第五章　离散时间信号与系统的变换域分析

5.1　Z变换

课前自学本节内容，理解以下问题：

1、z变换的定义

2、会推导从抽样信号的拉氏变换引出z变换

3、熟知z 平面与s平面的映射关系

4、熟知序列形式与z变换收敛域范围的关系

　反转课堂

1. Z变换的定义

- 序列*x*(*n*)的双边z变换：

$$X(z)=\mathcal{Z}\,[x(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

- 序列x(n)的单边Z变换：

$$X(z)=\mathcal{Z}\,[x(n)]=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

或表示成 $x(n)\leftrightarrow X(z)$ 既是双边z变换，又是单边z变换

显然，对双边序列求单边Z变换等同于将该双边序列截成因果序列再进行双边Z变换

X(z)为序列x(n)的生成函数，或像函数；序列x(n)是X(z)的原函数

从抽样信号的拉氏变换引出z变换

均匀冲击抽样 $x_s(t) = x(t)\cdot\delta_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$

拉氏变换 $X_s(s) = \int_0^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)\right]e^{-st}dt$

积分与求和交换 $X_s(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-snT}$ 令 $z = e^{sT}, \quad s = \frac{1}{T}\ln z, T = 1$

简化起见，去掉下标s $X(s)\big|_{s=\ln z} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}, z = e^{s}$

与直接定义式比较 $X(s)\big|_{s=\ln z} = X(z)$

$X(z)\big|_{z=e^s} = X(s)$

2. z 平面与s平面的映射关系

复变量z和s的关系为 $z = e^{sT}$

$$s = \frac{1}{T} 1nz$$

式中，T是实常数，为取样周期。将z和s分别表示为

$$s = \sigma + j\omega$$

$$z = |z| e^{j\Omega}$$

$$|z| = e^{\sigma T}$$

$$\Omega = \omega T$$

$$s=\frac{1}{T}1nz=\frac{1}{T}1n|z|e^{j\Omega}=\frac{1}{T}1n|z|e^{j(\Omega+2m\pi)}$$

$$=\frac{1}{T}1n|z|+j\frac{\Omega+2m\pi}{T}=\sigma+j\omega$$

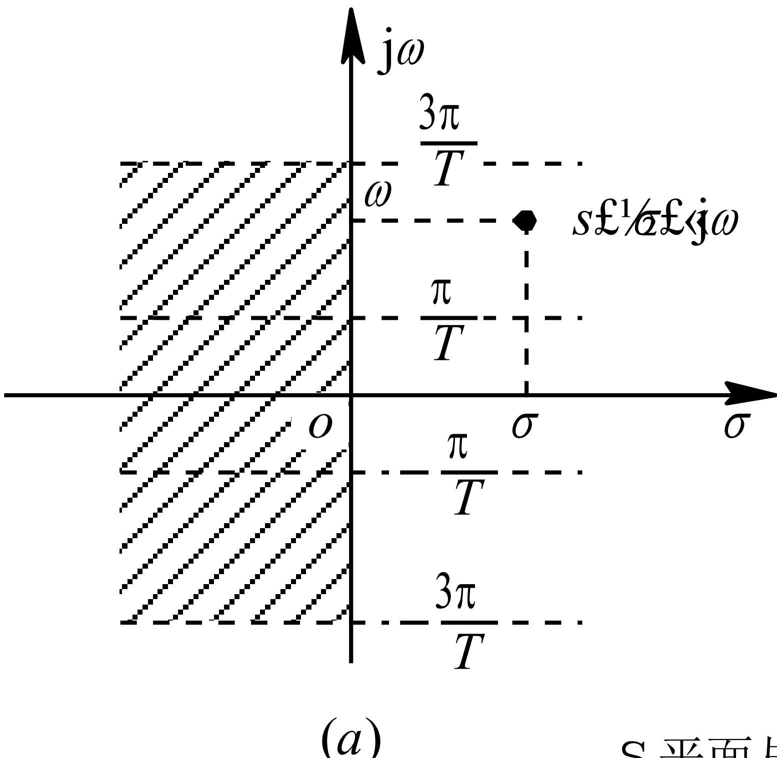
乘积的对数等于对数的和

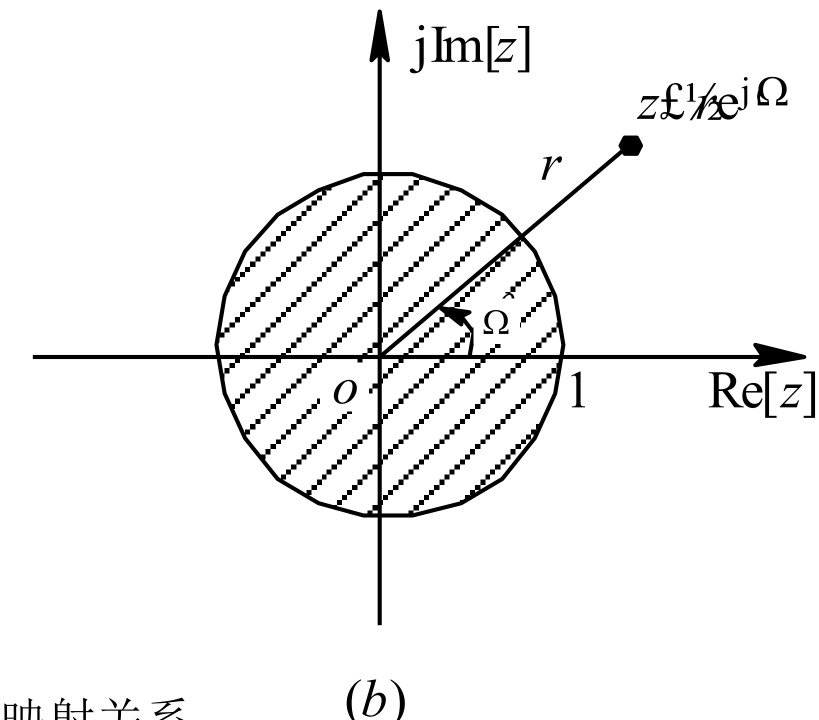
$$\sigma=\frac{1}{T}1n|z|$$

$$\omega=\frac{\Omega+2m\pi}{T}$$

$$|z|=e^{\sigma T}$$

$$\Omega=\omega T$$





S 平面与Z平面的映射关系

(*a*) S平面； (*b*)Z平面

$$\sigma=\frac{1}{T}\ln|z|$$

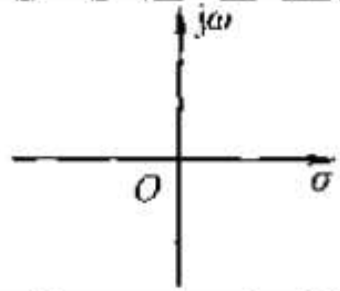
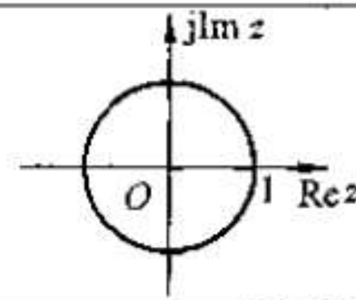
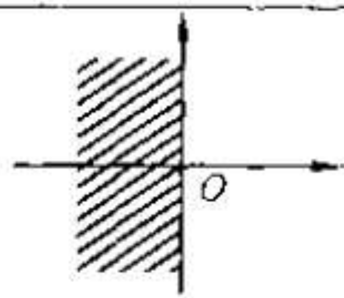
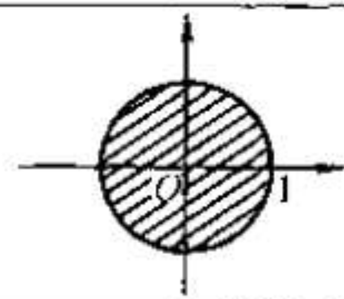
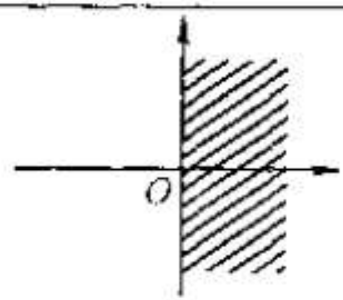
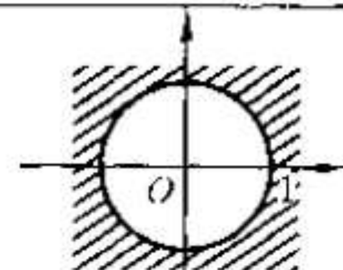
$$\omega=\frac{\theta+2m\pi}{T}$$

$$|z|=e^{\sigma T}$$

$$\theta=\omega T$$

这里θ即上页Ω

图中r=|z|

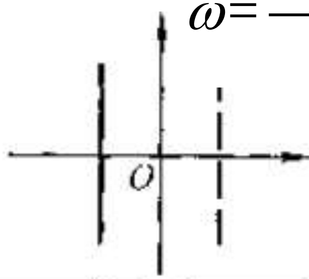
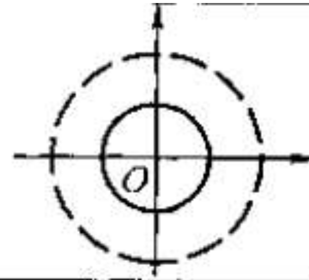
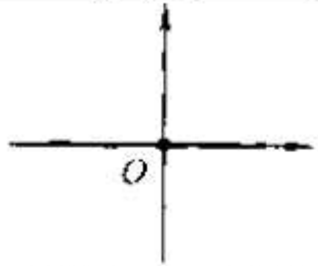
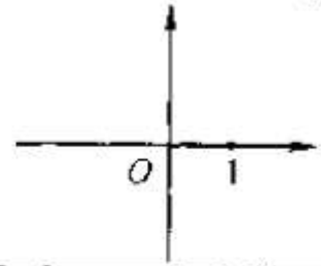
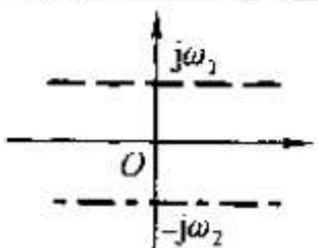
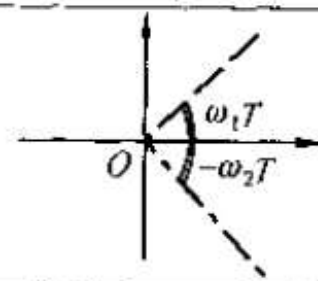
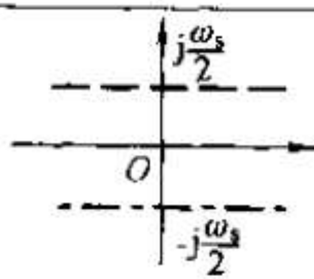
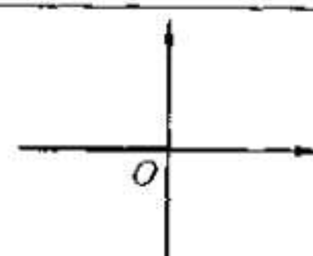
s 平面($s=\sigma+j\omega$)		z 平面($z=re^{j\theta}$)	
虚轴 ($\sigma=0$, $s=j\omega$)			单位圆 ($r=1$, θ 任意)
左半平面 ($\sigma<0$)			单位圆内 ($r<1$, θ 任意)
右半平面 ($\sigma>0$)			单位圆外 ($r>1$, θ 任意)

$$\sigma=\frac{1}{T}\ln|z| \qquad |z|=e^{\sigma T}$$

这里θ即上页Ω

$$\omega=\frac{\theta+2m\pi}{T} \qquad \theta=\omega T$$

图中r=|z|

平行于虚轴的直线（σ 为常数）			圆 $\left(\begin{matrix}\sigma>0,\ r>1\\ \sigma<0,\ r<1\end{matrix}\right)$
实轴 $\left(\begin{matrix}\omega=0\\ s=\sigma\end{matrix}\right)$			正实轴 $\left(\begin{matrix}\theta=0\\ r\ 任意\end{matrix}\right)$
平行于实轴的直线（ω 为常数）			始于原点的辐射线 $\left(\begin{matrix}\theta\ 为常数\\ r\ 任意\end{matrix}\right)$
通过 $\pm j\frac{k\omega_s}{2}$ 平行于实轴的直线 $(k=1,3,\cdots)$			负实轴 $\left(\begin{matrix}\theta=\pi\\ r\ 任意\end{matrix}\right)$

Z-S 映射1

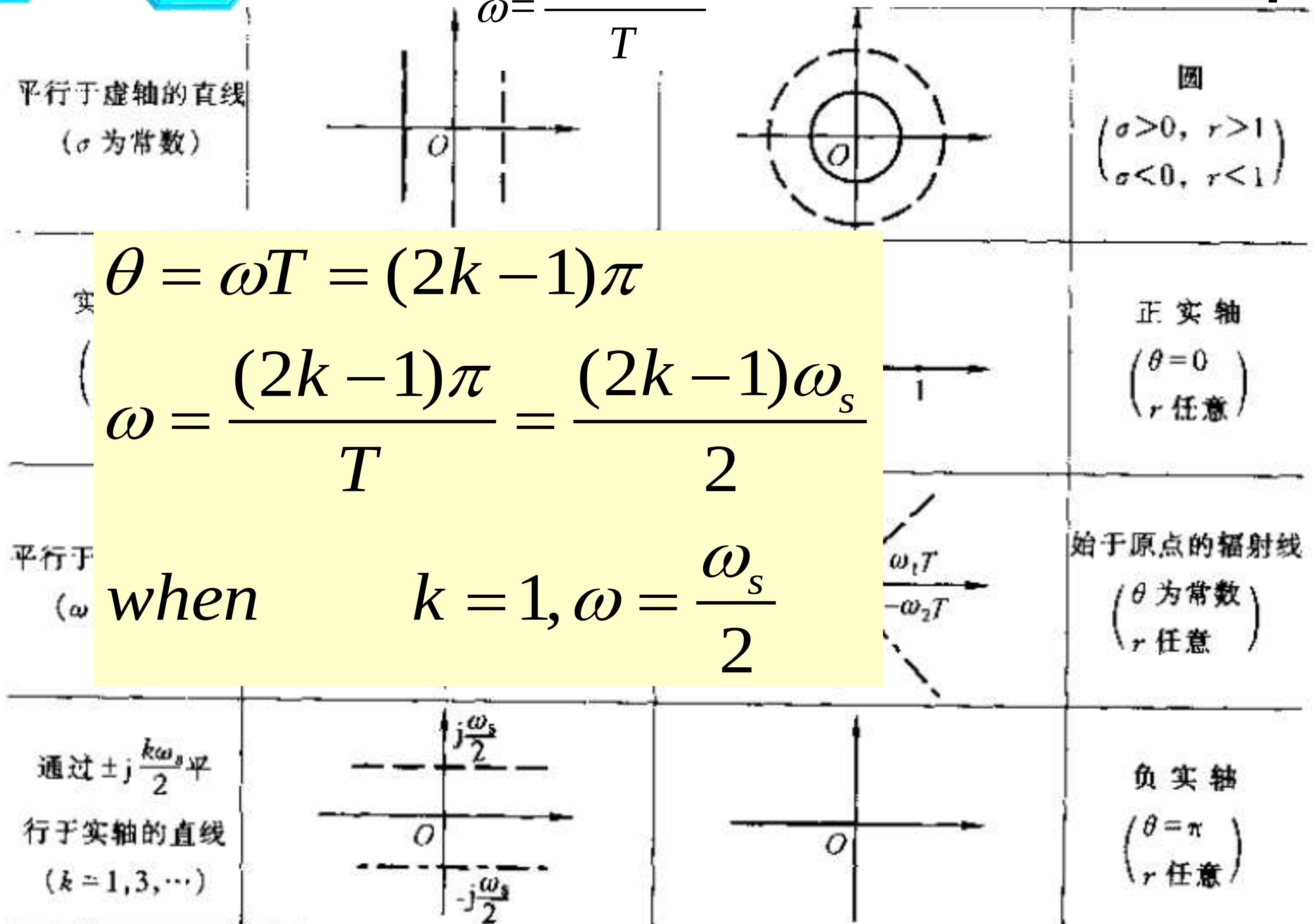
Z-S 映射2

$$\sigma=\frac{1}{T}\ln|z| \qquad |z|=e^{\sigma T}$$

这里θ即上页Ω

$$\omega=\frac{\theta+2m\pi}{T} \qquad \theta=\omega T$$

图中r=|z|



$$\theta=\omega T=(2k-1)\pi$$

$$\omega=\frac{(2k-1)\pi}{T}=\frac{(2k-1)\omega_s}{2}$$

$$when \qquad k=1,\omega=\frac{\omega_s}{2}$$

Z平面映射到s平面不是单值

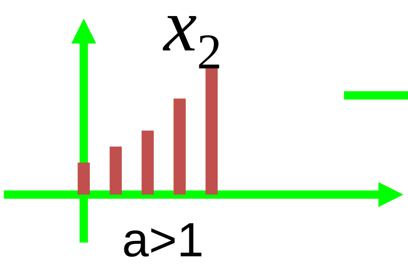
3. Z变换的收敛域

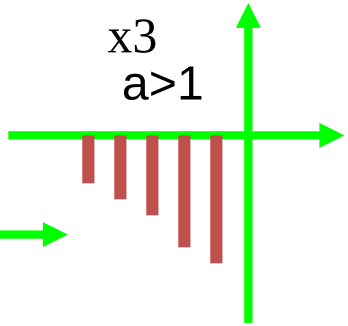
- 为什么研究收敛域？ $X(z)=\mathcal{Z}[x(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$
- 收敛域: z变换中级数收敛的所有Z值的集合。
- 只有级数收敛，变换才有意义。对于z变换，序列与变换式、收敛域唯一对应。
- 级数收敛的充要条件：绝对可和，即 $\sum|x(n)z^{-n}|<\infty$
- 定义：使X(z)=0的点为X(z)的零点；使X(z)=∞的点为X(z)的极点。

例5-1 求z变换，并标出收敛域

1. $x_1(n)=\delta(n)$, 2. $x_2(n)=a^n u(n)$

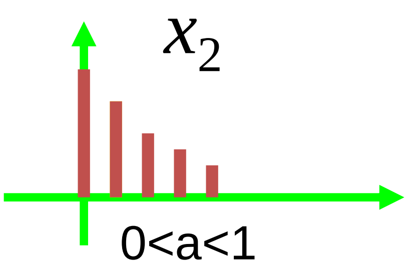
3. $x_3(n)=-a^n u(-n-1)$, 4. $x_4(n)=x(n)=a^n u(n)-b^n u(-n-1)$

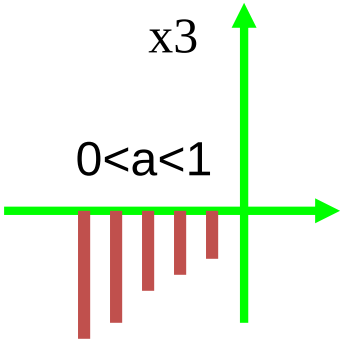




$$X_1(z)=Z[\delta(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n)z^{-n}=1$$

收敛于全平面。

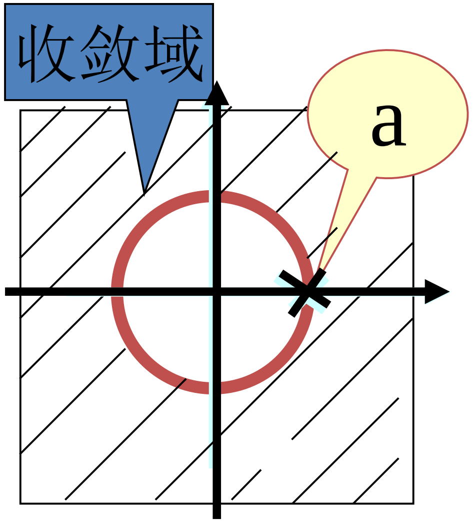


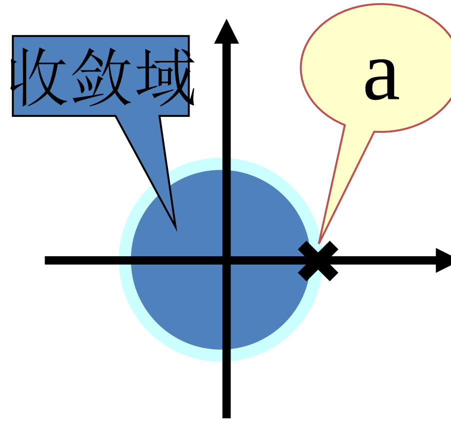


$$X_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n z^{-n}=\boxed{\frac{z}{z-a}},|z|>|a|$$

$$X_3(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}-a^n z^{-n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^n$$

$$=-\frac{z/a}{1-z/a}=\boxed{\frac{z}{z-a}},|z|<|a|$$





4. 序列 $x(n)=a^n u(n)-b^n u(-n-1)$的z变换

解：
$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}a^n z^{-n}-\sum_{n=-\infty}^{-1}b^n z^{-n}$$

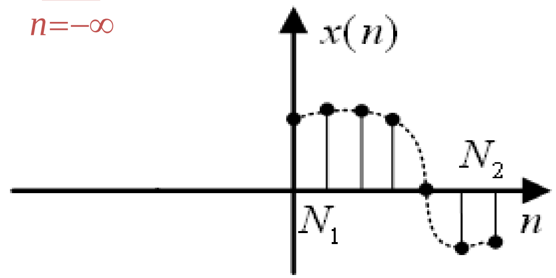
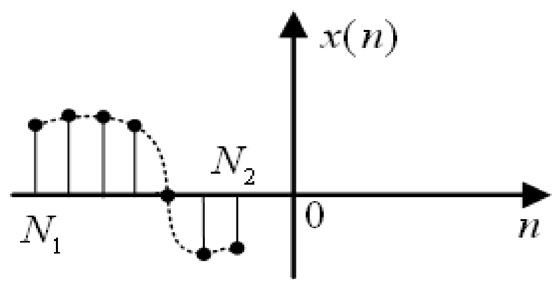
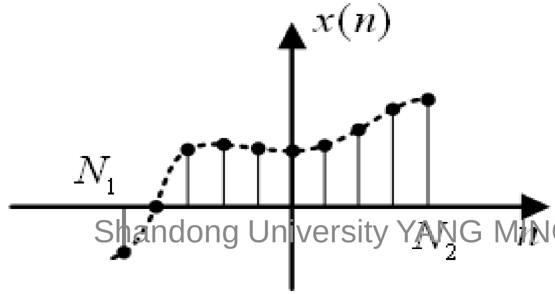
$$=\sum_{n=0}^{\infty}a^n z^{-n}+\sum_{n=1}^{\infty}b^{-n}z^{n}=\frac{z}{z-a}+\frac{z}{z-b}=\frac{2z(z-\frac{a+b}{2})}{(z-a)(z-b)}$$

- 若**|a|<|b|**,收敛域：**|a|<|z|<|b|**, 若**|a| > |b|**, 则序列的**Z**变换不存在。

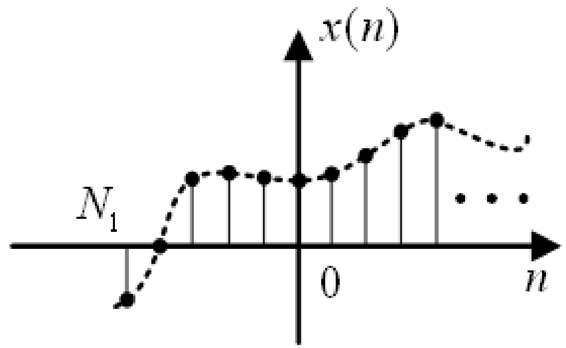
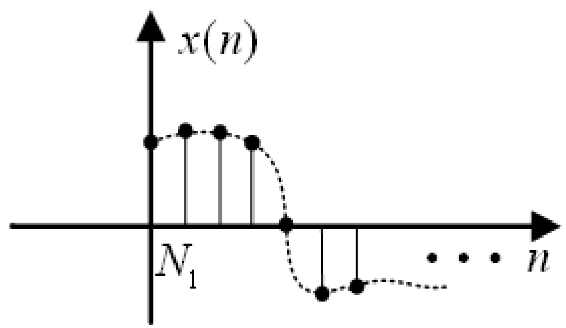
Sn=a1*(1-q^n)/(1-q)　　　S=a1/(1-q)

设序列 $x(n)$ 的非零值定义在区间 $[N_1, N_2]$ 上， 下表归纳了区间 $[N_1, N_2]$ 分布在时间轴的不同区域序列 $x(n)$ 的 z 变换收敛域。

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

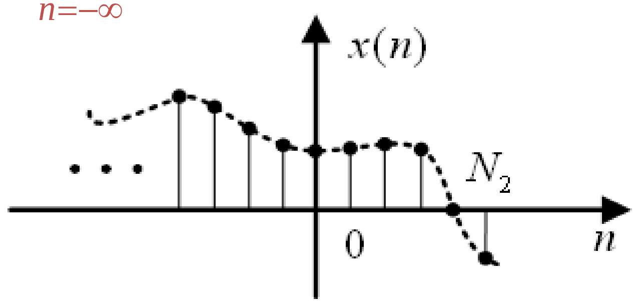
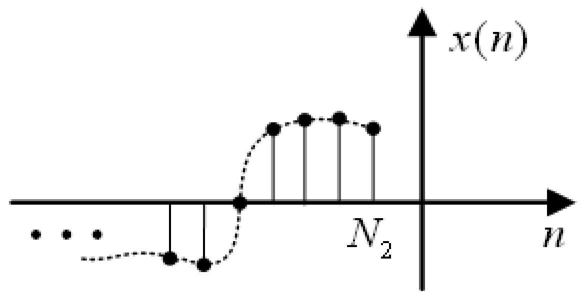
序列形式	序列图形	z 变换收敛域
有限长序列		
（1） $N_1 \geq 0$， $N_2 > 0$		$0 < \lvert z \rvert \leq \infty$
（2） $N_1 < 0$， $N_2 \leq 0$		$0 \leq \lvert z \rvert < \infty$
（3） $N_1 < 0$， $N_2 > 0$		$0 < \lvert z \rvert < \infty$

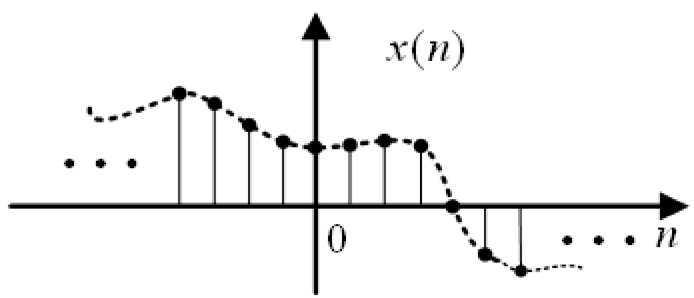
$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

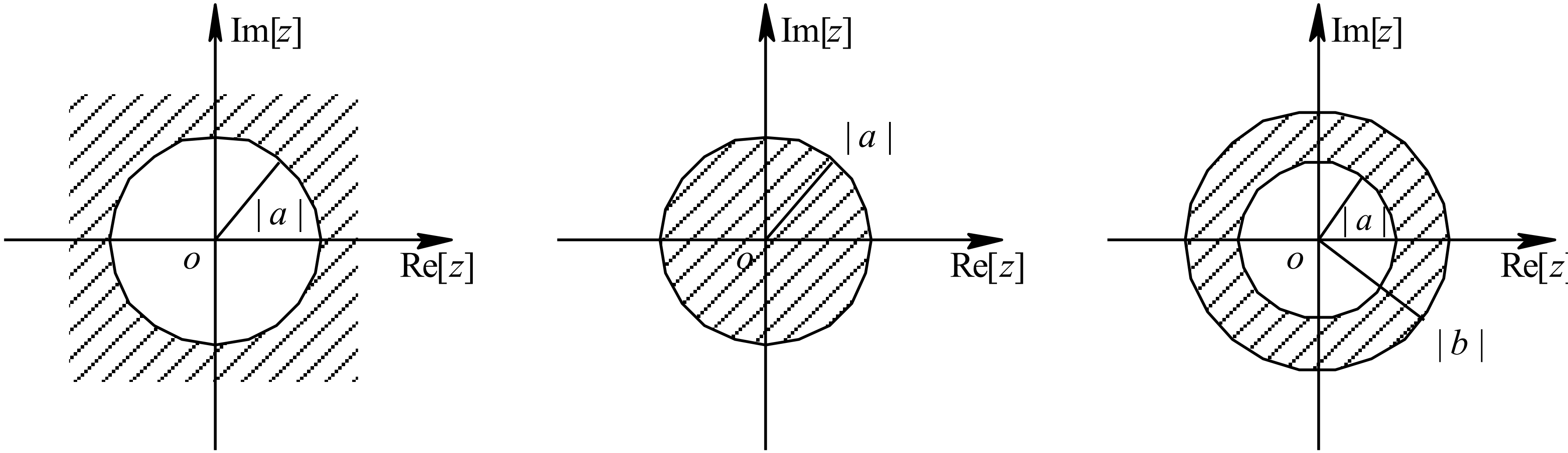
右边序列 （1） $N_1<0$， $N_2=\infty$		$R_{x-}<\lvert z\rvert<\infty$
（2） $N_1\geq 0$， $N_2=\infty$		$R_{x-}<\lvert z\rvert\leq\infty$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

<table>
<tr>
<td>左边序列

（1） $N_1=-\infty$， $N_2>0$</td>
<td>
</td>
<td>$0<|z|<R_{x+}$</td>
</tr>
<tr>
<td>（2） $N_1=-\infty$， $N_2\le 0$</td>
<td>
</td>
<td>$0\le|z|<R_{x+}$</td>
</tr>
<tr>
<td>双边序列

$N_1=-\infty$， $N_2=\infty$</td>
<td>
</td>
<td>$R_{x-}<|z|<R_{x+}$</td>
</tr>
</table>



(a)　　(b)　　(c)

无限长右边序列双边Z变换的收敛域：
1）起始点大于等于零时，包含无穷大；
2）起始点小于零时，不包含无穷大。

无限长左边序列双边Z变换的收敛域：
1）终止点大于零时，不包含原点；
2）终止点小于等于零时，包含原点。

双边序列双边Z变换的收敛域。
两圆间环状区域

注意：不同序列的双边**Z**变换可能相同，即序列与其双边**Z**变换不是一一对应的。序列的双边**Z**变换连同收敛域一起与序列才是一一对应的。
收敛域内没有极点；对于单边**Z**变换，其收敛域均为**$|z|>\rho_0$**。

离散系统分析中，一般象函数是z的有理分式

$$X(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_Mz^{-M}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_Nz^{-N}}$$

分母多项式D(z)为系统的**特征多项式**；
D(z)=0，为系统的特征方程，其根叫**特征根**，或象函数X(z)的**极点**；在z平面上用”×”表示；
分子多项式N(z)=0的根称为象函数X(z)的**零点**。在z平面上用”○”表示；
r重极点或零点，在极点或零点旁标注以（r）

收敛域特性归纳如下：

（1）收敛域是连通的，收敛域内不能包括任何极点，收敛域以极点为边界；

（2）时限序列的收敛域是整个 z 平面，但是 $z=0$ 或 $z=\infty$ 可能除外；

（3）因果序列的收敛域是以像函数 $X(z)$ 的最大极点的模为半径的圆外区域；

（4）非因果序列的收敛域是以像函数 $X(z)$ 的最小极点的模为半径的圆内区域；

（5）双边序列的其收敛域一定是 z 平面上以相邻两个极点的模为半径的两圆之间的公共环状区域。