第七章 FIR数字滤波器的设计方法

IIR数字滤波器：

可以利用模拟滤波器设计

但相位非线性

FIR数字滤波器：

可以严格线性相位，又可任意幅度特性

因果稳定系统

可用FFT计算

但阶次比IIR滤波器要高得多

学习目标

- 掌握线性相位FIR数字滤波器的特点
- 掌握窗函数设计法
- 理解频率抽样设计法
- 理解IIR与FIR数字滤波器的比较

一、线性相位FIR滤波器的特点

FIR滤波器的单位冲激响应：

$$h(n) \quad 0 \le n \le N-1$$

系统函数：

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

在 z 平面有$N-1$ 个零点

在 $z=0$ 处是$N-1$ 阶极点

1、线性相位条件

$h(n)$为实序列时，其频率响应：

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)e^{-j\omega n}=H(\omega)e^{j\theta(\omega)}=\pm\left|H(e^{j\omega})\right|e^{j\theta(\omega)}$$

线性相位是指相位函数 $\theta(\omega)$ 是 ω 的线性函数

即群延时 $-\dfrac{d\theta(\omega)}{d\omega}=\tau$ 是常数

第一类线性相位: $\theta(\omega)=-\tau\omega$

第二类线性相位: $\theta(\omega)=-\tau\omega+\beta_0$

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)e^{-j\omega n}=\pm\left|H(e^{j\omega})\right|e^{j\theta(\omega)}$$

$$=\pm\left|H(e^{j\omega})\right|e^{-j\omega\tau}$$

第一类线性相位:　$\theta(\omega)=-\tau\omega$

$$\pm\left|H(e^{j\omega})\right|\cos(\omega\tau)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\cos(\omega n)$$

$$\pm\left|H(e^{j\omega})\right|\sin(\omega\tau)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin(\omega n)$$

$$tg(\omega\tau)=\frac{\sin(\omega\tau)}{\cos(\omega\tau)}=\frac{\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin(\omega n)}{\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\cos(\omega n)}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin(\omega\tau)\cos(\omega n)-\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\cos(\omega\tau)\sin(\omega n)=0$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin\left[(\tau-n)\omega\right]=0$$

- 第一类线性相位 $\theta(\omega)=-\tau\omega$ 的充分条件:

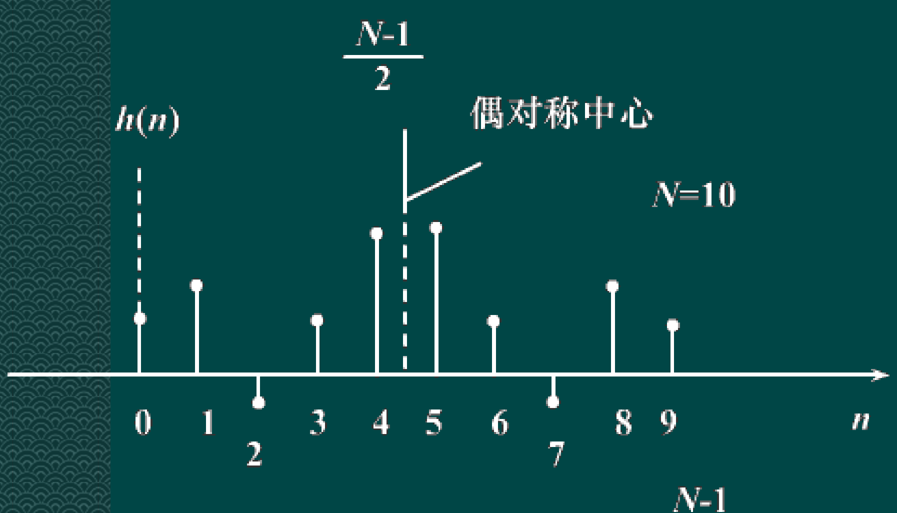
$$\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin\left[(\tau-n)\omega\right]=0$$ 要求求和项对于求和区间的中心点 $n=(N-1)/2$ 呈奇对称

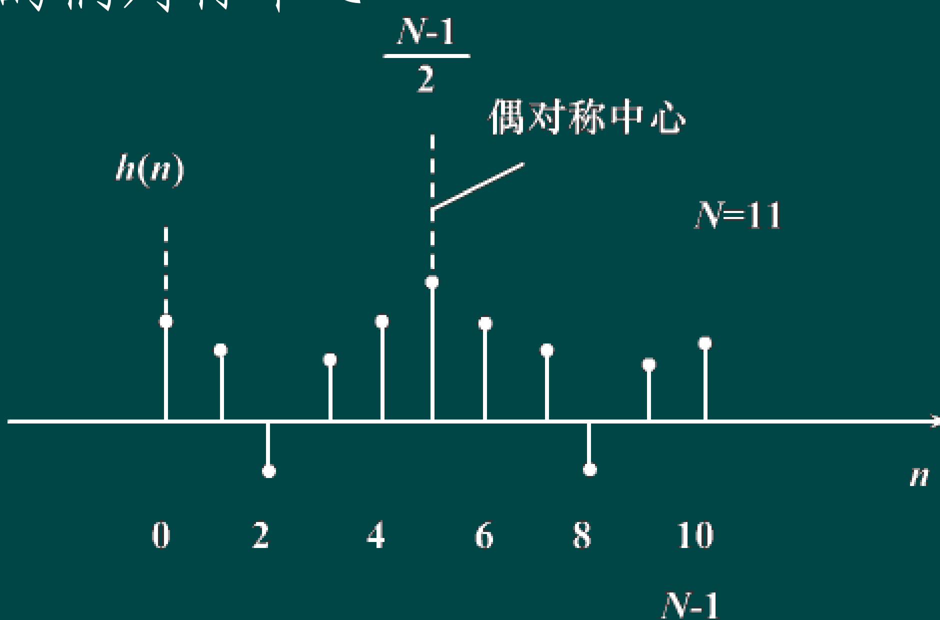
由于 $\sin\left[(\tau-n)\omega\right]$ 对于 $n=\tau$ 奇对称，故要求 $\tau=(N-1)/2$

此时必须要求 $h(n)$ 对于 $n=(N-1)/2$ 呈偶对称，故有

$$h(n)=h(N-1-n)\quad 0\le n\le N-1$$

$n=(N-1)/2$ 为 $h(n)$ 的偶对称中心



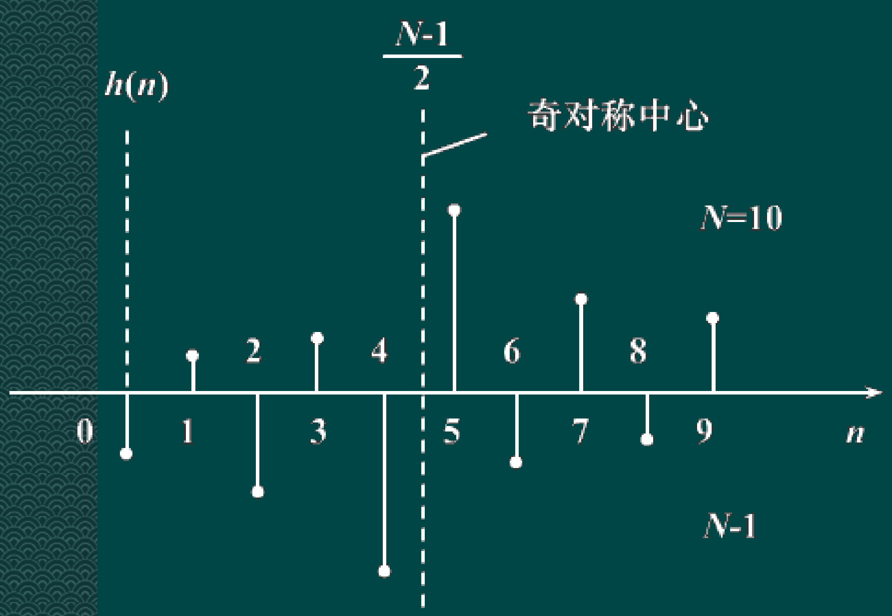


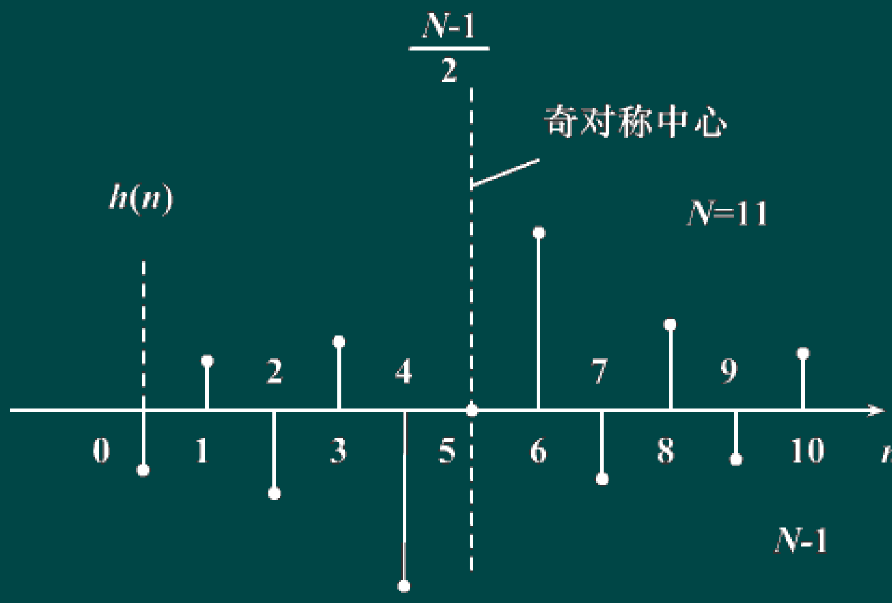
- 第二类线性相位$\theta(\omega)=\beta_0-\tau\omega$ 的充分条件:

$$h(n)=-h(N-1-n)\quad 0\le n\le N-1$$

$n=(N-1)/2$为$h(n)$的奇对称中心　$\tau=\dfrac{N-1}{2}$

$$\beta_0=\pm\pi/2$$





2、线性相位FIR滤波器频率响应的特点

由 $h(n) = \pm h(N-1-n) \quad 0 \le n \le N-1$

系统函数:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \pm h(N-1-n) z^{-n}$$

令$m = N-1-n$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} \pm h(m) z^{-(N-1-m)}$$

$$= \pm z^{-(N-1)} \sum_{m=0}^{N-1} h(m) z^{m}$$

$$= \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1})$$

由 $H\left(z\right)=\pm z^{-(N-1)}H(z^{-1})$

得 $H(z)=\frac{1}{2}\left[H(z)\pm z^{-(N-1)}H(z^{-1})\right]$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}\pm z^{-(N-1)}\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{n}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\left[z^{-n}\pm z^{-(N-1)}z^{n}\right]$$

$$=z^{-\frac{N-1}{2}}\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\left[\frac{z^{\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}\pm z^{-\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}}{2}\right]$$

$$H(z)=z^{-\frac{N-1}{2}}\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\left[\frac{z^{\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}\pm z^{-\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}}{2}\right]$$

$$\left.\frac{z^{\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}\pm z^{-\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}}{2}\right|_{z=e^{j\omega}}=\begin{cases}\cos\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right] & "+" \\ j\sin\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right] & "-"\end{cases}$$

$$\cos x=\frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}$$

$$H(e^{j\omega})=H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}=\begin{cases}e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\cos\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right] & "+" \\ je^{-j\frac{N-1}{2}\omega}\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right] & "-"\end{cases}$$

1） $h(n)$ 偶对称 $h(n)=h(N-1-n)$

◈ 频率响应：

$$H(e^{j\omega})=H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}=e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\cos\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$$

相位函数： $\theta(\omega)=-\frac{N-1}{2}\omega$

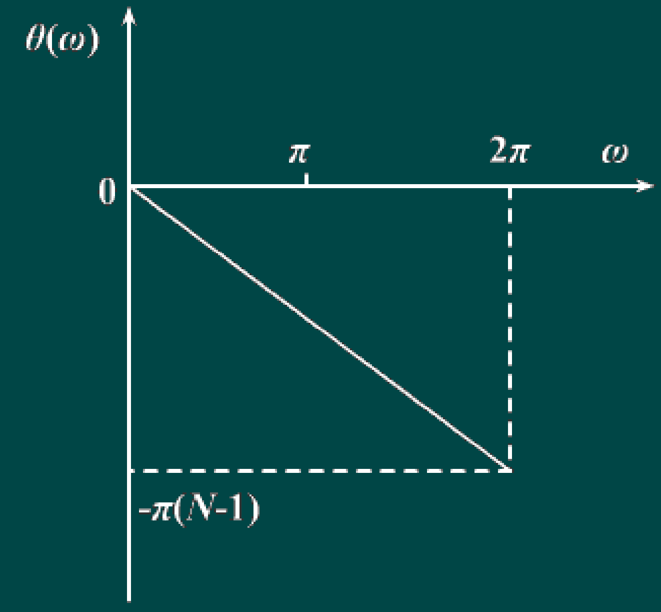


图7-3 $h(n)$偶对称时的线性相位特性

为第一类线性相位，群延时

$$\tau=\frac{N-1}{2}$$

说明滤波器有(N-1)/2个抽样的延时，是滤波器长度的一半

2） $h(n)$ 奇对称 $h(n)=-h(N-1-n)$

◈ 频率响应：

$$H(e^{j\omega})=H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}=je^{-j\frac{N-1}{2}\omega}\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$$

$$=e^{-j\frac{N-1}{2}\omega+j\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$$

相位函数：

$$\theta(\omega)=-\frac{N-1}{2}\omega+\frac{\pi}{2}$$

为第二类线性相位

$$\tau=\frac{N-1}{2}\qquad \beta_0=\pi/2$$

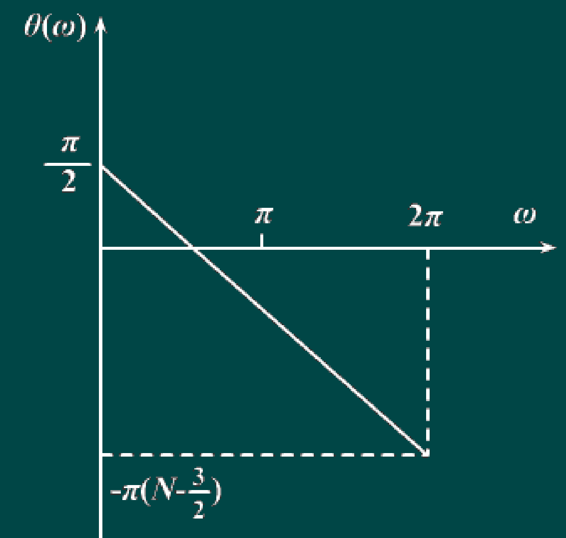
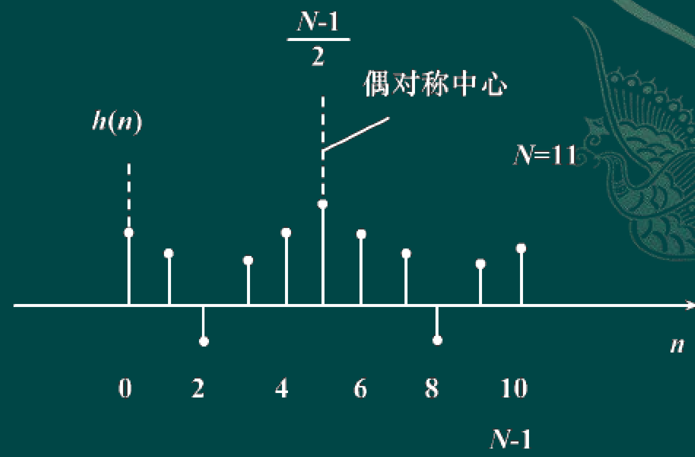


图7-4 $h(n)$奇对称时的90°相移线性相位特性

说明滤波器不仅有(N-1)/2个抽样的延时，还有90度的相移。

3、幅度函数的特点

1）$h(n)$偶对称，N为奇数



幅度函数：

$$H(\omega)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\cos\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$$

$$\because \cos\left\{\left[\frac{N-1}{2}-(N-1-n)\right]\omega\right\}=\cos\left[\left(n-\frac{N-1}{2}\right)\omega\right]$$

$$=\cos\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$$

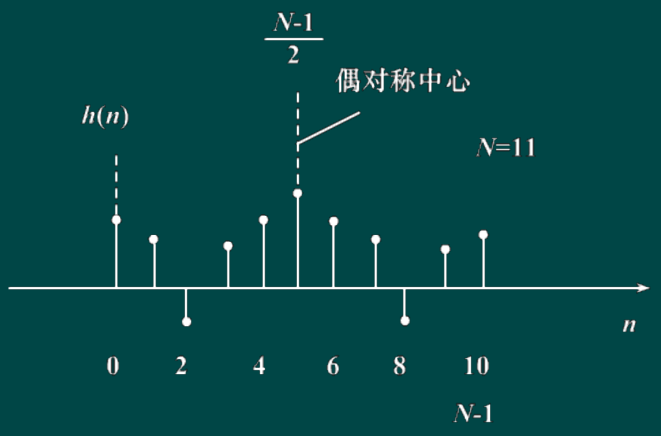
$\therefore \cos\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$对$\frac{N-1}{2}$呈偶对称

$$H(\omega)=h\left(\frac{N-1}{2}\right)+\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}}2h(n)\cos\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$$

令 $\frac{N-1}{2}-n=m$

$$=h\left(\frac{N-1}{2}\right)+\sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}}2h\left(\frac{N-1}{2}-m\right)\cos(m\omega)$$

$$\therefore H(\omega)=\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}}a(n)\cos(\omega n)$$



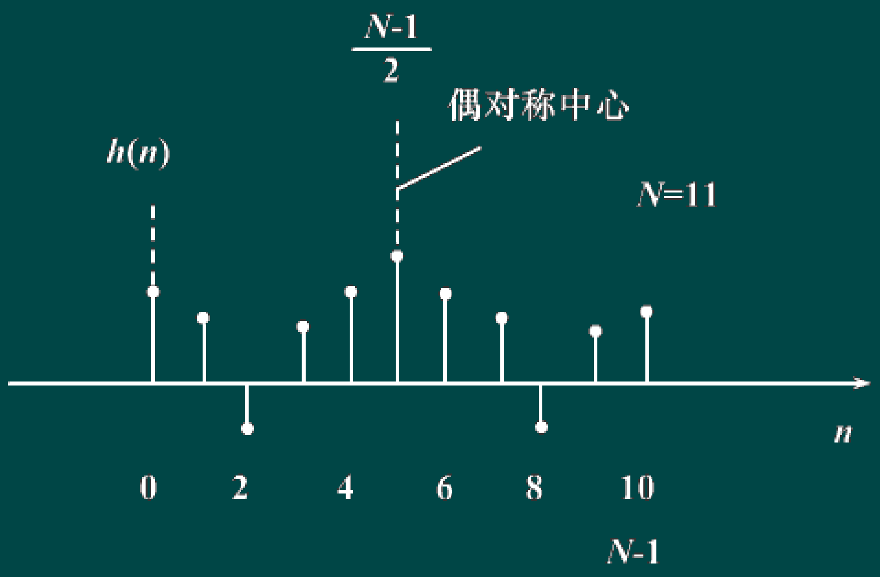
其中: $a(0)=h\left(\frac{N-1}{2}\right)$

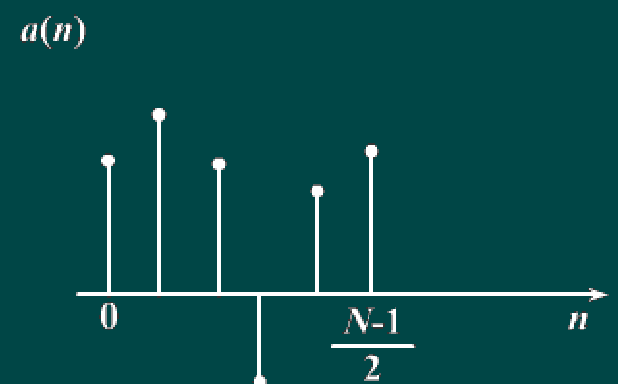
$$a(n)=2h\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\qquad n=1,\ldots,\frac{N-1}{2}$$

$$H(\omega)=\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a(n)\cos(\omega n)$$

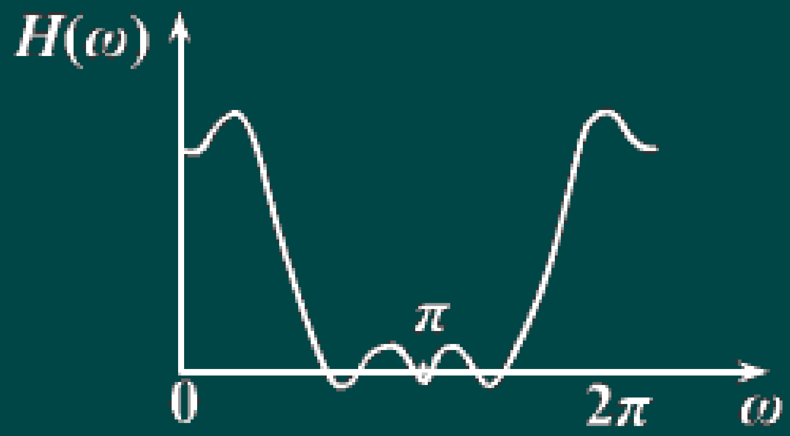
其中： $a(0)=h\left(\dfrac{N-1}{2}\right)$

$$a(n)=2h\left(\frac{N-1}{2}-n\right) \qquad n=1,\ldots,\frac{N-1}{2}$$





$$H(\omega)=\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a(n)\cos(\omega n)$$

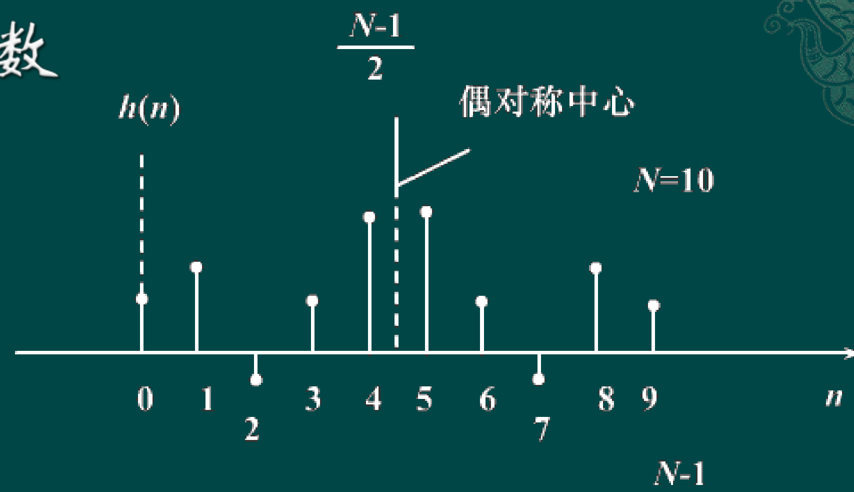


$\because \cos(\omega n)$对$\omega=0,\ \pi,\ 2\pi$ 呈偶对称

$\therefore H(\omega)$对$\omega=0,\ \pi,\ 2\pi$ 呈偶对称

可以用来设计低通、高通、带通和带阻滤波器

2）$h(n)$偶对称，N为偶数



幅度函数:

$$H(\omega)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\cos\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}2h(n)\cos\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$$

$$H(\omega)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}2h(n)\cos\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$$

令$\frac{N}{2}-n=m$

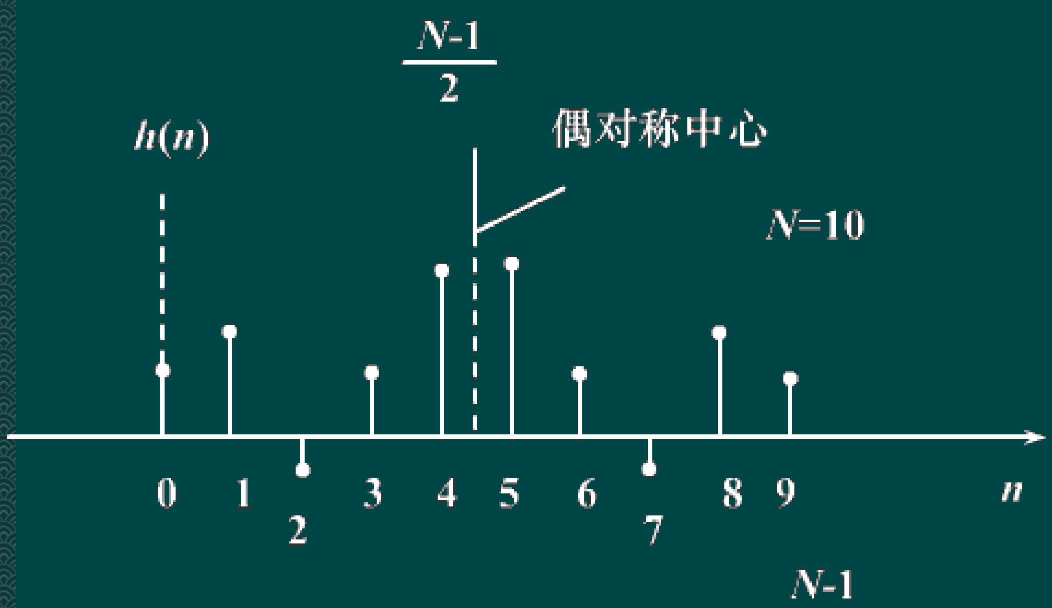
$$=\sum_{m=1}^{\frac{N}{2}}2h\left(\frac{N}{2}-m\right)\cos\left[\left(m-\frac{1}{2}\right)\omega\right]$$

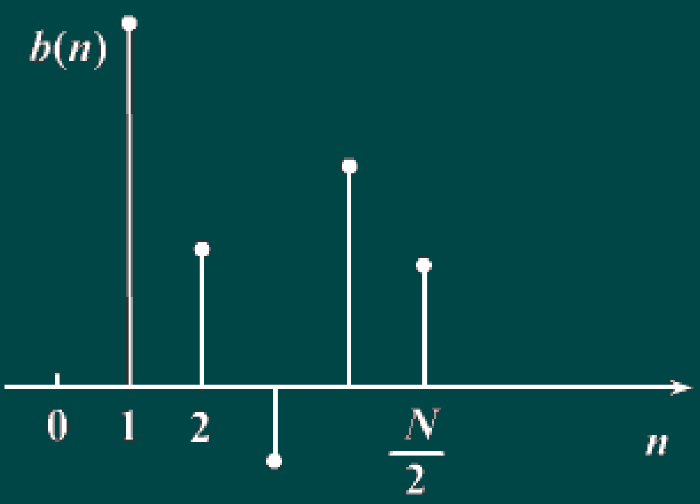
$$\therefore H(\omega)=\sum_{n=1}^{N/2}b(n)\cos\left[\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]$$

其中: $b(n)=2h\left(\frac{N}{2}-n\right) \qquad n=1,\dots,\frac{N}{2}$

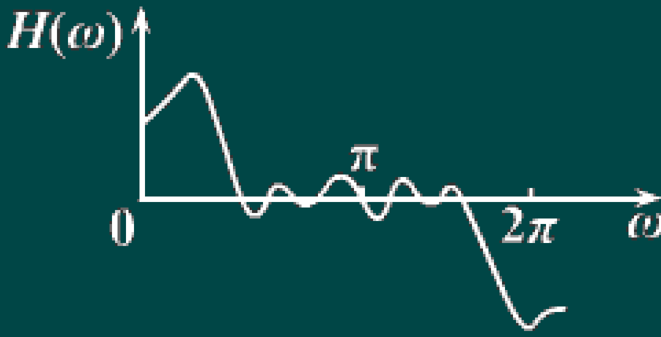
$$H(\omega)=\sum_{n=1}^{N/2} b(n)\cos\left[\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]$$

其中: $b(n)=2h\left(\frac{N}{2}-n\right) \qquad n=1,\ldots,\frac{N}{2}$





$$H(\omega)=\sum_{n=1}^{N/2} b(n)\cos\left[\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]$$



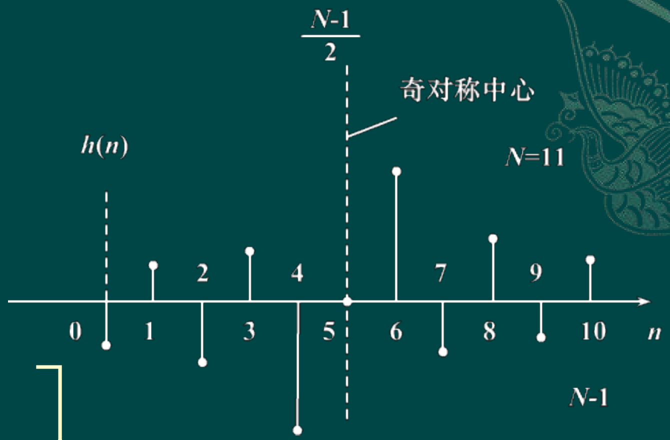
- $\omega=\pi$ 时 $\cos\left[\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]=0$

  则 $H(\pi)=0 \quad \therefore z=-1$是零点

- $H(\omega)$对$\omega=0,\ 2\pi$呈偶对称 $H(\omega)$对$\omega=\pi$呈奇对称

- $z=-1$为零点，$H(\omega)\big|_{\omega=\pi}=0$ 故不能设计成高通、带阻滤波器，可以设计低通、带通滤波器

3）$h(n)$奇对称，N为奇数



幅度函数：

$$H(\omega)=\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\sin\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$$

$$\because \sin\left\{\left[\frac{N-1}{2}-(N-1-n)\right]\omega\right\}=\sin\left[\left(n-\frac{N-1}{2}\right)\omega\right]$$

$$=-\sin\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$$

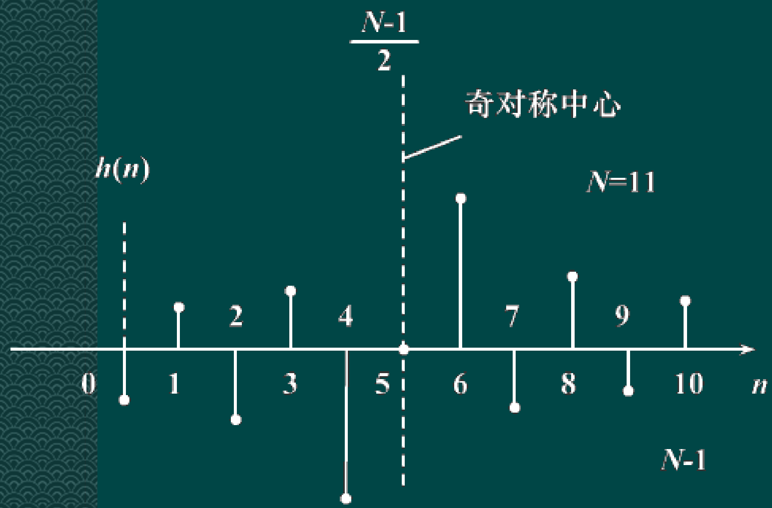
$$\therefore \sin\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]\text{对}\frac{N-1}{2}\text{呈奇对称}$$

$h(n)$奇对称且N为奇数 $\quad \therefore h\left(\frac{N-1}{2}\right)=0$

$$H(\omega)=\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} 2h(n)\sin\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$$

令$\frac{N-1}{2}-n=m$

$$=\sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}} 2h\left(\frac{N-1}{2}-m\right)\sin(m\omega)$$

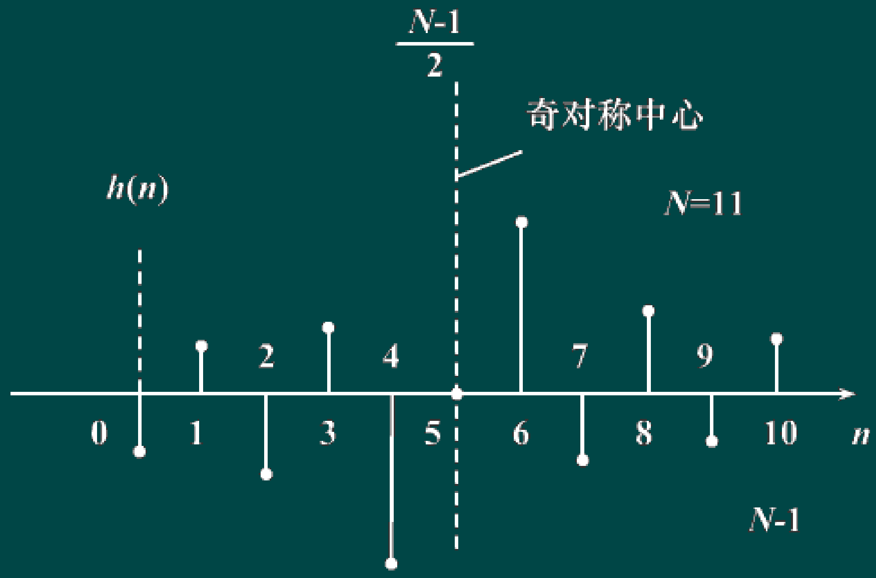


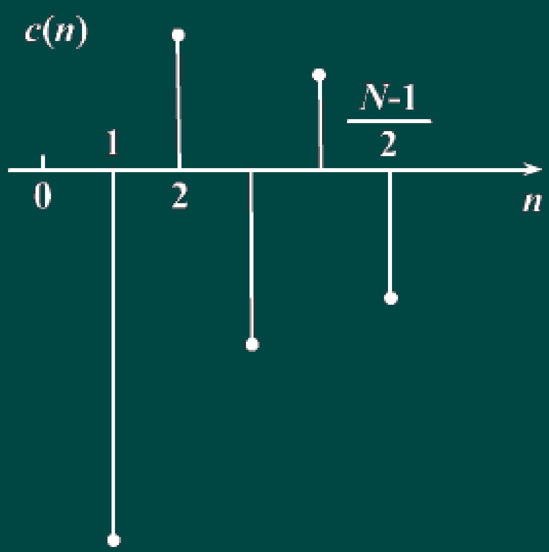
$$\therefore H(\omega)=\sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} c(n)\sin(\omega n)$$

其中：$c(n)=2h\left(\frac{N-1}{2}-n\right) \qquad n=1,\ldots,\frac{N-1}{2}$

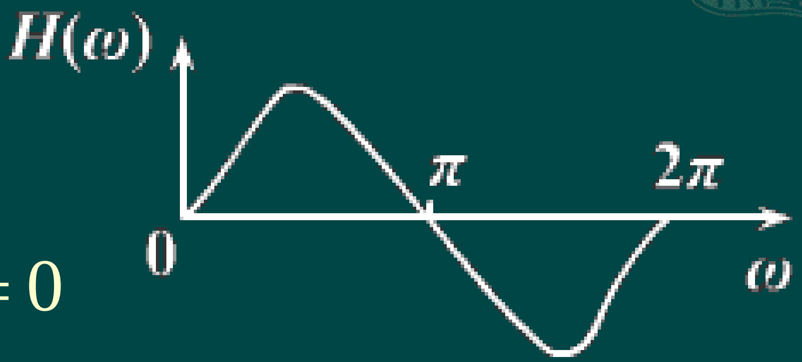
$$H(\omega)=\sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} c(n)\sin(\omega n)$$

其中：$c(n)=2h\left(\dfrac{N-1}{2}-n\right) \qquad n=1,\ldots,\dfrac{N-1}{2}$





$$H(\omega)=\sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} c(n)\sin(\omega n)$$



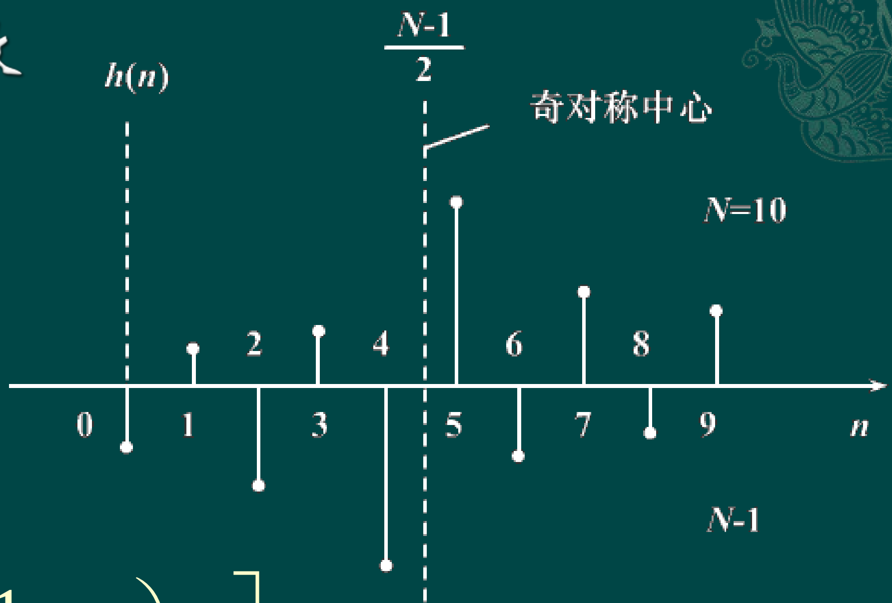
- $\omega=0,\ \pi,\ 2\pi$ 时 $\sin(\omega n)=0$

  则 $H(\omega)=0$ $\therefore z=\pm1$是零点

- 因$\sin(\omega n)$对$\omega=0,\ \pi,\ 2\pi$ 呈奇对称

故$H(\omega)$对$\omega=0,\ \pi,\ 2\pi$呈奇对称，在$\omega=0,\ \pi,\ 2\pi$处为零值，只能用来设计带通滤波器，不能用在高通、低通及带阻滤波器设计中

4）$h(n)$奇对称，N为偶数



幅度函数：

$$H(\omega)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}2h(n)\sin\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$$

$$H(\omega)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}2h(n)\sin\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$$

令 $\frac{N}{2}-n=m$

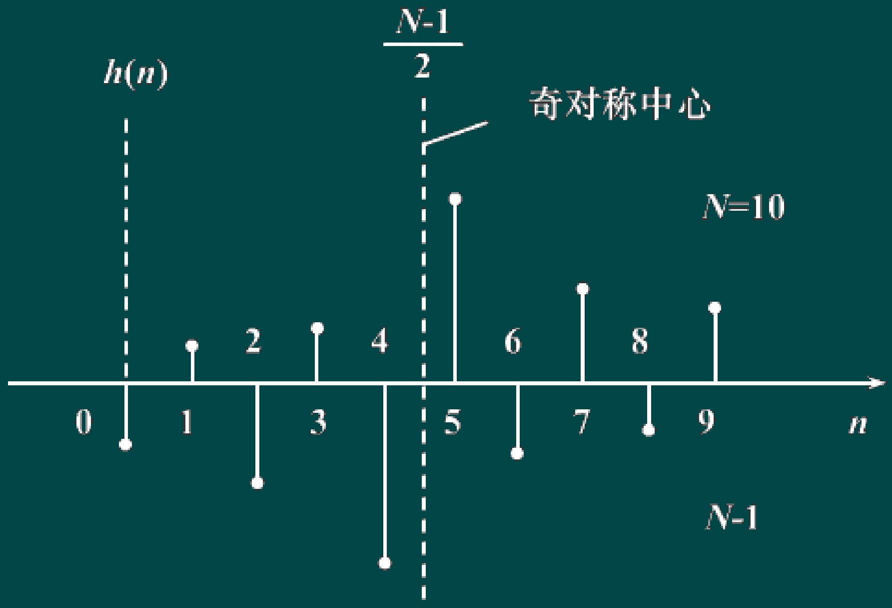
$$=\sum_{m=1}^{\frac{N}{2}}2h\left(\frac{N}{2}-m\right)\sin\left[\left(m-\frac{1}{2}\right)\omega\right]$$

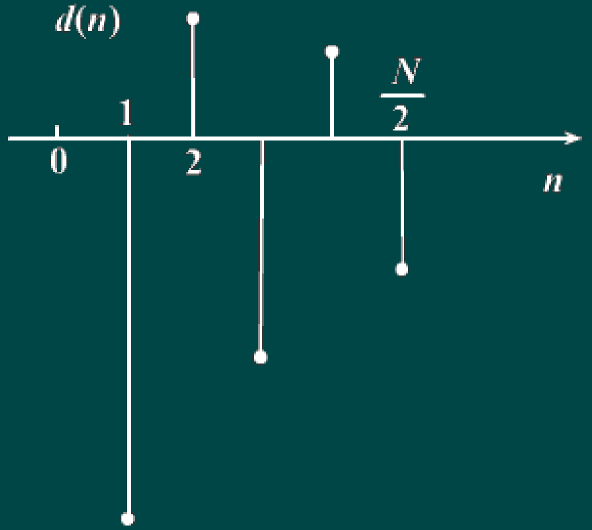
$$\therefore H(\omega)=\sum_{n=1}^{N/2}d(n)\sin\left[\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]$$

其中： $d(n)=2h\left(\frac{N}{2}-n\right)$ $\quad n=1,\ldots,\frac{N}{2}$

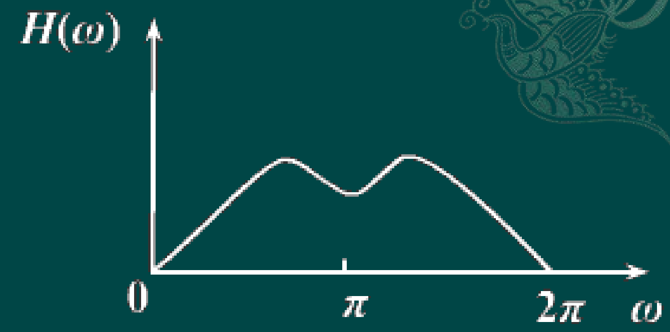
$$H(\omega)=\sum_{n=1}^{N/2} d(n)\sin\left[\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]$$

其中：$d(n)=2h\left(\frac{N}{2}-n\right) \qquad n=1,\ldots,\frac{N}{2}$





$$H(\omega)=\sum_{n=1}^{N/2} d(n)\sin\left[\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]$$



- $\omega=0,\ 2\pi$ 时 $\sin\left[\omega\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]=0$

  则 $H(\omega)=0 \quad \therefore z=1$是零点

- $H(\omega)$对$\omega=0,\ 2\pi$呈奇对称 $H(\omega)$对$\omega=\pi$呈偶对称

- $h(n)$为奇对称时，有90^0相移，适用于微分器和90^0移相器，而选频滤波器采用$h(n)$为偶对称时；可以用来设计高通及带通滤波器，不能用于设计低通和带阻滤波器。

4、零点位置

由 $H(z)=\pm z^{-(N-1)}H(z^{-1})$ 得:

1）若 $z = z_i$ 是$H(z)$的零点，则 $z = z_i^{-1}$ 也是零点

$$\because H(z_i)=0$$

$$\therefore H(z_i^{-1})=\pm z_i^{(N-1)}H(z_i)=0$$

2）$h(n)$为实数，则零点共轭成对

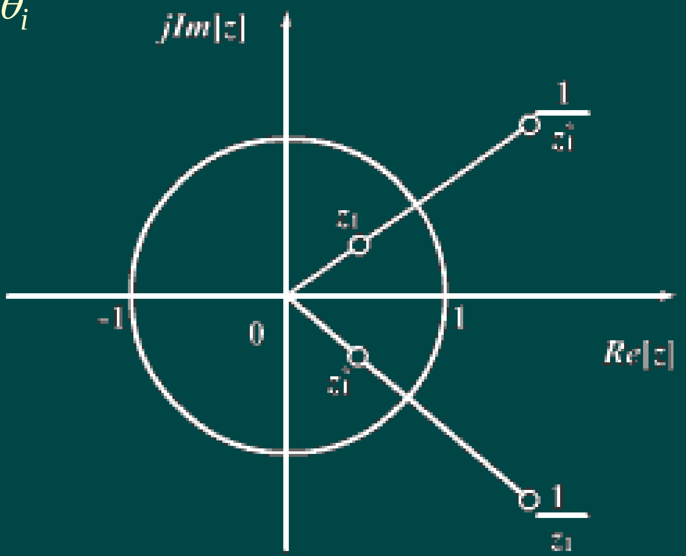
即 $z_i^*, 1/z_i^*$ 也是零点

线性相位滤波器的零点是互为倒数的共轭对，即共轭成对且镜像成对

1）既不在实轴上，也不在单位圆上

$$z_i = r_i e^{j\theta_i} \quad r_i \neq 1 \quad \theta_i \neq 0\text{或}\pi$$

零点： $r_i e^{j\theta_i} \quad r_i e^{-j\theta_i} \quad \frac{1}{r_i} e^{j\theta_i} \quad \frac{1}{r_i} e^{-j\theta_i}$



$$H_i(z) = (1 - r_i e^{j\theta_i} z^{-1})(1 - r_i e^{-j\theta_i} z^{-1})$$

$$\cdot \left(1 - \frac{1}{r_i} e^{j\theta_i} z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{r_i} e^{-j\theta_i} z^{-1}\right)$$

$$= \frac{1}{r_i^2}\left[1 - 2r_i \cos\theta_i z^{-1} + r_i^2 z^{-2}\right] \cdot \left[r_i^2 - 2r_i \cos\theta_i z^{-1} + z^{-2}\right]$$

$N = 5 \quad \tau = \frac{N-1}{2} = 2$ 两个二阶多项式的系数均为实数

$$H(z_i)=\frac{1}{r_i^2}\left[1-2r_i\cos\theta_i z^{-1}+r_i^2 z^{-2}\right]\cdot\left[r_i^2-2r_i\cos\theta_i z^{-1}+z^{-2}\right]$$

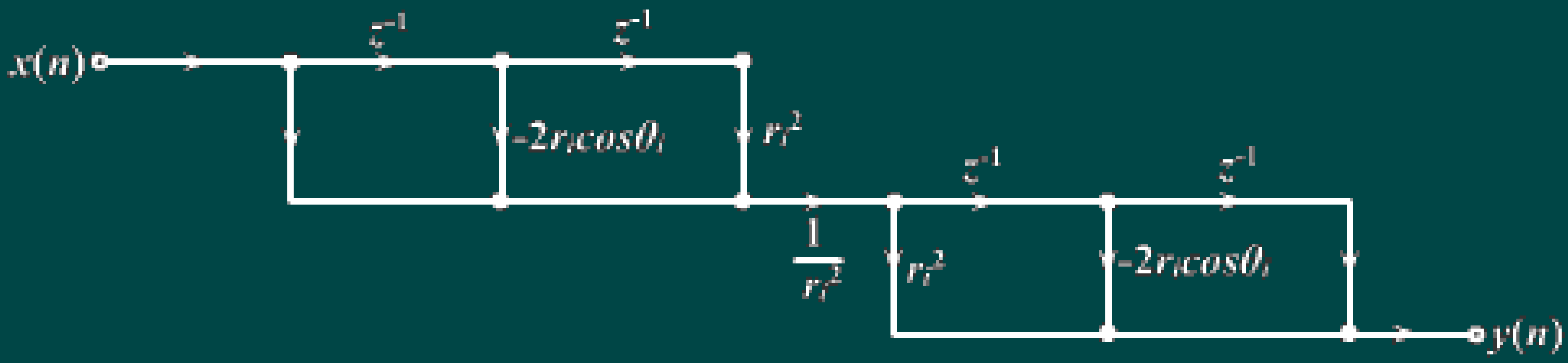
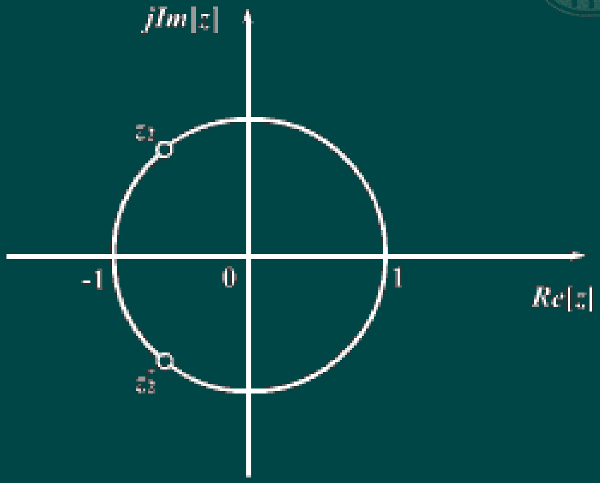


图7-6 线性相位FIR滤波器的级联结构

2） $z_i = r_i e^{j\theta_i} \quad r_i = 1 \quad \theta_i \neq 0$或$\pi$，即零点在单位圆上

零点：$e^{j\theta_i} \quad e^{-j\theta_i}$



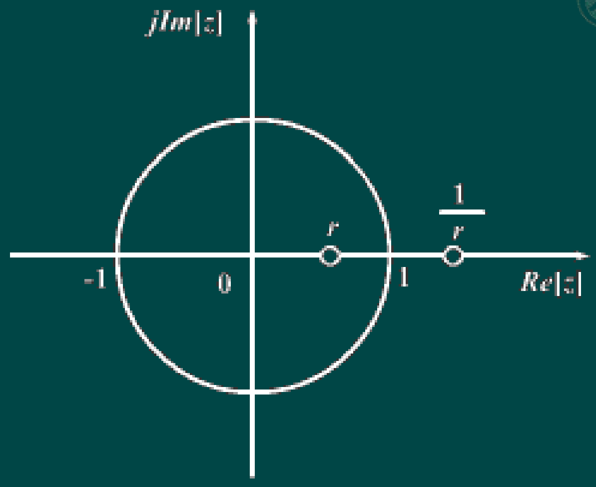
$$H_i(z) = \left(1 - e^{j\theta_i} z^{-1}\right)\left(1 - e^{-j\theta_i} z^{-1}\right)$$

$$= 1 - 2r\cos\theta_i z^{-1} + z^{-2}$$

$$N = 3 \quad \tau = \frac{N-1}{2} = 1$$

3）$z_i = r_i e^{j\theta_i}$ $r_i \neq 1$ $\theta_i = 0$或π，即零点在实轴上

零点：r_i $\dfrac{1}{r_i}$



$$H_i(z) = \left(1 \pm r_i z^{-1}\right)\left(1 \pm \frac{1}{r_i} z^{-1}\right)$$

$$= 1 \pm \left(r_i + \frac{1}{r_i}\right) z^{-1} + z^{-2}$$

"+" $\theta_i = \pi$ 负实轴上

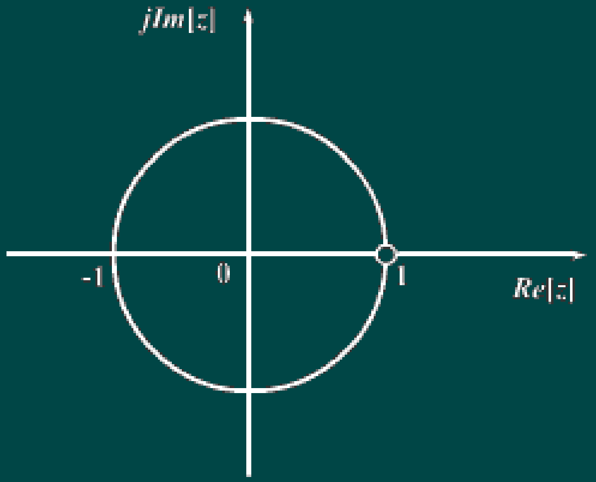
"−" $\theta_i = 0$ 正实轴上

$N = 3$ $\tau = \dfrac{N-1}{2} = 1$

4） $z_i = r_i e^{j\theta_i} \quad r_i = 1 \quad \theta_i = 0$或$\pi$

即零点既在实轴上，又在单位圆上

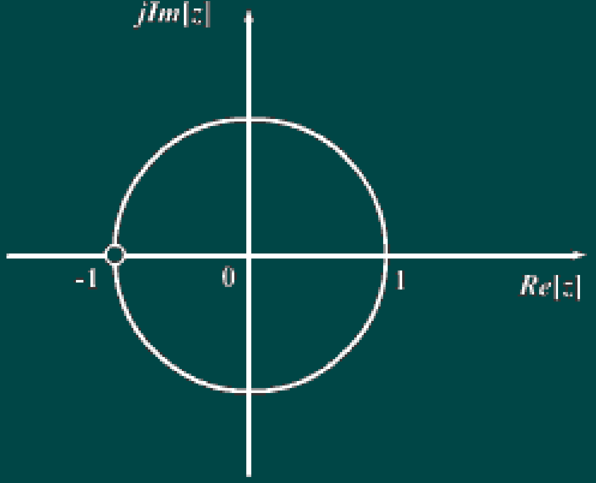
零点：± 1



$$H_i(z) = (1 \pm z^{-1})$$

$"+" \quad \theta_i = \pi \quad z = -1$

$"-" \quad \theta_i = 0 \quad z = 1$



$$N = 2 \quad \tau = \frac{N-1}{2} = \frac{1}{2}$$

二、窗函数设计法

1、设计方法

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n} \rightarrow H_d(e^{j\omega})$$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega n} d\omega$$

$$h(n) = w(n) h_d(n)$$

$w(n)$：窗函数序列

要选择合适的形状和长度

以低通滤波器为例讨论：

线性相位理想低通滤波器的频率响应：

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha} & -\omega_c \le \omega \le \omega_c \\ 0 & -\pi \le \omega \le -\omega_c, \omega_c \le \omega \le \pi \end{cases}$$

其理想单位抽样响应：

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega\alpha} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\omega_c(n-\alpha)}$$

中心点为 α 的偶对称无限长非因果序列

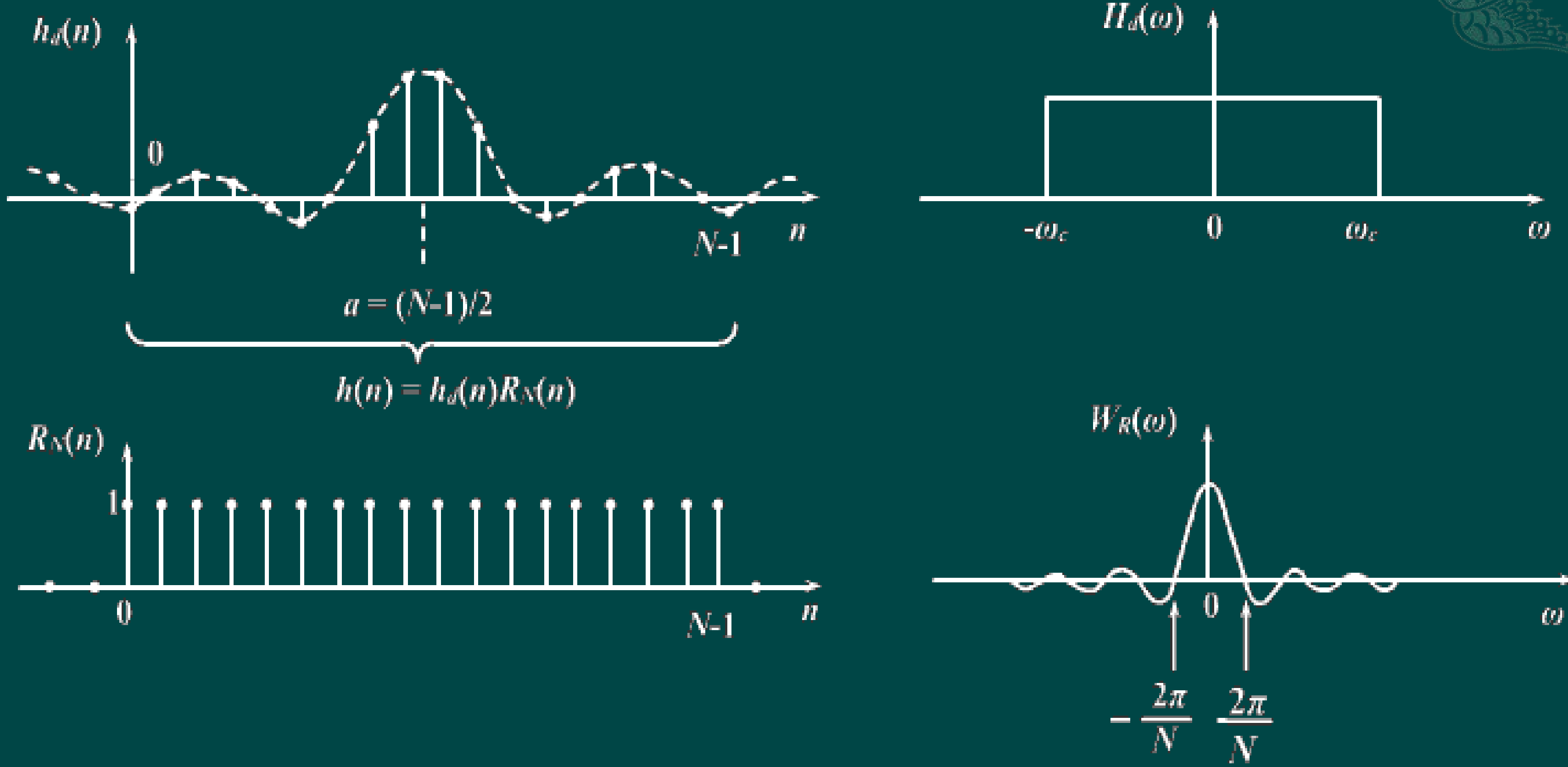


图7-7 理想矩形幅频特性的$h_d(n)$和$H_d(\omega)$以及矩形窗函数序列的$w(n)$=$R_N(n)W_R(\omega)$

取矩形窗：$w(n)=R_N(n) \quad h_d(n)=\dfrac{\omega_c}{\pi}\dfrac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\omega_c(n-\alpha)}$

则FIR滤波器的单位抽样响应：

$$h(n)=h_d(n)w(n)=\begin{cases} h_d(n) & 0\le n\le N-1 \\ 0 & 其它n \end{cases}$$

按第一类线性相位条件，得 $\alpha=\dfrac{N-1}{2}$

$$\therefore\ h(n)=\begin{cases} \dfrac{\omega_c}{\pi}\dfrac{\sin\left[\omega_c\left(n-\dfrac{N-1}{2}\right)\right]}{\omega_c\left(n-\dfrac{N-1}{2}\right)} & 0\le n\le N-1 \\ 0 & 其它n \end{cases}$$

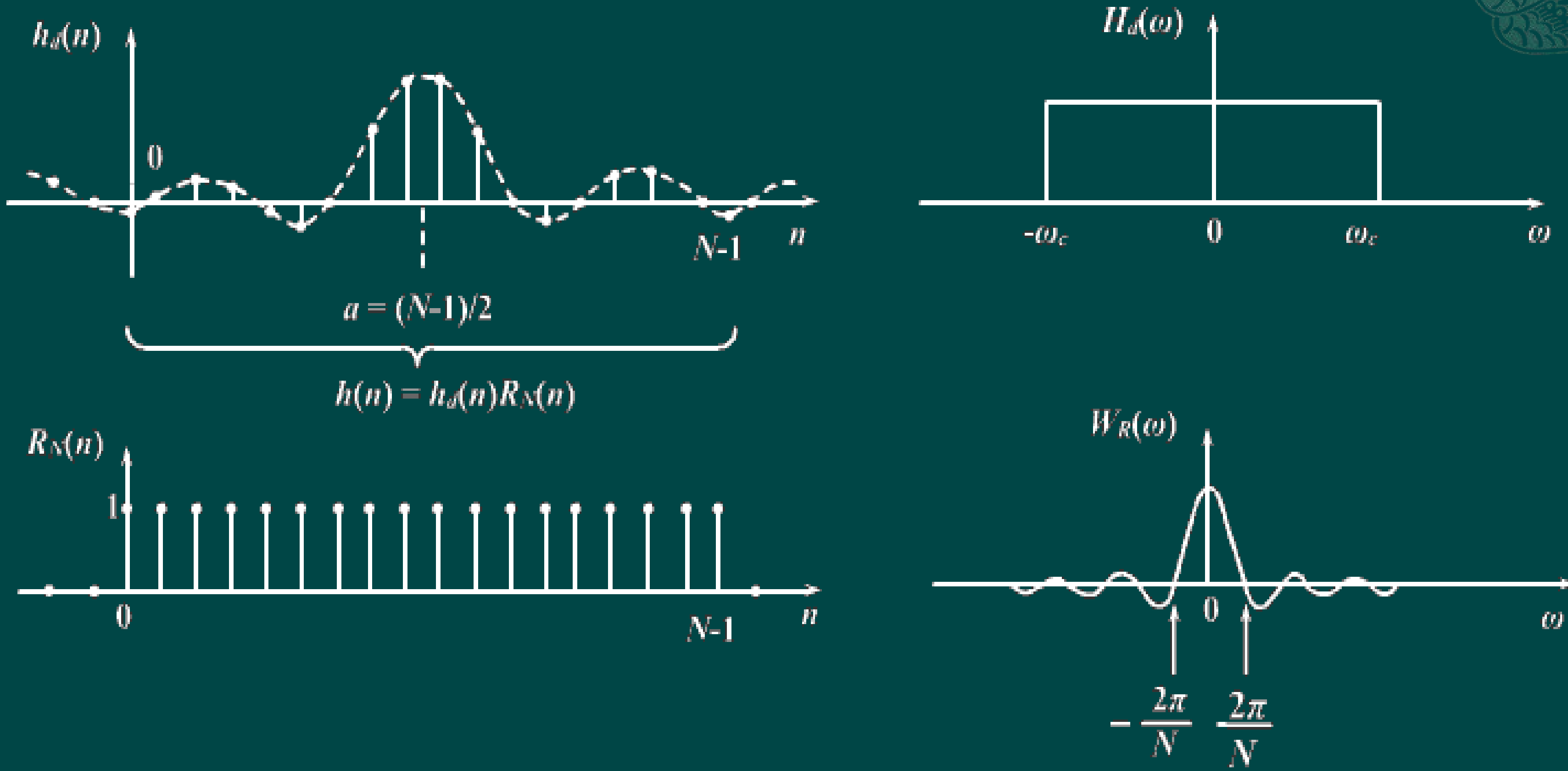


图7-7 理想矩形幅频特性的$h_d(n)$和$H_d(\omega)$以及矩形窗函数序列的$w(n)=R_N(n)W_R(\omega)$

加窗处理后对频率响应的影响：

时域乘积相当于频域卷积 $h(n)=h_d(n)w(n)$

$$H(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d\left(e^{j\theta}\right)W\left(e^{j(\omega-\theta)}\right)d\theta$$

而矩形窗的频率响应：

$$W_R(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}w(n)e^{-j\omega n}=e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}\frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}$$

其幅度函数： $W_R(\omega)=\dfrac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}$

理想滤波器的频率响应：

$$H_d(e^{j\omega}) = H_d(\omega)e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}$$

其幅度函数：
$$H_d(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \le \omega_c \\ 0 & \omega_c \le |\omega| \le \pi \end{cases}$$

则FIR滤波器的频率响应：

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta)e^{-j\frac{N-1}{2}\theta} W_R(\omega-\theta)e^{-j\frac{N-1}{2}(\omega-\theta)}d\theta$$

$$= e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta)W_R(\omega-\theta)d\theta$$

其幅度函数：$H(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta)W_R(\omega-\theta)d\theta$

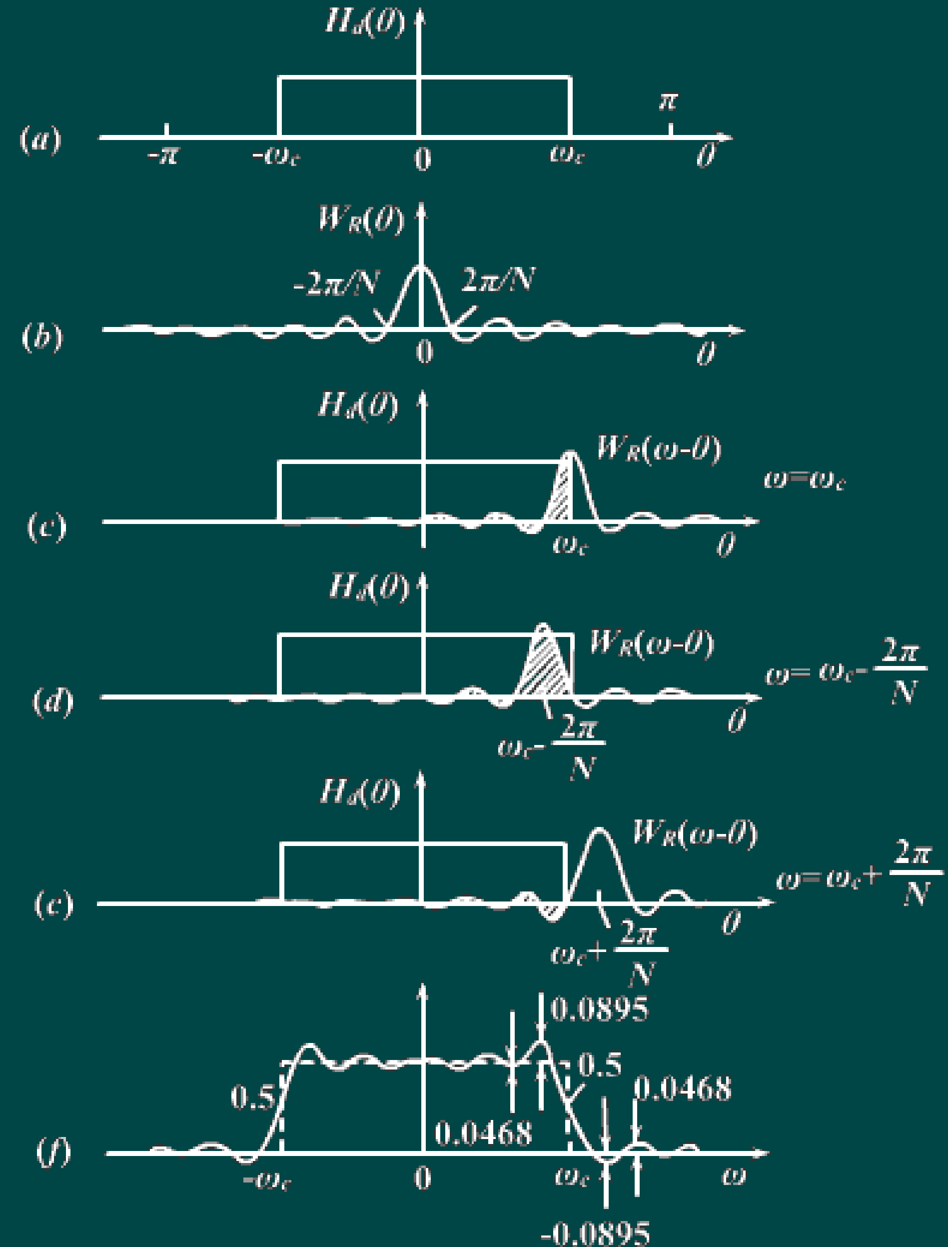


图7-8 矩形窗的卷积过程

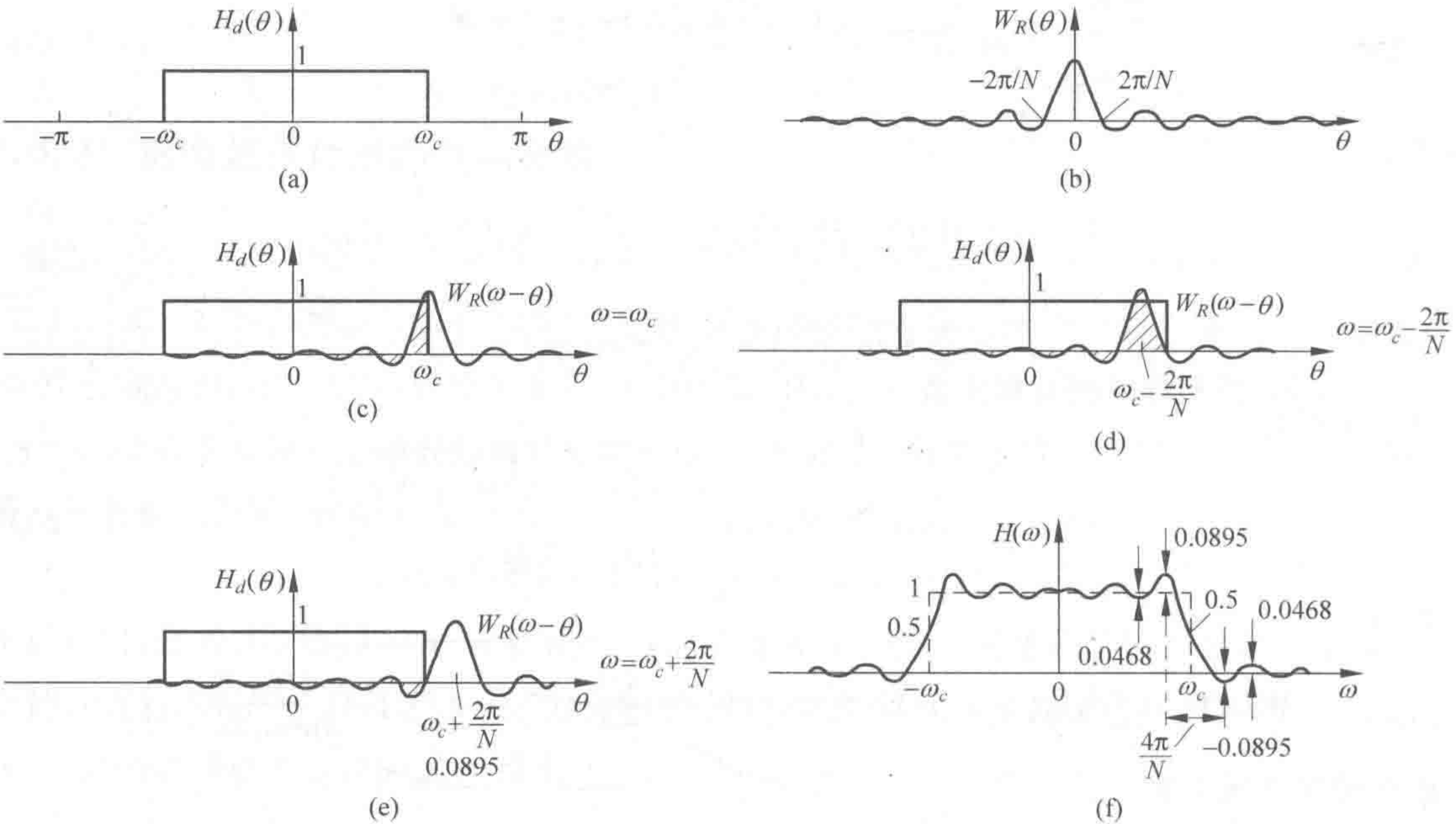


图 7.5　矩形窗的卷积过程

幅度函数：$H(\omega)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d(\theta)W_R(\omega-\theta)d\theta$

- $\omega=0$ $H(0)$近似于$W_R(\theta)$的全部积分面积
- $\omega=\omega_c$ $H(\omega_c)=0.5H(0)$
- $\omega=\omega_c-\dfrac{2\pi}{N}$ $H\left(\omega_c-\dfrac{2\pi}{N}\right)$为最大值，正肩峰
- $\omega=\omega_c+\dfrac{2\pi}{N}$ $H\left(\omega_c+\dfrac{2\pi}{N}\right)$为最小值，负肩峰
- $\omega>\omega_c+\dfrac{2\pi}{N}$ 随$\omega\uparrow$，$H(\omega)$绕零值波动
- $\omega<\omega_c-\dfrac{2\pi}{N}$ 随$\omega\downarrow$，$H(\omega)$绕$H(0)$波动

加窗函数的影响：

- 不连续点处边沿加宽形成过渡带，其宽度（两肩峰之间的宽度）等于窗函数频率响应的主瓣宽度。

- 在 $\omega=\omega_c\pm\frac{2\pi}{N}$ 处出现肩峰值，两侧形成起伏振荡，振荡的幅度和多少取决于旁瓣的幅度和多少

- 改变N 只能改变窗谱的主瓣宽度，但不能改变主瓣与旁瓣的相对比例。其相对比例由窗函数形状决定，称为Gibbs效应

幅度函数：$$W_R(\omega)=\frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}\approx N\frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{N\frac{\omega}{2}}=N\frac{\sin x}{x}$$

2、各种窗函数

- 窗函数的要求：
  - 窗谱主瓣尽可能窄以获得较陡的过渡带
  - 尽量减少窗谱最大旁瓣的相对幅度
    以减小肩峰和波纹

- 矩形窗

$$w(n) = R_N(n)$$

窗谱:

$$W_R(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} w(n) e^{-j\omega n} = W_R(\omega) e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}$$

幅度函数:

$$W_R(\omega) = \frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}$$

主瓣宽度最窄: $\dfrac{4\pi}{N}$　　旁瓣幅度大: 旁瓣峰值衰减为13dB

◈ 三角形（Bartlett）窗

$$w(n)=\begin{cases}\dfrac{2n}{N-1} & 0\le n\le \dfrac{N-1}{2}\\[2ex] 2-\dfrac{2n}{N-1} & \dfrac{N-1}{2}\le n\le N-1\end{cases}$$

窗谱: $$W(e^{j\omega})=W(\omega)e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}$$

幅度函数:

$$W(\omega)=\frac{2}{N}\left[\frac{\sin\dfrac{\omega N}{4}}{\sin\dfrac{\omega}{2}}\right]^2 \qquad N>>1$$

主瓣宽度宽: $\dfrac{8\pi}{N}$ 旁瓣幅度较小: 旁瓣峰值衰减为25dB

◈ 汉宁（Hanning）窗

（升余弦窗）

$$w(n)=\frac{1}{2}\left[1-\cos\frac{2\pi n}{N-1}\right]R_N(n)$$

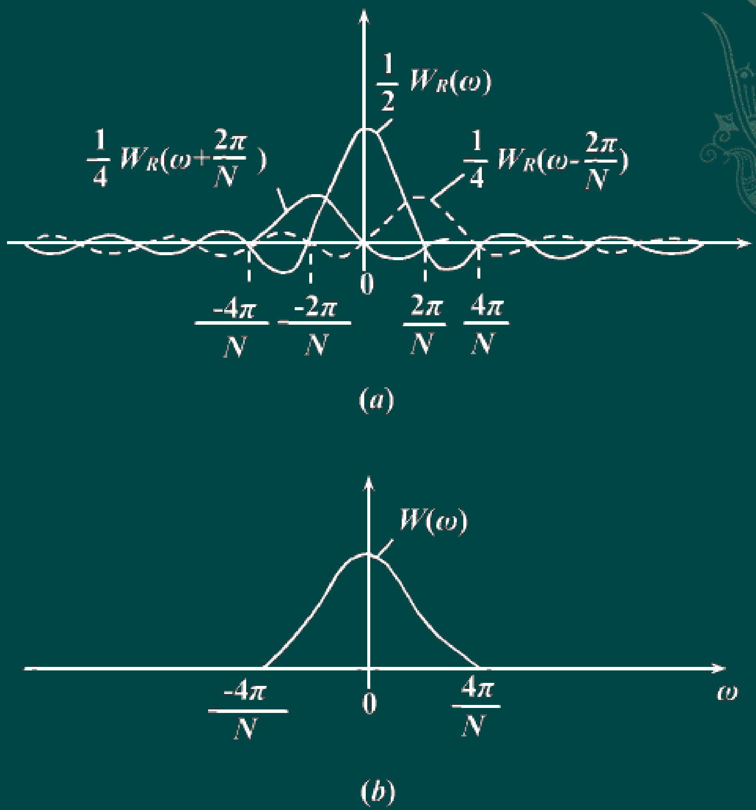


图7-9 汉宁(Hanning)窗谱

幅度函数： $(N>>1)$

$$W(\omega)=0.5W_R(\omega)+0.25\left[W_R\left(\omega-\frac{2\pi}{N}\right)+W_R\left(\omega+\frac{2\pi}{N}\right)\right]$$

主瓣宽度宽： $\frac{8\pi}{N}$

旁瓣幅度小：旁瓣峰值衰减为31dB

◈ 海明（Hamming）窗 （改进的升余弦窗）

$$w(n)=\left[0.54-0.46\cos\frac{2\pi n}{N-1}\right]R_N(n)$$

幅度函数： $\left(N>>1\right)$

$$W(\omega)=0.54W_R(\omega)+0.23\left[W_R\left(\omega-\frac{2\pi}{N}\right)+W_R\left(\omega+\frac{2\pi}{N}\right)\right]$$

主瓣宽度宽: $\dfrac{8\pi}{N}$ 　旁瓣幅度更小: 旁瓣峰值衰减为41dB

◈ 布莱克曼（Blackman）窗 （二阶升余弦窗）

$$w(n)=\left[0.42-0.5\cos\frac{2\pi n}{N-1}+0.08\cos\frac{4\pi n}{N-1}\right]R_N(n)$$

幅度函数：$(N>>1)$

$$W(\omega)=0.42W_R(\omega)+0.25\left[W_R\left(\omega-\frac{2\pi}{N}\right)+W_R\left(\omega+\frac{2\pi}{N}\right)\right]$$

$$+0.04\left[W_R\left(\omega-\frac{4\pi}{N}\right)+W_R\left(\omega+\frac{4\pi}{N}\right)\right]$$

主瓣宽度最宽: $\frac{12\pi}{N}$ 旁瓣幅度最小: 旁瓣峰值衰减为57dB

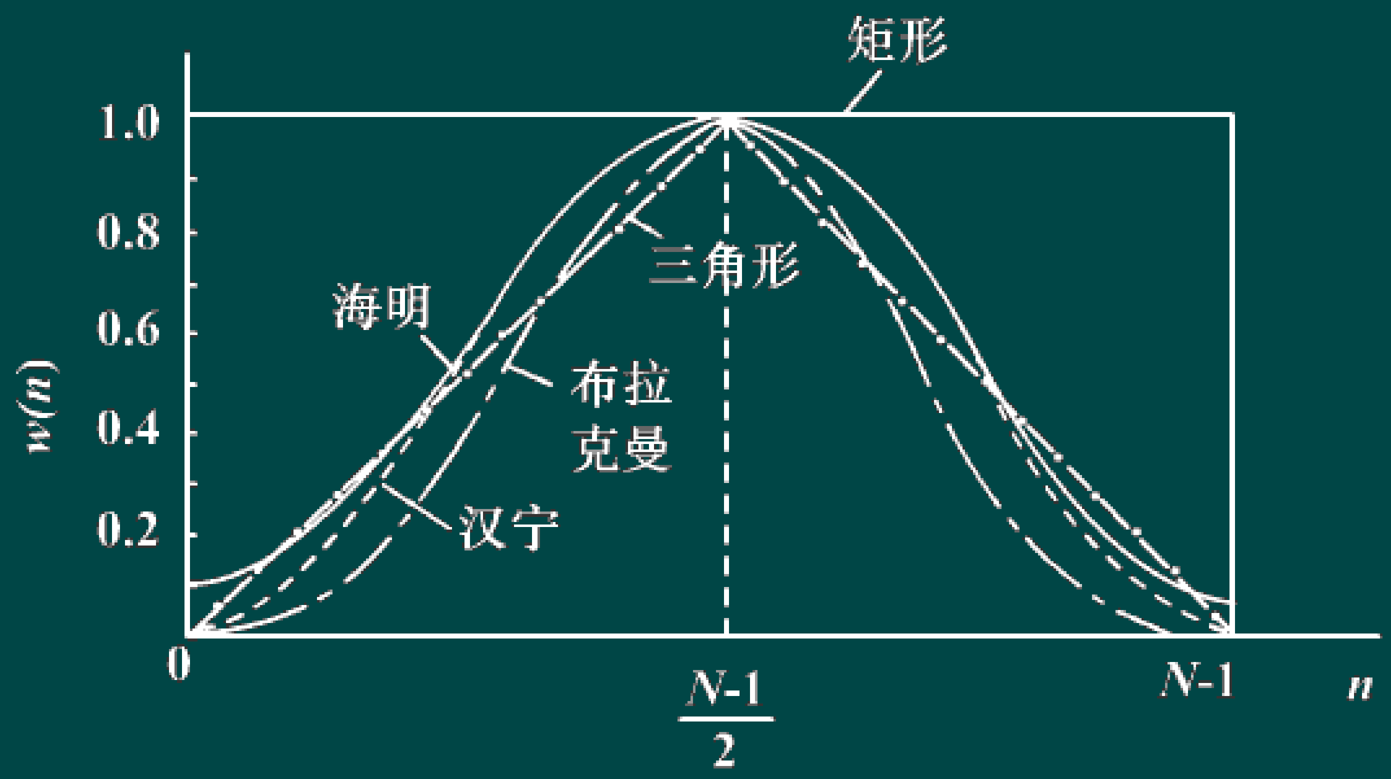


图7-10 设计有限长单位冲激响应滤波器常用的几种窗函数

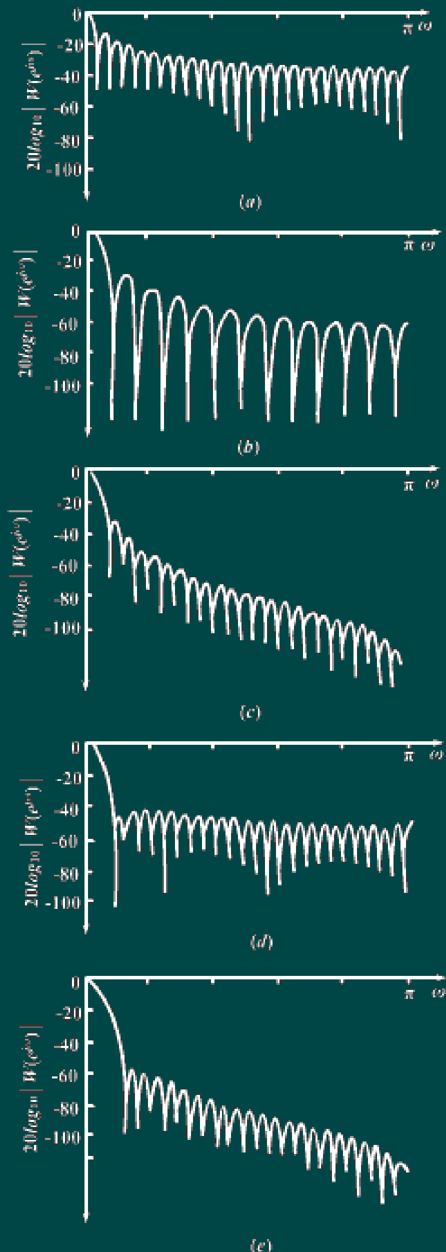


图7-11　图7-10的各种窗函数的
傅里叶变换(N=51)
(a)矩形窗;(b)巴特列特窗(三角形窗);
(c)汗宁窗;(d)海明窗;(e)布拉克曼窗

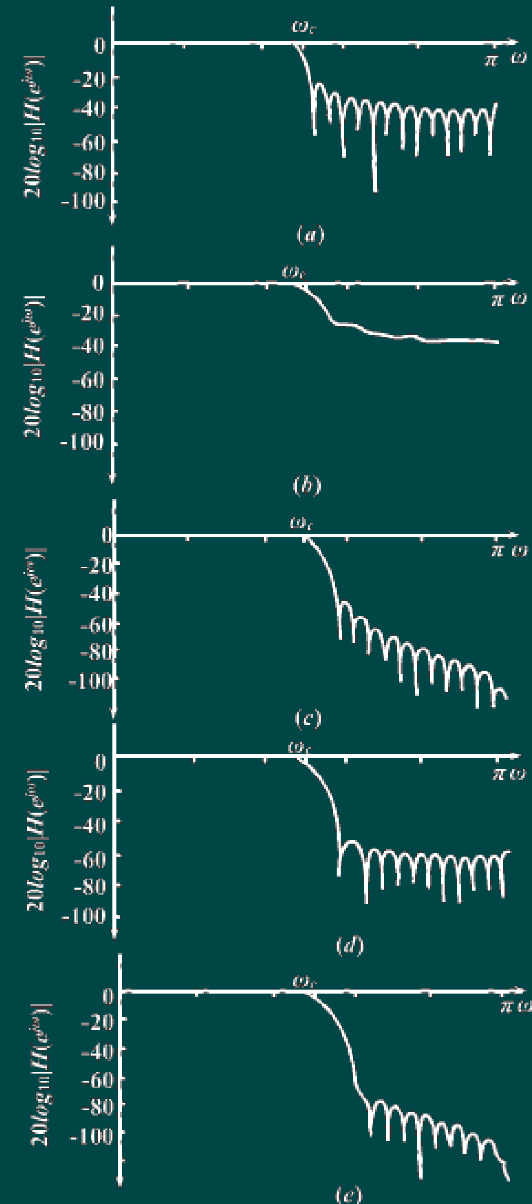


图7-12　理想地同滤波器加窗后的
幅度响应 (N=51)
(a) 矩形窗; (b) 巴特列特窗(三角形窗);
(c) 汉宁窗; (d) 海明窗; (e) 布拉克曼窗

◈ 凯泽（Kaiser）窗

$$w(n)=\frac{I_0\left(\beta\sqrt{1-\left(1-\frac{2n}{N-1}\right)^2}\right)}{I_0(\beta)}\qquad 0\le n\le N-1$$

$I_0(\cdot)$：第一类变形零阶贝塞尔函数

改变β可同时调整主瓣宽度和旁瓣幅度

$\beta\uparrow$ 旁瓣幅度$\downarrow$

但主瓣宽度$\uparrow$

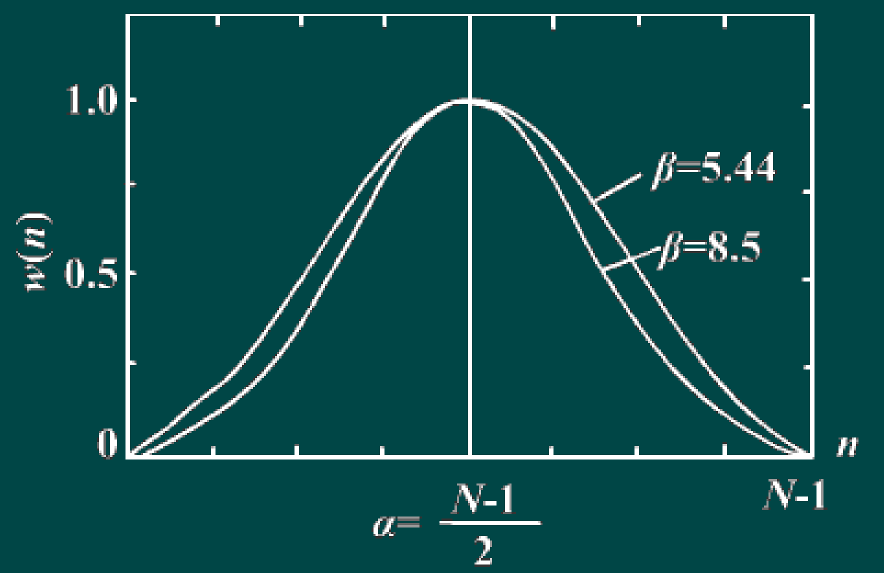


图7-13 凯泽窗函数

窗函数	窗谱性能指标		加窗后滤波器性能指标	
	旁瓣峰值 /dB	主瓣宽度 $/(2\pi/N)$	过渡带宽 $\Delta\omega$ $/(2\pi/N)$	阻带最小衰减 /dB
矩形窗	−13	2	0.9	−21
三角形窗	−25	4	2.1	−25
汉宁窗	−31	4	3.1	−44
海明窗	−41	4	3.3	−53
布拉克曼窗	−57	6	5.5	−74
凯泽窗 $(\beta=7.865)$	−57		5	−80

阻带最小衰减只由窗形状决定

过渡带宽则与窗形状和窗宽N都有关

3、窗函数法的设计步骤

- 给定理想的频率响应函数$H_d(e^{j\omega})$及技术指标 $\delta_2,\Delta\omega$
- 求出理想的单位抽样响应 $h_d(n)$
- 根据阻带衰减选择窗函数 $w(n)$
- 根据过渡带宽度确定窗的长度 N 值 $N = A/\Delta\omega$
- 求所设计的FIR滤波器的单位抽样响应

$$h(n) = h_d(n)\cdot w(n)$$

- 计算频率响应 $H(e^{j\omega})$ ，验算指标是否满足要求

$$H_d(e^{j\omega}) \longrightarrow h_d(n)$$

公式法: $$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega n} d\omega$$

IFFT法:

对 $H_d(e^{j\omega})$ M点等间隔抽样: $H_d(e^{j\frac{2\pi}{M}k})$

计算其IFFT，得: $$h_M(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h_d(n+rM)$$

当$M \gg N$时, $h_d(n) \approx h_M(n)$

4、线性相位FIR低通滤波器的设计

例：设计一个线性相位FIR低通滤波器，

给定抽样频率为 $\Omega_s = 2\pi \times 1.5 \times 10^4 (rad/\sec)$，

通带截止频率为 $\Omega_p = 2\pi \times 1.5 \times 10^3 (rad/\sec)$，

阻带起始频率为 $\Omega_{st} = 2\pi \times 3 \times 10^3 (rad/\sec)$，

阻带衰减不小于-50dB，幅度特性如图所示

解： 1）求数字频率

$$\omega_p = \Omega_p / f_s = 2\pi\Omega_p / \Omega_s = 0.2\pi$$

$$\omega_{st} = \Omega_{st} / f_s = 2\pi\Omega_{st} / \Omega_s = 0.4\pi$$

$$\delta_2 = 50dB$$

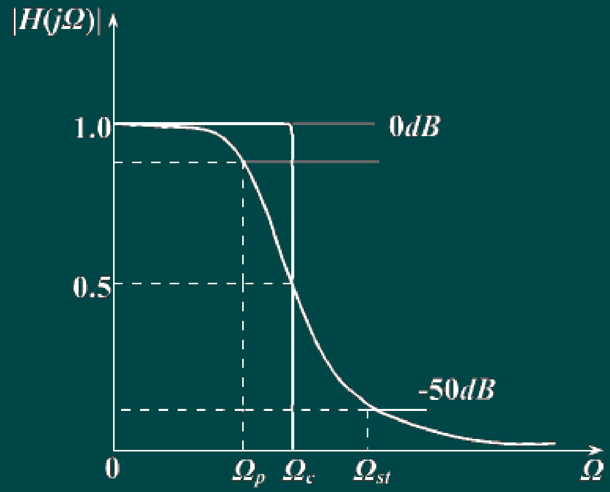


图7-14 例7-1要求的模拟低通滤波器特性

2）求$h_d(n)$

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases} e^{-j\omega\tau} & -\omega_c\le\omega\le\omega_c \\ 0 & -\pi\le\omega\le-\omega_c,\omega_c\le\omega\le\pi \end{cases}$$

$$\omega_c=\frac{\Omega_c}{f_s}=2\pi\frac{1/2\left(\Omega_p+\Omega_{st}\right)}{\Omega_s}=0.3\pi$$

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-j\omega\tau}e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}e^{j\omega(n-\tau)}d\omega$$

$$=\begin{cases} \dfrac{1}{\pi(n-\tau)}\sin[\omega_c(n-\tau)] & n\ne\tau \\ \dfrac{\omega_c}{\pi} & n=\tau \end{cases}\qquad \tau=\frac{N-1}{2}$$

3）选择窗函数：由 $\delta_2 = 50dB$ 确定海明窗（-53dB）

$$w(n) = \left[0.54 - 0.46\cos\frac{2\pi n}{N-1}\right]R_N(n)$$

4）确定N 值　　海明窗带宽：$\Delta\omega = \frac{6.6\pi}{N}$

$$\Delta\omega = 2\pi\frac{\Omega_{st} - \Omega_p}{\Omega_s} = 0.2\pi$$

$$N = \frac{A}{\Delta\omega} = \frac{6.6\pi}{0.2\pi} = 33$$

$$\tau = \frac{N-1}{2} = 16$$

5）确定FIR滤波器的$h(n)$

$$h(n)=h_d(n)w(n)$$

$$=\frac{\sin\left[0.3\pi\left(n-16\right)\right]}{\pi\left(n-16\right)}\cdot\left[0.54-0.46\cos\frac{\pi n}{16}\right]R_{33}(n)$$

6）求 $H(e^{j\omega})$ ，验证

若不满足，则改变N或窗形状重新设计

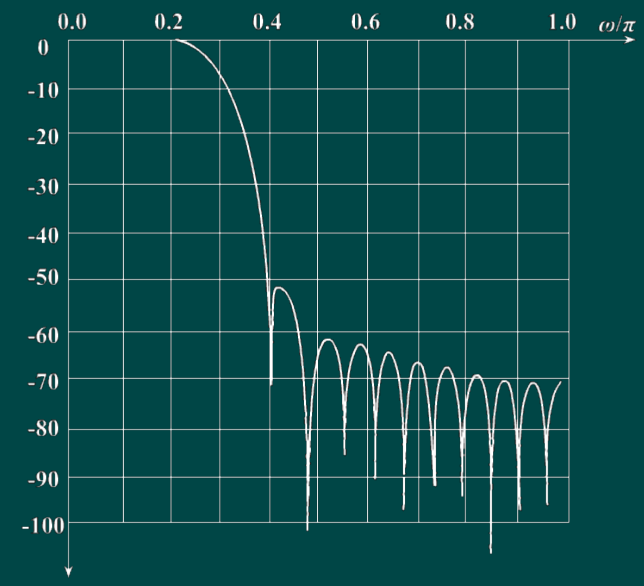


图7-15 例7-1设计出的线形相位*FIP*低通滤波器幅频特性
(海明窗，N=33)

5、线性相位FIR高通滤波器的设计

理想高通的频响：

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau} & \omega_c \le |\omega| \le \pi \\ 0 & \text{其它}\omega \end{cases} \qquad \tau = \frac{N-1}{2}$$

其单位抽样响应：

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\omega_c} e^{j\omega(n-\tau)}d\omega + \int_{\omega_c}^{\pi} e^{j\omega(n-\tau)}d\omega\right]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\pi(n-\tau)}\left\{\sin\left[\pi(n-\tau)\right] - \sin\left[\omega_c(n-\tau)\right]\right\} & n \ne \tau \\ \dfrac{1}{\pi}(\pi-\omega_c) & n = \tau \end{cases}$$

高通滤波器(ω_c)=全通滤波器－低通滤波器(ω_c)

6、线性相位FIR带通滤波器的设计

理想带通的频响:

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau} & 0 < \omega_1 \le |\omega| \le \omega_2 < \pi \\ 0 & \text{其它}\omega \end{cases}$$

其单位抽样响应:

$$\tau = \frac{N-1}{2}$$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\omega_2}^{-\omega_1} e^{j\omega(n-\tau)}d\omega + \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{j\omega(n-\tau)}d\omega\right]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\pi(n-\tau)}\left\{\sin\left[\omega_2(n-\tau)\right]-\sin\left[\omega_1(n-\tau)\right]\right\} & n \ne \tau \\ \dfrac{1}{\pi}(\omega_2-\omega_1) & n = \tau \end{cases}$$

带通滤波器(ω_1,ω_2)=低通滤波器(ω_2)−低通滤波器(ω_1)

7、线性相位FIR带阻滤波器的设计

理想带阻的频响:

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau} & 0 \le |\omega| \le \omega_1, \omega_2 \le |\omega| \le \pi \\ 0 & \text{其它}\omega \end{cases}$$

其单位抽样响应:

$$\tau = \frac{N-1}{2}$$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\omega_2} e^{j\omega(n-\tau)}d\omega + \int_{-\omega_1}^{\omega_1} e^{j\omega(n-\tau)}d\omega + \int_{\omega_2}^{\pi} e^{j\omega(n-\tau)}d\omega\right]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\pi(n-\tau)}\left\{\sin\left[\pi(n-\tau)\right]+\sin\left[\omega_1(n-\tau)\right]-\sin\left[\omega_2(n-\tau)\right]\right\} & n \ne \tau \\ \dfrac{1}{\pi}(\pi+\omega_1-\omega_2) & n = \tau \end{cases}$$

带阻滤波器(ω_1，ω_2)=高通滤波器(ω_2)+低通滤波器(ω_1)

窗函数设计法：

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} \rightarrow H_d(e^{j\omega})$$

$$\downarrow$$

$$h(n) = w(n)h_d(n) \longrightarrow h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

三、频率抽样设计法

1、设计方法

对理想频率响应等间隔抽样

作为实际FIR数字滤波器的频率特性的抽样值

$$H(k)=H_d(k)=H_d(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} \qquad k=0,1,\ldots,N-1$$

$$h(n) \qquad H(z) \qquad H(e^{j\omega})$$

内插公式：

$$H(z)=\frac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=0}^{N-1}H(k)\Phi\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)$$

$$\Phi(\omega)=\frac{1}{N}\frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}$$

$$H\left(e^{j\omega}\right)=e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}\sum_{k=0}^{N-1}H(k)\frac{1}{N}e^{j\frac{\pi k}{N}(N-1)}\frac{\sin\left[N\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi k}{N}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi k}{N}\right)}$$

◈ 抽样点上，频率响应严格相等

- 抽样点之间，加权内插函数的延伸叠加
- 变化越平缓，内插越接近理想值，逼近误差较小

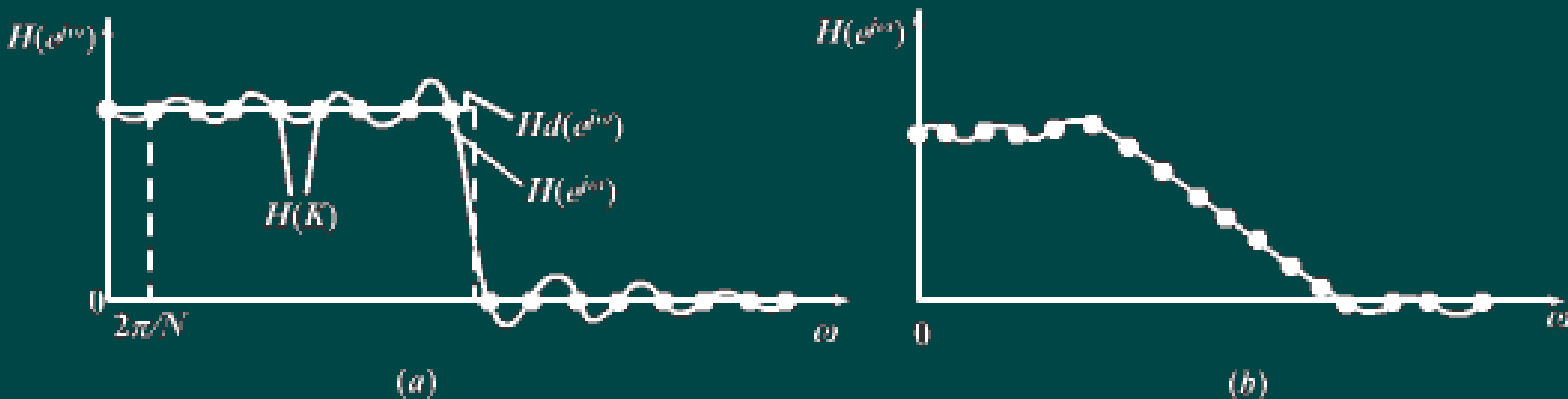
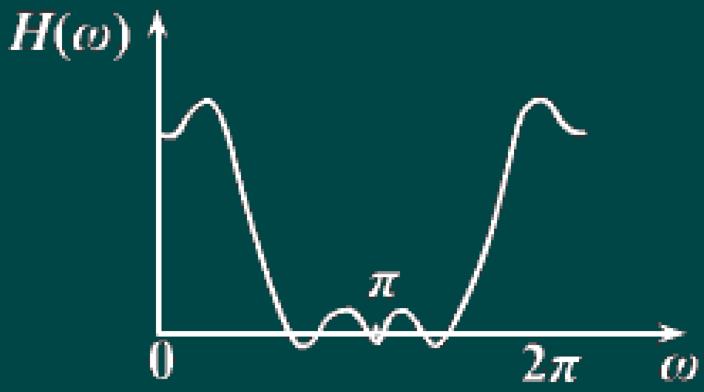


图7-16 频率抽样的响应

1、线性相位的约束

1）$h(n)$偶对称，N为奇数



$$H\left(e^{j\omega}\right)=H\left(\omega\right)e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}$$

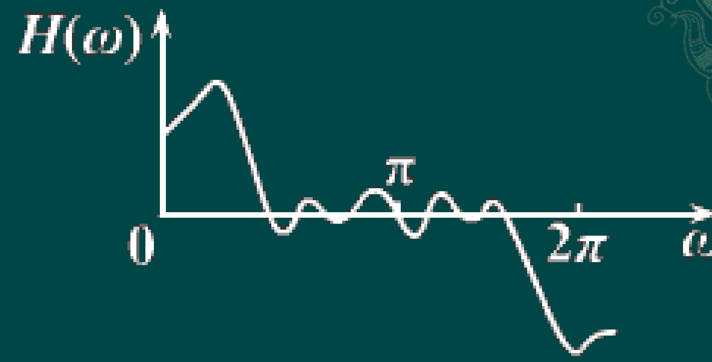
$$H(\omega)=H(2\pi-\omega)$$

$$H\left(k\right)=H\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right)=H_k e^{j\theta_k} \qquad \omega=\frac{2\pi}{N}k$$

幅度偶对称: $H_k=H_{N-k}$

相位函数: $\theta_k=-\frac{N-1}{2}\cdot\frac{2\pi}{N}k=-k\pi\left(1-\frac{1}{N}\right)$

2）$h(n)$偶对称，N为偶数



$$H(e^{j\omega}) = H(\omega)e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}$$

$$H(\omega) = -H(2\pi - \omega)$$

$$H(k) = H\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right) = H_k e^{j\theta_k} \qquad \omega = \frac{2\pi}{N}k$$

幅度奇对称: $H_k = -H_{N-k}$

相位函数: $\theta_k = -k\pi\left(1 - \frac{1}{N}\right)$

2、频率抽样的两种方法

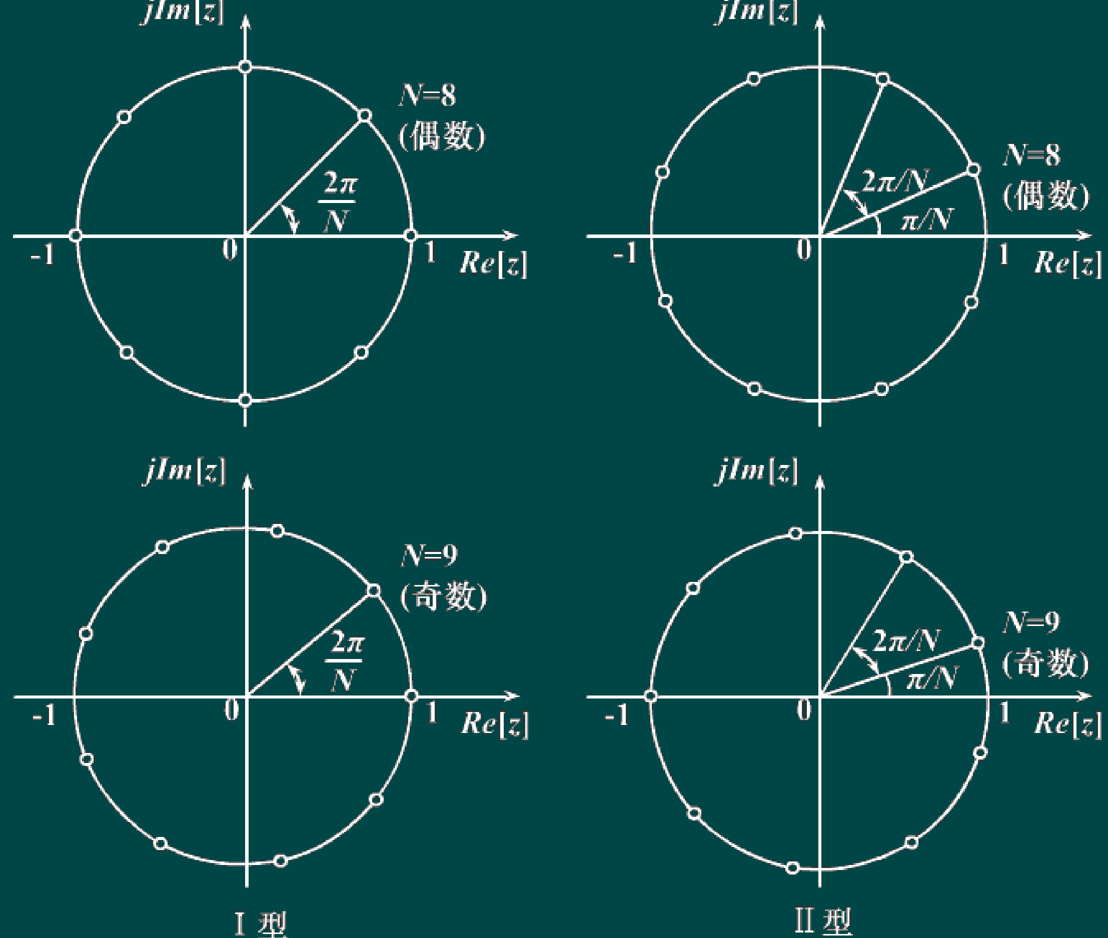
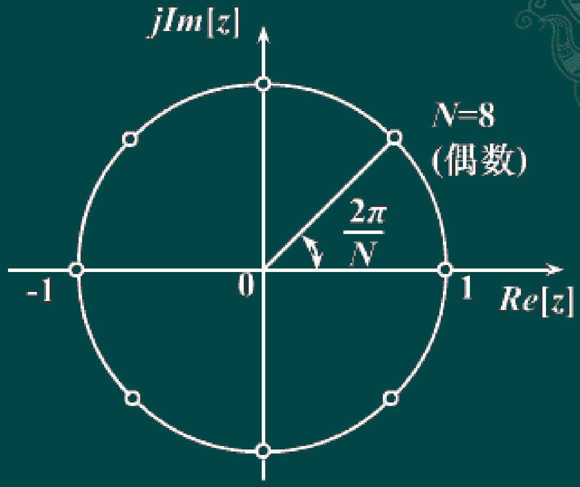


图7-17 两种频率抽样(Ⅰ型,Ⅱ型)

1）第一种频率抽样

$$H(k)=H_d(k)=H_d\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$$



$$k=0,1,\ldots,N-1$$

系统函数:

$$H(z)=\frac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

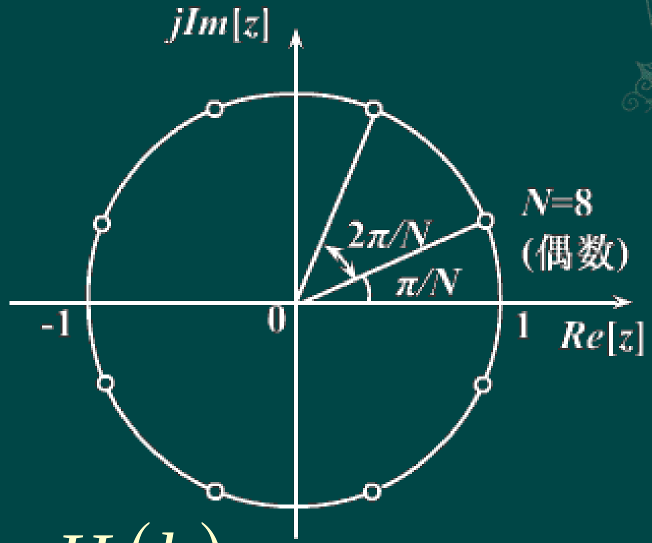
频率响应:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{N}e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}\sum_{k=0}^{N-1}H(k)e^{-j\frac{\pi k}{N}}\frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi k}{N}\right)}$$

2）第二种频率抽样

$$H(k)=H_d\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k+\frac{\pi}{N}}$$

$$k=0,1,\ldots,N-1$$



系统函数：

$$H(z)=\frac{1+z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}\left(k+\frac{1}{2}\right)}z^{-1}}$$

频率响应：

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{\cos\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{N}e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)e^{-j\frac{\pi}{N}\left(k+\frac{1}{2}\right)}}{j\sin\left[\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{N}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]}$$

3、线性相位第一种频率抽样

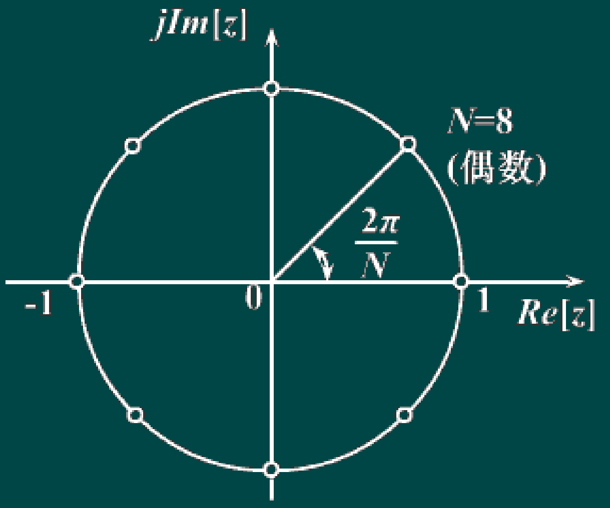
$h(n)$为实数序列时，$H(k)$圆周共轭对称

$$H(k)=H^*(N-k)$$

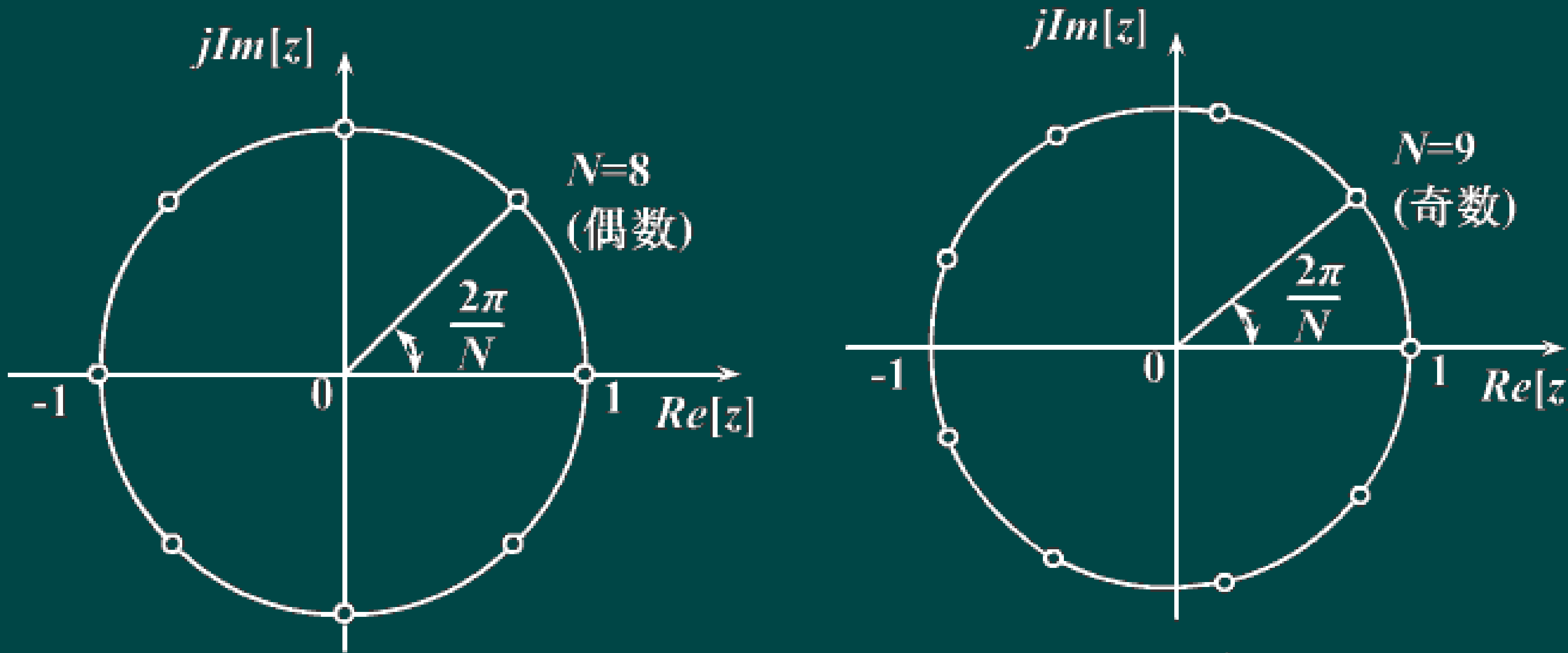
即：$$|H(k)|=|H(N-k)|$$

$$\theta(k)=-\theta(N-k)$$

对称中心：$\dfrac{N}{2}$



又线性相位：$\theta\left(e^{j\omega}\right)=-\dfrac{N-1}{2}\omega$



Ⅰ 型

当 N 为奇数时：

$$\theta(k)=\begin{cases} -\dfrac{2\pi}{N}k\left(\dfrac{N-1}{2}\right) & k=0,\dots,\dfrac{N-1}{2} \\ \dfrac{2\pi}{N}(N-k)\left(\dfrac{N-1}{2}\right) & k=\dfrac{N+1}{2},\dots,N-1 \end{cases}$$

当 N 为偶数时：

$$\theta(k)=\begin{cases} -\dfrac{2\pi}{N}k\left(\dfrac{N-1}{2}\right) & k=0,\dots,\left(\dfrac{N}{2}-1\right) \\ 0 & k=\dfrac{N}{2} \\ \dfrac{2\pi}{N}(N-k)\left(\dfrac{N-1}{2}\right) & k=\left(\dfrac{N}{2}+1\right),\dots,N-1 \end{cases}$$

当 N 为奇数时：

$$H(k)=\begin{cases}\left|H(k)\right|e^{-j\frac{2\pi}{N}k\left(\frac{N-1}{2}\right)} & k=0,\ldots,\dfrac{N-1}{2}\\ \left|H(N-k)\right|e^{j\frac{2\pi}{N}(N-k)\left(\frac{N-1}{2}\right)} & k=\dfrac{N+1}{2},\ldots,N-1\end{cases}$$

当 N 为偶数时：

$$H(k)=\begin{cases}\left|H(k)\right|e^{-j\frac{2\pi}{N}k\left(\frac{N-1}{2}\right)} & k=0,\ldots,\left(\dfrac{N}{2}-1\right)\\ 0 & k=\dfrac{N}{2}\\ \left|H(N-k)\right|e^{j\frac{2\pi}{N}(N-k)\left(\frac{N-1}{2}\right)} & k=\left(\dfrac{N}{2}+1\right),\ldots,N-1\end{cases}$$

频率响应：

$$H\left(e^{j\omega}\right)=e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}\left\{\frac{|H(0)|\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{N\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}+\sum_{k=1}^{M}\frac{|H(k)|}{N}\left[\frac{\sin\left[N\left(\frac{\omega}{2}-\frac{k\pi}{N}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{k\pi}{N}\right)}+\frac{\sin\left[N\left(\frac{\omega}{2}+\frac{k\pi}{N}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\omega}{2}+\frac{k\pi}{N}\right)}\right]\right\}$$

当N为奇数时: $M=\frac{N-1}{2}$

当N为偶数时: $M=\frac{N}{2}-1$

4、线性相位第二种频率抽样

$h(n)$为实数序列时，$H(k)$圆周共轭对称

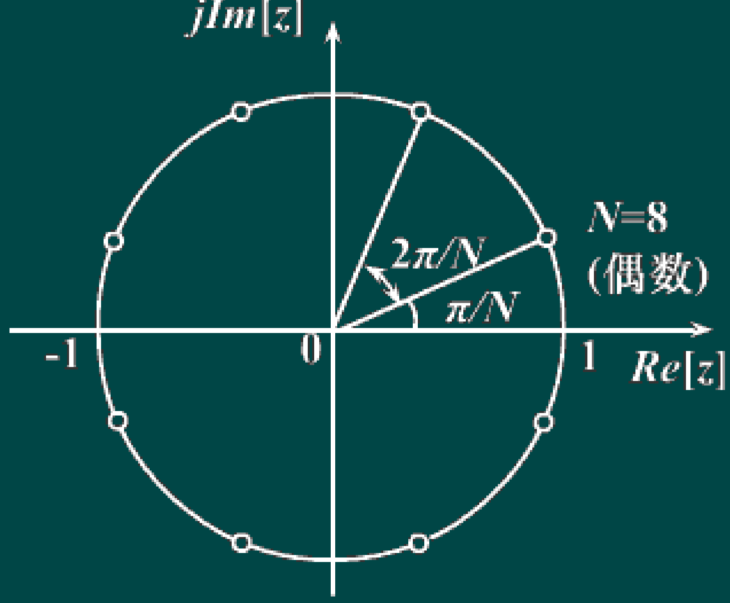
$$H(k) = H^*(N-1-k)$$

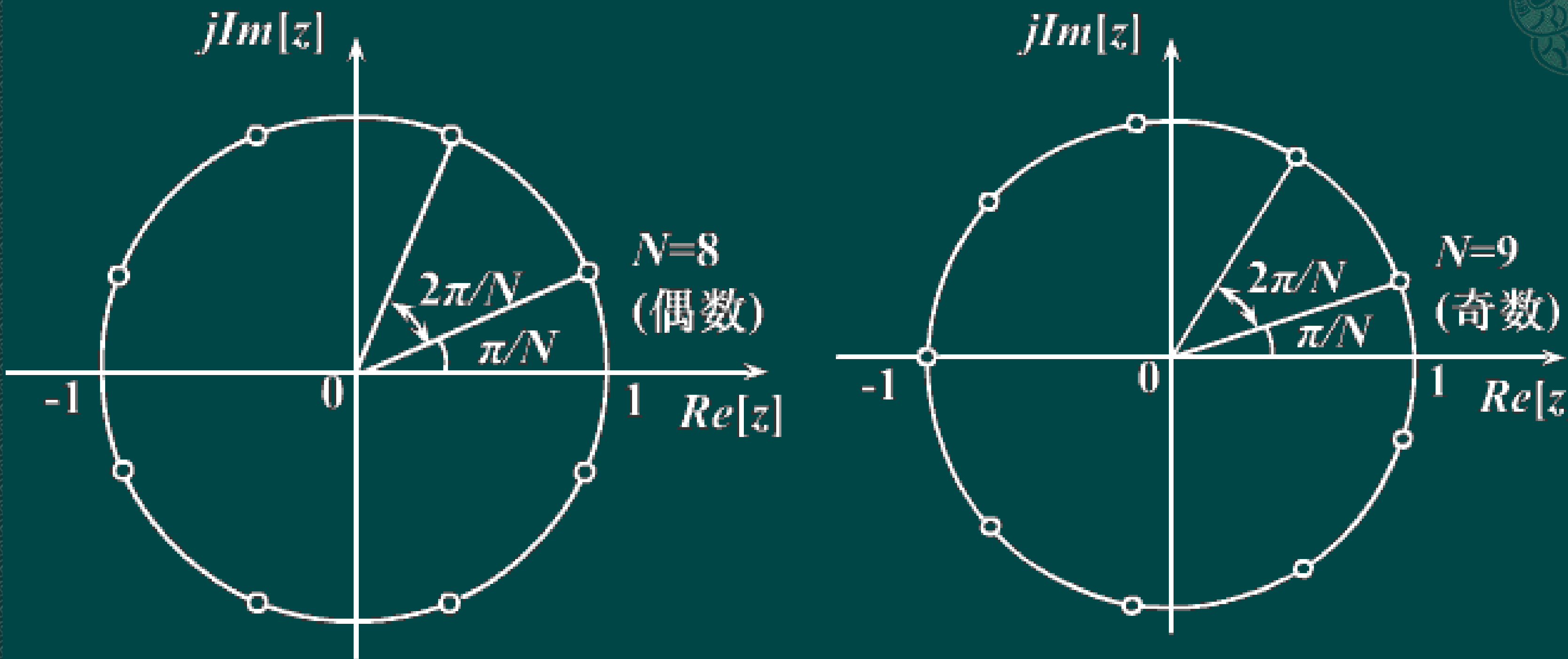
即：$$\left|H(k)\right| = \left|H(N-1-k)\right|$$

$$\theta(k) = -\theta(N-1-k)$$

对称中心：$\dfrac{N-1}{2}$

又线性相位：$\theta\left(e^{j\omega}\right) = -\dfrac{N-1}{2}\omega$





Ⅱ型

当N为奇数时:

$$\theta(k)=\begin{cases} -\dfrac{2\pi}{N}\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{N-1}{2}\right) & k=0,\ldots,\dfrac{N-3}{2} \\ 0 & k=\dfrac{N-1}{2} \\ \dfrac{2\pi}{N}\left(N-k-\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{N-1}{2}\right) & k=\dfrac{N+1}{2},\ldots,N-1 \end{cases}$$

当N为偶数时:

$$\theta(k)=\begin{cases} -\dfrac{2\pi}{N}\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{N-1}{2}\right) & k=0,\ldots,\left(\dfrac{N}{2}-1\right) \\ \dfrac{2\pi}{N}\left(N-k-\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{N-1}{2}\right) & k=\dfrac{N}{2},\ldots,N-1 \end{cases}$$

当N为奇数时：

$$H(k)=\begin{cases}\left|H(k)\right|e^{-j\frac{2\pi}{N}\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{N-1}{2}\right)} & k=0,\ldots,\dfrac{N-3}{2}\\ \left|H\left(\dfrac{N-1}{2}\right)\right| & k=\dfrac{N-1}{2}\\ \left|H(N-1-k)\right|e^{j\frac{2\pi}{N}\left(N-k-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{N-1}{2}\right)} & k=\dfrac{N+1}{2},\ldots,N-1\end{cases}$$

当N为偶数时：

$$H(k)=\begin{cases}\left|H(k)\right|e^{-j\frac{2\pi}{N}\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{N-1}{2}\right)} & k=0,\ldots,\left(\dfrac{N}{2}-1\right)\\ \left|H(N-1-k)\right|e^{j\frac{2\pi}{N}\left(N-k-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{N-1}{2}\right)} & k=\dfrac{N}{2},\ldots,N-1\end{cases}$$

频率响应：

$$H\left(e^{j\omega}\right)=e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega}\left\{H_{\frac{N-1}{2}}(\omega)+\sum_{k=0}^{M}\frac{\left|H(k)\right|}{N}\left[\frac{\sin\left\{N\left[\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{N}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]\right\}}{\sin\left[\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{N}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]}+\frac{\sin\left\{N\left[\frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{N}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]\right\}}{\sin\left[\frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{N}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]}\right]\right\}$$

当 N 为奇数时:

$$H_{\frac{N-1}{2}}(\omega)=\frac{\left|H\left(\frac{N-1}{2}\right)\right|}{N}\cdot\frac{\cos\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)}\qquad M=\frac{N-3}{2}$$

当N为偶数时：

$$H_{\frac{N-1}{2}}(\omega)=0\qquad M=\frac{N}{2}-1$$

5、过渡带抽样的优化设计

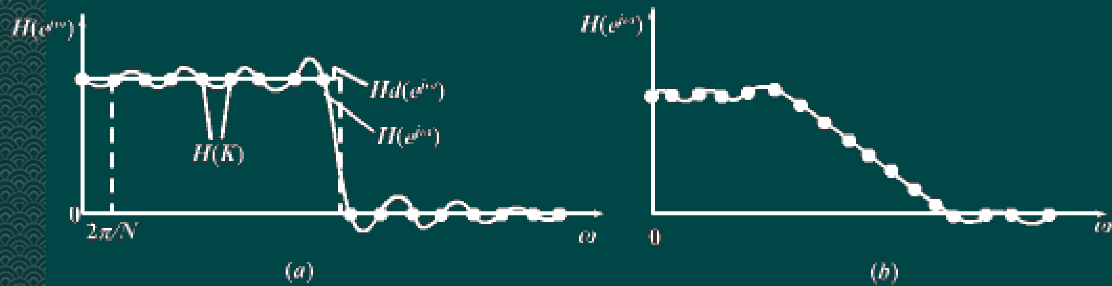


图7-16 频率抽样的响应

增加过渡带抽样点，可加大阻带衰减

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=0}^{N-1}H\left(k\right)\Phi\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)$$

不加过渡抽样点: $\delta_2=-20dB$

加一点: $\delta_2=-40\sim-54dB$

加两点: $\delta_2=-60\sim-75dB$

加三点: $\delta_2=-80\sim-95dB$

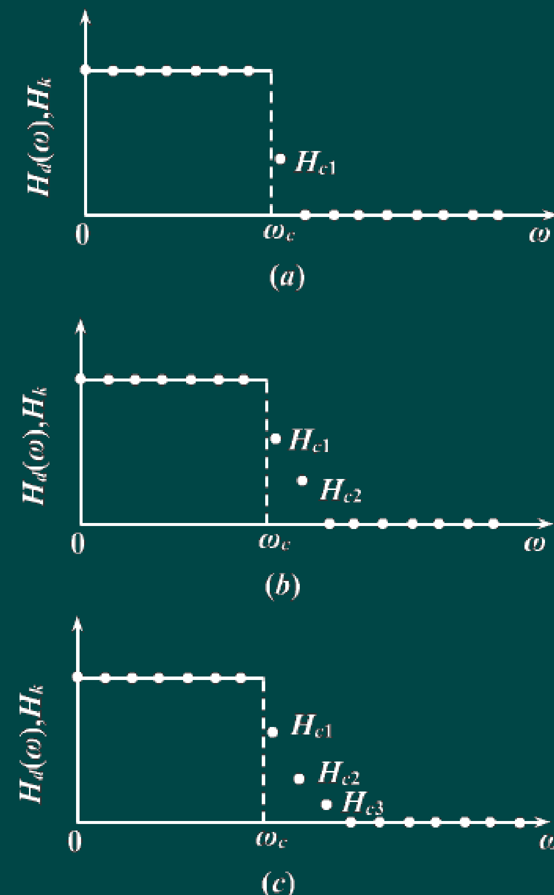


图7-18 加过渡抽样点(过渡点)

(a) 一点过渡带; (b) 二点过渡带; (c) 三点过渡带;

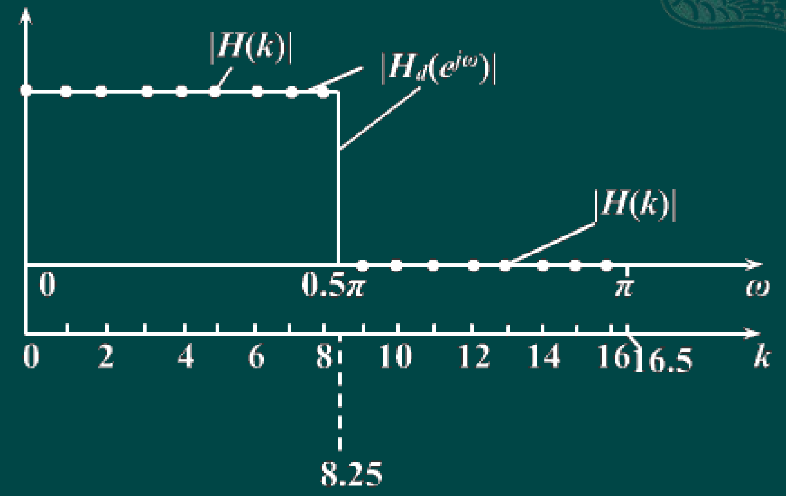
- 增加过渡带抽样点，可加大阻带衰减，但导致过渡带变宽

- 增加N，使抽样点变密，减小过渡带宽度，但增加了计算量

- 优点：频域直接设计

- 缺点：抽样频率只能是 $2\pi/N$ 或 π/N 的整数倍，截止频率 ω_c 不能任意取值

例：利用频率抽样法设计一个频率特性为矩形的理想低通滤波器，截止频率为0.5π，抽样点数为N=33，要求滤波器具有线性相位。



解：理想低通频率特性

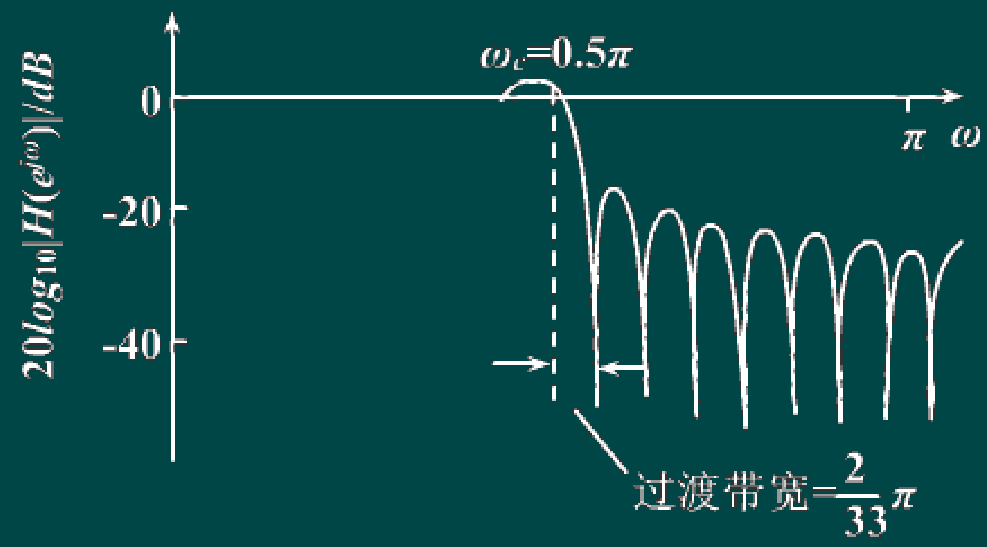
$$\left|H_d\left(e^{j\omega}\right)\right|=\begin{cases}1 & 0\le\omega\le\omega_c\\ 0 & \text{其它}\omega\end{cases}$$

按第一种频率抽样方式，N=33，得抽样点

$$\left|H(k)\right|=\begin{cases}1 & 0\le k\le \mathrm{Int}\left[\dfrac{N\omega_c}{2\pi}\right]=\dfrac{N-1}{4}=8\\ 0 & \mathrm{Int}\left[\dfrac{N\omega_c}{2\pi}\right]+1=9\le k\le\dfrac{N-1}{2}=16\end{cases}$$

得线性相位FIR滤波器的频率响应：

$$H\left(e^{j\omega}\right)=e^{-j16\omega}\left\{\frac{\sin\left(\frac{33\omega}{2}\right)}{33\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}+\sum_{k=1}^{8}\left[\frac{\sin\left[33\left(\frac{\omega}{2}-\frac{k\pi}{33}\right)\right]}{33\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{k\pi}{33}\right)}+\frac{\sin\left[33\left(\frac{\omega}{2}+\frac{k\pi}{33}\right)\right]}{33\sin\left(\frac{\omega}{2}+\frac{k\pi}{33}\right)}\right]\right\}$$



过渡带宽： $2\pi/33$

阻带衰减： $-20dB$

◈ 增加一点过渡带抽样点

令$H(9)=0.5$

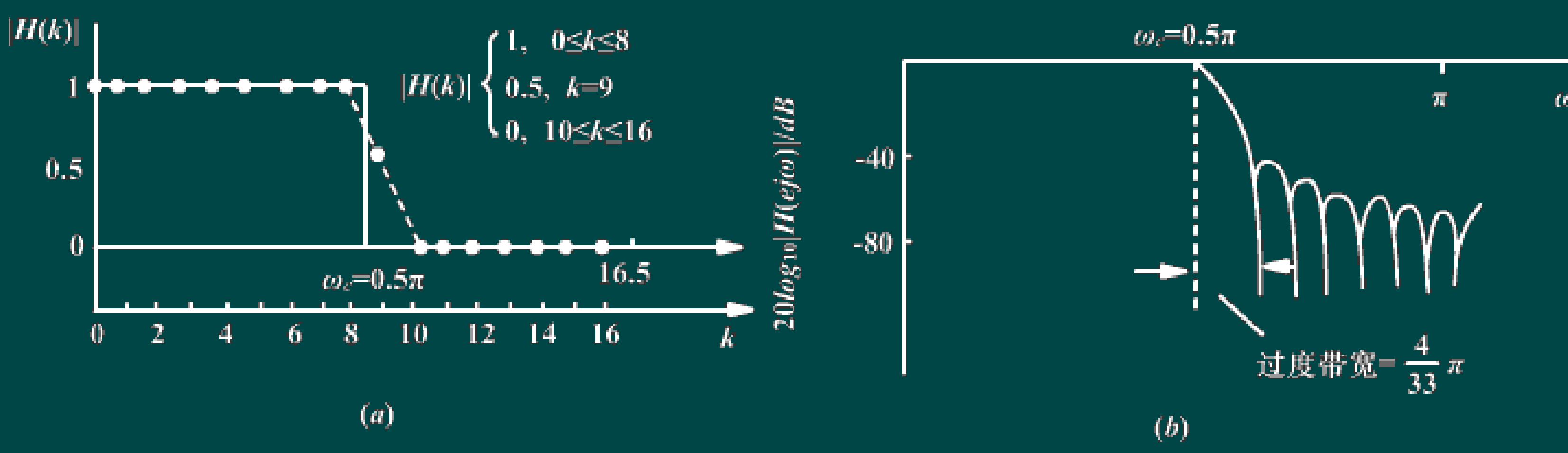


图7-20 增加过渡带非零抽样值及其影响

(a)要求的频率响应$|H_d(e^{j\omega})|$及其抽样$|K(k)|$;(b)设计结果

过渡带宽: $4\pi/33$

阻带衰减: $-40dB$

- 增加两点过渡带抽样点且增加抽样点数为N=65

令$H(17)=0.5886$

$H(18)=0.1065$

过渡带宽：$6\pi/65$

阻带衰减：$-60dB$

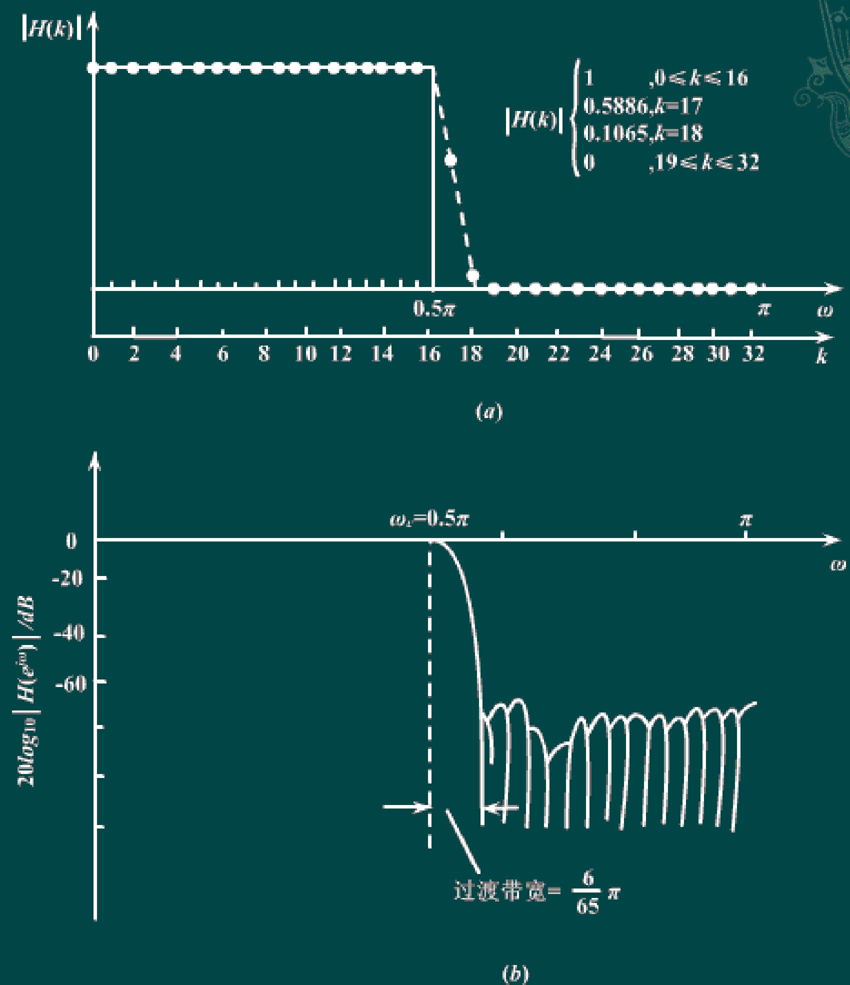


图7-21 增加抽样点数N及过渡带频率抽样值的情况
(a)要求的频率响应$|H_d(e^{j\omega})|$及其抽样$|H(k)|$;(b)设计结果

五、IIR和FIR数字滤波器的比较

IIR滤波器	FIR滤波器
$h(n)$ 无限长	$h(n)$ 有限长
极点位于z平面任意位置	极点固定在原点
滤波器阶次低	滤波器阶次高得多
非线性相位	可严格的线性相位
递归结构	一般采用非递归结构
不能用FFT计算	可用FFT计算
可用模拟滤波器设计	设计借助于计算机
用于设计规格化的选频滤波器	可设计各种幅频特性和相频特性的滤波器

作业

7.1 （要求用MATLAB画图）

7.2 （要求用MATLAB画图）

3. 试用频率抽样法设计一个FIR线性相位数字低通滤波器，已知$\omega_c = 0.5\pi$, $N = 51$。