静态电磁场与时变电磁场

电磁场与电磁波不挂科第四讲讲义

4.1.静态电磁场与时变电磁场

4.1.1.静态电磁场的基本方程和边界条件

■ **静态电磁场**

当电磁场的场源电荷、电流不随时间变化时，所激发的电场、磁场也不随时间变化，则称这种电磁场为静态电磁场。

静态电磁场的场量不随时间变化，即考虑静态的电磁场时，麦克斯韦方程组和电流连续性方程等方程中的$\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$项恒等于零（$\vec{A}$指代各种电磁场矢量）。

静止电荷所激发的静电场、导电媒质中恒定运动的电荷形成的恒定电场、恒定电流产生的恒定磁场都属于静态电磁场。

■ **静态电磁场的基本方程**

静态电磁场对应的麦克斯韦方程组：

$$\text{积分形式}\begin{cases}\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l}=\int_S \vec{J}\cdot d\vec{S}\\ \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l}=0\\ \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0\\ \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\int_V \rho dV\end{cases}\qquad \text{微分形式}\begin{cases}\nabla\times\vec{H}=\vec{J}\\ \nabla\times\vec{E}=0\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\\ \nabla\cdot\vec{D}=\rho\end{cases}$$

■ 静态电磁场的边界条件

边界条件中不含对时间的微分项，故一般形式没有变化。

(1) $\vec{e}_n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s$

(2) $\vec{e}_n \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$

(3) $\vec{e}_n \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$

(4) $\vec{e}_n \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s$

■ 恒定电场

在第二讲中我们简单介绍过恒定电场：

恒定电流对应的电流密度$\vec{J}(\vec{r})$不随时间变化，则构成恒定电场，空间中的电荷密度也不随时间变化，即$\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$，代入电流连续方程$\nabla \cdot \vec{J} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$，得$\nabla \cdot \vec{J} = 0$。

对应的积分形式为$\oint_S \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$，表示从闭合面　中穿出的电流恒为零；

也可说明，尽管电流是电荷的运动，但在恒定电流的状态下电荷分布并不随时间改变。

故恒定电流产生的电场也和静电场具有同样的性质，是无旋场，满足$\nabla \times \vec{E} = 0$。

在处理恒定电场的问题时，常常将$\nabla \cdot \vec{J} = 0$、$\nabla \times \vec{E} = 0$作为恒定电场的基本方程应用。

■ 恒定电场的边界条件

在恒定电场中，将两个基本方程的积分形式应用于两种不同的导电媒质的分界面上，得到恒定电场的边界条件。

(1) $\vec{e}_n \cdot (\vec{J}_1 - \vec{J}_2) = 0$或$J_{1n} = J_{2n}$

(2) $\vec{e}_n \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$或$E_{1t} = E_{2t}$

4.1.2.电位函数、磁位函数

■ 标量电位

由$\nabla\times\vec{E}=0$可知，静电场是一个无旋场，则电场强度可以表示为$\vec{E}(\vec{r})=-\nabla\varphi(\vec{r})$。

其中$\varphi(\vec{r})$称为静电场的静电场的电位函数，简称电位，单位为伏特（V），负号表示在$\vec{E}$场相反的方向电位增加。

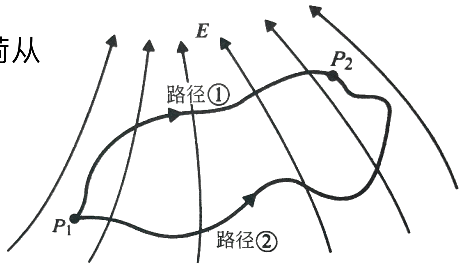
通常应用等位面或等位线描述电位的空间分布。根据式$\vec{E}(\vec{r})=-\nabla\varphi(\vec{r})$以及梯度的性质可知，电场强度$\vec{E}$的方向总是垂直于等位面或等位线，且总是指向电位下降最快的地方。

■ 电位的物理意义

电位具有物理意义，它与把电荷从一个点移动到另一个点所做的功有关。

空间电场中两点P、Q之间的电位差的物理意义为把一个正电荷从点P沿任意路径移动到点Q的过程中，电场力所做的功，即：

$$\int_P^Q\vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{l}=\varphi(P)-\varphi(Q)。$$



为使电场中每一点的电位都有确定的值，需要选定某一固定点设为零电位点，常常设无穷远处为零电位点，即$\varphi(\infty)=0$。

则空间中一点P的电位可表示为：$\varphi(P)=\varphi(P)-\varphi(\infty)=\int_P^{\infty}\vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{l}$。

■ 电位的微分方程

在介电常数为ε的均匀、线性和各向同性的电介质中，将$\vec{E}(\vec{r})=-\nabla\varphi(\vec{r})$代入麦克斯韦第四方程$\nabla\cdot\vec{D}(\vec{r})=\rho(\vec{r})$，可以得到$\nabla^2\varphi(\vec{r})=-\dfrac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon}$。

在数学物理方程中，我们接触过泊松方程方程，它的形式为：$\nabla^2\varphi=f$，其中φ为未知函数，f为已知函数。当$f=0$时，方程称为拉普拉斯方程。

则电位$\varphi(\vec{r})$满足泊松方程，当空间中无自由电荷分布即$\rho(\vec{r})=0$时，满足拉普拉斯方程。故可通过求解泊松方程或拉普拉斯方程的形式求解电位函数，在求解时需要用到静电场的边界条件。

■ 电位函数

对于离散点电荷系统，其产生的电场的电位函数表达式为$\varphi(\vec{r})=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_{i=1}^{N}\dfrac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i'|}+C$

对于连续电荷系统，分为三种情况：

线电荷：$\varphi(\vec{r})=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{l'}\dfrac{\rho_l(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dl'+C$

面电荷：$\varphi(\vec{r})=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{S'}\dfrac{\rho_S(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dS'+C$

体电荷：$\varphi(\vec{r})=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V'}\dfrac{\rho_V(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'+C$

其中C为常数，其存在不会影响电场强度$\vec{E}$。

■ 静电场的能量

静电场最基本的性质是对静止电荷有作用力，这表明静电场有能量。用W_e表示电场能量，其计算公式可分为下面三种：

（1）设空间中体电荷密度为ρ，则有：$W_e=\dfrac{1}{2}\int_V\rho\varphi\mathrm{d}V$

（2）设曲面S上体电荷密度为ρ_S，则有：$W_e=\dfrac{1}{2}\int_S\rho_S\varphi\mathrm{d}S$

（3）对于多导体系统，因导体为等位体，即每个导体上的电位为常数，则有：

$$W_e=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\varphi_i(\int_{S_i}\rho_{Si}\mathrm{d}S_i)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\varphi_i q_i$$

考虑空间中的体电荷，有$W_e = \dfrac{1}{2}\int_V \rho\varphi \mathrm{d}V$,

将$\nabla \cdot \overrightarrow{D} = \rho$代入此式并应用$\nabla \cdot (f\overrightarrow{A}) = f\nabla \cdot \overrightarrow{A} + \overrightarrow{A} \cdot \nabla f$,可得: $W_e = \dfrac{1}{2}\int_V \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{D}\mathrm{d}V$。

对于线性和各向同性物质，有: $W_e = \dfrac{1}{2}\int_V \varepsilon\overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{E}\mathrm{d}V = \dfrac{1}{2}\int_V \varepsilon E^2\mathrm{d}V$。

上面的式子表明，电场能量存储在电场不为零的空间，并可由上式定义能量密度为

$w_e = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{D} \cdot \overrightarrow{E}$。

例题4-1

求出沿着长度为L的均匀线电荷的轴线上的电场强度公式，该均匀线电荷的密度为ρ_l。

例题4-2

求均匀面电荷密度为ρ_S、半径为b的圆盘轴线上的电场强度的表达式。

例题4-3

半径为a的球形空间均匀分布着体电荷密度为ρ的电荷，试求电场能量。

矢量磁位

由$\nabla \cdot \overrightarrow{B} = 0$可知，磁场是一个无散场，则电场强度可以表示为$\overrightarrow{B}(\vec{r}) = \nabla \times \overrightarrow{A}(\vec{r})$。

其中$\overrightarrow{A}$称为磁场的矢量磁位，或称磁矢位，单位为特斯拉·米（$T \cdot m$），为一个辅助矢量。由亥姆霍兹理可知，唯一确定一个矢量$\overrightarrow{A}$，需要给定它的旋度和散度，因此对磁矢位$\overrightarrow{A}$的散度也作出规定：对于恒定磁场，有$\nabla \cdot \overrightarrow{A} = 0$，称此规定为库仑规范。

■ 矢量磁位的微分方程

在磁导率为μ的均匀、线性和各向同性的电介质中，将$\vec{B} = \mu \vec{H} = \nabla \times \vec{A}$代入静态场的麦克斯韦第一方程$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$，可以得到：$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \mu \vec{J}$。

应用矢量恒等式$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$和库仑规范$\nabla \cdot \vec{A} = 0$，

可以得到：$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}$。

即为磁位$\vec{A}$满足的泊松方程，在无源区域中即$\vec{J} = 0$时，该式化为拉普拉斯方程。

■ 磁位函数

解磁矢位的泊松方程，得到和电位函数形式相似的磁位函数：

体电流：$\vec{A} = \dfrac{\mu}{4\pi} \displaystyle\int_V \dfrac{\vec{J}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' + \vec{C}$

面电流：$\vec{A} = \dfrac{\mu}{4\pi} \displaystyle\int_{S'} \dfrac{\vec{J}_S}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS' + \vec{C}$

线电流：$\vec{A} = \dfrac{\mu}{4\pi} \displaystyle\oint_{l'} \dfrac{I}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{l'} + \vec{C}$

其中$\vec{C}$为常矢量，它的存在不会影响磁感应强度$\vec{B}$。

■ 标量磁位

若空间中不存在传导电流，即$\vec{J} = 0$，则有$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} = 0$。

故可将磁场强度$\vec{H}$表示为一个标量函数的梯度，即$\vec{H} = -\nabla \varphi_m$，称$\varphi_m$为标量磁位或磁标位。

将$\vec{H} = -\nabla \varphi_m$、$\vec{B} = \mu \vec{H}$代入麦克斯韦第三方程$\nabla \cdot \vec{B} = 0$，可得$\nabla^2 \varphi_m = 0$，即为标量磁位$\varphi_m$满足的拉普拉斯方程。

■ **恒定磁场的能量**

恒定磁场对电流回路产生磁场力，这表明恒定磁场存储着能量。

用W_m表示磁场能量，其计算公式可分为下面两种：

（1）对于分布电流，设体电流密度为$\vec{J}$，有$W_m=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_V \vec{J}\cdot\vec{A}\mathrm{d}V$

（2）对于多个电流回路共同产生的磁场，有$W_m=\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{N}I_j\oint_{C_j}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}_j=\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}i_j\psi_j$

考虑分布电流，有$W_m=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_V \vec{J}\cdot\vec{A}\mathrm{d}V$，将$\vec{J}=\nabla\times\vec{H}$代入此式可得

$W_m=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_V \vec{H}\cdot\vec{B}dV$。对于线性和各向同性物质，有$w_m=\dfrac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}=\dfrac{1}{2}\dfrac{B^2}{\mu}=\dfrac{1}{2}\mu H^2$。

上面的式子表明，磁场能量存储在磁场不为零的空间，并可由上式定义能量密度为

$w_m=\dfrac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}$，对于线性和各项同性物质，有$w_e=\dfrac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}=\dfrac{1}{2}\mu H^2$。

■ **例题4-4**

求一长度为$2l$的直线电流的矢量磁位，并推导无限长直线电流的矢量磁位。

4.1.3.电容与电感

■ **电容**

由离散电荷电位函数表达式$\varphi(\vec{r})=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\dfrac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i'|}+C$可知，孤立导体的电位与其所

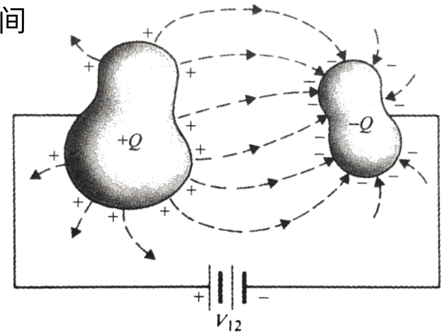
带电荷量成正比，对孤立导体，其电容定义为孤立导体所带电荷量与其电位的比，即

$C=\dfrac{Q}{\varphi}$。

两导体系统的电容定义为任一导体上的总电荷与两导体之间电位差的比，即$C = \dfrac{Q}{U}$。

另外，对于双导体系统，其电场能量可表示为：

$W_e = \dfrac{1}{2}CU^2$。



电容的单位为法拉（F），电容的大小由导体系统的物理性质决定，与电荷量和电位差无关。

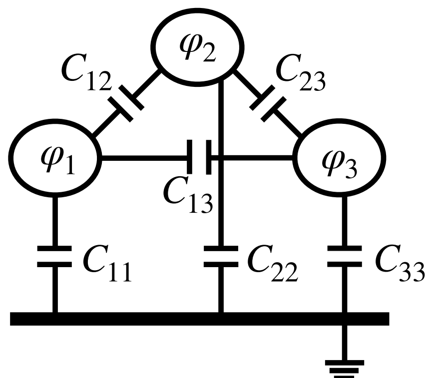
■ 部分电容

对于三个或以上导体共同组成的多导体系统，任何两个导体间的电压都要受到其他导体所带电荷的影响，所以引入部分电容的概念，来表示多导体系统中一个导体在其余导体的影响下与另一个导体构成的电容。

对于多导体系统，每一导体与地之间以及与其他导体之间都存在部分电容，由$N+1$个导体构成的系统共有$\dfrac{N(N+1)}{2}$个部分电容。

以右图所示三导体系统为例，根据电容的定义得各导体所带电量的表达式：

$$\begin{cases} q_1 = C_{11}\varphi_1 + C_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) + C_{13}(\varphi_1 - \varphi_3) \\ q_2 = C_{22}\varphi_2 + C_{21}(\varphi_2 - \varphi_1) + C_{31}(\varphi_3 - \varphi_1) \\ q_3 = C_{33}\varphi_3 + C_{31}(\varphi_3 - \varphi_1) + C_{32}(\varphi_3 - \varphi_2) \end{cases}$$



即为：$q_i = \sum_{j \neq i}^{N} C_{ij}(\varphi_i - \varphi_j) + C_{ii}\varphi_i \quad (i = 1,2,\cdots,N)$。

导体i与地之间的部分电容为$C_{ii} = \dfrac{q_{ii}}{\varphi_i}$，称为导体$i$的自电容；导体$i$与导体$j$之间形成的电容为$C_{ij} = \dfrac{q_{ij}}{\varphi_i - \varphi_j} \quad (i \neq j)$，称为导体$i$与导体$j$的互电容；并满足$C_{ij} = C_{ji}$。

例题4-5

平行双线传输线的结构如右图所示，导线的半径为a，两导线轴线距离为D，且设周围介质为空气。试求传播线单位长度的电容。

电感

由静态电磁场的麦克斯韦第一方程$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$可知，电流回路在空间中产生的磁场与回路中的电流成正比。对导体回路，其电感定义为穿过电流回路的磁通量与回路中电流的比。电感可分为自感和互感，自感常用L表示，互感常用M表示。

电感的单位为亨利（H），电感的大小只与导体系统的几何参数和周围的媒质有关，与电流、磁通量无关。

自感

设回路中的电流为I，它所产生的磁场与回路交链的自感磁链为ψ，则此回路的自感为磁链与回路电流的比值，即$L = \dfrac{\psi}{I}$。磁链指导电线圈或通电回路所链环的磁通量，对于一个N匝导电线圈来说，其磁链等于匝数N与穿过线圈各匝的磁通量平均磁通量ϕ的乘积。

设回路由N匝线圈绕成，设单匝线圈的自感为L'，则整个回路的自感为$L = N^2L'$。

计算粗导体回路的自感时，通常将自感表示为内自感L_i和外自感L_o的和，即$L = L_i + L_o$。

互感

z两个彼此靠近的导线回路C_1和C_2，回路C_1产生的磁场与C_2交链的互感磁链为ψ_{21}，则定义回路C_1对C_2的互感为$M_{21} = \dfrac{\psi_{21}}{I_1}$。

同理，回路C_2对C_1的互感为$M_{12} = \dfrac{\psi_{12}}{I_2}$。

利用矢量磁位表示磁链，即可将上面两个互感的式子化为计算互感的一般公式：

$$M_{21} = \frac{\psi_{21}}{I_1} = \frac{\mu}{4\pi}\oint_{C_2}\oint_{C_1}\frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|}$$

$$M_{12} = \frac{\psi_{12}}{I_2} = \frac{\mu}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|}$$

称这两个一般公式为纽曼公式。从纽曼公式可以看出$M_{21} = M_{12} = M$。

4.2.时变电磁场

4.2.1.波动方程

■ **波动方程**

在线性、各项同性的物质中，由限定形式的麦克斯韦方程组结合矢量恒等式可得到电磁场的

波动方程：$\begin{cases} \nabla^2\vec{H} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = -\nabla\times\vec{J} \\ \nabla^2\vec{E} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu\frac{\partial\vec{J}}{\partial t} + \frac{\nabla\rho}{\varepsilon} \end{cases}$。

在无源空间($\rho = 0, \vec{J} = 0$)，波动方程可化为：$\begin{cases} \nabla^2\vec{H} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2\vec{E} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$。

■ **例题4-6**

在无损耗的线性\各向同性媒质中，电场强度$\vec{E}(\vec{r})$的波动方程为

$\nabla^2\vec{E}(\vec{r})+\omega^2\mu\varepsilon\vec{E}(\vec{r})=0$。已知矢量函数$\vec{E}(\vec{r})=\vec{E_0}e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$，其中$E_0$和$\vec{k}$是常矢量。试证明$\vec{E}(\vec{r})$满足波动方程的条件是$k^2=\omega^2\mu\varepsilon$，这里$k=|\vec{k}|$。

■ **例题4-7**

已知无源的空气中的磁场强度为$\vec{H}=\vec{e_y}0.1\sin(10\pi x)\cos(6\pi\times10^9t-kz)\quad A/m$，利用波动方程求常数$k$的值。

4.2.2.电磁场的位函数

■ **时变电磁场的矢量位和标量位**

在静态电磁场中，我们已引入标量电位、矢量磁位和标量磁位来描述静态场中的电场强度和磁感应强度从而简化计算。同样，在研究时变电磁场时也引入位函数，使某些问题的分析得到简化。

时变电磁场的位函数可分为矢量位和标量位，由麦克斯韦方程组推导得到。

与静态场中定义矢量磁位相同，根据$\nabla\cdot\vec{B}=0$，可将磁感应强度表示为$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$。其中$\vec{A}$称为电磁场的矢量位，单位为特斯拉·米（$T\cdot m$）。

将$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$代入麦克斯韦第二方程$\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$，得$\nabla\times(\vec{E}+\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t})=0$。

即$\vec{E}+\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}$是无旋的，可用一个标量函数的梯度表示，令$\vec{E}+\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi$，则有

$\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\nabla\varphi$。其中$\varphi$称为电磁场的标量位，单位为伏（$V$）。

由标量位的表达式可知，标量位与矢量位有关，要确定唯一的标量位φ就要先确定唯一的矢量位$\overrightarrow{A}$，由亥姆霍兹定理，确定一个矢量要同时确定其散度和旋度，$\overrightarrow{B} = \nabla \times \overrightarrow{A}$定义了$\overrightarrow{A}$的旋度，令将其散度规定为$\nabla \cdot \overrightarrow{A} = -\mu\varepsilon\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$，称此规定为洛仑兹条件。

■ **达朗贝尔方程（位函数的微分方程）**

电磁场的源为电荷和电流，对应的物理量分别为ρ和$\overrightarrow{J}$，若将$\overrightarrow{A}$和φ与场源ρ和$\overrightarrow{J}$联系起来，则可以在静电场问题中直接求解位函数，再通过位函数与电场矢量的关系求解电磁场问题。

在线性、各向同性物质中，将$\overrightarrow{B} = \nabla \times \overrightarrow{A}$和$\overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial\overrightarrow{A}}{\partial t} - \nabla\varphi$代入限定形式的麦克斯韦方程，并应用洛仑兹条件，可以得到达朗贝尔方程：

$$\begin{cases} \nabla^2\overrightarrow{A} - \mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\overrightarrow{A}}{\partial t^2} = -\mu\overrightarrow{J} \\ \nabla^2\varphi - \mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\dfrac{1}{\varepsilon}\rho \end{cases}。$$

洛仑兹条件下的达朗贝尔方程使得矢量位$\overrightarrow{A}$和标量位φ分离在两个独立的方程中，并且$\overrightarrow{A}$只取决于$\overrightarrow{J}$，φ只取决于ρ，另外这两个方程的形式又是完全对称的，这对方程的求解十分有利。

1.2.3.电磁能量守恒定理

■ **坡印廷矢量**

线性、各向同性物质中电场能量密度和磁场能量密度分别为$w_e = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{D}$和$w_m = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{B}$。

在时变电磁场中，电磁场能量密度w为电场能量密度w_e和磁场能量密度w_m的和，即：

$$w = w_e + w_m = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} + \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}.$$

由上式可以看出，当时变电磁场中的电磁场矢量随时间变化时，能量密度也随时间发生改变，从而引起电磁能量的流动。引入能流密度矢量（也称坡印廷矢量）$\vec{S}$来描述能量流动的情况，其表达式为$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$。

坡印廷矢量由电磁能量守恒关系推导而出。

■ 坡印廷矢量的物理意义

z坡印廷矢量由电磁能量守恒关系推导而出，它的方向表示能量流动的方向，大小表示单位时间内穿过与能量流动方向相垂直的单位面积的能量。对其进行面积分则表示该面上的能量流出功率。

如取一闭合曲面S，则$-\oint_S \vec{S}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$表示单位时间内通过该曲面进入其所包围的体积$V$的电磁能量，也即流入功率。

4.2.4.时谐电磁场

■ 时谐电磁场

时谐电磁场是时变电磁场的一种特例。如果场源以一定的角频率随时间呈时谐（正弦或余弦）变化，则其产生的电磁场也以同样的角频率随时间呈时谐变化，这种电磁场就称为时谐电磁场。

任意时变电磁场都能在一定条件下通过傅里叶分析的方法展开为不同频率的时谐场的叠加。

■ 时谐电磁场的复数表示

为方便分析时谐电磁场问题，对时谐电磁场矢量采用复数方法表示。

设时谐标量函数$u(\vec{r},t)$的表达式为$u(\vec{r},t)=u_m(\vec{r})\cos[\omega t+\phi(\vec{r})]$，它对应的复数形式为$\dot{u}(\vec{r})=u_m(\vec{r})e^{j\phi(\vec{r})}$，$\dot{u}(\vec{r})$也称为那个矢量的复振幅，则$u(\vec{r},t)$可以表示为$u(\vec{r},t)=Re[u_m(\vec{r})e^{j\phi(\vec{r})}e^{j\omega t}]=Re[\dot{u}(\vec{r})e^{j\omega t}]$。

一个矢量函数可分解为基矢量方向上的三个标量函数，所以对于时谐矢量函数$\vec{F}(\vec{r},t)$，可将其表示为$\vec{F}(\vec{r},t)=Re[\overrightarrow{\dot{F}_m}(\vec{r})e^{j\omega t}]$；

其中$\overrightarrow{\dot{F}_m}(\vec{r})=\vec{e}_xF_{xm}(\vec{r})e^{j\phi_x(\vec{r})}+\vec{e}_yF_{ym}(\vec{r})e^{j\phi_y(\vec{r})}+\vec{e}_zF_{zm}(\vec{r})e^{j\phi_z(\vec{r})}$，称为$\vec{F}(\vec{r},t)$的复矢量，常用$\vec{F}(\vec{r})$表示，它只与空间有关，与时间无关。复矢量表示的不是真实的场矢量，真实的场矢量为与之对应的瞬时矢量。

■ **例题4-8**

将下列场矢量的瞬时值形式写为复数形式。

(1)$\vec{E}(z,t)=\vec{e}_xE_{xm}\cos(\omega t-kz+\phi_x)+\vec{e}_yE_{ym}\sin(\omega t-kz+\phi_y)$

(2)$\vec{H}(x,z,t)=\vec{e}_xH_0k(\frac{a}{\pi})\sin(\frac{\pi x}{a})\sin(kz-\omega t)+\vec{e}_zH_0\cos(\frac{\pi x}{a})\cos(kz-\omega t)$

■ **例题4-9**

已知电场强度复矢量$\overrightarrow{\dot{E}_m}(m)=\vec{e}_x jE_{xm}\cos(k_zz)$，其中$E_{xm}$和$k_z$为实常数。写出电场强度的瞬时矢量。

■ **麦克斯韦方程组的复数形式**

在时谐电磁场中，将各电磁场矢量用复矢量表示并代入麦克斯韦方程组，可以得到复矢量满足的麦克斯韦方程组：$\begin{cases}\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+j\omega\vec{D}\\ \nabla\times\vec{E}=-j\omega\vec{B}\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\\ \nabla\cdot\vec{D}=\rho\end{cases}$。

式中的矢量表示复矢量，为方便将其“·”符号去掉，并略去下标m。对比复数形式和一般形式的麦克斯韦方程组，可以看出，复数形式的麦克斯韦方程组是将$\frac{\partial}{\partial t}$替换为$j\omega$。

■ 麦克斯韦方程组的复数形式

通过一般形式的麦克斯韦方程组可推得无源空间中的电磁场波动方程，同样可由复数形式的麦克斯韦方程组推得时谐电磁场的复矢量$\overrightarrow{E}$和$\overrightarrow{H}$在无源空间中满足的波动方程：

$$\begin{cases} \nabla^2\overrightarrow{H} + k^2\overrightarrow{H} = 0 \\ \nabla^2\overrightarrow{E} + k^2\overrightarrow{E} = 0 \end{cases}$$

其中$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$。

此方程组称为亥姆霍兹方程。将一般形式的麦克斯韦方程组推出的波动方程中的$\frac{\partial}{\partial t}$替换为$j\omega$，$\frac{\partial^2}{\partial t^2}$替换为$-\omega^2$即可化为亥姆霍兹方程。

■ 平均坡印廷矢量

前面引入的坡印廷矢量$\overrightarrow{S}(\vec{r},t) = \overrightarrow{E}(\vec{r},t) \times \overrightarrow{H}(\vec{r},t)$是一个瞬时矢量，表示某一时刻的能量流动情况。注意其中的矢量为瞬时矢量。对于时谐场，因为场量随时间呈正弦或余弦周期性变化，所以讨论一个时间周期内的平均能流密度（平均坡印廷矢量）更有意义。

设平均坡印廷矢量为$\overrightarrow{S}_{av}$，其表达式为$\overrightarrow{S}_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T \overrightarrow{S}dt = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \overrightarrow{S}dt$。

其中$T = \frac{2\pi}{\omega}$为时谐电磁场的时间周期。注意其中的矢量为复矢量。

将场矢量用复数形式表示，则平均坡印廷矢量可化为$\overrightarrow{S_{av}} = \frac{1}{2}Re[\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{H}^\star]$。

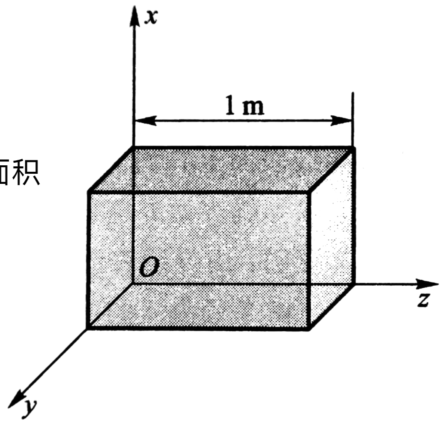
■ **例题4-10**

在无源的自由空间中，已知电磁场的电场强度复矢量$\vec{E}(z)=\vec{e}_y E_0 e^{-jkz}(V/m)$，式中$k$和$E_0$为常数。

求（1）磁场强度复矢量；（2）瞬时坡印廷矢量；（3）平均坡印廷矢量。

■ **例题4-11**

自由空间中的电磁场为$\begin{cases}\vec{E}(z,t)=\vec{e}_x 1000\cos(\omega t-kz)\ (V/m)\\ \vec{H}(z,t)=\vec{e}_y 2.65\cos(\omega t-kz)\ (A/m)\end{cases}$，式中。求:



（1）瞬时坡印廷矢量；

（2）平均坡印廷矢量；

（3）任一时刻流入如图所示的平行六面体（长$1m$，横截面积为$0.25m^2$）中的净功率。