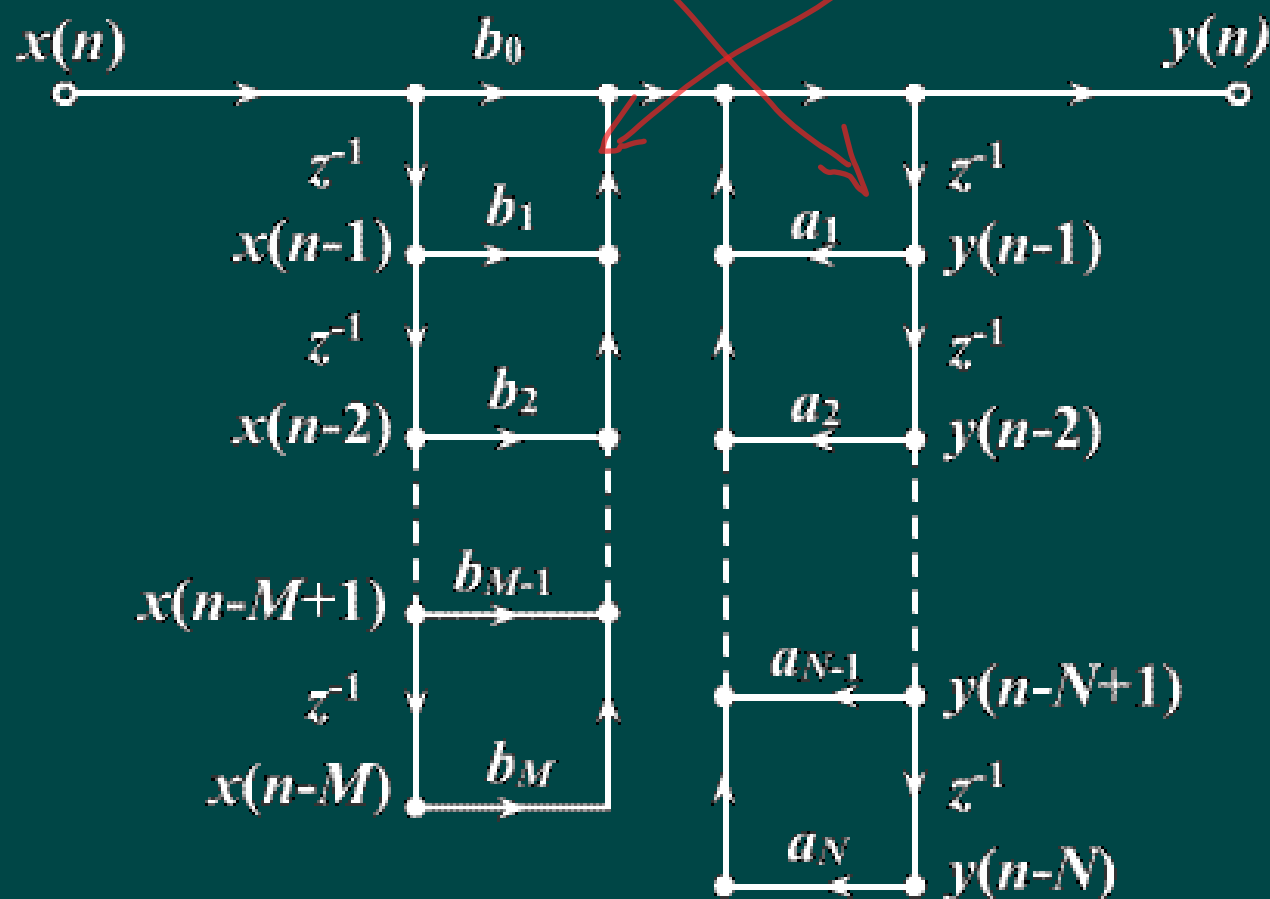
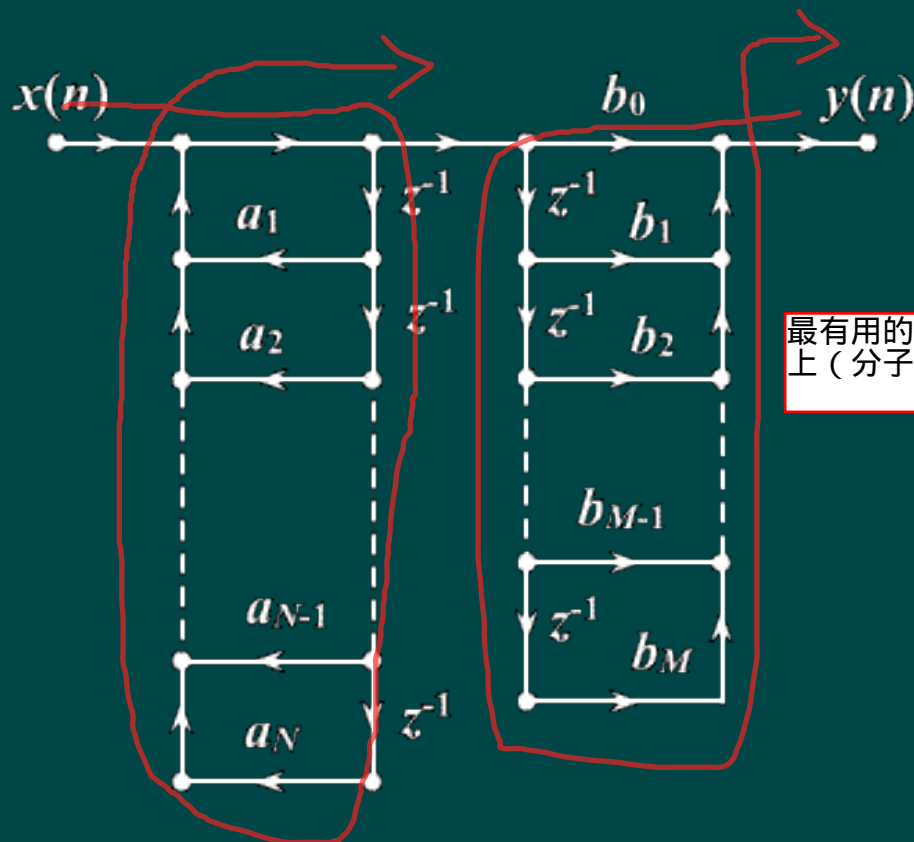


图5-4 现实 $N$ 阶差分方程的直接I型结构

## 2、直接 II 型（典范型）



最有用的一集：  
上（分子）右而下（分母）左

图5-5 直接 I 型的变型，将图5-4网络的零点与极点的级联次序互换

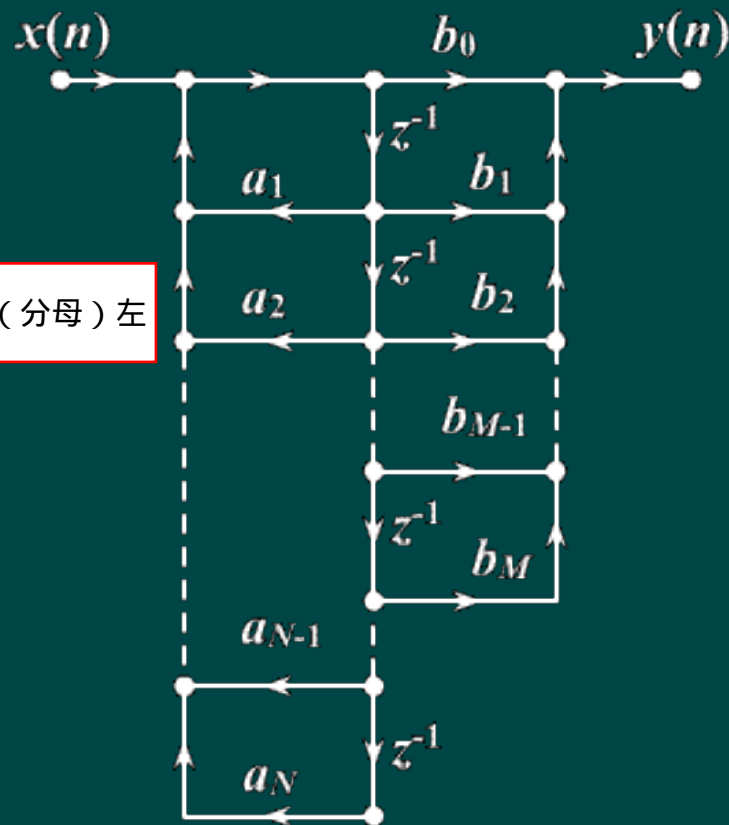


图5-6 直接 II 型结构(典范型结构)

只需实现  $N$  阶滤波器所需的最少的  $N$  个延时单元，  
故称典范型。（ $N \geq M$ ）



## 直接型的共同缺点：

- 系数  $a_k, b_k$  对滤波器的性能控制作用不明显
- 零、极点对系数的量化效应较灵敏，易出现不稳定或较大误差
- 运算的累积误差较大

### 3、级联型

将系统函数按零极点因式分解:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = A \frac{\prod_{k=1}^{M_1} (1 - p_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_2} (1 - q_k z^{-1})(1 - q_k^* z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N_1} (1 - c_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_2} (1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})}$$

$A$ 为常数

$$M = M_1 + 2M_2$$

$p_k$ 和 $c_k$ 分别为实数零、极点

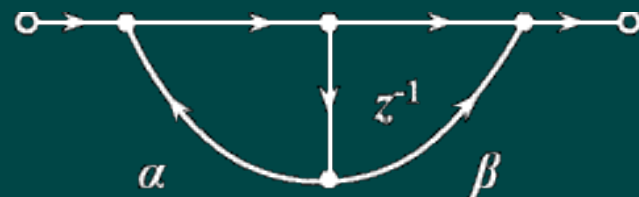
$$N = N_1 + 2N_2$$

$q_k, q_k^*$ 和 $d_k, d_k^*$ 分别为复共轭零、极点



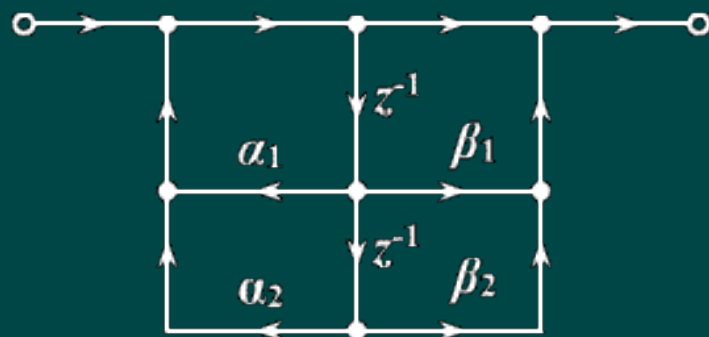
将共轭成对的复数组合成二阶多项式，系数即为实数。  
为采用相同结构的子网络，也将两个实零点/极点组合成二阶多项式

$$H(z) = A \prod_k \frac{1 + \beta_{1k} z^{-1} + \beta_{2k} z^{-2}}{1 - \alpha_{1k} z^{-1} - \alpha_{2k} z^{-2}} = A \prod_k H_k(z)$$



当  $M = N$  时，共有  $\left[ \frac{N+1}{2} \right]$  节

方括号：向下取整



当零点为奇数个时：

如果有奇数，就凭空造一个项(1)出来补上  
其实在画图的时候不用管，把那个分式直接拎出来就行

有一个  $\beta_{2k} = 0$

当极点为奇数个时：

有一个  $\alpha_{2k} = 0$

图5-7 级联结构的一阶基本节和二阶基本节结构

$$H(z) = A \prod_k \frac{1 + \beta_{1k} z^{-1} + \beta_{2k} z^{-2}}{1 - \alpha_{1k} z^{-1} - \alpha_{2k} z^{-2}} = A \prod_k H_k(z)$$

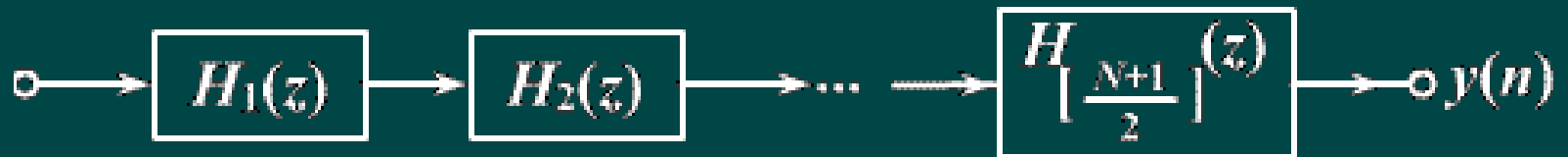


图5-8 级联结构( $M=N$ )

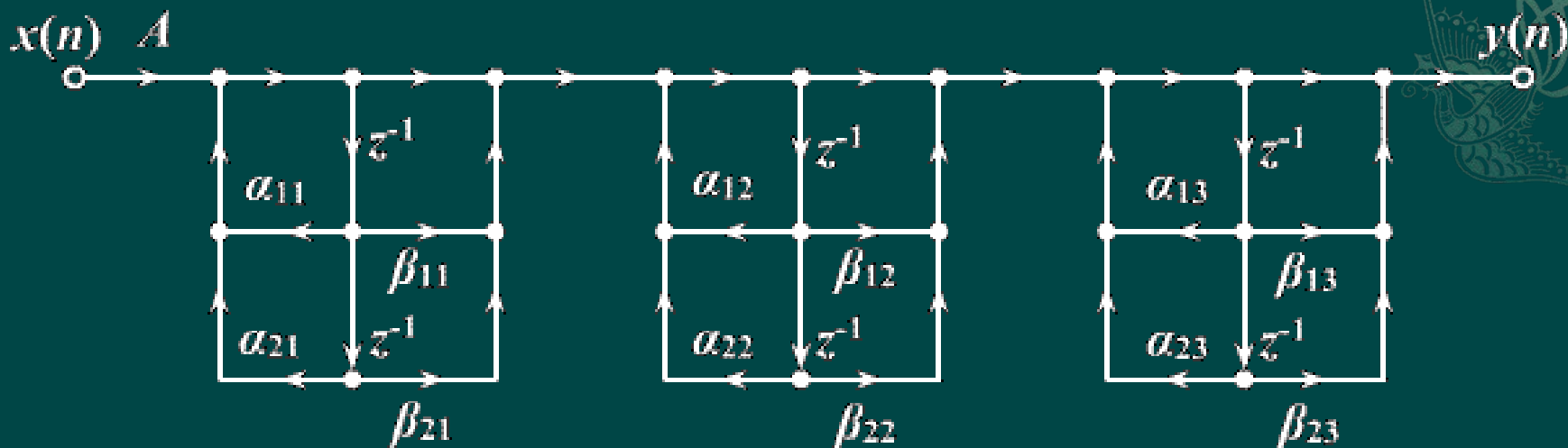


图5-9 六阶IIR滤波器的级联结构

当 $M=N$ 时，二阶因子配对方式有  $\left[ \frac{N+1}{2} \right]!$  种

各二阶基本节的排列次序有

$\left[ \frac{N+1}{2} \right]!$  种





## 级联型的特点:

- 调整系数  $\beta_{1k}, \beta_{2k}$  能单独调整滤波器的第  $k$  对零点, 而不影响其它零极点

调整系数  $\alpha_{1k}, \alpha_{2k}$  能单独调整滤波器的第  $k$  对极点, 而不影响其它零极点

便于调整滤波器频率响应性能

- 量化误差、运算误差等会逐级积累
- 具有最少的存储延迟单元

## 4、并联型

分子的阶数小于等于分母的阶数

将因式分解的 $H(z)$ 按极点展成部分分式: ( $M \leq N$ )

$$H(z) = G_0 + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_k}{1 - c_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{\gamma_{0k} + \gamma_{1k} z^{-1}}{1 - \alpha_{1k} z^{-1} - \alpha_{2k} z^{-2}}$$

$$N = N_1 + 2N_2$$

组合成实系数二阶多项式:

$$H(z) = G_0 + \sum_{k=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]} \frac{\gamma_{0k} + \gamma_{1k} z^{-1}}{1 - \alpha_{1k} z^{-1} - \alpha_{2k} z^{-2}} = G_0 + \sum_{k=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]} H_k(z)$$

没变

当 $N$ 为奇数时, 有一个  $\alpha_{2k} = \gamma_{1k} = 0$

$$H(z) = G_0 + \sum_{k=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]} \frac{\gamma_{0k} + \gamma_{1k} z^{-1}}{1 - \alpha_{1k} z^{-1} - \alpha_{2k} z^{-2}} = G_0 + \sum_{k=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]} H_k(z)$$

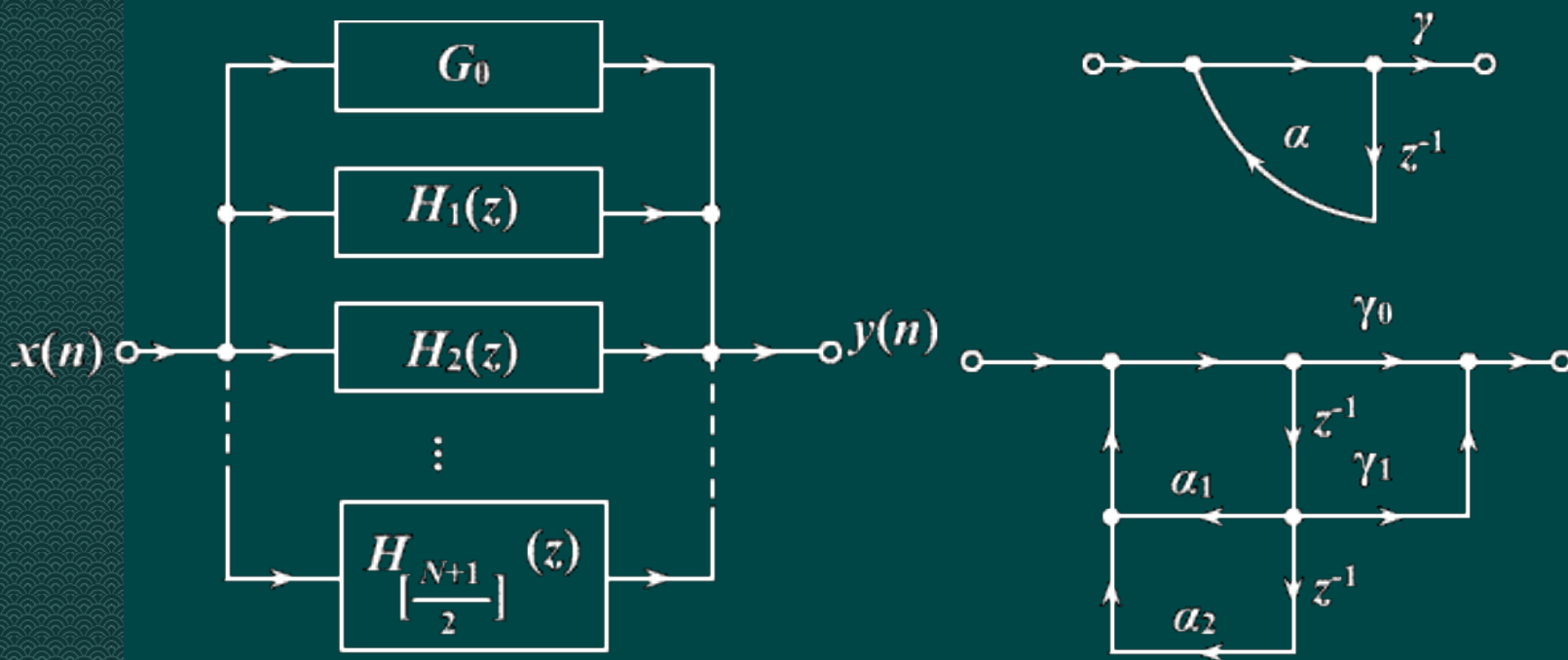


图5-10 并联结构( $M=N$ ) 图5-11 并联结构的一阶基本节和二阶基本节结构

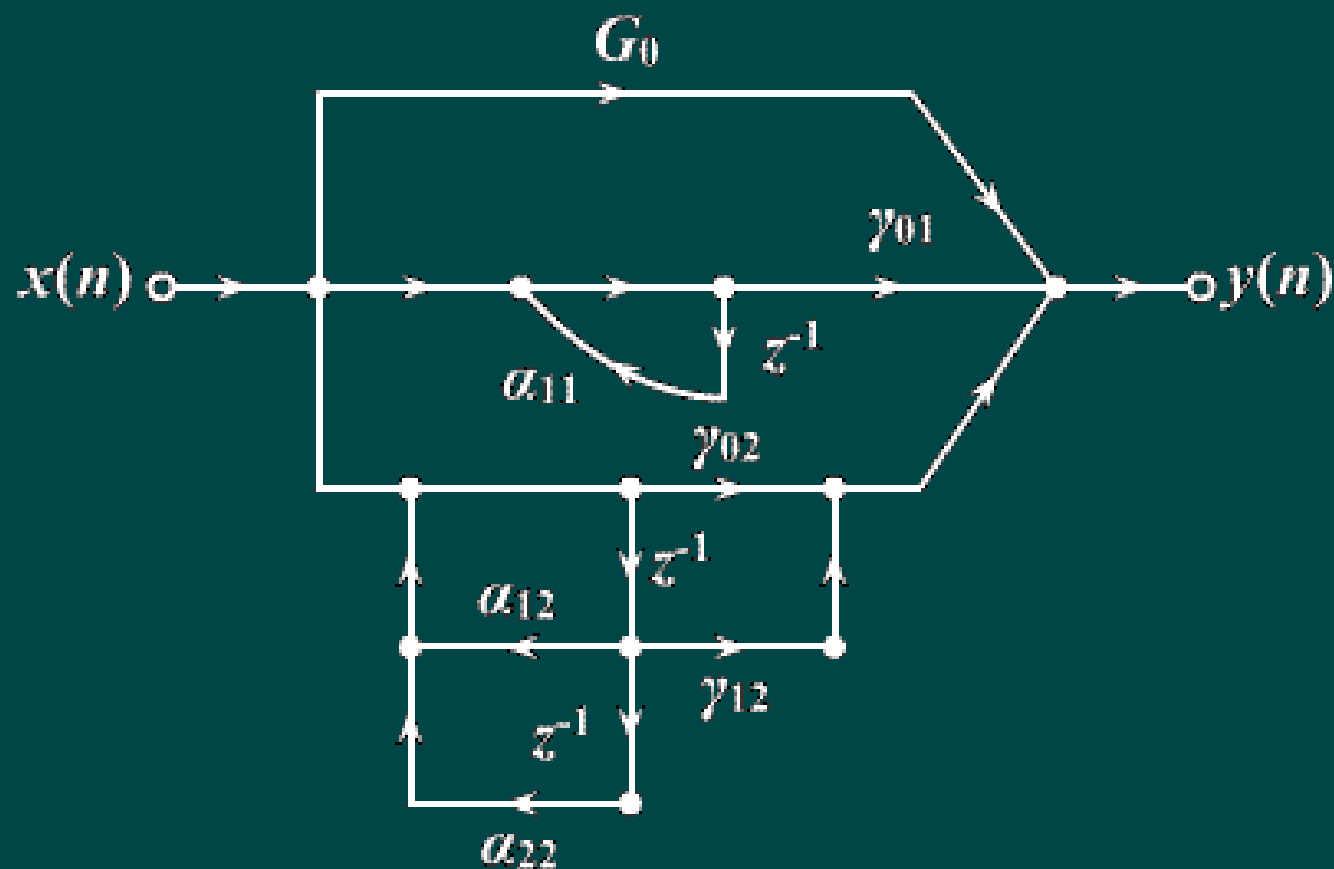


图5-12 三阶IIR滤波器的并联型结构

## 并联型的特点:



- 通过调整系数  $\alpha_{1k}, \alpha_{2k}$  可单独调整一对极点位置, 但不能单独调整零点位置
- 各并联基本节的误差互相不影响, 故运算误差最小
- 可同时对输入信号进行运算, 故运算速度最高



## 转置定理:

- 原网络中所有支路方向翻转（增益不变），并将输入  $x(n)$  和输出  $y(n)$  相互交换，则其系统函数  $H(z)$  不改变。

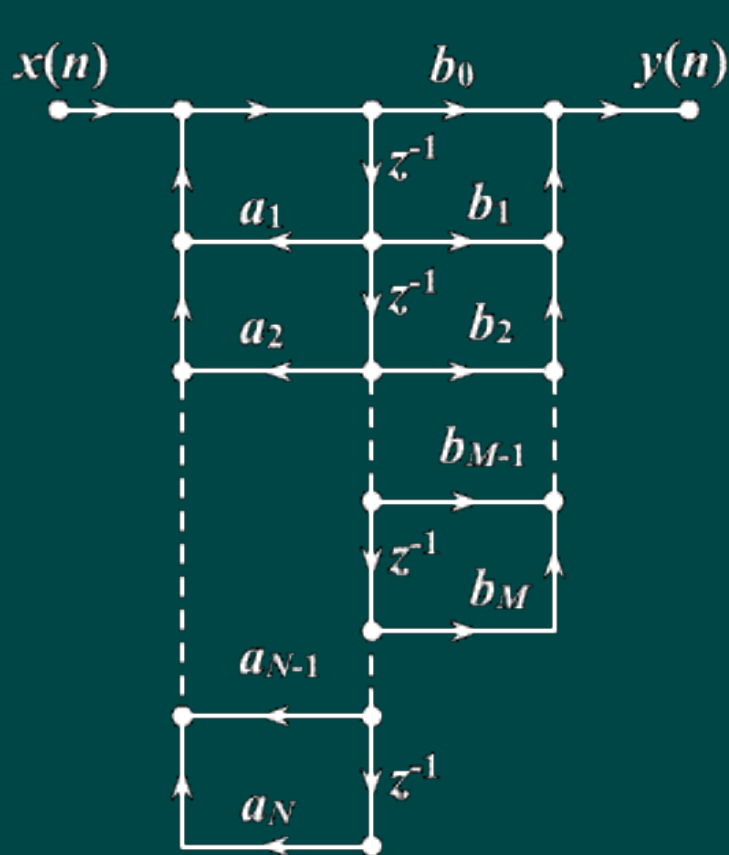


图5-6 直接 II 型结构(典范型结构)

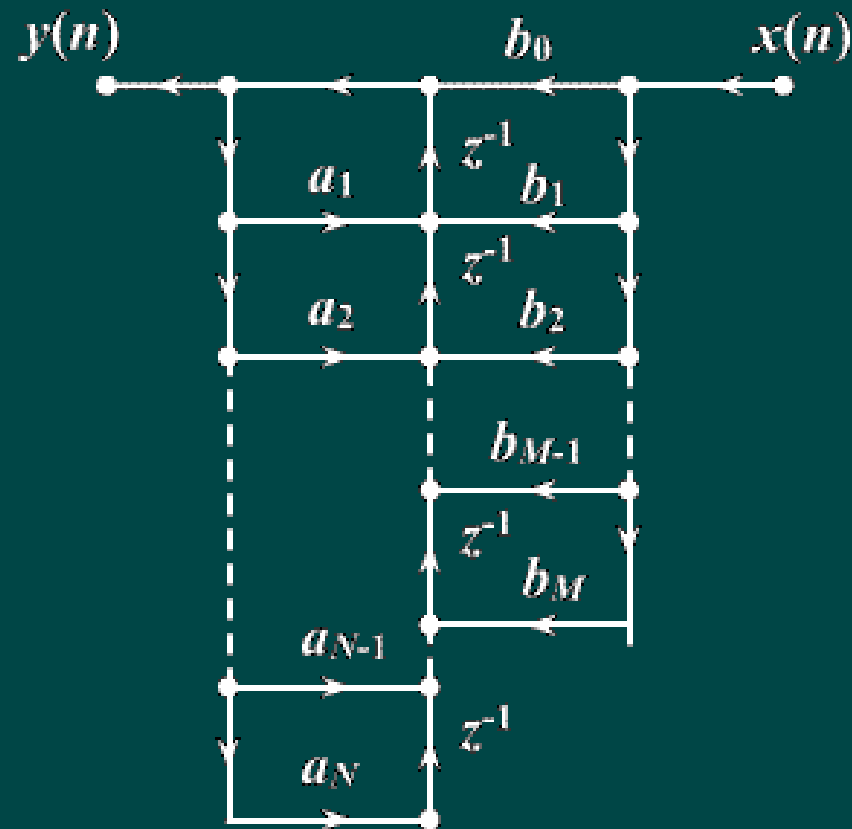


图5-13 典范型结构的转置

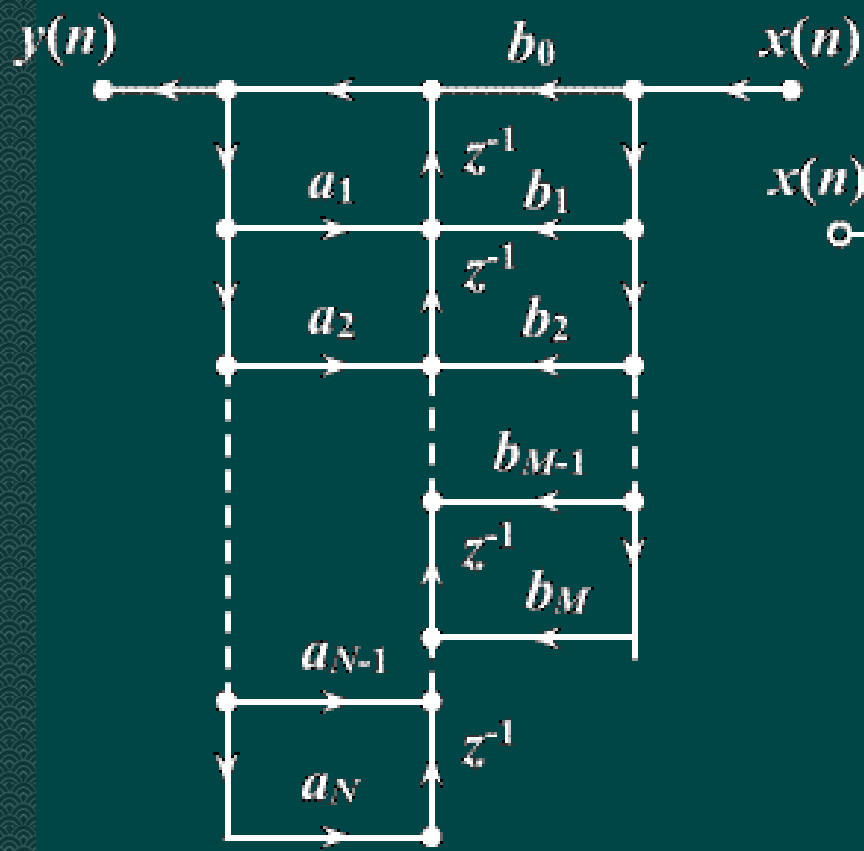


图5-13 典范型结构的转置

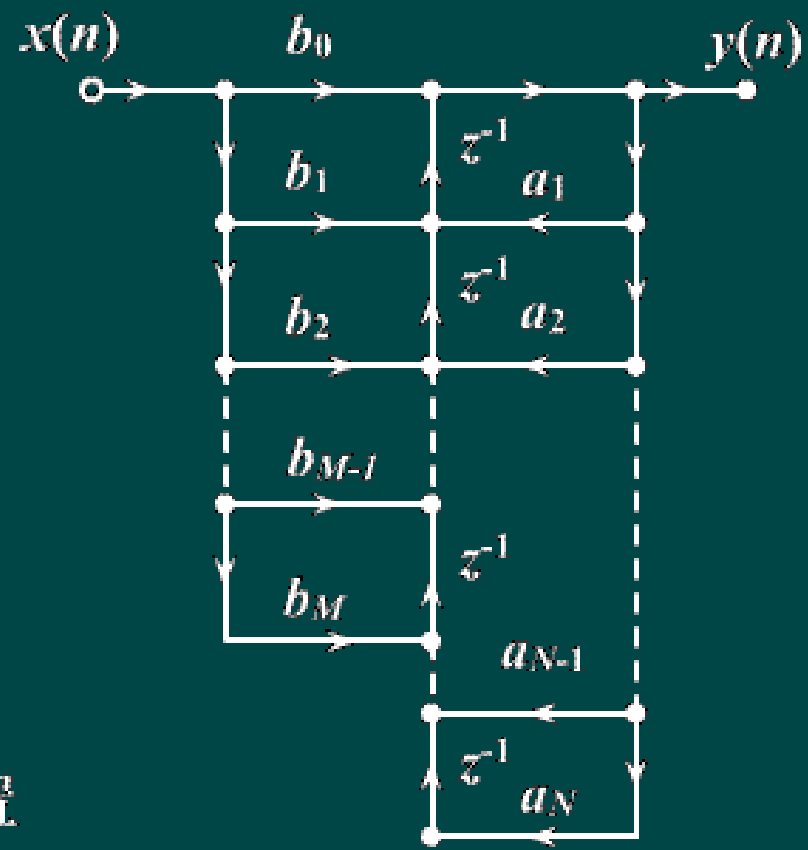


图5-14 将图5-13画成输入在左，输出在右的习惯形式



例： 设IIR数字滤波器差分方程为：

$$y(n) = 8x(n) - 4x(n-1) + 11x(n-2) - 2x(n-3) \\ + \frac{5}{4}y(n-1) - \frac{3}{4}y(n-2) + \frac{1}{8}y(n-3)$$

试用四种基本结构实现此差分方程。

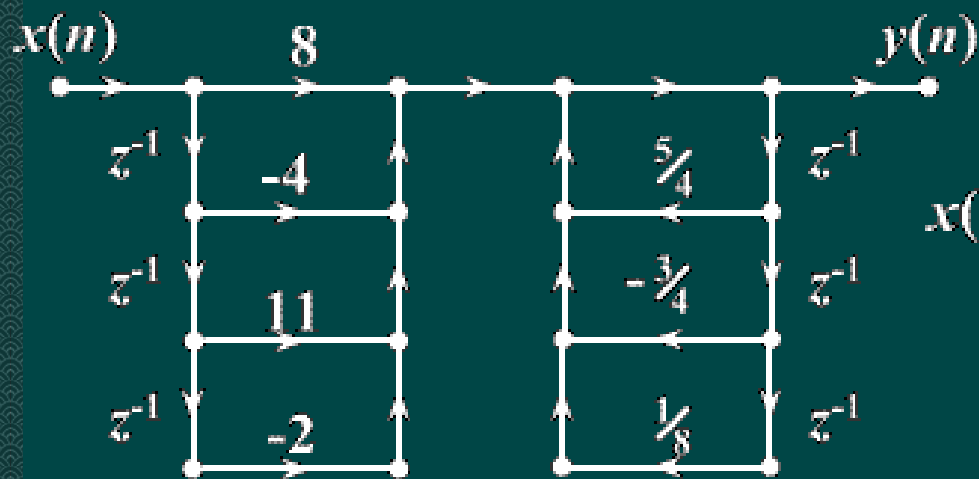
解： 对差分方程两边取 $z$ 变换，得系统函数：

$$H(z) = \frac{8 - 4z^{-1} + 11z^{-2} - 2z^{-3}}{1 - \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{3}{4}z^{-2} - \frac{1}{8}z^{-3}}$$

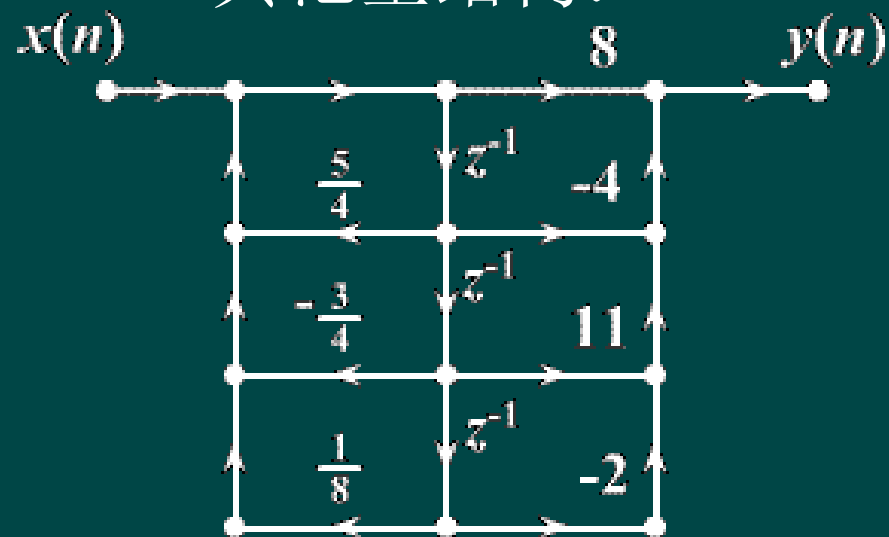


$$H(z) = \frac{8 - 4z^{-1} + 11z^{-2} - 2z^{-3}}{1 - \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{3}{4}z^{-2} - \frac{1}{8}z^{-3}}$$

得直接I型结构:



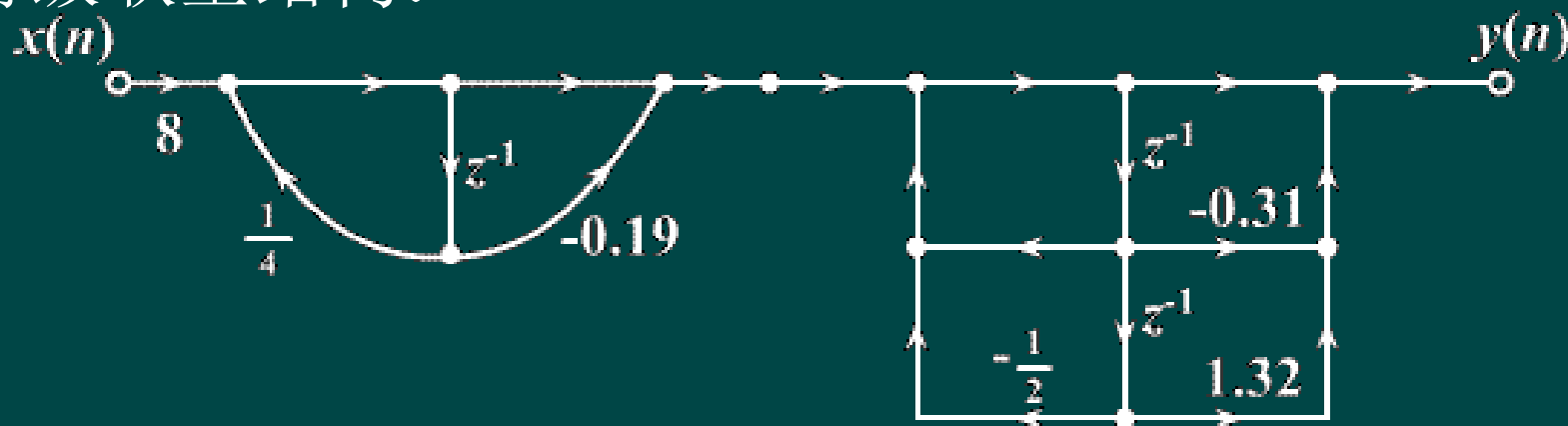
典范型结构:



将 $H(z)$ 因式分解:

$$H(z) = \frac{(2 - 0.379z^{-1})(4 - 1.24z^{-1} + 5.264z^{-2})}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}\right)}$$
$$= \frac{8(1 - 0.19z^{-1})(1 - 0.31z^{-1} + 1.32z^{-2})}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}\right)}$$

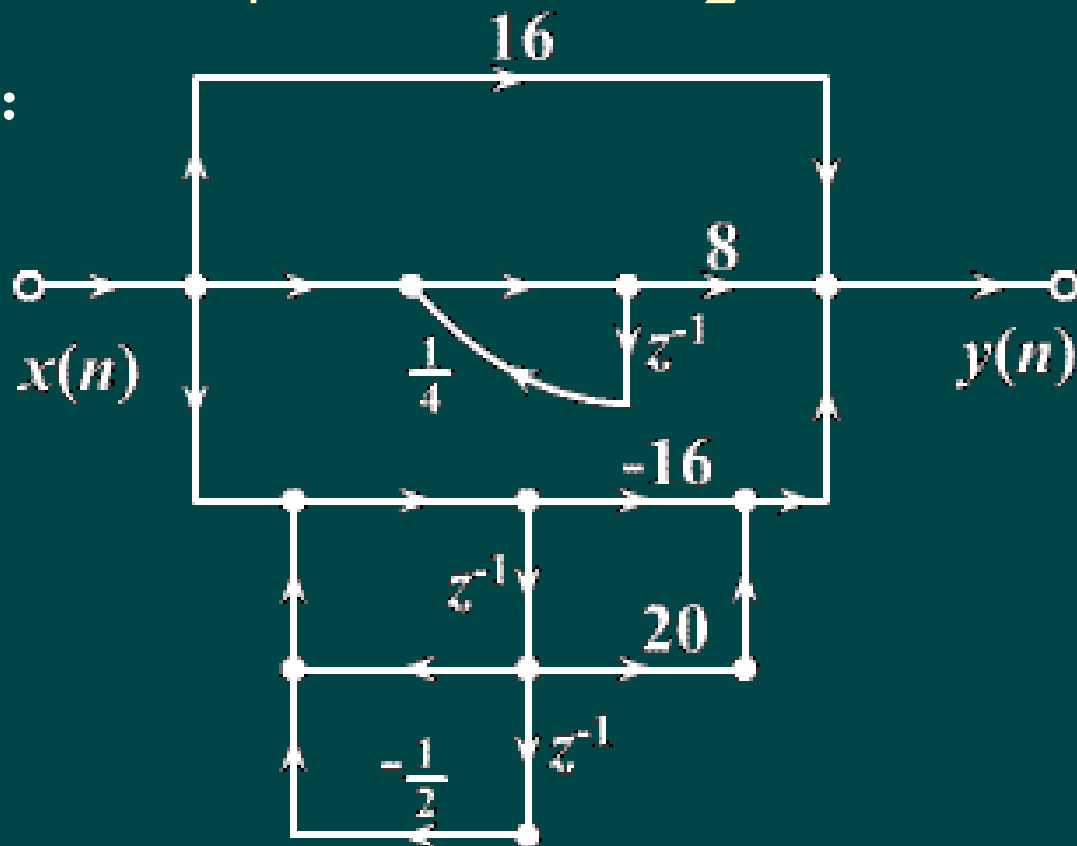
得级联型结构:



将 $H(z)$ 部分分式分解:

$$H(z) = 16 + \frac{8}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{-16 + 20z^{-1}}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

得并联型结构:



### 三、FIR数字滤波器的基本结构

- FIR数字滤波器的特点:

系统函数: 
$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

IIR是由系统差分方程做Z变换得到的  
这里的FIR则是由系统差分方程得到 $h(n)$   
，对 $h(n)$ 做Z变换得到 $H(z)$

含有规律幂次项所导致的：  
一项一零点，逐项升一级


有 $N-1$ 个零点分布于 $z$ 平面  
 $z=0$ 处 是 $N-1$ 阶极点

1) 系统的单位抽样响应  $h(n)$  有限长，设为  $N$  点

2) 系统函数 $H(z)$ 在 $|z|>0$ 处收敛，有限 $z$ 平面只有零点  
，全部极点在 $z=0$ 处（因果系统）

只有负数次幂所  
导致的：

3) 无输出到输入的反馈，一般为非递归型结构


$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m) x(n-m)$$

一眼顶针，鉴定为类圆周卷积，经典非递归结构  
以此为判断IIR与FIR的依据

# 1、横截型（卷积型、直接型）

差分方程: 
$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m)$$

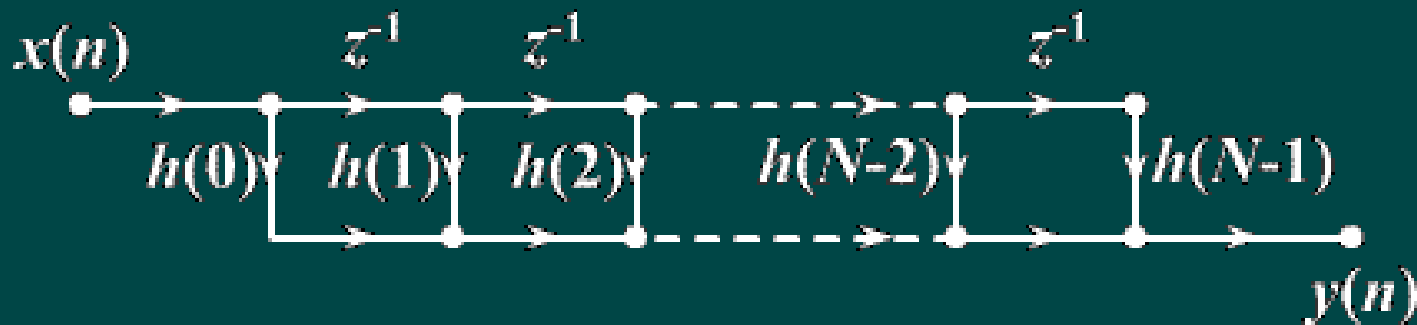


图5-15 *FIR*滤波器的横截型结构

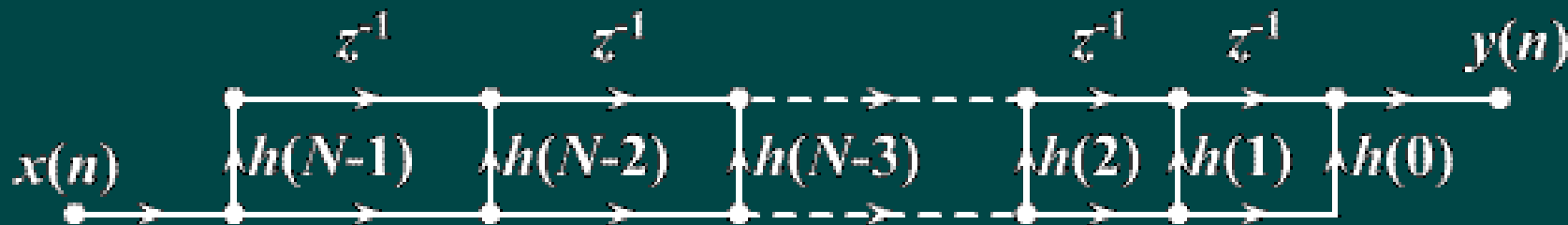


图5-16 图5-15的转置结构

## 2、级联型

将 $H(z)$ 分解成实系数二阶因式的乘积形式:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \prod_{k=1}^{[N/2]} (\beta_{0k} + \beta_{1k}z^{-1} + \beta_{2k}z^{-2})$$

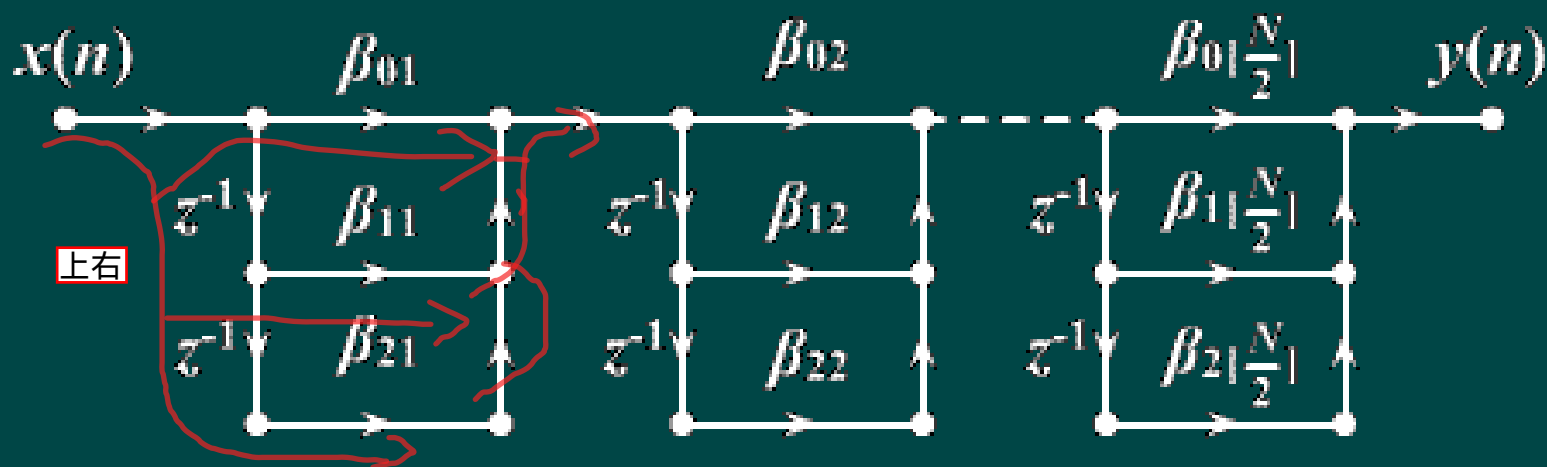


图5-17  $FIR$ 滤波器的级联型结构( $N$ 为奇数)

$N$  为偶数时, 其中有一个  $\beta_{2k} = 0$       ( $N-1$ 个零点)



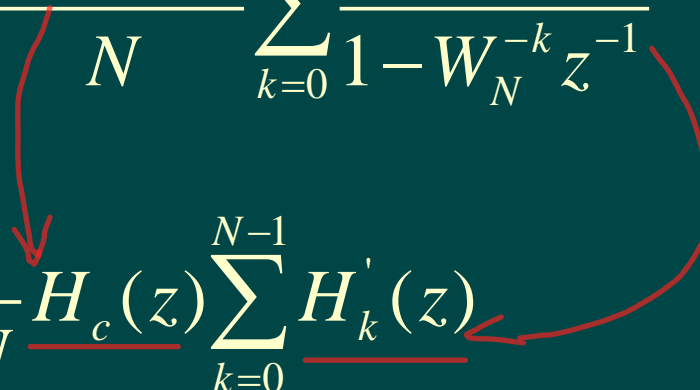
## 级联型的特点

- 每个基本节控制一对零点，便于控制滤波器的传输零点
- ◇ 系数比直接型多，所需的乘法运算多



### 3、频率抽样型 “理解”

$N$  个频率抽样  $H(k)$  恢复  $H(z)$  的内插公式:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{(1-z^{-N})}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1-W_N^{-k} z^{-1}} \\ &= \frac{1}{N} \underbrace{H_c(z)} \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{H'_k(z)} \end{aligned}$$


子系统:  $H_c(z) = 1 - z^{-N}$

在单位圆上有  $N$  个等间隔角度的零点:  $z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$   $1 = e^{j2\pi k}$

是  $N$  延时单元的梳状滤波器

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

频率响应:

DTFT启动!  
 $H(e^{j\omega}) = H(z) |_{z=e^{j\omega}}$

$$H_c(e^{j\omega}) = 1 - e^{-j\omega N}$$

$$= e^{-j\frac{\omega N}{2}} \left( e^{j\frac{\omega N}{2}} - e^{-j\frac{\omega N}{2}} \right)$$

$$= 2je^{-j\frac{\omega N}{2}} \sin \frac{\omega N}{2}$$

频率响应的幅度:

$$|H_c(e^{j\omega})| = 2 \left| \sin \frac{\omega N}{2} \right|$$

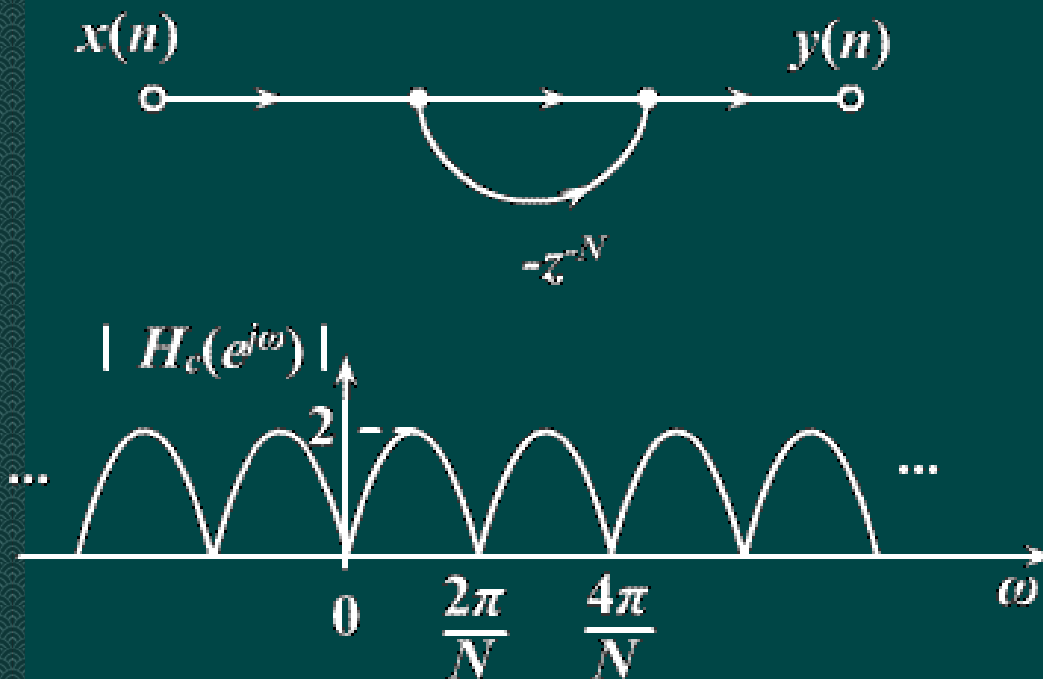



图5-18 梳状滤波器结构及频率响应幅度



子系统:  $H'_k(z) = \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$

单位圆上有一个极点:  $z_k = W_N^{-k} = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$

此一阶网络在  $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$  处响应幅度为无穷大，等效于谐振频率为  $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$  的无损耗谐振器。

极点和第一个子系统（梳状滤波器）的第  $k$  个零点相抵消

，使频率  $\omega = \frac{2\pi}{N}k$  处的频率响应等于  $H(k)$ ，因而可以

用抽样值  $H(k)$  直接控制级联后的FIR滤波器的频率响应。

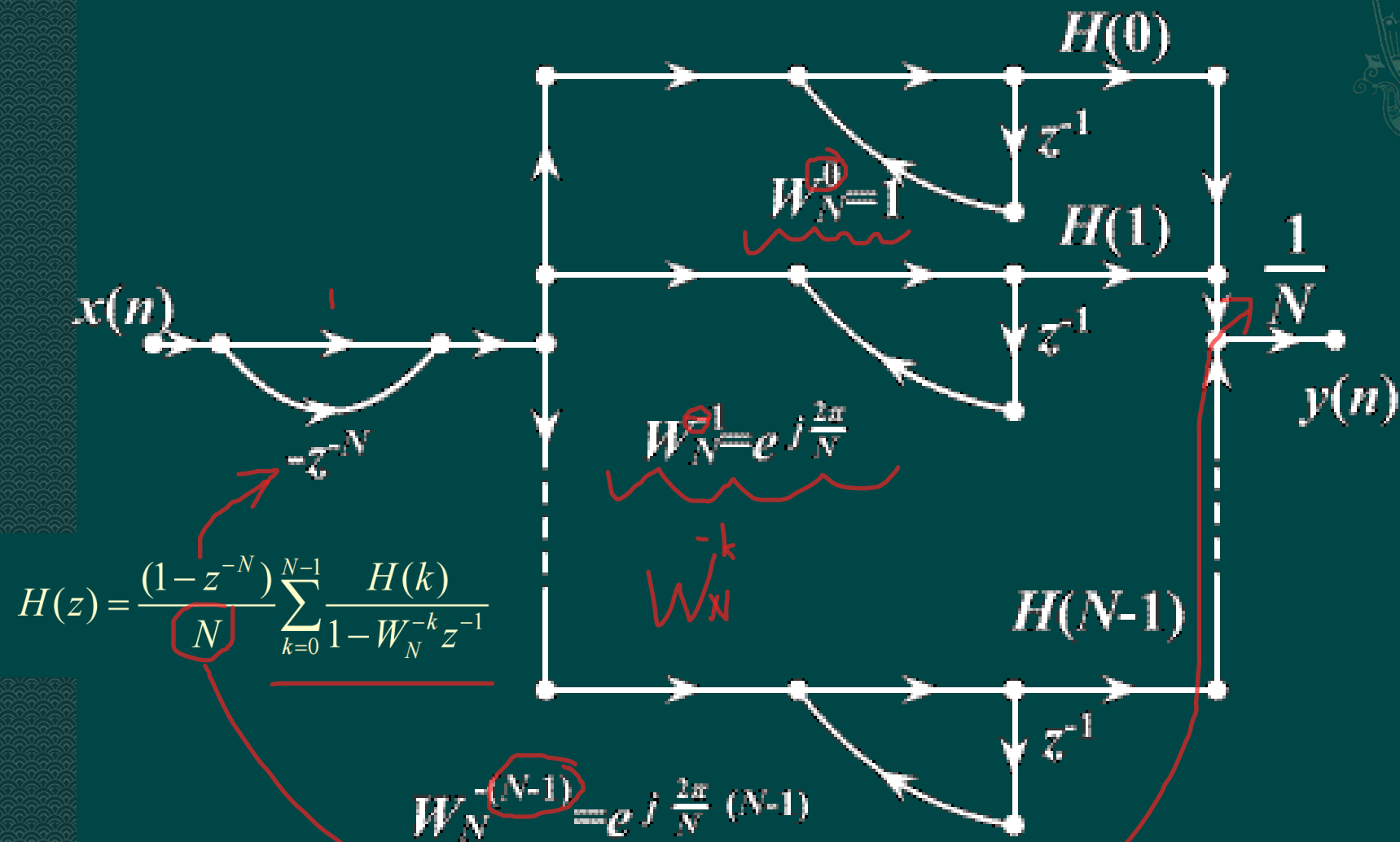


图5-19 *FIR*滤波器的频率抽样型结构



## 频率抽样型结构的优缺点

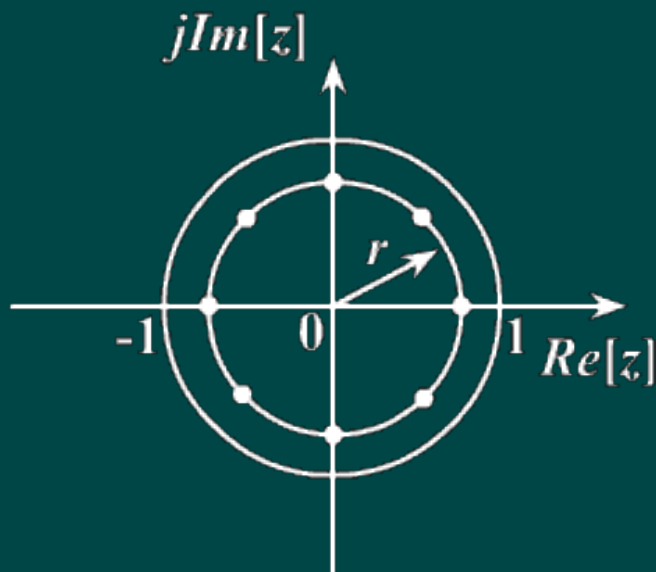
- ◆ 调整 $H(k)$ 就可以有效地调整频响特性
- 若 $h(n)$ 长度相同，则网络结构完全相同，除了各支路增益 $H(k)$ ，便于标准化、模块化
- 量化效应对零点位置没有影响，而极点由系数决定，系数量化后，极点位置会移动，可能导致零极点不能完全对消，导致系统不稳定
- 结构中所乘的系数 $H(k)$ 及 $W_N^{-k}$ 多为复数，增加了复数乘法和存储量

# 修正频率抽样结构

将零极点移至半径为  $r$  的圆上:  $r < 1$  且  $r \approx 1$

$$H(z) = \frac{(1 - r^N z^{-N})}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H_r(k)}{1 - r W_N^{-k} z^{-1}}$$

一个很接近单位圆的内圆 (复变函数捧读)



极点:  $z_k = r e^{j \frac{2\pi}{N} k}$

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

子系统:  $H_c(z) = 1 - z^{-N}$

在单位圆上有  $N$  个等间隔角度的零点:  $z_k = e^{j \frac{2\pi}{N} k}$   $l = e^{-j 2\pi k} \quad k \in \mathbb{Z}$

是  $N$  延时单元的梳状滤波器  $k = 0, 1, \dots, N-1$

图5-20 抽样点改到  $r \leq 1$  的圆上

子系统:  $H'_k(z) = \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$

单位圆上有一个极点:  $z_k = W_N^{-k} = e^{j \frac{2\pi}{N} k}$

为使系数为实数，将**共轭根**合并

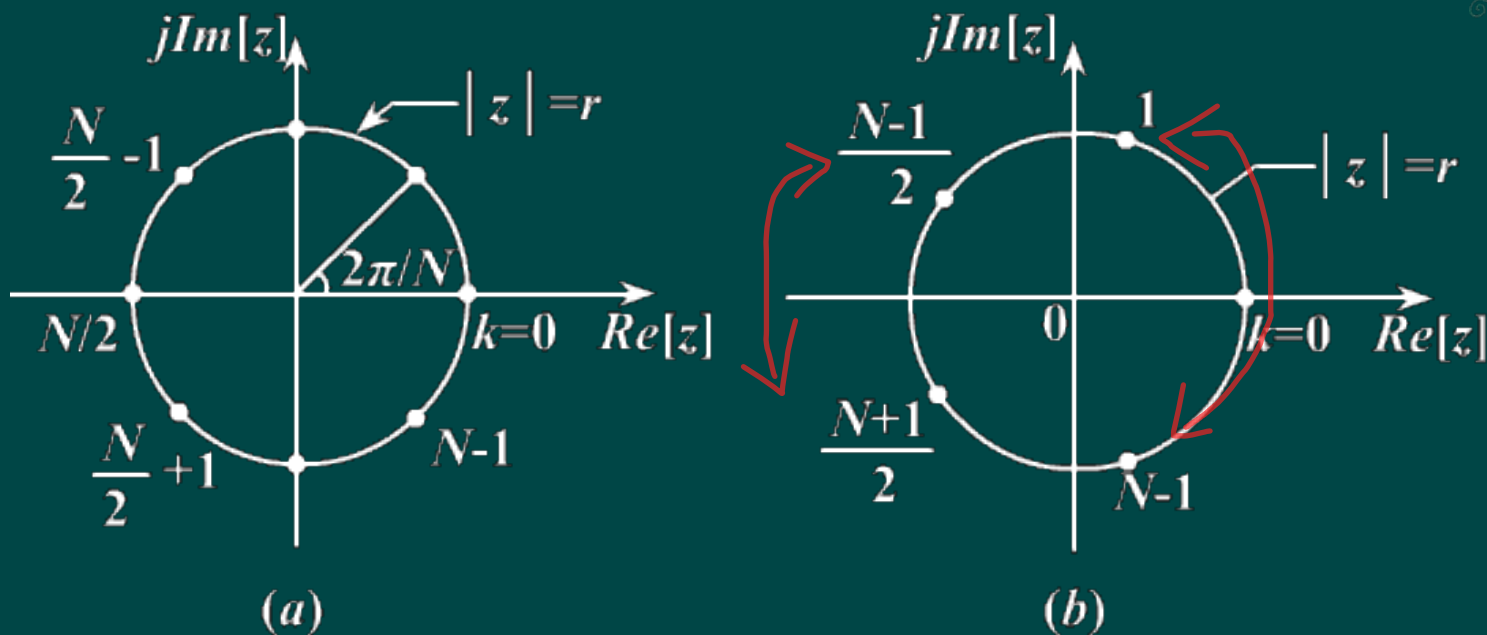


图5-21 谐振器各个根的位置

(a)  $N$ 为偶数 (b)  $N$ 为奇数

由对称性:  $z_{N-k} = z_k^*$

$$W^{-(N-k)} = W_N^k = (W_N^{-k})^*$$

又  $h(n)$  为实数，利用实序列DFT的对称性质，有

$$\underline{H(k) = H^*((N-k))_N R_N(k)}$$



将第 $k$ 个和第 $(N-k)$ 个谐振器合并成一个实系数的二阶网络:

$$\begin{aligned} H_k(z) &= \frac{H(k)}{1 - rW_N^{-k}z^{-1}} + \frac{H(N-k)}{1 - rW_N^{-(N-k)}z^{-1}} \\ &= \frac{H(k)}{1 - rW_N^{-k}z^{-1}} + \frac{H^*(k)}{1 - r(W_N^{-k})^*z^{-1}} \\ &= \frac{\beta_{0k} + \beta_{1k}z^{-1}}{1 - z^{-1}2r\cos(\frac{2\pi}{N}k) + r^2z^{-2}} \end{aligned}$$

其中:  $\beta_{0k} = 2\operatorname{Re}[H(k)]$

$$\beta_{1k} = -2r\operatorname{Re}[H(k)W_N^k] \quad \begin{cases} k = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2} & N \text{ 为奇数} \\ k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1 & N \text{ 为偶数} \end{cases}$$



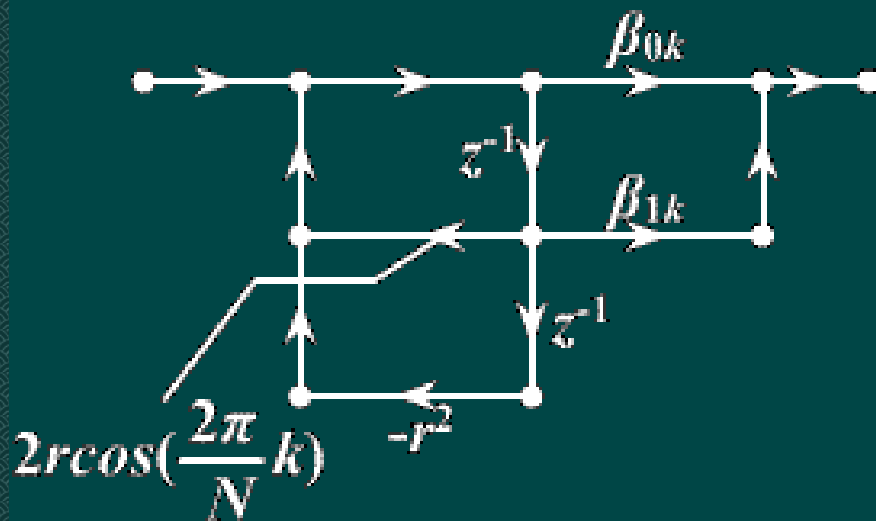


图5-22 二阶谐振器

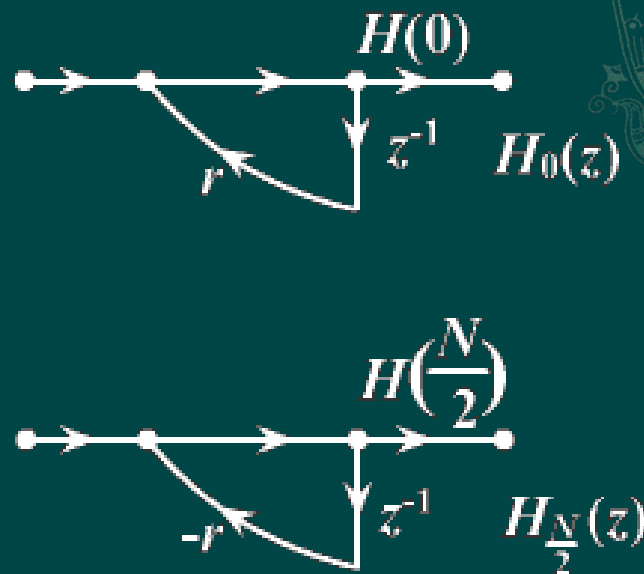


图5-23 一阶网络(实根)

◆ 当 $N$ 为偶数时，还有一对实数根

$k=0, N/2$ 处:  $z = \pm r$

$$H_0(z) = \frac{H(0)}{1 - rz^{-1}}$$

$$H_{N/2}(z) = \frac{H(N/2)}{1 + rz^{-1}}$$

$$H(z) = (1 - r^N z^{-N}) \frac{1}{N} \left[ H_0(z) + H_{N/2}(z) + \sum_{k=1}^{N/2-1} H_k(z) \right]$$

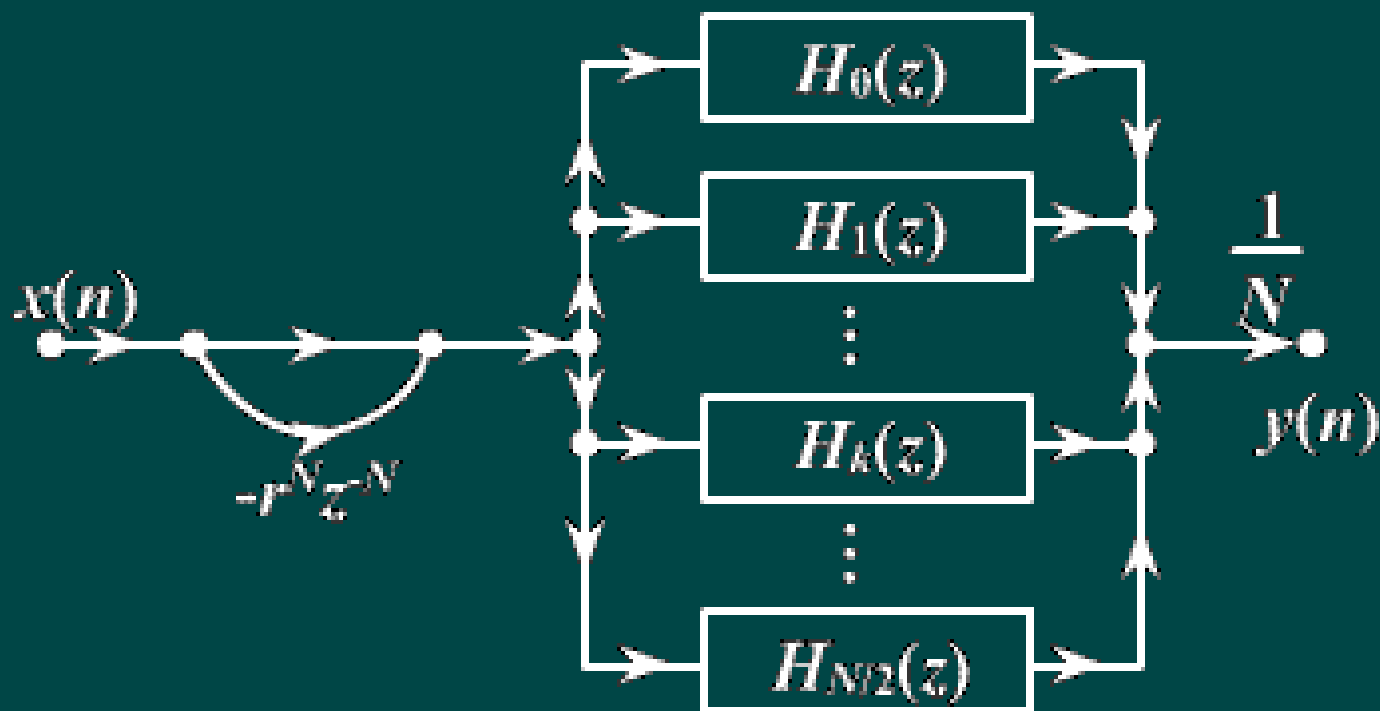


图5-24 *FIR*滤波器修正后的频率抽样结构

◆ N为奇数时

只有一个实数根在  $k = 0$  处:  $z = r$

$$H(z) = (1 - r^N z^{-N}) \frac{1}{N} \left[ H_0(z) + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} H_k(z) \right]$$



## 4、快速卷积结构

人话：使用DFT的性质，见Chapter3

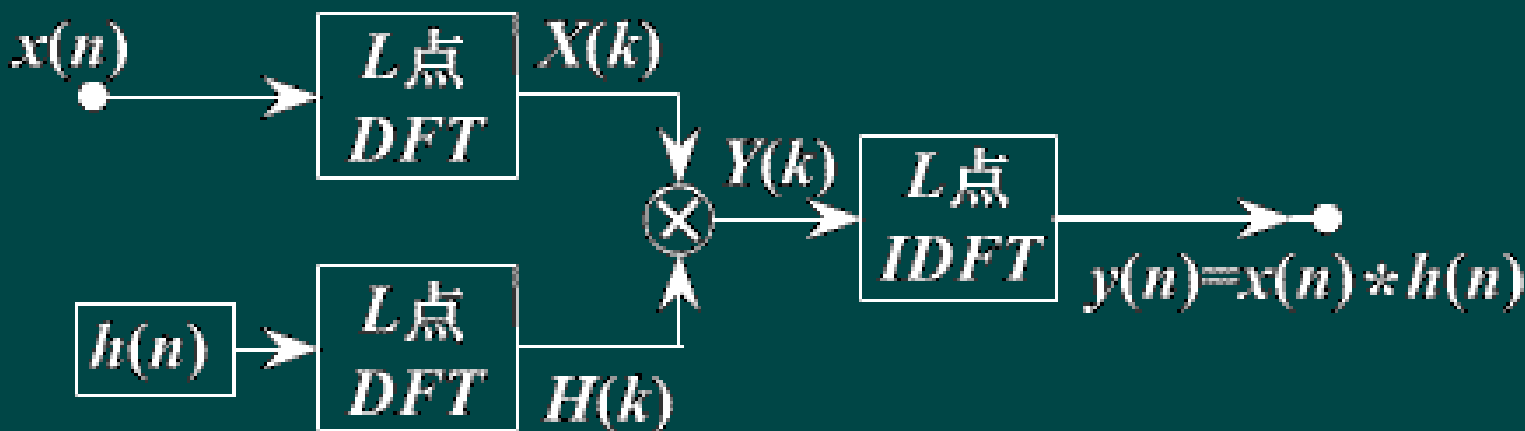


图5-25 *FIR*滤波器的快速卷积结构

## 5、线性相位FIR滤波器的结构

FIR滤波器单位抽样响应 $h(n)$  为实数， $0 \leq n \leq N-1$   
且满足：

偶对称：
$$h(n) = h(N-1-n)$$

或奇对称：
$$h(n) = -h(N-1-n)$$

即对称中心在  $(N-1) / 2$  处

则这种FIR滤波器具有严格线性相位。

N为奇数时



$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n) z^{-n} + h\left(\frac{N-1}{2}\right) z^{-\frac{N-1}{2}} + \sum_{n=\frac{N-1}{2}+1}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

代入，然后取反

$$\text{令 } n = N - 1 - m$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n) \left[ z^{-n} \pm z^{-(N-1-n)} \right] + h\left(\frac{N-1}{2}\right) z^{-\frac{N-1}{2}}$$

(N-1)/2个对称对 (对h(n)而言)  
，对应的对称z次幂相加 (h(n)偶对称) / 相减 (h(n)奇对称)

合并

对称中心点项

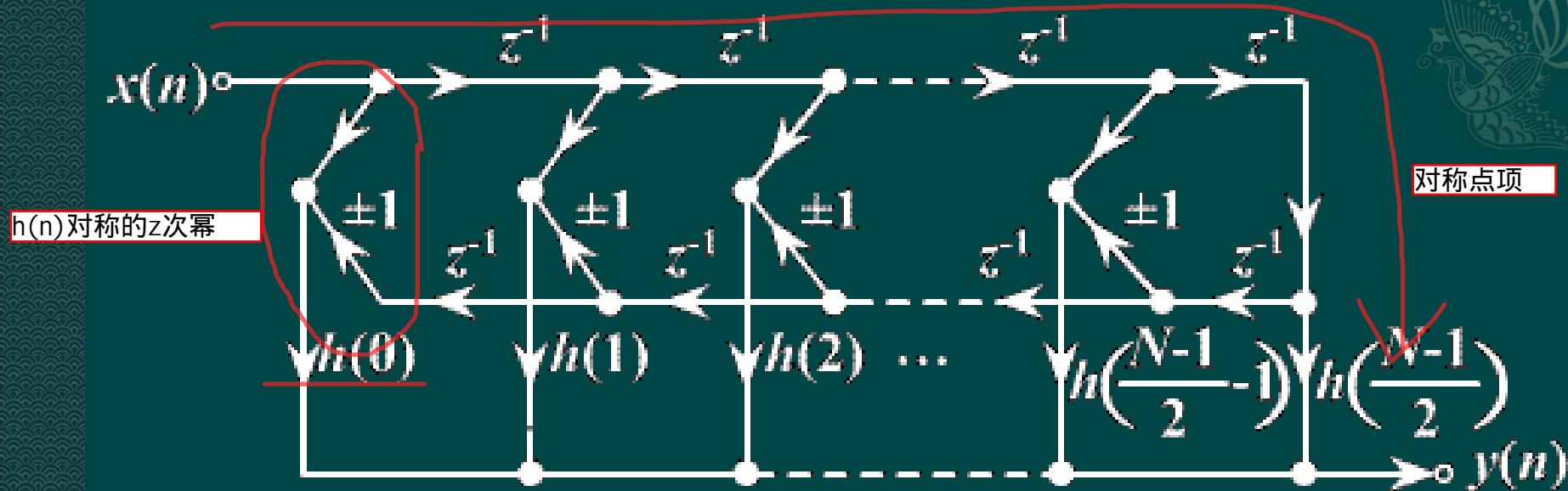


图5-26  $N$ 为奇数时线性相位FIR滤波器的直接型结构

$h(n)$ 偶对称，取“+”

$h(n)$ 奇对称，取“-”，且  $h\left(\frac{N-1}{2}\right) = 0$



$N$ 为偶数时

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n)z^{-n} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h(n) \left[ z^{-n} \pm z^{-(N-1-n)} \right]$$

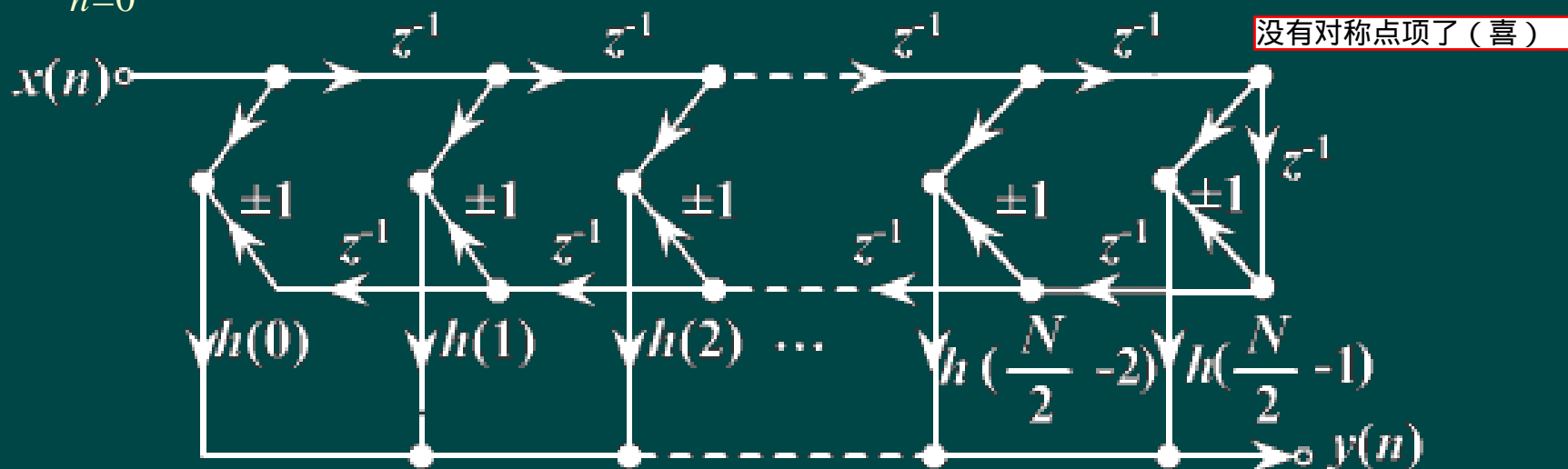


图5-27  $N$ 为偶数时，线性相位FIR滤波器的直接型结构  
( $h(n)$  偶对称时 $\pm 1$ 取 $+1$ ,  $h(n)$  奇对称时 $\pm 1$ 取 $-1$ )

~一样的推导一样的结构~



## 四、数字滤波器的格型结构

格型结构的优点：

- 1) 模块化结构便于实现高速并行处理
- 2)  $m$ 阶格型滤波器可以产生1阶到 $m$ 阶的 $m$ 个横向滤波器的输出性能
- 3) 对有限字长的舍入误差不灵敏

故广泛应用于现代谱估计、语音信号处理、自适应滤波等。



# 1、全零点系统（FIR 系统）的格型结构

一个  $M$  阶的 FIR 滤波器的横向结构的系统函数：

$$H(z) = \sum_{i=0}^M h(i) z^{-i} = 1 + \sum_{i=1}^M b_i^{(M)} z^{-i} = B(z)$$

系数  $b_i^{(M)}$  表示  $M$  阶 FIR 系统的第  $i$  个系数

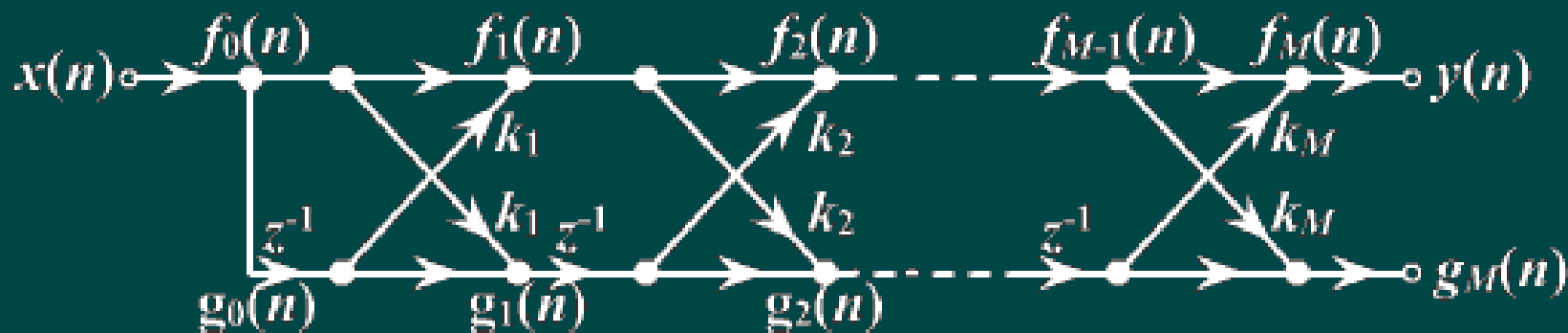


图5-28 全零点系统(FIR系统)的格型结构

$$H(z) = \sum_{i=0}^M h(i) z^{-i} = 1 + \sum_{i=1}^M b_i^{(M)} z^{-i} = B(z)$$

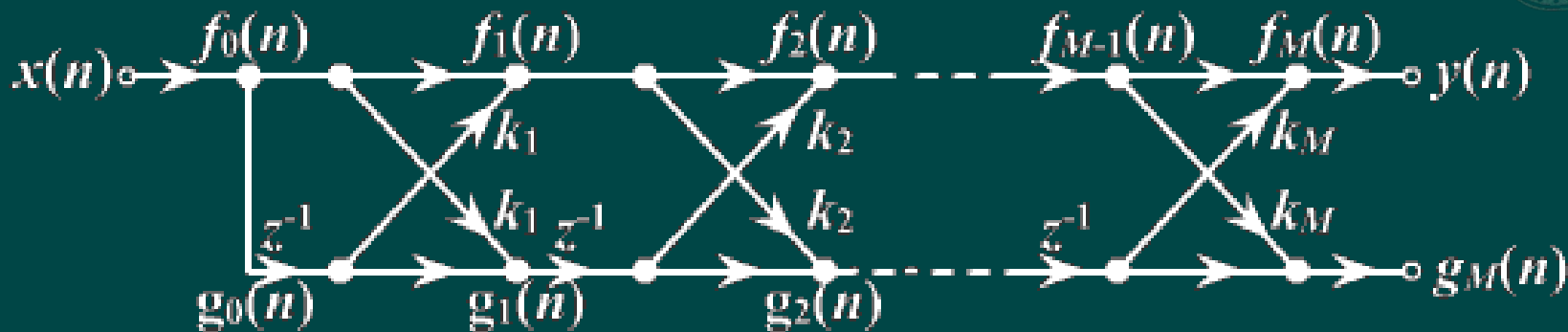


图5-28 全零点系统(*FIR*系统)的格型结构

横向结构:  $M$  个参数  $b_i^{(M)}$ , 或  $h(i)$   $i = 1 \sim M$

$M$  次乘法,  $M$  次延迟

格型结构:  $M$  个参数  $k_i$ ,  $i = 1 \sim M$  称为反射系数

$2M$  次乘法,  $M$  次延迟

格型结构的系数 $k_i$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ )

横向结构的系数 $b_i^{(m)}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$  ;  $m = 1, 2, \dots, M$ )

讨论  $k_i \leftrightarrow b_i^{(m)}$  的递推关系

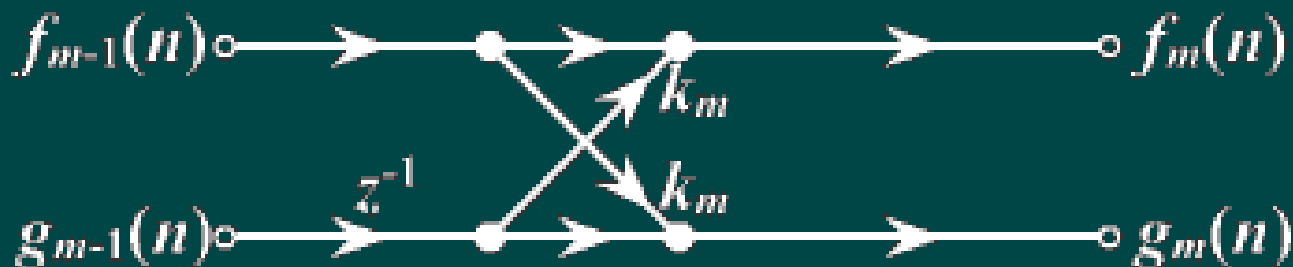


图5-29 全零点(FIR系统)格型结构基本传输单元

$$\begin{cases} f_m(n) = f_{m-1}(n) + k_m g_{m-1}(n-1) \\ g_m(n) = k_m f_{m-1}(n) + g_{m-1}(n-1) \end{cases} \quad m = 1, 2, \dots, M$$

$$\begin{cases} f_0(n) = g_0(n) = x(n) \\ f_M(n) = y(n) \end{cases}$$

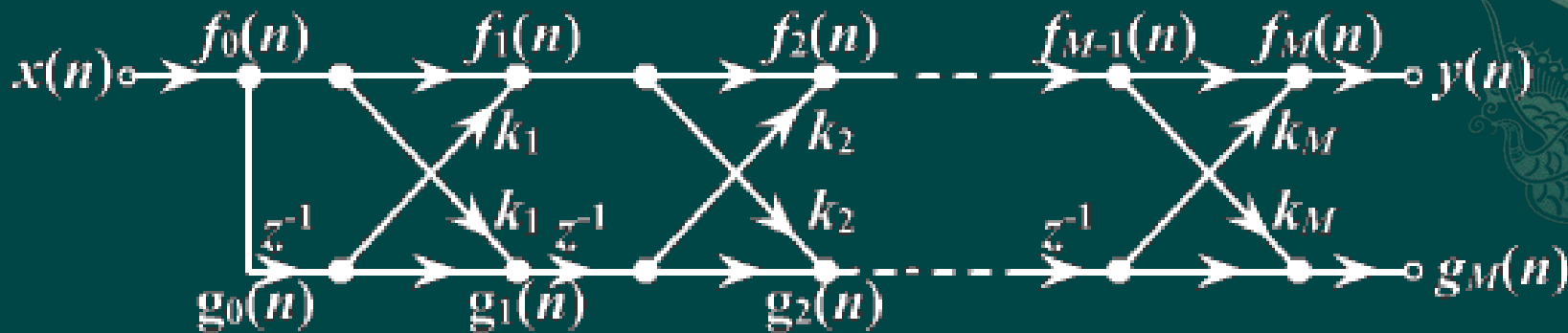


图5-28 全零点系统(*FIR*系统)的格型结构

定义:  $B_m(z)$ 、 $\bar{B}_m(z)$  分别是输入端到第  $m$  个基本传输单元上、下端所对应的系统函数:

$$B_m(z) = \frac{F_m(z)}{F_0(z)} = 1 + \sum_{i=1}^m b_i^{(m)} z^{-i}$$

$$\bar{B}_m(z) = \frac{G_m(z)}{G_0(z)} \quad m = 1, 2, \dots, M$$

$$1) \quad B_m(z) \leftrightarrow B_{m-1}(z)$$

对基本单元

$$\begin{cases} f_m(n) = f_{m-1}(n) + k_m g_{m-1}(n-1) \\ g_m(n) = k_m f_{m-1}(n) + g_{m-1}(n-1) \end{cases}$$

$z$  变换, 得

$$\begin{cases} F_m(z) = F_{m-1}(z) + k_m z^{-1} G_{m-1}(z) & / F_0 \\ G_m(z) = k_m F_{m-1}(z) + z^{-1} G_{m-1}(z) & / G_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_m(z) = B_{m-1}(z) + k_m z^{-1} \bar{B}_{m-1}(z) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \bar{B}_m(z) = k_m B_{m-1}(z) + z^{-1} \bar{B}_{m-1}(z) \end{cases} \quad (2)$$

$\Downarrow$

$$\bar{B}_{m-1}(z) = z \bar{B}_m(z) - z k_m B_{m-1}(z) \quad (3)$$



$$\begin{cases} B_m(z) = B_{m-1}(z) + k_m z^{-1} \bar{B}_{m-1}(z) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \bar{B}_m(z) = k_m B_{m-1}(z) + z^{-1} \bar{B}_{m-1}(z) \end{cases} \quad (2)$$

$\Downarrow$

$$\bar{B}_{m-1}(z) = z \bar{B}_m(z) - z k_m B_{m-1}(z) \quad (3)$$

(3)代入(1)得 (4)

$$B_{m-1}(z) = \frac{1}{1 - k_m^2} [B_m(z) - k_m \bar{B}_m(z)] \quad (4)$$

(4)代入(3) 得:

$$\bar{B}_{m-1}(z) = \frac{1}{1 - k_m^2} [-z k_m B_m(z) + z \bar{B}_m(z)]$$



$$B_0(z) = \bar{B}_0(z) = 1$$

由(1)、(2)

$$\begin{cases} B_m(z) = B_{m-1}(z) + k_m z^{-1} \bar{B}_{m-1}(z) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \bar{B}_m(z) = k_m B_{m-1}(z) + z^{-1} \bar{B}_{m-1}(z) \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} B_1(z) = B_0(z) + k_1 z^{-1} \bar{B}_0(z) = 1 + k_1 z^{-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{B}_1(z) = k_1 B_0 + z^{-1} \bar{B}_0(z) = k_1 + z^{-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{B}_1(z) = z^{-1} B_1(z^{-1})$$

$$\begin{cases} B_2(z) = B_1(z) + k_2 z^{-1} \bar{B}_1(z) = 1 + k_1 z^{-1} + k_1 k_2 z^{-1} + k_2 z^{-2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{B}_2(z) = k_2 B_1(z) + z^{-1} \bar{B}_1(z) = k_2 + k_1 k_2 z^{-1} + k_1 z^{-1} + z^{-2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{B}_2(z) = z^{-2} B_2(z^{-1})$$





$$\cdots \bar{B}_m(z) = z^{-m} B_m(z^{-1})$$

代入 (1)、(4)

$$B_m(z) = B_{m-1}(z) + k_m z^{-1} \bar{B}_{m-1}(z) \quad (1)$$

$$B_{m-1}(z) = \frac{1}{1 - k_m^2} [B_m(z) - k_m \bar{B}_m(z)] \quad (4)$$

得

$$\left\{ \begin{aligned} B_m(z) &= B_{m-1}(z) + k_m z^{-m} B_{m-1}(z^{-1}) \end{aligned} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{aligned} B_{m-1}(z) &= \frac{1}{1 - k_m^2} [B_m(z) - k_m z^{-m} B_m(z^{-1})] \end{aligned} \right. \quad (6)$$

$$2) \quad b_i^{(m)} \leftrightarrow k_m \quad i = 1 \sim m \quad m = 1 \sim M$$

$$B_m(z) = 1 + \sum_{i=1}^m b_i^{(m)} z^{-i} \quad \text{代入(5)}$$

$$B_{m-1}(z) = 1 + \sum_{i=1}^{m-1} b_i^{(m-1)} z^{-i} \quad \text{代入 (6)}$$

利用待定系数法，可得以下两组递推关系

$$\begin{cases} b_m^{(m)} = k_m \\ b_i^{(m)} = b_i^{(m-1)} + k_m b_{m-i}^{(m-1)} \end{cases} \quad i = 1 \sim m-1$$

$$\begin{cases} k_m = b_m^{(m)} \\ b_i^{(m-1)} = \frac{1}{1 - k_m^2} [b_i^{(m)} - k_m b_{m-i}^{(m)}] \end{cases} \quad m = 2, \dots, M$$





3) 已知  $H(z) = B(z) = B_M(z)$ , 求  $k_1, k_2 \cdots k_M$

(1)  $k_M = b_M^{(M)}$

(2) 由  $k_M, b_1^{(M)}, b_2^{(M)} \cdots b_M^{(M)}$ , 求  $B_{M-1}(z)$  的系数

$$b_1^{(M-1)}, b_2^{(M-1)}, \cdots b_{M-1}^{(M-1)} = k_{M-1}$$

或由(6)得  $B_{M-1}(z)$ , 则  $k_{M-1} = b_{M-1}^{(M-1)}$

(3) 重复(2)求出全部  $k_M, k_{M-1}, \cdots k_1, B_{M-1}(z), \cdots B_1(z)$



例：一个FIR系统的系统函数为：

$$H(z) = 1 - 1.8313708z^{-1} + 1.4319595z^{-2} - 0.448z^{-3}$$

试求其格型结构。

解：这是一个三阶系统

$$b_1^{(3)} = -1.8313708, \quad b_2^{(3)} = 1.4319595, \quad b_3^{(3)} = -0.448$$

$$\text{得 } k_3 = b_3^{(3)} = -0.448$$

$$\text{由 } b_i^{(m-1)} = \frac{1}{1 - k_m^2} [b_i^{(m)} - k_m b_{m-i}^{(m)}], \quad \text{得}$$

$$b_1^{(2)} = \frac{1}{1 - k_3^2} [b_1^{(3)} - k_3 b_2^{(3)}] = -1.4886262$$

$$b_2^{(2)} = \frac{1}{1 - k_3^2} [b_2^{(3)} - k_3 b_1^{(3)}] = 0.7650549 = k_2$$



得二阶系统:

$$B_2(z) = 1 - 1.4886262z^{-1} + 0.7650549z^{-2}$$

$$b_1^{(1)} = \frac{1}{1 - k_2^2} [b_1^{(2)} - k_2 b_1^{(2)}] = -0.8433879 = k_1$$

得一阶系统:

$$B_1(z) = 1 - 0.8433879z^{-1}$$

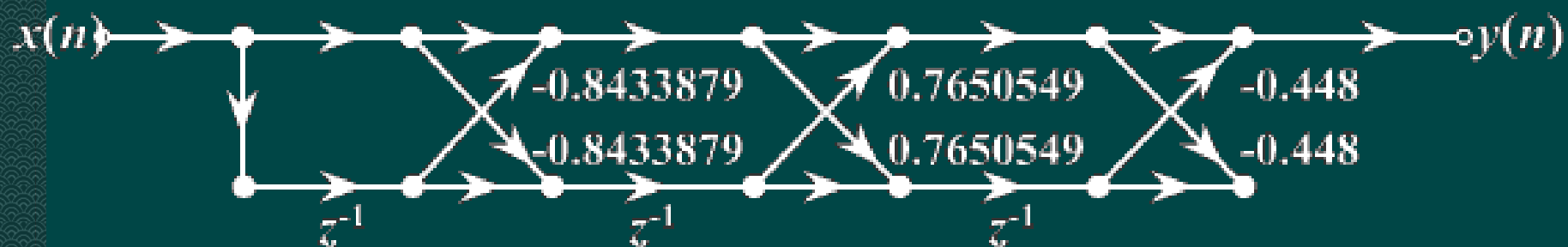


图5-30 例5-1中的全零点FIR滤波器的格型结构

2、全极点系统（IIR系统）的格型结构



3、零极点系统（IIR系统）的格型结构

# 作业



1、用直接I型及典范结构实现以下系统函数（要求画出结构图）：

$$H(z) = \frac{3 + 4.2z^{-1} + 0.8z^{-2}}{2 + 0.6z^{-1} - 0.4z^{-2}}$$

2、用级联型结构实现以下系统函数（要求画出结构图）：

$$H(z) = \frac{4(z+1)(z^2 - 1.4z + 1)}{(z - 0.5)(z^2 + 0.9z + 0.8)}$$

试问一共能构成几种级联型网络。



3、给出以下系统函数的并联型实现（要求有必要步骤并画出结构图）：

$$H(z) = \frac{5.2 + 1.58z^{-1} + 1.41z^{-2} - 1.6z^{-3}}{(1 - 0.5z^{-1})(1 + 0.9z^{-1} + 0.8z^{-2})}$$

4、用横截型结构实现以下系统函数（要求有必要步骤并画出结构图）：

$$H(z) = \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)(1 + 6z^{-1})(1 - 2z^{-1}) \left(1 + \frac{1}{6}z^{-1}\right)(1 - z^{-1})$$

教材：5.4题、5.5题（均要求有必要步骤并画出结构图）。