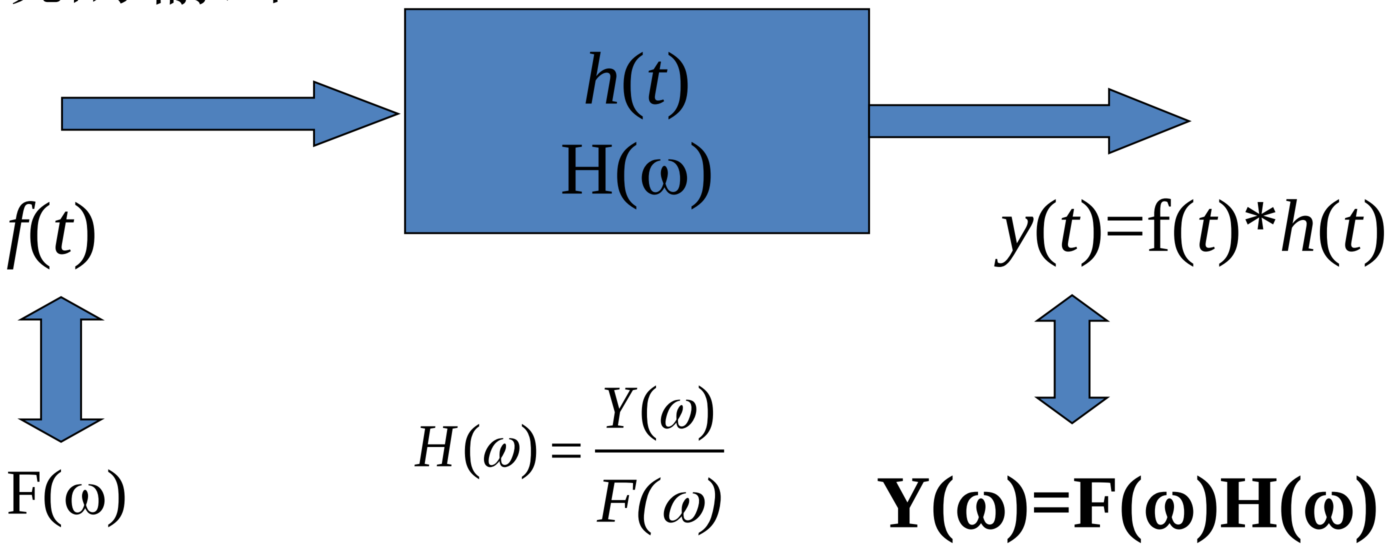
3.3 连续系统的傅里叶分析方法

系统的输出



$$H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{F(\omega)}$$

定义： **H(ω)为系统的频谱传输函数。也叫系统频(率)响(应)函数。**

H(ω)是零状态响应的傅里叶变换与激励的傅里叶变换之比。

H(ω)是冲击响应h(t)的傅里叶变换。

$$H(\omega)=|H(\omega)|e^{i\varphi(\omega)}$$

$|H(\omega)|$ **为幅频特性**

$\varphi(\omega)$ **为相频特性**

在频域中求解零状态响应的方法，称为频域分析法

❖ 系统函数H(ω)的物理意义，当h(t)为实数时

$$|H(\omega)|=|H(-\omega)| \qquad \varphi(\omega)=-\varphi(-\omega)$$

分析：

$$Y(\omega)=F(\omega)H(\omega)$$

举例说明系统函数的应用

$$|Y(\omega)|e^{i\varphi_y(\omega)}=|H(\omega)|e^{i\varphi(\omega)}\cdot|F(\omega)|e^{i\varphi_f(\omega)}$$

$$|Y(\omega)|=|H(\omega)|\cdot|F(\omega)| \qquad \varphi_y(\omega)=\varphi(\omega)+\varphi_f(\omega)$$

结论：1. 改变输入信号各频率分量的幅度；

2. 改变输入信号各频率分量的相对相位。

求频响函数*H(ω)*的三个途径：

微分方程（框图）、电路模型以及系统的冲激响应

1）微分方程——方程两边进行傅里叶变换

例3.21 由微分方程表示系统

p4~6，讨论学习求解频响函数*H(ω)*的三个途径

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=f(t)$$

系统函数*H(ω)*

解： 根据时域微分性质 $\frac{df(t)}{dt}\leftrightarrow i\omega F(\omega)$

$$(i\omega)^2Y(\omega)+3i\omega Y(\omega)+2Y(\omega)=F(\omega)$$

$$H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{F(\omega)}=\frac{1}{(i\omega)^2+3i\omega+2}=\frac{1}{(2-\omega^2)+3i\omega}$$

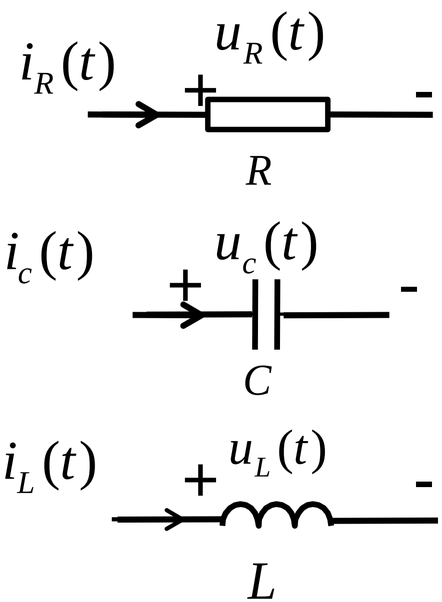
2）电路模型

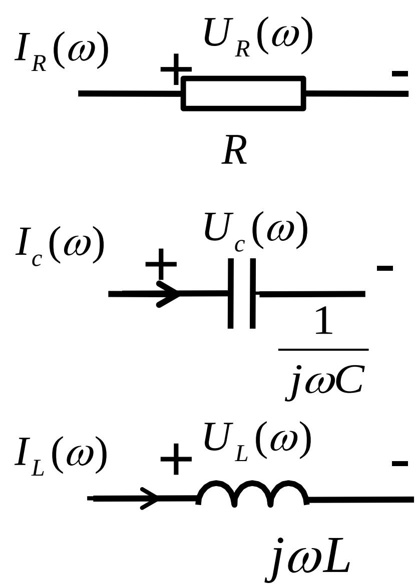
- 由时域元件的约束关系，即：

$$u_R(t)=i_R(t)R \qquad i_c(t)=C\frac{du_c(t)}{dt} \qquad u_L(t)=L\frac{di_L(t)}{dt}$$

由傅里叶变换得到频域的约束关系：

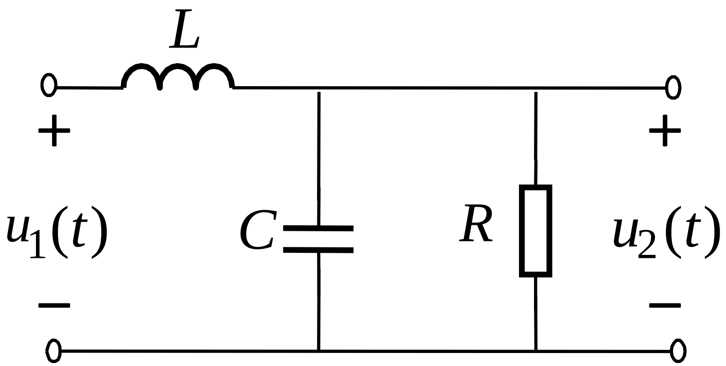
$$U_R(\omega)=I_R(\omega)R \qquad I_c(\omega)=j\omega CU_c(\omega) \qquad U_L(\omega)=j\omega LI_L(\omega)$$

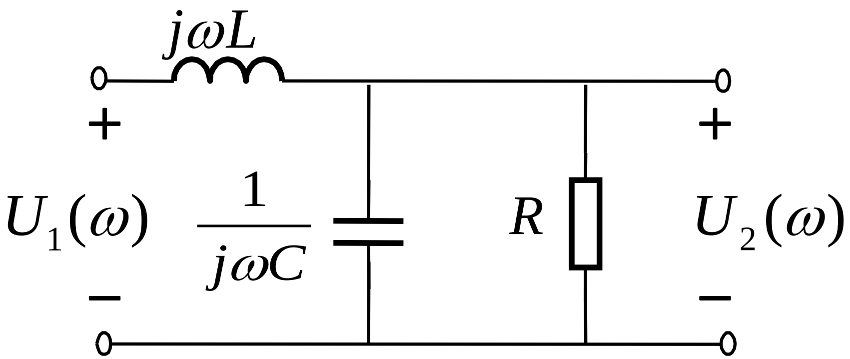




称 $\frac{1}{j\omega C}$ $j\omega L$ 分别叫容抗和感抗

例3-22 求图示电路的系统函数$H(\omega)$





$$H(\omega)=\frac{V_2(\omega)}{V_1(\omega)}=\frac{\dfrac{1}{\dfrac{1}{R}+\mathrm{i}\omega C}}{\mathrm{i}\omega L+\dfrac{1}{\dfrac{1}{R}+\mathrm{i}\omega C}}=\frac{1}{1-\omega^2 LC+\mathrm{i}\omega\dfrac{L}{R}}$$

3）单位冲激响应描述：h(t)的傅立叶变换

教材p159 **例 3-23** 系统的结构如图 3-45 所示，这是一种零阶保持器，广泛应用于采样控制系统中，求系统函数 $H(\omega)$。

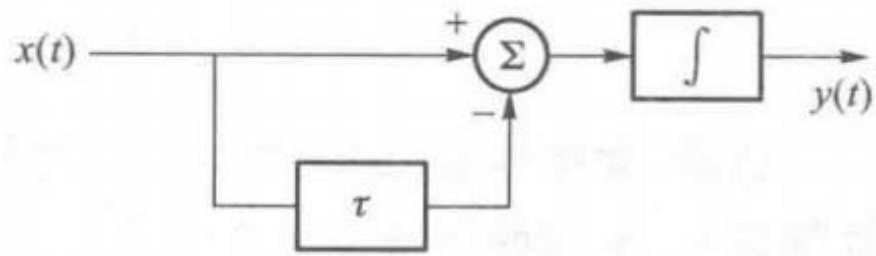


图 3-45 例 3-23 系统结构框图

冲激响应的定义有

$$h(t)=\int_{-\infty}^{t}[\delta(t)-\delta(t-\tau)]\,\mathrm{d}\tau=\mathrm{u}(t)-\mathrm{u}(t-\tau)$$

$$H(\omega)=\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\right](1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau})=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau})$$

3.3.1 周期信号激励下的系统响应

由本征函数的概念知：对于LTI系统，激励为

$$x(t)=e^{j\omega_0 t} \quad -\infty<t<\infty$$

$$y_{zs}(t)=e^{j\omega_0 t}H(\omega_0)$$

以傅里叶变换的观点考察

1、输入为 $x(t)=e^{j\omega_0 t} \quad -\infty<t<\infty$ 的线性稳态响应

$$x(t)=e^{i\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega)=2\pi\delta(\omega\text{-}\omega_0)$$

$$Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)=2\pi\delta(\omega\text{-}\omega_0)H(\omega)=2\pi\delta(\omega\text{-}\omega_0)H(\omega_0)$$

$$Y(\omega)\leftrightarrow y_{zs}(t)=e^{j\omega_0 t}H(\omega_0)$$

结论：$\boxed{\text{持续时间无穷}}$的复指数信号加入LTI系统时，输出的$\boxed{\text{零状态响应}}$，即稳态响应，仍为同频率的复指数信号，不同的是响应比激励多乘了一个复数 $H(\omega_0)$

2、余弦信号激励时的响应

设输入信号为余弦信号，即

$$f(t)=A\cos(\omega_0 t)\qquad F(j\omega)=\pi A[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$$

$$\begin{aligned}Y(j\omega)&=H(j\omega)F(j\omega)\\&=\pi AH(j\omega)[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]\\&=\pi A[H(-j\omega_0)\delta(\omega+\omega_0)+H(j\omega_0)\delta(\omega-\omega_0)]\\&=\pi A\left|H(j\omega_0)\right|[e^{-j\varphi_0}\delta(\omega+\omega_0)+e^{j\varphi_0}\delta(\omega-\omega_0)]\end{aligned}$$

为什么

所以 $y(t)=\left|H(j\omega_0)\right|A\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$

结论：持续时间无穷的频率为 ω_0 的余弦（正弦）信号加入**LTI**系统时，输出的稳态响应也是同频率的余弦（正弦）信号，不过幅度被 $\left|H(\omega_0)\right|$ 加权，并产生 φ_0 或 $\varphi(\omega_0)$ 的附加相移。

一般周期信号经过LTI系统的稳态响应：

周期信号由余弦形式表示时：$x(t)=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cos(n\omega_0 t+\varphi_n)$

输出：$y(t)=C_0H(0)+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\left|H(n\omega_0)\right|\cos(n\omega_0 t+\varphi_n+\varphi(n\omega_0))$

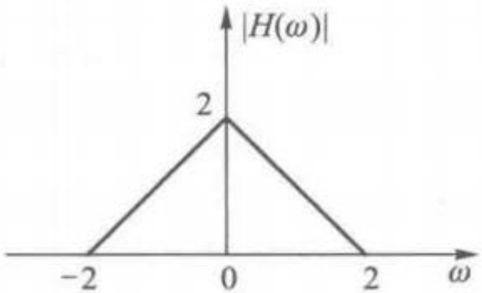
周期信号由指数形式表示时：$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{in\omega_0 t}$

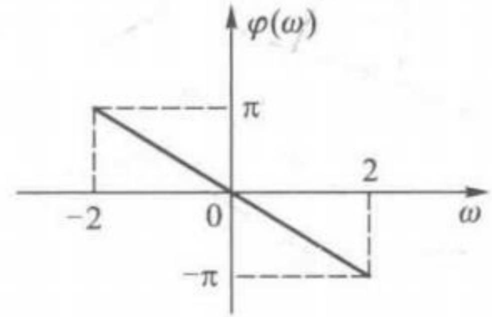
输出：$y(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n H(n\omega_0)e^{in\omega_0 t}$

记住该两个结论

P160

例 3-24 某线性时不变系统的幅度谱 $|H(\omega)|$ 和相位谱 $\varphi(\omega)$ 如图 3-46 所示。设激励 $x(t)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos nt$，求该系统的稳态响应。





套用该公式完成此题

$$y(t)=C_0H(0)+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\left|H(n\omega_0)\right|\cos(n\omega_0 t+\varphi_n+\varphi(n\omega_0))$$

解:输入信号是周期信号,基波角频率 $\omega=1\text{rad/s}$，由系统频谱可知

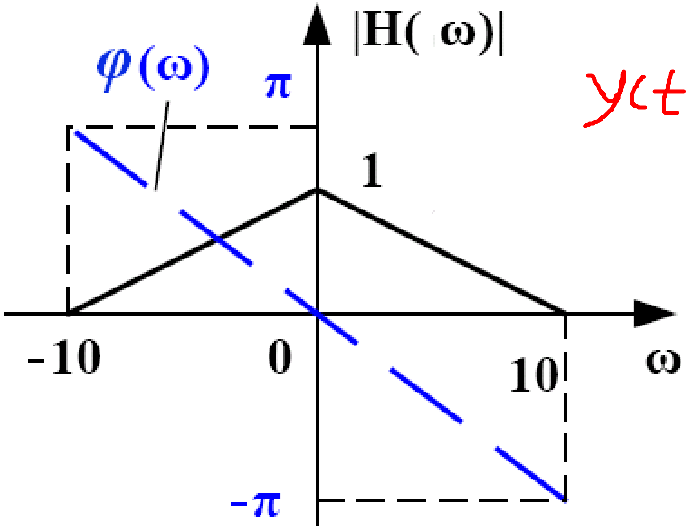
$$H(0)=2\qquad H(1)=1\cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}\qquad H(n)=0\quad(n\geqslant 2)$$

$$y(t)=H(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|H(n)|\cos[nt+\varphi(n)]=2+\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=2+\sin t$$

练习：某LTI系统的$|H(\omega)|$和$\varphi(\omega)$如上图，若

$$x(t)= 2 + 6\cos(5t) + 9\cos(10t),$$

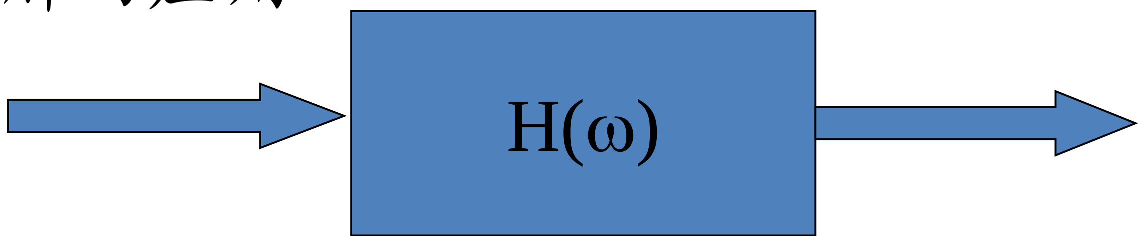
求系统的稳态响应。



$y(t)=2+6|H(5)|\cos(5t+\varphi(5))$

3.3.2 非周期信号激励下的系统响应

信号分解的应用



$$e^{j\omega t}$$

$$e^{j\omega t}H(\omega)$$

$$\frac{1}{2\pi}X(\omega)e^{j\omega t}$$

$$\frac{1}{2\pi}X(\omega)H(\omega)e^{j\omega t}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)H(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$= x(t)$$

$$= y(t)$$

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

频域分析方法求解步骤如下：

1、求系统频响函数$H(\omega)$与输入信号的频谱$X(\omega)$

2、求输出信号的频谱$Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)$

3、将$Y(\omega)$进行傅里叶反变换得到零状态响应$y_{zs}(t)$

p161

例 3-25 如图 3-48 所示的一个 RC 低通网络，求加入图 3-49 所示矩形脉冲信号时系统的零状态响应。

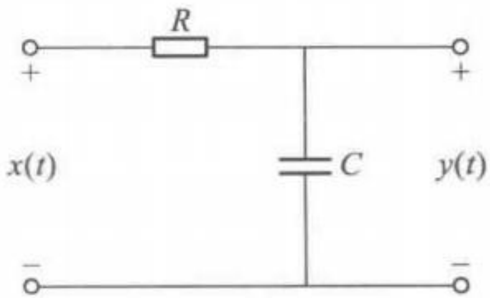


图 3-48 RC 低通网络

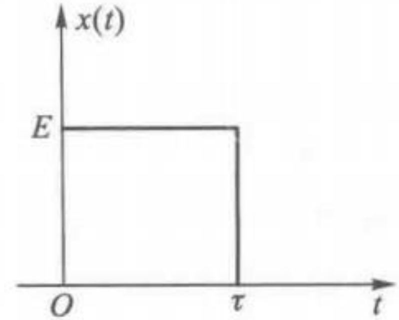
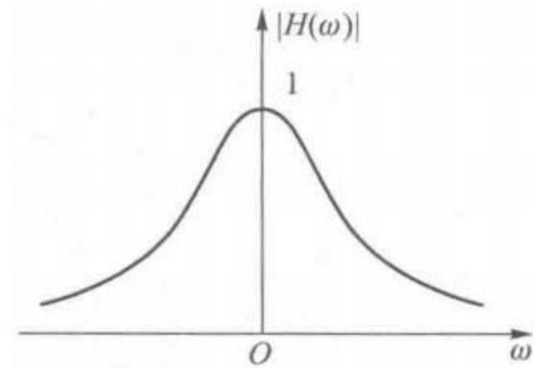


图 3-49 输入信号

解：写出系统函数的表示式为

$$H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\frac{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}=\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega RC}=\frac{\frac{1}{RC}}{\mathrm{j}\omega+\frac{1}{RC}}$$



(b)

令 $\frac{1}{RC}=a$，则有 $H(\omega)=\frac{a}{\mathrm{j}\omega+a}$，即 $|H(\omega)|=\frac{a}{\sqrt{\omega^2+a^2}}$。

① 频域分析法：用典型函数的形式表示出激励信号 $x(t)$。

$$x(t) = EG_{\tau}\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

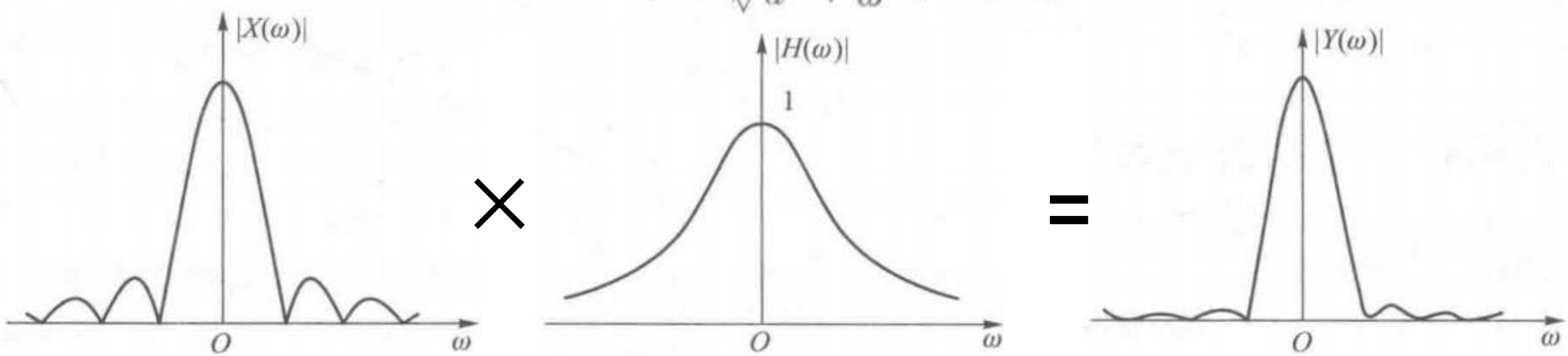
由典型傅里叶变换对和时移特性，可求得输入信号的频谱 $X(\omega)$ 为

$$X(\omega) = E\tau \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\tau}{2}\omega}$$

画出输入信号的幅度谱，如图 3-50(d) 所示。运用频域分析法求得响应的谱函数 $Y(\omega)$

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = \frac{E\tau a}{a + \mathrm{j}\omega}\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\tau}{2}\omega}$$

画出输出信号的幅度谱 $|Y(\omega)| = \frac{E\tau a}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}\left|\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\right|$，如图 3-50(f) 所示。



(b)

$$y(t) = E\{(1 - \mathrm{e}^{-at})\mathrm{u}(t) - [1 - \mathrm{e}^{-a(t-\tau)}]\mathrm{u}(t - \tau)\}$$

② 时域分析法:用典型函数的形式表示出激励信号 $x(t)$。

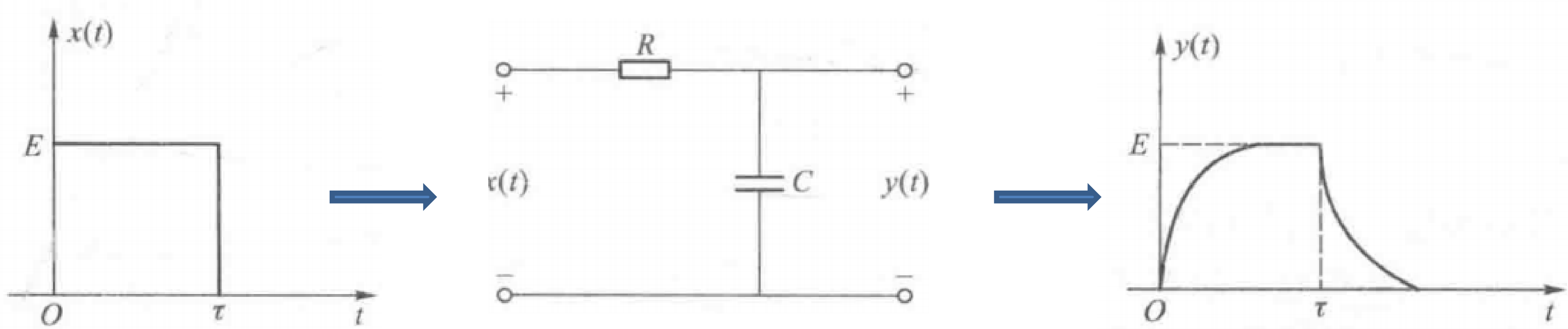
$$x(t) = E\mathrm{u}(t) - E\mathrm{u}(t-\tau)$$

$$y(t) = E[g(t) - g(t-\tau)]$$

$$G(\omega) = X_1(\omega)H(\omega) = \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{\mathrm{j}\omega}\right]\frac{\frac{1}{RC}}{\mathrm{j}\omega + \frac{1}{RC}}$$

$$= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{\mathrm{j}\omega}\frac{\frac{1}{RC}}{\mathrm{j}\omega + \frac{1}{RC}} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{\mathrm{j}\omega} - \frac{1}{\mathrm{j}\omega + \frac{1}{RC}}$$

$$y(t) = E\{(1 - \mathrm{e}^{-at})\mathrm{u}(t) - [1 - \mathrm{e}^{-a(t-\tau)}]\mathrm{u}(t-\tau)\}$$



结论：1、用**频域**解还是**时域**解视具体问题而定；

2、频域解**物理概念清晰**

空间音乐：Pentatonix

课程设计

一期：利用频域分析的知识，查阅相关资料，分析三维环绕立体声音乐制作原理。

内容包括：人耳感知声源空间位置的原理；通过两个耳机声道如何实现虚拟声源所在位置；实现三维环绕立体声制作需要哪些条件。（字数不超过600字，包括必要的框图、流图等）

二期(选做)：matlab编程实现一段三维环绕立体声，包括三种敲击声音，设定8个方向。让他人辨别三种声音分别来自哪个方向。