

# 均匀平面波的反射和透射<sup>[2]</sup>

## 电磁场与电磁波不挂科第七讲讲义

### 7.2. 均匀平面波的斜入射

#### 斜入射示意图

##### ■ 电磁波对分界面的斜入射示意

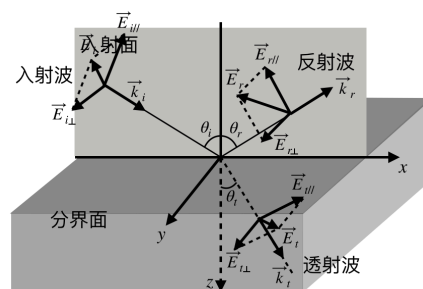
均匀平面波以任意角度入射到不同媒质分界面上称为斜入射。此时入射波、反射波、透射波的传播方向都不垂直于分界面。

入射平面：入射波的波矢量与分界面的法线矢量构成的平面。

若入射波的电场垂直于入射平面，称其为垂直极化波；

若入射波的电场平行于入射平面，称其为平行极化波；

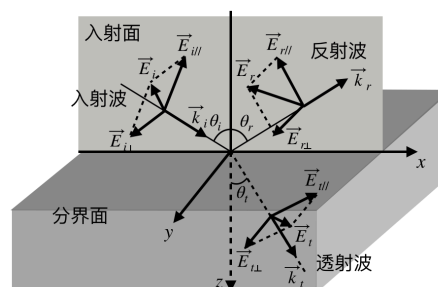
若入射波的电场与入射平面成任意角度，可将其分解为垂直极化波和平行极化波两个分量。



#### 7.2.1. 对理想介质分界平面的斜入射

##### ■ 电磁波对理想介质分界平面的斜入射

如右图所示， $z < 0$ 的半空间充满参数为 $\epsilon_1$ 和 $\mu_1$ 的理想介质1， $z > 0$ 的半空间充满参数为 $\epsilon_2$ 和 $\mu_2$ 的理想介质2，均匀平面波从介质1斜入射到 $z = 0$ 的分界平面



上，取入射平面为 $xOz$ 平面。

入射波、反射波和透射波的传播方向单位矢量分别为：

$$\vec{e}_i = \vec{e}_x \sin \theta_i + \vec{e}_z \cos \theta_i$$

$$\vec{e}_r = \vec{e}_x \sin \theta_r - \vec{e}_z \cos \theta_r$$

$$\vec{e}_t = \vec{e}_x \sin \theta_t + \vec{e}_z \cos \theta_t$$

### ■ 电磁波对理想介质分界平面的斜入射「入射波」

入射波的传播方向单位矢量为： $\vec{e}_i = \vec{e}_x \sin \theta_i + \vec{e}_z \cos \theta_i$ 。

对不沿坐标轴方向传播的均匀平面波，利用波矢量来表示其电场和磁场。入射波的波矢量为

$\vec{k}_i = \vec{e}_i k_1$ ，则入射波的电场和磁场分别为：

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{im} e^{-jk_1 \vec{e}_i \cdot \vec{r}} = \vec{E}_{im} e^{-jk_1(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)}, \quad \vec{H}_i = \frac{1}{\eta_1} \vec{e}_i \times \vec{E}_{im} e^{-jk_1(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)}。$$

对传播方向为 $\vec{e}_n$ 的均匀平面波，其波矢量为 $\vec{k} = \vec{e}_n k$ ，其中 $k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$ 为该平面波在传播介质中的相位常数，则该平面波的电场表达式为 $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_m e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$ 。对于透射波和反射波，传播方向发生改变，对应波矢量中 $\vec{e}_n$ 的改变；透射波的传播介质发生改变还会使波矢量中的相位常数 $k$ 发生改变；另外由于电磁能量的重新分配，使得振幅发生改变。

### ■ 电磁波对理想介质分界平面的斜入射「反射波」

反射波的传播方向单位矢量为： $\vec{e}_r = \vec{e}_x \sin \theta_r - \vec{e}_z \cos \theta_r$ 。

对不沿坐标轴方向传播的均匀平面波，利用波矢量来表示其电场和磁场。反射波的波矢量为

$\vec{k}_r = \vec{e}_r k_1$ ，则入射波的电场和磁场分别为：

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{rm} e^{-jk_1 \vec{e}_r \cdot \vec{r}} = \vec{E}_{rm} e^{-jk_1(x \sin \theta_r - z \cos \theta_r)}, \quad \vec{H}_r = \frac{1}{\eta_1} \vec{e}_r \times \vec{E}_{rm} e^{-jk_1(x \sin \theta_r - z \cos \theta_r)}。$$

### ■ 电磁波对理想介质分界平面的斜入射「透射波」

透射波的传播方向单位矢量为： $\vec{e}_t = \vec{e}_x \sin \theta_t + \vec{e}_z \cos \theta_t$ 。

对不沿坐标轴方向传播的均匀平面波，利用波矢量来表示其电场和磁场。透射波的波矢量为 $\vec{k}_t = \vec{e}_t k_2$ ，则入射波的电场和磁场分别为：

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{tm} e^{-jk_2 \vec{e}_t \cdot \vec{r}} = \vec{E}_{tm} e^{-jk_2(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)}, \quad \vec{H}_t = \frac{1}{\eta_2} \vec{e}_t \times \vec{E}_{tm} e^{-jk_2(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)}。$$

## ■ 反射定律和折射定律

电磁波的反射定律称为斯耐尔反射定律，其内容为反射角等于入射角，即 $\theta_i = \theta_r$ 。

电磁波的折射定律称为斯耐尔折射定律，其内容为 $\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{n_1}{n_2}$ ，其中

$$n_1 = \frac{c}{v_1} = c\sqrt{\mu_1 \epsilon_1} = \frac{c}{\omega} k_1, \quad n_2 = \frac{c}{v_2} = c\sqrt{\mu_2 \epsilon_2} = \frac{c}{\omega} k_2, \quad \text{为媒质1和媒质2的折射率。}$$

在分界面 $z = 0$ 处利用电场强度的边界条件，得到等式

$$\vec{e}_z \times \vec{E}_{im} e^{-jk_1 x \sin \theta_i} + \vec{e}_z \times \vec{E}_{rm} e^{-jk_1 x \sin \theta_r} = \vec{e}_z \times \vec{E}_{tm} e^{-jk_2 x \sin \theta_t}。$$

此式对所有 $x$ 都成立，则有 $k_1 \sin \theta_r = k_1 \sin \theta_i = k_2 \sin \theta_t$ ，称该式为分界面上的相位匹配条件。斯耐尔反射定律和斯耐尔折射定律就是由该相位匹配条件的第一个等式和第二个等式分别得来的。

## ■ 反射系数和透射系数

在斜入射的情况下，反射系数和透射系数与入射波的极化有关。将入射波分为垂直极化波和平行极化波两种情况进行分析。

若入射波的电场垂直于入射平面，称其为垂直极化波；

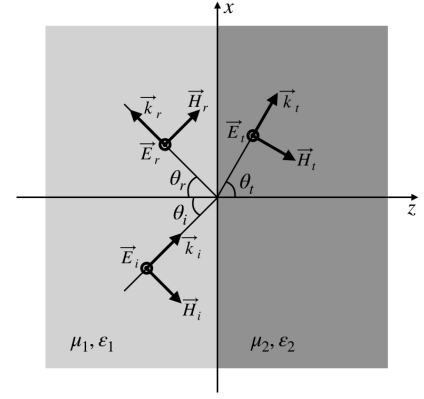
若入射波的电场平行于入射平面，称其为平行极化波；

入射平面：入射波的波矢量与分界面的法线矢量构成的平面。

考虑分界面为 $z = 0$ ，入射平面为 $xOz$ 平面的情况。

### ■ 垂直极化波「媒质1中的合成波」

对右图所示垂直极化波，其电场只有y方向分量，磁场只有x和z方向分量，设垂直极化波在分界面上的反射系数和透射系数分别为 $\Gamma_{\perp}$ 和 $\tau_{\perp}$ ，则媒质1中合成波的电场和磁场可表示为：



$$E_{1y} = E_{iy} + E_{ry} = E_{im}(e^{-jk_1z \cos \theta_i} + \Gamma_{\perp} e^{jk_1z \cos \theta_i})e^{-jk_1x \sin \theta_i}$$

$$H_{1x} = H_{ix} + H_{rx} = \frac{E_{im}}{\eta_1} \cos \theta_i (-e^{-jk_1z \cos \theta_i} + \Gamma_{\perp} e^{jk_1z \cos \theta_i})e^{-jk_1x \sin \theta_i}$$

$$H_{1z} = H_{iz} + H_{rz} = \frac{E_{im}}{\eta_1} \sin \theta_i (e^{-jk_1z \cos \theta_i} + \Gamma_{\perp} e^{jk_1z \cos \theta_i})e^{-jk_1x \sin \theta_i}$$

### ■ 垂直极化波「媒质2中的透射波」

媒质2中透射波的电场和磁场可表示为：

$$E_{2y} = E_{ty} = \tau_{\perp} E_{im} e^{-jk_2z \cos \theta_t} e^{-jk_2x \sin \theta_t}$$

$$H_{2x} = H_{tx} = -\frac{\tau_{\perp} E_{im}}{\eta_2} \cos \theta_t e^{-jk_2z \cos \theta_t} e^{-jk_2x \sin \theta_t}$$

$$H_{2z} = H_{tz} = \frac{\tau_{\perp} E_{im}}{\eta_2} \sin \theta_t e^{-jk_2z \cos \theta_t} e^{-jk_2x \sin \theta_t}$$

### ■ 垂直极化波的反射系数和透射系数「菲涅尔公式」

垂直极化波的反射系数和透射系数的表达式分别为：

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}, \quad \tau_{\perp} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}。$$

在分界面 $z = 0$ 处利用边界条件，得到等式 $E_{1y} = E_{2y}$ 和 $H_{1x} = H_{2x}$ ，并利用斯耐尔折射定律

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{n_1}{n_2} \text{ 可得到 } 1 + \Gamma_{\perp} = \tau_{\perp}, \frac{1}{\eta_1}(1 - \Gamma_{\perp})\cos \theta_i = \frac{1}{\eta_2}\tau_{\perp} \cos \theta_t, \text{ 联立二式即可}$$

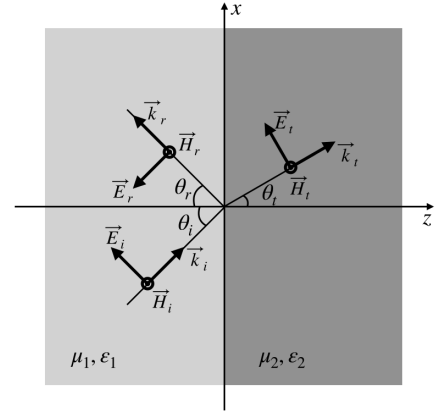
求得 $\Gamma_{\perp}$ 和 $\tau_{\perp}$ 的表达式。

对于常见的非磁性媒质， $\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu_0$ ，则有 $\frac{\eta_1}{\eta_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$ 、 $\sin \theta_t = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \sin \theta_i$ 。因此 $\Gamma_{\perp}$

$$\text{和}\tau_{\perp}\text{可表示为: } \Gamma_{\perp} = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1 - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1 - \sin^2 \theta_i}}, \quad \tau_{\perp} = \frac{2 \cos \theta_i}{\cos \theta_i + \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1 - \sin^2 \theta_i}}。$$

### ■ 平行极化波「媒质1中的合成波」

对右图所示平行极化波，其磁场只有y方向分量，电场只有x和z方向分量，设平行极化波在分界面上的反射系数和透射系数分别为 $\Gamma_{//}$ 和 $\tau_{//}$ ，则媒质1中合成波的电场和磁场可表示为：



$$E_{1x} = E_{ix} + E_{rx} = E_{im} \cos \theta_i (e^{-jk_1 z \cos \theta_i} - \Gamma_{//} e^{jk_1 z \cos \theta_i}) e^{-jk_1 x \sin \theta_i}$$

$$E_{1z} = E_{iz} + E_{rz} = E_{im} \sin \theta_i (-e^{-jk_1 z \cos \theta_i} - \Gamma_{//} e^{jk_1 z \cos \theta_i}) e^{-jk_1 x \sin \theta_i}$$

$$H_{1y} = H_{iy} + H_{ry} = \frac{E_{im}}{\eta_1} (e^{-jk_1 z \cos \theta_i} + \Gamma_{//} e^{jk_1 z \cos \theta_i}) e^{-jk_1 x \sin \theta_i}$$

### ■ 平行极化波「媒质2中的透射波」

媒质2中透射波的电场和磁场可表示为：

$$E_{2x} = E_{tx} = \tau_{//} E_{im} \cos \theta_t e^{-jk_2 z \cos \theta_t} e^{-jk_2 x \sin \theta_t}$$

$$E_{2z} = E_{tz} = -\tau_{//} E_{im} \sin \theta_t e^{-jk_2 z \cos \theta_t} e^{-jk_2 x \sin \theta_t}$$

$$H_{2y} = H_{ty} = \frac{\tau_{//} E_{im}}{\eta_2} e^{-jk_2 z \cos \theta_t} e^{-jk_2 x \sin \theta_t}$$

### ■ 平行极化波的反射系数和透射系数「菲涅尔公式」

平行极化波的反射系数和透射系数的表达式分别为：

$$\Gamma_{//} = \frac{\eta_1 \cos \theta_i - \eta_2 \cos \theta_t}{\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \cos \theta_t}, \quad \tau_{//} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \cos \theta_t}。$$

在分界面 $z = 0$ 处利用边界条件，得到等式 $E_{1x} = E_{2x}$ 和 $H_{1y} = H_{2y}$ ，并利用斯耐尔折射定律

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{n_1}{n_2} \text{ 可得到 } (1 - \Gamma_{//}) \cos \theta_i = \tau_{//} \cos \theta_t, \quad \frac{1}{\eta_1} (1 + \Gamma_{//}) = \frac{1}{\eta_2} \tau_{//}, \text{ 联立二式即可}$$

求得 $\Gamma_{//}$ 和 $\tau_{//}$ 的表达式。

对于常见的非磁性媒质，有 $\frac{\eta_1}{\eta_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$ 、 $\sin \theta_t = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \sin \theta_i$ 。因此 $\Gamma_{//}$ 和 $\tau_{//}$ 可表示为：

$$\Gamma_{//} = \frac{(\epsilon_2/\epsilon_1) \cos \theta_i - \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1 - \sin^2 \theta_i}}{(\epsilon_2/\epsilon_1) \cos \theta_i + \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1 - \sin^2 \theta_i}}, \quad \tau_{//} = \frac{2\sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1} \cos \theta_i}{(\epsilon_2/\epsilon_1) \cos \theta_i + \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1 - \sin^2 \theta_i}}。$$

### ■ 全反射

考虑非磁性媒质，垂直极化波和平行极化波的反射系数分别为

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1 - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1 - \sin^2 \theta_i}}, \quad \Gamma_{//} = \frac{(\epsilon_2/\epsilon_1) \cos \theta_i - \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1 - \sin^2 \theta_i}}{(\epsilon_2/\epsilon_1) \cos \theta_i + \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1 - \sin^2 \theta_i}},$$

当二者的绝对值都为1的时候，出现全反射现象。

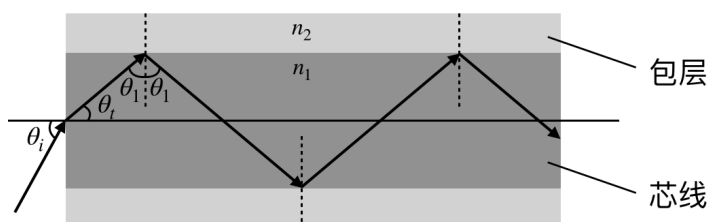
对非磁性媒质，斯耐尔折射定律可写为： $\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} = \frac{n_1}{n_2}$ ，确定了入射角和透射角之

间的关系。设使得透射角 $\theta_t = \frac{\pi}{2}$ 的入射角为临界角 $\theta_c$ ，由斯耐尔折射定律解得

$$\theta_c = \arcsin\left(\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}\right) = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)， \text{ 容易推得入射角 } \theta_i \text{ 大于等于 } \theta_c \text{ 时，发生全反射。}$$

### ■ 例题7-1

如图所示为光纤的剖面示意图。光纤的芯线材料相对折射率 $n_1 = \sqrt{\epsilon_{r1}}$ ，包层材料的相对折射率 $n_2 = \sqrt{\epsilon_{r2}}$ 。若要求光波从空气（相对折射率 $n_0 = 1$ ）中进入光纤后，能在芯线和包层的分界面上发生全反射，试确定最大的入射角 $\theta_i$ 。



### ■ 全透射

考虑非磁性媒质，垂直极化波和平行极化波的反射系数分别为

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1 - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1 - \sin^2 \theta_i}}, \quad \Gamma_{\parallel} = \frac{(\epsilon_2/\epsilon_1)\cos \theta_i - \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1 - \sin^2 \theta_i}}{(\epsilon_2/\epsilon_1)\cos \theta_i + \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1 - \sin^2 \theta_i}},$$

当二者的绝对值都为0的时候，出现全透射现象。

对于平行极化波，令 $\Gamma_{\parallel} = 0$ ，得 $\theta_i = \theta_b = \arcsin\left(\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}}\right) = \arctan\left(\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}\right)$ ，称此入

射角为布儒斯特角。

对于垂直极化波，若 $\Gamma_{\perp} = 0$ ，则只能 $\epsilon_1 = \epsilon_2$ ，所以垂直极化波斜入射到两种不同媒质的分界面上时不会产生全透射现象。

综上，一个任意极化的电磁波，当它以布儒斯特角入射到两种非磁性媒质的分界面上时，它的平行极化分量全部透射，反射波中就只剩下垂直极化分量。所以以布儒斯特角斜入射非磁性媒质的分界面上能起到一种极化滤波的作用，故也称布儒斯特角为极化角。

## ■ 例题7-2

均匀平面波在 $y = 0$ 的入射面上，从空气中斜入射到 $z = 0$ 的非磁性半无界理想介质的平面上，已知透射波的磁场强度为 $(\sqrt{3}\vec{e}_x + \vec{e}_z)e^{j(x-\sqrt{3}z)} \text{ A/m}$ ，入射角为 $\theta_i = \sin^{-1} \frac{3}{4}$ 。

- (1) 求透射波的角频率和介质的相对介电常数、介质中的波长；
- (2) 判断入射波的极化类型（垂直或平行）；
- (3) 如存在布儒斯特角，求出其大小，如不存在，说明理由。

## ■ 例题7-3

均匀平面波从 $\mu = \mu_0$ 、 $\varepsilon = 4\varepsilon_0$ 的理想电介质中斜入射到与空气的分界面上。试求

- (1) 希望在分界面上产生全反射，应该采取多大的入射角；
- (2) 若入射波是圆极化波，而只希望反射波成为单一的直线极化波，应以什么入射角入射？

## ■ 例题7-4

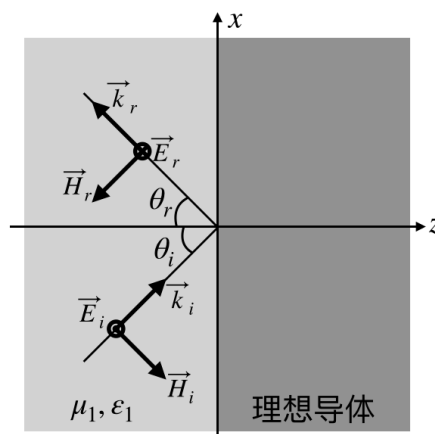
频率 $f = 300 \text{ kHz}$ 的均匀平面波从媒质1 ( $\mu_1 = \mu_0$ 、 $\varepsilon_1 = 4\varepsilon_0$ 、 $\sigma_1 = 0$ ) 斜入射到媒质2 ( $\mu_2 = \mu_0$ 、 $\varepsilon_2 = \varepsilon_0$ 、 $\sigma_2 = 0$ )。

- (1) 若入射波是垂直极化波，入射角 $\theta_i = 60^\circ$ ，试问在空气中的透射波的传播方向如何？相速是多少？
- (2) 若入射波是圆极化波，入射角 $\theta_i = 60^\circ$ ，试问反射波是什么极化波？

## 7.2.2对理想导体平面的斜入射

## ■ 电磁波对理想导体平面的斜入射

如右图所示， $z < 0$ 的半空间充满参数为 $\varepsilon_1$ 和 $\mu_1$ 的理想介质1， $z > 0$ 的半空间充满参数为 $\varepsilon_2$ 和 $\mu_2$ 的理想导体，均匀平面波从介质1斜入射到 $z = 0$ 的分界平面上，取入射平面为 $xOz$ 平面。

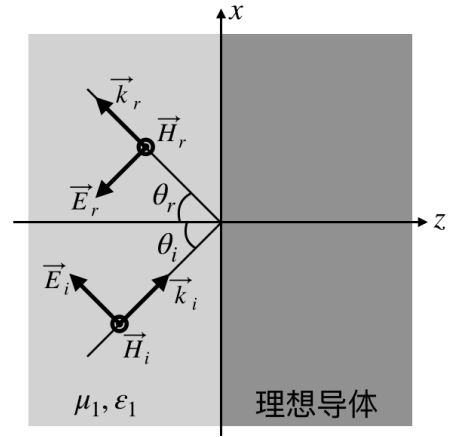




由于理想导体电导率 $\sigma_2 \rightarrow \infty$ ，所以其本征阻抗

$$\eta_{2c} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_{2c}}} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2 - j\frac{\sigma_2}{\epsilon}}} \rightarrow 0, \text{ 依然将电磁}$$

波分为垂直极化波和平行极化波分析。



### ■ 垂直极化波「入射波」

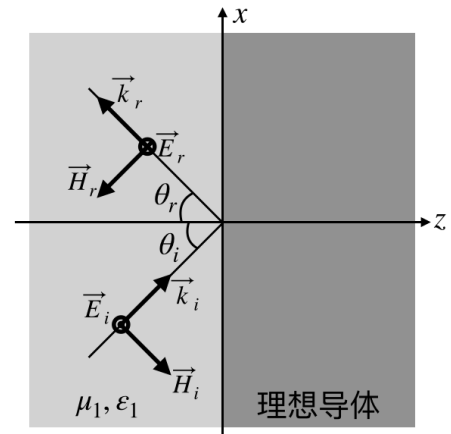
理想导体的本征阻抗为 $\eta_{2c} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_{2c}}} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2 - j\frac{\sigma_2}{\epsilon}}} \rightarrow 0$ ，将其代入垂直极化波的菲涅尔公

式，得到 $\Gamma_{\perp} = -1$ 、 $\tau_{\perp} = 0$ 。即垂直极化波斜入射理想导体时，没有电磁能量发生透射，只产生反射波。

对右图所示垂直极化波，其入射波的电场和磁场的表达式为：

$$\vec{E}_i = \vec{e}_y E_m e^{-jk(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)}$$

$$\vec{H}_i = (-\vec{e}_x \cos \theta_i + \vec{e}_z \sin \theta_i) \frac{E_m}{\eta} e^{-jk(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)}$$



### ■ 垂直极化波「反射波」

垂直极化波斜入射理想导体时，没有电磁能量发生透射，只产生反射波，所以反射波的电场和磁场振幅大小与入射波相同。

如图所示垂直极化波，其反射波的电场和磁场为：

$$\vec{E}_r = -\vec{e}_y E_m e^{-jk(x \sin \theta_i - z \cos \theta_i)}$$

$$\vec{H}_r = (-\vec{e}_x \cos \theta_i - \vec{e}_z \sin \theta_i) \frac{E_m}{\eta} e^{-jk(x \sin \theta_i - z \cos \theta_i)}$$

### ■ 垂直极化波「媒质1中的合成波」

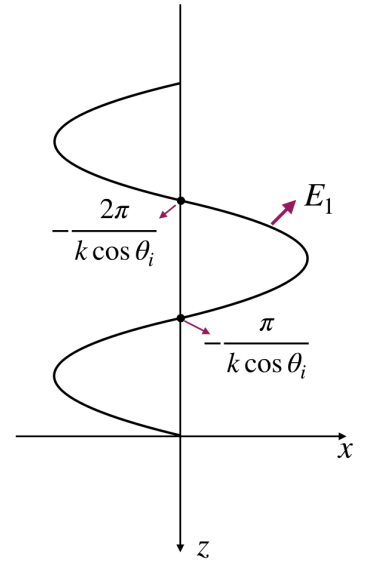
理想介质中合成波电场和磁场为：

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_i + \vec{E}_r = -\vec{e}_y j 2E_m \sin(kz \cos \theta_i) e^{-jkx \sin \theta_i}$$

$$\vec{H}_1 = [-\vec{e}_x \cos \theta_i \cos(kz \cos \theta_i) - \vec{e}_z j \sin \theta_i \sin(kz \cos \theta_i)] \frac{2E_m}{\eta} e^{-jkx \sin \theta_i}$$

从式中可以看出，合成波的传播方向为x方向，在传播方向上有磁场分量，故合成波是非TEM波（TEM波称横电磁波，指电磁波的电场和磁场都在垂直于传播方向的平面上的一种电磁波），称这种传播方向上只有磁场分量而电场矢量与入射面垂直的波为横电波（TE波）。

另外，从表达式中可以看出，合成波的振幅在z方向上成正弦变化，所以合成波是非均匀平面波（均匀平面波指电磁波的场矢量只沿它的传播方向变化，在与传播方向垂直的平面内电场和磁场的方向、振幅和初相位都保持不变），如右图所示，在z方向上形成驻波，在x方向上是行波。



### ■ 垂直极化波斜入射理想导体表面时的特点

根据合成波电场和磁场的表达式，总结出垂直极化波斜入射理想导体表面时的特点：

合成波沿平行于分界面的方向（即x方向）传播，其相速为  $v_{px} = \frac{\omega}{k_{ix}} = \frac{v_p}{\sin \theta_i}$ ；

合成波振幅在垂直于导体表面的方向（即z方向）上呈驻波分布，而且合成波电场在

$$z = -\frac{n\pi}{k \cos \theta_i} (n = 0, 1, 2, \dots) \text{处为} 0;$$

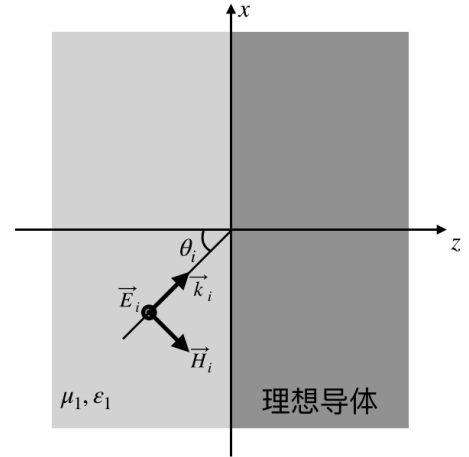
合成波是非均匀平面波；

在合成波的传播方向（即x方向）上不存在电场分量，但存在磁场分量，故称这种电磁波为横电波，简称TE波。

## ■ 例题7-5

如右图所示，一角频率为 $\omega$ 的均匀平面波由空气向理想导体入射，入射角为 $\theta_i$ ，其电场的幅值为 $E_m$ 。

求（1）导体表面上的感应电流密度；（2）合成波在空气中的平均坡印廷矢量。



## ■ 例题7-6

有一正弦均匀平面波沿空气斜入射到位于 $z = 0$ 的理想导体平面上，其电场强度的复数形式为 $\vec{E}_i(x, z) = \vec{e}_y 10e^{-j(6x+8z)} \text{ V/m}$ ，试求：

- (1) 入射波的频率 $f$ 与波长 $\lambda$ ；
- (2)  $\vec{E}_i(x, z, t)$ 和 $\vec{H}_i(x, z, t)$ 的瞬时表达式；
- (3) 入射角 $\theta_i$ ；
- (4) 反射波的 $\vec{E}_r(x, z)$ 和 $\vec{H}_r(x, z)$ ；
- (5) 总场的 $\vec{E}_1(x, z)$ 和 $\vec{H}_1(x, z)$ 。

## ■ 平行极化波「入射波」

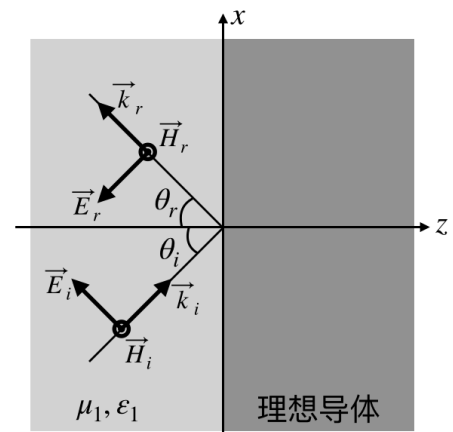
理想导体的本征阻抗为 $\eta_{2c} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_{2c}}} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2 - j\frac{\sigma_2}{\omega}}} \rightarrow 0$ ，将其代入平行极化波的菲涅尔公

式，得到 $\Gamma_{//} = 1$ 、 $\tau_{//} = 0$ 。即平行极化波斜入射理想导体时，没有电磁能量发生透射，只产生反射波。

对右图所示平行极化波，其入射波的电场和磁场的表达式为：

$$\vec{E}_i = (\vec{e}_x \cos \theta_i - \vec{e}_z \sin \theta_i) E_m e^{-jk(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)}$$

$$\vec{H}_i = \vec{e}_y \frac{E_m}{\eta} e^{-jk(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)}$$



### ■ 平行极化波「反射波」

平行极化波斜入射理想导体时，没有电磁能量发生透射，只产生反射波，所以反射波的电场和磁场振幅大小与入射波相同。

如图所示平行极化波，其反射波的电场和磁场为：

$$\vec{E}_r = (-\vec{e}_x \cos \theta_i - \vec{e}_z \sin \theta_i) E_m e^{-jk(x \sin \theta_i - z \cos \theta_i)}$$

$$\vec{H}_r = \vec{e}_y \frac{E_m}{\eta} e^{-jk(x \sin \theta_i - z \cos \theta_i)}$$

### ■ 平行极化波「媒质1中的合成波」

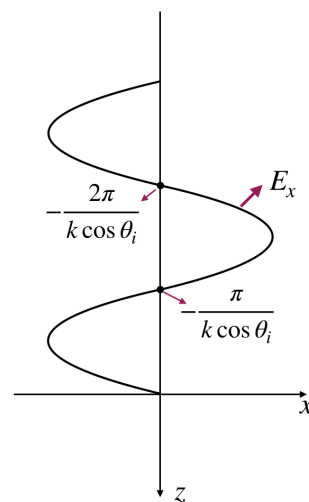
理想介质中合成波电场和磁场为：

$$\vec{E}_1 = -[\vec{e}_x j \cos \theta_i \sin(kz \cos \theta_i) + \vec{e}_z j \sin \theta_i \cos(kz \cos \theta_i)] 2E_m e^{-jkx \sin \theta_i}$$

$$\vec{H}_1 = \vec{H}_i + \vec{H}_r = \vec{e}_y 2 \frac{E_m}{\eta} \cos(kz \cos \theta_i) e^{-jkx \sin \theta_i}$$

从式中可以看出，合成波的传播方向为x方向，在传播方向上有电场分量，故合成波是非TEM波，称这种传播方向上只有电场分量而磁场矢量与入射面垂直的波为横电波（TM波）。

另外，从表达式中可以看出，合成波的振幅在z方向上成正弦变化，所以合成波是非均匀平面波。以电场在x方向的分量为例，如右图所示，在z方向上形成驻波，在x方向上是行波。



### ■ 平行极化波斜入射理想导体表面时的特点

根据合成波电场和磁场的表达式，总结出平行极化波斜入射理想导体表面时的特点：

合成波沿平行于分界面的方向（即x方向）传播，其相速为  $v_{px} = \frac{\omega}{k_{ix}} = \frac{v_p}{\sin \theta_i}$ ；

合成波振幅在垂直于导体表面的方向（即 $z$ 方向）上呈驻波分布，而且合成波电场在

$$z = -\frac{n\pi}{k \cos \theta_i} (n = 0, 1, 2, \dots) \text{处达到最大值；}$$

合成波是非均匀平面波；

在合成波的传播方向（即 $x$ 方向）上不存在磁场分量，但存在电场分量，故称这种电磁波为横磁波，简称 $TM$ 波。

### ■ 例题7-7

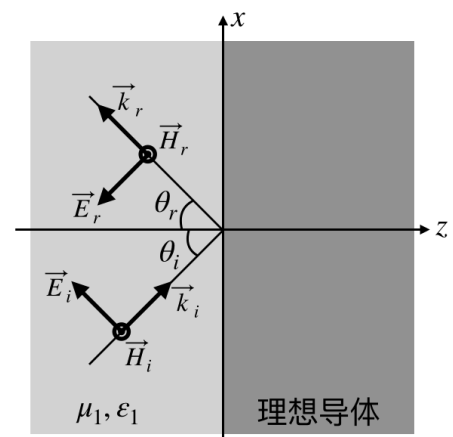
已知空气中磁场强度为 $\vec{H}_i = -\vec{e}_y e^{-j\sqrt{2}\pi(x+z)} \text{ A/m}$ 的均匀平面波，向位于 $z = 0$ 的理想导体斜入射。求

- (1) 入射角；
- (2) 入射波电场；
- (3) 反射波的电场和磁场；
- (4) 合成波的电场和磁场；
- (5) 导体表面上的感应电流密度和电荷密度。

### ■ 例题7-8

频率 $f = 100\text{MHz}$ 的平行极化正弦均匀平面波，在空气（ $z < 0$ 的区域）中以入射角 $\theta_i = 60^\circ$ 斜入射到 $z = 0$ 处的理想导体表面。设入射波磁场的振幅为 $0.1 \text{ A/m}$ ，方向为 $y$ 方向，如右图所示。求

- (1) 求出入射波、反射波的电场和磁场表达式；
- (2) 求理想导体表面上的感应电流和电荷密度；
- (3) 求空气中的平均功率密度。



微信扫描二维码获取更多课程



斐多课堂   
Phaedo Classes