Fundamentals of Information Science

Part 4 information transmission II

—— Mathematical Basis

Shandong University
2025 Spring

Mathematical Basis of Information Transmission

§16.1 确知信号与随机过程

§ 16.1.1 确知信号

■ 何谓确知信号?

—— 在定义域内的任意时刻都有确定的函数值。否则，为随机信号或不确知信号。

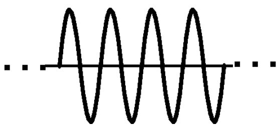
■ 确知信号分类

—— 根据信号的不同特征，可将信号进行不同的分类。

1. 按照是否具有周期重复性区分

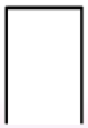
◆ **周期信号：** 每隔一定的时间间隔按相同规律重复 且 无始无终。

$$\boxed{s(t) = s(t+T_0), \qquad -\infty < t < +\infty}$$



满足上式的最小T_0 （$T_0 > 0$） 称为信号的基波周期。

◆ **非周期信号：**



2. 按照信号能量是否有限区分

能量 $$E=\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt$$

功率 $$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s^2(t)dt$$

- **能量信号：** 若 $0<E<\infty$ 和 $P\to 0$ ，则称**s(t)**为**能量**(有限)**信号**。

  例如，单个矩形脉冲。

- **功率信号：** 若 $0<P<\infty$ 和 $E\to\infty$ ，则称**s(t)**为**功率**(有限)**信号**。

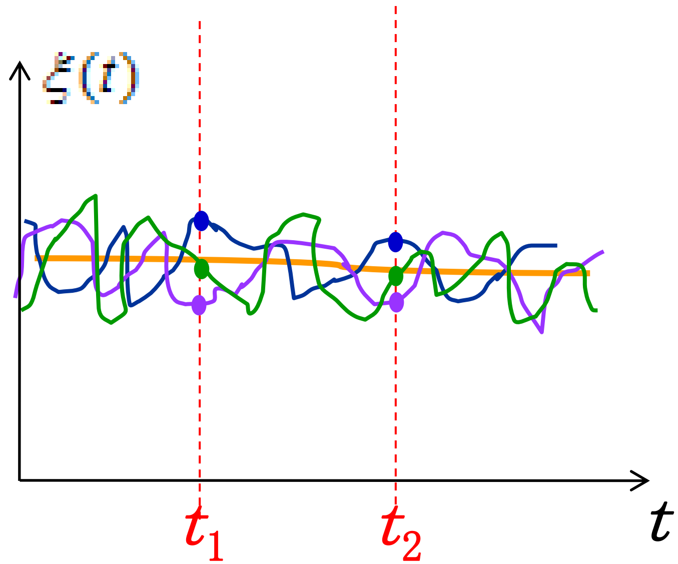
  例如：直流信号、周期信号和随机信号。

--- 何谓随机过程?

■ **定义:**

① 所有样本函数 $\xi_i(t)$ 的集合

② 随机变量 $\xi(t_i)$ 的集合



■ **属性:**

兼有
$\begin{cases}\text{随机变量}\\ \text{时间函数}\end{cases}$
的特点

■ **特性描述:**

$\begin{cases}\text{分布函数}\\ \text{数字特征}\end{cases}$

§ 16.1.3 随机过程的分布函数

- **一维分布函数** ---描述孤立时刻的统计特性

$$F_1(x_1,\ t_1) = P[\xi(t_1) \le x_1]$$

$$\frac{\partial F_1(x_1,\ t_1)}{\partial x_1} = f_1(x_1,\ t_1)$$ 一维概率密度函数

- **二维分布函数**

$$F_2(x_1,\ x_2;\ t_1,\ t_2) = P\left\{ \xi(t_1) \le x_1,\ \ \xi(t_2) \le x_2 \right\}$$

$$\frac{\partial^2 F_2(x_1,\ x_2;\ t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = f_2(x_1,\ x_2;\ t_1,\ t_2)$$

二维概率密度函数

n 维分布函数

$$F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)$$
$$=P\{\ \xi(t_1)\le x_1,\xi(t_2)\le x_2,\cdots,\xi(t_n)\le x_n\}$$

$$f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)$$
$$=\frac{\partial^n F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)}{\partial x_1\cdot\partial x_2\cdots\cdot\partial x_n}$$

n 维概率密度函数

维数 n 越大，对随机过程统计特性的描述就越充分！

§ 16.1.4 随机过程的数字特征 ---描述随机过程的主要特性

■ **均值** ---摆动中心

$$E\left[\xi(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x,t)dx = a(t) \quad \text{--- } t \text{ 的确定函数}$$

■ **方差** ---偏离程度

$$D[\xi(t)] = E\left\{ [\xi(t) - a(t)]^2 \right\}$$

$$= E[\xi^2(t)] - [a(t)]^2 = \sigma^2(t)$$

当 $a(t)=0$ **时:**

$$\boxed{\sigma^2(t) = E[\xi^2(t)]}$$

■ **自相关函数** ---同一过程的关联程度

$$R(t_1,t_2)=E[\xi(t_1)\,\xi(t_2)]$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2$$

令 $\tau=t_2-t_1$，则有：

$$R(t_1,t_2)=R(t_1,t_1+\tau)$$

■ **互相关函数** ---两个过程的关联程度

$$R_{\xi\eta}(t_1,t_2)=E[\xi(t_1)\eta(t_2)]$$

§16.2

平稳随机过程

§ 16.2.1 定义

■ 狭义平稳

- ◆ 随机过程的统计特性与时间起点无关。
  - ➢ 一维分布则与时间 t 无关： $f_1(x_1,t_1)=f_1(x_1)$
  - ➢ 二维分布只与间隔 τ 有关： $f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)=f_2(x_1,x_2;\tau)$

注意： $$\boxed{\text{狭义平稳} \underset{\text{未必}}{\overset{\text{必}}{\rightleftarrows}} \text{广义平稳}}$$

■ 广义平稳

- ◆ 均值与时间 t 无关：
- ◆ 相关函数仅与 τ 有关：

$$a(t)=a$$
$$R(t_1,t_1+\tau)=R(\tau)$$

§ 16.2.2 各态历经性（遍历性）

设x(t) 是平稳过程的任一个实现，它的时间平均值为：

$$\overline{a} = \overline{x(t)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt$$

$$\overline{R(\tau)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau)dt$$

遍历

$$a = \overline{a}$$

$$R(\tau) = \overline{R(\tau)}$$

意义：

统计平均值=时间平均值

替代

使计算大为简化

注意：

$$\text{遍历过程} \underset{\text{未必}}{\overset{\text{必是}}{\rightleftarrows}} \text{平稳过程}$$

含义： 任一样本经历了平稳过程的所有可能状态。

§ 16.2.3 平稳过程的自相关函数

■ **重要性质:**

$$\boxed{R(\tau)=E[(\xi(t)\xi(t+\tau)]}$$

（1） $R(0)=E[\xi^2(t)]=S$ ---平均功率

（2） $R(\infty)=E^2[\xi(t)]=a^2$ ---直流功率

（3） $R(0)-R(\infty)=\sigma^2$ ---交流功率（方差）

（4） $R(\tau)=R(-\tau)$ **---偶函数**

（5） $\left|R(\tau)\right|\le R(0)$ **---上 界**

$$R(\infty)=\lim_{\tau\to\infty}E[\xi(t)\xi(t+\tau)]=E[\xi(t)]E[\xi(t+\tau)]=E^2[\xi(t)]$$

$$E\{[\xi(t)\pm\xi(t+\tau)]^2\}\ge 0 \quad\Rightarrow\quad 2R(0)\pm 2R(\tau)\ge 0$$

§ 16.2.4 平稳过程的功率谱密度（PSD）

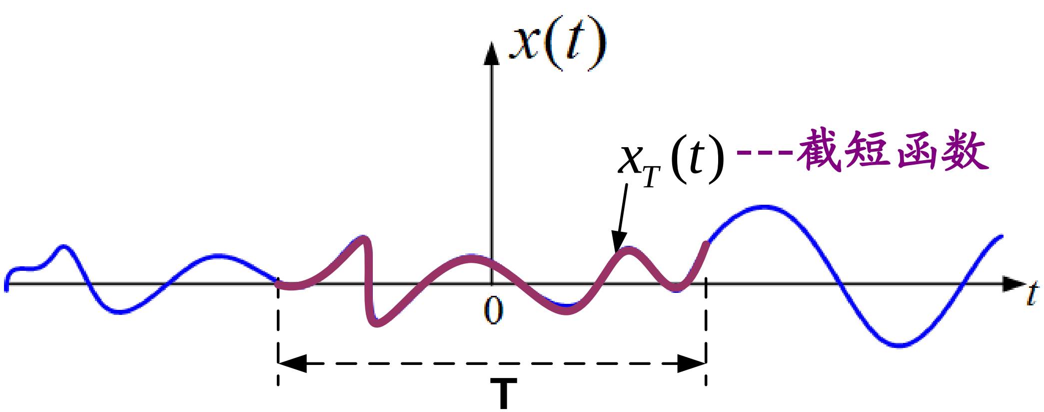
- 样本的功率谱：

$$P_x(f)=\lim_{T\to\infty}\frac{\left|X_T(f)\right|^2}{T}$$

- 过程的功率谱

统计平均

$$P_\xi(f)=E\left[P_x(f)\right]=\lim_{T\to\infty}\frac{E\left|X_T(f)\right|^2}{T}$$



平稳过程的功率谱密度与自相关函数是一对傅里叶变换:

$$P_\xi(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)\,e^{-j\omega\tau}\,d\tau$$

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}P_\xi(\omega)\,e^{j\omega\tau}\,d\omega$$

维纳-辛钦定理

$$R(\tau)\Leftrightarrow P_\xi(\omega)$$

$$P_\xi(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)\,e^{-j2\pi f\tau}\,d\tau$$

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}P_\xi(f)\,e^{j2\pi f\tau}\,df$$

当$\tau=0$时，有

$$R(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}P_\xi(\omega)d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}P_\xi(f)df$$

PSD 性质:

- 遍历过程任一样本的PSD = 过程的PSD;
- 非负性: $P_\xi(\omega)\geq 0$
- 偶函数: $P_\xi(-\omega)=P_\xi(\omega)$

例

设相位随机的正弦波为 $\xi(t) = A\cos(\omega_c t + \theta)$

其中，**A**和 ω_c均为常数；$\boldsymbol{\theta}$是在**(0,2π)**内均匀分布的随机变量。试讨论$\xi(t)$是否具有各态历经性。

解题思路：

第**1**步：判断$\xi(t)$是否平稳，即求其**统计平均值**

若均值为常数，且自相关函数只与时间间隔τ有关，则$\xi(t)$是广义平稳的。

第**2**步：求$\xi(t)$的**时间平均值**

第**3**步：比较 统计平均值 和 时间平均值

若两者相等: $$\begin{aligned} a &= \overline{a} \\ R(\tau) &= \overline{R(\tau)} \end{aligned}$$ 则各态历经。

§16.3

高斯随机过程

§ 16.3.1 定义

若随机过程 $\xi(t)$ 的任意n维（n=1,2,...）分布都服从正态分布，则称它为高斯过程。

§ 16.3.2 重要性质

（1）若广义平稳，则狭义平稳；

（2）若互不相关，则统计独立；

（3）若干个高斯过程的代数和仍是高斯型；

（4）高斯过程→线性变换→高斯过程。

§ 16.3.3 高斯随机变量

■ 一维概率密度函数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

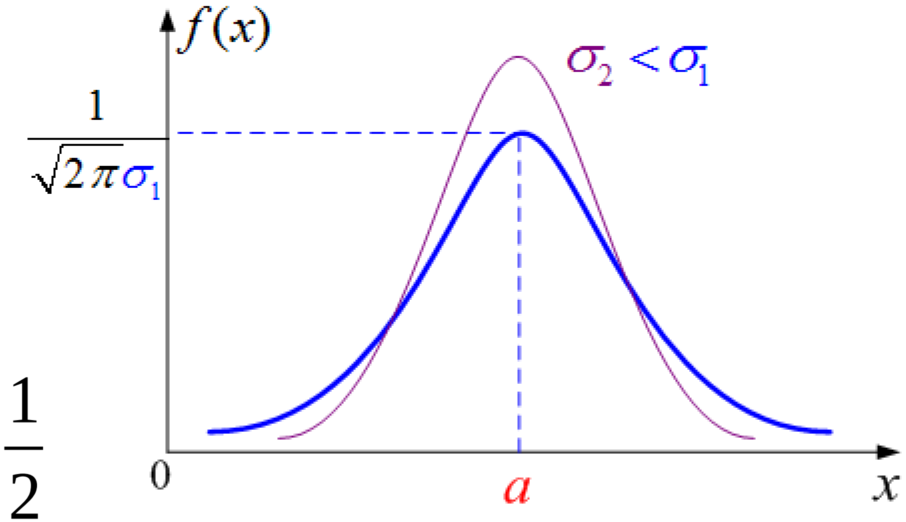
记为$N(a，\sigma^2)$

a---分布中心

σ---集中程度

性质：

- 关于直线 x=a 对称
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$
- $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx=\int_{a}^{\infty} f(x)dx=\frac{1}{2}$



正态分布函数

$$F(b)=P(x\le b)=\int_{-\infty}^{b}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]dx$$

- **误差函数**

$$erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

—— 自变量的 **递增** 函数

$$erf(0)=0$$

$$erf(\infty)=1$$

- **补误差函数**

$$erfc(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty} e^{-t^2}dt$$

—— 自变量的 **递减** 函数

$$erfc(0)=1$$

$$erfc(\infty)=0$$

$$\boxed{erfc(x) = 1 - erf(x)}$$

$$erf(-x) = -erf(x)$$

$$erfc(-x) = 2 - erfc(x)$$

利用误差函数，可将**F(x)**表示为：

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} erf\left(\dfrac{x-a}{\sqrt{2}\sigma}\right), & x \geq a \\ 1 - \dfrac{1}{2} erfc\left(\dfrac{x-a}{\sqrt{2}\sigma}\right), & x < a \end{cases}$$

意义：

误差函数的简明特性有助于分析通信系统的抗噪声性能。

§16.4

平稳随机过程通过线性系统

设

$$\xi_i(t) \longrightarrow \boxed{\text{线性系统}} \longrightarrow \xi_o(t)$$

$$h(t) \Leftrightarrow H(\omega)$$

则

$$\boxed{\xi_0(t) = \xi_i(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_i(\tau) h(t-\tau) d\tau}$$

若输入有界且系统是物理可实现的，则有

$$\boxed{\xi_0(t) = \int_{-\infty}^{t} \xi_i(\tau) h(t-\tau) d\tau} \quad \text{或} \quad \boxed{\xi_0(t) = \int_{0}^{\infty} h(\tau) \xi_i(t-\tau) d\tau}$$

若给定 $\xi_i(t)$ 的统计特性，则可求得 $\xi_o(t)$ 的统计特性：

$$\boxed{\xi_0(t) = \xi_i(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_i(\tau) h(t-\tau) d\tau}$$

	输入过程 $\xi_i(t)$	输出过程 $\xi_o(t)$
概率分布	平稳、高斯	平稳、高斯
均 值	$E[\xi_i(t)] = a$ 常数	$E[\xi_o(t)] = a \cdot H(0)$ 常数
功率谱密度	$P_i(f)$	$\boxed{P_o(f) = \lvert H(f)\rvert^2 P_i(f)}$
自相关函数	$R_i(\tau) \Leftrightarrow P_i(f)$	$R_o(\tau) \Leftrightarrow P_o(f)$

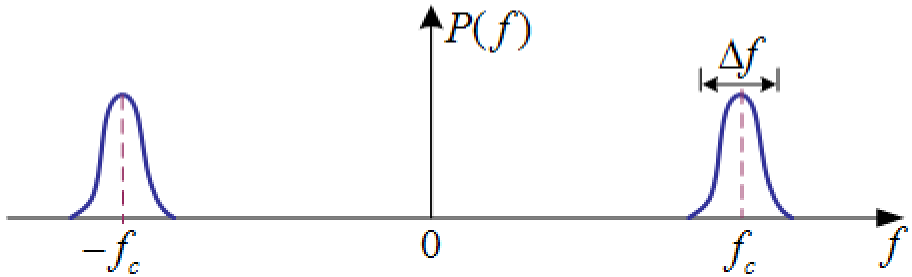
$H(0) = \int_0^{\infty} h(t)dt$ 是线性系统的直流增益； $\lvert H(f)\rvert^2$ 是功率增益

§ 16.5

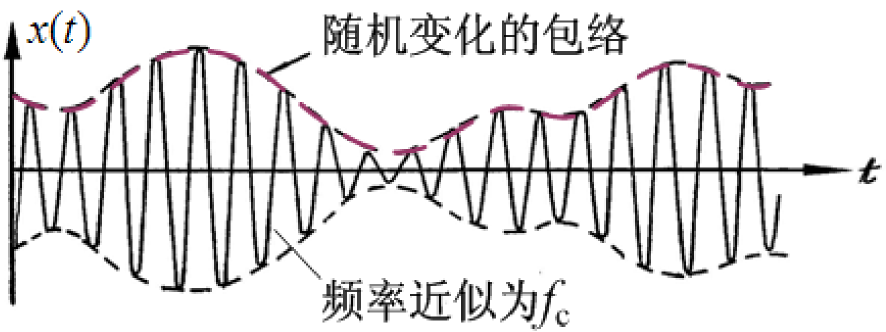
窄带随机过程

——通过窄带系统的随机信号或噪声

■ **示意图：**



（a）窄带过程的**功率谱密度**



（b）窄带过程的**样本波形**

■ **窄带条件：**

$$\begin{cases} \Delta f \ll f_c \\ f_c \gg 0 \end{cases}$$

可视为
包络缓慢变化
的正弦波

■ **表达式：**

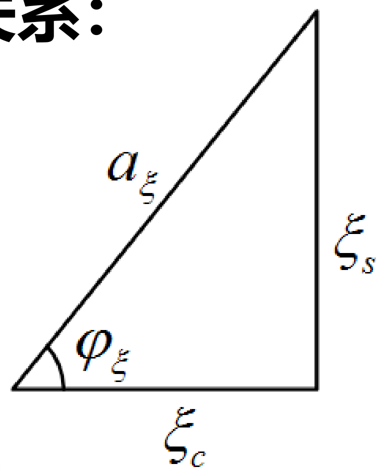
$$\xi(t) = a_\xi(t)\cos[\omega_c t + \varphi_\xi(t)], \quad a_\xi(t) \geq 0$$

随机包络　　随机相位　　—包络相位形式

$$\xi(t) = \xi_c(t)\cos\omega_c t - \xi_s(t)\sin\omega_c t$$

同相分量　　正交分量　　—同相正交形式

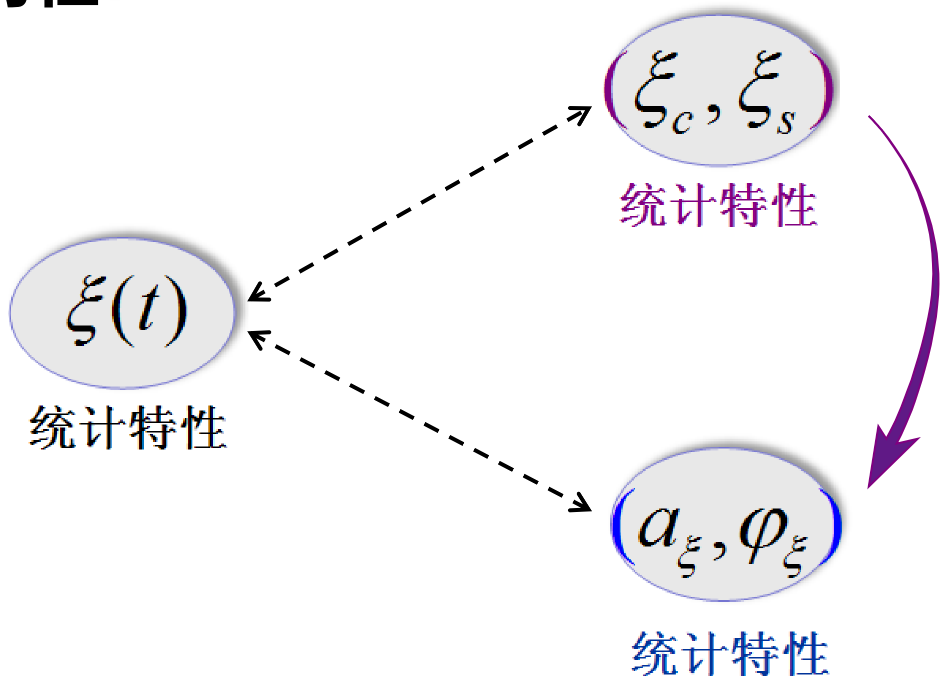
■ **两者关系：**



$$\begin{cases} \xi_c(t) = a_\xi(t)\cos\varphi_\xi(t) \\ \xi_s(t) = a_\xi(t)\sin\varphi_\xi(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_\xi(t) = \sqrt{\xi_c^{\,2}(t) + \xi_s^{\,2}(t)} \\ \varphi_\xi(t) = \arctan[\xi_s(t)/\xi_c(t)] \end{cases}$$

■ 统计特性：



若知窄带过程 $\xi(t)$ 的统计特性， 则可确定：

同相/正交，包络/相位的统计特性； 反之亦然。

§ 16.5.1 同相和正交分量的统计特性

$$\xi(t)=\xi_c(t)\cos\omega_c t-\xi_s(t)\sin\omega_c t$$

根据上式和窄带过程的统计特性，可推出：

结论1

均值 0、方差 σ_ξ^2 的平稳高斯窄带过程，它的

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\text{同相分量}\ \xi_c(t)\\ \text{正交分量}\ \xi_s(t)\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{同样也是}}\text{平稳、高斯}}$$

且 均值为0，方差也相同： $\sigma_\xi^2=\sigma_c^2=\sigma_s^2$

平均功率相同　　∵均值 0

并且 $R_{cs}(0)=0$ 互不相关

∴统计独立　　∵高斯

§ 16.5.2 包络和相位的统计特性

借助结论1，根据关系：
$$\begin{cases} \xi_c(t) = a_\xi(t)\cos\varphi_\xi(t) \\ \xi_s(t) = a_\xi(t)\sin\varphi_\xi(t) \end{cases}$$

按照推导思路：

$$\left.\begin{array}{l} \xi_c(t) \xrightarrow{\text{高斯}} \\ \xi_s(t) \xrightarrow{\text{高斯}} \end{array}\right\rangle \xrightarrow{\text{统计独立}} f(\xi_c,\xi_s) \xrightarrow{|J|} f(a_\xi,\varphi_\xi) \xrightarrow{\text{边际分布}} \left\langle\begin{array}{l} f(a_\xi) \\ f(\varphi_\xi) \end{array}\right.$$

$$f(\xi_c,\xi_s) = f(\xi_c)\cdot f(\xi_s) = \frac{1}{2\pi\sigma_\xi^2}\exp[-\frac{\xi_c^2+\xi_s^2}{2\sigma_\xi^2}]$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\xi_c}{\partial a_\xi} & \dfrac{\partial\xi_s}{\partial a_\xi} \\ \dfrac{\partial\xi_c}{\partial\varphi_\xi} & \dfrac{\partial\xi_s}{\partial\varphi_\xi} \end{vmatrix} = a_\xi$$

$$f(a_\xi,\varphi_\xi) = \frac{a_\xi}{2\pi\sigma_\xi^2}\exp\left[-\frac{a_\xi^2}{2\sigma_\xi^2}\right]$$

$$f(a_\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} f(a_\xi,\varphi_\xi)d\varphi_\xi=\int_0^{2\pi}\frac{a_\xi}{2\pi\sigma_\xi^2}\exp[-\frac{a_\xi^2}{2\sigma_\xi^2}]d\varphi_\xi$$

$$=\frac{a_\xi}{\sigma_\xi^2}\exp[-\frac{a_\xi^2}{2\sigma_\xi^2}],\quad a_\xi\ge 0$$

$$f(\varphi_\xi)=\int_0^{\infty} f(a_\xi,\varphi_\xi)da_\xi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{a_\xi}{\sigma_\xi^2}\exp(-\frac{a_\xi^2}{2\sigma_\xi^2})da_\xi$$

$$=\frac{1}{2\pi},\quad 0\le\varphi_\xi\le 2\pi$$

推出结论2：

结论2

均值0 、方差 σ_ξ^2 的平稳高斯窄带过程，它的

- 包络～瑞利分布：

$$\boxed{f(a_\xi)=\frac{a_\xi}{\sigma_\xi^2}\exp\left[-\frac{a_\xi^2}{2\sigma_\xi^2}\right]\quad (a_\xi \geq 0)}$$

- 相位～均匀分布：

$$\boxed{f(\varphi_\xi)=\frac{1}{2\pi}\quad (0\leq \varphi_\xi \leq 2\pi)}$$

且 $\boxed{f(a_\xi,\varphi_\xi)=f(a_\xi)\cdot f(\varphi_\xi)}$ ---统计独立

§16.6

正弦波加窄带高斯过程

■ 合成信号：

常数

窄带高斯噪声

(0, σ_ξ^2)

$$r(t) = A\cos(\omega_c t + \theta) + n(t)$$

$\hookrightarrow n_c(t)\cos\omega_c t - n_s(t)\sin\omega_c t$

随机相位

[在(0，2π)上均匀分布]

$$= z_c(t)\cos\omega_c t - z_S(t)\sin\omega_c t$$

$$= z(t)\cos[\omega_c t + \varphi(t)]$$

$$\boxed{\begin{aligned} z_c(t) &= A\cos\theta + n_c(t) \\ z_s(t) &= A\sin\theta + n_s(t) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} z(t) &= \sqrt{z_c^2(t) + z_s^2(t)},\ z \geq 0 \\ \varphi(t) &= tg^{-1}\frac{z_s(t)}{z_c(t)},\ (0 \leq \varphi \leq 2\pi) \end{aligned}}$$

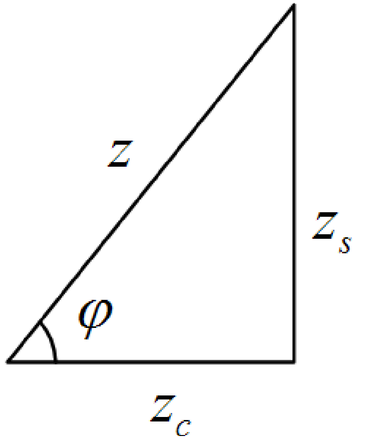
关心---z(t) 的统计特性：

- **分析思路：**

在给定$\boldsymbol{\theta}$条件下，利用16.5.2节的推导方法和结论2。

$$\left.\begin{matrix} z_c(t) \xrightarrow{\text{高斯}} \\ z_s(t) \xrightarrow{\text{高斯}} \end{matrix}\right\rangle \xrightarrow{\text{统计独立}} f(z_c, z_s/\theta) \xrightarrow{|J|} f(z, \varphi/\theta) \xrightarrow{\text{边际分布}} \left\langle \begin{matrix} f(z/\theta) \\ f(\varphi/\theta) \end{matrix}\right.$$

$$E[z_c] = A\cos\theta$$
$$E[z_s] = A\sin\theta$$
$$\sigma_c^2 = \sigma_s^2 = \sigma_n^2$$



- **推导结果：**

◆ z(t) ~ 广义瑞利分布，又称莱斯（**Rice**）分布：

$$f(z)=\frac{z}{\sigma^2}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(z^2+A^2)\right]I_0\left(\frac{Az}{\sigma^2}\right),\quad z\geq 0$$ 莱斯分布

$I_0(x)$是零阶修正贝塞尔函数; 当 $x\geq 0$ 时，$I_0(x)$ 单调上升，且 $I_0(0)=1$

讨论：

- $A\to 0$，即 r $\to 0$时，$f(z)$ 退化为 瑞利分布；
- 信噪比 r 较大时，$f(z)$ 近似为 高斯分布。

注：

$$r=\frac{A^2}{2\sigma_\xi^2}$$ ← $\underbrace{A\cos(\omega_c t+\theta)}_{\text{信号功率}}+\underbrace{n(t)}_{\text{噪声功率}}$

信号功率 $A^2/2$ 噪声功率 σ_ξ^2

- $f(\varphi)$不再服从均匀分布

§16.7

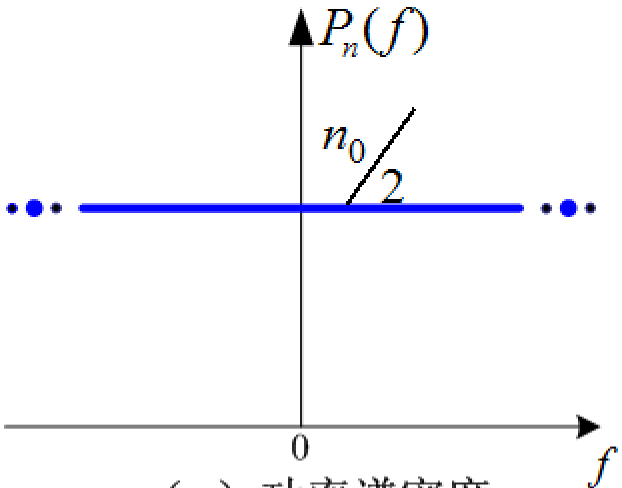
高斯白噪声

和

带限白噪声

1. 白噪声 ——理想的宽带过程

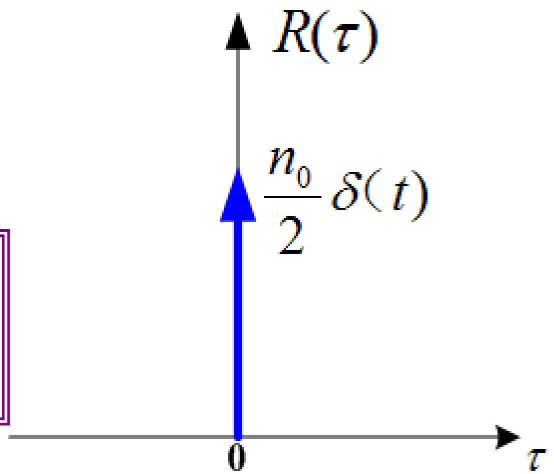
其功率谱密度均匀分布在整个频率范围内：



（a）功率谱密度

$$P_\xi(\omega) = \frac{n_0}{2}$$

$$R(\tau) = \frac{n_0}{2}\delta(\tau)$$



（b）自相关函数

n_0 ---常数 (W/Hz)

白噪声仅在τ=0（同一时刻）时才相关。

2. 高斯白噪声

---指概率分布服从高斯分布的白噪声。

高斯白噪声在任意两个不同时刻上的取值之间，不仅是互不相关的，而且还是统计独立的。

3. 带限白噪声

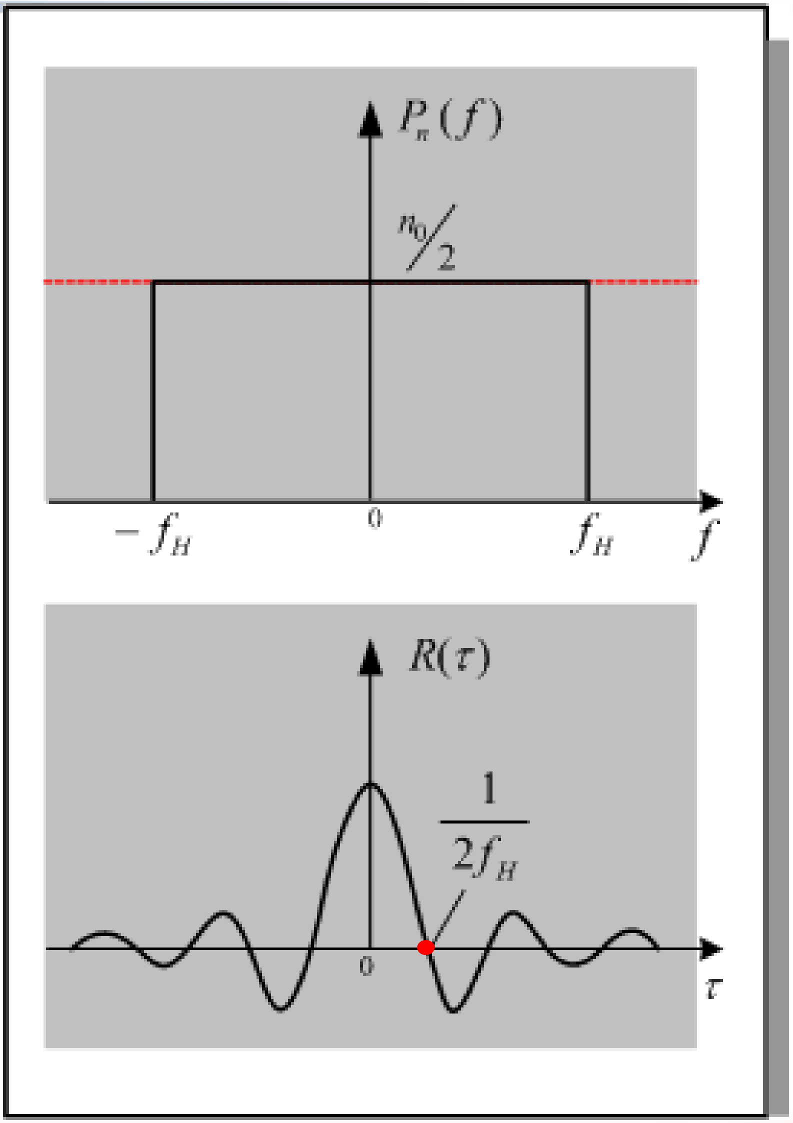
---白噪声通过带宽有限的信道或滤波器的情形。

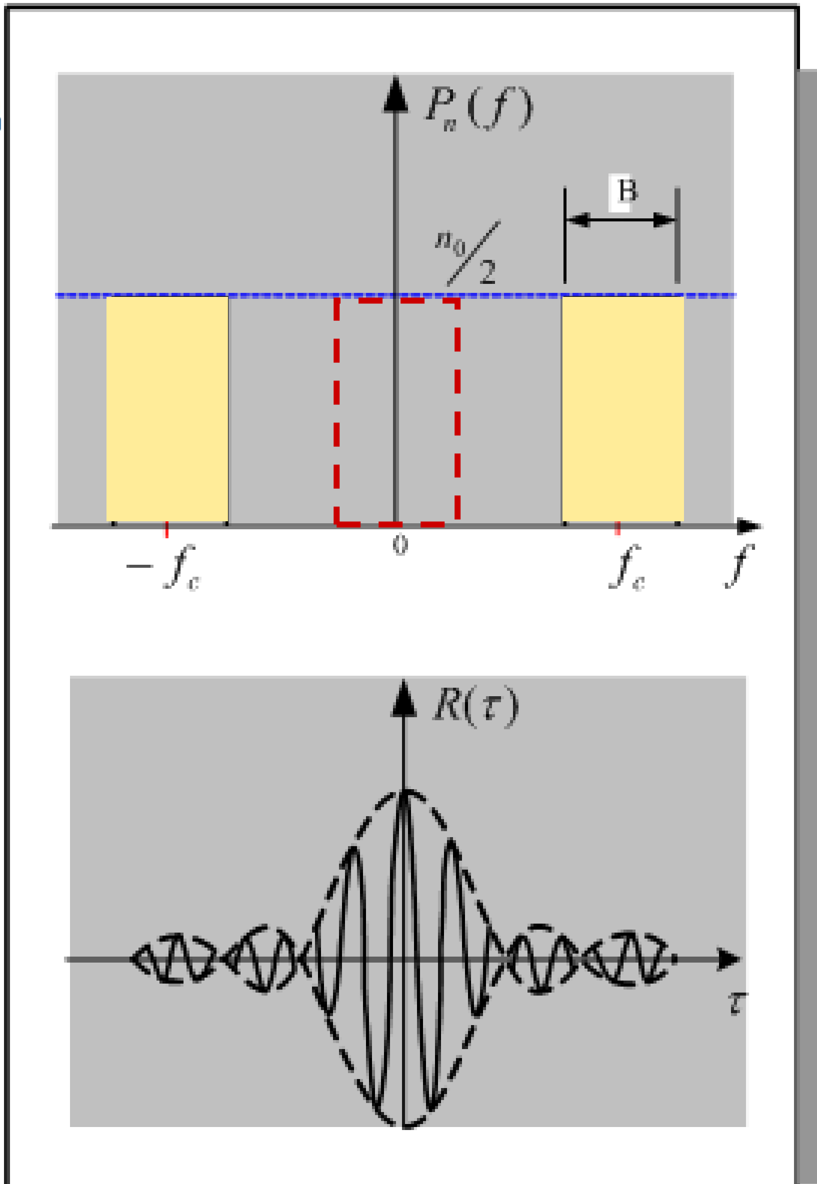
常见形式：
- 白噪声通过**LPF**---低通白噪声
- 白噪声通过**BPF**---带通白噪声

■ 低通白噪声

$$P_n(f)=\begin{cases}\dfrac{n_0}{2}, & |f|\le f_H\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$R(\tau)=n_0 f_H \frac{\sin 2\pi f_H \tau}{2\pi f_H \tau}$$





若 $B << f_c$

窄带高斯白噪声

■ 带通白噪声

$$P_n(f)=\begin{cases}\dfrac{n_0}{2}, & f_c-\dfrac{B}{2}\le|f|\le f_c+\dfrac{B}{2}\\ 0, & \text{其他频率}\end{cases}$$

$$R(\tau)=n_0B\frac{\sin\pi B\tau}{\pi B\tau}\cos 2\pi f_c\tau$$

$$\boxed{N=n_0B}$$

谢谢！