§4.6 系统函数的零极点分布与频率响应

4.6.1 *H(ω)*与*H(s)*的关系

p2~15讨论学习：
由拉普拉斯变换直接获得相应函数傅立叶变换的方法

若*h*(*t*)为**因果信号**，则*h*(*t*)的傅里叶变换*H*(*ω*)和单边拉普拉斯变换*H*(*s*)分别为

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0^-}^{\infty}h(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$H(s)=\int_{0-}^{\infty}h(t)e^{-st}dt \qquad \mathrm{Re}[s]>\sigma_0$$

由于$s=\sigma+j\omega$，因此，若能使$\sigma=Re[s]=0$，则*H*(*s*)就等于*H*(*ω*)。但是，能否使*σ*等于零，这取决于*H*(*s*)的收敛域。

H(*s*)的收敛域为$Re[s]>\sigma_0$，σ_0为实数，称为**收敛坐标**。σ_0可能小于零，可能等于零，也可能大于零。

1、拉氏变换收敛域包含jω轴(虚轴) $\sigma_0<0$

如果$\sigma_0<0$，则$H(s)$的收敛域包含jω轴(虚轴)，$H(s)$在jω轴上收敛。若令$\sigma=0$，即令$s=j\omega$，则$H(s)$存在。这时，$h(t)$的傅里叶变换存在，并且令$s=j\omega$，则$H(s)$等于$H(j\omega)$。 即

$$H(\omega)=H(s)\Big|_{s=j\omega}$$

例如，$h(t)=e^{-2(t-1)}\varepsilon(t-1)$ ，其单边拉普拉斯变换为

$$H(s)=\frac{e^{-s}}{s+2} \qquad \mathrm{Re}[s]>-2$$

$h(t)$ 的傅里叶变换为

$$H(\omega)=H(s)\Big|_{s=j\omega}=\frac{e^{-j\omega}}{j\omega+2}$$

例 已知$f(t)=e^{-2t}\cos t\cdot\varepsilon(t)$的单边拉氏变换为

$$F(s)=\frac{s+2}{(s+2)^2+1}\quad \mathrm{Re}[s]>-2$$

求 $f(t)$ 傅里叶变换 $F(\omega)$.

解 F（S）的收敛坐标 $\sigma_0=-2$，即$\sigma_0<0$ 。因此

$$F(\omega)=\frac{j\omega+2}{(j\omega+2)^2+1}$$

另一方面，根据傅里叶变换的**调制定理**或**时域相乘性质**，由于

$$F[e^{-2t}\varepsilon(t)] = \frac{1}{j\omega + 2}$$

所以有

$$F(\omega) = F[e^{-2t}\varepsilon(t)\cos t]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{j(\omega+1)+2} + \frac{1}{j(\omega-1)+2}\right] = \frac{j\omega+2}{(j\omega+2)^2+1}$$

思考：某系统的系统函数为 $H(s)$，若同时存在频响函数 $H(j\omega)$，则该系统必须满足条件（　　　）

A．时不变系统　　B．因果系统

C．稳定系统　　D．线性系统

结论： 只要代入s=jω，就可以由拉普拉斯变换求出傅里叶变换，$h(t)$对应的系统函数统称为因果稳定系统。

2、拉氏变换收敛域不包含$j\omega$轴(虚轴) $\sigma_0>0$

若$\sigma_0>0$，则$H(s)$的收敛域也不包含$j\omega$轴，收敛域的边界在右半平面内。 因此，不能得到$H(\omega)$。例如， $h(t)=e^{2t}\varepsilon(t)$, $H(s)=\dfrac{1}{s-2}$，$H(s)$的收敛域为Re［s］>2， $f(t)$的傅里叶变换不存在。

3、拉氏变换收敛域以虚轴为界 σ_0=0

若收敛坐标σ_0=0，*H*(*s*)的收敛域为Re［*s*］＞0，*H*(*s*)的收敛域不包含j*ω*轴，故*H*(*s*)在jω轴上不收敛。若令*s*=jω，则*H*(*s*)不等于*H*(ω)。

a) 若虚轴上的极点为m个一阶极点$j\beta_i(i=1, 2, \ldots, m)$。将*H*(*s*)展开为部分分式，表示为

$$H(s)=H_N(s)+\sum_{i=1}^{m}\frac{K_i}{s-j\beta_i}$$

式中，$H_N(s)$表示左半平面极点对应的分式。令$H_N(s)$的原函数为$h_N(t)$，则*H*(*s*)的原函数为

$$h(t)=L^{-1}[H(s)]=h_N(t)+\sum_{i=1}^{m}K_i e^{j\beta_i t}\varepsilon(t)=h_N(t)+h_M(t)$$

注意：$e^{j\beta t}\varepsilon(t)$ 与 $e^{\alpha t}\varepsilon(t)$ 的傅里叶变换不同

$$h_M(t)=\sum_{i=1}^{m}K_i e^{j\beta_i t}\varepsilon(t)$$

$$F[e^{-\alpha t}\varepsilon(t)]=\frac{1}{j\omega+\alpha}$$

$h(t)$ 的傅里叶变换为

$$F[e^{j\beta_i t}\varepsilon(t)]=\pi\delta(\omega-\beta_i)+\frac{1}{j\omega-j\beta_i}$$

$$H(j\omega)=F[h(t)]=F[h_N(t)]+F[h_M(t)]$$

由于 $h_N(t)$ 是 $H_N(s)$ 的原函数，并且 $H_N(s)$ 的极点在左半面，故

$$F[h_N(t)]=H_N(s)\Big|_{s=j\omega}$$

根据傅里叶变换的**线性性质**和**频移性质**，并且由于ε(t)的傅里叶变换为 $\pi\delta(\omega)+\dfrac{1}{j\omega}$ ，因此得 $h_M(t)=\sum_{i=1}^{m}K_i e^{j\beta_i t}\varepsilon(t)$

$$F[h_M(t)]=\sum_{i=1}^{m}K_i\left[\pi\delta(\omega-\beta_i)+\frac{1}{j\omega-j\beta_i}\right]$$

$$H(s)=H_N(s)+\sum_{i=1}^{m}\frac{K_i}{s-j\beta_i}$$

$$H(\omega)=H_N(s)\Big|_{s=j\omega}+\sum_{i=1}^{m}K_i\left[\pi\delta(\omega-\beta_i)+\frac{1}{j\omega-j\beta_i}\right]$$

$$=\boxed{H_N(s)\Big|_{s=j\omega}+\sum_{i=1}^{m}\frac{K_i}{j\omega-j\beta_i}}+\sum_{i=1}^{m}K_i\pi\delta(\omega-\beta_i)$$

$$H(\omega)=H(s)\Big|_{s=j\omega}+\pi\sum_{i=1}^{m}K_i\delta(\omega-\beta_i)$$

b) 若虚轴上具有m阶极点 $i\beta$:

$$H(s)=H_a(s)+\frac{k_{1m}}{(s-i\beta)^m}+\cdots+\frac{k_{12}}{(s-i\beta)^2}+\frac{k_{11}}{(s-i\beta)}$$

拉氏逆变换:

$$h(t)=h_a(t)u(t)+\frac{k_{1m}t^{m-1}}{(m-1)!}e^{i\beta t}u(t)+\cdots+k_{12}te^{i\beta t}u(t)+k_{11}e^{i\beta t}u(t)$$

傅里叶变换:

$$H(\omega)=H_a(\omega)+\frac{k_{1m}\pi i^{m-1}}{(m-1)!}\delta^{(m-1)}(\omega-\beta)+\frac{k_{1m}}{(i\omega-i\beta)^m}$$

$$+\cdots$$

$$+\frac{k_{12}\pi i}{1!}\delta'(\omega-\beta)+\frac{k_{12}}{(i\omega-i\beta)^2}$$

$$+k_{11}\pi\delta(\omega-\beta)+\frac{k_{11}}{(i\omega-i\beta)}$$

$$=H(s)\big|_{s=i\omega}+\frac{k_{1m}\pi i^{m-1}}{(m-1)!}\delta^{(m-1)}(\omega-\beta)+\cdots+\frac{k_{12}\pi i}{1!}\delta'(\omega-\beta)+k_{11}\pi\delta(\omega-\beta)$$

不作要求

$$H(\omega)=H(s)\Big|_{s=i\omega}+\pi\sum_{n=1}^{N}\sum_{l=1}^{m_n}\frac{K_n i^{m_n-l}}{(m_n-l)!}\delta^{(m_n-l)}(\omega-\beta_n)$$

m_n表示第n个极点的阶数， m_n =1且N=m时，即

$$H(\omega)=H(s)\Big|_{s=j\omega}+\pi\sum_{i=1}^{m}K_i\delta(\omega-\beta_i)$$

只有因果信号才能从单边拉氏变换用上述方法求傅式变换

例 已知$f(t)=(1-e^{-t})\varepsilon(t)$的单边拉氏变换为

$$F(s)=\frac{1}{s(s+1)} \qquad \mathrm{Re}[s]>0$$

$$H(s)=H_N(s)+\sum_{i=1}^{m}\frac{K_i}{s-j\beta_i}$$

求 $f(t)$ 傅里叶变换

$$H(\omega)=H(s)\big|_{s=j\omega}+\pi\sum_{i=1}^{m}K_i\delta(\omega-\beta_i)$$

解： $F(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}$ $\qquad K_1=1;\beta_1=0$

$$F(\omega)=F(s)\big|_{s=j\omega}+\pi\delta(\omega)=\frac{1}{j\omega}-\frac{1}{j\omega+1}+\pi\delta(\omega)$$

$$=\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right]-\frac{1}{j\omega+1}$$

例 4-22 已知 $\mathscr{L}[u(t)] \leftrightarrow \frac{1}{s}\ (\sigma > 0)$，$\mathscr{L}[\sin\omega_0 t u(t)] \leftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}\ (\sigma > 0)$。求 ① $\mathscr{F}[u(t)]$；② $\mathscr{F}[\sin\omega_0 t u(t)]$。

$$H(s) = H_N(s) + \sum_{i=1}^{m} \frac{K_i}{s - j\beta_i}$$

$$H(\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega} + \pi\sum_{i=1}^{m} K_i\delta(\omega - \beta_i)$$

解：① $K_1 = 1;\ \beta_1 = 0$

$$\mathscr{F}[u(t)] = \frac{1}{s}\Big|_{s=j\omega} + \pi\delta(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

② 由 $\mathscr{L}[\sin\omega_0 t u(t)] \leftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2} = \frac{\omega_0}{(s+j\omega_0)(s-j\omega_0)} = \frac{\frac{j}{2}}{s+j\omega_0} + \frac{\frac{-j}{2}}{s-j\omega_0}$

$$K_1 = \frac{j}{2}, \beta_1 = -\omega_0, K_2 = -\frac{j}{2}, \beta_2 = \omega_0,$$

$$\cos\omega_0 u(t) \leftrightarrow \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} + \frac{\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)]$$

$$\mathscr{F}[\sin\omega_0 t u(t)] = \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}\Big|_{s=j\omega} + \pi\frac{j}{2}[\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)]$$

$$= \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} + \frac{j\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)]$$

$\cos\omega_0 u(t)$?

思考：某线性时不变系统的系统函数$H(j\omega)=\dfrac{2}{(j\omega+2)(j\omega+3)}$，则该系统的单位冲激响应h(t)为$\underline{h(t)=2[e^{-2t}-e^{-3t}]\varepsilon(t)}$。

4.6.2 H(s)的零极点与频率特性

p17~24讨论学习：
由系统函数判断系统频率特性的方法

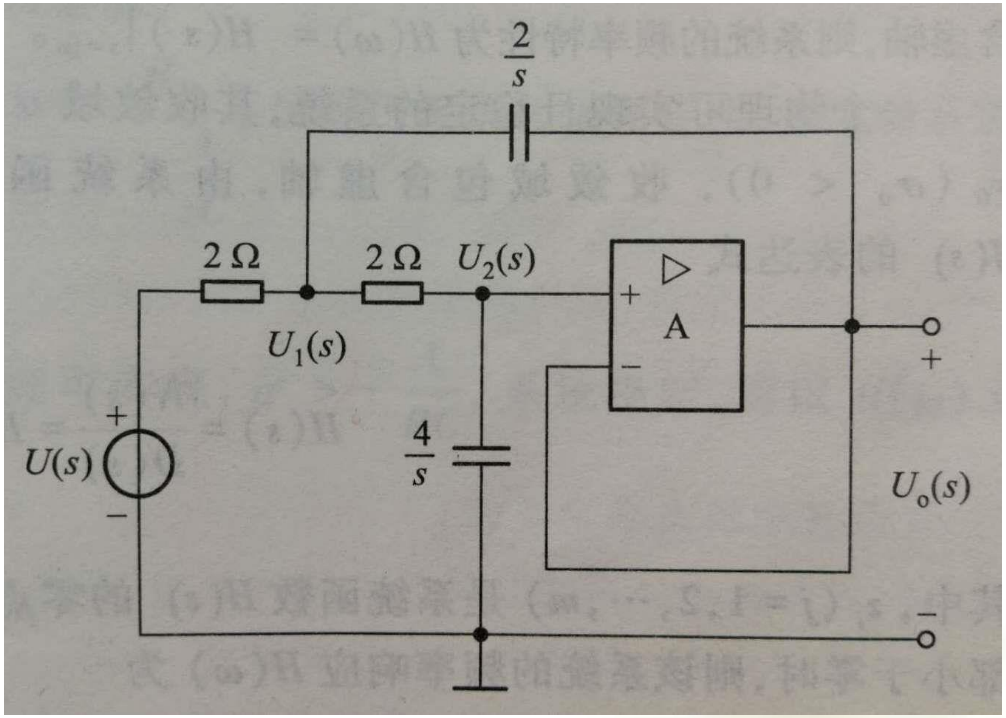
若H(s)的极点均位于s左半平面,令$s=j\omega$,也就是在s平面上令s沿虚轴变化,则有$H(s)|_{s=j\omega}=H(j\omega)$,即为系统的频响特性。根据H(s)在s平面的零、极点分布情况可以绘制出频响特性曲线,包括幅频特性$|H(j\omega)|$曲线和相频特性$\varphi(\omega)$曲线 。

1.直接作图法

例4-23 教材p243

$$H(s)=\frac{1}{s^2+2s+2}$$

$$p_{1,2}=-1\pm j$$

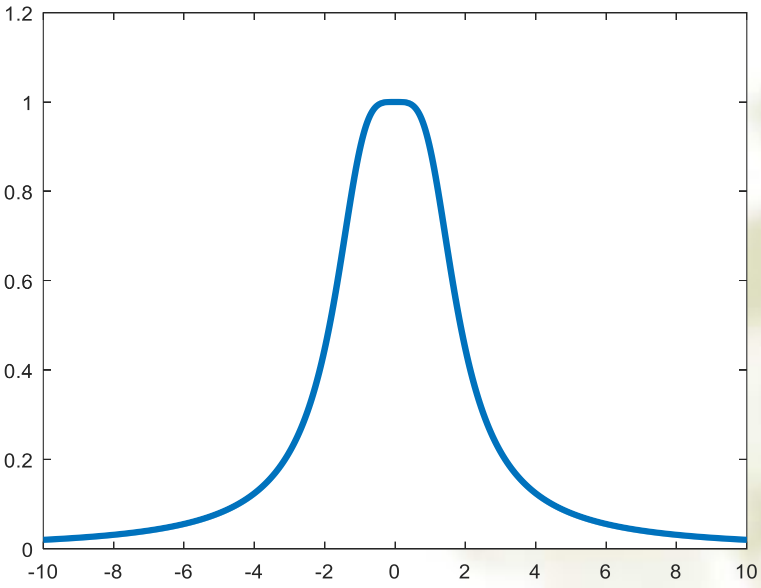


因为是实际系统（物理可实现），因而是因果系统，收敛域包含虚轴，系统稳定。所以：

$$H(\omega)=\frac{1}{(j\omega)^2+2j\omega+2}=\frac{1}{j\omega+1-\frac{\omega^2}{2}}$$

$$\left|H(\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \left(1 - \frac{\omega^2}{2}\right)^2}}$$

取几个点，确定幅频特性走势



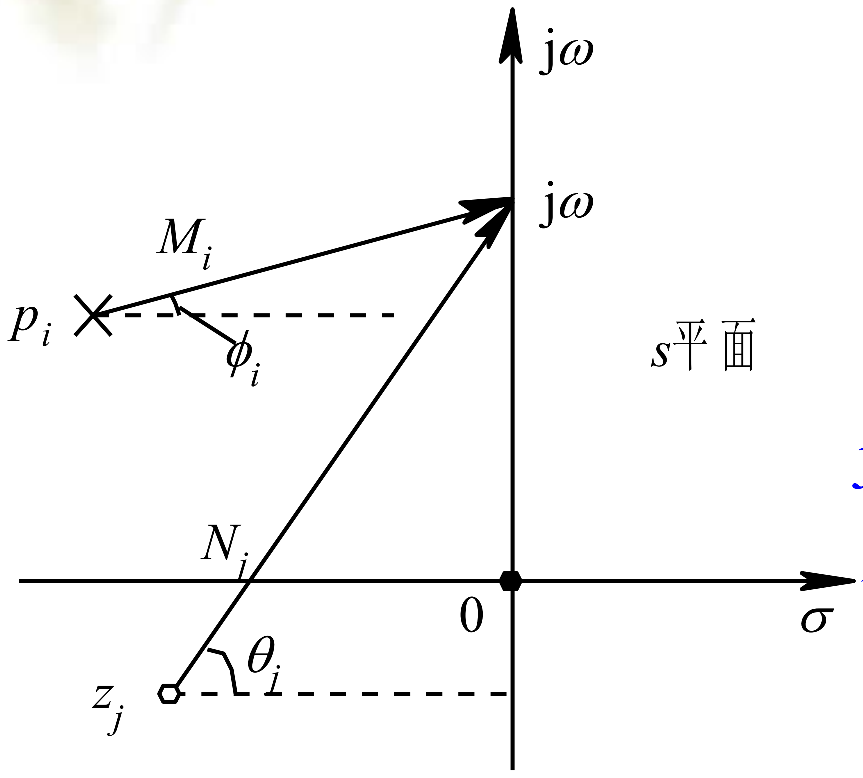
2. 几何作图法

系统函数H(s)的表示式为：

$$H(s)=H_0\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_j)}$$

当极点p_j 的实部小于零：

$$H(j\omega)=H_0\frac{\prod_{j=1}^{m}(j\omega-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(j\omega-p_j)}$$



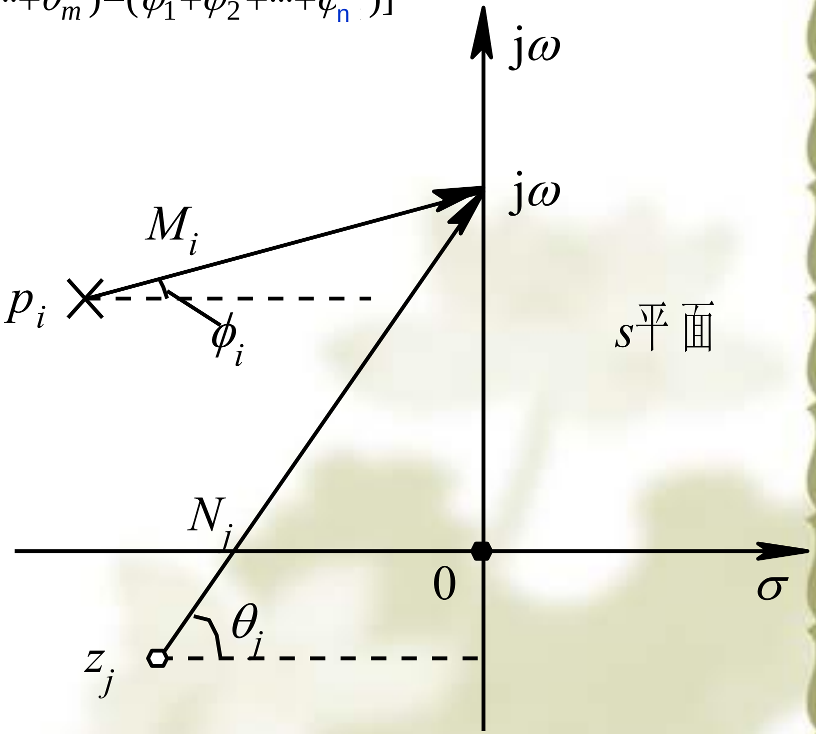
由零点z_j和极点p_i与虚轴上某点jω连接构成的零点矢量$j\omega-z_j$和极点矢量$j\omega-p_i$。图中N_j、M_i分别表示矢量的模,θ_j、φ_i分别表示矢量的相角。

$$j\omega - z_j = N_j e^{j\theta_j}$$

$$j\omega - p_i = M_i e^{j\phi_j}$$

$$H(j\omega) = \frac{H_0 N_0 N_1 \cdots N_m}{M_0 M_1 \cdots M_n} \cdot e^{j[(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m)-(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n)]}$$

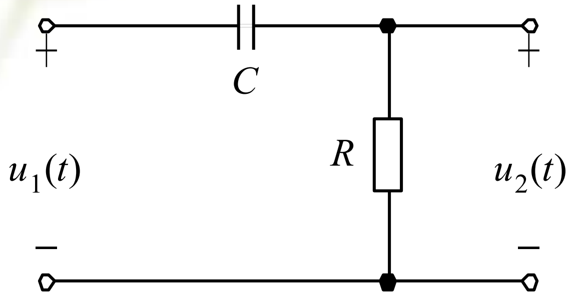
$$= |H(j\omega)| \cdot e^{j\phi(\omega)}$$



$$|H(j\omega)| = H_0 \frac{\prod_{j=1}^{m} N_j}{\prod_{i=1}^{n} M_i}$$

$$\varphi(\omega) = \sum_{j=1}^{m} \theta_j - \sum_{i=1}^{n} \varphi_i$$

例4-24 （类似）：RC高通滤波器如图所示,试分析其频响特性。



解：RC高通滤波器的系统函数为

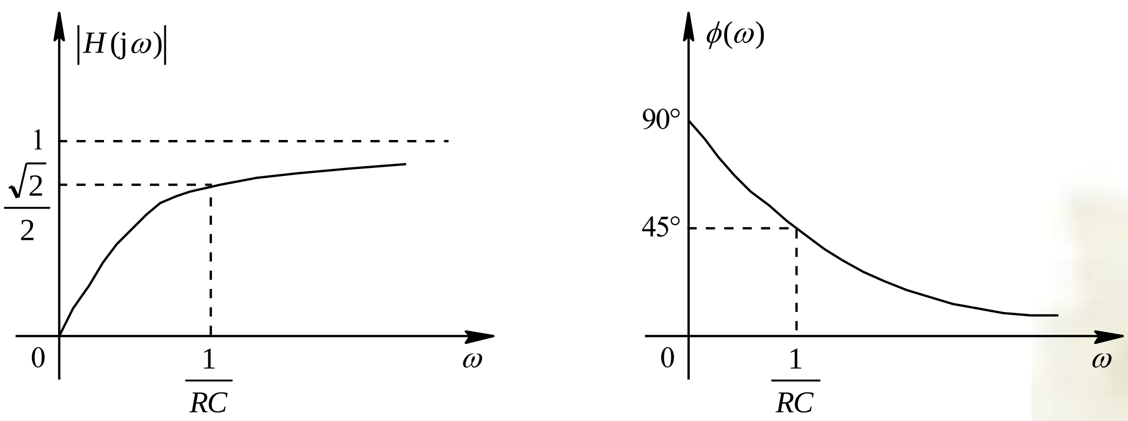
$$H(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=\frac{R}{R+\frac{1}{sC}}=\frac{s}{s+\frac{1}{RC}}$$

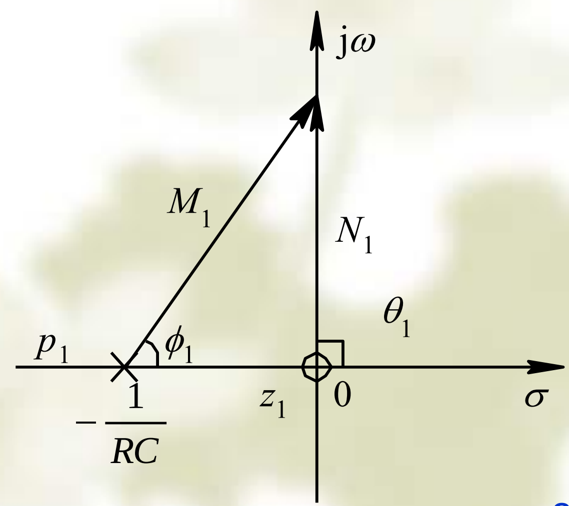
$$H(j\omega)=H(s)\Big|_{s=j\omega}=\frac{j\omega}{j\omega+\dfrac{1}{RC}}$$

零点矢量为 $j\omega-z_1=N_1e^{j\theta_1}$，极点矢量为 $j\omega-p_1=M_1e^{j\varphi_1}$，于是

$$H(j\omega)=\frac{N_1}{M_1}e^{j(\theta_1-\varphi_1)}=\left|H(j\omega)\right|\cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

$$\left|H(j\omega)\right|=\frac{N_1}{M_1},\quad \varphi(\omega)=\theta_1-\varphi_1$$





RC高通滤波器的频响特性

总结：由H(s)的零极点图确定系统幅频特性的原则：

(i) 在低频段主要考虑靠近虚轴的零点与极点的 M、N 随 ω 的变化，远离虚轴的极点、零点可视其 M、N 为常数。

(ii) 若虚轴上有零点，当 ω 等于零点时，$|H(\omega)|=0$；若虚轴上有极点，当 ω 等于极点时，$|H(\omega)|\to\infty$。

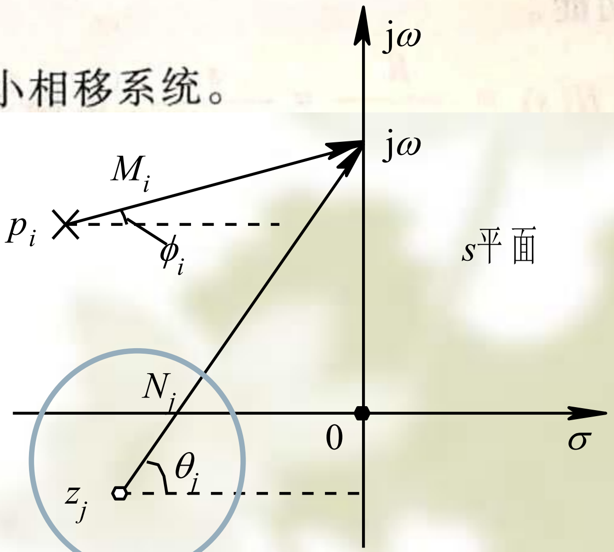
(iii) $\omega\to\infty$时，N、M 值都可认为是 ∞，可以对零极点进行相消处理。所以当系统的零点个数等于极点个数时，$\omega\to\infty$，$|H(\omega)|\to$ 常数，系统将呈现高通或带阻滤波特性；当系统的零点个数少于极点个数时，$\omega\to\infty$，$|H(\omega)|\to 0$，系统将呈现低通或带通滤波特性。

如 $N_1,N_2,\cdots,N_m$ 与 $M_1,M_2,\cdots,M_m$ 值对应相等，即 $H(s)$ 的零点与极点以虚轴对称分布时，$|H(\omega)|$ 等于常数，系统将呈现为全通滤波特性。

零点全部都在左半 s 平面或虚轴上的系统，称为最小相移系统。

思考：为什么说例4-15

类型的电路为全通网络?



这个夹角小于零点在右半平面的夹角

下列因果系统函数表达式中，是稳定全通系统$H(s)$的是（ $\boxed{}$ ）

A. $H(s)=\dfrac{(s+1)(s+e^{j\frac{3\pi}{4}})(s+e^{-j\frac{3\pi}{4}})}{(s-1)(s+e^{j\frac{\pi}{4}})(s+e^{-j\frac{\pi}{4}})}$

B. $H(s)=\dfrac{(s-1)(s+e^{j\frac{3\pi}{4}})(s+e^{-j\frac{3\pi}{4}})}{(s+1)(s+e^{j\frac{\pi}{4}})(s+e^{-j\frac{\pi}{4}})}$

C. $H(s)=\dfrac{(s-1)(s+e^{j\frac{\pi}{4}})(s+e^{-j\frac{\pi}{4}})}{(s+1)(s+e^{j\frac{3\pi}{4}})(s+e^{-j\frac{3\pi}{4}})}$

D. $H(s)=\dfrac{(s-1)(s+e^{j\frac{\pi}{4}})(s+e^{j\frac{3\pi}{4}})}{(s+1)(s+e^{-j\frac{\pi}{4}})(s+e^{-j\frac{3\pi}{4}})}$

注意：几个表达式的极点分别是多少？

完成实验七

第四章作业

4.1
1
2
3
4 （1） （4）

4.3
5（2） （3） （5）
6（2）
7
8
9
10

4.4
11（2） （4）
12（2） （4）

4.5
13
15（a） （c）
16
20
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33

4.6
36
39