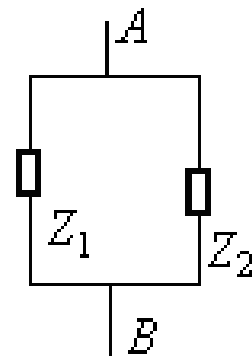


## 五、阻抗变换电路的谐振频率计算

对于一般形式的并联回路，若：

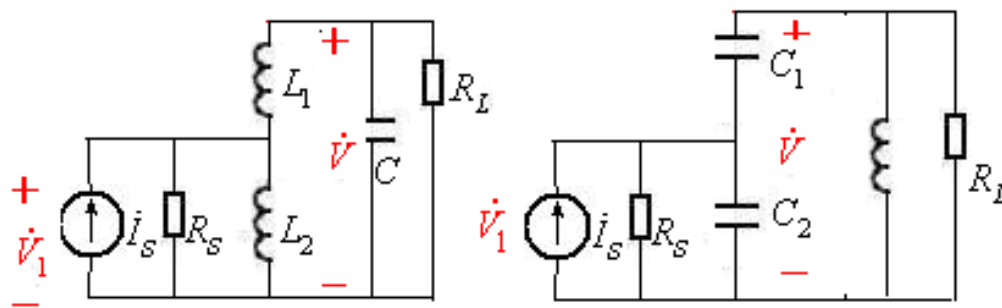
$$\begin{cases} Z_1 = R_1 + jX_1 \\ Z_2 = R_2 + jX_2 \end{cases}$$


由于通常情况下，电子线路中均满足  $X \gg R$  的条件，因此回路并联谐振时，有如下关系成立  $X_1 + X_2 = 0$

例如：右图所示  
电路的谐振频率计  
算公式分别为

$$\omega_0 L_2 + (\omega_0 L_1 - \frac{1}{\omega_0 C}) = 0$$

$$-\frac{1}{\omega_0 C_2} + (\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C_1}) = 0$$



结论是：当有多个电抗元件构成的回路处于谐振状态时，沿回路一圈的电抗和等于零。

又  $\omega_0 L_2 + (\omega_0 L_1 - \frac{1}{\omega_0 C}) = 0$  可以改写为

$$\omega_0(L_1 + L_2) = \frac{1}{\omega_0 C}$$
$$\omega_0 L_2 = \frac{1}{\omega_0 C} - \omega_0 L_1$$

$-\frac{1}{\omega_0 C_2} + (\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C_1}) = 0$  可以改写为

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C_2} + \frac{1}{\omega_0 C_1} = \frac{1}{\omega_0 C}$$
$$\frac{1}{\omega_0 C_2} = \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C_1}$$

其中  $C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$

以上各式说明：当回路谐振时，由回路的任何两端点看去，回路都谐振于同一频率，且呈纯电阻性。其谐振频率为：

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2)C}} = \frac{1}{\sqrt{L C}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}} = \frac{1}{\sqrt{L C}}$$

例2.2.1 电路如图2.2.8所示。试求输出电压  $u_1(t)$

的表达式及回路的带宽。忽略回路本身的固有损耗。

解：设回路满足高  $Q$  的条件，

由图知，回路电容为

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{2000 \times 2000}{2000 + 2000} = 1000 \text{pF}$$

回路固有角频率为：

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^7 \text{ (rad/s)}$$

显然与信号频率相等，即  $\omega_0 = \omega$

回路处于谐振状态。

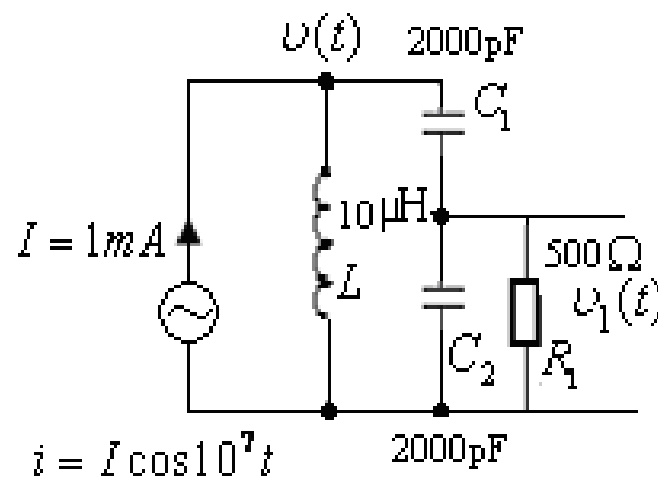


图2.2.8 例2.2.1电路图

电阻 $R_1$ 的接入系数：

$$n = \frac{C_1}{C_1 + C_2} = \frac{2000}{2000 + 2000} = \frac{1}{2}$$

等效到回路两端的电阻为

$$R = \frac{1}{n^2} R_1 = \frac{500}{1/4} = 2000(\Omega)$$

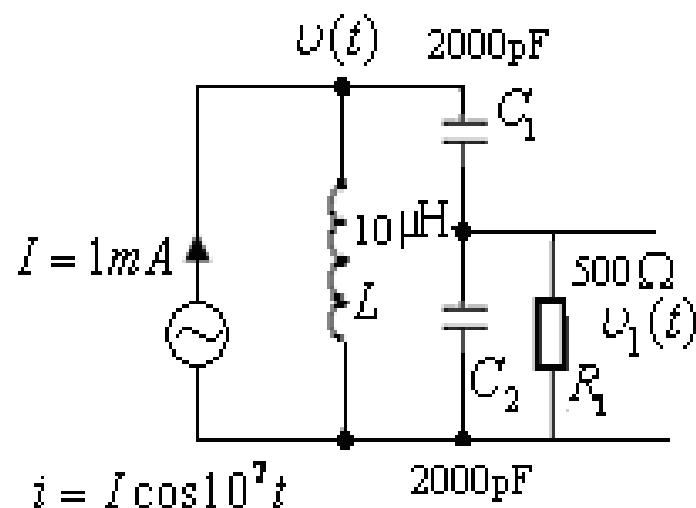


图2.2.6 例2.2.1电路图

回路谐振时，两端的电压 $v(t)$ 与 $i(t)$ 同相，电压振幅为

$$V = IR = 10^{-3} \times 2000 = 2(\text{V})$$

所以回路两端的电压

$$v(t) = iR = 1\text{mA} \cos 10^7 t \times 2\text{k}\Omega = 2 \cos 10^7 t (\text{V})$$

输出电压

$$v_1(t) = n v(t) = \frac{1}{2} \times 2 \cos 10^7 t = \cos 10^7 t (\text{V})$$

回路品质因数

$$Q_0 = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{2000}{10^7 \times 10^{-5}} = \frac{2000}{100} = 20$$

回路带宽

$$BW_{0.7} = \frac{f_0}{Q_0} = \frac{10^7}{2\pi \times 20} \approx 79.58 \times 10^3 (\text{Hz})$$

根据上面例题的讨论，问题转化为

- 1、当信号源频率  $f_s = ?$  时，回路两端的输出电压最大。
- 2、能够通过回路的信号频率  $f_s$  的范围是多少？

## 2.3 耦合回路

- 单调谐回路中 $Q$ 值越高，谐振曲线越尖锐，通频带越窄，选择有用信号的能力越强，即选择性越好。但在需要保证一定通频带的条件下，单调谐回路难以胜任。采用耦合振荡回路可以解决单调谐回路中通频带和选择性的矛盾。
- 理想的选择频率的特性应是矩形曲线，以使在通频带内各种频率的响应相同，通频带外各频率的响应为零。为了得到接近于矩形的频率响应特性以及阻抗变换的需要，广泛使用耦合振荡系统。该系统一般由两个或两个以上的单振荡回路通过各种不同的耦合方式组成，通常称为耦合回路。

- 耦合是指两个或两个以上的电路元件或电网络的输入与输出之间存在紧密配合与相互影响，并通过相互作用从一侧向另一侧传输能量的现象；
- 耦合回路（**coupling circuit**）是由两个或两个以上的电路形成的一个网络，两个电路之间必须有公共阻抗存在，才能完成耦合作用。公共阻抗如果是纯电阻或纯电抗，则称为纯耦合。

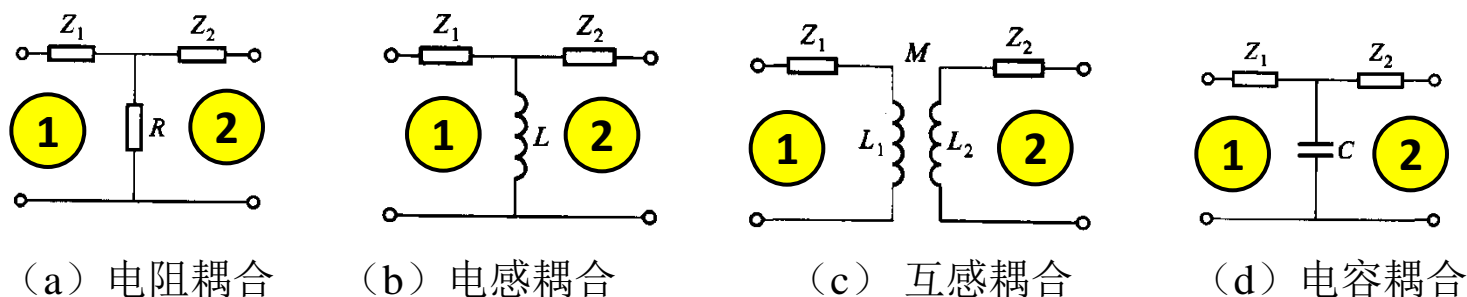


图2.3.1 纯耦合电路

如果公共阻抗由两种或两种以上的电路元件组成，则称为复耦合。

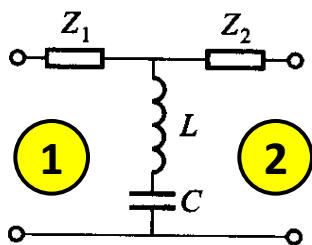
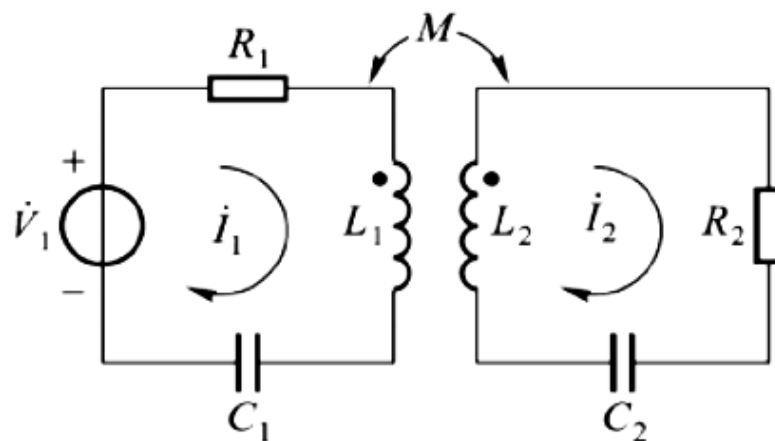
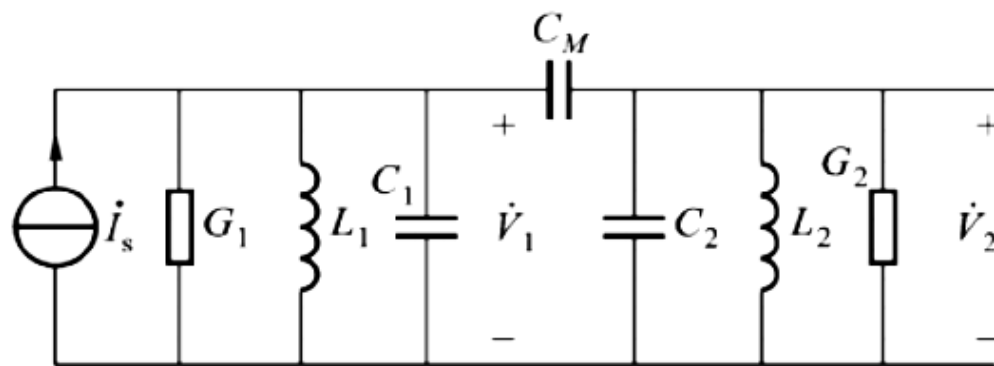


图2.3.2 复耦合电路

- 耦合回路的组成特点：至少由两个谐振回路通过各种不同耦合方式组成。
- 在耦合回路中接有激励信号源的回路称为初级回路，与负载相接的回路称为次级回路。
- 电容耦合与电感耦合的谐振特性曲线是一致的，一个关注电流特性，一个关注电压特性。



(a) 互感耦合串联型回路



(b) 电容耦合并联型回路



**耦合系数k：**耦合回路的特性和功能与两个回路的耦合程度有关。耦合回路的公共电抗（或电阻）绝对值与初、次级回路中同性质的电抗（或电阻）的几何中项之比。

式中， $X_{12}$ 为耦合元件电抗；
$$k = \frac{|X_{12}|}{\sqrt{X_{11}X_{22}}}$$

$X_{11}$  与  $X_{22}$  分别为初级和次级回路中与  $X_{12}$  同性质的总电抗。

**互感耦合串联型回路和电容耦合并联型回路的耦合系数：**

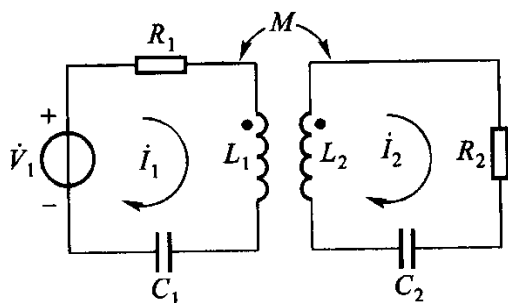
$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad k = \frac{C_M}{\sqrt{(C_1 + C_M)(C_2 + C_M)}}$$

耦合系数是没有量纲的正实数，其值小于1，最大等于1。

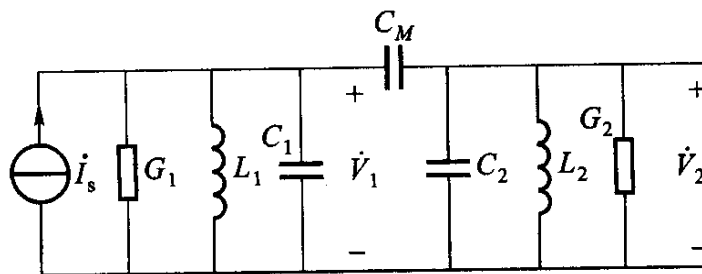
按耦合参量的大小：强耦合、临界耦合、弱耦合

## 2.3.1 耦合回路的阻抗特性

在通信电子线路中，常采用的两种耦合回路



(a) 互感耦合串联型回路



(b) 电容耦合并联型回路

以互感耦合电路为例：

回路  
电压  
方程

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= \dot{I}_1 \left( R_1 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} \right) - \dot{I}_2 j\omega M = \dot{I}_1 Z_{11} - j\omega M \dot{I}_2 \\ 0 &= \dot{I}_2 \left( R_2 + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2} \right) - \dot{I}_1 j\omega M = \dot{I}_2 Z_{22} - j\omega M \dot{I}_1\end{aligned}$$

回路的  
自阻抗

耦合元  
件电抗

解该方程组，可以得到：

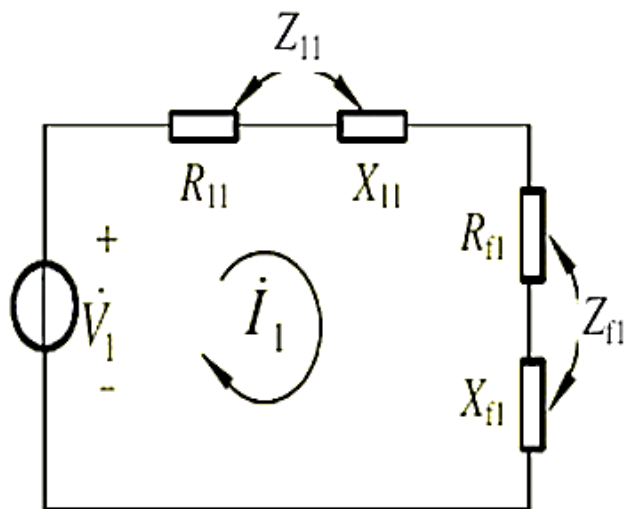
$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{V}_1}{Z_{11} + \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}}} = \frac{\dot{V}_1}{Z_{11} + Z_{f1}}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{j\omega M \dot{I}_1}{Z_{22}} = \frac{j\omega M \frac{\dot{V}_1}{Z_{11}}}{Z_{22} + \frac{(\omega M)^2}{Z_{11}}} = \frac{j\omega M \frac{\dot{V}_1}{Z_{11}}}{Z_{22} + Z_{f2}}$$

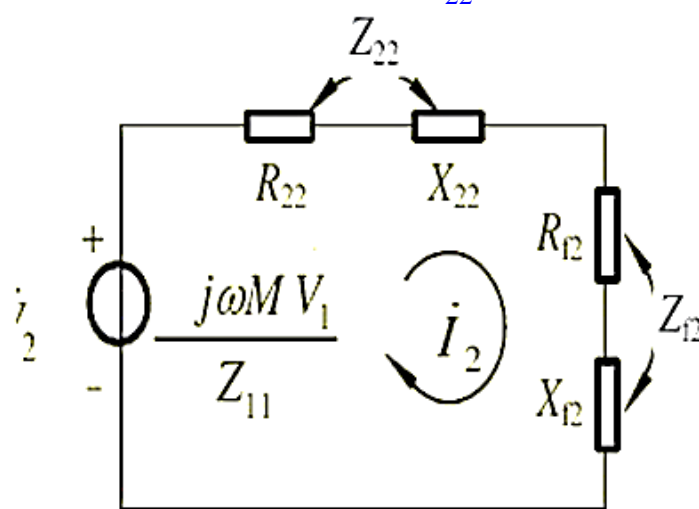
式中  $Z_{f1} = \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}}$   $Z_{f2} = \frac{(\omega M)^2}{Z_{11}}$  称为反射阻抗或耦合阻抗。

物理意义是：次（初）级电流  $\dot{I}_2$  （ $\dot{I}_1$ ）通过互感 $M$ 的作用，在初（次）级回路中产生的感应电动势  $\pm j\omega M \dot{I}_2$  （ $\pm j\omega M \dot{I}_1$ ）对初（次）级回路电流的  $\dot{I}_1$  （ $\dot{I}_2$ ）影响。

耦合回路的许多重要特性是由反射阻抗  $Z_{f1} = \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}}$  决定的。



(a) 初级等效电路



(b) 次级等效电路

- 当 $M$ 很小时，次级回路的感应电动势小，从初级回路传输到次级回路的能量很小。同时，次级回路对初级回路的反射阻抗也很小，对初级回路电流的影响也很小。
- 当 $Z_{22}$ 很大时，即使 $M$ 很大，次级回路有较高的感应电动势，但是次级回路的电流较小，故从初级回路传输到次级回路的能量较小。

## 2.3.2 耦合回路的频率特性

电容耦合回路：实用中初次  
级回路参数相同，因此：

$$C_1 = C_2 = C \quad \omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$$

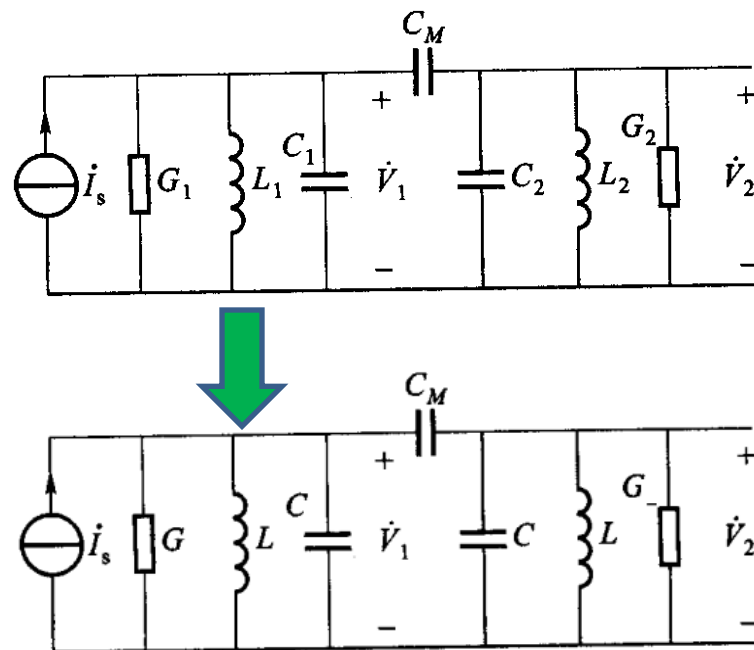
$$G_1 = G_2 = G \quad Q_1 = Q_2 = Q$$

$$L_1 = L_2 = L \quad \xi_1 = \xi_2 = \xi$$

列出的回路方程为：

$$\dot{I}_s = \dot{V}_1 \left[ G + \frac{1}{j\omega L} + j\omega(C + C_M) \right] - \dot{V}_2 j\omega C_M$$

$$0 = \dot{V}_2 \left[ G + \frac{1}{j\omega L} + j\omega(C + C_M) \right] - \dot{V}_1 j\omega C_M$$



引入广义失谐：

$$\xi = Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

令  $C' = C + C_M$ ，考虑到该耦合回路通常满足  $C_M \ll C$ ，借助单个回路品质因数  $Q = \frac{1}{\omega_0 LG} = \frac{\omega_0 C}{G} \approx \frac{\omega_0 C'}{G}$ ，上两式可写为

$$\dot{I}_s \approx \dot{V}_1 G(1 + j\xi) - j\omega C_M \dot{V}_2$$

求解该回路方程，得到：

$$0 \approx \dot{V}_2 G(1 + j\xi) - j\omega C_M \dot{V}_1$$

$$\dot{V}_2 = \frac{j\omega C_M \dot{I}_s}{G^2(1 + j\xi)^2 + (\omega C_M)^2} = \frac{j\omega C_M \dot{I}_s}{G^2(1 - \xi^2 + \frac{\omega^2 C_M^2}{G^2} + j2\xi)}$$

其幅值为

$$V_2 = \frac{\omega C_M I_s}{G^2 \sqrt{(1 - \xi^2 + \frac{\omega^2 C_M^2}{G^2})^2 + 4\xi^2}} = \frac{\eta I_s}{G \sqrt{(1 - \xi^2 + \eta^2)^2 + 4\xi^2}}$$

式中  $\eta = \frac{\omega C_M}{G}$  称为回路的耦合因数。

可以证明，当  $\eta=1$  且  $\xi=0$  时，回路电压  $V_2$  达到

最大值，该最大值为  $V_{2\max} = \frac{I_s}{2G}$

于是得到归一化的频率特性方程为

$$N = \frac{V_2}{V_{2\max}} = \frac{2\eta}{\sqrt{(1 - \xi^2 + \eta^2)^2 + 4\xi^2}}$$

耦合因数：  $\eta = \frac{\omega C_M}{G} = \frac{\omega C}{G} \frac{C_M}{C} \approx Qk$

临界耦合情况下  $\eta=1$

$k$  为耦合系数：

$$k = \frac{C_M}{\sqrt{(C_1 + C_M)(C_2 + C_M)}} = \frac{C_M}{C + C_M} \approx \frac{C_M}{C}$$

结论：归一化的频率特性

$$N = \frac{V_2}{V_{2\max}} = \frac{2\eta}{\sqrt{(1+\eta^2)^2 + 2(1-\eta^2)\xi^2 + \xi^4}}$$

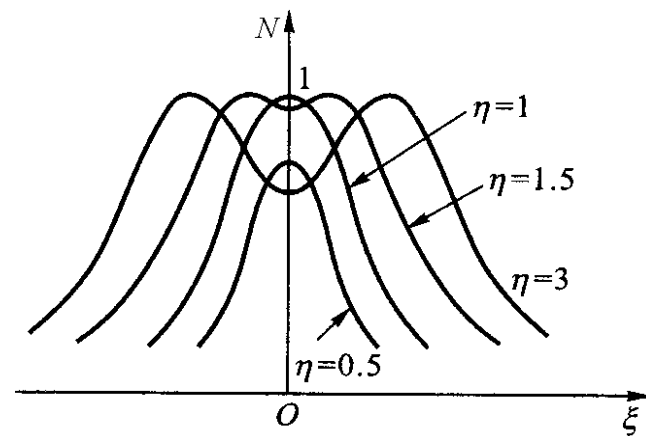


图2.3.3 次级回路的归一化谐振特性曲线

可以证明：通频带宽度

临界耦合的情况下  $BW_{0.7} = \sqrt{2} \frac{f_0}{Q}$

临界耦合系数为  $k = \frac{1}{Q} \approx \frac{C_M}{C}$

强耦合的情况下  $\eta = 2.41 \quad BW_{0.7} = 3.1 \frac{f_0}{Q}$



## 2.4 石英晶体滤波器

### 一、石英晶体的物理特性

#### 1、石英晶体的结构

石英片是从石英晶体柱( $\text{SiO}_2$ , 六角锥体)中切割下来的, 是一种弹性体, 有一固有振动频率, 其值与石英片的形状、尺寸和切型有关, 而且十分稳定。

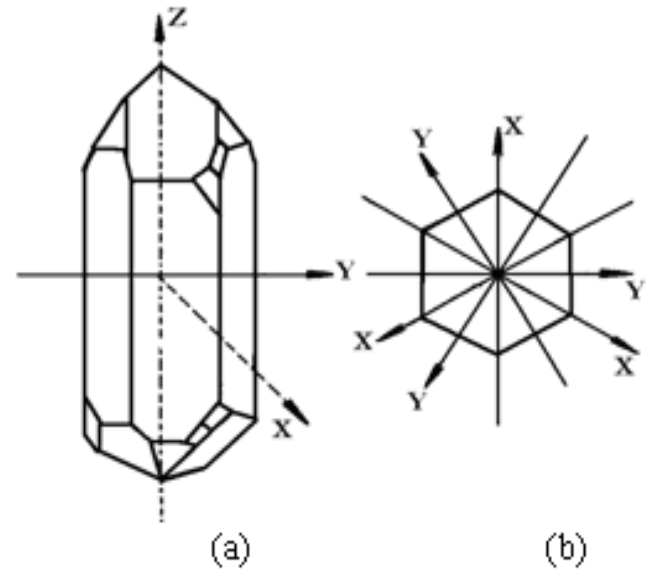


图2.4.1 石英晶体的形状及横断面图

**X轴：**电轴

**Y轴：**机械轴

**Z轴：**光轴

## 2、石英晶体的切割

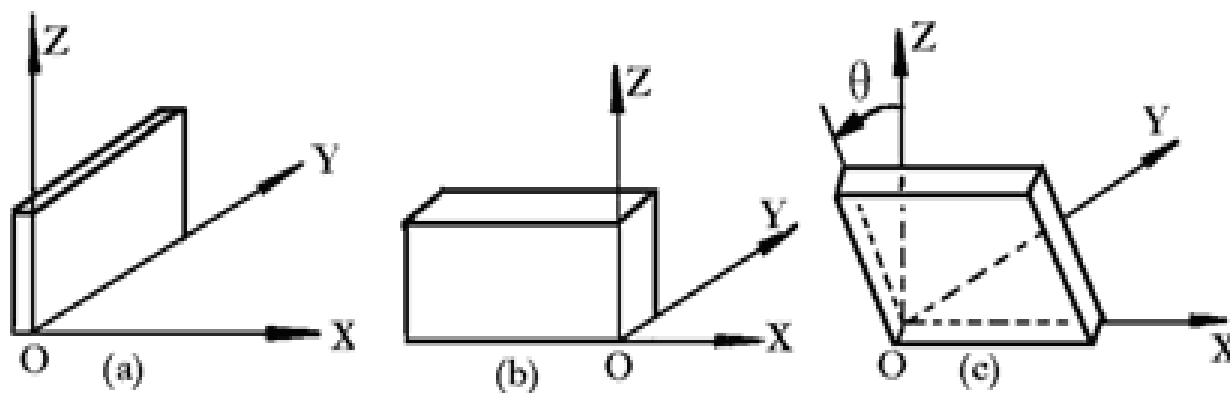


图2.4.2 石英晶体的各种切割方式  
(a) X切割 (b) Y切割 (c) AT切割

石英晶体谐振器是由石英晶体切片而成。各种晶片按与各轴不同角度切割而成。图2.4.2就是石英晶体几种常用的切片方式。晶片经制作金属电极，安置于支架并封装，即成为晶体谐振器元件。

### 3、石英晶体的电特性

- 石英晶体特有的正、反两种压电效应

正压电效应：沿电轴或机械轴加张力或压力，则在垂直于电轴的两个面上产生正、负电荷。

负压电效应：在垂直于电轴的两个面上加交变电压时，沿电轴或机械轴产生弹性变形（伸张或压缩），称为机械振动。

- 石英晶体具有谐振回路的特性。

- 具有较小的频率温度特性。

- 若在石英晶体的两个电极上加一电场，晶片就会产生机械变形。反之，若在晶片的两侧施加机械压力，则在晶片相应的方向上将产生电场，这种物理现象称为压电效应。
- 如果在晶片的两极上加交变电压，晶片就会产生机械振动，同时晶片的机械振动又会产生交变电场。
- 在一般情况下，晶片机械振动的振幅和交变电场的振幅非常微小，但当外加交变电压的频率为某一特定值时，振幅明显加大，比其他频率下的振幅大得多，这种现象称为压电谐振，它与LC回路的谐振现象十分相似。
- 它的谐振频率与晶片的切割方式、几何形状、尺寸等有关。

## 二、石英谐振器的等效电路及阻抗特性

### 1、等效电路

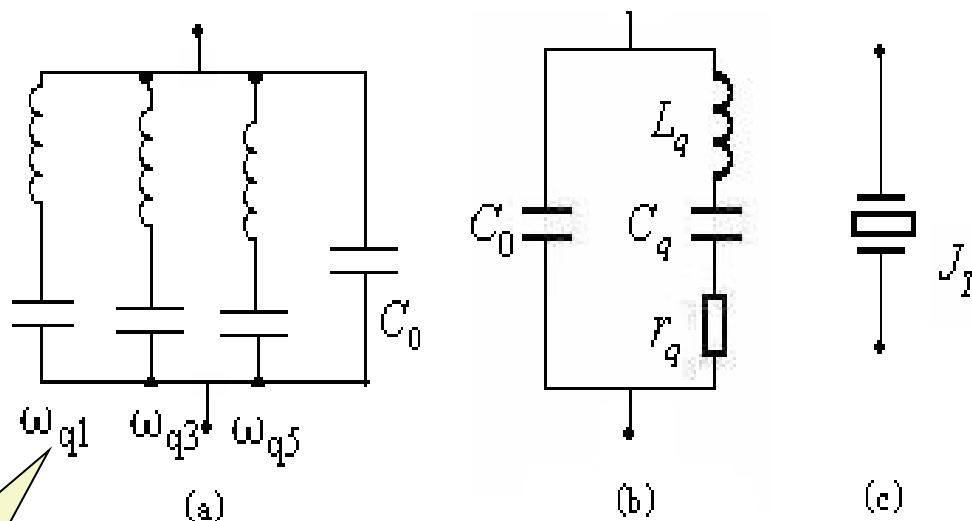


图 (a) 是考虑基频及各奇次泛音的等效电路。

晶体作为电介质的静态电容

$$C_0 = \frac{\varepsilon S}{d}$$

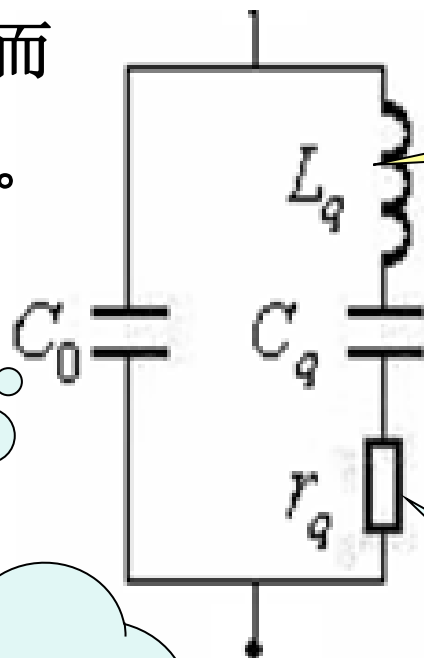
图2.4.3 晶体谐振器的等效电路

(a) 包括泛音在内的等效电路

(b) 谐振频率附近的等效电路

(c) 电路符号

$L_q$ ,  $C_q$ ,  $r_q$ 对应于机械共振经过压电转换而呈现出的动态参数。



机械振动的惯性，值很大，为（几十m~几十）H；

晶片的弹性，值较小，为（0.01~0.1）pF；

机械摩擦和空气阻尼引起的损耗，值很小，为（几~几十 $\Omega$ ）

晶体作为介质的静态电容。其数值一般为（几~几十）pF，较大。与石英片厚度、介电常数、极板面积有关。

## 2、谐振频率

串联谐振频率:  $f_q = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_q C_q}}$

并联谐振频率:  $f_p = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \approx f_q \left[ 1 + \frac{C_q}{2C_0} \right]$

式中  $C = \frac{C_q C_0}{C_q + C_0}$

两频率之间的间隔为  $\Delta f = f_p - f_q = \frac{1}{2} f_q \frac{C_q}{C_0}$

晶体的主要特点是它的等效电感  $L_q$  特别大，  
 $C_q$  特别小。晶体谐振器的品质因数为

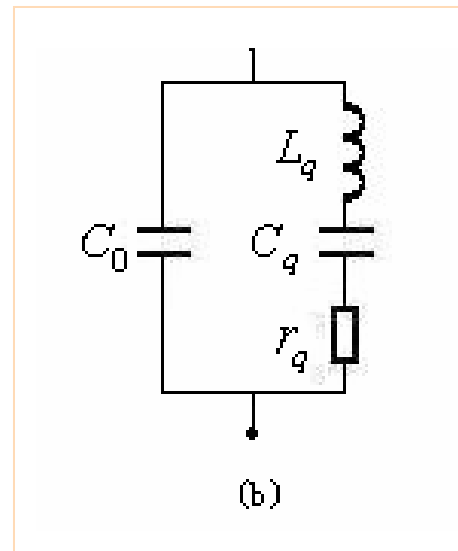
$$Q_0 \approx \frac{\omega_q L_q}{r_q} \quad \text{很大，为（几万~几百万）}$$

### 3、晶体的等效阻抗

图1.3.3（b）所示等效电路的阻抗一般表示式为

$$Z = \frac{-j \frac{1}{\omega C_0} \left[ r_q + j \left( \omega L_q - \frac{1}{\omega C_q} \right) \right]}{r_q + j \left( \omega L_q - \frac{1}{\omega C_q} \right) - j \frac{1}{\omega C_0}}$$

$$Z \approx -j \frac{1}{\omega C_0} \frac{1 - \frac{\omega_q^2}{\omega^2}}{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = jX_e$$





若忽略  $r_q$  则晶体两端呈现纯电抗，故

$$Z \approx -j \frac{1}{\omega C_0} \frac{1 - \frac{\omega_q^2}{\omega^2}}{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = jX_e$$

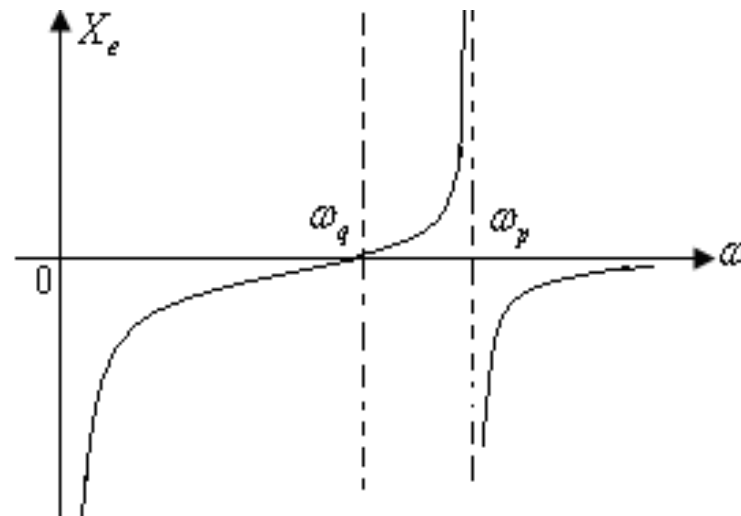


图2.4.4 晶体谐振器的电抗曲线

当 $\omega > \omega_p$ 或 $\omega < \omega_q$ 时，石英晶体呈现容性。

当 $\omega_q < \omega < \omega_p$ 时，石英晶体呈现感性。

## 4、石英晶体的特点

晶体谐振器与一般振荡回路比较，有以下几个明显的特点：

- ① 晶体的谐振频率  $f_p$  和  $f_q$  非常稳定。这是因为  $L_q$ 、 $C_q$ 、 $r_q$  由晶体尺寸决定，由于晶体的物理特性它们受外界因素（如温度、震动等）的影响小。
- ② 有非常高的品质因数。而普通LC振荡回路的  $Q$  值只能到几百。
- ③ 晶体在工作频率附近阻抗变化率大，具有很高的并联谐振阻抗。

## 5、石英晶体的实际应用

在实际的振荡电路中，晶体两端往往并接电容 $C_L$ ，这种情况下，晶体等效电路中的并接电容为 $(C_0+C_L)$ ，相应的并联谐振频率由 $f_p$ 减小到 $f_N$ ，其值为

$$f_N \approx f_q \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{C_q}{C_0 + C_L} \right)$$

通常称 $C_L$ 为晶体的负载电容，标在晶体外壳上的振荡频率（或称晶体的标称频率）就是并接 $C_L$ 后的 $f_N$ 值。

## 2.5 陶瓷滤波器（自学）

利用陶瓷材料的压电效应构成。单片陶瓷滤波器又称为单端口陶瓷滤波器。

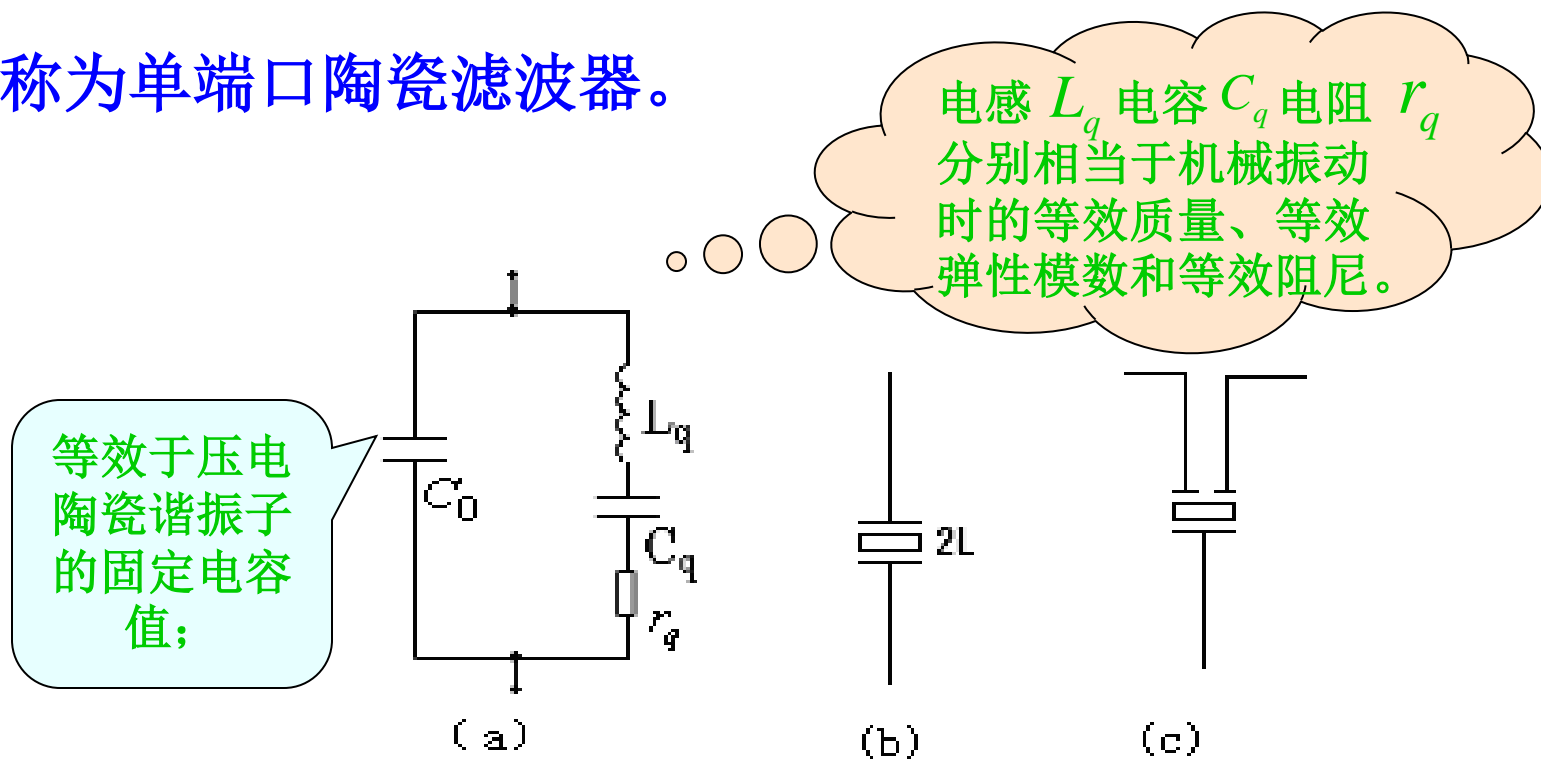


图2.4.5 单片陶瓷滤波器的等效电路和符号  
(a)等效电路 (b)单端口符号图 (c)双端口符号图

具有与石英相同的谐振特性，其LC回路，低于石英晶体。

作业: P. 40      2. 16      2. 17

预习: 3. 1      3. 2