2017-2018学年第二学期期末考试A卷参考答案

一、填空题(每小格3分，共39分)

1、【正解】$\frac{4}{7}$; 12

【解析】任意一名一年级学生，是男生的概率为$\frac{8}{6+8}=\frac{4}{7}$，设事件$A$表示选到的学生是女

$\overline{A}$表示选到的学生是男生，事件B表示选到的学生是一年级，$\overline{B}$表示选到的学生是二年级，当

,B相互独立时，$P(A|B)=P\left(A|\overline{B}\right)$，即$\frac{6}{6+8}=\frac{9}{a+9}$，所以$a=12$

【考点延伸】《考试宝典》第一章：概率运算.

2、【正解】3; $\frac{1}{3}$

【解析】$E(X)=\frac{1+c}{2}=2$，所以$c=3$，$Var(X)=\frac{(c-1)^2}{12}=\frac{1}{3}$

【考点延伸】《考试宝典》第四章知识清单4.3：常见随机变量的数学期望及方差.

3、【正解】0.5; -0.75

【解析】$Cov(X,Y)=\rho\sqrt{Var(X)\cdot Var(Y)}=1.5$，

$Var(X-Y)=Var(X)+Var(Y)-2Cov(X,Y)=2$，所以$X-Y\sim N(1,2)$，

$P(X>Y+1)=P(X-Y>1)=0.5$

$Cov(X+Y,X-Y)=Cov(X,X-Y)+Cov(Y,X-Y)=DX-1.5+1.5-DY=-3$

所以$\rho_{XY}=\frac{-3}{\sqrt{2}\times\sqrt{8}}=-0.75$

【考点延伸】《考试宝典》第四章重要题型1：随机变量的数字特征

4、【正解】$1-\frac{1}{e}$; $\frac{1}{5}$; 0.5

【解析】$P(\min(X_1,X_2)\leq 1)=1-P(X_1>1)P(X_2>1)=1-(e^{-0.5})^2=1-\frac{1}{e}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}e^{-2X_i}=E(e^{-2X})=\int_0^{+\infty}e^{-2x}\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{\lambda}{\lambda+2}=\frac{1}{5}$$

$$E(e^{-X})=\frac{1}{3},P\left(\sum_{i=1}^{180}e^{-X_i}>60\right)=P\left(\sum_{i=1}^{180}e^{-X_i}-60>0\right)\approx\Phi(0)=0.5$$

【考点延伸】《考试宝典》第四章重要题型1：随机变量的数字特征；第五章知识清单5.2：

数定理

5、【正解】$\left[16\left(\overline{X}\right)^2-\sigma^2\right]^2$，(4.939, 6.661)，0.025，接受

【解析】$Mse(T)=\sum\left[16\left(\overline{X}\right)^2-\sigma^2\right]^2=\left[16\left(\overline{X}\right)^2-\sigma^2\right]^2$，令$S'=\sum_{i=1}^{16}\left(x_i-\overline{x}\right)^2$，

$\frac{\left(\overline{x}-\mu\right)/(\sigma/\sqrt{n})}{\sqrt{S'/(n-1)}/\sigma}\sim t(n-1)$，所以$\mu$置信区间为

$$\left(\overline{x}-\frac{\sqrt{S'}}{\sqrt{n}\sqrt{n-1}}t_{0.025}(15),\overline{X}+\frac{\sqrt{S'}}{\sqrt{n}\sqrt{n-1}}t_{0.025}(15)\right)=(5.456,6.144)$$

$\frac{S'}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，所以$P_=(1-0.975)=0.025$,若显著水平$\alpha=0.05$，拒绝原假设

【考点延伸】《考试宝典》第九章：假设检验；第八章重要题型1：置信区间.

二、(12分)

【解析】(1) 小王胜的概率$P_1=0.4\times0.3+0.2\times0.4+0.4\times0.5=0.4$

(2) 此局对手是等级分高的玩家的概率$P_2=\dfrac{0.4\times0.3}{P_1}=\dfrac{0.12}{0.4}=0.3$

(3) 恰好胜两局的概率$P_3=C_5^2 0.4^2(1-0.4)^3=10\times0.16\times0.6^3=0.3456$

第五局是第二次胜的概率$P_4=C_4^1 0.4(1-0.4)^3\times0.4=4\times0.4^2\times0.6^3=0.13824$.

【考点延伸】《考试宝典》第一章知识清单1.5.3：全概率公式和贝叶斯公式.

三、(12分)

【解析】有题意得$a_4+a_5+a_6=0.6$, $-0.1-a_4+a_3+a_6=0$, $0.1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=1$

(1) $Cov(X,Y)=E(XY)-EXEY=a_6-a_4=0$，由$a_6=0.1$知，$a_3=a_4=0.1, a_5=0.4$，$a_2=0.2$

X\Y	-1	0	1
0	0.1	0.2	0.1
1	0.1	0.4	0.1

(2) 当X,Y相互独立时，$Cov(X,Y)=a_6-a_4=0$，所以$a_2=0.2$，$a_3=0.1$

又$P(X=0|Y=1)=P(X=0|Y=0)\Rightarrow\dfrac{a_3}{a_3+a_6}=\dfrac{a_2}{a_2+a_5}\Rightarrow a_3a_5=a_2a_6$

所以$a_5=0.3$，$a_6=a_4=0.15$

X\Y	-1	0	1
0	0.1	0.2	0.1
1	0.15	0.3	0.15

【考点延伸】《考试宝典》第三章重要题型1：离散型二维随机变量及其分布律.

四、(13分)

【解析】(1) $F(0.5,0.5)=\int_{-\infty}^{0.5}\int_{-\infty}^{0.5}f(x,y)dxdy=\int_0^{0.5}\int_0^{x^2}4xdxdy=x^4\big|_0^{0.5}=0.0625$

(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}4x^3,0<x<1\\0,其他\end{cases}$，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}2-2y,0<y<1\\0,其他\end{cases}$，

因为$f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$，所以$X$与$Y$不相互独立

(3) $Cov(X,Y)=E(XY)-EXEY=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy-\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy$

$=\dfrac{2}{7}-\dfrac{4}{5}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{105}$，所以$X$与$Y$相关

【考点延伸】《考试宝典》第二章重要题型4：连续型随机变量函数的概率分布

五、(8分)

【解析】$\chi^2=\sum_{i=1}^{6}\dfrac{(f_i-np_i)^2}{np_i}\sim\chi_\alpha^2(5)=11.07$，

计算得$\chi^2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{9}+\dfrac{8}{11}+\dfrac{2}{13}+\dfrac{6}{5}\approx3.47<11.07$

故在$\alpha=0.05$下接受H_0

【考点延伸】《考试宝典》第九章重要题型 3：卡方检验.

六、(16 分)

【解析】(1) $E(X)=\int_0^\theta x\cdot 2x/\theta^2dx=\frac{2\theta}{3}$，令 $\overline{X}=E(X)$ 得：$\hat{\theta}=\frac{3}{2}\overline{X}$，其中 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}$

$E\left(\hat{\theta}\right)=\frac{3}{2}E\left(\overline{X}\right)=\frac{3}{2}E(x)=\theta$，所以$\hat{\theta}$是$\theta$的无偏估计量

(2) 取$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\lambda x_i^{\lambda-1}/2^\lambda$，取对数得$\ln L(\lambda)=n\ln\lambda-n\lambda\ln2+(\lambda-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

求导得 $\frac{n}{\lambda}-n\ln2+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$，所以$\hat{\lambda}=\frac{n}{n\ln2-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$

$\lim_{n\to\infty}\hat{\lambda}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\ln2-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}=\frac{1}{\ln2-E(\ln X)}$，又

$E(\ln X)=\int_0^2\ln x\cdot\lambda x^{\lambda-1}/2^\lambda dx=\ln2-\frac{1}{\lambda}$，

所以$\lim_{n\to\infty}\hat{\lambda}=\lambda$，即$\hat{\lambda}$是$\lambda$的相合估计量

【考点延伸】《考试宝典》第七章知识清单 7.1：点估计；知识清单 7.2：估计量的评选标准