§2.3 连续 LTI系统的时域分析方法

概述

建模---

- 系统结构
- 元件约束特性
- 基本定理　　寻找表征系统特性的数学模型

求解--

- 输入—输出分析
- 状态变量分析

- 时域分析
- 变换域分析

2.3.1 线性连续系统的数学模型

实际系统 $\longrightarrow$ 物理模型 $\longrightarrow$ 数学表达式　　数学建模

数学建模的步骤：

1、根据系统运动的因果关系，确定输入量、输出量以及中间变量；

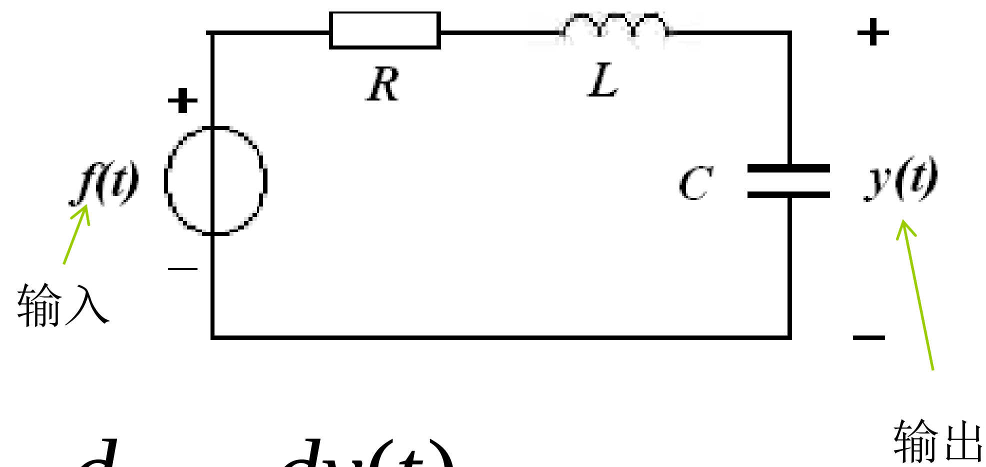
2、根据系统工作所依据的物理定律列出原始方程；

3、消去中间变量，写出表示系统输入输出关系方程；

4、方程标准化：**输入量在等号右边，输出量在等号左边**，并以降阶次排列，并且**输出最高阶的系数化简为1。**

2.3.1 线性连续系统的数学模型

例2-8（改）：RLC电路：输入（激励）为电压源 $f(t)$，输出（响应）为电容上的电压 $y(t)$。写出系统的数学模型。



$$f(t) = R \cdot C\frac{dy(t)}{dt} + L\frac{d}{dt}\left(C\frac{dy(t)}{dt}\right) + y(t)$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\cdot\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{LC}y(t) = \frac{1}{LC}f(t)$$

输出在等号左边　　　　　输入在等号右边

线性连续系统的数学模型为：高阶线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n}+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1} y(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+a_0 y(t)$$

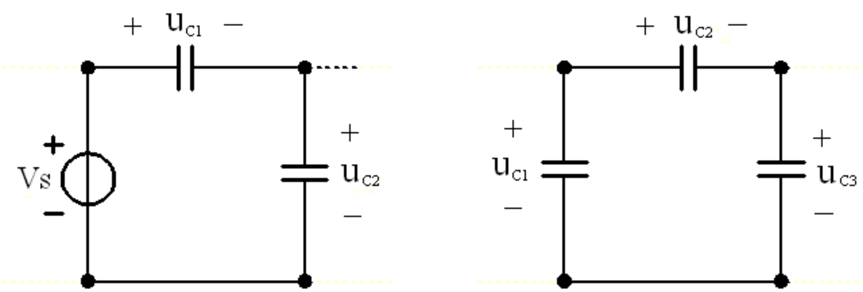
$$=b_m\frac{\mathrm{d}^m f(t)}{\mathrm{d}t^m}+b_{m-1}\frac{\mathrm{d}^{m-1} f(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}}+\cdots+b_1\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}+b_0 f(t)$$

$$=\sum_{j=0}^{m} b_j\frac{d^j f(t)}{dt^j}$$

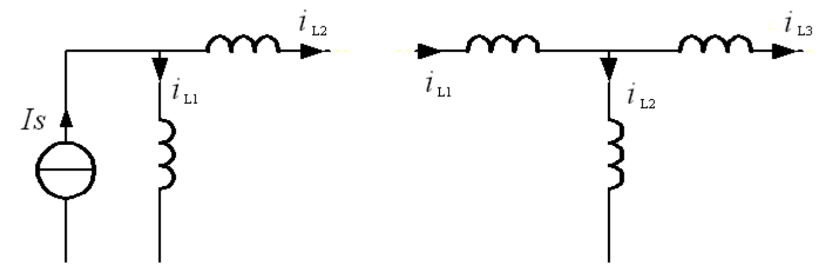
若系统是时不变的，则方程系数均为常数；方程为n阶常系数线性微分方程。

注意：输出最高阶的系数化简为1。

系统阶数＝响应的最高微分次数＝系统中独立动态元件的个数



(a) (b)



(a) (b)

仅由 { 电容器 / 电容器与独立电压源

构成的回路。

称为全电容回路

仅由 { 电感器 / 电感器与独立电流源

构成的节点。

称为全电感割集（节点）

为非独立动态元件

p69 例2-10：

如图，列出系统微分方程。

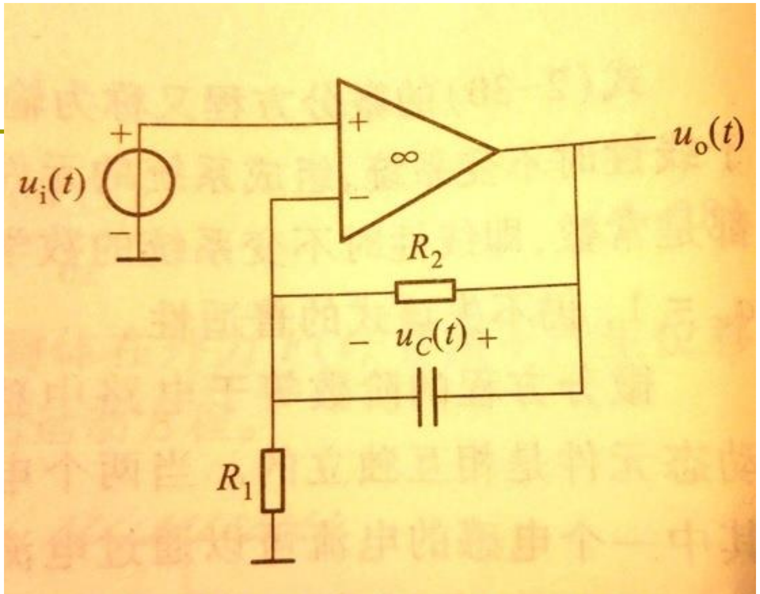


图 2-20　例 2-10 题图

$$Cu_C'(t)+\frac{u_C(t)}{R_2}=\frac{u_i(t)}{R_1}$$

将 $u_C(t)=u_o(t)-u_i(t)$ 代入上式，得

$$C[u_o(t)-u_i(t)]'+\frac{u_o(t)-u_i(t)}{R_2}=\frac{u_i(t)}{R_1}$$

整理得

$$u_o'(t)+\frac{u_o(t)}{R_2C}=u_i'(t)+\left(\frac{1}{R_1C}+\frac{1}{R_2C}\right)u_i(t)$$

2.3.2 连续线性时不变系统的经典解法

步骤：

1. 写特征方程，求特征根，写出齐次解形式
2. 由激励函数的形式写出特解通式，代入原方程求出待定系数
3. 写出原方程求解的一般形式（齐次解+特解）
4. 代入全解边界条件，确定齐次解待定系数

求解流程

齐次解 (Homogeneous Solution)：由特征方程 → 求出特征根 λ_i

→写出齐次解形式 = 自由响应（系数待定）

特征根
- 互不相等单根，则齐次解： $y_h(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{\lambda_i t}$
- 有一k阶重根 λ_1 则齐次解：

$$y_h(t) = (A_0 + A_1 t + \cdots + A_{k\text{-}1} t^{k\text{-}1}) e^{\lambda_1 t} + \sum_{i=k+1}^{n} A_i e^{\lambda_i t}$$

特 解(Particular Solution)：据微分方程右端激励信号的函数形式→写出含待定系数的特解函数式

→代入原方程，比较系数得到特解 = 受迫响应。

全 解 = 齐次解+特解

(由n个全解的边界条件定出齐次解的系数)

补充例：

写出系统方程$\dfrac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}y(t)+7\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)+16\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)+12y(t)=f(t)$

齐次解的表达式。

解：系统的特征方程为

$$\lambda^3+7\lambda^2+16\lambda+12=0$$

$$(\lambda+2)^2(\lambda+3)=0$$

特征根 $\lambda_{1,2}=-2,\ \lambda_3=-3$

齐次解的表达式为 $y_h(t)=\left(A_0+A_1t\right)\mathrm{e}^{-2t}+A_2\mathrm{e}^{-3t}$

典型激励函数相应的特解

激励函数$f(t)$	响应函数$y(t)$的特解$y_p(t)$	
E(常数)	B(常数)	
t^k 幂函数	$B_o + B_1 t + \cdots + B_{k-1} t^{k-1} + B_k t^k = \sum_{i=0}^{k} B_i t^i$	0不是特征根
	$t^r (B_o + B_1 t + \cdots + B_{k-1} t^{k-1} + B_k t^k) = t^r \sum_{i=0}^{k} B_i t^i$	0是r重特征根
$e^{\alpha t}$ 指数函数	$Be^{\alpha t}$	α不等于特征根
	$B_1 t^r e^{\alpha t}$	α 等于r重特征根
$\sin(\omega t) / \cos(\omega t)$	$B_1 \sin(\omega t) + B_2 \cos(\omega t)$	$\pm j\omega$ 不是特征根
	$t(B_1 \sin(\omega t) + B_2 \cos(\omega t))$	$\pm j\omega$ 是特征单根
$t^k e^{\alpha t} \sin(\omega t)$ $t^k e^{\alpha t} \cos(\omega t)$	$e^{\alpha t} \sum_{i=0}^{k} [B_i \sin(\omega t) + D_i \cos(\omega t)] t^i$	

补充例：

给定系统方程为 $\frac{d^2 y(t)}{dt^2}+2\frac{d y(t)}{dt}+3y(t)=\frac{d f(t)}{dt}+f(t)$

如果已知：$(1)\ f(t)=t^2$; $(2)\ f(t)=e^t$,
分别求两种情况下此方程的特解。

解：查表得特解函数式

$$y_p(t)=B_1t^2+B_2t+B_3$$ 这里，B_1, B_2, B_3为待定系数。

将此式代入方程得到

$$y'(t)=2B_1t+B_2 \qquad y''(t)=2B_1$$

代入原式得：

$$3B_1t^2+\left(4B_1+3B_2\right)\ t+\left(2B_1+2B_2+3B_3\right)=t^2+2t$$

等式两端各对应幂次的系数应相等，有：

$$\begin{cases} 3B_1 = 1 \\ 4B_1 + 3B_2 = 2 \\ 2B_1 + 2B_2 + 3B_3 = 0 \end{cases}$$

联立求解得： $B_1 = \frac{1}{3}$, $B_2 = \frac{2}{9}$, $B_3 = -\frac{10}{27}$

得特解： $y_{\mathrm{p}}(t) = \frac{1}{3}t^2 + \frac{2}{9}t - \frac{10}{27}$

(2)当$f(t) = \mathrm{e}^t$时，选$y_p(t) = B\mathrm{e}^t$。其中B是待定系数。

$$B\mathrm{e}^t + 2B\mathrm{e}^t + 3B\mathrm{e}^t = \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^t \qquad B = \frac{1}{3}$$

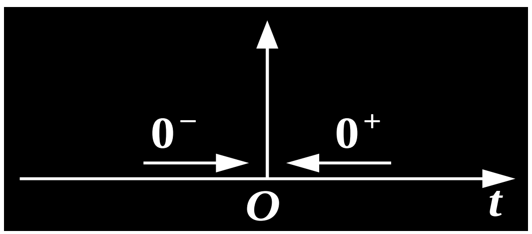
$\therefore$特解$y_p = \frac{1}{3}\mathrm{e}^t$。

说明：

1．微分方程的全解限于 $0_+ \le t \le \infty$

2. $\begin{cases} t = 0_- & \text{初始状态：接入激励之前的系统状态，与激励无关} \\ t = 0_+ & \text{初始条件：接入激励之后的系统状态，与激励相关} \end{cases}$

确定全解所需的边界条件！



$t \ge 0_+$

3．任意时刻　$y(t_0) = y_{zi}(t_0) + y_{zs}(t_0).$

4． $y^{(k)}(t_{0-}) = y^{(k)}(t_{0+})$ ，表示 $y^{(k)}(t)$ 在 $t = t_0$ 连续；

说明激励中不包含冲激函数；

$y^{(k)}(t_{0-}) \ne y^{(k)}(t_{0+})$　则表示 $y^{(k)}(t)$ 在 $t = t_0$ 有跳变。

反之若有跳变，说明激励中包含冲激函数

5. 求全解三要素：方程、激励、0+条件

6. 两个一致性：

1）0+条件的个数与系统阶数或待定系数的个数相一致；

2）时间一致性：即满足解的时间约束条件为t>0+

7．系统响应：

全响应＝自由响应（齐次解）＋受迫响应（特解）

(Natural + Forced Response)

＝暂态响应+稳态响应

(Transient + Steady-state Response)

＝零输入响应＋零状态响应

(Zero-input + Zero-state Response)

各自定义

(1)自由响应： 或固有响应；由系统本身特性决定，与外加激励的形式无关。对应于齐次解。
(自然响应)

受迫响应： 形式受迫于外加激励。对应于特解。

(2)暂态响应： 指全响应中暂时出现的有关成分；即随着时间t的延续，终将消失的响应。

稳态响应： 全响应中随着时间t延续，最终可以保留下来的响应。

(3)零输入响应： 无外加激励信号作用，仅由初始状态作用于系统所产生的响应。与外加激励无关

零状态响应： 不考虑系统原始储能的作用（初始状态＝０），仅由外加激励作用于系统所产生的响应。

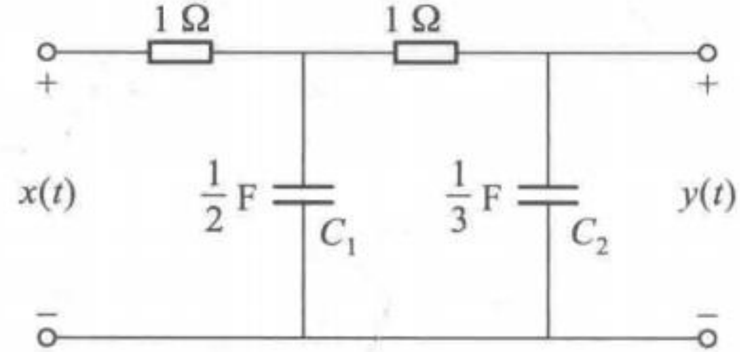
解释-1

- 对于一个具体的电网络，系统的初始状态就是指系统中储能元件的储能情况
- 一般情况下换路期间，电容两端的端电压和流过电感中的电流不会发生突变。即电路分析中的换路／开关定理：

$$v_C(0_-)=v_C(0_+),\qquad i_L(0_-)=i_L(0_+).$$

- 但当有冲激电流强迫作用于电容，或有冲激电压强迫作用于电感时，状态就会发生跳变.
- 当系统用微分方程表示时，系统从 $t=0_-$ 到 $t=0_+$ 有无跳变：取决于微分方程右端是否包含冲激信号及其各阶导函数。

例 2-11 如图 2-21 所示电路，已知 $x(t)=\sin 2tu(t)$，C_1、C_2 初始不储能，求响应 $y(t)$。



$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+7\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=6x(t)$$

齐次方程为

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+7\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=0$$

其特征方程可写为 $\lambda^2+7\lambda+6=0$

特征根为 $\lambda_1=-1\quad \lambda_2=-6$

由式(2-32)可知齐次解的形式为 $y_h(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-6t}$

暂态响应

稳态响应

特解 $y_p(t)=B_1\sin 2t+B_2\cos 2t$ →

$$B_1=\frac{3}{50}\quad B_2=-\frac{21}{50}$$

$$y_p(t)=\frac{3}{50}\sin 2t-\frac{21}{50}\cos 2t$$

都不加u(t)

全解的形式为

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-6t}+\frac{3}{50}\sin 2t-\frac{21}{50}\cos 2t$$

$$y(0_+)=u_{C_2}(0_+)=u_{C_2}(0_-)=0\qquad y'(0_+)=u'_{C_2}(0_+)=\frac{1}{C_2}i_{C_2}(0_+)=0$$

两个初始条件代入全解 $y(t)=\frac{12}{25}e^{-t}-\frac{3}{50}e^{-6t}+\frac{3}{50}\sin 2t-\frac{21}{50}\cos 2t\quad(t>0)$

经典法求解微分方程的流程

将元件电压电流关系、基尔霍夫定律用于给定电系统

列写微分方程

齐次解 $Ae^{\alpha t}$（系数A待定）

特解查表

给定系统状态 0^-

求出对应状态 0^+

完全解＝齐次解 ＋特解（ A待定）

已定系数A的完全解—系统的响应

2.3.3系统的零输入响应和零状态响应

经典法不足之处

若微分方程右边激励项较复杂，则难以处理。

若**激励信号**发生变化，则须全部重新求解。

若**初始条件**发生变化，则须全部重新求解。

这种方法是一种纯数学方法，无法突出系统响应的物理概念。

由 0^- 时刻的起始条件求 0^+ 时刻的初始条件一般是很困难的，所以求系统响应时，一般绕开初始状态跳变的问题，而用别的方法来求系统的响应。

1. 零输入响应

无外加激励信号作用，仅由初始状态作用于系统所产生的响应。

为计算方便，在零输入响应的形式上没有$u(t)$

由定义推知：

$$y_{zi}(t) \xrightarrow{\text{形同}} y_h(t) \quad \text{即：自由响应}$$

由起始状态 $y^{(k)}(0_-) \quad (k=0,1,\cdots,n-1)$

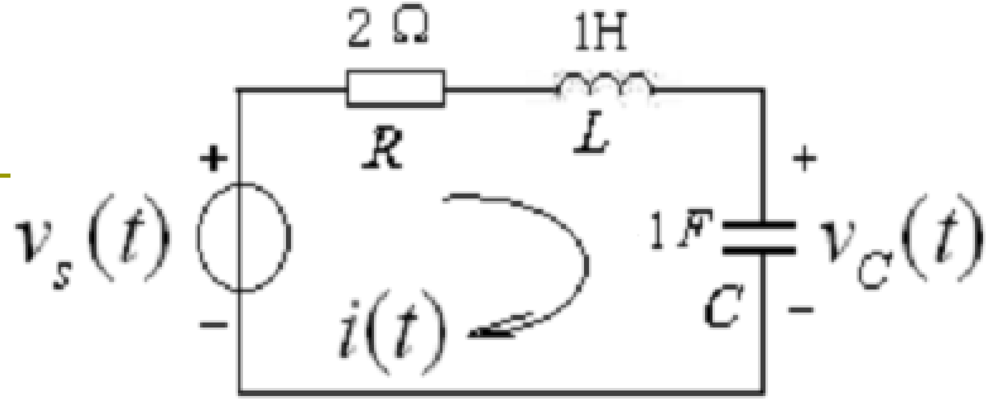
可确定零输入响应中的待定系数

$$y_{zi}(t)=\sum_{j=1}^{n} A_{zij} e^{\lambda_j t}$$

初始状态为零时，零输入响应一定为零，但齐次解不一定为零。

补充例

图示电路，设



$$(1)\, i(0_-) = 0 \qquad i'(0_-) = 1A/S$$

求电路的零输入响应电流。

(L3:推演)

2. 冲激响应及阶跃响应

概念
$$\begin{cases}\text{冲激响应：} & h(t)\\ \text{阶跃响应：} & g(t)\end{cases}$$

激励为单位冲击信号时，系统的零状态响应

激励为阶跃信号时，系统的零状态响应

$$f(t) \longrightarrow \boxed{\text{连续LTI}} \longrightarrow y_{zs}(t)$$

则定义：$f(t)=\delta(t) \quad \rightarrow \quad y_{zs}(t)=h(t)$

$f(t)=u(t) \quad \rightarrow \quad y_{zs}(t)=g(t)$

$$h(t)=S[\{0\},\{\delta(t)\}] \qquad g(t)=S[\{0\},\{u(t)\}]$$

由LTI系统的微、积分特性得其关系：

$$\delta(t)=\frac{du(t)}{dt} \qquad u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau$$

$$h(t)=\frac{dg(t)}{dt} \qquad g(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau$$

冲激响应的求解

n 阶 L T I 系统　　　令 $x(t) = \delta(t)$

则 $y(t) = h(t)$

$$\frac{\mathrm{d}^n h(t)}{\mathrm{d}t^n} + a_{n\ 1}\frac{\mathrm{d}^{n\ 1} h(t)}{\mathrm{d}t^{n\ 1}} + \cdots + a_1\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} + a_0 h(t)$$

$$= b_m\frac{\mathrm{d}^m \delta(t)}{\mathrm{d}t^m} + b_{m\ 1}\frac{\mathrm{d}^{m\ 1} \delta(t)}{\mathrm{d}t^{m\ 1}} + \cdots + b_1\frac{\mathrm{d}\delta(t)}{\mathrm{d}t} + b_0\delta(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j\frac{d^{(j)}\delta(t)}{dt^j}$$

或如 p75 式2-40

$$h^{(n)}(t) + a_{n-1}h^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1h'(t) + a_0h(t) = b_m\delta^{(m)}(t) + \cdots + b_1\delta'(t) + b_0\delta(t)$$

冲激函数平衡准则（匹配原理）： $t=0$ 时刻微分方程左右两端的$\delta(t)$及各阶导数应该持平衡状态。　　（转 L5+）

求解冲激响应方法总结

系统冲击响应解的形式，根据（2-40）式n和m的相对大小，得到如下结论：

$$h^{(n)}(t)+a_{n-1}h^{(n-1)}(t)+\cdots+a_1h'(t)+a_0h(t)=b_m\delta^{(m)}(t)+\cdots+b_1\delta'(t)+b_0\delta(t)$$

（2-40）

设方程式(2-40)的特征根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为互不相等的单根。

(i) 如果 $n>m$，则系统冲激响应解 $h(t)$ 的形式为

$$h(t)=\boxed{\sum_{i=1}^{n}A_{hi}e^{\lambda_i t}u(t)}$$

(ii) 如果 $m\geqslant n$ 或 $m=n+k$，其中 k 为正整数，则系统冲激响应解 $h(t)$ 的形式为

$$h(t)=\boxed{\sum_{i=1}^{n}A_{hi}e^{\lambda_i t}u(t)}+\sum_{j=0}^{k}B_j\delta^{(j)}(t)$$

如果不互为单根，则根据齐次解的规则（2-33），写出相应部分的形式。

$$y_h(t)=(A_0+A_1t+A_2t^2+\cdots+A_{r-1}t^{r-1})e^{\lambda_1 t}+\sum_{i=r+1}^{n}A_ie^{\lambda_i t}\qquad(2\text{-}33)$$

例 2-12 设一 LTI 系统的微分方程为

$$y''(t)+4y'(t)+4y(t)=x(t)$$

试求此系统的冲激响应和阶跃响应。

解：先求冲激响应。由定义改写上述方程为

$$h''(t)+4h'(t)+4h(t)=\delta(t)$$

此系统的特征方程是一个二重根 $\lambda_{1,2}=-2$，依据式(2-33)可以写出齐次解的形式。$n>m$，所以冲激响应解的形式为

$$h(t)=(A_{h0}+A_{h1}t)e^{-2t}u(t)$$

$$h'(t)=A_{h0}\delta(t)+A_{h1}e^{-2t}u(t)-2(A_{h0}+A_{h1}t)e^{-2t}u(t)$$

$$=A_{h0}\delta(t)+(A_{h1}-2A_{h0}-2A_{h1}t)e^{-2t}u(t)$$

$$h''(t)=A_{h0}\delta'(t)+(A_{h1}-2A_{h0})\delta(t)-2A_{h1}e^{-2t}u(t)-2(A_{h1}-2A_{h0}-2A_{h1}t)e^{-2t}u(t)$$

$$=A_{h0}\delta'(t)+(A_{h1}-2A_{h0})\delta(t)+4(A_{h0}-A_{h1}+A_{h1}t)e^{-2t}u(t)$$

代入原式 可求得 $A_{h0}=0$，$A_{h1}=1$，

$$h(t)=te^{-2t}u(t)$$

阶跃响应：$g(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau=\int_{0}^{t}\tau e^{-2\tau}d\tau=-\frac{1}{2}\int_{0}^{t}\tau d(e^{-2\tau})$

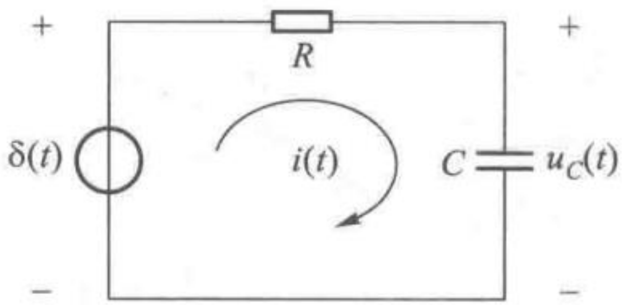
$$=-\frac{1}{2}\left[te^{-2t}u(t)-\int_{0}^{t}e^{-2\tau}d\tau\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t}-te^{-2t}\right)u(t)$$

- 一连续LTI系统的输入输出方程 $y''(t) - y'(t) - 2y(t) = x(t)$ ，如果该系统既不是因果的也不是稳定的，求系统的冲激响应$h(t)$。

第四章再次遇到本题

- 某LTI系统，其输入f(t)与输出y(t)的关系为：$y(t) = \int_{t-1}^{\infty} e^{-2(t-x)} f(x-2)dx$ 求该系统的冲激响应。

例 2-13 RC 串联电路如图 2-22 所示，设初始状态为零，电路中串联的理想电压源为单位冲激电压源，求响应电流 $i(t)$ 及电容上的响应电压 $u_C(t)$。



解：根据 KVL，给定电路的微分方程是

$$Ri(t)+\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau=\delta(t)$$

思考：$u_c(0_-)$是否等于$u_c(0_+)$. 为什么？

整理得：$$i'(t)+\frac{1}{RC}i(t)=\frac{1}{R}\delta'(t)$$

特征根为 $\lambda=-\frac{1}{RC}$，又因等式两端最高微分阶数相同，即 $n=m$

$$i(t)=B\delta(t)+A_h e^{-\frac{t}{RC}}u(t) \qquad i'(t)=B\delta'(t)+A_h\delta(t)-\frac{A_h}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}u(t)$$

代入得：$B=\frac{1}{R}$ $\quad A_h=-\frac{1}{R^2C}$ 所以冲激电流为：$i(t)=\frac{1}{R}\delta(t)-\frac{1}{R^2C}e^{-\frac{t}{RC}}u(t)$

电容上电压：

$$u_C(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau=\frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,d\tau-\frac{1}{R^2C^2}\int_{-\infty}^{t}e^{-\frac{\tau}{RC}}u(\tau)\,d\tau$$

$$=\frac{1}{RC}u(t)-\frac{1}{R^2C^2}\int_{0}^{t}e^{-\frac{\tau}{RC}}d\tau=\frac{1}{RC}u(t)-\frac{1}{RC}\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)u(t)=\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}u(t)$$

3. 零状态响应

1、说明本页每一步推导的原理；
2、本页的结论是什么？

$$f(t) \longrightarrow \boxed{\text{LTI系统 零状态}} \longrightarrow y_{zs}(t)$$

$\because t<0$时，$h(t)=0$

$\therefore \tau>t$时，$h(t-\tau)=0$

$$\delta(t) \Longrightarrow h(t)$$

$$\delta(t-\tau) \Longrightarrow h(t-\tau)$$

$$f(\tau)\delta(t-\tau) \Longrightarrow f(\tau)h(t-\tau)$$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{=f(t)} \Longrightarrow \underbrace{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{=y_{zs}(t)=f(t)*h(t)}$$

表明:LTI系统可以完全由它的单位冲激响应$h(t)$来表征。$h(t)$又称作系统特性。

卷积的理解：系统的响应不仅与当前时刻系统的输入有关，也与之前若干时刻的输入有关，可以理解为是过去时刻的输入信号经过一种过程，对现在时刻输入信号的响应的“残留”影响的一个叠加效果。

4. 全响应不同分解方法之间的关系

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)=\underbrace{y_{h1}(t)+y_{h2}(t)}_{\text{自由响应}}+\underbrace{y_p(t)}_{\text{受迫响应}}$$

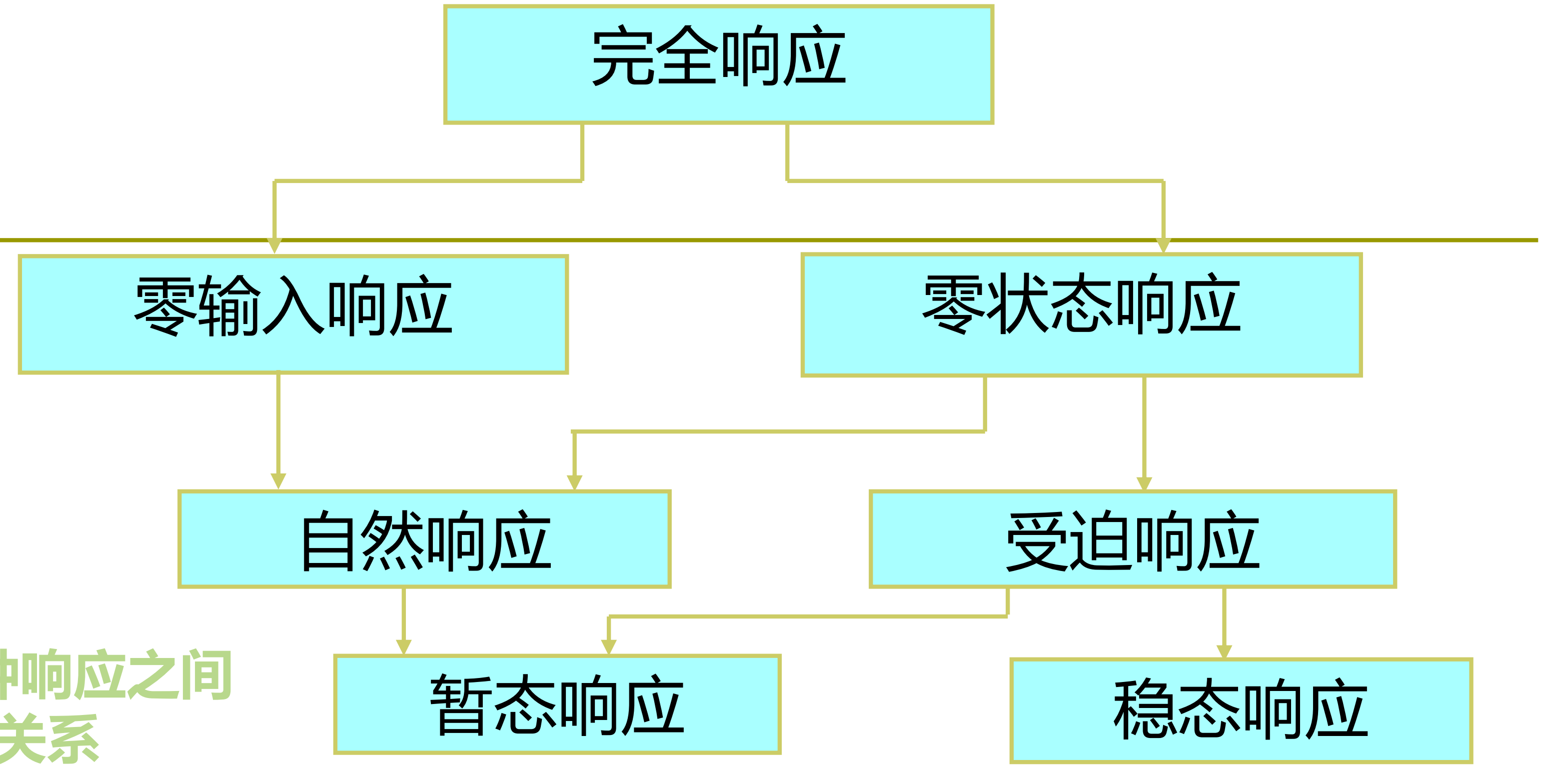
自由响应＋受迫响应

$$=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)$$

系统的特征根

$$=\sum_{j=1}^{n}A_j e^{\lambda_j t}+y_p(t)=\sum_{j=1}^{n}A_{zij}e^{\lambda_j t}+\sum_{j=1}^{n}A_{zsj}e^{\lambda_j t}+y_p(t)$$

系统的零输入响应是自由响应的一部分；受迫响应是零状态响应的一部分；零输入响应和零状态响应中的齐次解部分之和是自由响应。



理解各种响应之间的关系

例　一个 LTI 系统，它在某激励信号作用下的自由响应是 $(e^{-3t}+e^{-t})u(t)$，受迫响应是 $(1-e^{-2t})u(t)$，那么下列说法正确的是（　　　　　）。

A、系统一定是二阶系统；　　B、系统的零状态响应中一定包含 $(1-e^{-2t})u(t)$

C、系统一定稳定；　　D、系统的零输入响应中一定包含 $(e^{-3t}+e^{-t})u(t)$

例　零输入响应由强迫响应及自由响应的一部分构成。（　）

零状态响应由强迫响应及自由响应的一部分构成。（　）

已知系统微分方程为 $\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=2f(t)$，若$y(0_+)=\frac{4}{3}, f(t)=u(t)$，解得全响应为$y(t)=\frac{1}{3}e^{-2t}+1$，$t\geqslant 0$，则全响应中 $\frac{4}{3}e^{-2t}$ 为（ ）

A.零输入响应分量 B.零状态响应分量 C.自由响应分 D.强迫响应分量

思路：全响应表示成由齐次解和特解形式，这里由特征根的指数形式和特解的形式。根据齐次解是由零输入响应与零状态响应的一部分组成，其中的系数1/3，一部分来自零输入响应，另一部分来自零状态响应。
也可以直接计算零输入响应。

总结求解待定系数的方法

经典法

齐次解：　待定系数不计算

特解：　代入原方程，比较等号两边对应项，得到特解的待定系数

全解：　根据0+条件，在全解中求解齐次解待定系数

工程法

零输入响应：　根据0-条件，求解零输入响应待定系数

冲激响应：　根据冲激函数平衡原则，求解冲激响应待定系数

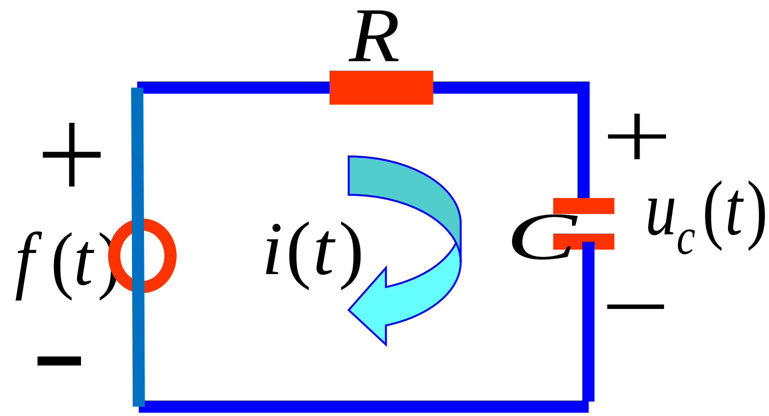
零状态响应：　无

全解：　无

例2-14 如图所示电路，$f(t)=(1+e^{-3t})u(t)$

电容上的初始电压为 $u_c(0_-)=1V$，R=1Ω，C=1F

求$u_c(t)$



解：列写微分方程

$$RC\frac{du_c(t)}{dt}+u_c(t)=f(t)$$

代入元件值：R=1Ω，C=1F

$$\frac{du_c(t)}{dt}+u_c(t)=f(t)$$

与p77例2-13比较
指出两者的区别

$$\frac{du_c(t)}{dt}+u_c(t)=f(t)$$

特征方程 $\lambda+1=0 \quad \therefore \lambda=-1$

1、零输入响应为： $u_{czi}(t)=C_1e^{-t}$

见p74 2-35式

在零输入响应的形式上没有$u(t)$

代入初始条件 $u_c(0\_)=1v$ 可得：$C_1=1$

$$\therefore u_{czi}(t)=e^{-t}u(t)$$

零输入响应的结果添加$u(t)$

2、零状态响应：

冲激响应
一定要加

先求电路的冲激响应

$$h(t)=ke^{-t}u(t)$$

$$h'(t)=k\delta(t)-ke^{-t}u(t)$$

将h(t)、h′(t)和δ(t)代入微分方程两端

$$\frac{du_c(t)}{dt}+u_c(t)=f(t)$$

$$ke^{-t}\delta(t)-ke^{-t}u(t)+ke^{-t}u(t)=\delta(t)$$

$$ke^{-t}\delta(t)=\delta(t)$$

$$k=1$$

即 $h(t)=e^{-t}u(t)$

$$\therefore u_{czs}(t) = f(t) * h(t) = [\int_{-\infty}^{\infty}(1+e^{-3\tau})u(\tau)e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau]$$

$$=[\int_{0}^{t}(1+e^{-3\tau})e^{-(t-\tau)}d\tau]$$

$$=[\int_{0}^{t}e^{-(t-\tau)}d\tau + \int_{0}^{t}e^{-t}e^{-2\tau}d\tau]$$

$$=[e^{-t}e^{\tau}\Big|_{0}^{t}u(t) + \frac{-e^{-t}}{2}e^{-2\tau}\Big|_{0}^{t}u(t)] = (1-\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t})u(t)$$

所以全响应为：

$$u_c(t) = u_{c_{zi}}(t) + u_{c_{zs}}(t) \quad = e^{-t}u(t) + (1-\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t})u(t)$$

零输入响应和零状态响应中的齐次解部分构成自由响应。

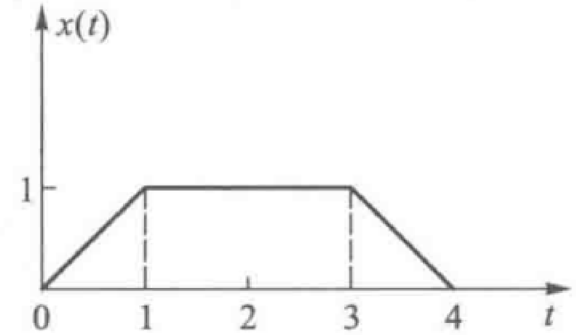
$$\therefore u_c(t) = \underbrace{e^{-t}u(t)}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{(1-\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t})u(t)}_{\text{零状态响应}}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}e^{-t}u(t)}_{\text{自由响应}} + \underbrace{(1-\frac{1}{2}e^{-3t})u(t)}_{\text{受迫响应}}$$

$$= \underbrace{(\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t})u(t)}_{\text{暂态响应}} + \underbrace{u(t)}_{\text{稳态响应}}$$

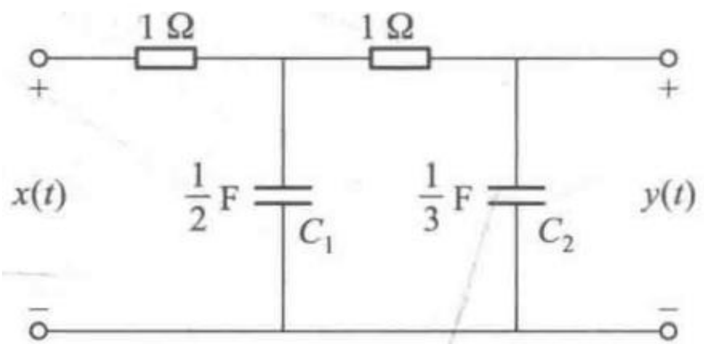
1、系统的零输入响应是自由响应的一部分；
2、受迫响应是零状态响应的一部分；
3、零输入响应和零状态响应中的齐次解部分之和是自由响应。
4、零状态响应由强迫响应及自由响应的一部分构成。

例 2-15 图 2-25 所示的梯形脉冲作用于初始状态为零的线性时不变系统，设系统的冲激响应为 $h(t)=e^{-t}u(t)$，求系统对该梯形脉冲的响应 $y(t)$。



p80

例 2-16 运用连续 LTI 系统的卷积解法重新分析例2-11题。已知 $x(t)=\sin 2t\,u(t)$，电路如图 2-27 所示，C_1、C_2 初始不储能，求响应 $y(t)$。



关键在于求冲激响应：

$$\frac{d^2h(t)}{dt^2}+7\frac{dh(t)}{dt}+6h(t)=6\delta(t)$$

因为 $n>m$，所以

$$h(t)=y_h(t)u(t)=(B_1e^{-t}+B_2e^{-6t})u(t)$$

例 2-17 一连续 LTI 系统，当输入 $x(t)=\mathrm{e}^{-t}\mathrm{u}(t)$ 时，零状态响应为

$$y_{zs}(t)=[1-\mathrm{e}^{-(t+T)}]\mathrm{u}(t+T)-[1-\mathrm{e}^{-(t-T)}]\mathrm{u}(t-T)$$

其中，T 为常数。试求系统的单位冲激响应。

$$y_{zs}(t)=x(t)*h(t)$$

利用卷积性质和指数函数的导数一定还包含指数函数

$$y'_{zs}(t)=x'(t)*h(t)=[\delta(t)-\mathrm{e}^{-t}\mathrm{u}(t)]*h(t)=[\delta(t)-x(t)]*h(t)$$

$$=h(t)-y_{zs}(t)$$

$$h(t)=y'_{zs}(t)+y_{zs}(t)$$

$$=\mathrm{e}^{-(t+T)}\mathrm{u}(t+T)-\mathrm{e}^{-(t-T)}\mathrm{u}(t-T)+[1-\mathrm{e}^{-(t+T)}]u(t+T)-[1-\mathrm{e}^{-(t-T)}]\mathrm{u}(t-T)$$

$$=\mathrm{u}(t+T)-\mathrm{u}(t-T)$$

思考：已知某LTI连续系统当激励为$f(t)$时，系统的冲击响应为$h(t)$，零状态响应为$y_{zs}(t)$，零输入响应为$y_{zi}(t)$，全响应为$y_1(t)$。若初始状态不变时，而激励为$2f(t)$时，系统的全响应$y_3(t)$为（ A和B ）。

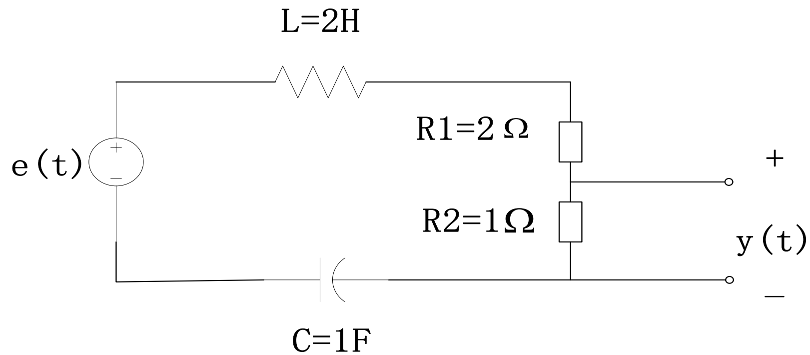
A. $y_{zi}(t)+2y_{zs}(t)$　　B. $y_{zi}(t)+2f(t)*h(t)$

C. $4y_{zs}(t)$　　D. $4y_{zi}(t)$

思考：已知一线性时不变系统，当激励信号为f(t)时，其完全响应为(3sint-2cost)u(t)，当激励信号为2f(t)时，其完全响应为(5sint+cost)u(t)。则当激励信号为3f(t)时，其完全响应为$\underline{(7\sin t+4\cos t)u(t)}$。零输入响应为$\underline{(\sin(t)-5\cos(t))u(t)}$(L5++)

利用边界条件求零输入响应的一种新方法

已知电路如下图所示，激励信号为$e(t)=u(t)$，在t=0和t=1时测得系统的输出为 $y(0)=1$，$y(1)=e^{-0.5}$；分别求系统的零输入响应、零状态响应、完全响应？



1）电路满足KVL：得

$$y''(t)+1.5y'(t)+0.5y(t)=0.5e'(t)$$

2）系统函数为：$H(s)=\dfrac{0.5s}{s^2+1.5s+0.5}$

$$Y_{zs}(s)=H(s)H(s)=\frac{0.5s}{s^2+1.5s+0.5}\bullet\frac{1}{s}=\frac{1}{s+0.5}-\frac{1}{s+1}$$

零状态响应：$y_{zs}(t)=(e^{-0.5t}-e^{-t})\,u(t)$

$y_{zs}(0)=0$，$y_{zs}(1)=(e^{-0.5}-e^{-1})$；

$y_{zi}(0)=y(0)-y_{zs}(0)=1$，$y_{zi}(1)=y(1)-y_{zs}(1)=-e^{-1}$

$y_{zi}(t)=(C_1e^{-0.5t}+C_2e^{-t})\,u(t)$,得$C_1=0$，$C_2=1$

零输入响应：$y_{zi}(t)=e^{-t}\,u(t)$；

完全响应：$y(t)=e^{-0.5t}\,u(t)$