第三章 离散傅里叶变换

学习目标

- 理解傅里叶变换的几种形式
- 了解周期序列的傅里叶级数及性质，掌握**周期卷积过程**
- 理解离散傅里叶变换及性质，掌握**圆周移位、共轭对称性**，掌握**圆周卷积、线性卷积**及两者之间的关系
- 了解频域抽样理论
- 理解频谱分析过程
- 了解序列的抽取与插值过程

一、Fourier变换的几种可能形式

时间函数 ⟺ 频率函数

连续时间、连续频率—傅里叶变换

连续时间、离散频率—傅里叶级数

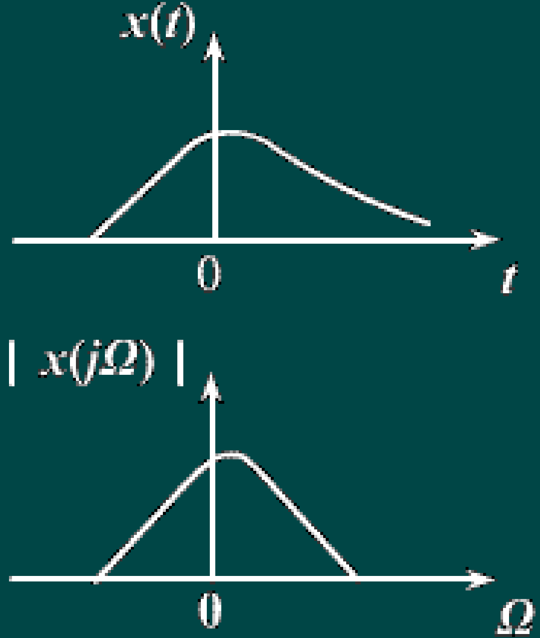
离散时间、连续频率—序列的傅里叶变换

离散时间、离散频率—离散傅里叶变换

连续时间、连续频率—傅里叶变换

$$X(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\Omega t}dt$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$



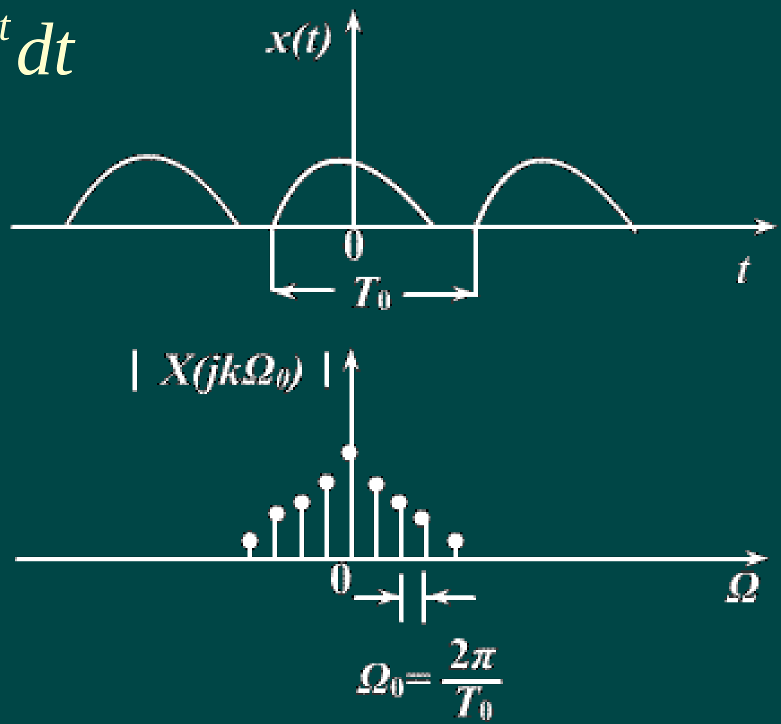
时域连续函数造成频域是非周期的谱，

而时域的非周期造成频域是连续的谱密度函数。

连续时间、离散频率—傅里叶级数

$$X(jk\Omega_0)=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt$$

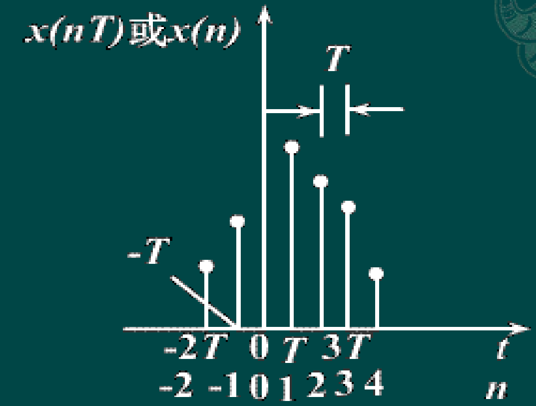
$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(jk\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t}$$



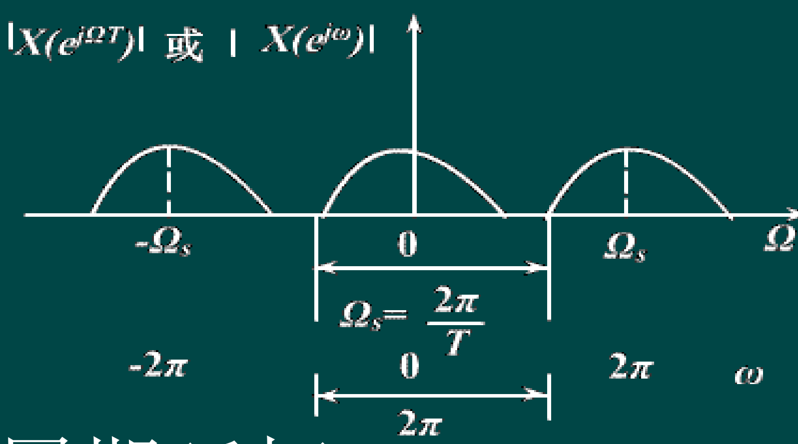
时域周期连续函数造成频域是非周期的谱，而频域的离散对应时域是周期函数。

离散时间、连续频率—序列的傅里叶变换

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$



$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$



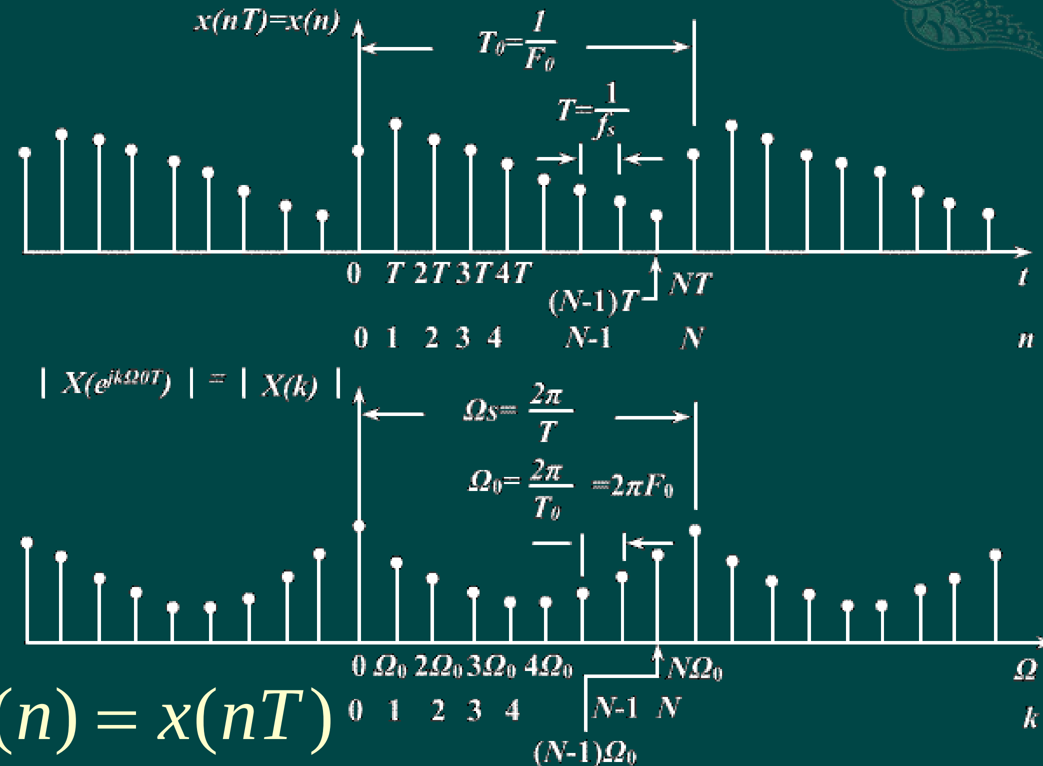
时域的离散化造成频域的周期延拓，

而时域的非周期对应于频域的连续

离散时间、离散频率——离散傅里叶变换

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$



其中$X(k)=X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}),x(n)=x(nT)$

一个域的离散造成另一个域的周期延拓，因此离散傅里叶变换的时域和频域都是离散的和周期的

四种傅里叶变换形式的归纳

	时间函数	频率函数
傅里叶变换	连续和非周期	非周期和连续
傅里叶级数	连续和周期 (T_0)	非周期和离散 $(\Omega_0=2\pi/T_0)$
序列的傅里叶变换	离散 (T) 和非周期	周期 $(\Omega s=2\pi/T)$ 和连续
离散傅里叶变换	离散 (T) 和周期 (T_0)	周期 $(\Omega s=2\pi/T)$ 和离散 $(\Omega_0=2\pi/T_0)$

Ω0表示离散的抽样间隔

Ωs表示周期大小

(DFS：离散傅里叶级数，DTFT：序列的傅里叶变换，DFT：离散傅里叶变换）

小结：
①时域的离散/连续决定着频域的周期/非周期
②时域的周期/非周期决定着频域的离散/连续
也就是说，离散-周期、连续-非周期这两个变换对实现频域-时域性质转换，而且Ω=2π/T，这一参数的转换也是遵循以上原则的，比如我在时域中为x(t)|t=nT的离散函数，则我在频域中的周期Ωs=2π/T

二、周期序列的DFS及其性质

周期序列：$\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n + rN)$

r为任意整数　N为周期

连续周期函数：

$\tilde{x}_a(t) = \tilde{x}_a(t + kT_0)$　T_0为周期

$$\tilde{x}_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A(k) e^{jk\Omega_0 t}$$

基频：$\Omega_0 = 2\pi / T_0$

k次谐波分量：$e^{jk\Omega_0 t}$

N为周期的周期序列：

基频：$\omega_0 = 2\pi / N$

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A(k) e^{jk\omega_0 n}$$

k次谐波分量：$e^{jk\omega_0 n}$

周期序列的DFS正变换和反变换：

$$\tilde{X}(k)=DFS[\tilde{x}(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{nk}$$

$$\tilde{x}(n)=IDFS[\tilde{X}(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)W_N^{-nk}$$

其中： $W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

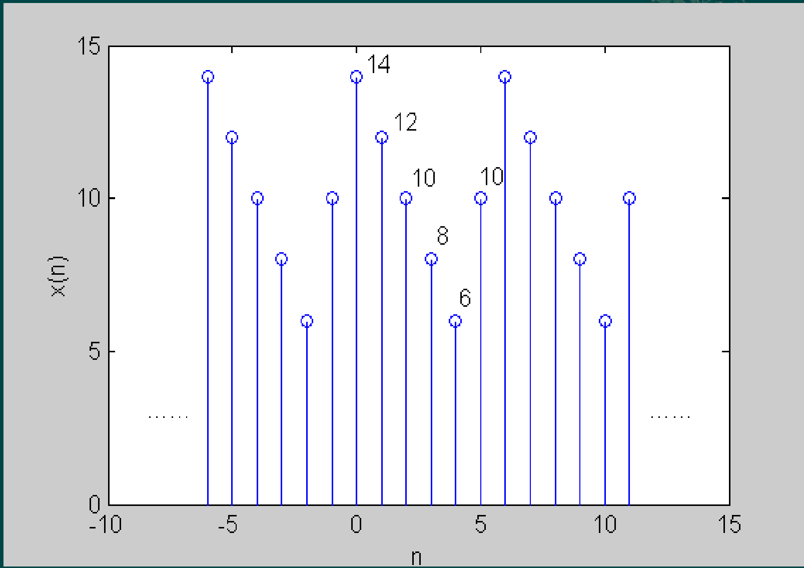
离散傅里叶级数DFS的优越之处在于其时域与频域都是离散的，便于计算器进行处理。

①DFS的核心思想是，一个周期序列可以使用含有基波成分e的幂次表示，这与FS的思想是一致的，但是与后者不同的是，DFS只有N（即其周期长度）个幂次项，这是由其幂次项的结构特点所决定的，其幂次项为一个以N为周期的周期函数，X~(K)=X~(K+N)，所以K只能取0至N-1以防止产生二义性

②关于DFS的正变换与反变换的推导：
先模仿FS写出DFS的反变换表示x~(n)，之后引入常数1/N，两边乘以e^-j2πnk/N，进行化简得到DFS的正变换

③关于X~(K)，实际上人家是一个关于K的连续函数，但是我们只关心其在k=0,1，…，N-1上的值，所以对于电脑而言，也可以作为一个离散的序列进行处理

例：已知序列$x(n)$是周期为6的周期序列，如图所示，试求其DFS的系数。



解：根据定义求解

$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{nk}$$

$$=\sum_{n=0}^{5}\tilde{x}(n)W_6^{nk}$$

$$=14+12e^{-j\frac{2\pi}{6}k}+10e^{-j\frac{2\pi}{6}2k}$$

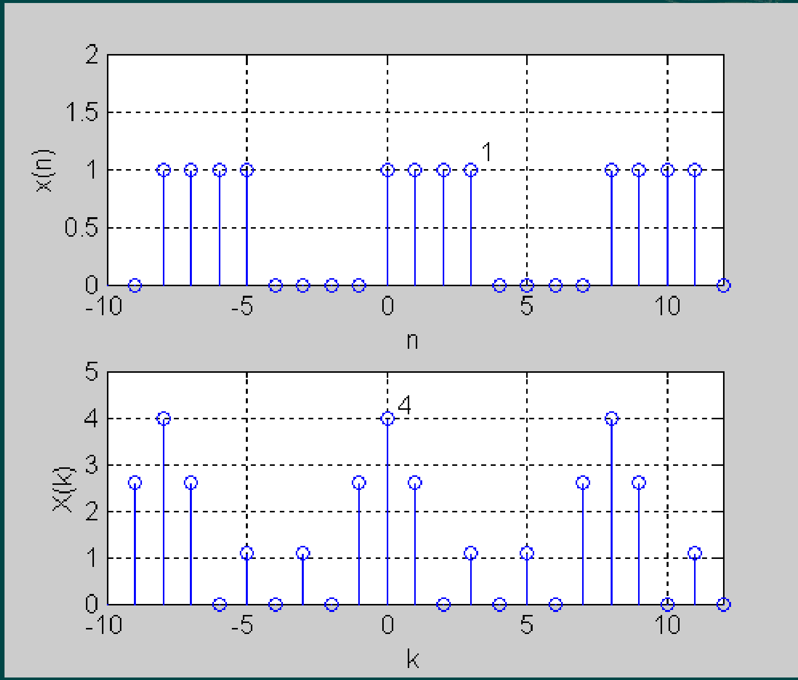
$$+8e^{-j\frac{2\pi}{6}3k}+6e^{-j\frac{2\pi}{6}4k}+10e^{-j\frac{2\pi}{6}5k}$$

$$\tilde{X}(0)=60 \quad \tilde{X}(1)=9-j3\sqrt{3} \quad \tilde{X}(2)=3+j\sqrt{3}$$

$$\tilde{X}(3)=0 \quad \tilde{X}(4)=3-j\sqrt{3} \quad \tilde{X}(5)=9+j3\sqrt{3}$$

例：已知序列$x(n)=R_4(n)$，将$x(n)$以$N=8$为周期进行周期延拓成$\tilde{x}(n)$，求$\tilde{x}(n)$的DFS。

解法一：数值解



$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{nk}=\sum_{n=0}^{7}\tilde{x}(n)W_8^{nk}$$

$$=\sum_{n=0}^{3}W_8^{nk}$$

$$=1+e^{-j\frac{2\pi}{8}k}+e^{-j\frac{2\pi}{8}2k}+e^{-j\frac{2\pi}{8}3k}$$

$$\tilde{X}(0)=4 \quad \tilde{X}(1)=1-j\left(\sqrt{2}+1\right) \quad \tilde{X}(2)=0 \quad \tilde{X}(3)=1-j\left(\sqrt{2}-1\right)$$

$$\tilde{X}(4)=0 \quad \tilde{X}(5)=1+j\left(\sqrt{2}-1\right) \quad \tilde{X}(6)=0 \quad \tilde{X}(7)=1+j\left(\sqrt{2}+1\right)$$

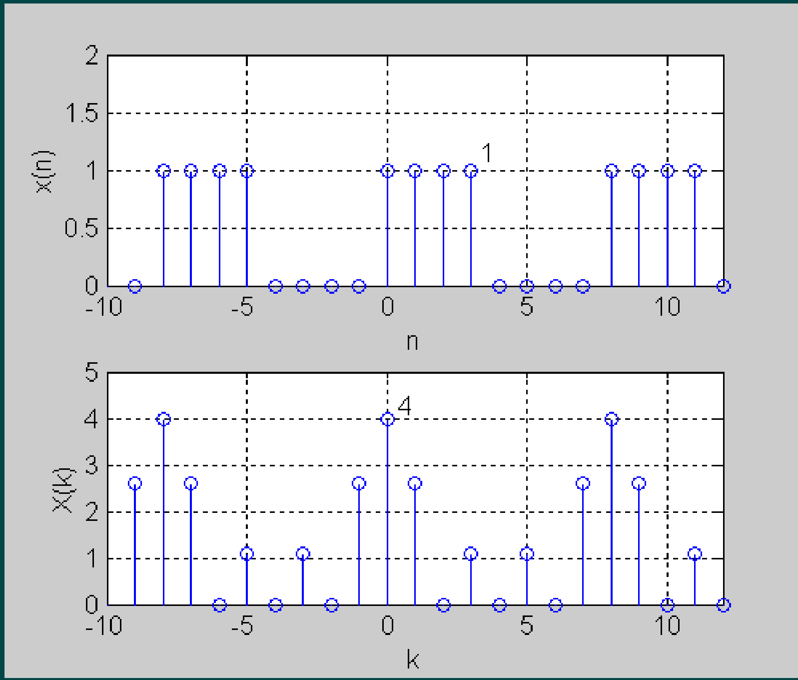
解法二：公式解

$$\tilde{X}(k) = DFS\left[\tilde{x}(n)\right] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$= \sum_{n=0}^{7} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{8}kn} = \sum_{n=0}^{3} e^{-j\frac{\pi}{4}kn} = \frac{1-e^{-j\frac{\pi}{4}k\cdot 4}}{1-e^{-j\frac{\pi}{4}k}}$$

$$= \frac{e^{-j\frac{\pi}{2}k}\left(e^{j\frac{\pi}{2}k} - e^{-j\frac{\pi}{2}k}\right)}{e^{-j\frac{\pi}{8}k}\left(e^{j\frac{\pi}{8}k} - e^{-j\frac{\pi}{8}k}\right)}$$

经典转换



$$= e^{-j\frac{3}{8}\pi k} \frac{\sin\frac{\pi}{2}k}{\sin\frac{\pi}{8}k}$$

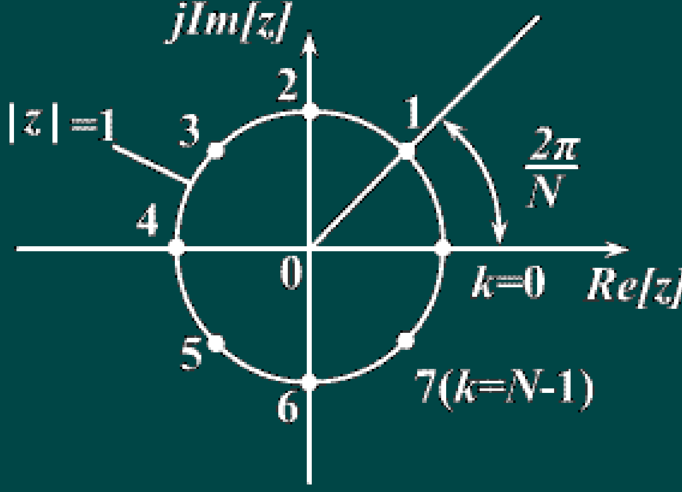
$\tilde{X}(k)$与z变换的关系：

$$令x(n)=\begin{cases}\tilde{x}(n) & 0\le n\le N-1\\ 0 & 其它n\end{cases}$$

对$x(n)$作z变换： $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n}$

$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{nk}=X(z)\Big|_{z=W_N^{-k}=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$$

$\therefore \tilde{X}(k)$可看作是对$\tilde{x}(n)$的一个周期$x(n)$做z变换然后将z变换在z平面单位圆上按等间隔角$\frac{2\pi}{N}$抽样得到



DFS的性质

1、线性：

若 $$\tilde{X}_1(k) = DFS[\tilde{x}_1(n)]$$

$$\tilde{X}_2(k) = DFS[\tilde{x}_2(n)]$$

则

$$DFS[a\tilde{x}_1(n) + b\tilde{x}_2(n)] = a\tilde{X}_1(k) + b\tilde{X}_2(k)$$

其中，a,b 为任意常数

2、序列的移位

$$DFS[\tilde{x}(n+m)] = W_N^{-mk}\tilde{X}(k) = e^{j\frac{2\pi}{N}mk}\tilde{X}(k)$$

证：$DFS[\tilde{x}(n+m)] = \sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n+m)W_N^{nk}$

令$i = n+m$ $\quad = \sum_{i=m}^{N-1+m}\tilde{x}(i)W_N^{k(i-m)}$

$$= W_N^{-mk}\sum_{i=0}^{N-1}\tilde{x}(i)W_N^{ki} = W_N^{-mk}\tilde{X}(k)$$

3、调制特性

$$DFS[W_N^{nl}\tilde{x}(n)]=\tilde{X}(k+l)$$

证：$DFS[W_N^{ln}\tilde{x}(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{ln}\tilde{x}(n)W_N^{nk}$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{(l+k)n}$$

$$=\tilde{X}(k+l)$$

4、周期卷积和

若 $\tilde{Y}(k)=\tilde{X}_1(k)\cdot\tilde{X}_2(k)$

则 $\tilde{y}(n)=IDFS[\tilde{Y}(k)]=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$

$$=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_2(m)\tilde{x}_1(n-m)$$

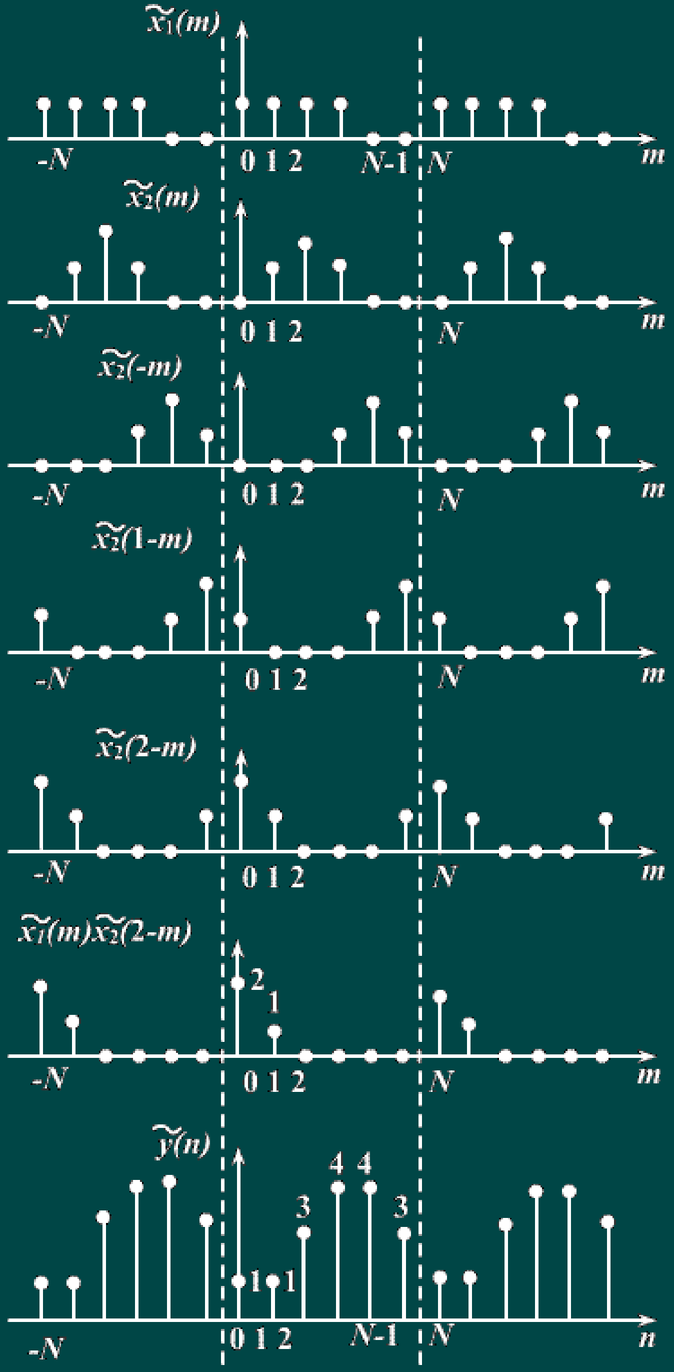
证：$\tilde{y}(n) = IDFS[\tilde{X}_1(k)\cdot\tilde{X}_2(k)]$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}_1(k)\tilde{X}_2(k)W_N^{-kn}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}[\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)W_N^{mk}]\tilde{X}_2(k)W_N^{-kn}$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}_2(k)W_N^{-(n-m)k}]$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$$

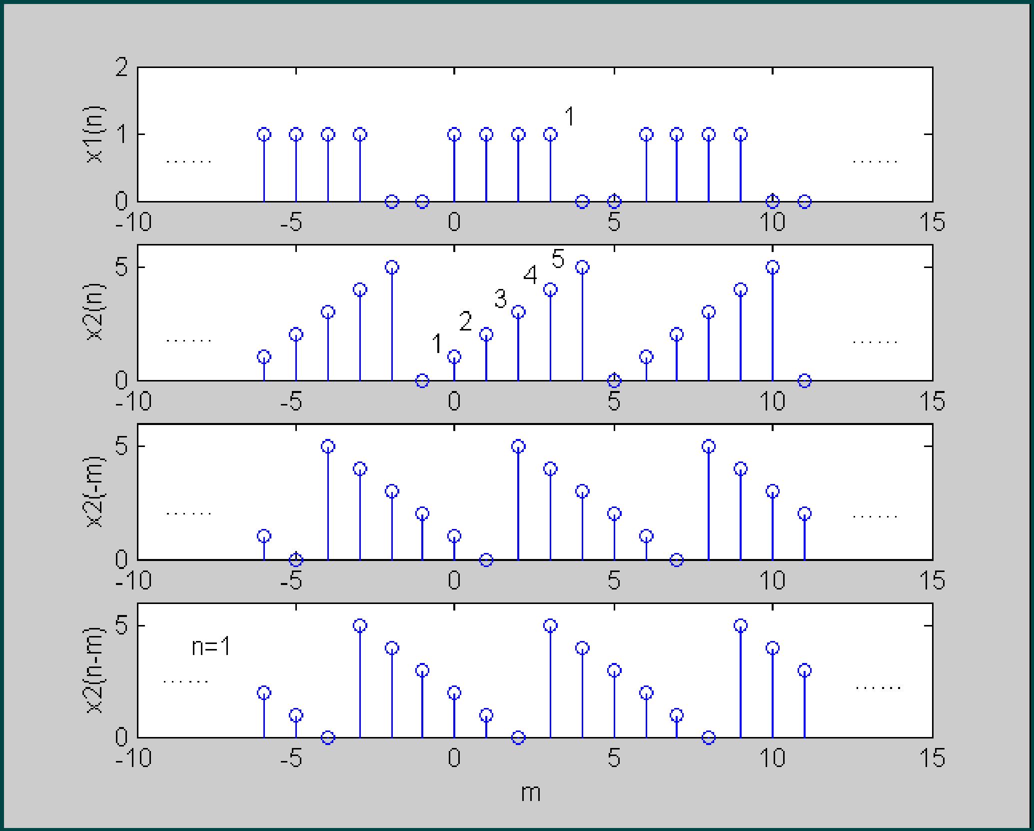


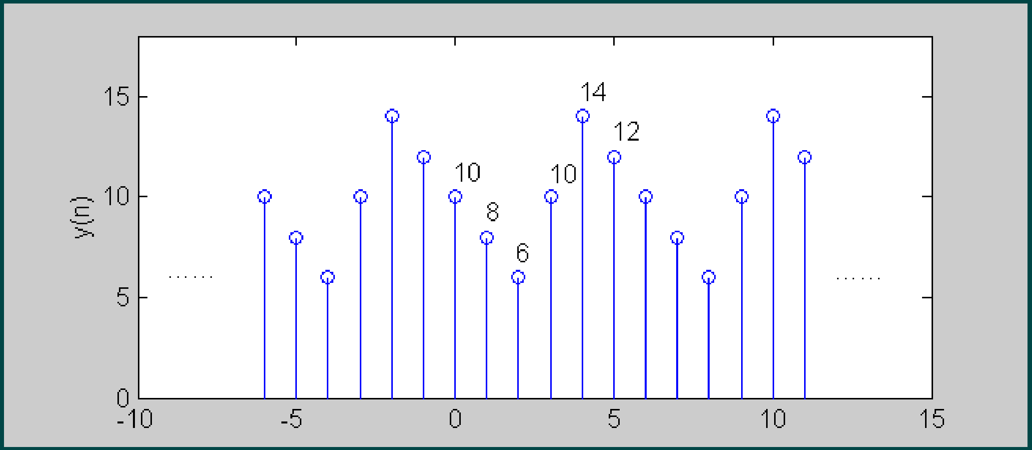
x̃₁(m)
-N
0 1 2
N-1
N
m
x̃₂(m)
x̃₂(-m)
x̃₂(1-m)
x̃₂(2-m)
x̃₁(m)x̃₂(2-m)
2
1
ỹ(n)
4 4
3
3
1 1 1
n

例：已知序列$x_1(n)=R_4(n), x_2(n)=(n+1)R_5(n)$分别将序列以周期为6周期延拓成周期序列$\tilde{x}_1(n)$和$\tilde{x}_2(n)$，求两个周期序列的周期卷积和。

解：$$\tilde{y}(n)=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$$

$$=\sum_{m=0}^{5}\tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$$


x1(n)
x2(n)
x2(-m)
x2(n-m)
n=1
m
1
1
2
3
4
5


y(n)
14
12
10
10
8
6

n/m	$\cdots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$	
$\tilde{x}_1(n/m)$	$\cdots$	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	$\cdots$	
$\tilde{x}_2(n/m)$	$\cdots$	3	4	5	0	1	2	3	4	5	0	1	2	$\cdots$	$\tilde{y}(n)$
$\tilde{x}_2(-m)$	$\cdots$	5	4	3	2	1	0	5	4	3	2	1	0	$\cdots$	10
$\tilde{x}_2(1-m)$	$\cdots$	0	5	4	3	2	1	0	5	4	3	2	1	$\cdots$	8
$\tilde{x}_2(2-m)$	$\cdots$	1	0	5	4	3	2	1	0	5	4	3	2	$\cdots$	6
$\tilde{x}_2(3-m)$	$\cdots$	2	1	0	5	4	3	2	1	0	5	4	3	$\cdots$	10
$\tilde{x}_2(4-m)$	$\cdots$	3	2	1	0	5	4	3	2	1	0	5	4	$\cdots$	14
$\tilde{x}_2(5-m)$	$\cdots$	4	3	2	1	0	5	4	3	2	1	0	5	$\cdots$	12

同样，利用对称性

若 $\tilde{y}(n)=\tilde{x}_1(n)\tilde{x}_2(n)$

则 $\tilde{Y}(k)=DFS[\tilde{y}(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{y}(n)W_N^{nk}$

$$=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\tilde{X}_1(l)\tilde{X}_2(k-l)$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\tilde{X}_2(l)\tilde{X}_1(k-l)$$

时域卷积对应频域相乘
时域相乘对应频域卷积再乘上周期的倒数
这与FS的性质是完全一致的

三、离散傅里叶变换（DFT）

长度为N的有限长序列$x(n)$

周期为N的周期序列$\tilde{x}(n)$

$$x(n) = \tilde{x}(n) R_N(n)$$ $\tilde{x}(n)$的主值序列

$$\tilde{x}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n + rN) = x((n))_N$$ $x(n)$的周期延拓

同样：X(k)也是一个N点的有限长序列

$$\tilde{X}(k) = X((k))_N$$

$$X(k) = \tilde{X}(k) R_N(k)$$

有限长序列的DFT正变换和反变换：

$$X(k)=DFT[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}\qquad 0\le k\le N-1$$

$$x(n)=IDFT[X(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk}\qquad 0\le n\le N-1$$

或 $$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}R_N(k)=\tilde{X}(k)R_N(k)$$

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk}R_N(n)=\tilde{x}(n)R_N(n)$$

其中： $W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

解释一下：
①在求x~(n)的时候，我们只使用了X~(k)中k=0,1，…，N-1位上的数，所以将X~(k)抽取为X~(k)RN(k)即X((k))N时不影响求x(n)
②在求X~(k)的时候我们只使用了x~(n)中n=0,1^，N-1位上的数值，所以将x~(n)化为x~(n)RN(n)即x((n))N时不影响求X(k)

③因此，我们可以将周期序列抽取为主值序列，其对应的DFS可以由原周期序列的DFS经过同样的抽取得到
④综上所述，DFS只适用于周期序列或者是有限长序列，而后者则是以周期序列的主值序列进行处理得来的，暗含有周期的特性

DFT与序列的DTFT和z变换的关系：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\omega n} \qquad X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} = X(z)\Big|_{z=W_N^{-k}=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$$

对于同一个周期序列，其不同的抽样方式可能会得到不同的主值序列x(n)，通过添零和去零还可以改变序列N的值，因此可以用以下两种方法对不同N的x(n)实现快速求DFT

x(n)的N点DFT是x(n)的z变换在单位圆上的N点等间隔抽样；

抽样的起始点/终止点必须为原点

x(n)的DTFT在区间[0，2π]上的N点等间隔抽样。

(DFT：离散傅里叶变换，DTFT：离散时间信号的傅里叶变换）

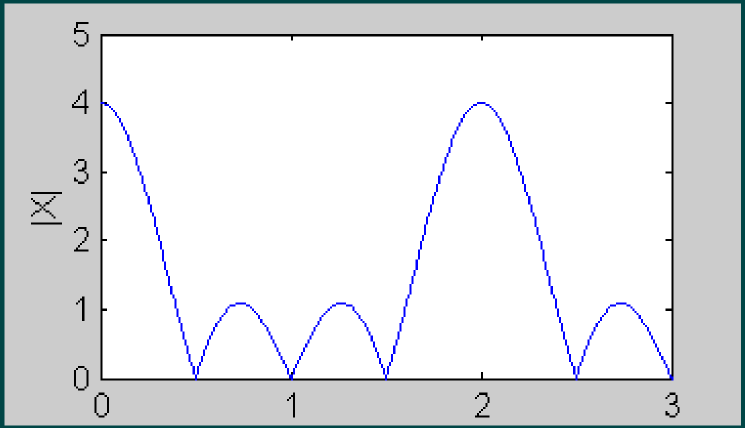
例：已知序列$x(n)=R_4(n)$，求$x(n)$的8点和16点DFT。

解：求$x(n)$的DTFT

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{3}e^{-j\omega n}=\frac{1-e^{-j4\omega}}{1-e^{-j\omega}}$$

$$=\frac{e^{-j2\omega}\left(e^{j2\omega}-e^{-j2\omega}\right)}{e^{-j\frac{\omega}{2}}\left(e^{j\frac{\omega}{2}}-e^{-j\frac{\omega}{2}}\right)}$$

$$=e^{-j\frac{3}{2}\omega}\frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)}$$

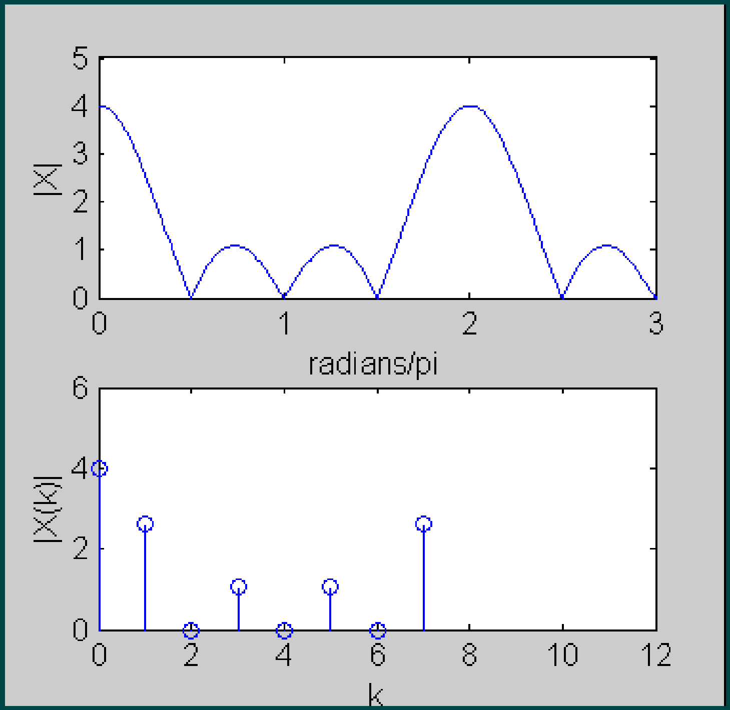


求$x(n)$的8点$DFT \quad N=8$

$$X(k)=X\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{8}k}$$

$$=e^{-j\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{4}k}\frac{\sin\left(2\cdot\frac{2\pi}{8}k\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{8}k\right)}$$

$$=e^{-j\frac{3}{8}\pi k}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{8}k\right)}$$

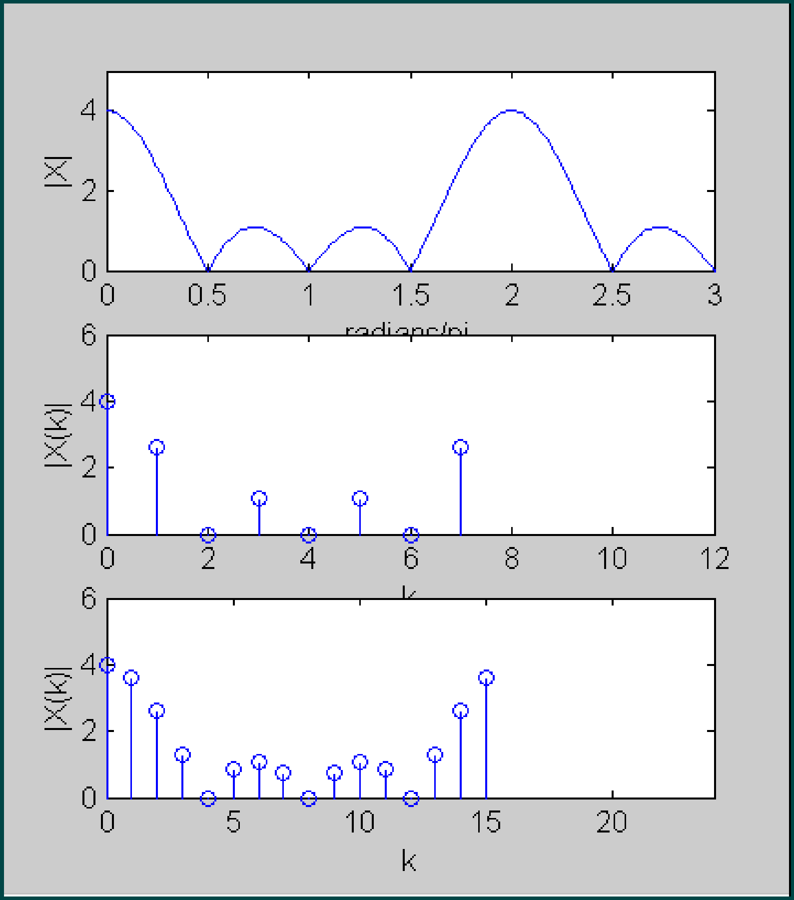


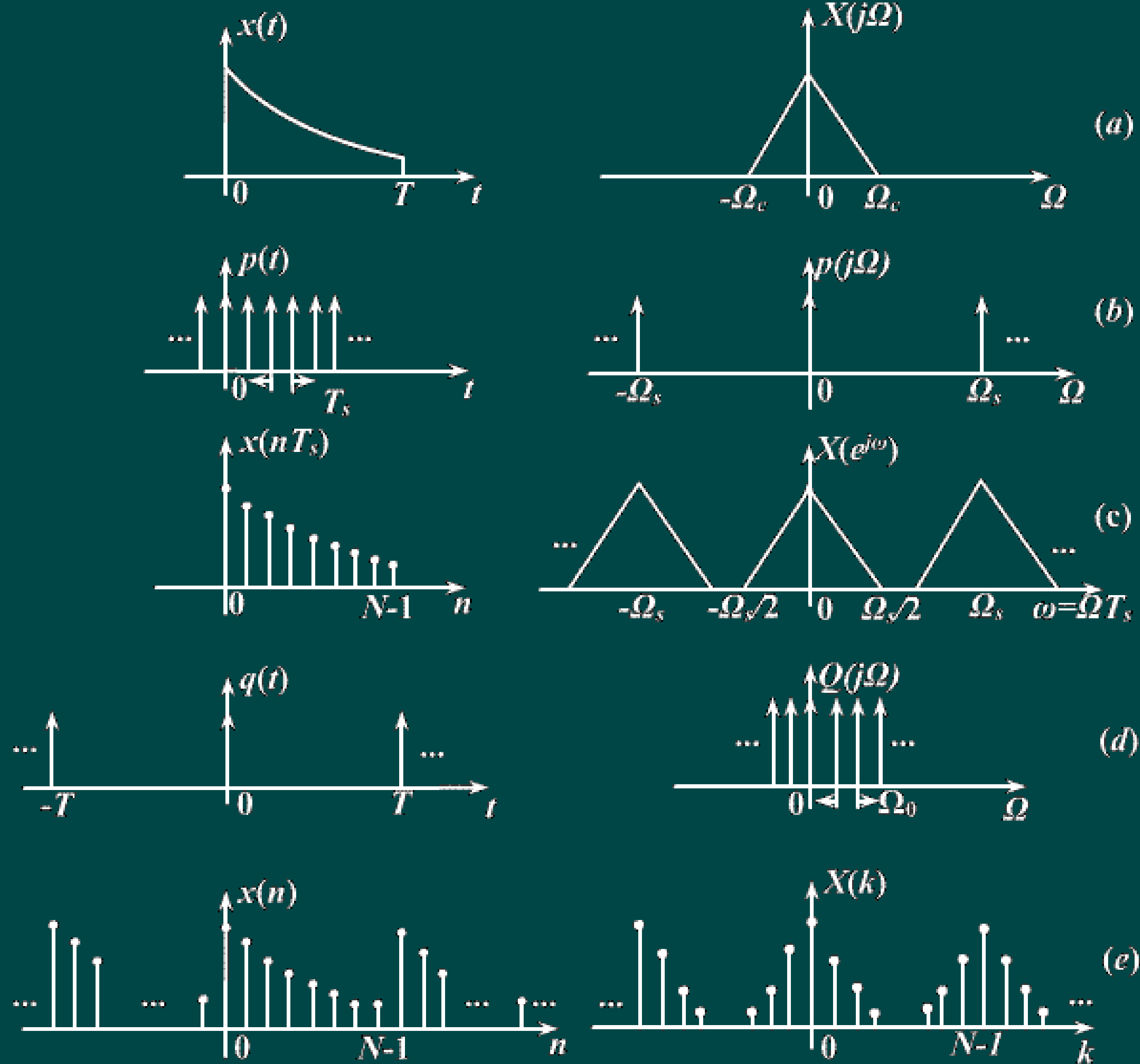
求$x(n)$的16点$DFT \quad N=16$

$$X(k)=X\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{16}k}$$

$$=e^{-j\frac{3}{2}\cdot\frac{2\pi}{16}k}\frac{\sin\left(2\cdot\frac{2\pi}{16}k\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{16}k\right)}$$

$$=e^{-j\frac{3}{16}\pi k}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}k\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{16}k\right)}$$





x(t)
0
T
t
X(jΩ)
-Ωc
0
Ωc
Ω
(a)
p(t)
0
Ts
t
p(jΩ)
-Ωs
0
Ωs
Ω
(b)
x(nTs)
0
N-1
n
X(e^{jω})
-Ωs
-Ωs/2
0
Ωs/2
Ωs
ω=ΩTs
(c)
q(t)
-T
0
T
t
Q(jΩ)
0
Ω0
Ω
(d)
x(n)
0
N-1
n
X(k)
0
N-1
k
(e)

DFT的图形解释

四、离散傅里叶变换的性质

DFT正变换和反变换：

$$X(k)=DFT[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}R_N(k)$$

$$x(n)=IDFT[X(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk}R_N(n)$$

其中： $W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

1、线性：

若 $$X_1(k) = DFT[x_1(n)]$$

$$X_2(k) = DFT[x_2(n)]$$

则 $$DFT[ax_1(n) + bx_2(n)] = aX_1(k) + bX_2(k)$$

a,b为任意常数

这里，序列长度及DFT点数均为N

若不等，分别为N_1，N_2，则需补零使两序列长度相等，均为N，且 $N \geq \max[N_1, N_2]$

2、序列的圆周移位

定义： $x_m(n)=x((n+m))_N R_N(n)$

$$x(n) \xrightarrow[\text{延拓}]{\text{周期}} \tilde{x}(n) \xrightarrow{\text{移位}} \tilde{x}(n+m) \xrightarrow[\text{序列}]{\text{取主值}} x_m(n)$$

$$= x((n+m))_N$$


x(n)
0
N-1
N
n
x̃(n)
x̃(n+2)=x((n+2))N
x((n+2))NRN(n)
2
1
n=0
N-2
N-1

圆周移位的性质

$$X_m(k)=DFT[x_m(n)]=DFT[x((n+m))_N R_N(n)]$$

$$=W_N^{-mk}X(k)$$

证：$DFT[x((n+m))_N R_N(n)]=DFT[\tilde{x}(n+m)R_N(n)]$

$$=DFS[\tilde{x}(n+m)]R_N(k)$$

$$=W_N^{-mk}\tilde{X}(k)R_N(k)=W_N^{-mk}X(k)$$

有限长序列的圆周移位导致频谱线性相移，而对频谱幅度无影响。

之所以称之为圆周移位，是因为在时域上有限长的这种先延拓后位移最后取主值序列的操作对频域的影响效果是均匀分布在在Z平面中单位圆上的X(k)围绕原点旋转m rad，因此称之为圆周位移

调制特性：

$$IDFT[X((k+l))_N R_N(k)] = W_N^{nl} x(n) = e^{-j\frac{2\pi}{N}nl} x(n)$$

证：$IDFT[X((k+l))_N R_N(k)] = IDFT[\tilde{X}(k+l)R_N(k)]$

$$= IDFS[\tilde{X}(k+l)]R_N(n)$$

$$= W_N^{nl}\tilde{x}(n)R_N(n) = W_N^{nl} x(n)$$

时域序列的调制等效于频域的圆周移位

$$DFT\left[x(n)\cos\left(\frac{2\pi nl}{N}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[X((k-l))_N+X((k+l))_N\right]R_N(k)$$

$$DFT\left[x(n)\sin\left(\frac{2\pi nl}{N}\right)\right]=\frac{1}{2j}\left[X((k-l))_N-X((k+l))_N\right]R_N(k)$$

证：$IDFT\left\{\frac{1}{2j}\left[X((k-l))_N-X((k+l))_N\right]R_N(k)\right\}$

$$=\frac{1}{2j}\left[W_N^{-nl}x(n)-W_N^{nl}x(n)\right]$$

$$=\frac{e^{j\frac{2\pi}{N}nl}-e^{-j\frac{2\pi}{N}nl}}{2j}x(n)=x(n)\sin\frac{2\pi nl}{N}$$

3、共轭对称性

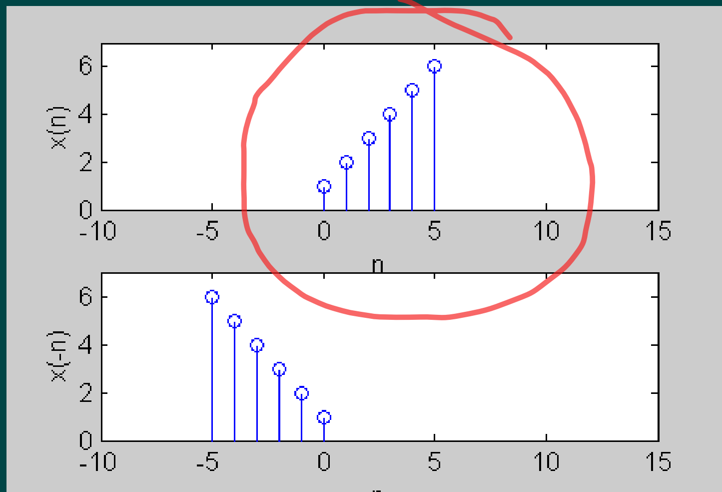
序列的Fourier变换的对称性质中提到：

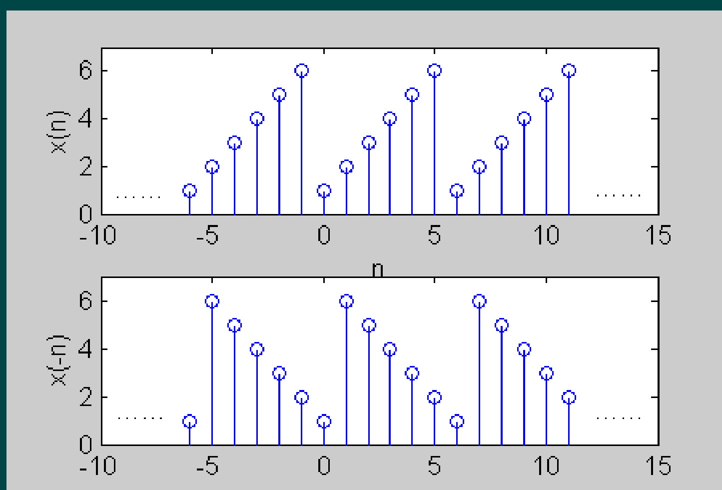
任意序列可表示成 $x_e(n)$ 和 $x_o(n)$ 之和:

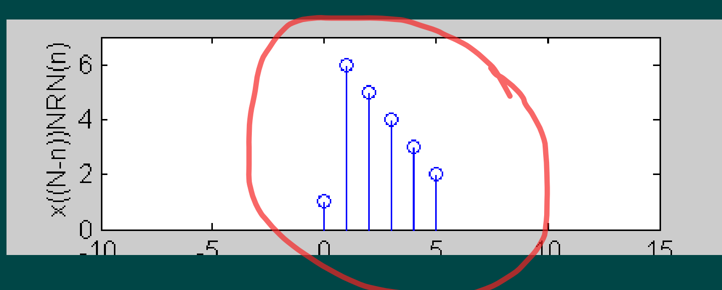
$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

其中：$x_e(n) = x_e^*(-n) = 1/2[x(n) + x^*(-n)]$

$$x_o(n) = -x_o^*(-n) = 1/2[x(n) - x^*(-n)]$$







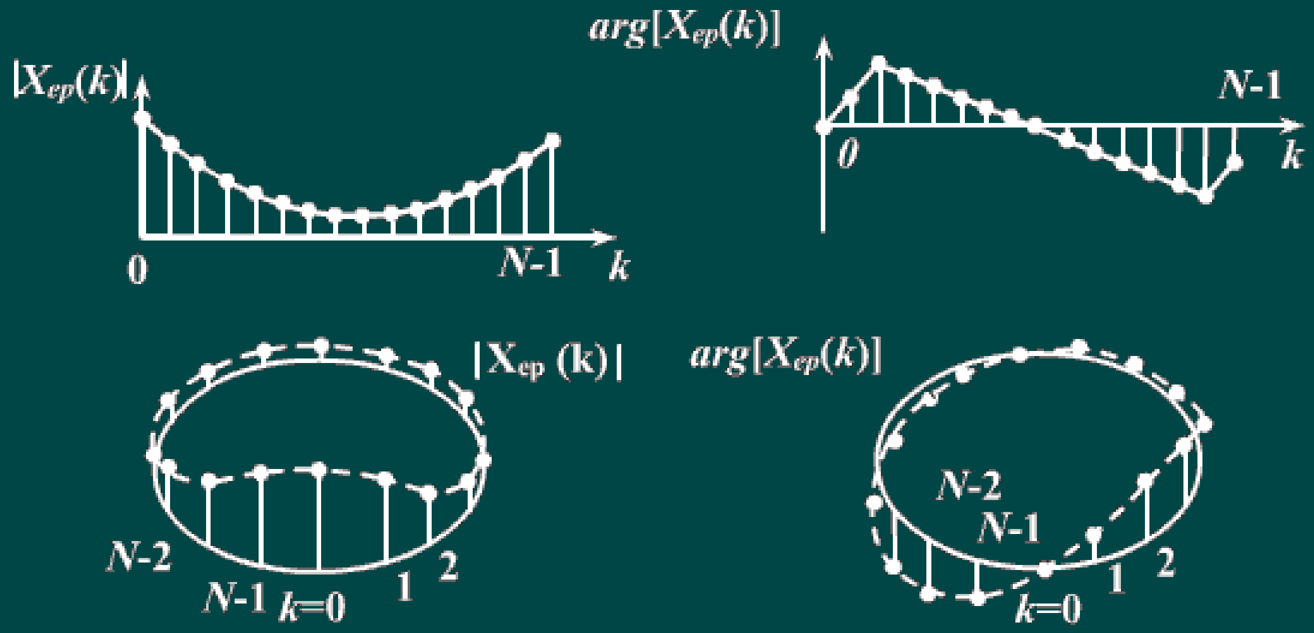
$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)]$$

周期性共轭对称分量：

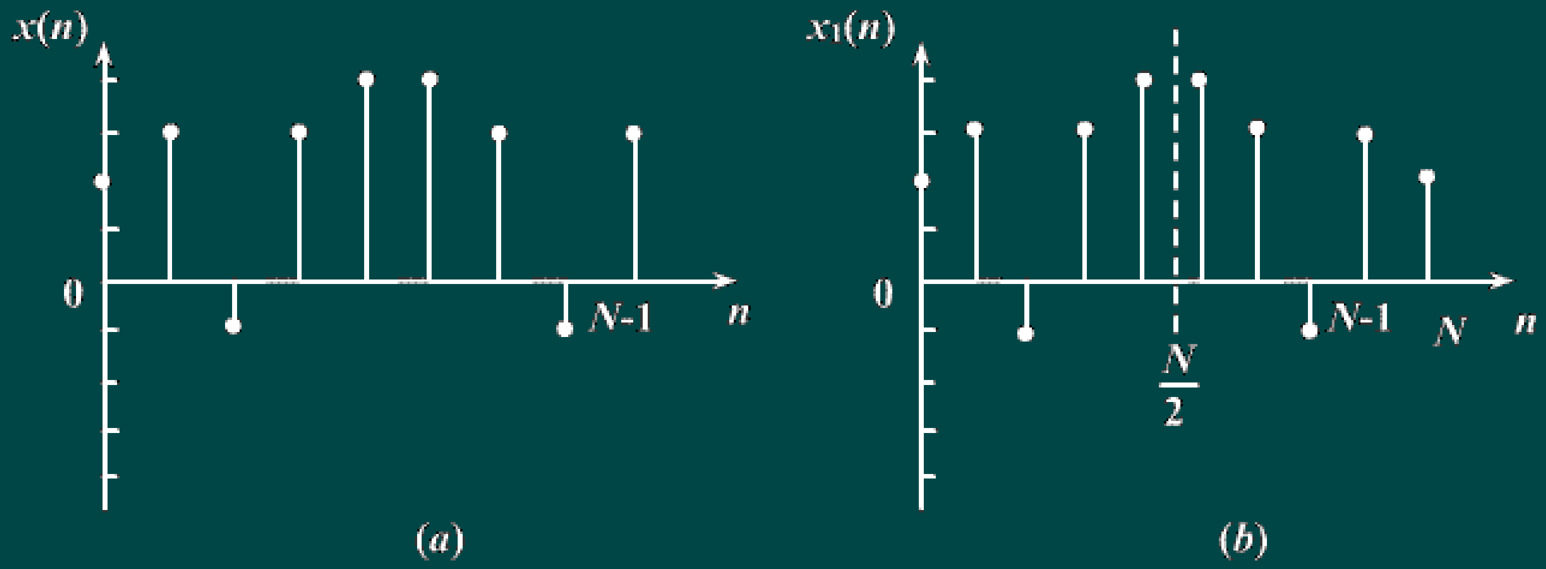
$$x((n))_N$$

$$\tilde{x}_e(n) = \frac{1}{2}[\tilde{x}(n) + \tilde{x}^*(-n)]$$

$$x^*((N-n))_N$$



$|X_{ep}(k)|$
0
N-1
k
$arg[X_{ep}(k)]$
N-1
0
k
$|X_{ep}(k)|$
N-2
N-1
k=0
1
2
$arg[X_{ep}(k)]$
N-2
N-1
1
2
k=0



x(n)
0
N-1
n
(a)
x1(n)
0
N-1
N
n
N/2
(b)

任意周期序列：$\tilde{x}(n)=\tilde{x}_e(n)+\tilde{x}_o(n)$

其中：

共轭对称分量：

$$\tilde{x}_e(n)=\tilde{x}_e^*(-n)=1/2[\tilde{x}(n)+\tilde{x}^*(-n)]$$

$$=1/2[x((n))_N+x^*((N-n))_N]$$

共轭反对称分量：

$$\tilde{x}_o(n)=-\tilde{x}_o^*(-n)=1/2[\tilde{x}(n)-\tilde{x}^*(-n)]$$

$$=1/2[x((n))_N-x^*((N-n))_N]$$

定义：

有限长序列的圆周共轭对称序列：

$$x_{ep}(n) = \tilde{x}_e(n)R_N(n)$$

$$= 1/2[x((n))_N + x^*((N-n))_N]R_N(n)$$

有限长序列的圆周共轭反对称序列：

$$x_{op}(n) = \tilde{x}_o(n)R_N(n)$$

$$= 1/2[x((n))_N - x^*((N-n))_N]R_N(n)$$

则任意有限长序列：

$$x(n) = x_{ep}(n) + x_{op}(n)$$

圆周共轭对称序列满足：

$$x_{ep}(n)=x_{ep}^{*}((N-n))_N R_N(n)$$

实部圆周偶对称 $\mathrm{Re}[x_{ep}(n)]=\mathrm{Re}[x_{ep}((N-n))_N R_N(n)]$

虚部圆周奇对称 $\mathrm{Im}[x_{ep}(n)]=-\mathrm{Im}[x_{ep}((N-n))_N R_N(n)]$

幅度圆周偶对称 $\left|x_{ep}(n)\right|=\left|x_{ep}((N-n))_N R_N(n)\right|$

幅角圆周奇对称 $\arg[x_{ep}(n)]=-\arg[x_{ep}((N-n))_N R_N(n)]$

圆周共轭反对称序列满足：

$$x_{op}(n) = -x_{op}^{*}((N-n))_N R_N(n)$$

实部圆周奇对称 $\mathrm{Re}[x_{op}(n)] = -\mathrm{Re}[x_{op}((N-n))_N R_N(n)]$

虚部圆周偶对称 $\mathrm{Im}[x_{op}(n)] = \mathrm{Im}[x_{op}((N-n))_N R_N(n)]$

幅度圆周偶对称 $\left|x_{op}(n)\right| = \left|x_{op}((N-n))_N R_N(n)\right|$

幅角没有对称性

同理： $X(k) = X_{ep}(k) + X_{op}(k)$

其中： $X_{ep}(k) = X_{ep}^*((N-k))_N R_N(k)$

$$= 1/2[X((k))_N + X^*((N-k))_N] R_N(k)$$

$$X_{op}(k) = -X_{op}^*((N-k))_N R_N(k)$$

$$= 1/2[X((k))_N - X^*((N-k))_N] R_N(k)$$

共轭对称性

这里所说的序列x(n)应该指的是有限长序列，其DFT所对应的X(k)也是有限长的

序列		DFT
$x(n)$	$\overset{DFT}{\Longleftrightarrow}$	$X(k)$
$\mathrm{Re}[x(n)]$	$\Longleftrightarrow$	$X_{ep}(k)$
$j\,\mathrm{Im}[x(n)]$	$\Longleftrightarrow$	$X_{op}(k)$
$x_{ep}(n)$	$\Longleftrightarrow$	$\mathrm{Re}[X(k)]$
$x_{op}(n)$	$\Longleftrightarrow$	$j\,\mathrm{Im}[X(k)]$

实数序列的共轭对称性

序列		DFT
$\mathrm{Re}[x(n)]$	$\Longleftrightarrow$	$X_{ep}(k) = X(k)$
$j\,\mathrm{Im}[x(n)] = 0$	$\Longleftrightarrow$	$X_{op}(k) = 0$
$x_{ep}(n)$	$\Longleftrightarrow$	$\mathrm{Re}[X(k)]$
$x_{op}(n)$	$\Longleftrightarrow$	$j\,\mathrm{Im}[X(k)]$

纯虚序列的共轭对称性

序列		DFT
$\mathrm{Re}[x(n)]=0$	$\Longleftrightarrow$	$X_{ep}(k)=0$
$j\,\mathrm{Im}[x(n)]$	$\Longleftrightarrow$	$X_{op}(k)=X(k)$
$x_{ep}(n)$	$\Longleftrightarrow$	$\mathrm{Re}[X(k)]$
$x_{op}(n)$	$\Longleftrightarrow$	$j\,\mathrm{Im}[X(k)]$

例：设$x_1(n)$和$x_2(n)$都是N点的实数序列，试用一次N点DFT运算来计算它们各自的DFT：

$$DFT[x_1(n)] = X_1(k) \qquad DFT[x_2(n)] = X_2(k)$$

解：利用两序列构成一个复序列

$$w(n) = x_1(n) + jx_2(n)$$

则

$$W(k) = DFT[w(n)] = DFT[x_1(n) + jx_2(n)]$$

$$= DFT[x_1(n)] + jDFT[x_2(n)]$$

$$= X_1(k) + jX_2(k)$$

由$x_1(n)=\mathrm{Re}[w(n)]$得

$$X_1(k)=DFT[x_1(n)]=DFT\{\mathrm{Re}[w(n)]\}=W_{ep}(k)$$

$$=\frac{1}{2}[W((k))_N+W^*((N-k))_N]R_N(k)$$

由$x_2(n)=\mathrm{Im}[w(n)]$得

$$X_2(k)=DFT[x_2(n)]=DFT\{\mathrm{Im}[w(n)]\}=\frac{1}{j}W_{op}(k)$$

$$=\frac{1}{2j}[W((k))_N-W^*((N-k))_N]R_N(k)$$

例：设$x(n)$是$2N$点实数序列，试用一次N点DFT来计算$x(n)$的$2N$点DFT: $X(k)$

解：将$x(n)$按奇偶分组，令

$$x_1(n) = x(2n) \qquad n = 0,1,\ldots,N-1$$

$$x_2(n) = x(2n+1) \qquad n = 0,1,\ldots,N-1$$

构成一个复序列 $w(n) = x_1(n) + jx_2(n)$

对$w(n)$进行一次N点DFT运算

$$W(k) = DFT[w(n)] = X_1(k) + jX_2(k)$$

得
$$\left.\begin{aligned} X_1(k) &= W_{ep}(k) \\ X_2(k) &= \frac{1}{j} W_{op}(k) \end{aligned}\right\}$$
均为N点DFT

而$X(k)$是$2N$点DFT

4、复共轭序列

$$DFT[x^*(n)] = X^*((-k))_N R_N(k) = X^*((N-k))_N R_N(k)$$

证：$DFT[x^*(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) W_N^{nk} R_N(k)$

$$= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-nk}\right]^* R_N(k) = X^*((-k))_N R_N(k)$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(N-k)n}\right]^* R_N(k)$$

$$= X^*((N-k))_N R_N(k)$$

5、DFT形式下的Parseval定理

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y^*(k)$$

按位相乘，效果相当于MATLAB中的点乘

证：
$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} Y(k)W_N^{-nk}\right]^*$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} Y^*(k)\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y^*(k)$$

令$y(n)=x(n)$，则

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)x^*(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)X^*(k)$$

即：$$\boxed{\sum_{n=0}^{N-1} \left|x(n)\right|^2=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \left|X(k)\right|^2}$$

6、圆周卷积和

设$x_1(n)$和$x_2(n)$都是点数为N的有限长序列

（若不等，分别为N_1、N_2点，则取$N \geq \max(N_1, N_2)$，对序列补零使其为N点）

$$DFT[x_1(n)] = X_1(k) \qquad DFT[x_2(n)] = X_2(k)$$

若 $Y(k) = X_1(k) \cdot X_2(k)$

则 $y(n) = IDFT[Y(k)] = [\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N] R_N(n)$

$$= [\sum_{m=0}^{N-1} x_2(m) x_1((n-m))_N] R_N(n)$$

证：由周期卷积和，若$\tilde{Y}(k)=\tilde{X}_1(k)\cdot\tilde{X}_2(k)$,

则 $\tilde{y}(n)=IDFS[\tilde{Y}(k)]$

$$=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$$

$$=\sum_{m=0}^{N-1}x_1((m))_N\,x_2((n-m))_N$$

$$=\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)x_2((n-m))_N$$

$$\therefore y(n)=\tilde{y}(n)R_N(n)=[\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)x_2((n-m))_N]R_N(n)$$

圆周卷积过程：

1）补零

2）周期延拓

3）翻褶，取主值序列

4）圆周移位

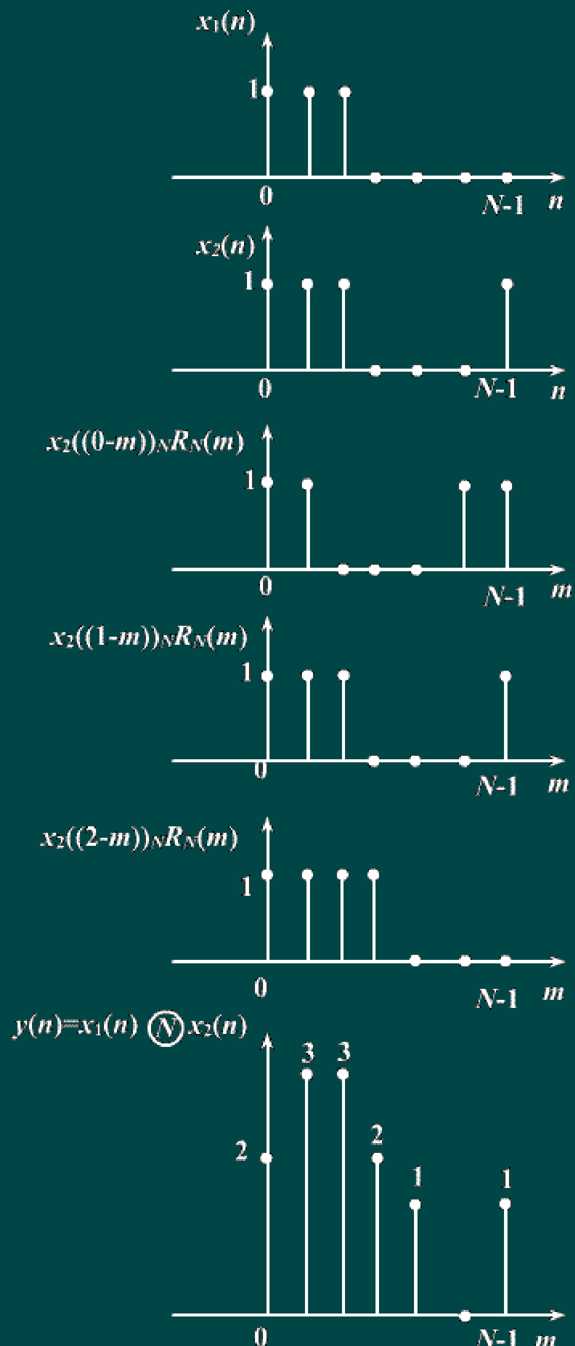
5）相乘相加

在翻转后每移动一次（从第零次开始算），就截取移动后序列的主值序列，进行序列间的点乘并累加

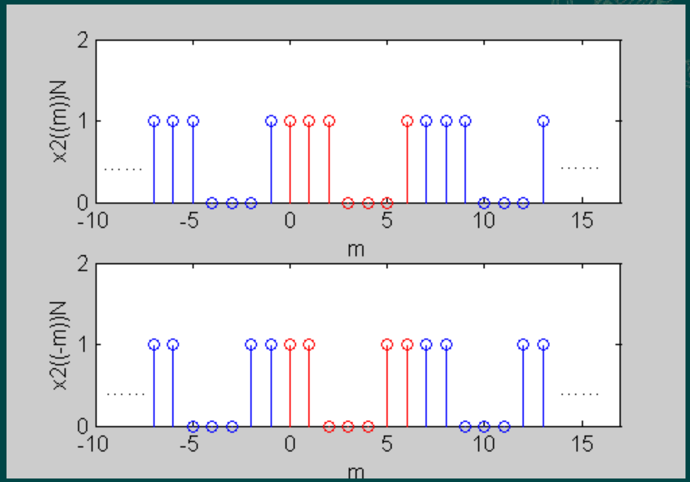
用Ⓝ表示圆周卷积和

$$y(n)=[\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)x_2((n-m))_N]R_N(n) = x_1(n)\,Ⓝ\,x_2(n)$$

$$=[\sum_{m=0}^{N-1}x_2(m)x_1((n-m))_N]R_N(n) = x_2(n)\,Ⓝ\,x_1(n)$$



$x_1(n)$
1
0
N-1
n
$x_2(n)$
1
0
N-1
n
$x_2((0-m))_N R_N(m)$
1
0
N-1
m
$x_2((1-m))_N R_N(m)$
1
0
N-1
m
$x_2((2-m))_N R_N(m)$
1
0
N-1
m
$y(n)=x_1(n)$ Ⓝ $x_2(n)$
3 3
2
2
1
1
0
N-1
m

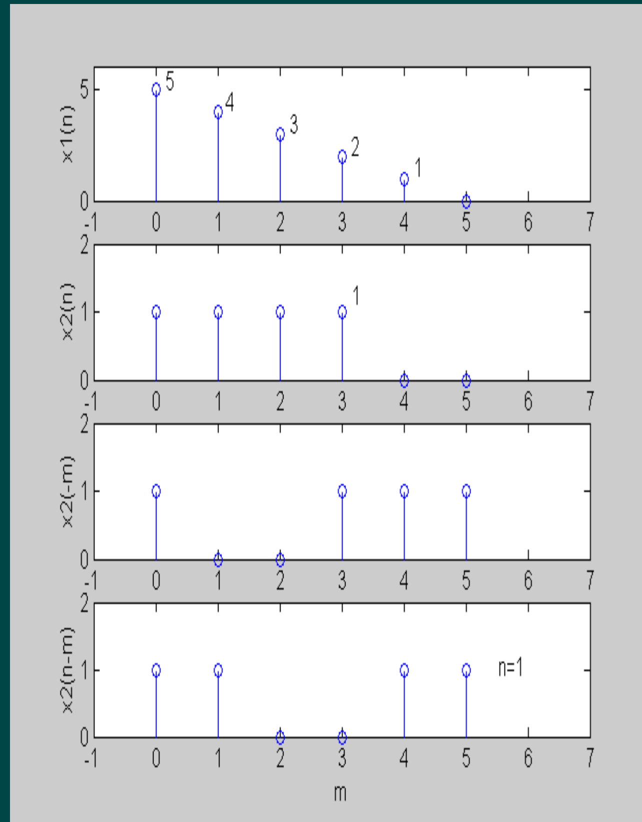


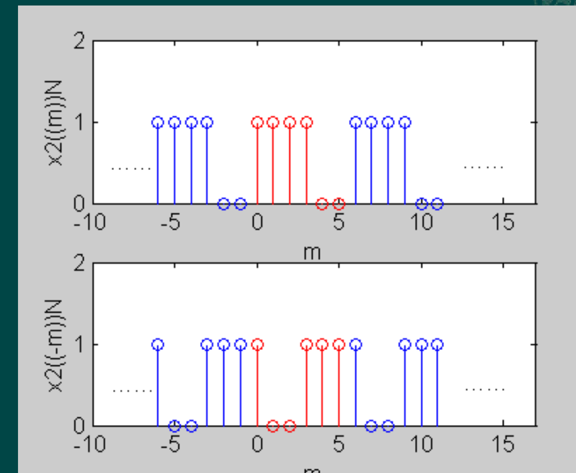
x2((m))N
x2((-m))N
m
m
......
-10 -5 0 5 10 15
0 1 2

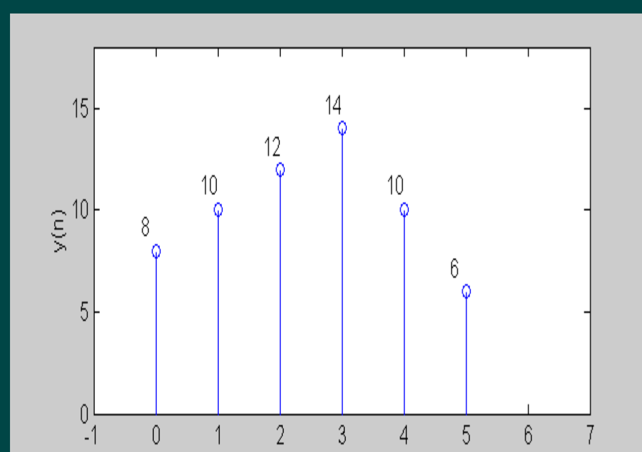
例：已知序列 $x_1(n)=(5-n)R_5(n)$，$x_2(n)=R_4(n)$

求两个序列的6点圆周卷积和。

n/m	…-3 -2 -1	0 1 2 3 4 5	6 7…	
$x_1(n/m)$		5 4 3 2 1 0		
$x_2(n/m)$		1 1 1 1 0 0		
$x_2((m))_6$	… 1 0 0	1 1 1 1 0 0	1 1…	
$x_2((-m))_6$	… 1 1 1	1 0 0 1 1 1	1 0…	$y(n)$
$x_2((-m))_6 R_6(n)$		1 0 0 1 1 1		8
$x_2((1-m))_6 R_6(n)$		1 1 0 0 1 1		10
$x_2((2-m))_6 R_6(n)$		1 1 1 0 0 1		12
$x_2((3-m))_6 R_6(n)$		1 1 1 1 0 0		14
$x_2((4-m))_6 R_6(n)$		0 1 1 1 1 0		10
$x_2((5-m))_6 R_6(n)$		0 0 1 1 1 1		6


x1(n)
5
4
3
2
1
x2(n)
1
x2(-m)
x2(n-m)
n=1
m


x2((m))N
x2((-m))N
m
......


y(n)
8
10
12
14
10
6

同样，利用对称性

若 $$y(n)=x_1(n)\cdot x_2(n)$$

则 $$Y(k)=DFT[y(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}y(n)W_N^{nk}$$

$$=\frac{1}{N}[\sum_{l=0}^{N-1}X_1(l)X_2((k-l))_N]R_N(k)$$

$$=\frac{1}{N}[\sum_{l=0}^{N-1}X_2(l)X_1((k-l))_N]R_N(k)$$

这两个性质是由周期序列的DFS性质得来的，只不过周期序列所要求的卷积是线性卷积，而此处有限长序列所要求的卷积是圆周卷积

7、有限长序列的线性卷积与圆周卷积

设：$x_1(n) \quad 0 \le n \le N_1 - 1$

$x_2(n) \quad 0 \le n \le N_2 - 1 \qquad$ 令$N \ge \max[N_1, N_2]$

N点圆周卷积：

$$y_c(n) = x_1(n) \circledN x_2(n) = [\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N] R_N(n)$$

$$= [\sum_{m=0}^{N-1} x_2(m) x_1((n-m))_N] R_N(n) = x_2(n) \circledN x_1(n)$$

线性卷积：

$$y_l(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=0}^{N_1-1} x_1(m) x_2(n-m)$$

$$= \sum_{m=0}^{N_2-1} x_2(m) x_1(n-m) = x_2(n) * x_1(n)$$

讨论圆周卷积和线性卷积之间的关系：

对$x_1(n)$和$x_2(n)$补零，使其长度均为N点；

对$x_2(n)$周期延拓：$\tilde{x}_2(n) = x_2((n))_N = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_2(n+rN)$

圆周卷积：$y_c(n) = [\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N] R_N(n)$

$$= [\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_2(n+rN-m)] R_N(n)$$

$$= [\sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2(n+rN-m)] R_N(n)$$

$$= [\sum_{r=-\infty}^{\infty} \underline{y_l(n+rN)}] R_N(n)$$

N点圆周卷积$y_c(n)$~~是~~线性卷积$y_l(n)$以N为周期的周期延拓序列~~的~~主值序列。

N，补零后序列对齐的长度

而$y_l(n)$的长度为N_1+N_2-1

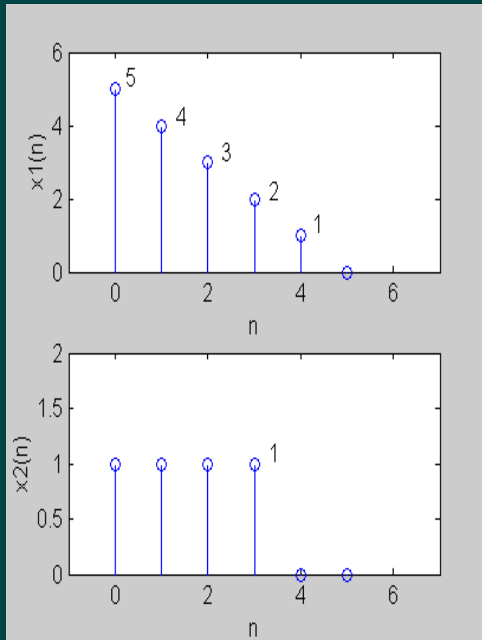
$\therefore$只有当$N \geq N_1+N_2-1$时，$y_l(n)$以N为周期进行周期延拓才无混叠现象

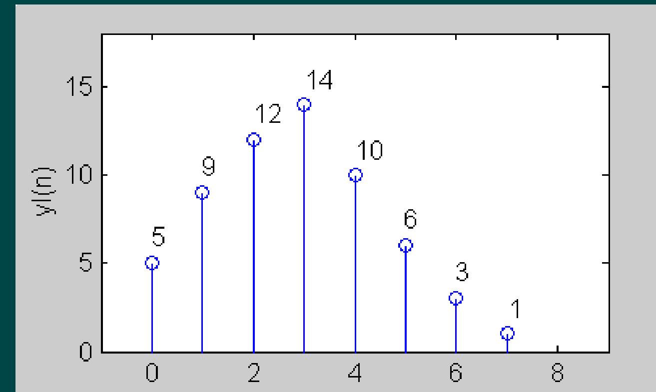
即　当圆周卷积长度$N \geq N_1+N_2-1$时，

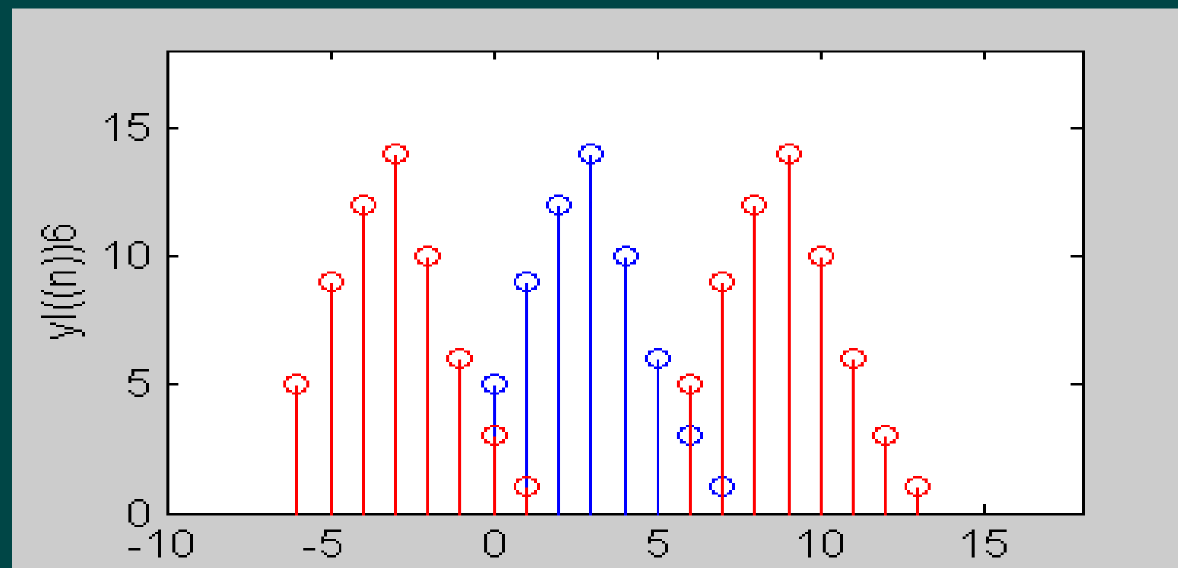
N点圆周卷积能代表线性卷积

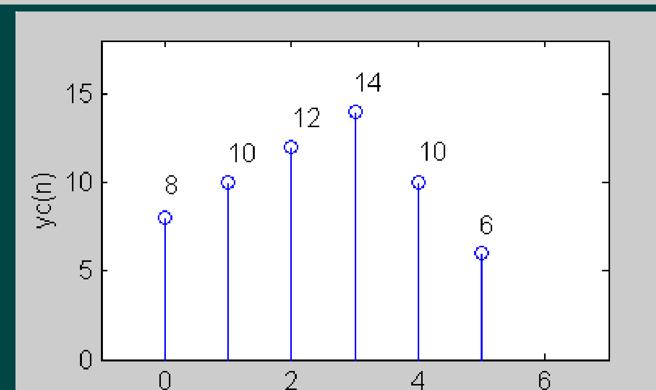
声明：这里的“能代表”≠“相等”，这是因为在N>N1+N2-1的时候，yc(n)会比yl(n)在两侧多出一些零，只有在N=N1+N2-1的时候才有yc(n)=yl(n)

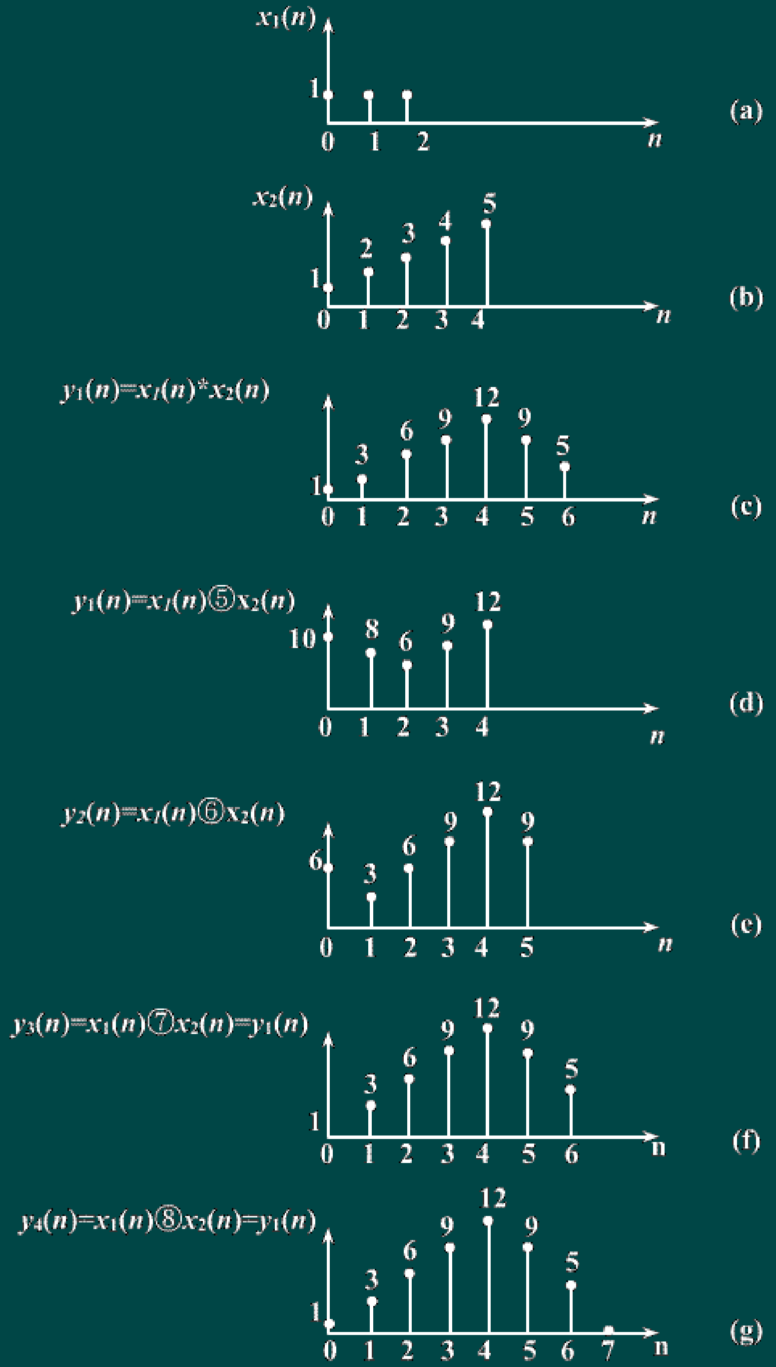
$$x_1(n) \textcircled{N} x_2(n) = x_1(n) * x_2(n) \quad \begin{cases} N \geq N_1+N_2-1 \\ 0 \leq n \leq N_1+N_2-2 \end{cases}$$


x1(n)
n
5
4
3
2
1
x2(n)
n
1

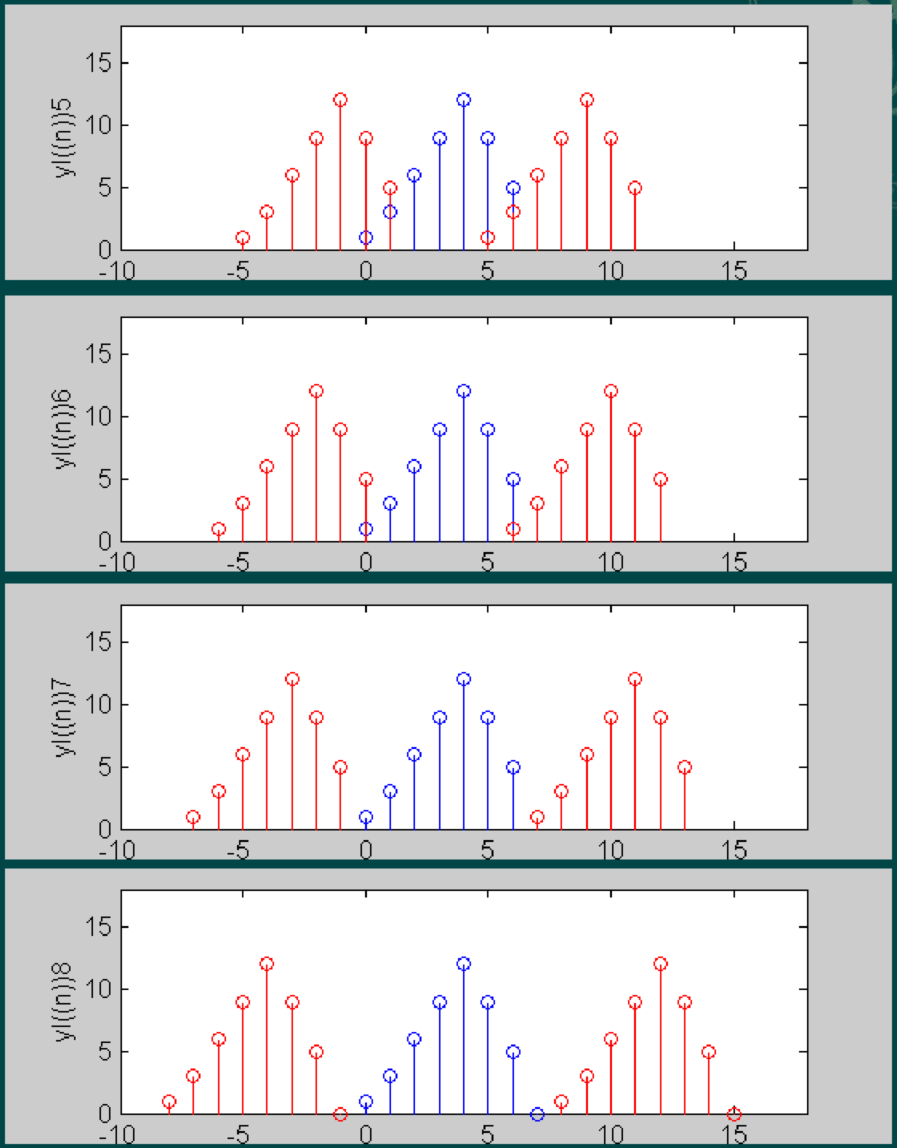

yl(n)
5
9
12
14
10
6
3
1


yl((n))6


yc(n)
8
10
12
14
10
6



x1(n)
(a)
x2(n)
(b)
y1(n)=x1(n)*x2(n)
(c)
y1(n)=x1(n)⑤x2(n)
(d)
y2(n)=x1(n)⑥x2(n)
(e)
y3(n)=x1(n)⑦x2(n)=y1(n)
(f)
y4(n)=x1(n)⑧x2(n)=y1(n)
(g)



yl((n))5
yl((n))6
yl((n))7
yl((n))8

小结：线性卷积求解方法

- 时域直接求解

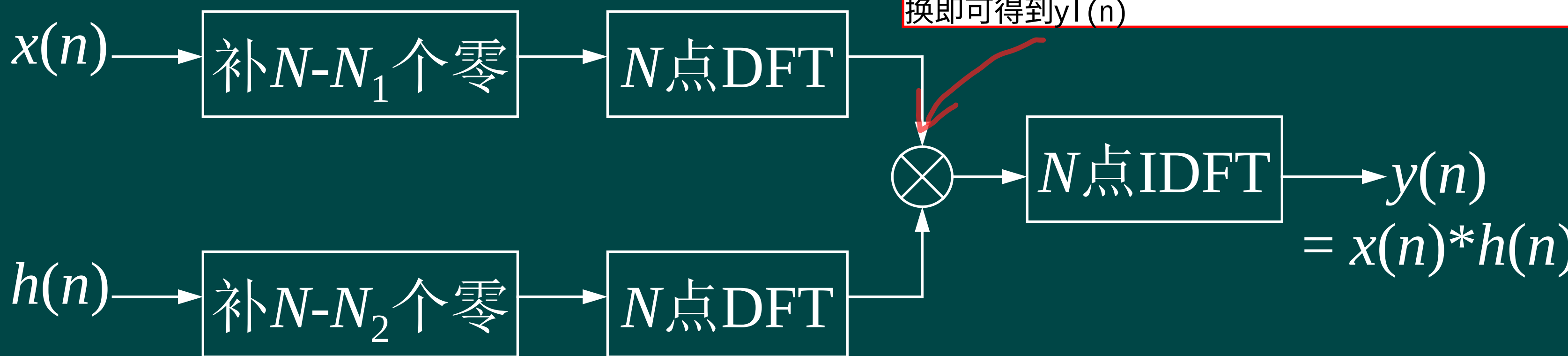
$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$$

- z变换法 $X(z)=ZT[x(n)] \quad H(z)=ZT[h(n)]$

$$y(n)=IZT[Y(z)]=IZT[X(z)\cdot H(z)]$$

- DFT法

满足N=N1+N2-1,所以yc(n)=yl(n),即线性卷积=圆周卷积，有Yl(k)=Yc(k)=X(k)×H(k)，做DFT反变换即可得到yl(n)



8、线性相关与圆周相关

线性相关：

$$r_{xy}(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y^{*}(n-m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n+m)y^{*}(n)$$

自相关函数：

$$r_{xx}(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)x^{*}(n-m)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n+m)x^{*}(n)=r_{xx}^{*}(-m)$$

相关函数不满足交换率：

$$r_{xy}(m) \neq r_{yx}(m) = r_{xy}^*(-m)$$

$$\because r_{yx}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)x^*(n-m) \quad = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^*(k)y(k+m)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^*(k)y[k-(-m)]$$

$$= \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y^*[k-(-m)] \right\}^*$$

$$= r_{xy}^*(-m) \quad \neq r_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n-m)$$

相关函数的z变换：

$$R_{xy}(z)=X(z)Y^*(\frac{1}{z^*})$$

$$R_{xy}(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{xy}(m)z^{-m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n-m)z^{-m}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\sum_{m=-\infty}^{\infty} y^*(n-m)z^{-m}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\sum_{k=-\infty}^{\infty} y^*(k)z^{(k-n)}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}\sum_{k=-\infty}^{\infty} y^*(k)z^{k} = X(z)Y^*(\frac{1}{z^*})$$

相关函数的频谱:

$$R_{xy}(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot Y^*(e^{j\omega})$$

$$R_{xx}(e^{j\omega}) = \left| X(e^{j\omega}) \right|^2$$

圆周相关定理

若 $R_{xy}(k) = X(k) \cdot Y^*(k)$

则 $r_{xy}(m) = IDFT[R_{xy}(k)]$

这里的特殊之处在于其令
DFT(y*(n))=Y*((N-k))N RN (k)
直接等于Y*(k)，然后带入圆周卷积

$$= \sum_{n=0}^{N-1} y^*(n) x((n+m))_N R_N(n)$$

x大

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) y^*((n-m))_N R_N(n)$$

证：先延拓成周期序列 $\tilde{R}_{xy}(k)=\tilde{X}(k)\cdot\tilde{Y}^*(k)$

则 $\tilde{r}_{xy}(m)=IDFS[\tilde{R}_{xy}(k)]=\dfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{Y}^*(k)\tilde{X}(k)W_N^{-mk}$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{Y}^*(k)\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{nk}W_N^{-mk}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{Y}^*(k)W_N^{(n-m)k}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)\tilde{y}^*(n-m)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{y}^*(n)\tilde{x}(n+m)$$

则取主值序列 $r_{xy}(m)=\sum_{n=0}^{N-1}y^*(n)x((n+m))_N R_N(n)$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)y^*((n-m))_N R_N(n)$$

类似于线性卷积与圆周卷积之间的关系

当 $N \geq N_1 + N_2 - 1$ 时，
圆周相关可完全代表线性相关

六、抽样Z变换——频域抽样理论

时域抽样定理：在满足奈奎斯特定理条件下，时域抽样信号可以不失真地还原原连续信号。

频域抽样呢？　　抽样条件？　　内插公式？

任意绝对可和的非周期序列$x(n)$，其z变换：

周期序列不满足绝对可和，所以不能做Z变换

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

对$X(z)$在单位圆上N点等间隔抽样，得周期序列：

$$\tilde{X}(k)=X(z)\Big|_{z=W_N^{-k}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)W_N^{nk}$$

分析：$\tilde{X}(k)\to x(n)\quad ??$

令$\tilde{x}_N(n)$为$\tilde{X}(k)$的$IDFS$:

$$\tilde{x}_N(n)=IDFS[\tilde{X}(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)W_N^{-nk}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}[\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)W_N^{mk}]W_N^{-nk}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\underline{[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{(m-n)k}]}$$

$$=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x(n+rN)$$

$$\underline{\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{(m-n)k}}=\begin{cases}1 & m=n+rN \quad r\text{为任意整数}\\ 0 & \text{其它}m\end{cases}$$

由频域抽样序列$\tilde{X}(k)$还原得到的周期序列是原非周期序列$x(n)$的周期延拓序列，其周期为频域抽样点数N。

所以：时域抽样造成频域周期延拓

同样，频域抽样造成时域周期延拓

- x(n)为无限长序列—混叠失真
- x(n)为有限长序列，长度为M

  1）$N \geq M$，不失真

  2）$N < M$，混叠失真

结论的证明疑似有点脱了裤子放屁了：x~(n)的DFS与其主值序列x(n)的DFT都是在x(n)的Z变换的Z平面中以2π/N为角度间隔在单位圆上均匀取点，唯一的区别在于前者的X~(k)是周期序列，在单位圆上进行无限取点；后者的X(k)则是有限长序列，只在单位圆上取一圈点（正好N个）

对于N≥M的要求，实际上就是要求你至少采点采够一圈，最起码获取了X(k)的数据，如果N>M，处理方法看P82，实际上就是用0把原序列由长度M补到长度为N

频率采样定理

若序列长度为M，则只有当频域采样点数：$N \geq M$时，才有

$$\tilde{x}_N(n)R_N(n) = IDFS[\tilde{X}(k)]R_N(n) = x(n)$$

频率采样定理使用指北：
找出你要的有限长序列x(n)，做其Z变换，然后在其Z变换的Z平面中的单位圆上取数量不少于其序列长度的点，由这些点的值作为X~(k)，做傅里叶级数反变换得到周期序列x~(n),取其主值序列就是x(n)（如果N>M，则需要将补的0去掉）

即可由频域采样$X(k)$不失真地恢复原信号$x(n)$，否则产生时域混叠现象。

用频域采样 $X(k)$ 表示 $X(z)$ 的内插公式

M点有限长序列$x(n)$，频域N点等间隔抽样，且

$$N \geq M$$

进行补0，将原序列长度补为N

$$X(z)=\sum_{n=0}^{M-1}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk}\right]z^{-n}$$

接下来这几页PPT的工作就是使用X(k)来表示x(n)的Z变换X(Z)或者是X(e^jw),看看得了

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\left[\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{-nk}z^{-n}\right]$$

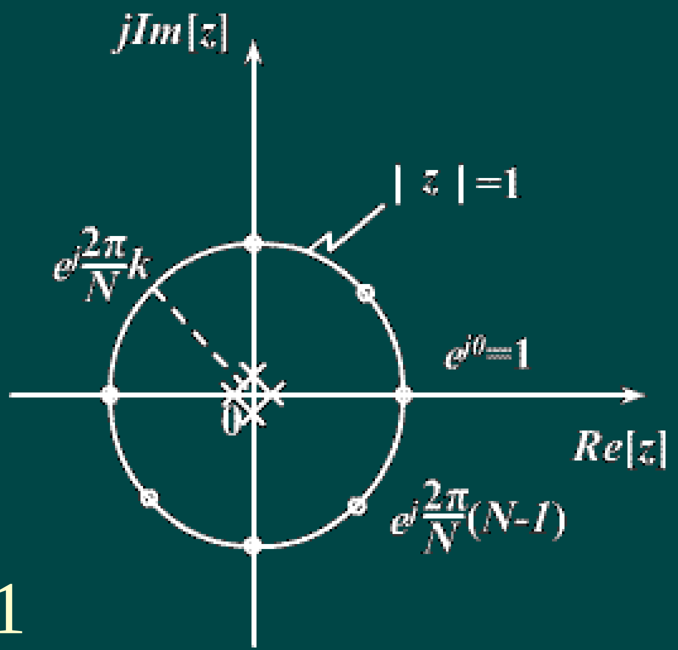
$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\frac{1-W_N^{-Nk}z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}=\frac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{X(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

内插公式：$X(z)=\frac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{X(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$

内插函数：$\Phi_k(z)=\frac{1}{N}\cdot\frac{1-z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$

则内插公式简化为：

$$X(z)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\Phi_k(z)$$



零点：$z=e^{j\frac{2\pi}{N}r}$，$r=0,1,\ldots,N-1$

极点：$z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}$， $z=0$，$(N\text{-}1)$阶

用频域采样 $X(k)$ 表示 $X(e^{j\omega})$ 的内插公式

$$X(e^{j\omega}) = X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\Phi_k(e^{j\omega})$$

$$\Phi_k(e^{j\omega}) = \Phi_k(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{N}\cdot\frac{\sin\left[N\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{N}k\right)\right]}{\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{N}k\right)} e^{j\frac{k\pi}{N}(N-1)} e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}$$

内插函数：

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{N}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega}$$

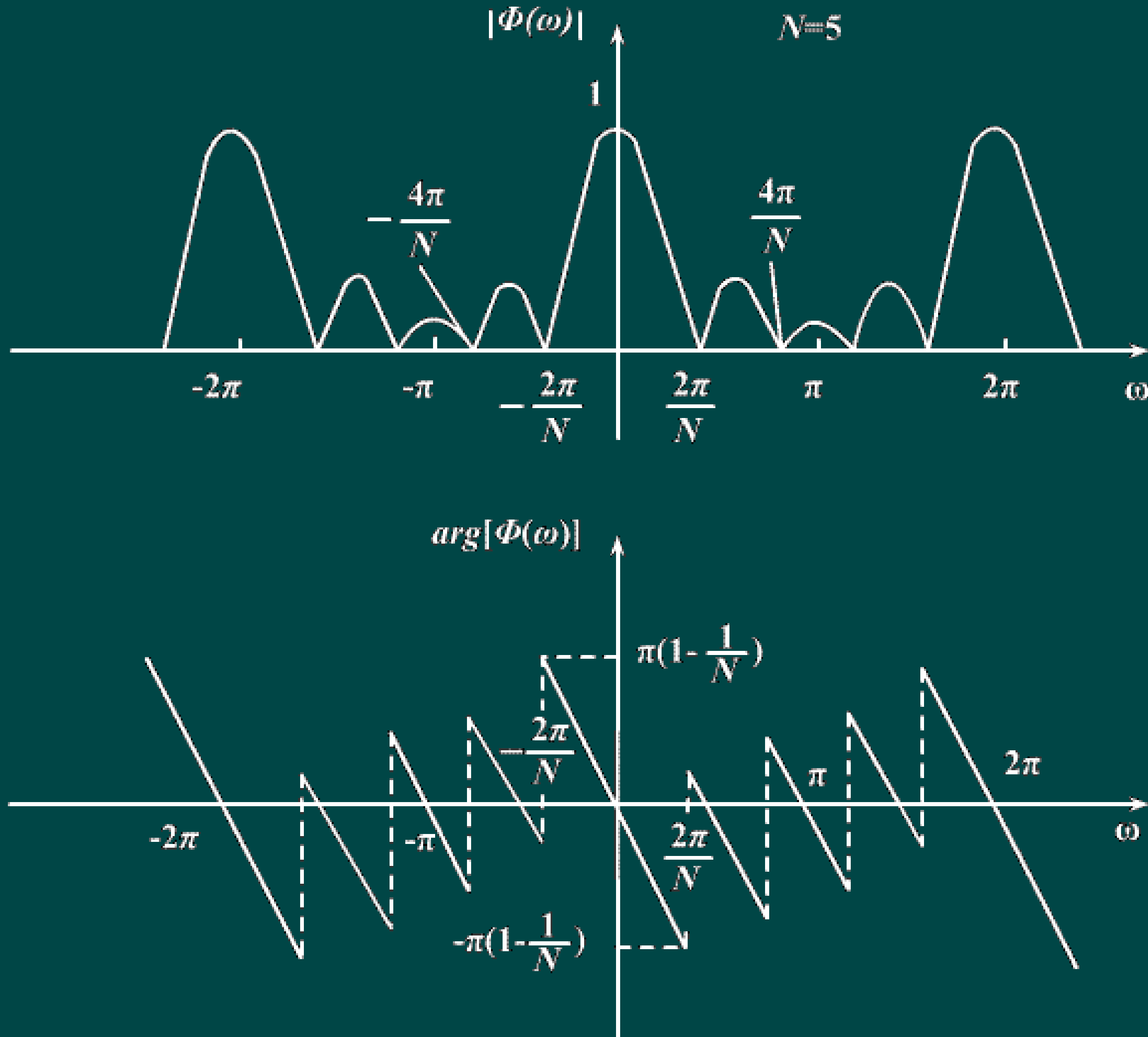
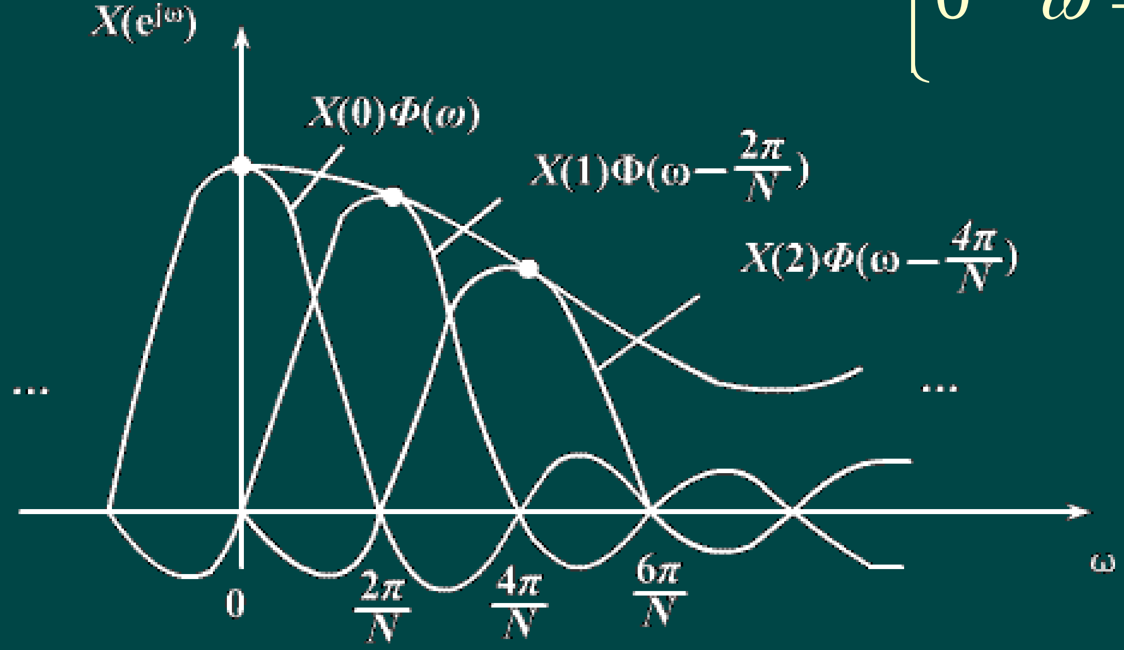


图3-13 插值函数 $\Phi(\omega)$的幅度特性与相位特性（N=5）

内插公式：

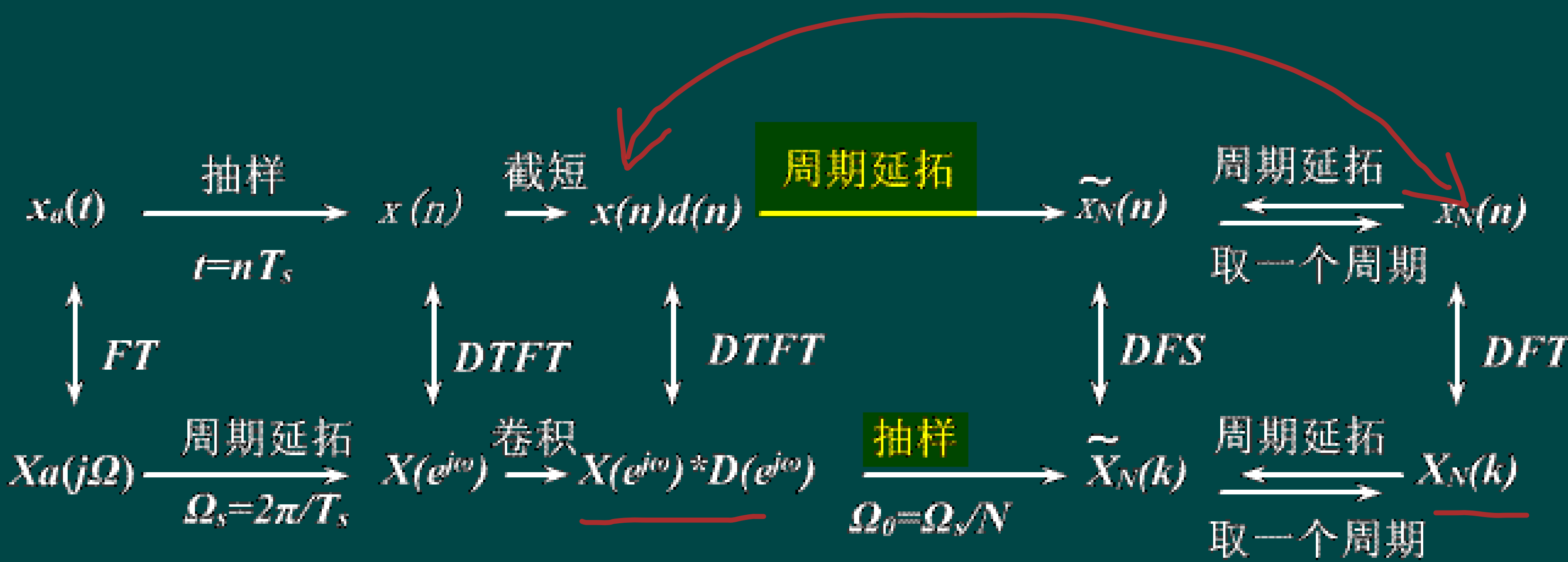
$$X(e^{j\omega})=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\Phi(\omega-\frac{2\pi}{N}k)$$

$$\Phi(\omega-\frac{2\pi}{N}k)=\begin{cases}1 & \omega=\frac{2\pi}{N}k=\omega_k\\ 0 & \omega=\frac{2\pi}{N}i=\omega_i \quad i\neq k\end{cases}$$

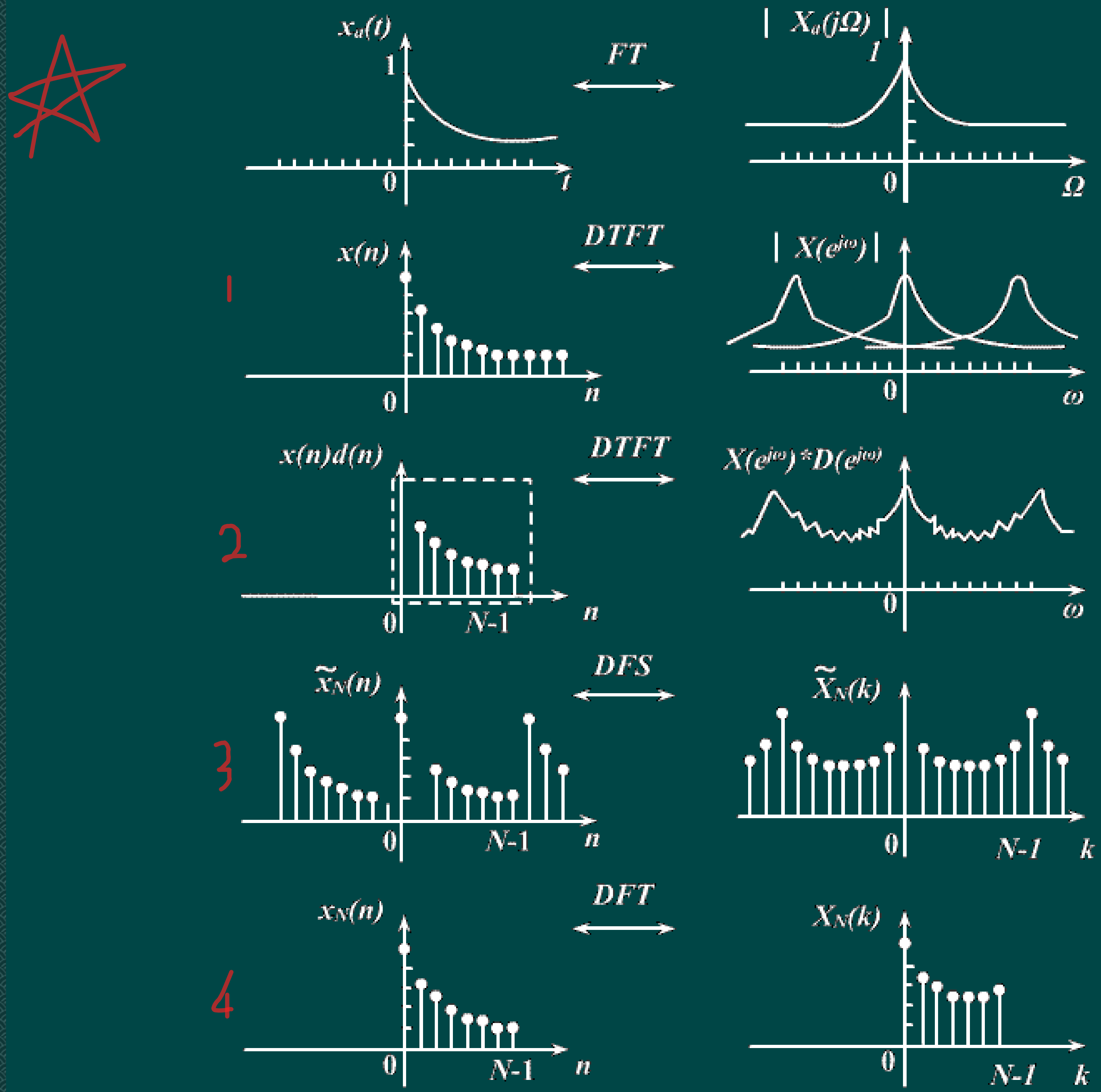


七、用DFT对模拟信号作频谱分析

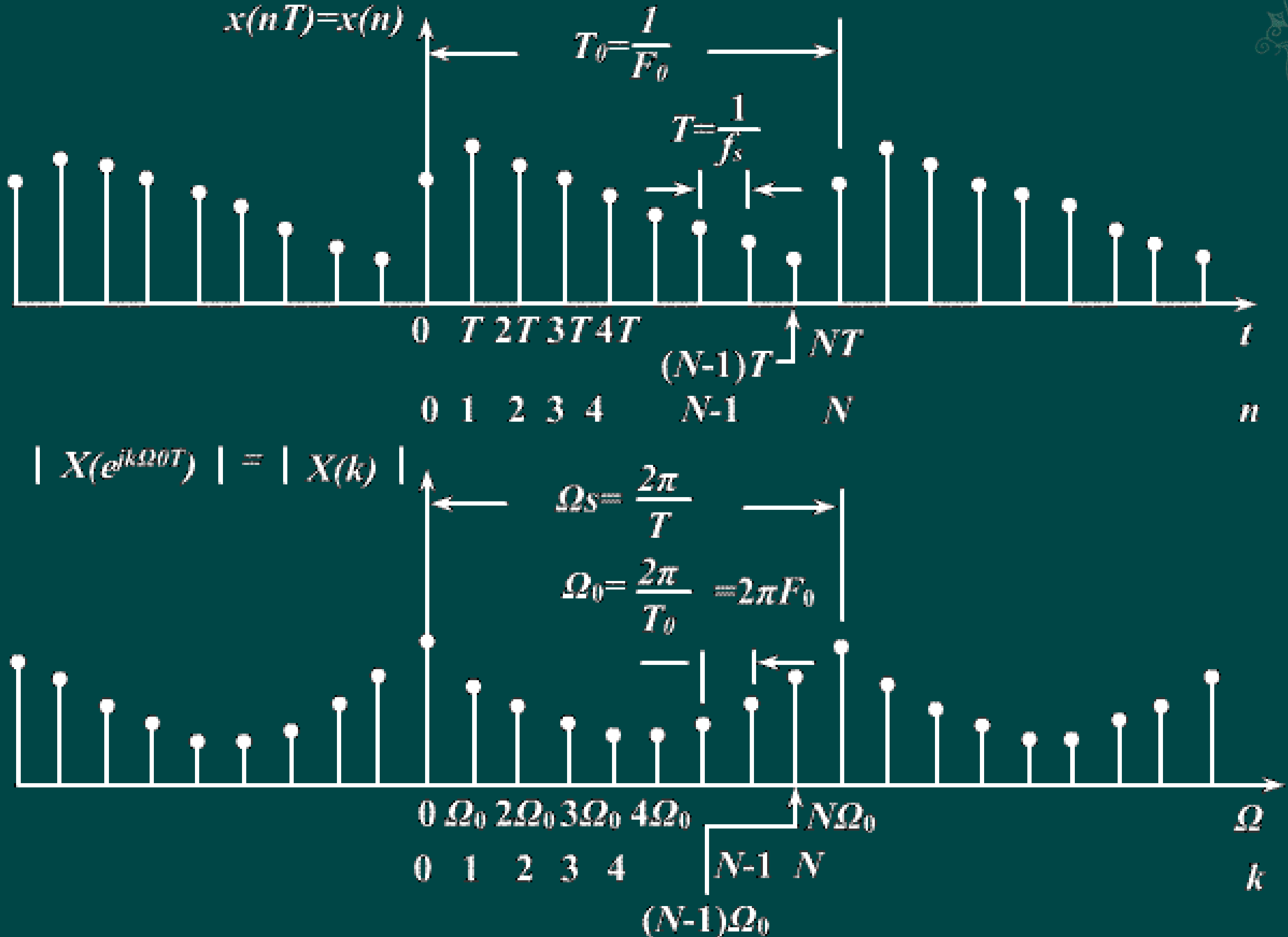
信号的频谱分析：计算信号的傅里叶变换



离散化：
ΩS=Ω0×N（N：对时域序列进行周期延拓时的周期）
原先的频域中为周期连续信号，现在在一个周期中均匀抽取N个点，点与点之间的距离为Ω0（作为一个单位长度）



$x_a(t)$
FT
$|X_a(j\Omega)|$
DTFT
$x(n)$
$|X(e^{j\omega})|$
1
DTFT
$x(n)d(n)$
$X(e^{j\omega})*D(e^{j\omega})$
2
DFS
$\tilde{x}_N(n)$
$\tilde{X}_N(k)$
3
DFT
$x_N(n)$
$X_N(k)$
4
N-1


x(nT)=x(n)
T0=1/F0
T=1/fs
0 T 2T 3T 4T
(N-1)T
NT
t
0 1 2 3 4 N-1 N
n
| X(ejkΩ0T) | = | X(k) |
ΩS= 2π/T
Ω0= 2π/T0 =2πF0
0 Ω0 2Ω0 3Ω0 4Ω0
NΩ0
Ω
0 1 2 3 4 N-1 N
k
(N-1)Ω0

T – 时域采样间隔

f_s – 时域采样频率

T_0 – 信号记录长度

F_0 –（频率分辨率）频域采样间隔

N – 采样点数

f_h – 信号最高频率

$f_s \geq 2 f_h \qquad f_s = 1/T \qquad T_0 = NT = N/f_s$

$f_s = NF_0 \qquad F_0 = f_s/N \qquad \therefore T_0 = 1/F_0$

$$N = \frac{T_0}{T} = \frac{f_s}{F_0}$$

对连续时间非周期信号的DFT逼近

$$X(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\Omega t}dt$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$

我悟了：这个过程就是先对时域进行抽样，也就是分为无数个小段，从这些小段中选出N个小段，也就是抽样后的截断
像现在需要让频域也变为一个周期中有N个离散分量的周期函数，所以对截断后的时域进行周期延拓，延拓的周期为T0，则在频域上作为单位长度的角频率为2π/T0=Ω0，这样的话，信号就变为了时域与频域都离散的信号，随后使用DTFT进行（类周期）分析即可

1）将 $x(t)$ 在 t 轴上等间隔（T）分段 时域抽样

$$t\to nT \qquad dt\to T \qquad \int_{-\infty}^{\infty}dt\to\sum_{n=-\infty}^{\infty}T$$

$$X(j\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\Omega t}dt\approx\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)e^{-j\Omega nT}\cdot T$$

2）将 $x(n)$ 截短成有限长序列 $t=0\sim T_0$，N 个时域抽样点

时域抽样完后截短

$$X(j\Omega)\approx T\sum_{n=0}^{N-1}x(nT)e^{-j\Omega nT}$$

3）频域抽样：一个周期分N段，采样间隔F_0，时域周期延拓，

周期为$T_0 = 1/F_0$　　$\Omega_0 = 2\pi F_0$

这一步可以理解为我们已经将时域的信号转化为了离散状态，现在通过对时域的周期延拓将频域也变为离散状态，之后的就可以用本章的知识做DTFT

$$X(jk\Omega_0) \approx T\sum_{n=0}^{\text{N-1}} x(nT)e^{-jk\Omega_0 nT}$$

$$\Omega = k\Omega_0$$

$$\Omega_0 T = 2\pi F_0 / f_s = 2\pi / N$$

$$= T\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = T \cdot DFT[x(n)]$$

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\Omega_s} X(j\Omega)e^{j\Omega nT}d\Omega$$

$$d\Omega \to \Omega_0$$

$$\approx \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{N-1} X(jk\Omega_0)e^{jk\Omega_0 nT} \cdot \Omega_0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \to \sum_{k=0}^{N-1}\Omega_0$$

$$= F_0\sum_{k=0}^{N-1} X(jk\Omega_0)e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \cdot N \cdot \frac{1}{N} = f_s\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(jk\Omega_0)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$= 1/T \cdot IDFT[X(jk\Omega_0)]$$

对连续时间非周期信号的DFT逼近过程

1）时域抽样

2）时域截断

3）频域抽样

近似逼近：

$$X(jk\Omega_0) \approx T \cdot DFT[x(n)]$$

$$x(n) \approx \frac{1}{T} IDFT[X(jk\Omega_0)]$$

对连续时间周期信号的DFS逼近

$$X(jk\Omega_0) = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t}$$

1）将 $x(t)$在时域抽样：t 轴上等间隔（T）分段

$$t \to nT \qquad dt \to T \qquad \int_0^{T_0} dt \to \sum_{n=0}^{N-1} T$$

$$X(jk\Omega_0) \approx \frac{1}{T_0}\sum_{n=0}^{N-1} x(nT)e^{-jk\Omega_0 nT} \cdot T$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \qquad \Omega_0 T = 2\pi / N$$

$$= \frac{1}{N} \cdot DFS[x(n)] \qquad T_0 = NT$$

2）频域截断：长度正好等于一个周期

$$x(nT) \approx \sum_{k=0}^{N-1} X(jk\Omega_0)e^{jk\Omega_0 nT}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} X(jk\Omega_0)e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = N \cdot \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(jk\Omega_0)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$= N \cdot IDFS[X(jk\Omega_0)]$$

近似逼近：

$$X(jk\Omega_0) \approx \frac{1}{N} \cdot DFS[x(n)]$$

$$x(n) \approx N \cdot IDFS[X(jk\Omega_0)]$$

频率响应的混叠失真及参数的选择

时域抽样：$f_s \geq 2f_h$

频域抽样：$F_0 = 1/T_0$

$$N = \frac{T_0}{T} = \frac{f_s}{F_0}$$

说明：这是因为在（2）中我们将时域截短为N个T的长度，然后在（3）中进行时域的周期延拓，延拓后的信号周期T0就是其核心信号（也就是在（2）中的时域函数）的长度NT，即T0=NT
将周期换为频率就可以得到后半部分

信号最高频率与频率分辨率之间的矛盾

$$N=\frac{T_0}{T}=\frac{f_s}{F_0}$$

要增加信号最高频率f_h↑　则f_s↑

当N给定　F_0必↑，即分辨率↓

要提高频率分辨率，即F_0↓　则$T_0=\dfrac{1}{F_0}$↑

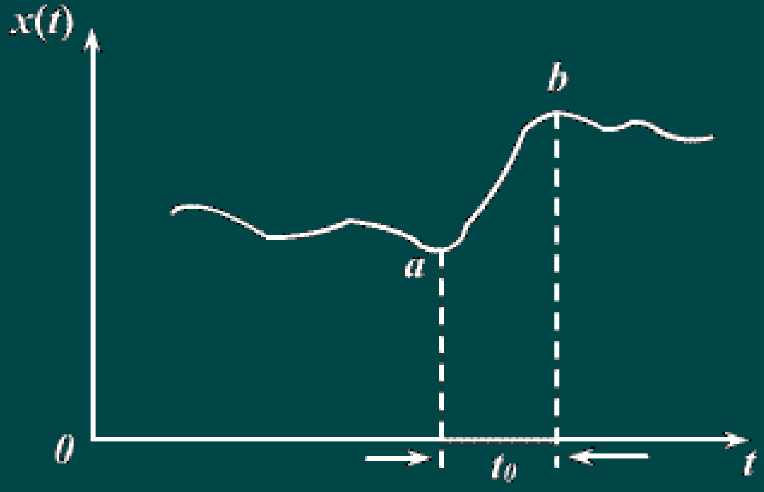
当N给定　则T↑　f_s↓　要不产生混叠，f_h必↓

同时提高信号最高频率和频率分辨率，需增加采样点数N。

信号最高频率f_h的确定

$$t_0 = T_h / 2$$

$$f_h = \frac{1}{T_h} = \frac{1}{2t_0}$$



时域变化越快，则高频分量越丰富，我们可以

令变化速度最快的相邻两谷峰之间隔为半周期

例：有一频谱分析用的FFT处理器，其抽样点数必须是2的整数幂，假设没有采用任何的数据处理措施，已给条件为：

1）频率分辨率 $\leq 10Hz$

2）信号最高频率 $\leq 4kHz$

试确定以下参量：

1）最小记录长度 T_0

2）抽样点间的最大时间间隔T（即最小抽样频率）

3）在一个记录中最少点数N

解： 1）最小记录长度：

$$T_0 \geq \frac{1}{F_0} = \frac{1}{10} = 0.1s$$

2）最大抽样间隔 （$f_s > 2f_h \quad f_s = 1/T$）

$$T = \frac{1}{f_s} < \frac{1}{2f_h} = \frac{1}{2\times4\times10^3} = 0.125ms$$

3）最小记录点数

$$N > \frac{f_s}{F_0} = \frac{2f_h}{F_0} = \frac{2\times4\times10^3}{10} = 800$$

取$N = 2^m = 2^{10} = 1024 > 800$

1-14 有一调幅信号

$$x_a(t)=\left[1+\cos(2\pi\times100t)\right]\cos(2\pi\times600t)$$

用DFT做频谱分析，要求能分辨 $x_a(t)$ 的所有频率分量，问

(1) 抽样频率应为多少赫兹（Hz）?

(2) 抽样时间间隔应为多少秒（Sec）?

(3) 抽样点数应为多少点?

解：

$$x_a(t)=\left[1+\cos(2\pi\times 100t)\right]\cos(2\pi\times 600t)$$

$$=\cos(2\pi\times 600t)$$

$$+\frac{1}{2}\cos(2\pi\times 700t)+\frac{1}{2}\cos(2\pi\times 500t)$$

（1）抽样频率应为 $f_s \geq 2\times 700=1400Hz$

（2）抽样时间间隔应为

$$T\leq\frac{1}{f_s}=\frac{1}{1400}=0.00072Sec=0.72ms$$

（3）$x(n)=x_a(t)\big|_{t=nT}$

$$=\cos\left(2\pi\times\frac{6}{14}n\right)+\frac{1}{2}\cos\left(2\pi\times\frac{7}{14}n\right)+\frac{1}{2}\cos\left(2\pi\times\frac{5}{14}n\right)$$

$x(n)$为周期序列，周期$N=14$

$\therefore$抽样点数至少为14点

或者因为频率分量分别为500、600、700Hz

得 $F_0=100\text{Hz}$

$$N=f_s/F_0=1400/100=14$$

$\therefore$最小记录点数$N=14$

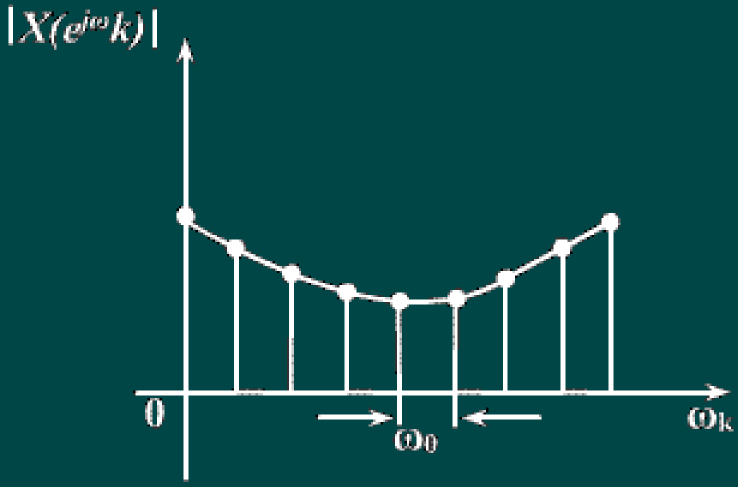
频谱泄漏

对时域截短，使频谱变宽拖尾，称为泄漏

改善方法：　1）增加$x(n)$长度　2）缓慢截短

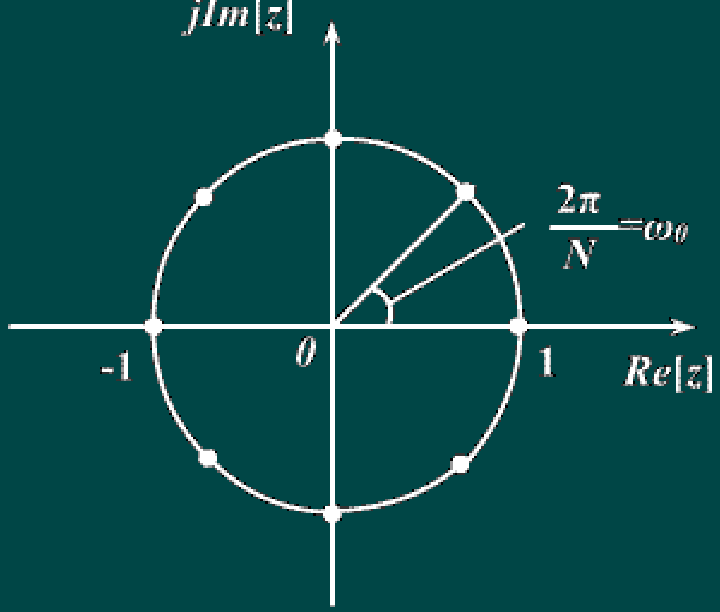
栅栏效应

DFT只计算离散点（基频F_0的整数倍处）的频谱，而不是连续函数



(a) $\omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{\Omega_0}{f_s} = \frac{2\pi F_0}{f_s}$

$F_0 = \frac{f_s}{N}$



(b)

改善方法：

增加频域抽样点数N（时域补零），使谱线更密

频率分辨率

$$F_0 = 1/T_0$$

提高频率分辨率方法：

增加信号实际记录长度

补零并不能提高频率分辨率

作 业

- 3.3
- 3.5(1)(2)(3)
- 3.12
- 3.13
- 3.15
- 3.16
- 3.26（本题为第五版中的题号，题目见下页）

3.26题

复数有限长序列 $f(n)$ 是由两个实有限长序列 $x(n)$ 和 $y(n)(0 \le n \le N-1)$ 组成的， $f(n)=x(n)+jy(n)$，且已知 $F(k)=DFT\left[f(n)\right]$ 有以下两种表达式：

$$(1)F(k)=1+jN$$

$$(2)F(k)=\frac{1-a^N}{1-aW_N^k}+j\frac{1-b^N}{1-bW_N^k}$$

其中 a,b 为实数。试用 $F(k)$ 求 $X(k)=DFT\left[x(n)\right]$，$Y(k)=DFT\left[y(n)\right], x(n), y(n)$