无界空间中的均匀平面波

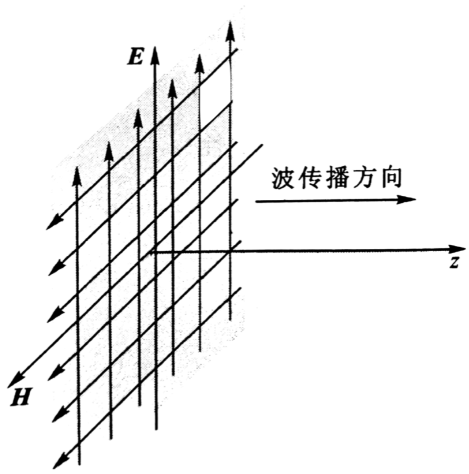
电磁场与电磁波不挂科第五讲讲义

5.1.理想介质中的均匀平面波

5.1.1.波函数

■ **均匀平面波**

均匀平面波指电磁场的场矢量只沿着它的传播方向变化。而在与波的传播方向垂直的平面上，$\vec{E}$和$\vec{H}$的方向、振幅、相位都保持不变。注意，$\vec{E}$与$\vec{H}$相垂直，且两者都垂直于波的传播方向。设$\vec{e_n}$为传播方向，则有$\vec{e_n} = \vec{e_E} \times \vec{e_H}$。



考虑直角坐标系中沿z轴方向传播的均匀平面波，则它的电磁场矢量表达式中的空间坐标变量只包含z，而不包含x和y，即$\vec{E}$和$\vec{H}$不是x和y的函数。

均匀平面波是一种理想情况，实际上并不存在，因为只有无限大的源才能产生均匀平面波。但在距离波源足够远的地方，波阵面（或称波前、等相位面）几乎成球面，巨大球面上的一小部分就可以近似看作一个平面，故可以将其看作均匀平面波。

■ **理想介质（无耗媒质）中的均匀平面波**

在无源区域$(\rho = 0, \vec{J} = 0)$的线性、各向同性的均匀理想介质中的均匀平面波为横电磁波(TEM波)，即电场强度$\vec{E}$和磁场强度$\vec{H}$都与波的传播方向垂直，没有沿传播方向的分量。

以沿z方向传播的均匀平面波为例：电场强度$\vec{E}$和磁场强度$\vec{H}$只沿z方向变化，不是x和y的函数，即：$\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial x}=\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial y}=0$、$\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial x}=\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial y}=0$。

又由于空间无源，则有$\nabla\cdot\vec{E}=0$和$\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial x}=\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial y}=0$，

即$\begin{cases}\dfrac{\partial E_x}{\partial x}+\dfrac{\partial E_y}{\partial y}+\dfrac{\partial E_z}{\partial z}=\dfrac{\partial E_z}{\partial z}=0\\ \dfrac{\partial H_x}{\partial x}+\dfrac{\partial H_y}{\partial y}+\dfrac{\partial H_z}{\partial z}=\dfrac{\partial H_z}{\partial z}=0\end{cases}$。

对E_z和H_z由标量亥姆霍兹方程，有$\begin{cases}\dfrac{d^2E_z}{dz^2}+\omega^2\mu\varepsilon E_z=0\\ \dfrac{d^2H_z}{dz^2}+\omega^2\mu\varepsilon H_z=0\end{cases}$。

可得$E_z=0,H_z=0$，表明电场强度$\vec{E}$ 和磁场强度$\vec{H}$都没有沿传播方向的分量。

■ **理想介质中的均匀平面波的波函数**

对于前面讨论的沿z方向传播的均匀平面波，其电场强度和磁场强度沿x轴和y轴的分量满足

标量亥姆霍兹方程：$\begin{cases}\dfrac{d^2E_x}{dz^2}+k^2E_x=0\\ \dfrac{d^2E_y}{dz^2}+k^2E_y=0\\ \dfrac{d^2H_x}{dz^2}+k^2H_x=0\\ \dfrac{d^2H_y}{dz^2}+k^2H_y=0\end{cases}$

四个方程具有相同的形式，解的形式也相同。

E_x的通解为：$E_x(z)=E_{1m}e^{j\phi_1}e^{-jkz}+E_{2m}e^{j\phi_2}e^{jkz}$，其中$\phi_1,\phi_2$为辐角；对应瞬时表达式为

$E_x(z,t)=Re[E_x(z)e^{j\omega t}]=E_{1m}\cos(\omega t-kz+\phi_1)+E_{2m}\cos(\omega t+kz+\phi_2)$；

$E_{1m}e^{j\phi_1}e^{-jkz}$表沿$+z$方向传播的均匀平面波，$E_{2m}e^{j\phi_2}e^{jkz}$表沿$-z$方向传播的均匀平面波。

通常，我们用电磁波的电场强度矢量来表征这个电磁波。为方便起见，我们首先研究沿$+z$方向传播的均匀电磁波，且电磁波的电场强度矢量只有x轴方向的分量，也就是只需讨论$E_x(z)=E_{xm}e^{-jkz}e^{j\phi_x}$。

5.1.2.描述均匀平面波的物理量

■ **理想介质中均匀平面波的一些物理量**

考虑沿$+z$方向传播的均匀平面波$E_x(z)=E_{xm}e^{-jkz}e^{j\phi_x}$，其对应的瞬时表达式为：

$E_x(z,t)=E_{xm}\cos(\omega t-kz+\phi_x)$；

$E_x(z,t)$既是时间t的周期函数，也是空间坐标的周期函数。

■ **时间相位、角频率、周期、频率**

空间坐标z不变时，$E_x(z,t)$随时间t作周期性变化。

ωt为时间相位；ω为角频率，单位为rad/s，表示单位时间内的相位变化；场量随时间变化的周期为$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$；频率为$f=\dfrac{1}{T}=\dfrac{\omega}{2\pi}$，单位为$Hz$，$f$只与表达式中的角频率有关，在不同媒质中$f$大小不发生变化。

■ **空间相位、相位常数、波长**

时间t不变时，$E_x(z,t)$随空间坐标z作周期性变化。

表达式中kz为空间相位；k是相位常数，单位为rad/m,表示波传播单位距离的相位变化；

空间相位差为2π的两个等相位面之间的距离称为电磁波的波长λ，其表达式为

$\lambda=\dfrac{2\pi}{k}(=\dfrac{1}{f\sqrt{\mu\varepsilon}})$；

■ **相速**

相速指电磁波的等相位面在空间中的移动速度。

相速以v表示，单位为m/s。其表达式为$v=\dfrac{\omega}{k}$，由于$k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$，相速又可以表示为

$v=\dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$，可以看出相速只与媒质参数有关。

在自由空间中有$\varepsilon=\varepsilon_0=\dfrac{1}{36\pi}\times 10^{-9}\ \ F/m$，$\mu=\mu_0=4\pi\times 10^{-7}\ \ H/m$，此时

$v=v_0=\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=3\times 10^8\ m/s$，即自由空间中的光速。

相速与波长之间的关系为：$\lambda=\dfrac{v}{f}$。

■ **波阻抗**

波阻抗也叫本征阻抗，指电磁场中电场的振幅和磁场的振幅之比，具有阻抗的量纲即欧姆（Ω）。

波阻抗以η表示，其表达式为：$\eta=\dfrac{E_m}{H_m}=\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}$。

在自由空间中，$\eta_0=\sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=120\pi=377\ (\Omega)$。

设电磁波的传播方向为$\overrightarrow{e_n}$，根据$\overrightarrow{H}=-\dfrac{1}{j\omega\mu}\nabla\times\overrightarrow{E}$可以推得磁场和电场之间满足的关系为：$\overrightarrow{H}=\dfrac{1}{\eta}\overrightarrow{e_n}\times\overrightarrow{E}$，或写为$\overrightarrow{E}=\eta\overrightarrow{H}\times\overrightarrow{e_n}$（注意式中矢量为复矢量形式）。

此两式也表示，电场强度、磁场强度与传播方向之间互相垂直，遵循右手螺旋定则。

■ **理想介质中均匀平面波的能量**

在理想介质中，由于$|\overrightarrow{H}|=\dfrac{1}{\eta}|\overrightarrow{E}|$，所以有$\dfrac{1}{2}\varepsilon|\overrightarrow{E}|^2=\dfrac{1}{2}\mu|\overrightarrow{H}|^2$。这表明在理想介质中，均匀平面波的电场能量密度等于磁场能量密度。

因此，电磁能量密度可表示为：$w = w_e + w_m = \frac{1}{2}\varepsilon|\vec{E}|^2 + \frac{1}{2}\mu|\vec{H}|^2 = \varepsilon|\vec{E}|^2 = \mu|\vec{H}|^2$。

在理想介质中，瞬时坡印廷矢量为：$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\eta}\vec{E} \times (\vec{e}_z \times \vec{E}) = \vec{e}_z \frac{1}{\eta}|\vec{E}|^2$；

平均坡印廷矢量为：$\overrightarrow{S_{av}} = \frac{1}{2}Re[\vec{E} \times \vec{H}^*] = \frac{1}{2\eta}Re[\vec{E} \times (\vec{e}_z \times \vec{E}^*)] = \vec{e}_z \frac{1}{2\eta}|\vec{E}_m|^2$。

由此可见，均匀平面波电磁能量沿波的传播方向流动。

■ 理想介质中均匀平面波的传播特点

电场$\vec{E}$、磁场$\vec{H}$与传播方向$\vec{e}_z$之间相互垂直，是横电磁波（TEM波）；

电场与磁场的振幅不变；

波阻抗为实数，电场与磁场同相位；

电磁波的相速与频率无关；

电场能量密度等于磁场能量密度。

例题5-1

在空气中，一均匀平面波的波长为$12\ cm$，当该波进入某无损耗媒质中传播时，其波长减小为$8\ cm$，且已知在媒介中的$\vec{E}$和$\vec{H}$的振幅分别为$50\ V/m$和$0.1\ A/m$。求该平面波的频率和媒介的相对磁导率和相对介电常数。

例题5-2

频率为$100MHz$的均匀平面波，在一无耗媒质中沿$+z$方向传播，其电场 $\vec{E} = \vec{e}_x E_x$。已知该媒介的相对介电常数$\varepsilon_r = 4$ 、相对磁导率$\mu_r = 1$，且当$t = 0$，$z = \frac{1}{8}m$时，电场幅值为$10^{-4}V/m$。求（1）求$\vec{E}$的瞬时表达式；（2）求$\vec{H}$的瞬时表达式；（3）当$t = 10^{-8}s$时，求E_x为正的最大值时的位置。

例题5-3

频率为$9.4GHz$的均匀平面波在聚乙烯中传播，设其为无耗材料，其参数为$\mu_r = 1$，$\varepsilon_r = 2.26$。若磁场的振幅为$7\ mA/m$，求相速、波长、波阻抗和电场强度的幅值。

■ **例题5-4**

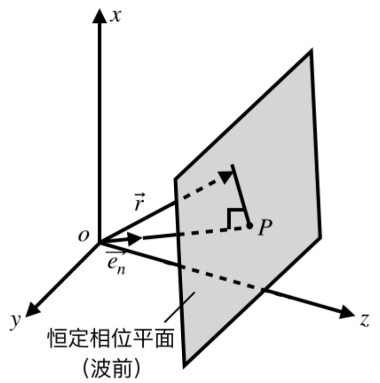
自由空间中平面波的电场强度$\vec{E} = \vec{e_x} 50\cos(\omega t - kz)\ V/m$，求在$z = z_0$处垂直穿过半径$R = 2.5\ m$的圆平面的平均功率。

5.1.3.沿任意方向传播的均匀平面波

■ 沿任意方向传播的均匀平面波

沿$+z$方向传播的电场强度复矢量为：

$\vec{E}(z) = \vec{E_m} e^{-jkz}$，则沿任意方向传播的电场强度的复矢量表示为：$\vec{E}(x,y,z) = \vec{E_m} e^{-jk_x x - jk_y y - jk_z z}$，其中$\vec{E_m}$为常矢量，其等相位面如图所示，该等相位面可以表示为$|\vec{e_n} \times \vec{r}| = \overline{OP}$。



定义一个波矢量$\vec{k}$，其大小为相位常数k，方向沿波传播的方向$\vec{e_n}$，即$\vec{k} = \vec{e_n} k = \vec{e_x} k_x + \vec{e_y} k_y + \vec{e_z} k_z$。

设空间任意点的位置矢量为$\vec{r} = \vec{e_x} x + \vec{e_y} y + \vec{e_z} z$，则电场强度复矢量可以表示为

$\vec{E}(x,y,z) = \vec{E}(\vec{r}) = \vec{E_m} e^{-jk_x x - jk_y y - jk_z z} = \vec{E_m} e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$。

根据均匀平面波的性质，沿任意方向传播的均匀平面波依然满足$\vec{e_n} = \vec{e_E} \times \vec{e_H}$。

■ **例题5-5**

频率$f = 500\ kHz$的均匀平面波，在$\mu = \mu_0$、$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$、$\sigma = 0$的无损耗媒质中传播。已知$\vec{E_m} = \vec{e_x} 2 - \vec{e_y} + \vec{e_z}\ \ kV/m$、$\vec{H_m} = \vec{e_x} 6 + \vec{e_y} 9 - \vec{e_z} 3\ \ A/m$。

求：（1）传播方向$\vec{e_n}$；（2）ε_r和λ。

■ **例题5-6**

已知自由空间传播的均匀平面波的磁场强度为

$\vec{H}=(\vec{e_x}\frac{3}{2}+\vec{e_y}+\vec{e_z})10^{-6}\cos[\omega t-\pi(-x+y+\frac{1}{2}z)]\ \ A/m$。

试求：（1）波的传播方向；（2）波的频率和波长；（3）与$\vec{H}$相伴的电场$\vec{E}$;（4）平均坡印廷矢量。

5.2.电磁波的极化

5.2.1.极化的概念

■ **极化的概念**

前面在讨论沿z方向传播的均匀平面波时，假设$\vec{E}=\vec{e_x}E_m\cos(\omega t-kz+\phi)$。在任何时刻，此波的电场强度矢量$\vec{E}$的方向始终都保持在$x$方向。

一般情况下，沿z方向传播的均匀平面波的E_x和E_y分量都存在，可表示为

$E_x=E_{xm}\cos(\omega t-kz+\phi_x),E_y=E_{ym}\cos(\omega t-kz+\phi_y)$。

设均匀平面波的传播方向沿z方向，考虑空间中一固定点的电场强度矢量，其表达式为

$\vec{E}=\vec{e_x}E_x+\vec{e_y}E_y$，其中$E_x=E_{xm}\cos(\omega t-kz+\phi_x)$，$E_y=E_{ym}\cos(\omega t-kz+\phi_y)$。

由于E_x和E_y分量的振幅和相位不一定相同，因此，在空间任意给定点上，合成波电场强度矢量$\vec{E}$的大小和方向都可能会随时变化，这种现象称为电磁波的极化。

电磁波的极化表征空间中给定点上电场强度矢量$\vec{E}$的方向随时间变化的特性，并根据$\vec{E}$的端点随时间变化的轨迹形状分为直线极化、圆极化、椭圆极化三种情况。模块1中讨论的电场强度矢量的表达式为$\vec{E}=\vec{e_x}E_m\cos(\omega t-kz+\phi)$的形式，其方向总是沿$x$轴的方向，即$\vec{E}$的方向都是在一条直线上变化，为沿$x$方向极化的线极化波。

极化波的极化形式取决于E_x和E_y的振幅、相位之间的关系。依然考虑沿$+z$方向传播的均匀平面波，取空间给定点为$z=0$，则E_x和E_y的表达式可写为$E_x = E_{xm}\cos(\omega t+\phi_x)$，$E_y = E_{ym}\cos(\omega t+\phi_y)$。

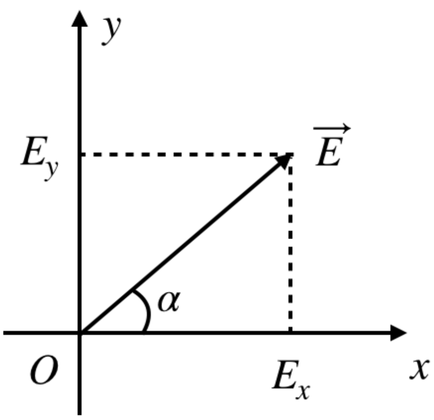
5.2.2.三种极化波

■ **直线极化波**

考虑沿$+z$方向传播的均匀平面波，取空间给定点为$z=0$，则E_x和E_y的表达式可写为

$E_x = E_{xm}\cos(\omega t+\phi_x)$，$E_y = E_{ym}\cos(\omega t+\phi_y)$。

若二者的相位相同或者相差π，即$\phi_y-\phi_x=0$或$\pm\pi$时，合成波为线极化波。



当$\phi_y-\phi_x=0$时，合成波电场强度大小为：

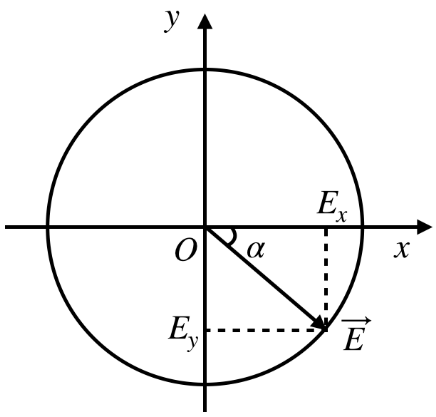
$$E=\sqrt{{E_x}^2+{E_y}^2}=\sqrt{{E_{xm}}^2+{E_{ym}}^2}\cos(\omega t+\phi_x);$$

合成波电场强度与x轴的夹角为$\alpha=\arctan\left(\frac{E_y}{E_x}\right)=\arctan\left(\frac{E_{ym}}{E_{xm}}\right)=const$，即合成波电场的大小虽然随时间变化，但其矢端轨迹与x轴的夹角始终不变，轨迹呈线性，即合成波为直线极化波。

当$\phi_y-\phi_x=\pm\pi$时，情况类似。

从上面的讨论得到更普遍的结论：任何两个同频率、同传播方向且极化方向相互垂直的线极化波，当它们的相位相同或相差π时，合成波为线极化波。

■ 圆极化波



考虑沿$+z$方向传播的均匀平面波，取空间给定点为$z=0$，则E_x和E_y的表达式可写为

$E_x = E_{xm}\cos(\omega t+\phi_x)$，$E_y = E_{ym}\cos(\omega t+\phi_y)$。

若二者的振幅相等、相位相差$\frac{\pi}{2}$，即

$E_{xm} = E_{ym} = E_m$，$\phi_y - \phi_x = \pm\frac{\pi}{2}$时，合成波为圆极化波。

当$\phi_y - \phi_x = \frac{\pi}{2}$时，$E_x$和$E_y$的表达式分别为：

$E_x = E_m\cos(\omega t+\phi_x)$，$E_y = E_m\cos(\omega t+\phi_x+\frac{\pi}{2}) = -E_m\sin(\omega t+\phi_x)$。

合成波电场强度大小为$E=\sqrt{{E_x}^2+{E_y}^2}=E_m=const$;

合成波电场强度与x轴的夹角为$\alpha = \arctan\left(\frac{E_y}{E_x}\right) = -(\omega t+\phi_x)$。

即合成波电场的大小不随时间变化，但其矢端轨迹与x轴的夹角以角速度ω变化，轨迹为圆形，即合成波为圆极化波。

当$\phi_y - \phi_x = \frac{\pi}{2}$时，情况类似。

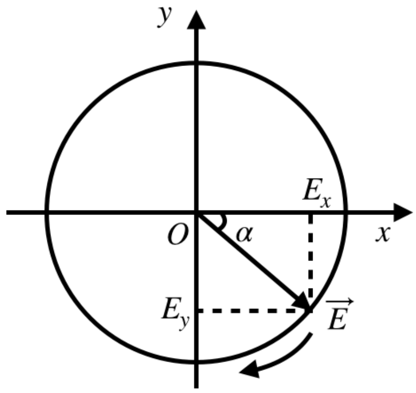
合成波电场强度与x轴的夹角为$\alpha = \arctan\left(\frac{E_y}{E_x}\right) = (\omega t+\phi_x)$，也为圆极化波。

从上面的讨论得到更普遍的结论：任何两个同频率、同传播方向且极化方向相互垂直的线极化波，当它们的振幅相同且相位相差$\frac{\pi}{2}$时，其合成波为圆极化波。

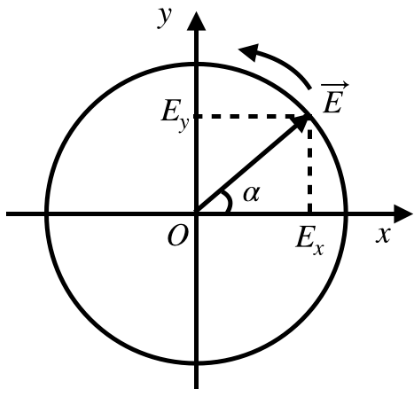
■ 圆极化波的旋向

讨论圆极化波时，要标明圆极化波的旋向。

对于前面讨论的$\phi_y-\phi_x=\dfrac{\pi}{2}$的情况，已知合成波电场与$x$轴的夹角为$\alpha=-(\omega t+\phi_x)$，当时间$t$增加时，若以左手大拇指指向波传播的方向即$+z$方向，则其余四指的转向与电场$\vec{E}$的端点运动方向相同（沿顺时针方向），如右图所示，将这种圆极化波称为左旋圆极化波。

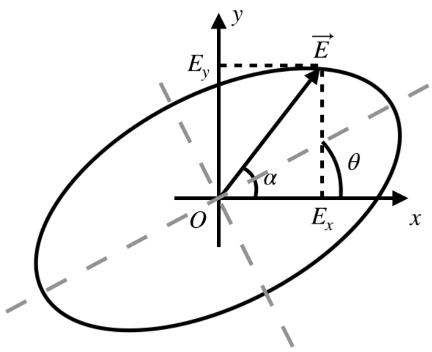


对于前面讨论的$\phi_y-\phi_x=-\dfrac{\pi}{2}$的情况，已知合成波电场与$x$轴的夹角为$\alpha=(\omega t+\phi_x)$，当时间$t$增加时，若以右手大拇指指向波传播的方向即$+z$方向，则其余四指的转向与电场$\vec{E}$的端点运动方向相同（沿逆时针方向），如右图所示，将这种圆极化波称为右旋圆极化波。



■ **椭圆极化波**

设E_x和E_y的表达式为$E_x=E_{xm}\cos(\omega t+\phi_x)$，$E_y=E_{ym}\cos(\omega t+\phi_y)$。最一般的情况是二者的振幅不等、相位差为任意值。当相位差不是0或$\pm\pi$且振幅不相同时，合成波为椭圆极化波，合成波的电场矢量端点轨迹为椭圆。



椭圆极化波如右图所示。直线极化和圆极化是椭圆极化的特例。

当$\phi_y-\phi_x=\phi\ (\phi\neq 0,\pm\pi)$时，椭圆的长轴与$x$轴之间的夹角$\theta$满足的关系式为：

$$\tan 2\theta=\frac{2E_{xm}E_{ym}}{E_{xm}^2-E_{ym}^2}\cos\phi。$$

从上面的讨论也可得到更普遍的结论：任何两个同频率、同传播方向且极化方向相互垂直的线极化波，若他们不满足形成线极化波和圆极化波的条件，则其合成波为椭圆极化波。

■ 椭圆极化波的旋向

讨论椭圆极化波时，要标明椭圆极化波的旋向。

对于前面讨论的$\phi_y - \phi_x = \phi\ (\phi \neq 0, \pm\pi)$的情况（设平面波沿$+z$方向传播），

若$0 < \phi < \pi$，合成波的传播方向与合成波电场的端点的运动方向满足左手螺旋（沿顺时针旋转），为左旋椭圆极化；

若$-\pi < \phi < 0$，合成波的传播方向与合成波电场的端点的运动方向满足右手螺旋（沿逆时针旋转），为右旋椭圆极化。

■ 极化波的合成与分解

任何两个同频率、同传播方向且极化方向相互垂直的线极化波可以根据其幅度、相位的关系合成线极化波、圆极化波或者椭圆极化波；反之，任意的线极化波、圆极化波、椭圆极化波可以分解成两个正交的线极化波。

另外，一个线极化波可以分解为两个振幅相等但方向相反的圆极化波；

一个椭圆极化波也可以分解为两个旋向相反、振幅不相等的圆极化波。

■ 极化波的判断方法

两个正交的线极化波可以根据其幅度、相位的关系合成线极化波、圆极化波或者椭圆极化波。

合成波的极化形式判别步骤如下：

求出电场矢量的瞬时表达式，并将其中的时谐标量函数表示为余弦函数形式；

根据瞬时表达式得到两个正交线极化波的振幅和相位关系，对应三种极化波的特点确定极化形式；

对于圆极化波和椭圆极化波，根据波的传播方向和两个正交线极化波的相位差确定旋向。

■ **例题5-7**

判别下列均匀平面波的极化形式：

（1） $\vec{E}(z,t)=\vec{e_x}E_m\sin(\omega t-kz-\frac{\pi}{4})+\vec{e_y}E_m\cos(\omega t-kz+\frac{\pi}{4})$

（2） $\vec{E}(z)=\vec{e_x}jE_me^{jkz}-\vec{e_y}E_me^{jkz}$

（3） $\vec{E}(z,t)=\vec{e_x}E_m\cos(\omega t-kz)+\vec{e_y}E_m\sin(\omega t-kz+\frac{\pi}{4})$

5.3.导电媒质中的均匀平面波

5.3.1.波函数、物理量、传播特点

■ **等效复介电常数**

在介电常数为ε、电导率为σ的均匀的导电媒质中，列复数形式的麦克斯韦第一方程并代入微分形式的欧姆定律得：$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+j\omega\varepsilon\vec{E}=j\omega\left(\varepsilon-j\frac{\sigma}{\omega}\right)\vec{E}=j\omega\varepsilon_c\vec{E}$，其中$\varepsilon_c=\varepsilon-j\frac{\sigma}{\omega}$称为等效复介电常数。

由于$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{1}{j\omega\varepsilon_c}\nabla\cdot(\nabla\times\vec{H})=0$和$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}$；可以看出，在均匀的导电媒质中，虽然传导电流密度$\vec{J}$不为0，但自由电荷密度$\rho$为0。

复介电常数表明了时谐电磁场中导电媒质的欧姆损耗。因为导电媒质的电导率σ不为零（即ε_c是一个复数），其中必然有传导电流$\vec{J}=\sigma\vec{E}$，也就产生了电磁能量损耗。由于欧姆损耗的存在，均匀平面波在导电媒质中的传播特性与理想介质（$\sigma=0$）中的情况不同。

■ **波数、本征阻抗**

对应ε_c，令$k_c = \omega\sqrt{\mu\varepsilon_c}$，为有损导电媒质中的波数；另外有$\eta_c = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon_c}}$，为导电媒质的本征阻抗，为一复数，常将其表示为$\eta_c = |\eta_c|e^{j\phi}$，可推导出$\begin{cases} |\eta_c| = (\frac{\mu}{\varepsilon})^{\frac{1}{2}}[1+(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon})]^{-\frac{1}{4}} \\ \phi = \frac{1}{2}\arctan(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}) \end{cases}$。

在导电媒质中，磁场强度复矢量和电场强度复矢量的关系为：$\vec{H} = \dfrac{1}{\eta_c}\vec{e_n} \times \vec{E}$。这表明，在导电媒质中，电场$\vec{E}$和磁场$\vec{H}$以及传播方向$\vec{e}_n$相互垂直，满足右手螺旋关系。而因为$\eta_c$为复数，故在导电媒质中$\vec{E}$和$\vec{H}$的相位不相同。

■ **传播常数**

导电媒质中的均匀平面波的波函数仍由亥姆霍兹方程推导出。导电媒质中，电场和磁场强度满足的亥姆霍兹方程为$(\nabla^2 + {k_c}^2)\vec{E} = 0$，$(\nabla^2 + {k_c}^2)\vec{H} = 0$。

若考虑均匀平面波沿$+z$方向传播，且电场只有E_x分量，则电场强度对应的亥姆霍兹方程的解为$\vec{E} = \vec{e_x}E_x = \vec{e_x}E_{xm}e^{-jk_cz}$。令$\gamma = jk_c$，称为传播常数，为一复数。令$\gamma = \alpha + j\beta$，则上面电场强度的解可化为$\vec{E} = \vec{e_x}E_{xm}e^{-\alpha z}e^{-j\beta z}$，对应的瞬时形式为
$\vec{E}(z,t) = Re[\vec{E}(z)e^{j\omega t}] = \vec{e_x}E_{xm}e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z)$。

由$\gamma = jk_c = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon_c}$和$\gamma = \alpha + j\beta$，可解得$\alpha = \omega\sqrt{\dfrac{\mu\varepsilon}{2}\Big[\sqrt{1+(\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon})^2} - 1\Big]}$，

$\beta = \omega\sqrt{\dfrac{\mu\varepsilon}{2}\Big[\sqrt{1+(\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon})^2} + 1\Big]}$。

■ **衰减常数、相位常数、相速**

对于$\vec{E} = \vec{e_x}E_{xm}e^{-\alpha z}e^{-j\beta z}$，式中第一个因子$e^{-\alpha z}$表示电场的振幅随传播距离$z$的增加而成指数衰减，称之为衰减因子，$\alpha$则称为衰减常数，单位是捺培/米($Np/m$);第二个因子$e^{-j\beta z}$是相位因子，$\beta$称为相位常数，单位为弧度/米($rad/m$)。

在导电媒质中，电磁波的相速为$v=\dfrac{\omega}{\beta}$，是频率的函数，所以在同一导电媒质中，不同频率的电磁波相速不同，这种现象称为色散；相应地，导电媒质称为色散媒质。

■ **导电媒质中均匀平面波的能量**

由$\overrightarrow{E}=\overrightarrow{e_x}E_{xm}e^{-\alpha z}e^{-j\beta z}$和$\overrightarrow{H}=\overrightarrow{e_y}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_c}{\mu}}E_{xm}e^{-\gamma z}=\overrightarrow{e_y}\dfrac{1}{\eta_c}E_{xm}e^{-\gamma z}$可得到导电媒质中的平均电场能量密度和平均磁场能量密度分别为$w_{eav}=\dfrac{1}{4}Re[\varepsilon_c\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{E}*]=\dfrac{\varepsilon}{4}E_{xm}^2e^{-2\alpha z}$，

$w_{mav}=\dfrac{1}{4}Re[\mu\overrightarrow{H}\cdot\overrightarrow{H}*]=\dfrac{\mu}{4}\dfrac{E_{xm}^2}{|\eta_c|^2}e^{-2\alpha z}=\dfrac{\varepsilon}{4}E_{xm}^2e^{-2\alpha z}\left[1+\left(\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$。

由此可见，在导电媒质中，平均磁场能量密度大于平均电场能量密度。只有当$\sigma=0$时，才有$w_{eav}=w_{mav}$。

在导电媒质中，平均坡印廷矢量为$\overrightarrow{S_{av}}=\dfrac{1}{2}Re[\overrightarrow{E}\times\overrightarrow{H}*]=\dfrac{1}{2}Re\left[\overrightarrow{E}\times\left(\dfrac{1}{\eta_c}\overrightarrow{e_z}\times\overrightarrow{E}\right)^*\right]$

$$=\frac{1}{2}Re\left[\overrightarrow{e_z}|\overrightarrow{E}|^2\frac{1}{|\eta_c|}e^{j\phi}\right]=\overrightarrow{e_z}\frac{1}{2|\eta_c|}|\overrightarrow{E}|^2\cos\phi$$

■ **导电媒质中均匀平面波的传播特点**

导电媒质中理想平面波的传播特点可以归纳为：

电场$\overrightarrow{E}$和磁场$\overrightarrow{H}$与传播方向$\overrightarrow{e}_z$之间相互垂直，仍然是横电磁波（TEM波）；

电场与磁场的振幅呈指数衰减；

波阻抗为复数，电场与磁场不同相位；

电磁波的相速与频率有关；

平均磁场能量密度大于平均电场能量密度。

5.3.2.弱导电媒质中的均匀平面波

■ **弱导电媒质中的均匀平面波**

$\alpha=\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon})^2}-1\right]}$，$\beta=\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left[\sqrt{1+(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon})^2}+1\right]}$中的$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}$描述了导电媒质中传导电流和位移电流的振幅之比，是导电媒质的损耗角正切（常用$\tan\delta_\sigma$表示）。

若媒质参数满足$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\ll 1$，则在这种媒质中传导电流相较位移电流来说很小，主要作用的是位移电流，称这种媒质为弱导电媒质。弱导电媒质是一种非理想绝缘材料。

在弱导电媒质中，衰减常数和相位常数近似为$\alpha\approx\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\ \ Np/m, \beta=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\ \ rad/m$；

本征阻抗近似为$\eta_c=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}(1+\frac{\sigma}{j\omega\varepsilon})^{-\frac{1}{2}}\approx\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}(1+j\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon})$，相速为$v=\frac{\omega}{\beta}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$。

5.3.3. 良导体中的均匀平面波

■ **良导体中的均匀平面波**

$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}$描述了导电媒质中传导电流和位移电流的振幅之比。若媒质参数满足$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\gg 1$，则在这种媒质中位移电流相较传导电流来说很小，起主要作用的是传导电流，称这种媒质为良导体。

在良导体中，衰减常数和相位常数近似为$\alpha\approx\beta\approx\sqrt{\pi f\mu\sigma}$；

本征阻抗近似为$\eta_c=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}}\approx\sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}}=(1+j)\sqrt{\frac{\pi f\mu}{\sigma}}=\sqrt{\frac{2\pi f\mu}{\sigma}}e^{j\pi/4}$，本征阻抗的表达式表明在良导体中磁场的相位滞后于电场$\frac{\pi}{4}$；

相速为$v=\frac{\omega}{\beta}\approx\sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}$。

■ **趋肤效应**

电磁波在良导体中衰减很快，传播很短一段距离就几乎衰减完了，所以电磁波只存在于导体表面附近的区域，称这种现象为趋肤效应。

定义物理量趋肤深度（穿透深度）δ来表征电磁波的趋肤程度，其定义为电磁波的幅值衰减为表面值的$\dfrac{1}{e}$时电磁波所传播的距离，即有$e^{-\alpha\delta}=\dfrac{1}{e}$，则$\delta=\dfrac{1}{\alpha}=\sqrt{\dfrac{2}{\omega\mu\sigma}}=\dfrac{1}{\sqrt{\pi f\mu\sigma}}$；

对于良导体，因为$\alpha=\beta$，所以趋肤深度也可表示为$\delta=\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\lambda}{2\pi}$。

■ 表面电阻和表面电抗

良导体的本征阻抗为$\eta_c\approx(1+j)\sqrt{\dfrac{\pi f\mu}{\sigma}}=R_S+jX_S$，其中$R_S=X_S=\sqrt{\dfrac{\pi f\mu}{\sigma}}=\dfrac{1}{\sigma\delta}$。

R_S称为良导体的表面电阻，表示厚度为δ的导体每平方米的电阻；X_S称为表面电抗；

$Z_S=R_S+jX_S$称为表面阻抗。

■ 例题5-8

一沿x方向极化的线极化波在海水中传播，取$+z$轴方向为传播方向。已知海水的媒质参数为$\varepsilon_r=80$、$\mu_r=1$、$\sigma=4\ S/m$，在$z=0$处的电场$E_x=100\cos(10^7\pi t)\ V/m$。

求（1）衰减常数、相位常数、本征阻抗、相速、波长及趋肤深度；

（2）电场强度幅值减小为$z=0$处的$1/1000$时，波传播的距离；

（3） $z=0.8\ m$处的电场$\vec{E}$和磁场$\vec{H}$的瞬时表达式；

（4） $z=0.8\ m$处穿过$1\ m^2$面积的平均功率。

■ 例题5-9

有一线极化的均匀平面波在海水（$\varepsilon_r=81$，$\mu_r=1$，$\sigma=4\ S/m$）中沿$+y$方向传播，其磁场强度在$y=0$处为$\vec{H}(0,t)=\vec{e}_x 0.1\sin(10^{10}\pi t-\dfrac{\pi}{3})\ A/m$。

求（1）衰减常数、相位常数、相速、波长及透入深度；

（2）求出$\vec{H}$的振幅为$0.01\ A/m$时的位置；

（3）写出$\vec{H}(y,t)$的表示式。

5.4.色散和群速

5.4.1. 色散

■ 色散

对于沿z方向传播的均匀平面波，设电场强度的瞬时标量表达式为

$E(z,t)=E_m\cos(\omega t-\beta z)$，其相速表达式为$v=\dfrac{\omega}{\beta}$。为区分相速与后面引入的群速，通常用$v_p$表示相速。

在理想介质中，$\beta=k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$，相速$v_p=\dfrac{\omega}{\beta}=\dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$，只与媒质参数有关，与电磁波的频率无关，即没有产生色散现象，故理想介质是一种非色散媒质。

在导体媒质中，$\beta=\omega\sqrt{\dfrac{\mu\varepsilon}{2}[\sqrt{1+(\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon})^2}+1]}$，相速$v_p=\dfrac{\omega}{\beta}$，与电磁波的频率有关，发生色散现象，故导电媒质一种色散媒质。

5.4.2. 群速

■ 群速

通常的信号是由很多频率分量组成的合成波。合成波的振幅是受调制的，称为包络波。设有两个振幅为均为E_m的行波，角频率分别为$\omega+\Delta\omega$和$\omega-\Delta\omega$（$\Delta\omega\ll\omega$），在色散媒质中相应的相位常数分别为$\beta+\Delta\beta$和$\beta-\Delta\beta$，这两个行波可用下列两式表达:

$$\begin{cases}E_1=E_m e^{j(\omega+\Delta\omega)t}e^{-j(\beta+\Delta\beta)z}\\E_2=E_m e^{j(\omega-\Delta\omega)t}e^{-j(\beta-\Delta\beta)z}\end{cases}$$

合成波为$E=E_1+E_2=2E_m\cos(\Delta\omega t-\Delta\beta z)e^{j(\omega t-\beta z)}$。

将包络波上任意恒定相位点的推进速度定义为群速v_g，其表达式为$v_g = \dfrac{d\omega}{d\beta}$。

将$\omega = v_p\beta$代入群速表达式，可以得到相速与群速之间的关系式为$v_g = \dfrac{v_p}{1 - \frac{\omega}{v_p}\frac{dv_p}{d\omega}}$。

■ 由相速群速判定色散情况

$\dfrac{dv_p}{d\omega} = 0$，即相速与频率无关，此时$v_g = v_p$，即群速等于相速，称为无色散；

$\dfrac{dv_p}{d\omega} < 0$，即相速随着频率升高而减小，此时$v_g < v_p$，即群速小于相速，这种情况称为正常色散；

$\dfrac{dv_p}{d\omega} > 0$，即相速随着频率升高而增加，此时$v_g > v_p$，即群速大于相速，这种情况称为反常色散。

例题5-10

什么是电磁波的色散？简要说明电磁波在导电媒质中传播时，产生的色散类型。