https://haokan.baidu.com/v?vid=15505729726779223406&pd=bjh&fr=bjhauthor&type=video

视频：解释车轮倒转，分析其说法是否正确，为什么？在实际中能看到车轮倒转的现象吗？与信号的抽样有什么关系？

§3.6　信号的抽样与重建

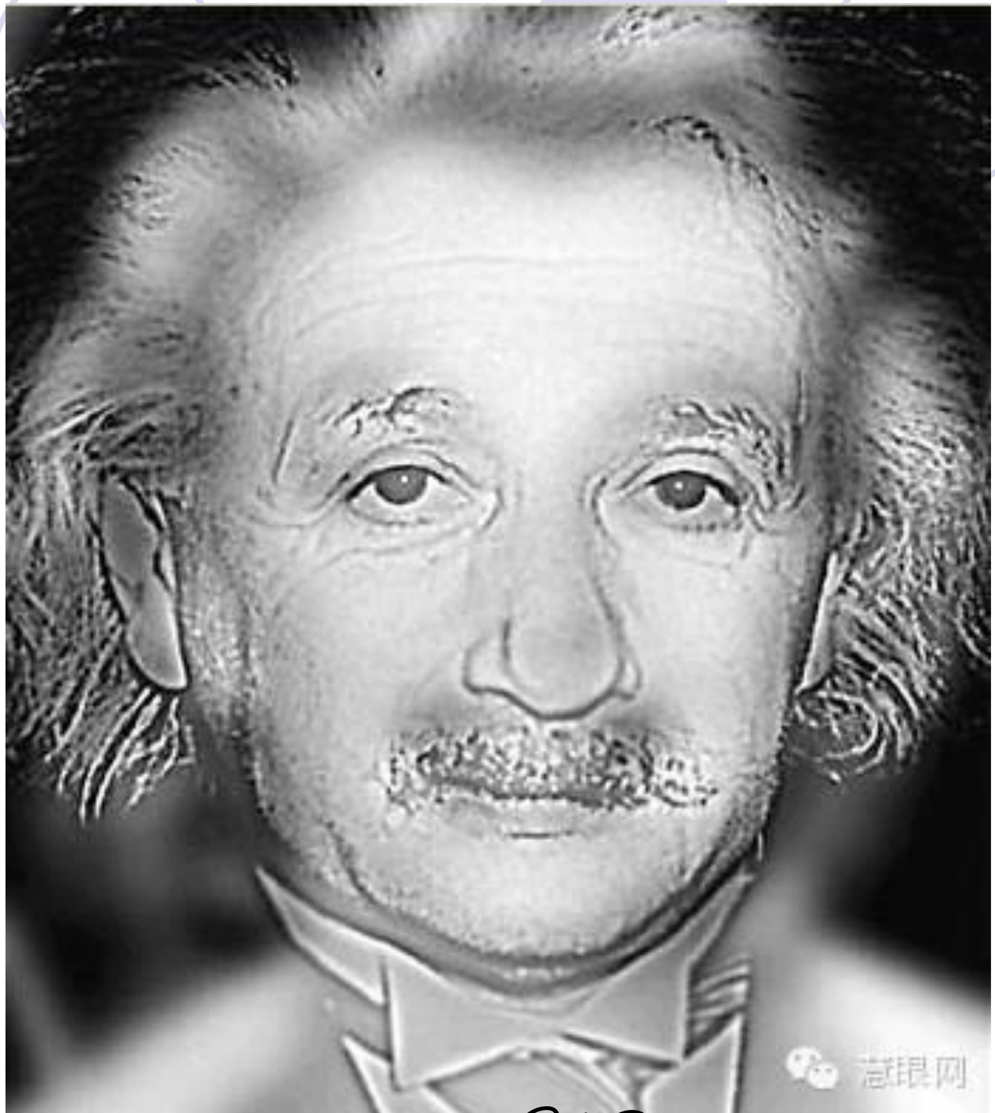
在某些离散的时间点上提取连续时间信号值的过程称为采样/抽样(Sampling)。

在一定条件下，一个连续信号完全可用等时间间隔点上的离散样本值来表示。这些样本值包含了该连续信号的全部信息，利用这些样本值可以恢复原信号----抽样定理

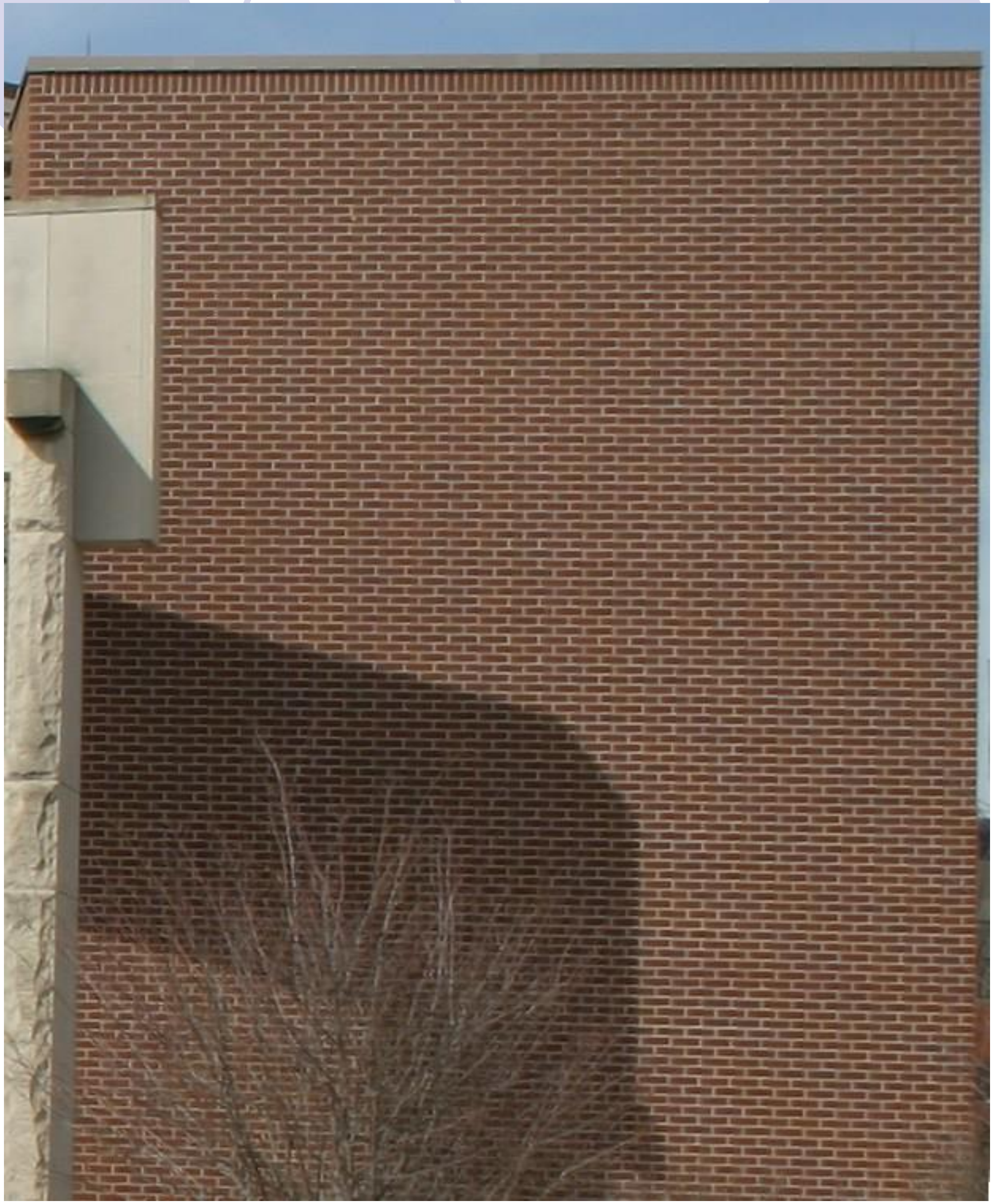
连续信号　　离散信号

样本信号
X(nTs)或x(n)

为其互为转换提供了理论依据。

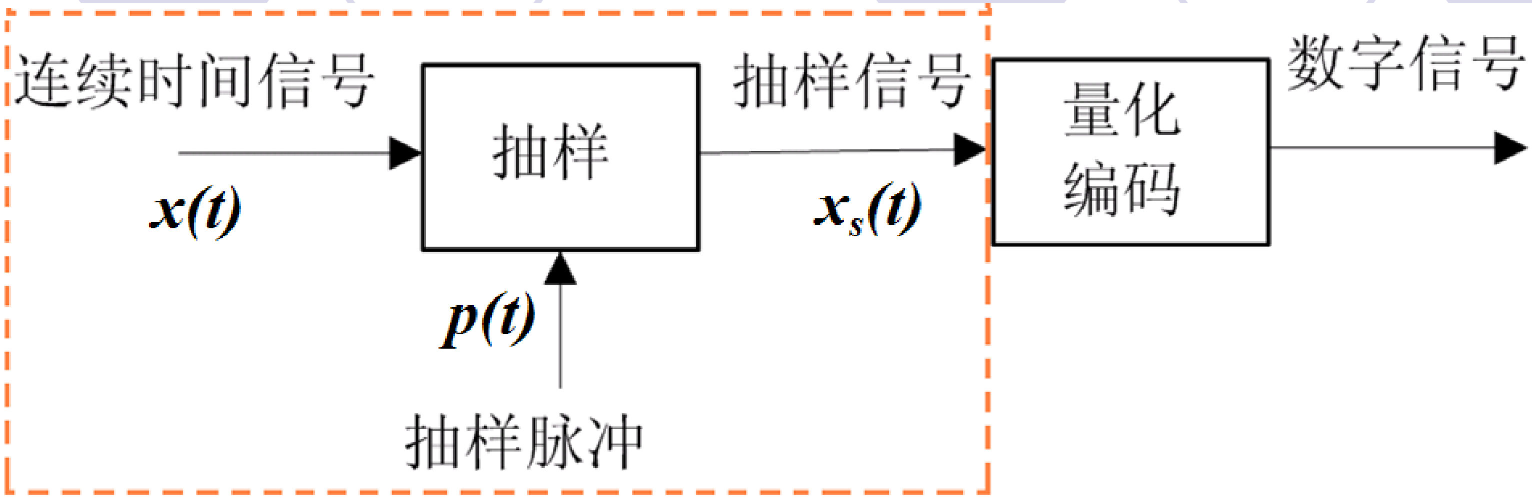


Einstein or Monroe

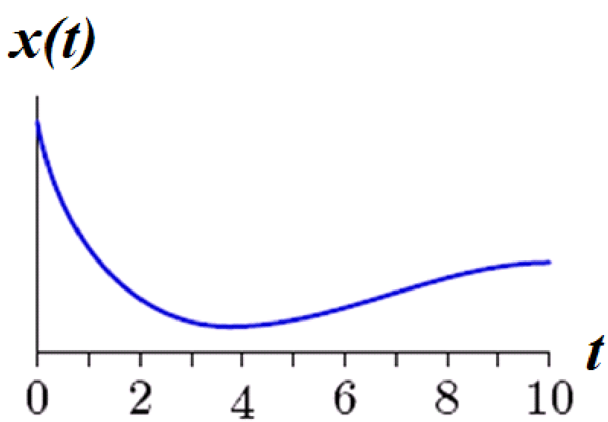


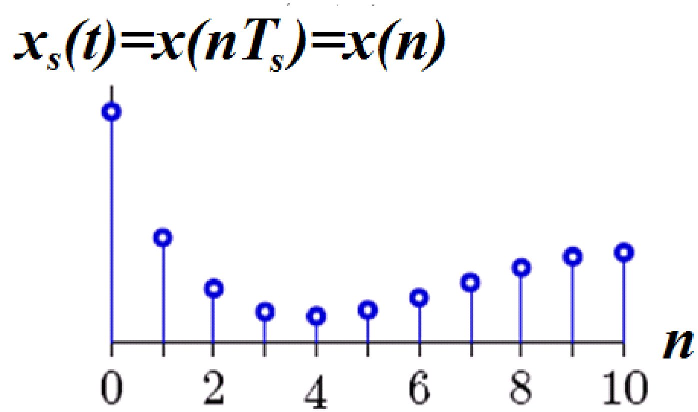
抽样实例

连续时间信号 $\xrightarrow{\text{抽样}}$ **离散时间信号**



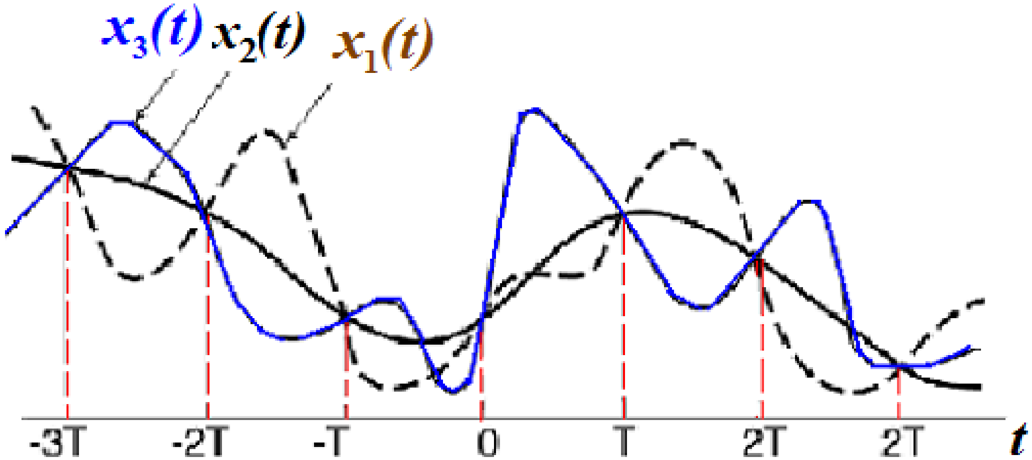
在某些离散的时间点上提取连续时间信号值的过程称为采样/抽样(Sampling)。





问题1：抽样后离散信号的频谱是什么样的？它与连续时间信号的频谱有什么关系？

问题2：对于一个给定的信号，选择多大的抽样间隔或抽样频率合适？

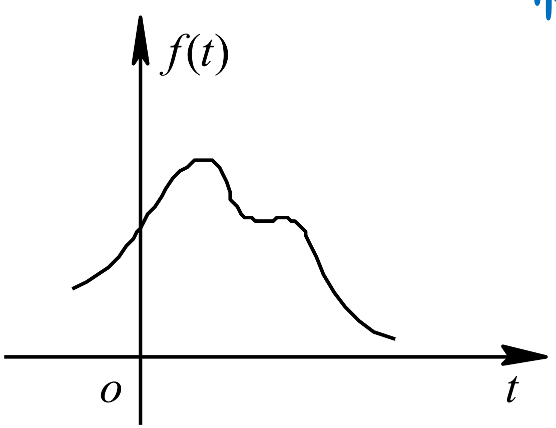


问题3：重建问题

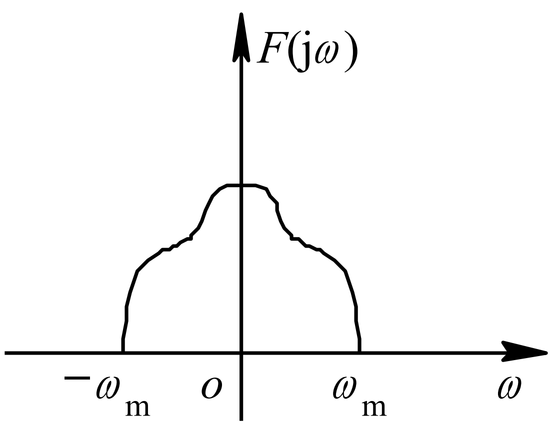
抽样定理

连续时间信号$f(t)$的时域抽样定理可表述为：在频率f_mHz以上没有频谱分量的带限信号，由它在均匀间隔上的抽样值惟一地决定，只要其抽样间隔T_s小于$\frac{1}{2f_m}(s)$或抽样频率f_s大于信号最高频率f_m的2倍。

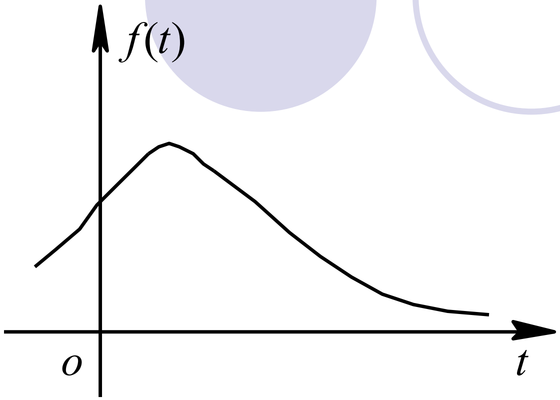
带限信号及其频谱

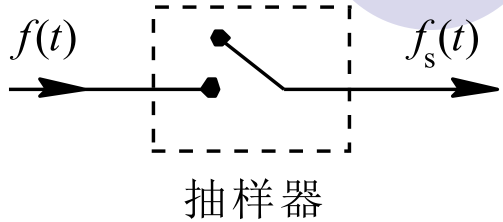


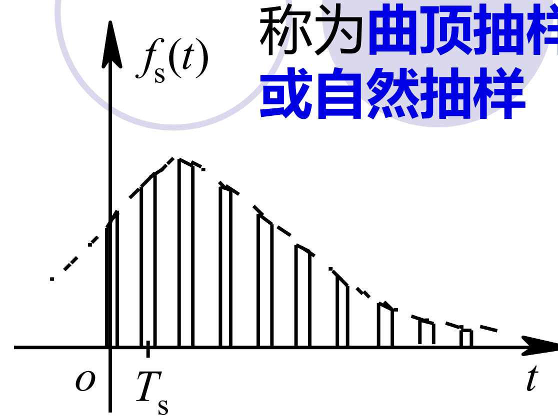
$$f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$$



1 信号的抽样



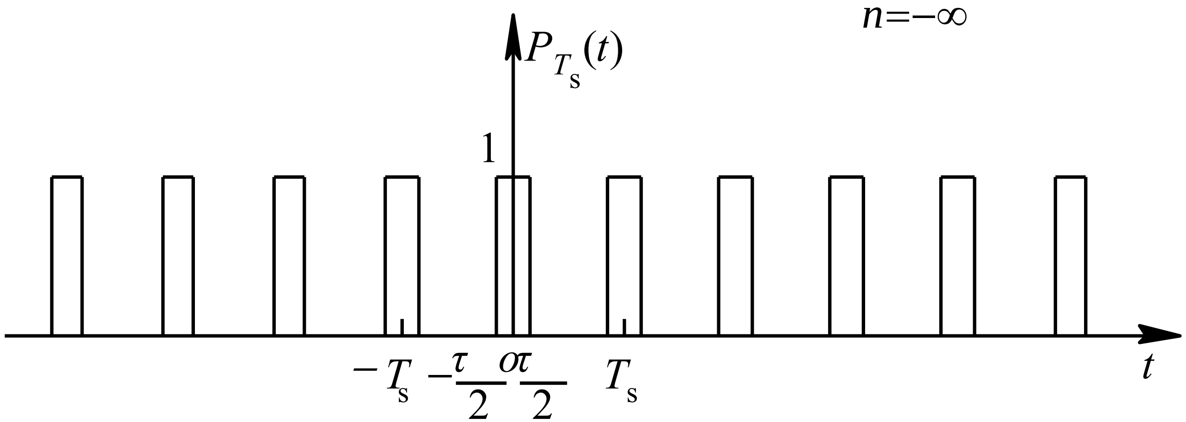




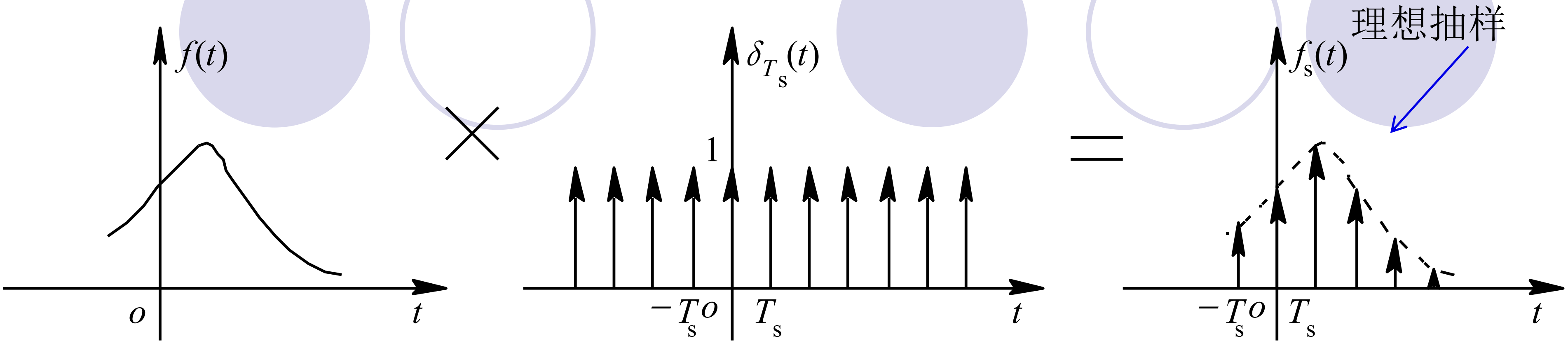
此种抽样方式称为**曲顶抽样或自然抽样**

抽样原理从理论上分析可表述为$f(t)$与抽样脉冲序列$P_{T_s}(t)$的乘积，即 $f_s(t) = f(t) \cdot P_{T_s}(t)$ 式中的抽样脉冲序列P_{T_s}如下图所示。可表示为：

$$P_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_r(t - nT_s)$$



抽样矩形脉冲序列变成冲激脉冲序列时，此种抽样方式称为理想抽样



理想抽样的过程及其有关波形

样本信号或抽样信号：

$$f_s(t) = f(t)\cdot\delta_{T_s}(t) = f(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t-nT_s)$$

讨论学习：理想抽样信号的时域表达和频域表达式，及推导。

T_s: **抽样间隔或抽样周期；** $\Omega=\dfrac{2\pi}{T_s}$: **抽样角频率**

或用 ω_s 表示

2. 样本信号的频谱

设信号$f(t)$为带限信号，其最高频率分量为f_m，最高角频率为$\omega_m=2\pi f_m$，即当$|\omega|>\omega_m$时，$F(\omega)=0$。

$$f_s(t)=f(t)\cdot\delta_{T_s}(t)=f(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT_s)\delta(t-nT_s)$$

$$\delta_{T_s}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(t-nT_s\right)\leftrightarrow\Omega\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-n\Omega\right)=\Omega\delta_{\Omega}(\omega)$$

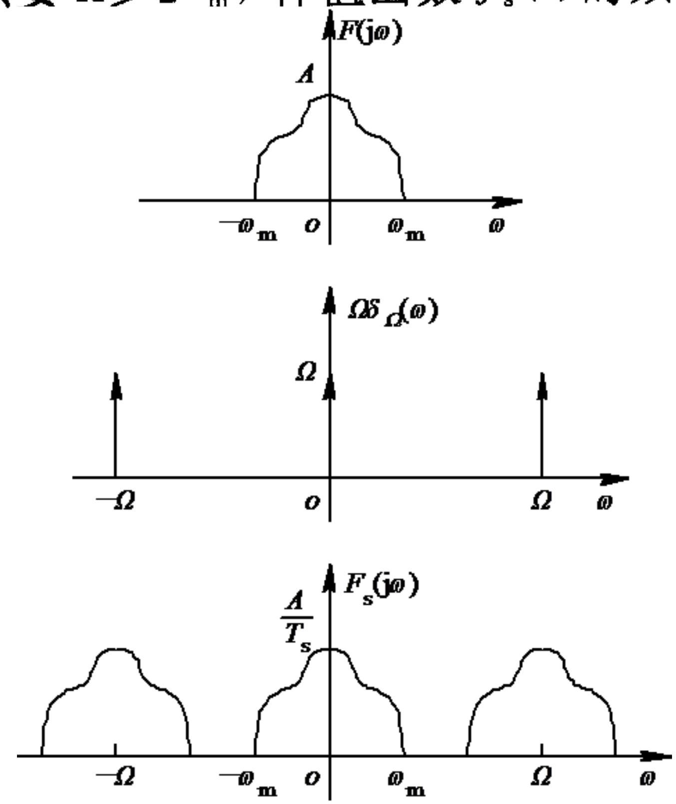
$$T_s=\frac{2\pi}{\Omega}$$

由于 $f_s(t)=f(t)\cdot\delta_{T_s}(t)$，据傅里叶变换的频域卷积性质，有

$$\mathscr{F}[f_s(t)]=\frac{1}{2\pi}\left[F(\mathrm{j}\omega)*\Omega\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\Omega)\right]=\frac{\Omega}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[F(\mathrm{j}\omega)*\delta(\omega-n\Omega)\right]$$

$$=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(\mathrm{j}(\omega-n\Omega))$$

样值函数 $f_s(t)$ 频谱示于下图。 由图可知只要 $\Omega\geqslant 2\omega_m$，样值函数 $f_s(t)$的频谱 $F_s(\mathrm{j}\omega)$就是周期性地重复着 $F(\mathrm{j}\omega)$，而不会发生重叠。

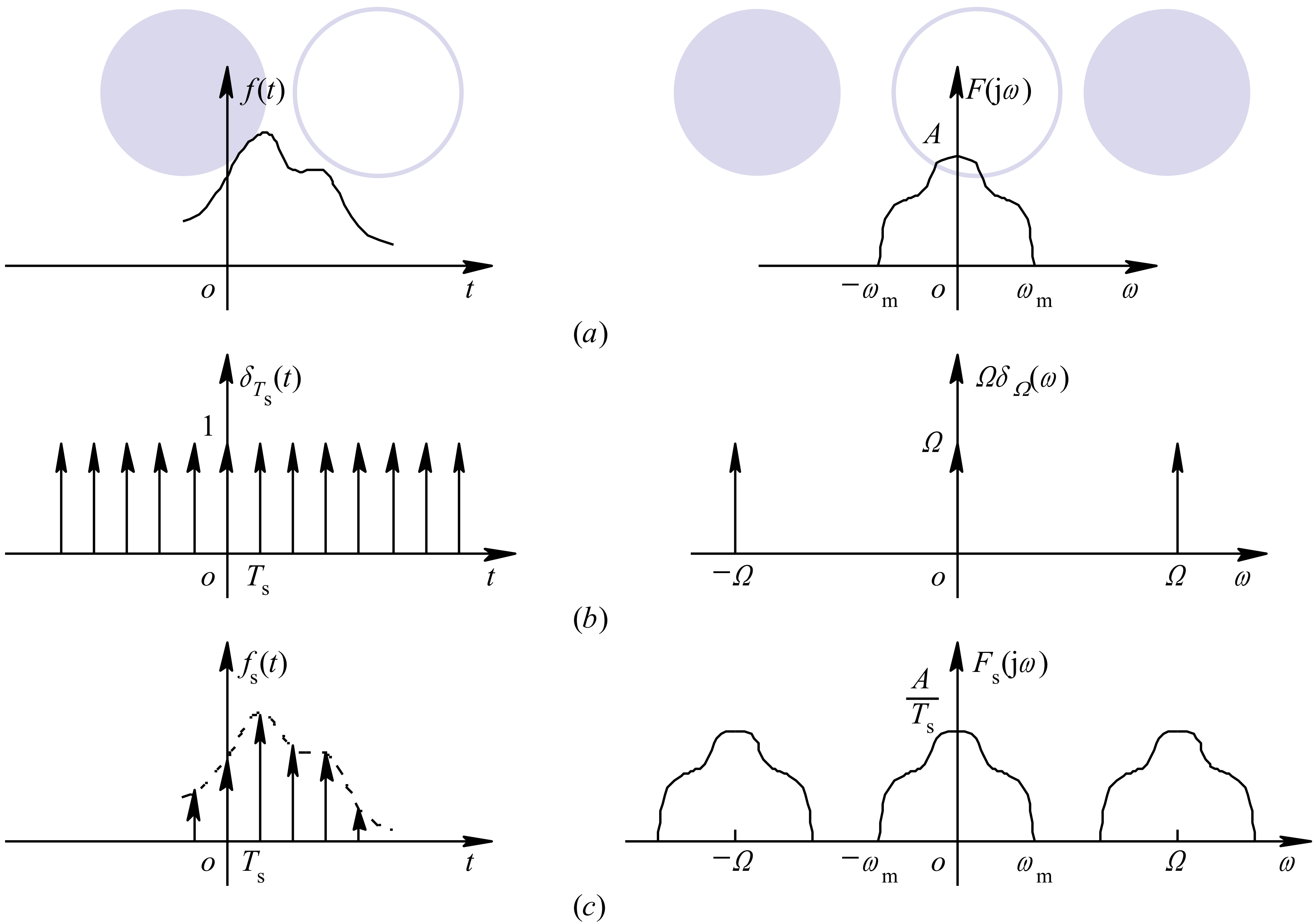


由于要求 $\Omega\geqslant 2\omega_m$，即$\frac{2\pi}{T_s}\geqslant 4\pi f_m$，可得等效条件为

$$T_s\leqslant\frac{1}{2f_m}$$

我们将 $T_s=\frac{1}{2f_m}$称为**奈奎斯特间隔**。

奈奎斯特(Nyqusit)，美国物理学家，1889年出生在瑞典。1976年在德克萨斯逝世。



f(t)
o
t
F(jω)
A
−ωm
o
ωm
ω
(a)
δTs(t)
1
o
Ts
t
Ωδ_Ω(ω)
Ω
−Ω
o
Ω
ω
(b)
fs(t)
o
Ts
t
Fs(jω)
A/Ts
−Ω
−ωm
o
ωm
Ω
ω
(c)

信号的抽样及其频谱

3. 信号的重建（恢复）

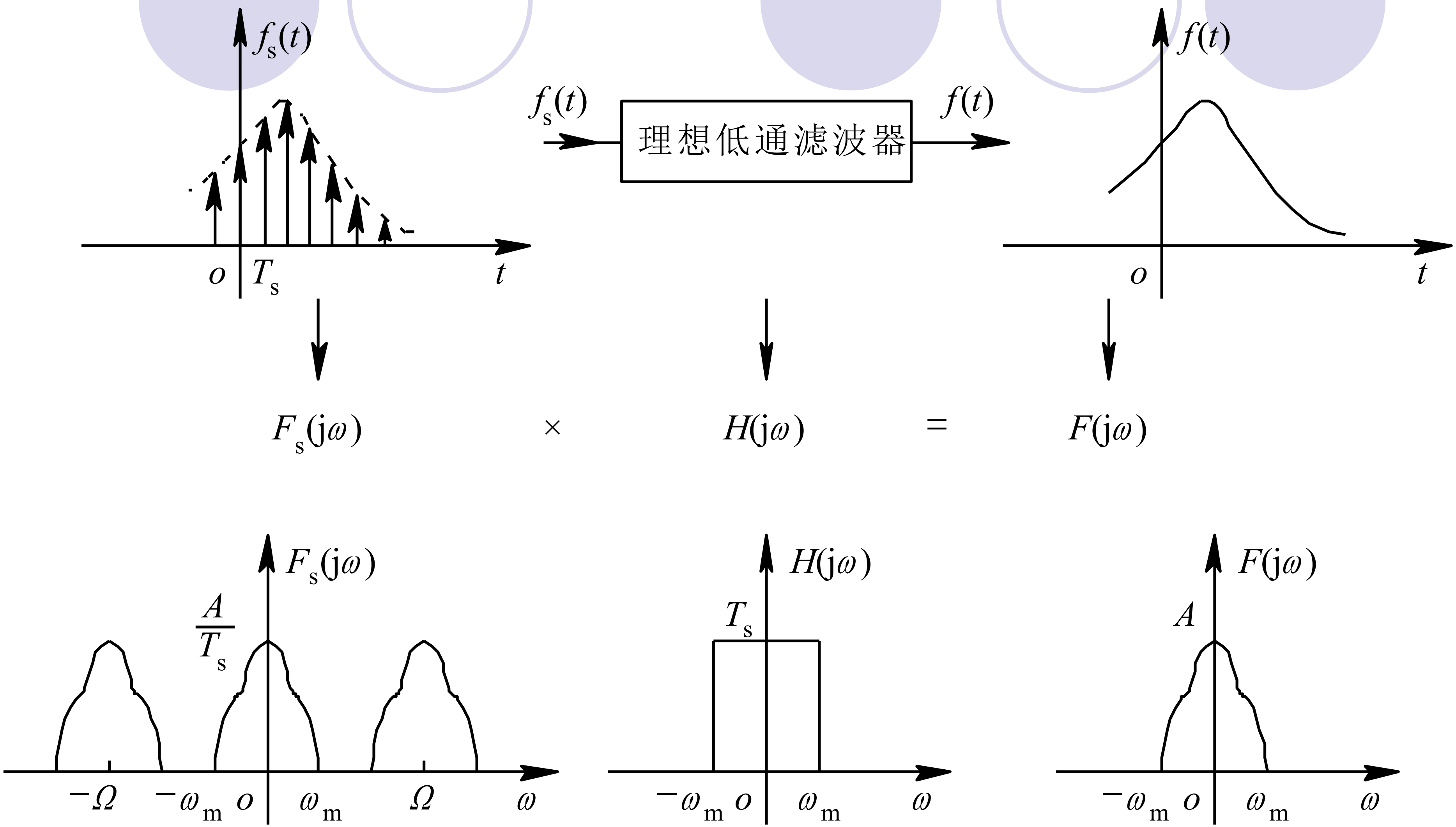
讨论学习：抽样信号重建的频域与时域的推导方法

由上图(c)所示样值函数$f_s(t)$及其频谱$F_s(\omega)$图形可知，样值函数$f_s(t)$经过一个截止频率为ω_m的理想低通滤波器，就可从$F_s(\omega)$中取出$F(\omega)$，从时域来说，这样就恢复了连续时间信号$f(t)$。即

$$F(\omega) = F_s(\omega) \cdot H(\omega)$$

式中，$H(\omega)$为理想低通滤波器的频率特性。$H(\omega)$的特性为

$$H(\omega) = \begin{cases} T_s & |\omega| \le \omega_m \\ 0 & |\omega| > \omega_m \end{cases}$$ 或 $$H(\omega) = T_s G_{2\omega_m}(\omega)$$


fs(t)
o
Ts
t
fs(t)
理想低通滤波器
f(t)
f(t)
o
t
Fs(jω)
×
H(jω)
=
F(jω)
Fs(jω)
A
Ts
−Ω
−ωm
o
ωm
Ω
ω
H(jω)
Ts
−ωm
o
ωm
ω
F(jω)
A
−ωm
o
ωm
ω

$f(t)$的恢复原理

由式知: $F(j\omega)=F_s(j\omega)\cdot H(j\omega)$

据傅里叶变换的时域卷积性质， 得

$$f(t)=f_s(t)*h(t)$$

式中，

$$f_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT_s)\delta(t-nT_s)$$

$$h(t)=F^{-1}[H(j\omega)]$$

应用傅里叶变换的对称性，得到

$$h(t)=\frac{T_s\omega_m}{\pi}Sa(\omega_m t)$$

$$f(t)=\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t-nT_s)\right]*\frac{T_s\omega_m}{\pi}Sa(\omega_m t)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{T_s\omega_m}{\pi}f(nT_s)\cdot[\delta(t-nT_s)*Sa(\omega_m t)]$$

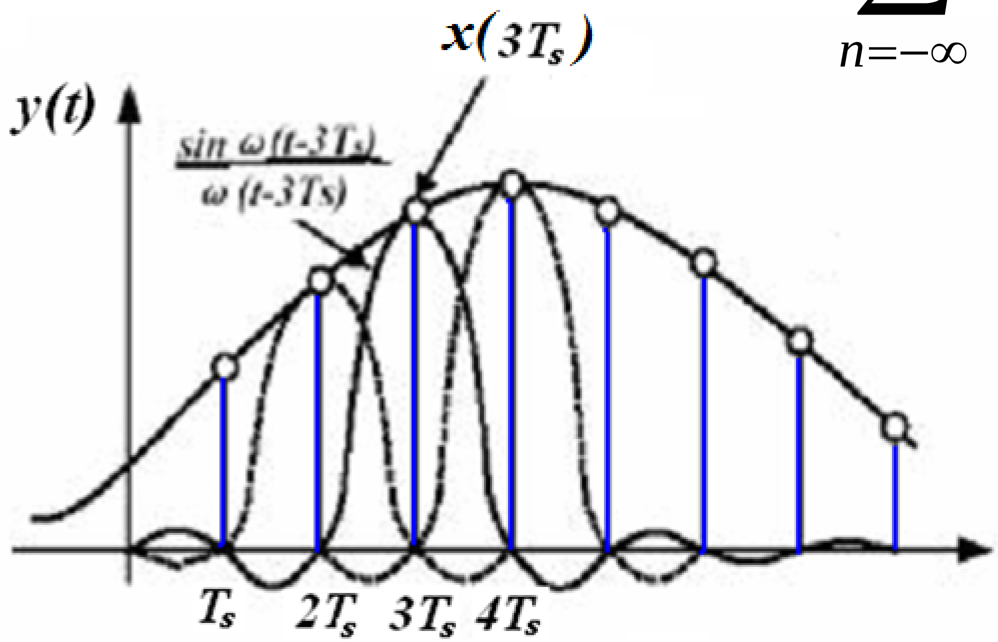
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{T_s\omega_m}{\pi}f(nT_s)Sa[\omega_m(t-nT_s)]$$

推导方法

当抽样间隔 $T_s=\dfrac{1}{2f_m}$ **时，上式可写为**

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT_s)Sa(\omega_m(t-nT_s))$$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)Sa(\omega_m(t-nT_s))$$



连续信号可以展成Sa函数的无穷级数，级数的系数等于抽样值 $f(nT_s)$

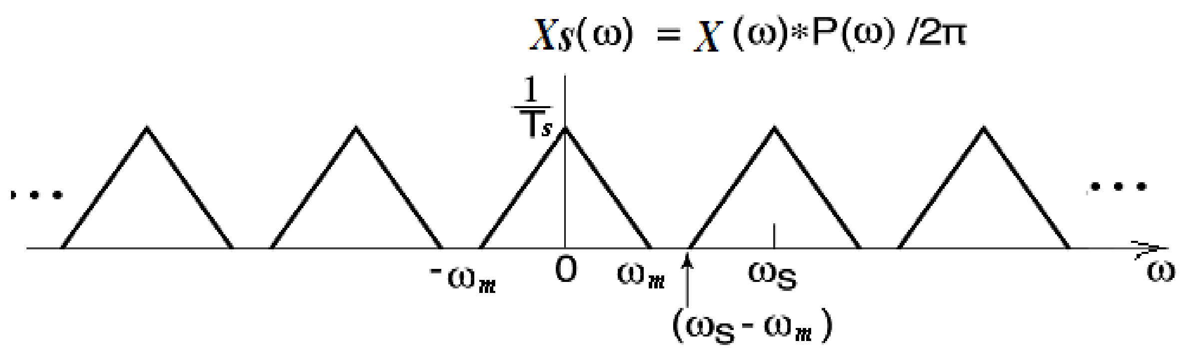
- 或:原模拟信号f(t) 的每个抽样值上画一个峰值为 $f(nT_s)$ 的Sa函数波形，合成信号就是原信号。

总结：

1）信号是带限信号，即当$|\omega| > \omega_m$时，$F(j\omega)=0$

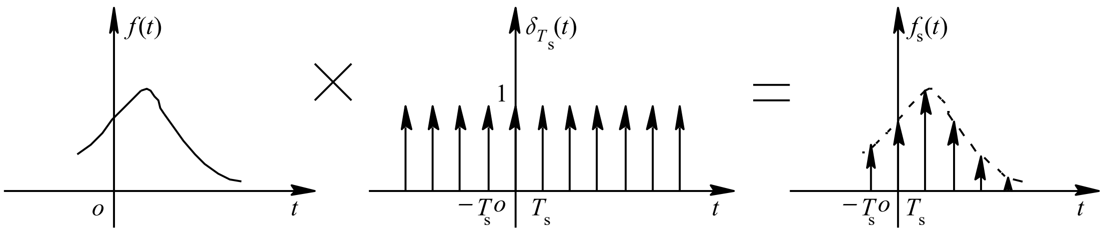
2)采样频率$\omega_s > 2\omega_m$，或$T_s < \dfrac{\pi}{\omega_m}$，则可由样本信号$x_s(t)$来唯一地表示原$x(t)$。

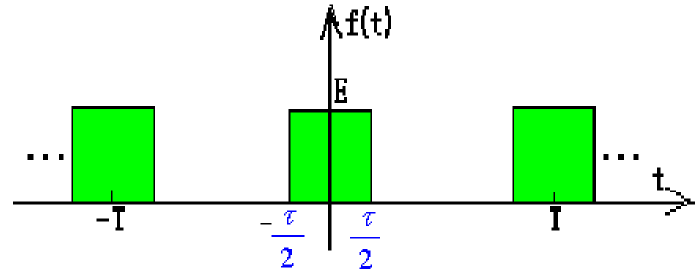
3)将$x_s(t)$通过一截止频率$\omega_m < \omega_c < \omega_s - \omega_m$的理想低通滤波器则可由抽样信号恢复原信号$x(t)$.

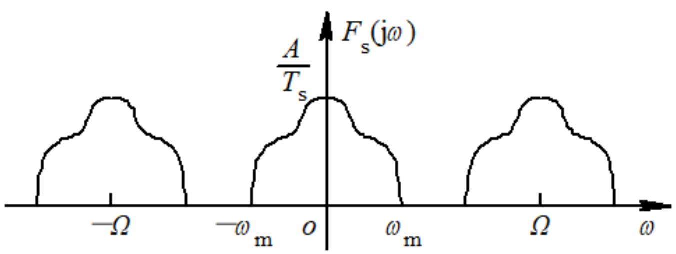


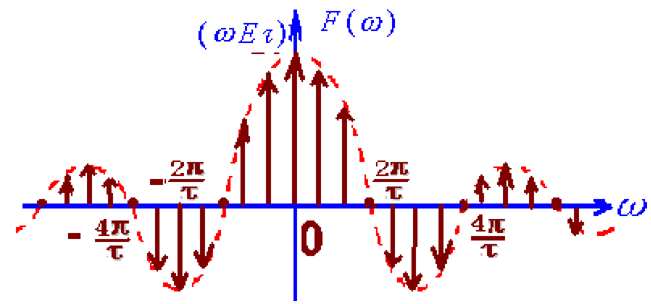
4） 过采样：降低噪声
欠采样：提高测试设备的带宽

连续信号的理想抽样信号的频谱与周期脉冲信号的频谱









周期矩形脉冲的周期T增大时，关于其频谱的变化情况，下列说法错误的是：

A. 频谱的频带宽度将减小

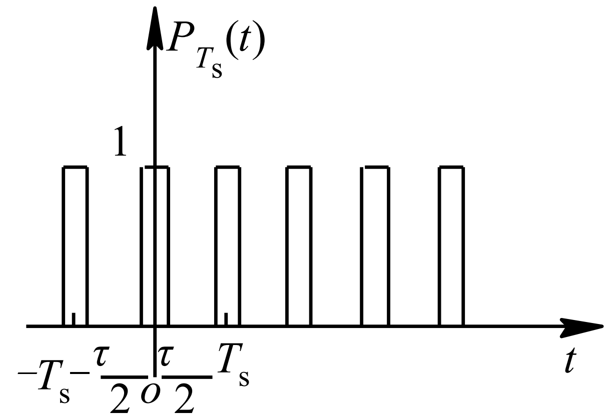
B. 频谱的幅度将减小

C. 频谱的疏密程度将变密

D. 频谱相邻两根谱线的间隔将变小

脉冲抽样（自然抽样）（补充）

$$f_s(t) = f(t)\cdot P_{T_s}(t)$$



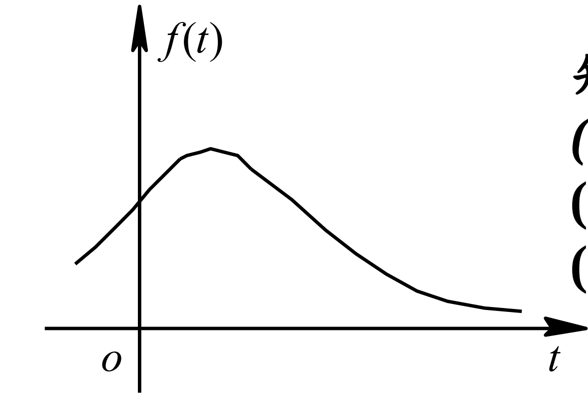
$$P_{T_s}(t) \leftrightarrow \frac{2\pi\tau}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} Sa\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)\delta(\omega - n\Omega)$$

结合P126 式3-51和p148 式3-104得到

由于$f_s(t)=f(t)\cdot P_{T_s}(t)$，同样，根据傅里叶变换的频域卷积性质，可得

$$F[f_s(t)] = \frac{1}{2\pi}\left[F(j\omega) * \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2\pi\tau}{T_S} Sa\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right)\delta(\omega - n\Omega)\right]$$

$$= \frac{\tau}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} Sa\left(\frac{n\Omega\tau}{2}\right) F[j(\omega - n\Omega)]$$

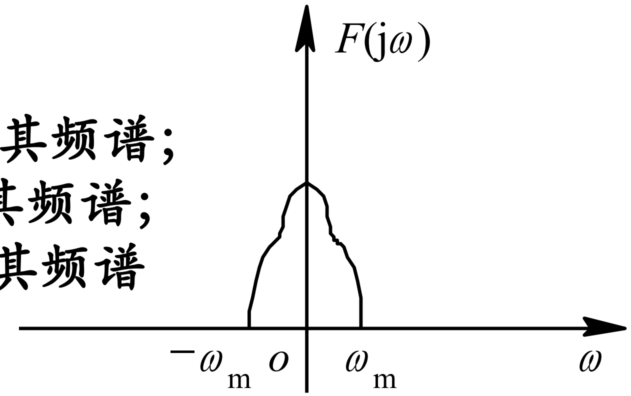


矩形脉冲抽样

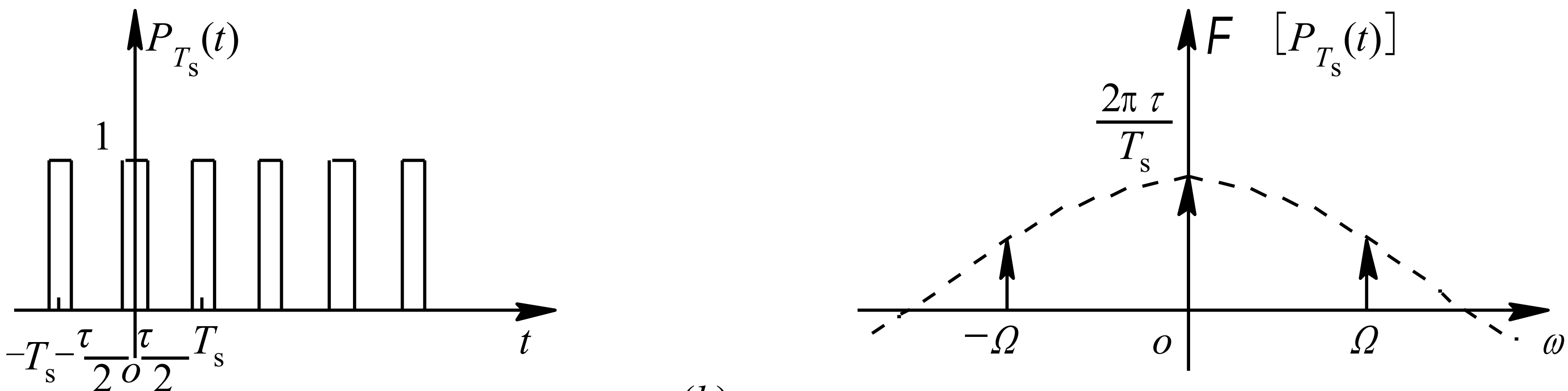
(a) f(t)的波形及其频谱;

(b) P_{Ts}的波形及其频谱;

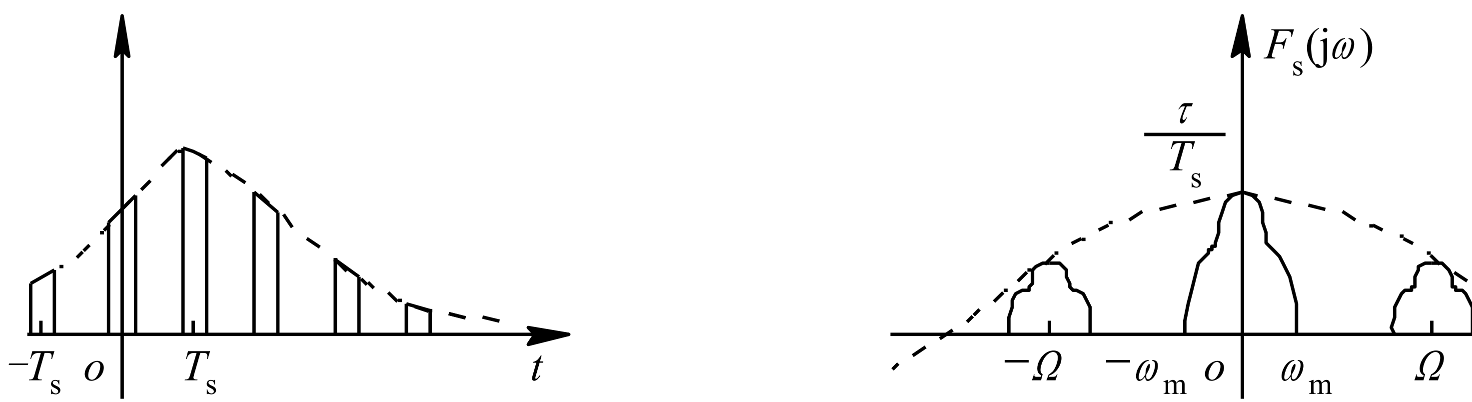
(c) $f_s(t)$的波形及其频谱



(a)



(b)



(c)