第八章 反馈控制电路

本章重点：

相位反馈控制电路的（锁相环）的电路组成，基本工作原理，基本环路方程，集成锁相环的应用。

本章难点：

锁相环路的相位反馈控制过程，捕捉过程的定性讨论。

8.1 反馈控制电路概述

各种通信和电子系统中，为了提高其性能指标，或实现某些特殊的指标要求，广泛采用各类反馈控制电路。各种反馈控制电路，就其作用原理而言，都可看作自动调节系统，它由反馈控制器和受控对象两部分组成，如图**8.1.1**所示。

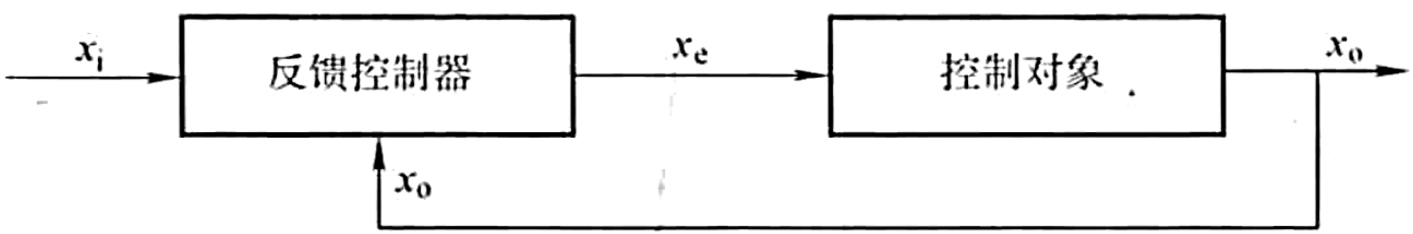


图 8.1.1　反馈控制电路的组成框图

图中，x_i 和 x_o 分别为反馈控制电路的输入量和输出量，它们之间的关系是根据使用要求予以设定的，设为 $x_o = g\left(x_i\right)$

控制过程：若 $x_o = g\left(x_i\right)$ 受某种因素的影响而遭到破坏，则反馈控制器就对 x_o 和 x_i 进行比较，检测出它们与预定关系之间的偏离程度，并产生相应的误差量 x_e，x_e 加到被控制对象上对 x_o 进行调节，使 x_o 和 x_i 之间接近到预定的状态（关系），而进入稳定状态。

反馈控制电路的类型不同，需要比较和调节的参量就不同。

分类

1、当需要比较和调节的参量为电压（电流）时，相应的 x_i 和 x_o 为电压（电流）。即为自动振幅（增益）控制电路ALC（AGC）。

2、当需要比较和调节的参量为频率，相应的 x_i 和 x_o 为频率。即为自动频率控制电路（AFC）。

3、当需要比较和调节的参量为相位，相应的 x_i 和 x_o 为相位，即为自控相位控制电路（APC）

举例：自动增益控制电路

在一部调幅接收机中，由于无线电波传播中的多径效应和衰落等原因，天线上感生的有用信号强度（反映在载波振幅上）往往有很大的起伏变化，致使扬声器发出的声音忽强忽弱，有时还会造成阻塞，听不到声音。为了克服这个缺点，调幅接收机普遍采用自动增益控制电路，用来压缩有用信号强度的变化范围，但不影响调制在载波上的包络变化，保证信息的不失真传输。

各种反馈控制电路，由于它们均是利用误差产生控制电压，去控制受控对象，当电路达到动态平衡以后，必然存在一定的误差——称之为**稳态误差**。

∴ ALC：电平误差 $(\Delta A)\Delta V$

AFC：频率误差 Δf

APC（PLL）：相位误差 $\Delta\varphi$

由于：$\frac{d\varphi}{dt}=\omega$ 所以, PLL的频率误差 $\Delta f=f_i-f_o=0$

所以 $f_i=f_o$

结论：PLL也是一种实现频率跟踪的自动控制电路，它与AFC电路的区别在于可以实现无误差的频率跟踪，即 $f_o=f_i$。

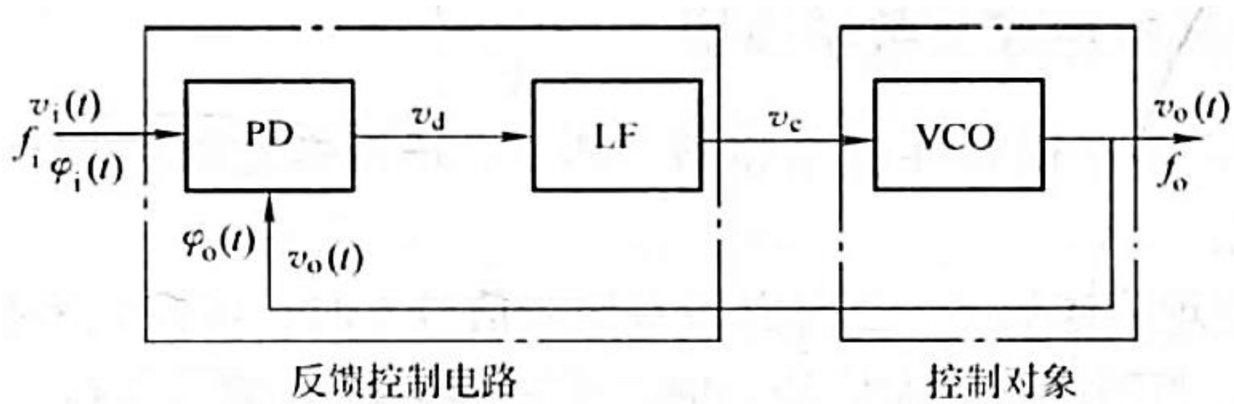


图 8.1.12 锁相环的基本组成框图

- 图8.1.12为自动相位控制（APC） 电路（又称锁相环，PLL）的基本组成框图，它由鉴相器（PD）、 环路低通滤波器（LF）和压控振荡器（VCO）三部分组成。其中，控制对象为压控振荡器，而反馈控制电路则由检测相位差的鉴相器和环路低通滤波器组成。

- 在PLL中，控制VCO振荡角频率与输入信号的角频率相等，不是利用它们之间的频率误差，而是利用它们之间的瞬时相位误差来实现的。

- 频率和相位之间的关系$\omega = d\phi/dt$。
- 矢量的旋转角速度和相应的角位移分别表示所示电压 $\dot{V}_i$ 和 $\dot{V}_o$ 的角频率和相应的瞬时相位。
- 假设某种不稳定因素，导致VCO振荡角频率 ω_o 大于输入信号的角频率ω_i，即VCO电压矢量比输入信号电压矢量转动的快，则两个矢量之间的瞬时相位差 $\phi_o(t)-\phi_i(t)$将随时间不断增大，

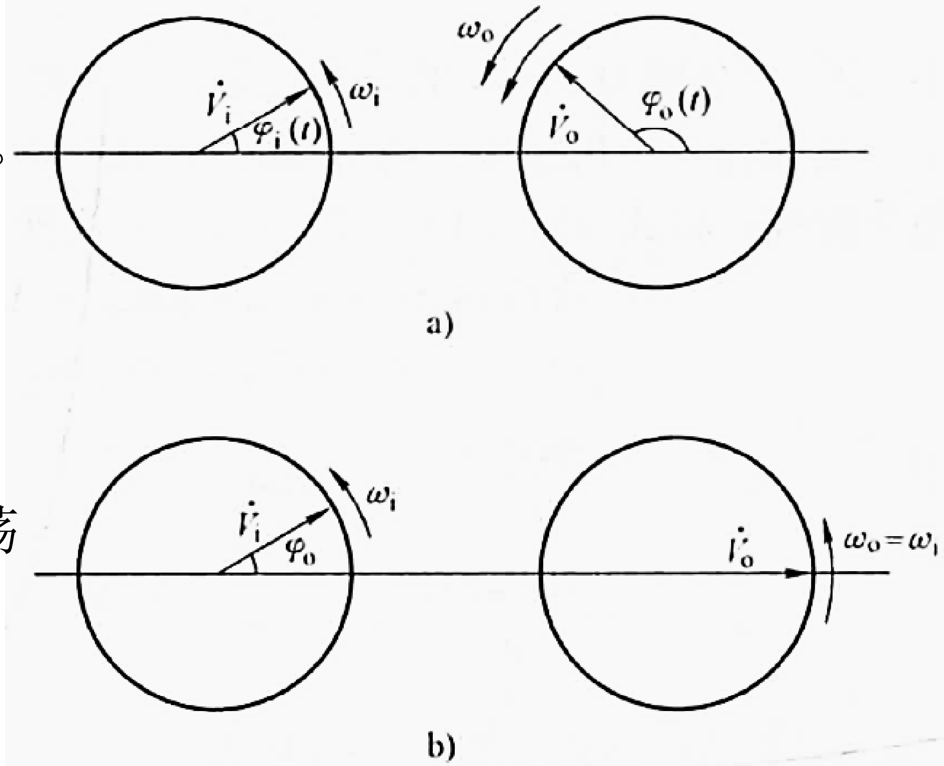


图 8.1.13　用旋转矢量说明PLL的相位（频率）控制过程
a）失锁（$\omega_o>\omega_i$）　b）锁定（$\omega_o=\omega_i$）

鉴相器所产生的误差电压也就相应的变化，通过低通滤波器后加到VCO上，使其振荡频率不断地被调整，直到VCO的角频率 ω_o 等于输入信号的角频率 ω_i ，环路锁定，两个旋转矢量之间的瞬时相位差便保持恒值ϕ_0

8.2.1 锁相环路的基本组成及数学模型

一、锁相环路的组成框图：

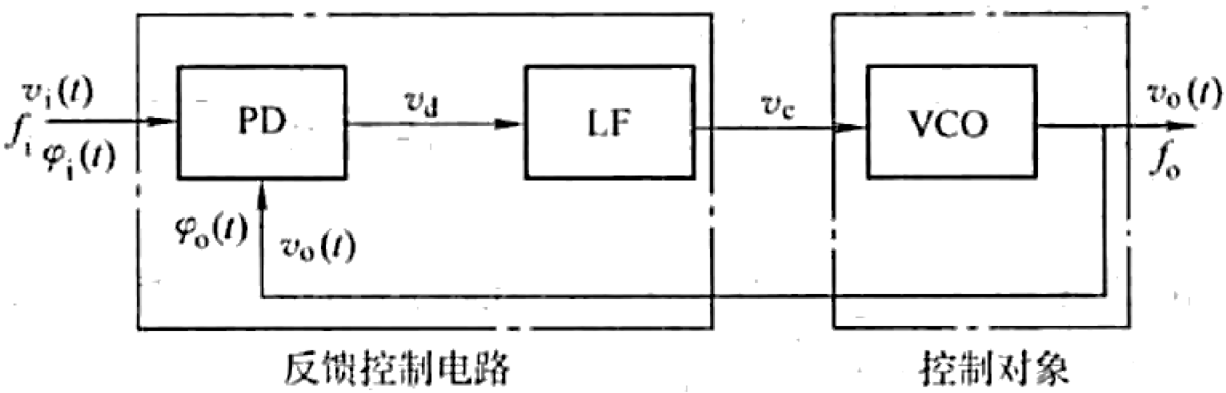


图 8.1.12 锁相环的基本组成框图

锁相环路的工作原理简述如下：

当 $f_o > f_i$ 时 $\rightarrow \Delta\varphi(t) \rightarrow \upsilon_d \rightarrow \upsilon_c \rightarrow f_o$，直到 $\Delta\varphi(t) = \Delta\varphi_\infty$

$f_o = f_i$，环路锁定。

二、锁相环路的相位数学模型

（一）相位检波器（鉴相器）（PD）

1、作用：检测出 υ_i 与 υ_o 之间的瞬时相位差，并产生相应的输出误差电压 $\upsilon_d(t)$。

若图8.1.12中的输入、输出信号分别为

$$\upsilon_i(t) = V_{im}\cos[\omega_i t + \theta_i] \qquad (8.2.1)$$

$$\upsilon_o(t) = V_{om}\cos[\omega_o t + \theta_o + \varphi] \qquad (8.2.2)$$

式中 θ_i、θ_o 分别为 υ_i、υ_o 的起始相角，而 φ 一般为 $\varphi = \pi/2$

设：ω_r为$\upsilon_c = 0$时，VCO的固有振荡角频率，称之为参考角频率。

ω_o为$\upsilon_c \neq 0$时，VCO的振荡角频率。

ω_i为输入信号角频率

$$\upsilon_i(t) = V_{im}\cos[\omega_i t + \theta_i] \quad (8.2.1)$$

$$\upsilon_o(t) = V_{om}\cos[\omega_o t + \theta_o + \varphi] \quad (8.2.2)$$

式中θ_i、θ_o分别为υ_i、υ_o的起始相角，而φ一般为$\varphi = \pi/2$

为了便于比较，将式（8.2.1）、（8.2.2）变换为

$$\upsilon_i(t) = V_{im}\cos[\omega_r t + \varphi_i(t)] \quad (8.2.3)$$

w的值也可以使用φ，也就是相角进行表示在这里引入wr，之后就可以使用φ来表示wr与wi之间的偏离程度

$$\upsilon_o(t) = V_{om}\cos[\omega_r t + \varphi_o(t) + \varphi] = -V_{om}\sin[\omega_r t + \varphi_o(t)] \quad (8.2.4)$$

显然：

$$\omega_i = \omega_r + \frac{d\varphi_i(t)}{dt} = \omega_r + \Delta\omega_i$$

$$\omega_o = \omega_r + \frac{d\varphi_o(t)}{dt} = \omega_r + \Delta\omega_o$$

其中

$\frac{d\varphi_i(t)}{dt} = \Delta\omega_i$ 为 υ_i 的角频率 ω_i 偏离参考角频率 ω_r 的大小。

$\frac{d\varphi_o(t)}{dt} = \Delta\omega_o$ 为 υ_o 的角频率 ω_o 偏离参考角频率 ω_r 的大小。

2、实现模型

乘积型鉴相器如图8.2.1所示。

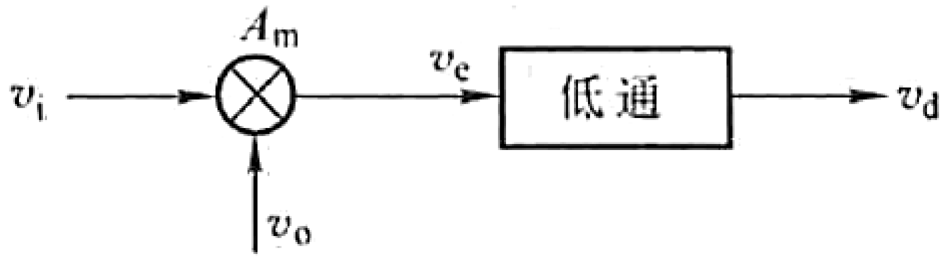


图 8.2.2　乘积型鉴相器的组成模型

相乘器的输出为

$$\upsilon_e = A_m \upsilon_i \upsilon_o = -A_m V_{im} V_{om} \cos\left[\omega_r t + \varphi_i(t)\right] \sin\left[\omega_r t + \varphi_o(t)\right]$$

$$= \frac{1}{2} A_m V_{im} V_{om} \sin\left[\varphi_i(t) - \varphi_o(t)\right]$$

$$- \frac{1}{2} A_m V_{im} V_{om} \sin\left[\varphi_i(t) + \varphi_o(t) + 2\omega_r t\right]$$

经过低通滤波器滤波后的误差输出电压为

$$\upsilon_d(t)=\frac{1}{2}A_mV_{im}V_{om}\sin\left[\varphi_i(t)-\varphi_o(t)\right]$$

$$=A_d\sin\varphi_e(t) \qquad （8.2.5）$$

其中，$\varphi_e(t)=\varphi_i(t)-\varphi_o(t)$为 υ_i 、υ_o 的瞬时相位误差。

$A_d=\frac{1}{2}A_mV_{im}V_{om}$为鉴相灵敏度，单位是伏特（V）。

得到的鉴相特性

曲线如图8.2.3所示。

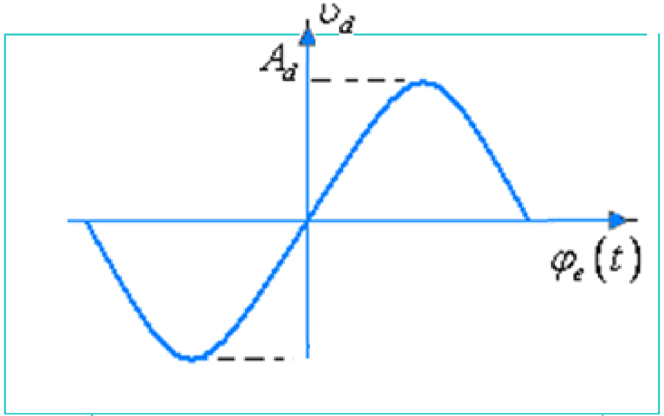


图8.2.3 正弦鉴相特性

由式（8.2.5）可以得到正弦鉴相器的相位功能模型如图 8.2.2（b）所示，

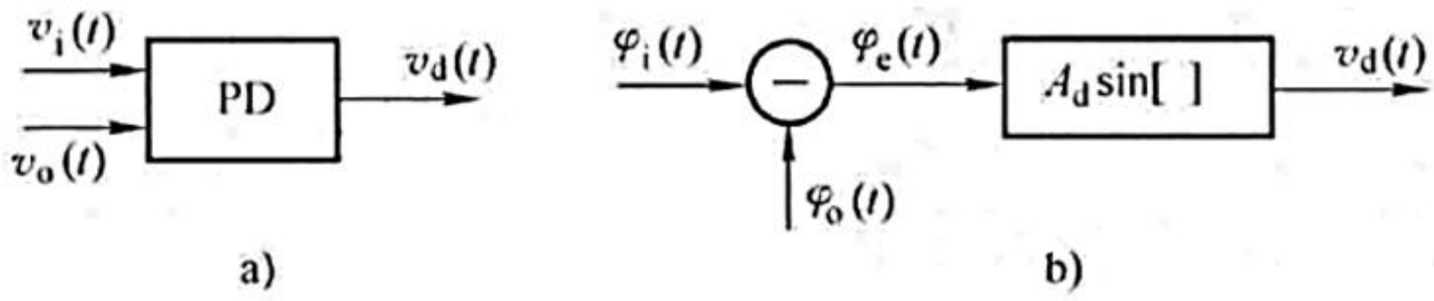


图 8.2.1　正弦鉴相器的功能模型

（二）环路低通滤波器（LF）：

1、作用：滤除鉴相器输出电流中的无用组合频率分量及其它干扰分量，以达到环路性能要求，保证环路稳定性。

2、电路形式：常用的环路低通滤波器的电路形式 。

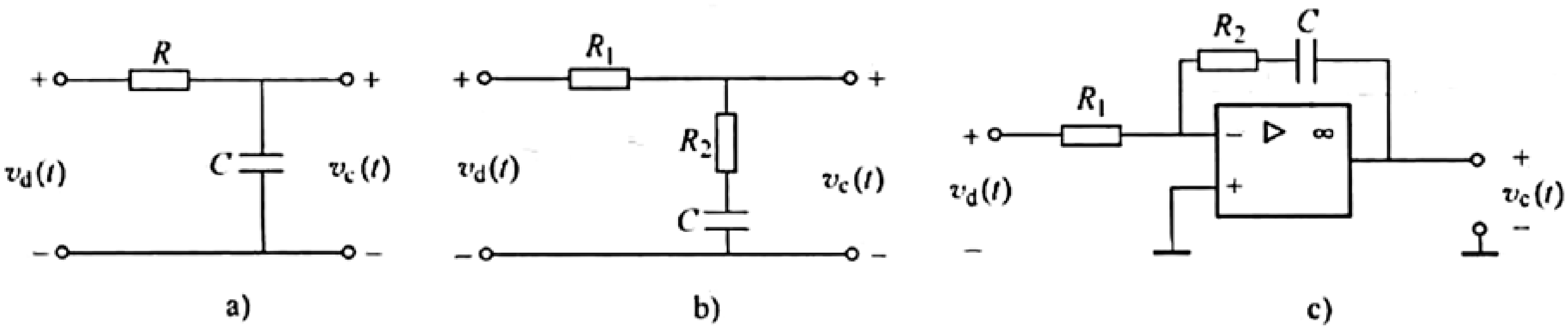


图 8.2.4　常用的环路低通滤波器的电路形式

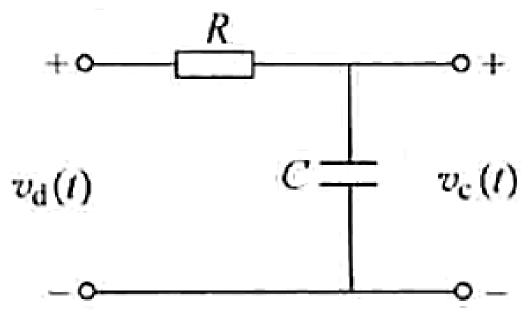
a）无源 RC 滤波器　b）无源比例积分滤波器　c）有源比例积分滤波器

3、传输特性

（1）复频域传输函数

将系统函数进行拉普拉斯变换，然后将式中的s换为jw，则得到系统函数的傅里叶变换

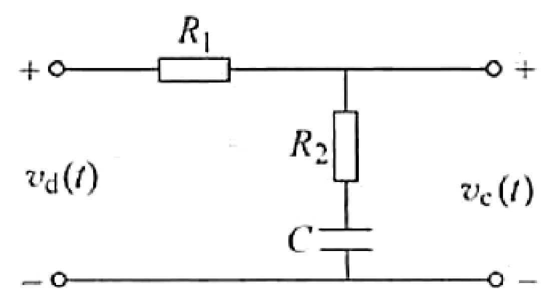
$$A_F(s) = \frac{V_c(s)}{V_d(s)} = \frac{1}{1+s\tau}$$



无源RC滤波器

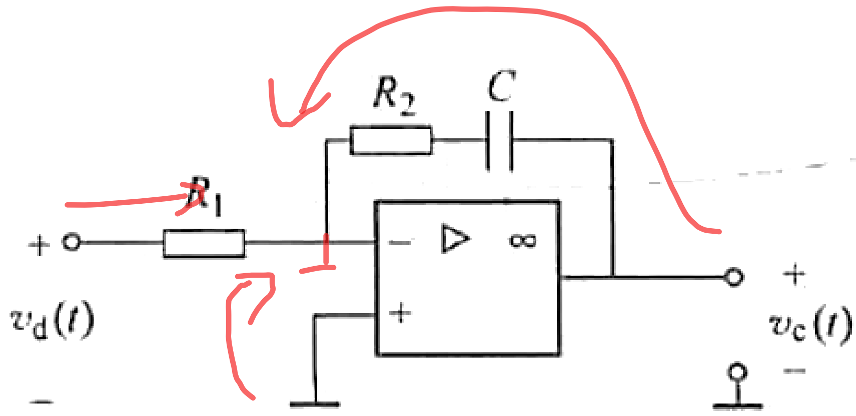
其中 $\tau = RC$

$$A_F(s) = \frac{R_2 + \frac{1}{sC}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{sC}} = \frac{1+s\tau_2}{1+s(\tau_1+\tau_2)}$$



无源比例积分滤波器

其中 $\tau_1 = R_1C \quad \tau_2 = R_2C$



有源比例积分滤波器

$$\frac{V_c}{R_2+1/sC} = -\frac{V_d}{R_1}$$

$$A_F(s) = -\frac{R_2+\dfrac{1}{sC}}{R_1} = -\frac{1+s\tau_2}{s\tau_1}$$

其中 $\tau_1 = R_1 C$

$\tau_2 = R_2 C$

（2）时域传输特性：

vd>>vc

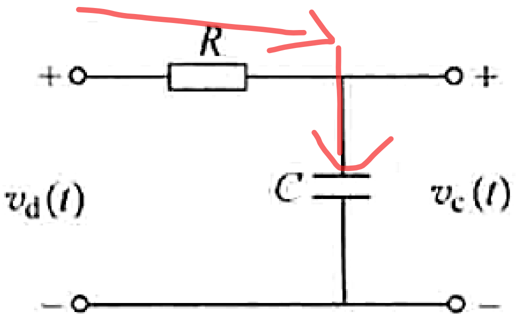
对于以上积分式滤波器，在通带范围内，若 $R >> \frac{1}{\omega C}$

（或$\omega >> \frac{1}{RC}$），输出电压 $v_c(t)$ 与输入电压 $v_d(t)$ 的关系为：

以（a）图为例：

$$\frac{\upsilon_d - \upsilon_c}{R} = C\frac{d\upsilon_c}{dt}$$

C=q/V
i=C×v'



无源RC滤波器

则 $\upsilon_c = \int \frac{\upsilon_d - \upsilon_c}{RC} dt \approx \frac{1}{RC}\int \upsilon_d dt$

若令 $\frac{d}{dt}=p$ 称之为微分算子，则：

$$\int(\ )dt=\frac{1}{p}$$ 为积分算子。

所以 $\upsilon_c(t)=\frac{1}{RC}\frac{1}{p}\upsilon_d(t)=A_F(p)\upsilon_d(t)$

其中 $A_F(p)=\frac{1}{RCp}$ 为时域传递函数 $A_F(s)=\frac{V_c(s)}{V_d(s)}=\frac{1}{1+s\cancel{\tau}}$ RC

与频域传输函数比较：$A_F(s)=\frac{1}{1+sRC}\approx\frac{1}{sRC}$

可以得到 $p=s$

同理可得（b）（c）图：$\upsilon_c(t)=A_F(p)\upsilon_d(t)$

结论：对于积分式滤波器，在已知频域传递函数的情况下，只需将s用 p取代，即可得到时域传递函数；反之亦可。

4、电路模型

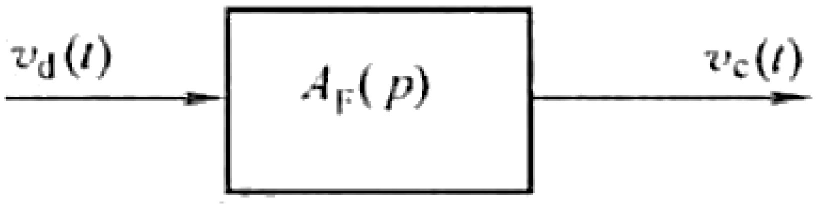


图 8.2.5　环路低通滤波器的电路模型

（三）压控振荡器（VCO）

1、作用：产生振荡频率随控制电压 $v_c(t)$ 变化的振荡电压。是一种电压---频率变换装置。

2、电路形式：

能实现调频的振荡器都可以作为压控振荡器，控制电压即为调制电压。

3、电路模型：

例如变容二极管调频振荡器。在一般情况下，压控振荡器的振荡频率随控制电压变化的特性是非线性的，如图8.2.6（a）所示。

在线性范围内，压控振荡器的控制特性为

$$\omega_o(t)=\omega_r+A_0\upsilon_c(t)$$

A_o：控制灵敏度，vc=0时，wo=wr

单位 $\mathrm{rad/s\cdot V^{-1}}$

显然，在一定范围内满足：

$$\omega_o-\omega_r=A_o\upsilon_c(t)$$

又∵ $\omega_o=\omega_r+\dfrac{d\varphi_o(t)}{dt}$

∴比较上式可得 $\dfrac{d\varphi_o(t)}{dt}=A_o\upsilon_c(t)$

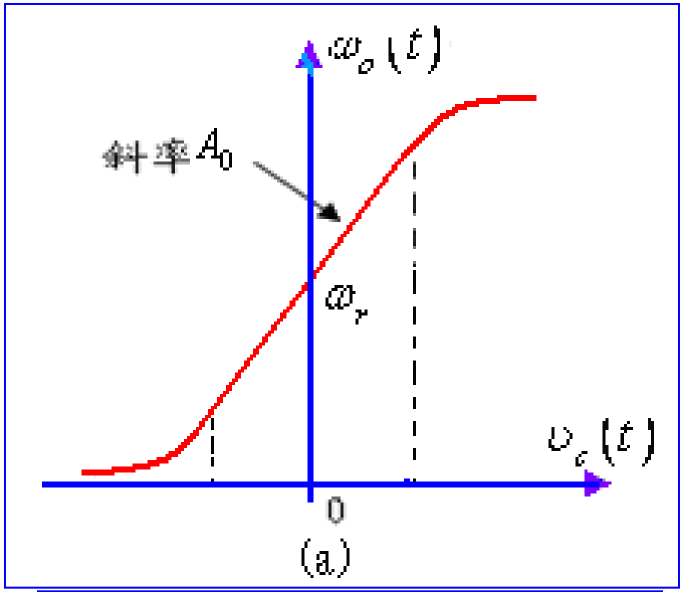


图8.2.6 压控振荡器（VCO）的控制特性

即 $\phi_o(t) = A_o \int_0^t v_c(t)dt$

由该式知：单就 $\varphi_o(t)$ 与 $\upsilon_c(t)$ 的关系而言，VCO是一个理想的积分器。

可用微分算子表示为：$\varphi_o(t) = A_0 \dfrac{\upsilon_c(t)}{p}$

由此得到VCO的电路模型如图8.2.6（b）所示。

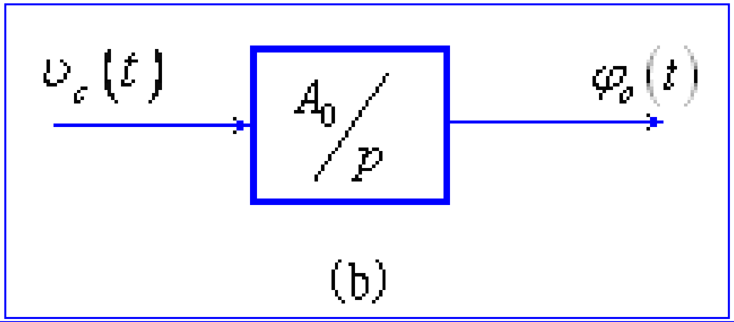


图8.2.6　压控振荡器（VCO）实现模型

四．锁相环路的相位数学模型

将上述各部分的时域模型按图8.1.12连接起来，构成图8.2.7所示的环路相位数学模型。

1、PLL的基本环路模型

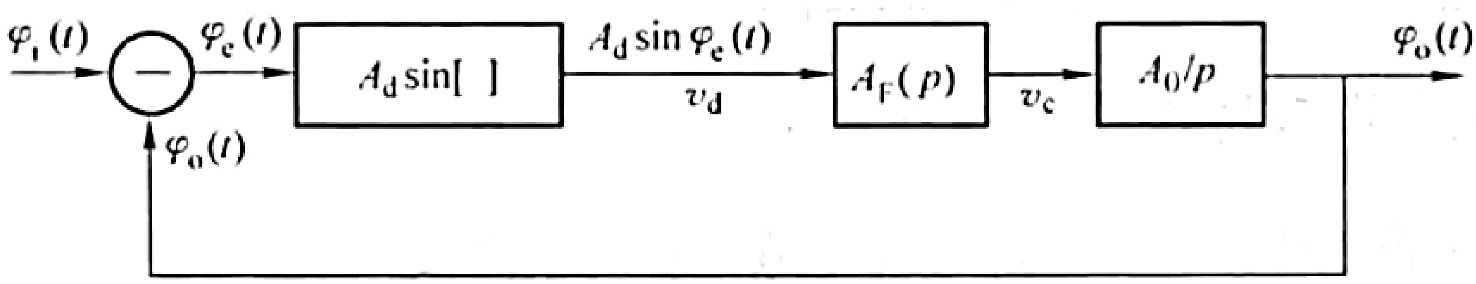


图 8.2.7　锁相环的相位数学模型

8.2.2、锁相环路的基本方程

由图8.2.7锁相环路的相位数学模型知：

$$\varphi_e(t)=\varphi_i(t)-\varphi_o(t)=\varphi_i(t)-A_dA_oA_F(p)\frac{1}{p}\sin\varphi_e(t)$$

或 $$p\varphi_e(t)=p\varphi_i(t)-A_dA_oA_F(p)\sin\varphi_e(t)$$

式中各项的物理意义：

（1）瞬时角频差

$$p\varphi_e(t)=p\left[\varphi_i(t)-\varphi_o(t)\right]=p\varphi_i(t)-p\varphi_o(t)=\omega_i-\omega_o=\Delta\omega_e(t)$$

表示VCO振荡角频率 ω_o 偏离输入信号角频率 ω_i 的数值。

（2）控制角频差

$\int \varphi_e \, dt$

$$\underline{A_d A_o A_F(p)\sin\varphi_e(t)} = p\varphi_i(t) - p\varphi_e(t) = \underline{\omega_o - \omega_r} = \Delta\omega_o$$

表示VCO在控制电压 $\upsilon_c(t)$ 的作用下产生的振荡角频率

ω_o偏离参考角频率 ω_r的数值。

（3）输入固有角频差 或 [初始角频差]

$$\int \varphi_i(\tau)d\tau$$

$$p\varphi_i(t) = \omega_i - \omega_r = \Delta\omega_i(t)$$

表示输入信号角频率 ω_i 偏离参考角频率 ω_r 的数值。

当输入信号频率确定后，$\Delta\omega_i$ 是固定数值。动态方程可进一步改写成为

wi-wo=(wi-wr)-(wo-wr)

$$\Delta\omega_e = \Delta\omega_i - \Delta\omega_o \quad 或 \quad \Delta\omega_i = \Delta\omega_e + \Delta\omega_o$$

物理意义：表明环路闭合后的任何时刻，瞬时角频差和控制角频差之和恒等于输入固有角频差。

环路中有两种不同的自动调节过程：

跟踪过程：环路原本锁定，由于外界因素造成环路失锁，而环路通过自身的调节过程可以重新维持锁定的过程。

捕捉过程：环路原本失锁，闭合后环路通过自身的调节由失锁进入锁定的过程。

8.3.1 锁相环的静态特性

1、环路锁定时瞬时角频差为零

环路闭合前：由于 $\upsilon_c = 0$

此时wo=wr

控制角频差 $\Delta\omega_o = 0$ $\Delta\omega_i = \Delta\omega_e$

环路闭合后：$\upsilon_c \neq 0$，$\Delta\omega_o$增加，$\Delta\omega_e$下降，和为△wi

wi=wo

直到 $\Delta\omega_e = 0$ $\Delta\omega_i = \Delta\omega_o$ 环路达到锁定状态。

环路锁定时，VCO振荡角频率等于输入信号角频率，

即 $\omega_o = \omega_i$ 。

2、稳态相差 $\varphi_{e\infty}$

当环路锁定时，$\Delta\omega_i = \Delta\omega_o$，即

此时的φet

$$p\varphi_i = A_d A_o A_F(0)\sin\varphi_{e\infty}$$

$A_F(0)$ 为环路锁定时滤波器的直流增益。

其中无 源 滤 波 器：$A_F(0)=1$

无源比例滤波器：$A_F(0)=1$

有源比例滤波器：$A_F(0)=\infty$

稳态相位误差

$$\varphi_{e\infty}=\arcsin\frac{\Delta\omega_i}{A_d A_o A_F(0)}=\arcsin\frac{\Delta\omega_i}{A_{\Sigma o}}$$

式中：

$A_{\Sigma o}=A_d A_o A_F(0)$ 为环路锁定时的环路直流总增益。

该式说明：

环路锁定时，输入固有角频差 $\Delta\omega_i$ 越大，稳态相位误差 $\varphi_{e\infty}$ 越大，即随着 $\Delta\omega_i$ 的增加，将VCO的 ω_o 调整到等于 ω_i 所需的控制电压越大，因而产生 υ_c 的 $\varphi_{e\infty}$ 也就越大。直到 $\Delta\omega_i>A_{\Sigma o}$ 时，上式无解。

换个角度来说就是环路的△wo是有限的，无法满足△wi=△wo

或者说： $p\varphi_i = A_d A_o A_F(0)\sin\varphi_{e\infty}$

$\Delta\omega_i$ 过大，环路无法锁定。其原因在于当 $\varphi_{e\infty} = \pi/2$ 时，υ_d（鉴相器输出）电压已最大，若继续使增大 $\varphi_{e\infty}$，υ_d 反而减小，也就无法获得所需的 υ_c 以调整 **VCO**的 ω_o 使之等于 ω_i。

由于环路锁定时，$\Delta\omega_e = 0$，即 $\omega_i - \omega_o = 0$

所以 $\omega_i = \omega_o$ 即环路可以实现无误差的频率跟踪。

3、同步带（跟踪带）

同步带定义：

若环路原本处于锁定状态，由于某种原因引起输入信号角频率变化，造成输入角频差增大，但环路通过跟踪过程，能够维持环路锁定所允许的最大输入固有频差，称为锁相环路的同步带或跟踪带，用 $\Delta\omega_L$ 表示。

由于 $\Delta\omega_i \le A_{\Sigma 0}$ ，根据定义可知同步带为

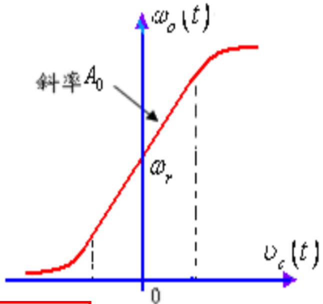
$$\boxed{\Delta\omega_L = A_{\Sigma 0}}$$

实际上，由于输入信号角频率向 ω_r 两边偏离的效果是一样的，因此同步带可以表示为

$$\Delta\omega_L = \pm A_{\Sigma 0}$$

该式表明：要增大锁相环的同步带，必须提高其直流总增益。

不过，这个结论是在假设VCO的频率控制范围足够大的条件下才成立。



也就是VCO的线性范围要能够满足在现有vc(t)的范围内保持良好线性

8.3.2 锁相环的跟踪特性

环路的瞬变过程与稳态相差统称为PLL的跟踪特性。

假设跟踪过程中，环路已处于锁定状态，由输入信号频率变化所引起的相位误差 φ_e 比较小，满足 $|\phi_e| \le \dfrac{\pi}{12}$ 的条件。

可以近似用线性函数逼近鉴相器的鉴相特性，即

$$\upsilon_d(t) = A_d \sin\varphi_e(t) \approx A_d\varphi_e(t)$$

式中 A_d 的单位为 V/rad。

此时基本环路方程可简化为线性微分方程

$$p\varphi_e(t) = p\varphi_i(t) - A_d A_0 A_F(p)\varphi_e(t)$$

相应的线性化相位数学模型如图8.3.1所示。

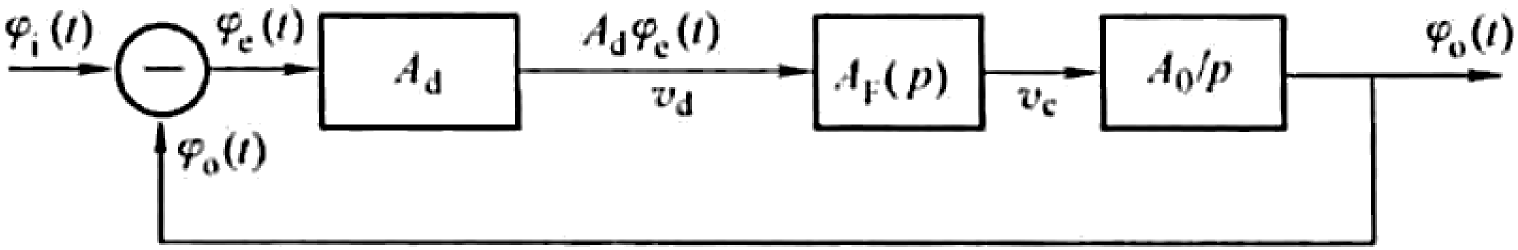


图 8.3.1 锁相环路的线性化相位数学模型

一、PLL的传输特性

设$\Phi_i(s)$、$\Phi_o(s)$、$\Phi_e(s)$分别是$\varphi_i(t)$、$\varphi_o(t)$、$\varphi_e(t)$的拉氏变换，而p用s取代后可以得到图8.3.2所示的线性化频域模型：

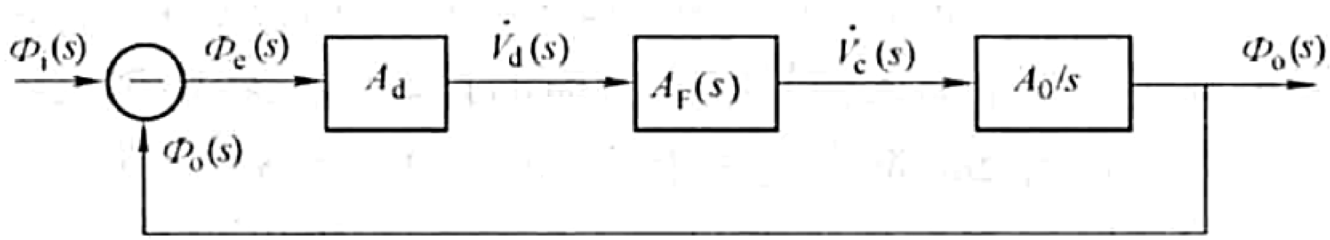


图 8.3.2　锁相环的线性化复频域模型

环路的闭环传递函数为

$$H(s)=\frac{\Phi_o(s)}{\Phi_i(s)}=\frac{A_d A_0 A_F(s)}{s+A_d A_0 A_F(s)}=\frac{H_o(s)}{1+H_o(s)}$$

其中 $H_o(s)=\dfrac{\Phi_o(s)}{\Phi_e(s)}=\dfrac{A_d A_0 A_F(s)}{s}$ 为环路的开环传递函数。

环路的误差传递函数为：

$$H_e(s)=\frac{\Phi_e(s)}{\Phi_i(s)}=\frac{\Phi_e(s)}{\Phi_e(s)+\Phi_o(s)}$$

$$=\frac{1}{1+H_o(s)}=\frac{s}{s+A_d A_0 A_F(s)}$$

在实际应用中，应将环路滤波器的传输函数代入到上述方程中，就可以得到实际锁相环路的传递函数。

可以看出，传递函数的性质实际上是由环路滤波器的性质决定的。环路中采用的环路滤波器的形式不同，相应的传递函数也不同。

二、瞬时响应及稳态相位误差

利用误差传递函数，在给定 $\Phi_i(s)$ 的前提下，求出 $\Phi_e(s)$，再求$\Phi_e(s)$的拉氏反变换，即可得到瞬态响应和稳态相位误差。

即 $$\Phi_e(s)=H_e(s)\Phi_i(s)$$

瞬态响应 $$\varphi_e(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[H_e(s)\Phi_i(s)\right]$$

利用终值定理，求得稳态相位误差

$$\varphi_{e\infty}=\lim_{t\to\infty}\varphi_e(t)=\lim_{s\to 0}s\Phi_e(s)=\lim_{s\to 0}sH_e(s)\Phi_i(s)$$

可以理解为经过足够长时间后锁相环会进入稳定状态

$$\varphi_{e\infty}=\arcsin\frac{\Delta\omega_i}{A_dA_oA_F(0)}=\arcsin\frac{\Delta\omega_i}{A_{\Sigma o}}$$

例8.3.1 在图8.3.3所示的锁相环中，已知 $A_d = 25\,\mathrm{mV/rad}$，$A_0 = 1000\,\mathrm{rad/sV}$，$RC = 1\mathrm{ms}$，当输入角频率发生阶跃变化时，$\Delta\omega_i = 100\,\mathrm{rad/s}$，要求环路的稳态相位误差为0.1rad，试确定放大器的增益A_1，并求出相位误差函数$\varphi_e(t)$。

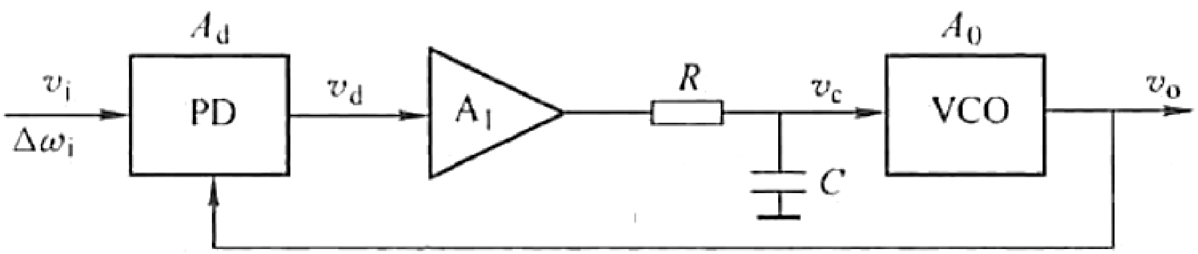


图 8.3.3　例 8.3.1 图

解： 由于环路滤波器为RC低通滤波器，其传递函数为

$$A_F(s) = \frac{1}{1+RCs} = \frac{1}{1+\tau s} \qquad \tau = RC$$

于是，环路的误差传递函数为

$$H_e(s) = \frac{\Phi_e(s)}{\Phi_i(s)} = \frac{s^2 + 2\xi\omega_n s}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

更一般的系统中不包含A1

式中 $\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{A_d A_0 A_1 \tau}\right)^{1/2}$ $\omega_n = \left(\frac{A_d A_0 A_1}{\tau}\right)^{1/2}$

ξ称为阻尼系数。ω_n是$\xi=0$时系统的无阻尼振荡角频率——自然谐振角频率。

设 $t<0$ 时，环路锁定，且有$\omega_i=\omega_o=\omega_r$，$\varphi_i(t)=0$。在 $t=0$ 时，输入信号角频率产生幅度为$\Delta\omega_i$ 阶跃变化，则在 $t>0$后的固有相位差 $\varphi_i(t)$ 为

$$\varphi_i(t)=\int_0^t \Delta\omega_i dt=\Delta\omega_i t$$

其拉氏变换为 $\Phi_i(s)=\frac{1}{s^2}\Delta\omega_i$

因此环路的相位误差为

$$\Phi_e(s)=\frac{s^2+2\xi\omega_n s}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^{\ 2}}\times\frac{\Delta\omega_i}{s^2}=\frac{(s+2\xi\omega_n)\Delta\omega_i}{s\left(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^{\ 2}\right)}$$

瞬态响应

$$\varphi_e(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\Phi_e(s)\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[H_e(s)\Phi_i(s)\right]$$

$$=2\xi\frac{\Delta\omega_i}{\omega_n}$$

$$+\frac{\Delta\omega_i}{\omega_n}e^{-\xi\omega_n t}\left[\frac{1-2\xi^2}{\left(1-\xi^2\right)^{1/2}}\sin\omega_n\left(1-\xi^2\right)^{1/2}t-2\xi\cos\omega_n\left(1-\xi^2\right)^{1/2}t\right]$$

式中，等式右边第二项为振幅按指数衰减的两个正弦函数的差值。这两个正弦函数的角频率相同（其值与 A_d、A_0、τ 有关），相位差为 $\pi/2$，振幅不同。

当 $t \to \infty$ 时，该项的振幅值趋于零，是瞬态相位误差。当 $A_d A_0 A_1$ 一定时，ξ 取不同值时，由上式画出的曲线如图8.3.4所示。

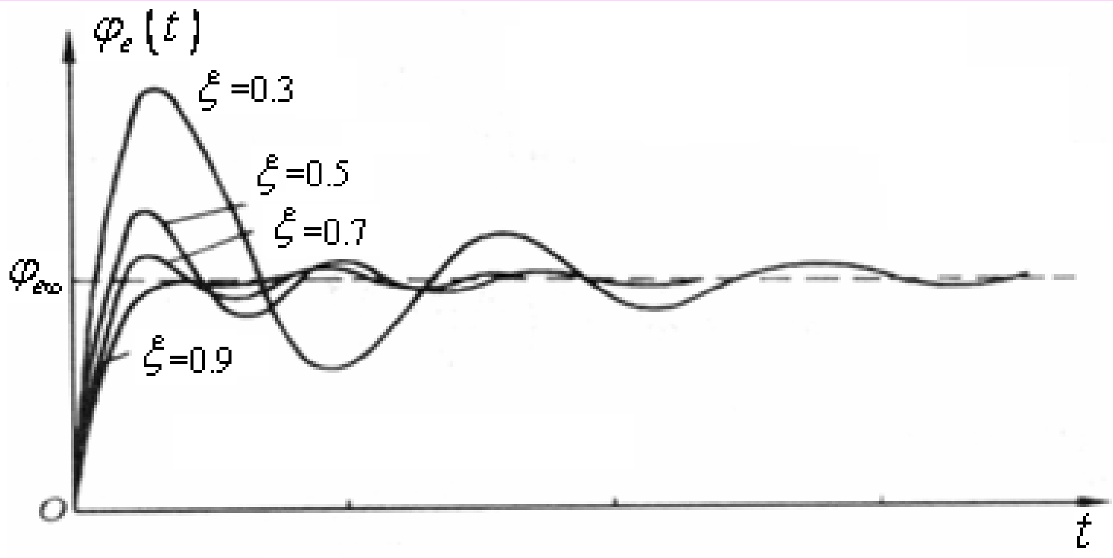


图8.3.4　相位误差信号的瞬态响应

稳态相位误差为

$$\varphi_{e\infty}=\lim_{s\to 0} sH_e(s)\Phi_i(s)=2\xi\frac{\Delta\omega_i}{\omega_n}=\frac{\Delta\omega_i}{A_dA_0A_1}$$

显然，提高环路直流总增益 $A_{\Sigma o}=A_dA_0A_1$，可以减小 $\varphi_{e\infty}$。

将已知数值代入上述各式中，可以求得

$$A_1=\frac{\Delta\omega_i}{A_dA_0\varphi_{e\infty}}=\frac{100}{25\times10^{-3}\times10^{3}\times0.1}=40$$

此时

$$\xi=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{A_d A_0 A_1 \tau}\right)^{1/2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{25\times10^{-3}\times10^{3}\times40\times10^{-3}}\right)^{1/2}=\frac{1}{2}$$

$$\omega_n=\left(\frac{A_d A_0 A_1}{\tau}\right)^{1/2}=\left(\frac{25\times10^{-3}\times10^{3}\times40}{10^{-3}}\right)^{1/2}=1000(\mathrm{rad/s})$$

因而相位误差函数

$$\varphi_e(t)=0.1+0.1e^{-500t}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\sin500\sqrt{3}t-\cos500\sqrt{3}t\right)(\mathrm{rad})$$

三、正弦稳态响应

在PLL中，正弦稳态响应是指输入相位$\varphi_i(t)$为正弦信号时环路的输出响应。

当输入信号的相位$\varphi_i(t)$按正弦规律变化时（即输入正弦调频或调相信号），PLL的输出信号相角，即压控振荡器振荡信号的相角，也将按正弦规律变化。但相位变化的幅度和初始相位将随频率的不同而不同，称这种性质为环路的频率特性或频率响应。

若输入信号相角为

$$\varphi_i(t)=\varphi_{im}\sin(\Omega t+\theta_i)$$

则环路的稳态响应输出也必为正弦信号，即

$$\varphi_o(t)=\varphi_{om}\sin(\Omega t+\theta_o)$$

相应的锁相环路输入、输出信号电压分别为：

$$\upsilon_i=V_{im}\cos\left[\omega_r t+\varphi_{im}\sin(\Omega t+\theta_i)\right]$$

$$\upsilon_o=V_{om}\cos\left[\omega_r t+\varphi_{om}\sin(\Omega t+\theta_o)\right]$$

显然它们均为单音频调制的调相信号。

若将$\varphi_i(t)$、$\varphi_o(t)$用复数表示为

$$\phi_i(j\Omega) = \phi_{im}(\Omega)e^{j\theta_i(\Omega)}$$

$$\phi_o(j\Omega) = \phi_{om}(\Omega)e^{j\theta_o(\Omega)}$$

其中φ_{im}、θ_i、φ_{om}、θ_o 均为 Ω 的函数。

令PLL中的正弦稳态响应即环路对调相信号中的正弦相位的频率特性为 $H(j\Omega)$

且 $$H(j\Omega) = \frac{\phi_o(j\Omega)}{\phi_i(j\Omega)}$$

PLL的频率特性 $H(j\Omega)$可以用 $j\Omega$ 代替闭环传递函数中的s求得。

例如，采用简单RC积分滤波器的PLL，其闭环传递函数为

$$H(s)=\frac{\Phi_o(s)}{\Phi_i(s)}=\frac{\omega_n{}^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n{}^2}$$

若令 $s=j\Omega$，相应的幅频特性为

$$H(\Omega)=\frac{\Phi_o(\Omega)}{\Phi_i(\Omega)}=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega_n{}^2}\right)^2+\left(\frac{2\xi\Omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

图8.3.5 画出了不同 ξ 时的幅频特性曲线。

由图可见，对于输入正弦相位来说，PLL具有低通滤波器的特性。其形状与ξ有关。当$\xi = 0.707$时，特性曲线最线最平坦，上限频率为：

$$\omega_H = \omega_n = \left(\frac{A_d A_0}{\tau}\right)^{1/2}$$

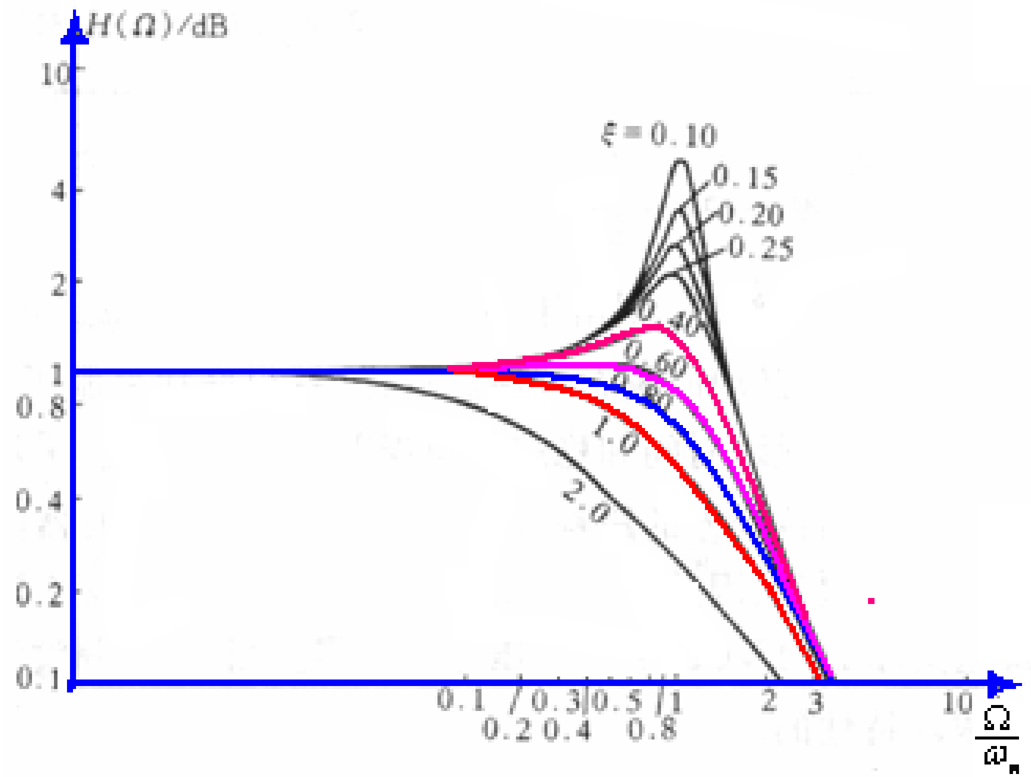


图8.3.5　不同ξ时的闭环幅频特性曲线

例8.3.2 在采用简单*RC*积分滤波器的PLL中，若 $A_d A_0 = 10\pi \, rad/s$

$\tau = \dfrac{1}{20\pi} s$ ，求 ω_H 。

解： 根据已知数据求得

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{A_d A_0 \tau}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{20\pi}{10\pi}\right)^{1/2} = 0.707$$

所以

$$\omega_H = \left(\frac{A_d A_0}{\tau}\right)^{1/2} = \left(20\pi \times 10\pi\right)^{1/2} = 14.14\pi\left(rad/s\right)$$

由上例可见，通过增大环路滤波器的时间常数，减小环路的直流总增益，可以将环路的带宽做的非常窄。

作业：　8.14　　8.15　　8.16　　8.19

预习：　8.4　　8.6