Chapter 4 随机过程（复习）

- 4.1 概率及随机变量
- 4.2 随机过程：基本概念
- 4.3 随机过程的频域表示
- 4.4 高斯过程及白过程
- 4.5 带限过程及抽样
- 4.6 带通过程

学习目标

- 概率和随机随机变量
  - 列举概率的基本性质
  - 解释随机变量的定义
  - 列举概率密度函数、分布函数的性质
  - 写出高斯随机变量的概率密度函数
- 随机过程
  - 解释宽平稳随机过程和各态历经过程的定义
  - 列举自相关函数的性质、
  - 运用维纳-辛钦定理

学习目标

- 高斯过程及白过程
  - 列举高斯过程的性质
  - 解释白过程的定义
  - 写出白过程的功率谱密度和自相关函数
- 带限过程及抽样：写出带限过程的定义和抽样定理
- 带通过程
  - 写出带通过程的等效低通表示，尤其是其同相分量、正交分量和包络、相位的分布
  - 给定窄带过程的功率谱密度，求出其同相分量与正交分量的功率谱

已知随机事件E的概率用$P(E)$表示，请列举其基本性质。

- 概率测度的基本性质

1. $P(E^c) = 1 - P(E)$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$
4. $If\ E_1 \in E_2\ then\ P(E_1) \leq P(E_2)$

4.1 概率和随机变量

Conditional Probability （条件概率）：

请写出给定事件E_2时，事件E_1的条件概率定义。

$$P(E_1|E_2) = \begin{cases} \dfrac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}, & P(E_2) \neq 0 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

请写出两个事件E_1和E_2统计独立的定义

$$P(E_1|E_2) = P(E_1)$$

或：

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2)$$

4.1 概率和随机变量

1、请写出全概公式:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)P(A|E_i)$$

其中： $\cup_{i=1}^{n} E_i = \Omega$ $E_i \cap E_j = \emptyset$

2、请写出Bayes rule （贝叶斯准则）：

$$P(E_i|A) = \frac{P(E_i)P(A|E_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(E_j)P(A|E_j)}$$

$$P(\mathbf{A})P(E_{\boldsymbol{i}}|\boldsymbol{A}) = P(E_{\boldsymbol{i}})P(A|E_{\boldsymbol{i}})$$

4.1 概率和随机变量

- 若两个随机变量一个连续，用X表示，一个离散，用A表示，那么， Bayes rule 写为：

$$P(A|X) = \frac{f(X|A)P(A)}{f(X)}$$

其中$f(X)$表示X的概率密度函数， $f(X|A)$表示X的条件概率密度函数。

常用来推导误码率公式。

Bayes rule在AI、Big data+深度学习中有广泛应用。

贝叶斯分类算法

4.1 概率和随机变量

Random Variables （随机变量）.

实随机变量是样本空间Ω到实数集的映射. 若随机变量的取值范围是有限的或可列无穷的，则称它为离散随机变量。

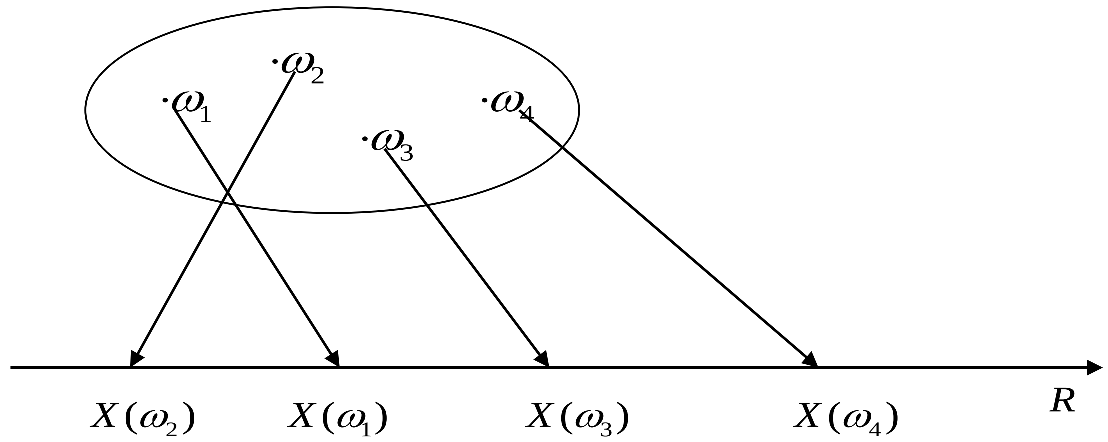


Figure 4.1.1 Random variable as a mapping from Ω to R

4.1 概率和随机变量

1. **Cumulative distribution function (CDF，累积分布函数)：随机变量 *X* 的累积分布函数定义为**

$$F_x(x) = P(\omega \in \Omega : X(\omega) \le x) = P(X \le x)$$

2. **Probability density function (PDF, 概率密度函数）：随机变量 *X* 的概率密度函数是由 $F_x(x)$ 的微分得到的**

$$f_x(x) = \frac{d}{dx} F_x(x)$$

3. **对于离散随机变量定义其概率质量函数 (PMF) 为:**$\{p_i\}$ **其中** $p_i = P(X = xi)$, **满足**

$$p_i \ge 0 \quad and \quad \sum_i p_i = 1$$

4.1 概率和随机变量

- **请列举CDF的性质：**

1 $0 \le F_X(x) \le 1$

2 $F_X(x)$**is nondecreasing**

3 $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$

$\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$

4 $\lim_{\varepsilon\to 0} F_X(x+\varepsilon) = F_X(x)$

5 $P(a < X \le b) = F_X(b) - F_X(a)$

6 $P(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-)$

4.1 概率和随机变量

阶梯状函数

连续函数

混合函数

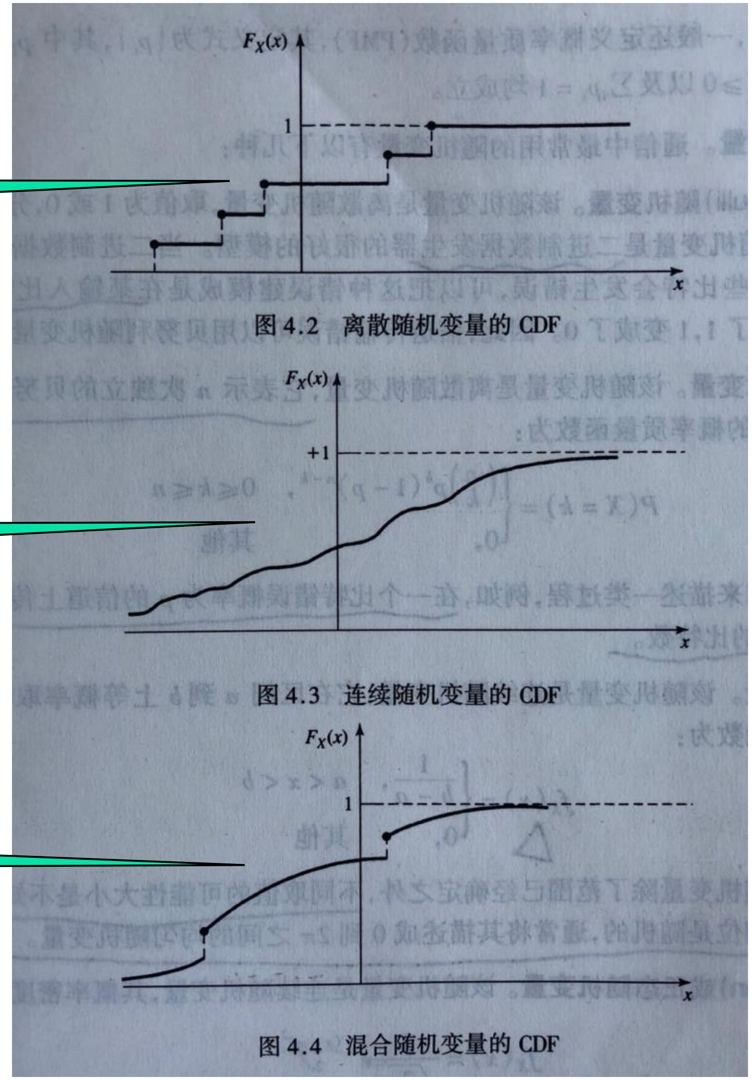


图 4.2 离散随机变量的 CDF

图 4.3 连续随机变量的 CDF

图 4.4 混合随机变量的 CDF

4.1 概率和随机变量

- **请列举 PDF的性质**

1 $f_X(x) \geq 0$

2 $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$

3 $\int_{a^+}^{b^+} f_X(x)dx = P(a < X \leq b)$

4 $P(X \in A) = \int_A f_X(x)dx$

5 $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x^+} f_X(u)du$

4.1 概率和随机变量

几种重要的随机变量

1. **Bernoulli Random Variable (贝努利随机变量，离散随机变量）：0→*P*；1→1-*P***

2. **Binomial Random Variable (二项式分布随机变量，离散随机变量):**

$$P(X=K)=\begin{cases}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}, & 0\le k\le n\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

3. **Uniform Random Variable(均匀分布随机变量，连续随机变量):**

$$f_x(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\le x<b\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

4.1 概率和随机变量

4. **Gaussian or Normal Random Variable (高斯或正态分布随机变量，连续随机变量)，记为 $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$：**

$$f_x(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\Phi(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

4.1 概率和随机变量

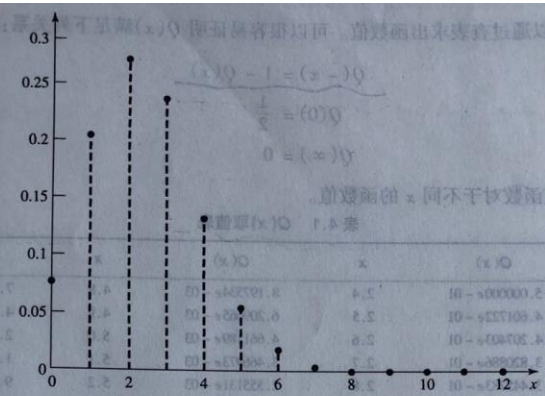


图 4.6 二项计数随机变量的 PMF

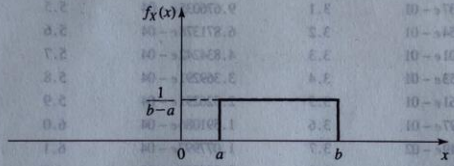


图 4.7 均匀随机变量的 PDF

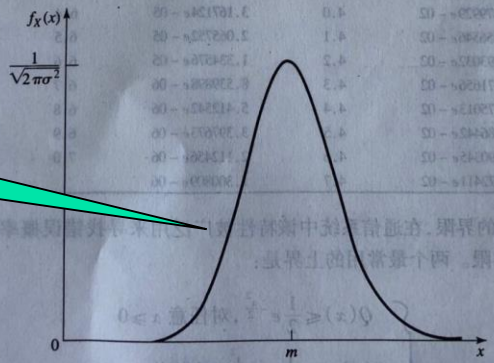


图 4.8 高斯随机变量的 PDF

m是均值，
σ^2是方差

4.1 概率和随机变量

- **There exists a very important function related to *Φ(x)* in communications.** $Q(x) = P(X > x)$**（取值见表4.1）**

$$Q(x) = 1 - \Phi(x) = \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx$$

$$Q(-x) = 1 - Q(x), \quad Q(0) = \frac{1}{2}, \quad Q(\infty) = 0$$

$Q(x)$的两个常用上界：

$$Q(x) \le \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{2}}, \text{任意} x \ge 0$$

$$Q(x) < \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} e^{-\frac{x^2}{2}}, \text{任意} x \ge 0$$

$Q(x)$的常用下界：

$$Q(x) > \frac{1}{\sqrt{2\pi}x}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) e^{-\frac{x^2}{2}}, \text{任意} x \ge 0$$

4.1 概率和随机变量

随机变量的函数:

$$Y=g(X)\Rightarrow f_Y(y)=\sum_i \frac{f_X(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

例4.1.2 假定X 是m=0 且 σ=1 的高斯随机变量，试确定随机变量 $Y=aX+b$ 的概率密度函数。

解： $g(x)=ax+b, g'(x)=a, x=\frac{y-b}{a}$

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f_Y(y)=\frac{f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)}{|a|}=\frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}}e^{-\frac{(y-b)^2}{2a^2}}$$

高斯随机变量的线性组合还是高斯随机变量

4.1 概率和随机变量

- *Statistical Averages (统计均值).*

1. **Expected value (数学期望)**

$$E(X) = m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$$

$$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

随机变量 *X* 的*n* 阶均值定义为

$$m_X^{(n)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x)dx$$

***Y=g(X)* 的均值定义为**

$$E\left(g(x)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)dx$$

$$E\left(g(x)\right) = \sum_i g(x_i) P(X = x_i)$$

4.1 概率和随机变量

2. **Variance (方差)**

$$\sigma_x^2 = E\left(X - E(X)\right)^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

- 对均值，有 1 $E\left(cX\right) = cE\left(X\right)$

  2 $E\left(c\right) = c$

  3 $E\left(c + X\right) = c + E\left(X\right)$

- 对方差，有 1 $\mathrm{VAR}\left(cX\right) = c^2\mathrm{VAR}\left(X\right)$

  2 $\mathrm{VAR}\left(c\right) = 0$

  3 $\mathrm{VAR}\left(c + X\right) = \mathrm{VAR}\left(X\right)$

4.1 概率和随机变量

Characteristic Functions (特征函数).

$$\Psi_X(v)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)e^{jvx}dx$$

随机变量 X 的n 阶矩为

$$m_X^{(n)}=\frac{1}{j^n}\frac{d^n}{dv^n}\psi_X(v)\Big|_{v=0}$$

均值为m 方差为 σ^2 的高斯随机变量的特征函数为

$$\psi_X(v)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\right]e^{jvx}dx=e^{jvm-\frac{v^2\sigma^2}{2}}$$

4.1 概率和随机变量

联合随机变量

1. **联合 CDF:** $F_{X,Y}(x,y)=P(X\le x,Y\le y)$

2. **联合PDF:** $f_{X,Y}(x,y)=\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}F_{X,Y}(x,y)$

联合和边界 CDFs 和 PDFs的性质

1 $F_X(x)=F_{X,Y}(x,\infty)$ 2 $F_Y(y)=F_{X,Y}(\infty,y)$

3 $F_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy$ 4 $F_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx$

5 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy=1$

6 $P((X,Y)\in A)=\int\int_{(x,y)\in A} f_{X,Y}(x,y)dxdy$

7 $F_{X,Y}(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)dudv$

4.1 概率和随机变量

3. **条件 PDF**

$$f_{Y|X}\left(y|x\right)=\begin{cases}\dfrac{f_{X,Y}\left(x,y\right)}{f_X\left(x\right)}, & f_X\left(x\right)\neq 0\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

For statistically independent random variables

(统计独立随机变量满足)

$$f_{X,Y}\left(x,y\right)=f_X\left(x\right)f_Y\left(y\right)$$

***g(X,Y)*的均值为：**

$$E\left(g\left(X,Y\right)\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g\left(x,y\right)f_{X,Y}\left(x,y\right)dxdy$$

4.1 概率和随机变量

4. X 和 Y 的相关矩定义为

$$E(XY) = \iint XY f_{XY}(x, y)dxdy$$

5. X 和 Y 协方差定义为

$$COV(X, Y) = E[(X - m_X)(Y - m_Y)] = E(XY) - m_X m_Y$$

6. **Correlation coefficients (相关系数)**

$$\rho_{X,Y} = \frac{COV(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

$$|\rho_{X,Y}| \le 1$$

若X 和Y 统计独立： $COV(X, Y) = \rho_{X,Y} = 0$

4.1 概率和随机变量

联合随机变量的数学期望和协方差的性质：

$$1.\ E\left(\sum_i c_i X_i\right) = c_i \sum_i E(X_i)$$

$$2.\ VAR\left(\sum_i c_i X_i\right) = \sum_i c_i^2 VAR(X_i) + \sum_i \sum_{j\neq i} c_i c_j COV\left(X_i X_j\right)$$

4.1 概率和随机变量

- **联合随机变量的复合函数: 如果定义随机变量*X* 和 *Y* 的两个函数**

$$\begin{cases} Z = g(X,Y) \\ W = h(X,Y) \end{cases}$$

Then $$f_{Z,W}(z,w) = \sum_i \frac{f(x_i, y_i)}{\left|\det J(x_i, y_i)\right|},$$

$$where \qquad J(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}$$

4.1 概率和随机变量

- 联合高斯随机变量.

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}$$
$$\times\left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}-\frac{2\rho(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right]\}$$

***n* 阶联合高斯随机变量**

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\det(\mathbf{C})}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m})\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})^{\mathrm{t}}\right\}$$

其中 m 均值矩阵 C 是协方差矩阵

$$C_{i,j}=COV(X_i,X_j)$$

主观题 10分

设置

由

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\times\left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}-\frac{2\rho(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right]\}$$

写出二维联合高斯随机变量的协方差矩阵。

作答

课堂练习

由

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\times\left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}-\frac{2\rho(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right]\}$$

写出二维联合高斯随机变量的协方差矩阵。

解： $C_{i,j}=COV\left(X_i,X_j\right)$

$$\Rightarrow \boldsymbol{C_{1,1}=COV(X,X)=E[(X-m_X)(X-m_X)]=\sigma_X^2}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{C_{1,2}=COV(X,Y)=COV(Y,X)=E[(X-m_X)(Y-m_Y)]=\rho\sigma_X\sigma_Y}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{C_{2,2}=COV(Y,Y)=E[(Y-m_Y)(Y-m_Y)]=\sigma_Y^2}$$

故

$$\boldsymbol{C=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{bmatrix}}$$

4.1 概率和随机变量

- 列举联合高斯随机变量的性质（pp126）：

1. 如果n个随机变量是联合高斯的，那么它们的任意子集也是联合高斯的。
2. 联合高斯随机变量有其均值矢量m和协方差矩阵C完全表征。即二阶矩特性可以完全描述随机变量。
3. 若联合高斯随机变量的子集是建立在原随机变量的任意子集的条件下，那么该条件随机变量也是联合高斯的。

4.1 概率和随机变量

4. $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 的线性组合的任意子集是联合高斯的. $\boldsymbol{X_i}$ 的任意线性组合是高斯随机变量.

5. 对于联合高斯随机变量，不相关和统计独立是等价的

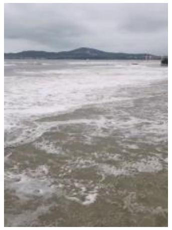
4.1 小结

- 列举概率的基本性质
- 解释随机变量的定义
- 列举概率密度函数、分布函数的性质
- 写出高斯随机变量的概率密度函数

4.2 学习目标

- 随机过程
  - 解释随机过程的基本概念
  - 定义并推导随机过程的统计特性
  - 解释宽平稳随机过程和各态历经过程的定义
  - 列举自相关函数的性质

青岛校区的风



- 青岛校区的风很大，有如下几个问题需要大家思考？

1. 每天早上6：00在校区东门测风速---- 是不是随机试验？
2. 每天测得的风速记下来，能否用随机变量表示？
3. 若每天每时每刻都测风速，每天的风速是不是可以用自变量为时间的函数表示？
4. 所有天的风速的时间函数构成了什么？

随机过程—随机信号

4.2.1 随机信号的定义与基本特性

4.2.1.1 随机信号的概念与分类

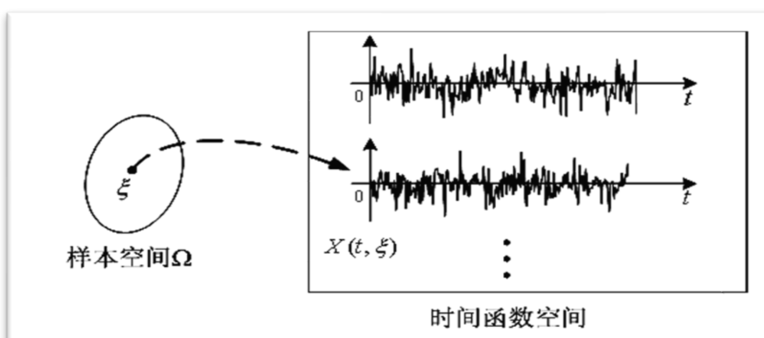
自然界发生的许多现象变量既是随机的，又是随时间变化的函数。如：气象现象中气温、气压和风速,电阻产生的热噪声等等,

这种随时间变化的随机变量的总体为随机过程。随机过程是概率论的继续和发展，研究对象是随时间演变的随机现象。

1. 定义

设（Ω，$\mathbb{F}$，P）一个是概率空间，T是一个实的参数集合，定义在Ω和T上的二元函数$X(t,\xi)$，如果对于任意固定的$t\in T$，$X(t,\xi)$是概率空间（Ω，$\mathbb{F}$，P）上的随机变量，则称$\{X(t,\xi),t\in T,\xi\in\Omega\}$ 为该概率空间上的随机过程（随机信号），简记为$\{X(t),t\in T\}$。

随机过程既是t的函数,又是随机试验结果ξ的函数。

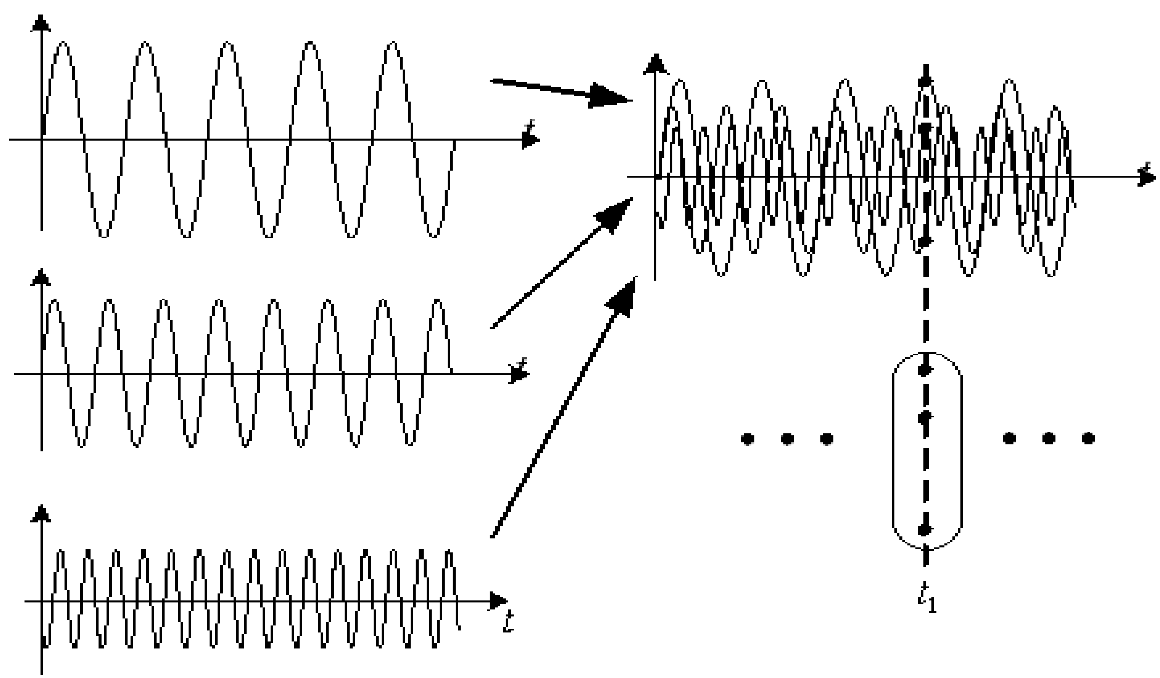


2、解释

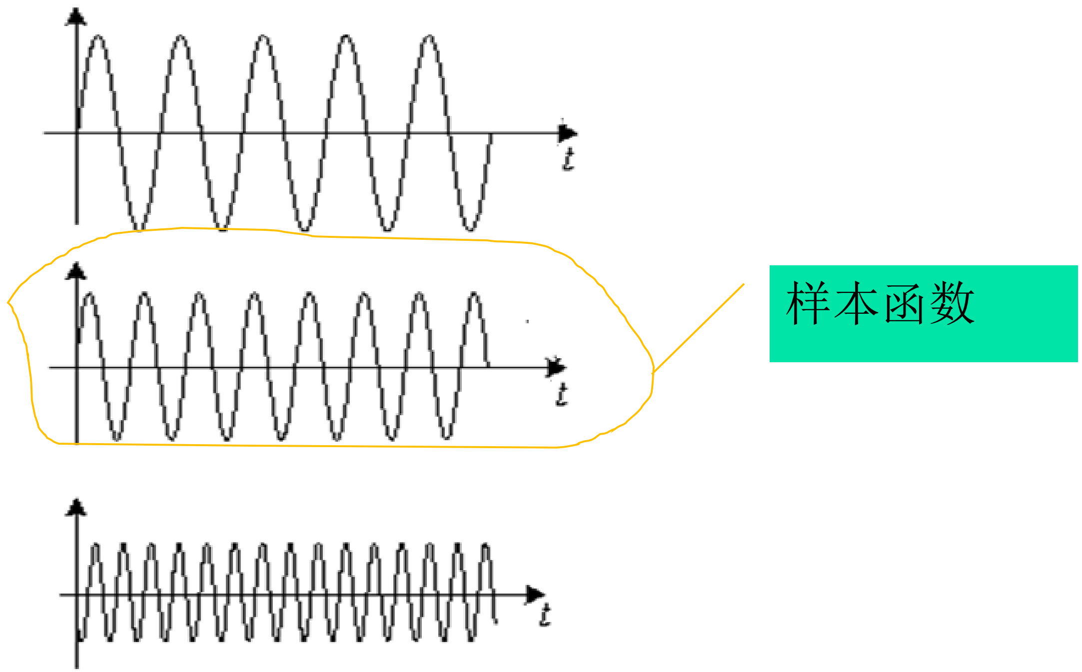
根据t, ξ的取值情况,随机过程（信号）有四种含义:

（1）t, ξ可变, 时间的函数族 → 随机过程

$X(t,\xi_1), X(t,\xi_2), \ldots, X(t,\xi_n)$

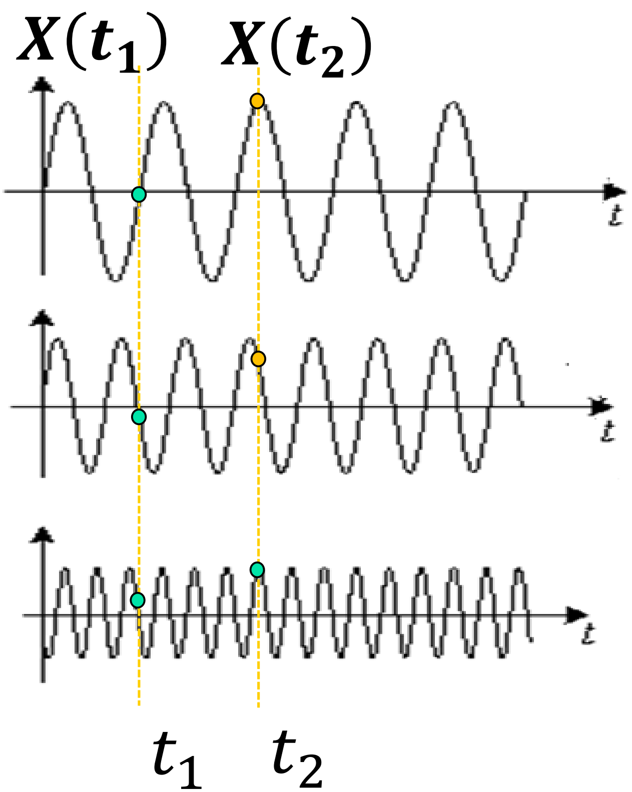


- （2） t可变, ξ给定,对应时间的函数→ 样本函数,随机过程的一个实现



（3）ξ可变，t给定，对应一随机变量$X(\xi,t)$，即随机过程每一时刻的值都是一随机变量$X(t)$

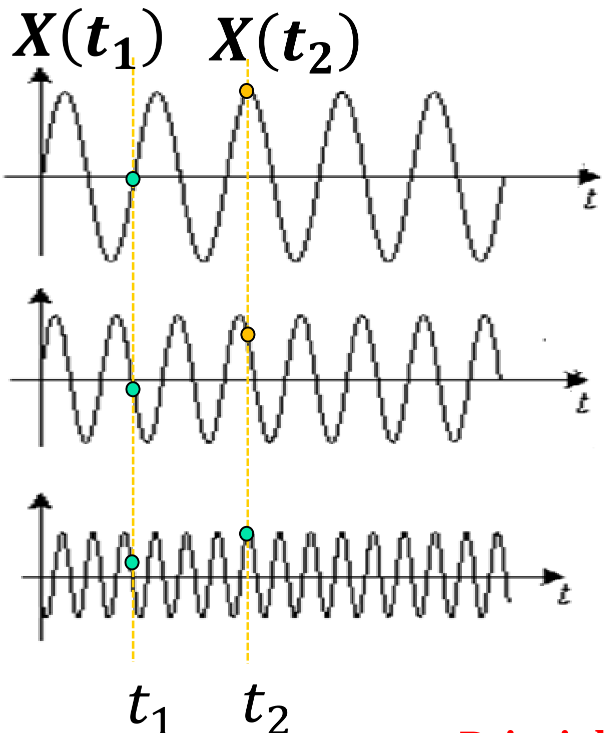
下图中，$X(t_1),X(t_2)$为随机变量。



（4）ξ, t给定,对应一确定值（状态）

所有可能取值构成的集合称为随机过程的状态空间，记为S。

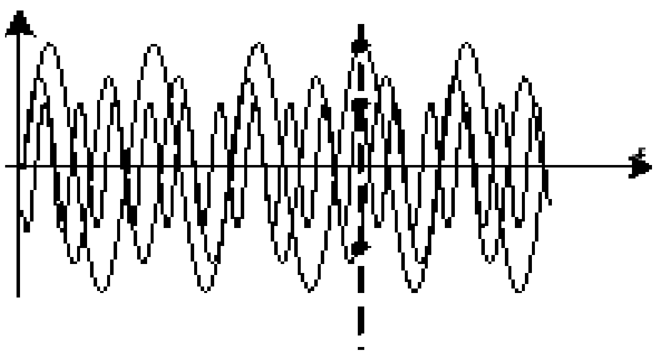
注：Ω为样本空间，与状态空间S不同。



- 可从两种意义上理解随机过程：

 1）样本空间，所有样本函数 $X(t,\xi)$ 的集合；

 2）时间(参数空间)，随着 t 的延续对应的所有随机变量的全体。



随机过程的分类：

t连续、ξ连续----连续型随机过程

t连续、ξ离散----离散型随机过程

t离散、ξ连续----连续型随机序列

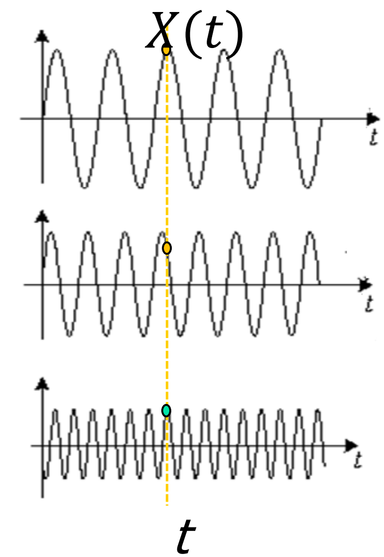
t离散、ξ离散----离散型随机序列

状态$X(t_i, \xi_j)$	
连续	连续型
离散	离散型
时间t	
连续	随机过程
离散	随机序列

4.2.1.2 随机信号的基本概率特性

每一时刻的值为随机变量，可以用统计特性进行描述。

1、一维分布和一维特征函数



$t \in T$固定，$X(t)$为一随机变量。

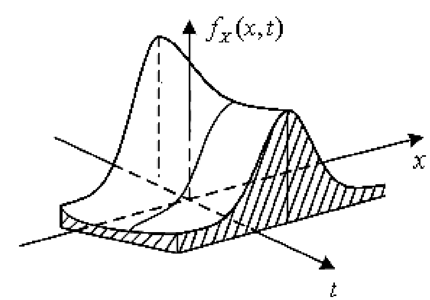
- 其概率分布函数或CDF为

$$F_X(x\,;t) = P\{X(t) \le x\}$$

- PDF为

$$f_X(x\,;t) = \frac{\partial F_X(x\,;t)}{\partial x}$$

描述单个时刻孤立随机变量的统计特性,因此称为一维分布或概率密度函数



例：贝努利过程，某时刻随机变量是0—1分布，

$$f_X(x;t) = \frac{1}{2}\delta(x) + \frac{1}{2}\delta(x-1)$$

- 特征函数（CF）为

$$\phi_X(v;t) = E\left[e^{jvX(t)}\right]$$

2. 二维分布和二维特征函数

$t_1 \in T, t_2 \in T, X(t_1), X(t_2)$为随机变量，

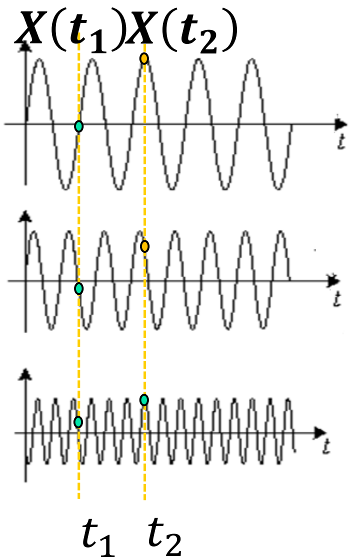
故二维联合CDF为

$$F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = P\{X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2\}$$

PDF为

$$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_X(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

描述两个时刻随机变量的联合统计特性。



- **CF为**

$$\phi_X(v_1, v_2; t_1, t_2) = E\left[e^{jv_1 X(t_1) + jv_2 X(t_2)}\right]$$

二维随机变量独立：如果$X(t_1), X(t_2)$统计独立，则

$$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_X(x_1; t_1) f_X(x_2; t_2)$$

例：

贝努利过程，两时刻$t_1 \in T, t_2 \in T$,的取值为二维随机变量，样本空间为$p_i = P\{\xi_i\} = \frac{1}{4}$

不同时刻变量为统计独立的，故其二维概率分布CDF为

$$P\{X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2\}$$
$$= P\{X(t_1) = x_1\}P\{X(t_2) = x_2\} = \frac{1}{4} \qquad x_1, x_2 \in (0,1)$$

二维PDF为

$$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2)$$
$$= \left[\frac{1}{2}\delta(x_1) + \frac{1}{2}\delta(x_1 - 1)\right]\left[\frac{1}{2}\delta(x_2) + \frac{1}{2}\delta(x_2 - 1)\right]$$

例: $X(t) = A + Bt, t \geq 0, A$、$B$为统计独立的标准正态分布的随机变量，试求随过程$\{X(t), t \geq 0\}$的一维、二维概率密度函数。

解:

一维： 确定的$t \geq 0$，$X(t)$为正态随机变量

$$E[X(t)] = E[A] + E[B]t = 0$$

$$Var[X(t)] = Var[A] + Var[B]t^2 = 1 + t^2$$

故一维随机变量的分布可以表示为$X(t) \sim N(0,1 + t^2)$。

二维： $\forall\ t_1, t_2$，$X(t_1) = A + Bt_1, X(t_2) = A + Bt_2$

$E[X(t_1)] = E[X(t_2)] = 0$，$Var[X(t_1)] = 1 + {t_1}^2$，$Var[X(t_2)] = 1 + {t_2}^2$

而$Cov(t_1, t_2) = E\{[X(t_1 - m_1)][X(t_2 - m_2)]\} = 1 + t_1 t_2$

所以$\boldsymbol{X} = [X(t_1)\ \ X(t_2)]^T$的均值矢量为$\boldsymbol{\mu} = 0$，协方差矩阵为

$$C = \begin{bmatrix} 1 + t_1^2 & 1 + t_1 t_2 \\ 1 + t_1 t_2 & 1 + t_2^2 \end{bmatrix},$$

故二维随机变量可以表示为

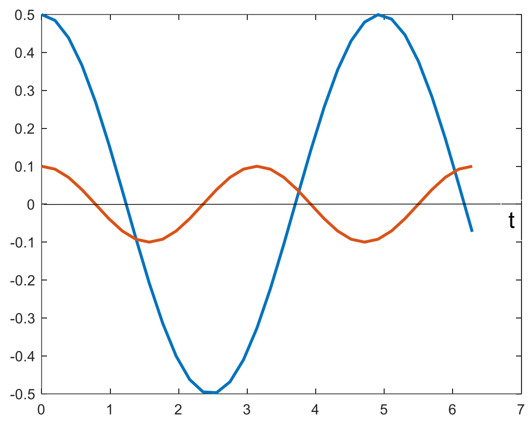
$$[X(t_1)\ \ X(t_2)] \sim N(0, C)\ ,\ t_1 \geq 0, t_2 \geq 0$$

正弦波随机过程$\{X(t), \quad -\infty < t < \infty\}$，

$X(t) = V\cos\omega t$，其中ω为常数，V是（0，1）内均匀分布的随机变量。（**1**）画出 $X(t)$ 的两条样本函数；

（**2**）求$t = 0, t = \frac{\pi}{4\omega}, t = \frac{\pi}{2\omega}, t = \frac{\pi}{\omega}$时的概率分布函数和概率密度函数。

- 解：
  - （1）



（2）t=0，X(t)=V, 此时

$$F_X(x)=\begin{cases}\mathbf{0},\boldsymbol{x}<\mathbf{0}\\ \boldsymbol{x},\mathbf{0}\le\boldsymbol{x}\le\mathbf{1},\\ \mathbf{1},\boldsymbol{x}>\mathbf{1}\end{cases}\quad \boldsymbol{f}_X(x)=\mathbf{1},\mathbf{0}\le\boldsymbol{x}<\mathbf{1}$$

同理，可求出$t=\frac{\pi}{4\omega},t=\frac{\pi}{2\omega},t=\frac{\pi}{\omega}$的分布函数和概率密度函数。

4.2.1.3 随机信号的基本数字特征

1．均值函数或数学期望 (利用随机变量的数学期望的定义)

设$\{X(t), t \in T\}$是一随机过程，$\forall t \in T, X(t)$是一个随机变量，如果$m_X(t) = E[X(t)]$存在，则称为随机过程的均值函数。描述随机过程的所有样本函数在*t*时刻的取值的统计平均。

$$m_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot dF_X(t; x)$$

连续随机过程

$$m_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(t; x) dx$$

离散随机过程

$$m_X(t) = E[X(t)] = \sum_i x(t; \xi_i) \cdot P\{\xi_i\}$$

通常称为统计平均, 集合平均 (对样本函数的集合求平均)。

2．均方函数和方差函数

$$\Phi_X(t) = E[X^2(t)],$$

$$\sigma_X^2(t) = Var[X(t)] = E\{[X(t) - m_X(t)]^2\}$$

$\sigma_X^2(t)$描述随机过程*t*时刻取值偏离均值的程度。

关系：　$E[X^2(t)] = \sigma^2{}_X(t) + m^2{}_X(t)$

均方值：　消耗在单位电阻上的瞬时功率的统计平均值

均值平方：　消耗在单位电阻上的瞬时直流功率的统计平均值

方差：　消耗在单位电阻上的瞬时交流功率的统计平均值

3、自相关函数和协方差函数 （二阶PDF）

描述两不同状态之间的联系

$$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]$$

$$C_X(t_1,t_2)$$

$$=E\{[X(t_1)-m_X(t_1)][X(t_2)-m_X(t_2)]\}$$

$$C_X(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)-m_X(t_1)m_X(t_2)$$

二者只相差一常数，含义一致。

例：时间连续、状态离散的随机过程，四条样本曲线 $p_i = P\{\xi_i\} = \frac{1}{4}$。

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$X(t_1)$	1	2	6	3
$X(t_2)$	5	4	2	1

求 $E[X(t_1)]$、$E[X(t_2)]$、$R_X(t_1, t_2)$。

解：$E[X(t_1)] = \sum_{i=1}^{4} x(t_1, \xi_i)\, p_i = 3$

$E[X(t_2)] = \sum_{i=1}^{4} x(t_2\,; \xi_i)\, p_i = 3$

$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$

$= \sum_{i=1}^{4} x(t_1\,; \xi_i) \cdot x(t_2\,; \xi_i) \cdot P\{\xi_i\} = 7$

主观题 10分

设置

X,Y相互独立，期望为0，方差为1的随机变量，

$$Z(t) = X + Yt,$$

求$Z(t)$的数字特征。

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

例：X,Y相互独立，期望为0，方差为1的随机变量，又$Z(t)=X+Yt$,求: $Z(t)$的数字特征。

解：

$$E[Z(t)]=E[X+Yt]=E[X]+tE[Y]=0$$

$$E[Z(s)Z(t)]=E[(X+Ys)(X+Yt)]$$

$$=E\left[X^2\right]+(s+t)E[XY]+stE\left[Y^2\right]=1+st$$

例：求随机过程 $X(t)=A\cos(2\pi f_0 t+\Theta)$ 的自相关函数。其中 Θ 是在 $[0,2\pi)$均匀分布的随机变量。

$$R_X(t_1,t_2)=E[A\cos(2\pi f_0 t_1+\Theta)A\cos(2\pi f_0 t_2+\Theta)]$$

$$=A^2E\left[\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0(t_1-t_2))+\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0(t_1+t_2)+2\Theta)\right]$$

$$=\frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0(t_1-t_2))$$

其中

$$E\left[\cos(2\pi f_0(t_1+t_2)+2\Theta)\right]=\int_0^{2\pi}\cos(2\pi f_0(t_1+t_2)+2\Theta)\frac{1}{2\pi}d\Theta=0$$

4. 相关系数

$$\rho_X(t_1,t_2)=\frac{Cov(X(t_1),X(t_2))}{\sigma_X(t_1)\sigma_X(t_2)}, \quad |\rho_X(t_1,t_2)|\le 1$$

4.2 随机过程:基本概念

- 随机过程可以看作是有两个自变量的函数 $X(t,\omega)$. 可以从两个角度描述随机过程:

1. 随机过程或随机信号可以看成对应不同随机实验的输出的时间函数或信号（样本函数）的集合.
2. 可以把随机信号在时刻$t_1, t_2, \ldots.,$或在所有$t \in R$上的值看成随机变量的集合$\{X(t_1), X(t_2), \ldots\}$。

在任意一个给定时刻，随机过程定义一个随机变量；在任意给定的时间集，随机过程定义一个随机矢量。

4.2.2 随机过程的描述

- 随机过程的描述:

两种方法

1. 解析描述

$$X(t)=f(t;\Theta), where \quad \Theta=(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n)$$

是一个给定联合PDF的随机矢量.

2. 统计描述:某个指标集(如实数集R)指向的随机变量的集合.

4.2.2 随机过程的描述

- **Definition 4.2.1**. 对应任意整数n 以及任意的 $(t_1, t_2, \dots t_n) \in R^n$, 如果给出($X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$) 的联合PDF, 则随机过程$X(t)$ 的完全统计描述即为已知的.

如果已知随机过程的完全统计描述,那么对于任意的n , ($X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$) 的联合概率密度函数由

$$f_{X(t_1),X(t_2),\dots,X(t_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

给出。

4.2.2 随机过程的描述

- **Definition 4.2.2**. 对于所有的 $n \le M$ 和所有的 $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in R^n$，给定 $(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$ 的联合 **PDF**, 则称随机过程$X(t)$ 由其***M***阶统计来描述。

Example 4.2.1 随机过程 $X(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \Theta)$ 其中$\boldsymbol{\Theta}$是在区间[0,2 π)上均匀分布的随机变量,这种情况下存在对随机变量的解析描述,因此可以得到完全统计描述.

4.2.2 随机过程的描述

- *Example 4.2.2*

随机过程 $X(t)$, $t>0$, 由下列性质定义:对于任意的 ***n*** 和任意的

$$(t_1,t_2,\ldots,t_n)\in R^n,\{X(t_i)\}^n{}_{i=1}$$

的联合概率密度函数是一个联合高斯随机矢量,该矢量的均值为**0**,协方差矩阵由下列表达式描述:

$$C_{i,j}=COV\big(X(t_i),X(t_j)\big)=\sigma^2\min(t_i,t_j)$$

这是关于随机过程 ***X(t)*** 的完全统计描述.

4.2.4 平稳过程

- **Definition 4.2.5 严平稳随机过程** 对于所有的n、所有的$(t_1,t_2,\ldots,t_n)$, 和所有的Δ，满足

$$f_{X(t_1),X(t_2),\ldots,X(t_n)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f_{X(t_1+\Delta),X(t_2+\Delta),\ldots,X(t_n+\Delta)}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

一个随机过程对所有的 n≤M 满足上述条件时，称该过程是M阶平稳过程。

Note1. 若 n=1

$$f_{X(t)}(x)=f_{X(t+\Delta)}(x)$$

令Δ=-t

$$f_{X(t)}(x)=f_{X(t+(-t))}(x)=f_{X(0)}(x)$$

因此 $f_X(x)$ 与 t 无关. 故 $m_X(t)$ 独立于 t。

4.2.4 平稳过程

Note2. 若 n=2,

$$f_{X(t_1),X(t_2)}(x_1,x_2)=f_{X(t_1+\Delta),X(t_2+\Delta)}(x_1,x_2)$$

令 Δ=-t_1

$$f_{X(t_1),X(t_2)}(x_1,x_2)=f_{X(0),X(t_2-t_1)}(x_1,x_2)=f_{X(t_2-t_1)}(x_1,x_2)$$

$f_{X(t_1),X(t_2)}(x_1,x_2)$ 只与时间间隔 $\tau=t_1-t_2$ 有关。

故 $R_X(t_1, t_2)$ 只依赖与时间间隔$\tau=t_1-t_2$而不是时间 t_1 和 t_2.

4.2.4 平稳过程

Example. 令 $X(t)$ 表示如下随机过程：对所有的 n 和所有的 $(t_1, t_2,\ldots, t_n)$, 矢量 $(X(t_1), X(t_2),\ldots, X(t_n))$ 是 n 维高斯随机变量，其均值为0，协方差矩阵为 I_n (n维单位阵). 很明显 $X(t)$ 是严平稳随机过程.

$$f_{X(t_1),X(t_2),\ldots,X(t_n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} exp\left(-\frac{\vec{x}^2}{2}\right)$$

其中 $\vec{x} = [x_1 \quad \cdots \quad x_n]^T$

4.2.4 平稳过程

Definition 4.2.6. 随机过程 $X(t)$ 称为是宽平稳的(WSS)，如果$X(t)$满足条件

1. $m_x(t)=E[X(t)]=m_x$ 与t 无关.
2. $R_X(t_1, t_2) = R_X(\tau)$ 仅依赖与时间间隔 $\tau=t_1-t_2$ 而不单独依赖与 t_1 和 t_2.

4.2.4 平稳过程

- **Definition 4.2.7.** 随机过程 $X(t)$ 的均值 $m_x(t)$ 和自相关函数 $R_X(t+\tau, t)$ 满足下列条件，则称其为**周期平稳随机过程**：均值和自相关函数都是时间 t 的周期为 T_0 的周期函数即对所有的 t 和 τ，有

$$m_X(t+T_0) = m_X(t)$$

和

$$R_X(t+\tau+T_0, t+T_0) = R_X(t+\tau, t)$$

4.2.4 平稳过程

- *Example 4.2.4* 令 $Y(t)=X(t)\cos(2\pi f_0 t)$ 其中 ***X(t)*** 是均值为 **m**, 自相关函数为 $R_X(\tau)$的平稳随机过程。则

$$m_Y(t)=E[X(t)\cos(2\pi f_0 t)]=\boldsymbol{m}\cos(2\pi f_0 t)$$

$$R_Y(t+\tau,t)=E[X(t+\tau)\cos(2\pi f_0(t+\tau))X(t)\cos(2\pi f_0 t)]$$

$$=R_X(\tau)\left[\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0\tau)+\frac{1}{2}\cos(4\pi f_0 t+2\pi f_0\tau)\right]$$

显然 $m_Y(t)$ 和$R_Y(t+\tau,t)$ 都是周期为 $T_0=1/f_0$的周期函数。因此该过程是周期平稳的。

4.2.4 平稳过程

平稳随机过程的自相关函数的性质：

Theorem 4.2.1. $R_X(\tau)$是平稳随即过程$X(t)$的自相关函数, 其具有如下性质:

1. $R_X(\tau)$ 是偶函数，即 $R_X(-\tau)= R_X(\tau)$.
2. $R_X(\tau)$ 的最大绝对值出现在 $\tau=0$处，即：

$$\left|R_X(\tau)\right| \le R_X(0)$$

3. $R_X(0)=E\left[X(t)^2\right], \quad R_X(\infty)=E\left[X(t)\right]^2, \quad \sigma^2=R_X(0)-R_X(\infty)$
4. 若对某些 T_0 有 $R_X(T_0)= R_X(0)$, 则对任意的整数 k, 有 $R_X(kT_0)= R_X(0)$.

4.2.4 平稳过程

Ergodic Processes(各态历经过程或遍历过程).

统计均值（Statistical averages) vs.时间均值（time averages)

对严格平稳的随机过程 *X(t)* 和任意函数 g(*x*), *g(X)* 的统计均值定义为

$$E[g(X(t_0))] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X(t_0)}(x)dx$$

g(*x*)的时间均值定义为

$$\langle g(x) \rangle_i = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g\left(x(t;\omega_i)\right)dt$$

4.2.4 平稳过程

Definition 4.2.8. 平稳随机过程 X(*t*) 对任意函数g(*x*) 和任意 $\omega_i \in \Omega$ 满足下式，则被称为是遍历过程（或各态历经过程）。

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g\left(x\left(t;\omega_i\right)\right)dt = E\left[g\left(X\left(t\right)\right)\right]$$

Example 4.2.5. **证明随机过程 $X(t)=A\cos(2\pi f_0 t+\Theta)$是遍历过程。 其中 Θ 是在 $[0,2\pi)$均匀分布的随机变量.**

4.2.4 平稳过程

$$\langle g(X(t;\theta))\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g\left(A\cos(2\pi f_0 t+\theta)\right)dt$$

$$= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2NT_0}\int_{-NT_0}^{NT_0} g\left(A\cos(2\pi f_0 t+\theta)\right)dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} g\left(A\cos(2\pi f_0 t+\theta)\right)dt$$

$$\overset{2\pi f_0 t+\theta=u}{=} \frac{1}{T_0}\int_\theta^{2\pi+\theta} g\left(A\cos u\right)\frac{du}{2\pi f_0}$$

The process is ergodic.

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g\left(A\cos u\right)du$$

$$E\left[X(t)\right] = \int_0^{2\pi} g\left(A\cos(2\pi f_0 t+\theta)\right)\frac{1}{2\pi}d\theta$$

$$\overset{2\pi f_0 t+\theta=u}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi f_0 t}^{2\pi f_0 t+2\pi} g\left(A\cos u\right)du = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g\left(A\cos u\right)du$$

4.2.4 平稳过程

- 遍历过程的另一种定义方式

宽平稳随机过程 *X(t)*, 若满足下式，则称为是遍历过程。

$$< X(t) >= E[X(t)]$$

$$< X(t+\tau)X(t) \geq E[X(t+\tau)X(t)] = R_X(\tau)$$

其中：

$$\langle \boldsymbol{X(t)} \rangle = \lim_{\boldsymbol{T}\to\infty} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{T}} \int_{-\boldsymbol{T}/2}^{\boldsymbol{T}/2} \boldsymbol{X(t)dt}$$

$$\langle \boldsymbol{X(t+\tau)X(t)} \rangle = \lim_{\boldsymbol{T}\to\infty} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{T}} \int_{-\boldsymbol{T}/2}^{\boldsymbol{T}/2} \boldsymbol{X(t+\tau)X(t)dt}$$

4.2.4 平稳过程

- *Power and Energy*—功率和能量

- **Definition 4.2.9**. 随机过程 $X(t)$ 的功率 P_X 和能量 E_X 定义为

$$P_X = E[\mathcal{P}_X] \ and \ E_x = E[\mathcal{E}_X]$$

其中：

$$\mathcal{P}_X = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X^2(t)dt$$

$$\mathcal{E}_X = \int_{-\infty}^{\infty} X^2(t)dt$$

4.2.4 平稳过程

- 对于平稳随机过程有

$$P_X = R_X(0) \qquad E_X = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(0)dt$$

所以平稳随机过程是功率型信号.

联合随机过程.

- **Definition 4.2.10.** 两个随机过程 X(t) 和 Y(t) 如果对于所有的 t_1, t_2, 随机变量 $X(t_1)$ 和 $Y(t_2)$ 相互独立，则称这两个随机过程相互独立. 同样,对于所有的 t_1, t_2, 随机变量 $X(t_1)$ 和 $Y(t_2)$ 互不相关，这称 X(t) 和 Y(t) 互不相关

4.2.4 平稳过程

Definition 4.2.11. 随机过程 *X(t)* 和 *Y(t)* 的互相关函数定义为

$$R_{XY}(t_1,t_2)=E[X(t_1)Y(t_2)]=R_{YX}(t_2,t_1)$$

Definition 4.2.12. 如果两个随机过程 **X(t)和Y(t)** 分别是平稳随机过程，并且互相关函数$R_{XY}(t_1,t_2)$ 仅与$\tau=t_1-t_2$有关，那么称这两个随机过程联合宽平稳，或简称为联合平稳。

4.2.3 平稳过程

- *Example 4.2.6*

两个随机过程 *X(t)* 和*Y(t)* 联合平稳，考察过程 *Z(t)=X(t)+Y(t)*的自相关函数

Sulotion:

$$R_Z(t+\tau,t)=E[Z(t+\tau)Z(t)]$$

$$=E[(X(t+\tau)+Y(t+\tau))(X(t)+Y(t))]$$

$$=E[X(t+\tau)X(t)+X(t+\tau)Y(t)+Y(t+\tau)X(t)+Y(t+\tau)Y(t)]$$

$$=R_X(\tau)+R_{XY}(\tau)+R_{XY}(-\tau)+R_Y(\tau)$$

4.2.5 随机过程与线性系统

$$X(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow Y(t)$$

Figure 4.2.2 随机过程通过LTI系统

Theorem 4.2.2. 如果平稳过程 X(t) 的均值为 m_X 自相关函数为 $R_X(\tau)$，通过脉冲响应为h(t) 的线性时不变系统 那么输入、输出过程 X(t) 和 Y(t) 是联合平稳的，且有

$$m_Y = m_X \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)dt$$

$$R_{XY}(\tau) = R_X(\tau) * h(-\tau) \qquad R_Y(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$$

4.2.4 Random Process and Linear Systems

- **Proof**

$$Y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} X(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$m_Y(t)=E\left[\int_{-\infty}^{\infty} X(\tau)h(t-\tau)d\tau\right]=\int_{-\infty}^{\infty} E[X(\tau)]h(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} m_X h(t-\tau)d\tau \overset{u=t-\tau}{=} m_X\int_{-\infty}^{\infty} h(u)du=m_X\int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt=m_Y$$

$$R_{XY}(t_1,t_2)=E[X(t_1)Y(t_2)]=E\left[X(t_1)\int_{-\infty}^{\infty} X(s)h(t_2-s)ds\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} E[X(t_1)X(s)]h(t_2-s)ds=\int_{-\infty}^{\infty} R_X(t_1-s)h(t_2-s)ds$$

$$\overset{u=s-t_2}{=}\int_{-\infty}^{\infty} R_X(t_1-t_2-u)h(-u)du=\int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau-u)h(-u)du$$

$$=R_x(\tau)*h(-\tau)$$

同理可证 $R_Y(\tau)=R_X(\tau)*h(\tau)*h(-\tau)$

4.2.5 Random Process and Linear Systems

- *Example 4.2.6.*

平稳随机过程通过下式表示的线性时不变系统

$$h(t)=\frac{1}{\pi t}$$

求输出过程的均值和自相关函数以及输入输出的互相关函数。

Solution

$$m_Y=m_X\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi t}dt=0$$

$$R_{XY}(\tau)=R_X(\tau)*\frac{1}{-\pi t}=-\hat{R}_X(\tau)$$

$$R_Y(\tau)=R_{XY}(\tau)*\frac{1}{\pi t}=-\hat{\hat{R}}_X(\tau)=R_X(\tau)$$

Summarizing

- **Random Processes**

思考题:

1、什么是随机过程？它有什么特点？

2、什么是随机过程的数学期望、自相关函数和互相关函数？它反映了随机过程的什么性质？

3、什么是平稳随机过程？什么是各态历经随机过程？

4、平稳随机过程的自相关函数有什么特点？

5、平稳随机过程通过LTI系统时，其输入输出具有什么关系？

投票 最多可选1项

设置

随机信号$X(t)=A\cos(2\pi f t+\Theta)$（A是常数，$\Theta$在$[0,2\pi]$之间均匀分布）是平稳随机信号吗？是各态历经的信号吗？

A 是、是

B 否、否

C 是、否

D 否、否

提交

4.3 学习目标

- 写出随机过程功率谱的定义式
- 证明并熟练应用维纳-辛钦定理
- 能够从频域分析随机信号经过线性系统，考察输入-输出信号功率谱之间的关系；

4. 3　频域中的随机过程

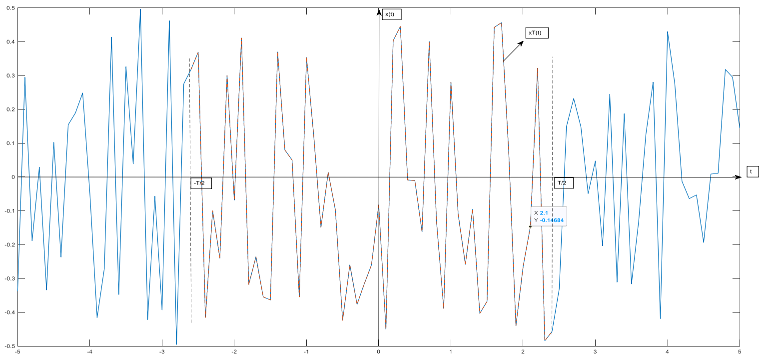
4.3.1 随机过程的功率谱

Definition. 随机过程 $X(t)$ 的功率谱密度定义为：

$$S_X(f) = E\left[\lim_{T\to\infty}\frac{|X_T(f)|^2}{T}\right] = \lim_{T\to\infty}\frac{E\left[|X_T(f)|^2\right]}{T}$$

其中$X_{T_i}(f) = \mathcal{F}[x_T(t;\omega_i)]$, 记为$X_T(f)$,

$$x_T(t;\omega_i) = \begin{cases} x(t;\omega_i), |t| < \dfrac{T}{2} \\ 0, otherwise \end{cases}$$



4.3.1 随机过程的功率谱

- **Example 4.3.1**. 确定下面随机过程的功率谱密度

$$X(t) = X\cos(2\pi f_0 t)$$

其中 X 是均值为0，方差为 σ^2 的高斯白过程。

Solution:

$$X_T(t) = X\cos(2\pi f_0 t)\,\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$X_T(f) = \frac{T}{2}X\{\mathbf{sinc}[T(f+f_0)] + \mathbf{sinc}[T(f-f_0)]\}$$

$$E[|X_T(f)|^2] = E[X^2]\frac{T^2}{4}\{\mathbf{sinc}^2[T(f+f_0)] + \mathbf{sinc}^2[T(f-f_0)]\}$$

$$= \frac{T^2\sigma^2}{4}\{\mathbf{sinc}^2[T(f+f_0)] + \mathbf{sinc}^2[T(f-f_0)]\}S_X(f) = \lim_{T\to\infty}\frac{E[|X_T(f)|^2]}{T}$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{\sigma^2}{4}T\{\mathbf{sinc}^2[T(f+f_0)] + \mathbf{sinc}^2[T(f-f_0)]\}$$

$$= \frac{\sigma^2}{4}[\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)]$$

4.3.1 随机过程的功率谱

- **Theorem 4.3.1 [维纳-辛钦定理。Wiener-Khinchin].** 如果对任意有限的 τ以及长度为 $|\tau|$ 的任意间隔$\mathcal{A}$, 随机过程 $X(t)$ 的自相关函数满足条件：

$$\left|\int_{\mathcal{A}} R_X(t+\tau,t)dt\right| < \infty$$

则 $X(t)$ 的功率谱密度是$\langle R_x(t+\tau,t)\rangle$ 的傅立叶变换，

其中

$$\langle R_X(t+\tau,t)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} R_X(t+\tau,t)dt$$

4.3.1 随机过程的功率谱

- 证明：

$$
\begin{aligned}
S_X(f) &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E\left[|X_T(f)|^2\right] \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E\left[\int_{-T/2}^{T/2} X(s)e^{-j2\pi fs}ds \int_{-T/2}^{T/2} X(t)e^{j2\pi ft}dt\right] \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E\left[\int_{-T/2}^{T/2}\int_{-T/2}^{T/2} X(s)X(t)e^{-j2\pi fs}e^{j2\pi ft}dtds\right] \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left[\int_{-T/2}^{T/2}\int_{-T/2}^{T/2} E[X(s)X(t)]e^{-j2\pi fs}e^{j2\pi ft}dtds\right] \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\int_{-T/2}^{T/2} R_X(s,t)e^{-j2\pi f(s-t)}dtds
\end{aligned}
$$

4.3.1 随机过程的功率谱

$$\mathcal{F}^{-1}[S_X(f)] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f\tau}df\int_{-T/2}^{T/2}\int_{-T/2}^{T/2} R_X(s,t)e^{-j2\pi f(s-t)}dtds$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\int_{-T/2}^{T/2} R_X(s,t)\,dtds\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f(\tau-(s-t))}df$$

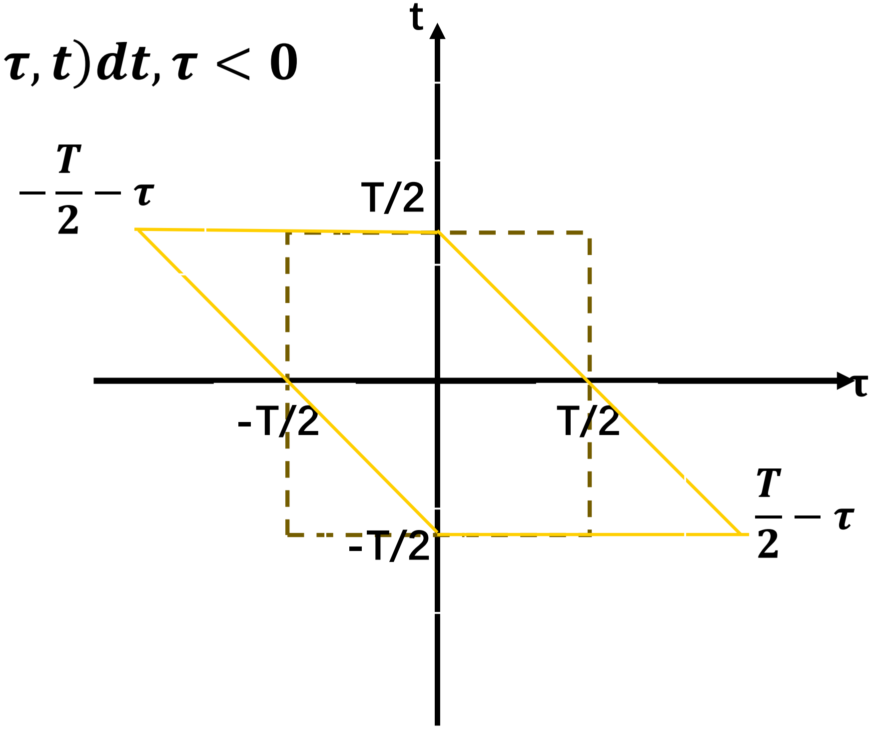
$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt\int_{-T/2}^{T/2} R_X(s,t)\,\delta(\tau-s+t)\,ds$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt\begin{cases} R_X(t+\tau,t), -\frac{T}{2} < t+\tau < T/2 \\ 0, \qquad otherwise\end{cases}$$

4.3.1 随机过程的功率谱

$$\mathcal{F}^{-1}[S_X(f)] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} dt \begin{cases} R_X(t+\tau,t), -\frac{T}{2} < t+\tau < T/2 \\ 0, \qquad otherwise \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{\frac{T}{2}-\tau} R_X(t+\tau,t)dt, \tau > 0 \\ \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}-\tau}^{\frac{T}{2}} R_X(t+\tau,t)dt, \tau < 0 \end{cases}$$



4.3.1 随机过程的功率谱

$$\mathcal{F}^{-1}[S_X(f)] = \begin{cases} \lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_{-T/2}^{\frac{T}{2}-\tau} R_X(t+\tau,t)dt, \tau > 0 \\ \lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_{-\frac{T}{2}-\tau}^{\frac{T}{2}} R_X(t+\tau,t)dt, \tau < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_{-T/2}^{\frac{T}{2}} R_X(t+\tau,t)dt - \lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_{\frac{T}{2}-\tau}^{\frac{T}{2}} R_X(t+\tau,t)dt, & \tau > 0 \\ \lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_X(t+\tau,t)dt - \lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_{-T/2}^{-\frac{T}{2}-\tau} R_X(t+\tau,t)dt, & \tau < 0 \end{cases}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{\frac{T}{2}} R_X(t+\tau,t)dt$$

即 $$S_X(f) = \mathcal{F}\left[\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{\frac{T}{2}} R_X(t+\tau,t)dt\right]$$

4.3.1 随机过程的功率谱

- **Corollary 4.3.2**.如果 $X(t)$ 是平稳随机过程并且对于任意有限的τ, $\tau R_X(\tau)$ 是有限的,那么:

$$S_X(f)=\mathcal{F}\left[R_X(\tau)\right]$$

- **Corollary 4.3.3.** 在周期平稳过程中，如果

$$\left|\int_0^{T_0} R_X(t+\tau,t)dt\right|<\infty$$

功率谱密度为:

$$S_X(f)=\mathcal{F}\left[\bar{R}_X(\tau)\right]$$

其中

$$\bar{R}_X(\tau)=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T/2} R_X(t+\tau,t)dt$$

T_0 是该周期平稳过程的周期.

4.3.1 Power Spectrum of Stochastic Processes

- **Example 1.** 确定过程 $Y(t) = Xcos2\pi f_0 t$ 的功率谱密度。其中 X 是一个零均值，方差为 σ^2 高斯随机变量

- 解：先求Y(t)的均值和自相关函数，证明信号循环平稳，然后用维纳-辛钦定理求功率谱密度。

$$E[Y(t)] = E[Xcos2\pi f_0 t] = E[X]cos2\pi f_0 t = 0$$

$$R_Y(t+\tau, t) = E[Xcos2\pi f_0(t+\tau)\,Xcos2\pi f_0 t]$$

$$= E\left[X^2\right][cos2\pi f_0(t+\tau)\,cos2\pi f_0 t]$$

$$= \sigma^2[cos2\pi f_0(t+\tau)\,cos2\pi f_0 t]$$

$$\overline{R_Y(t+\tau,t)} = f_0 \int_{-1/2f_0}^{1/2f_0} \sigma^2 [\cos 2\pi f_0(t+\tau)\cos 2\pi f_0 t]\,\mathrm{dt}$$

$$= \frac{1}{2}\sigma^2 \int_{-1/2f_0}^{1/2f_0} [\cos 2\pi f_0\tau + \cos 2\pi f_0(2t+\tau)]dt$$

$$= \frac{1}{2}\sigma^2 \cos 2\pi f_0\tau$$

$\therefore$

$$S_X(f) = \frac{\sigma^2}{4}[\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)]$$

已知随机信号$X(t)=X$,其中X是在[-1,1]间均匀分布的随机变量，求该随机信号的功率谱密度。请问该信号是各态历经的随机信号吗？

课堂练习

已知随机信号$X(t) = X$,其中X是在[−1, 1]间均匀分布的随机变量，求该随机信号的功率谱密度。

请问该信号是各态历经的随机信号吗?

解：$E[X(t)] = 0$；$R_X(\tau) = 1/3$

故$X(t)$ 平稳

$$S_X(f) = \frac{1}{3}\delta(f)$$

不是各态历经的随机信号。（为什么）

4.3.1 随机过程的功率谱

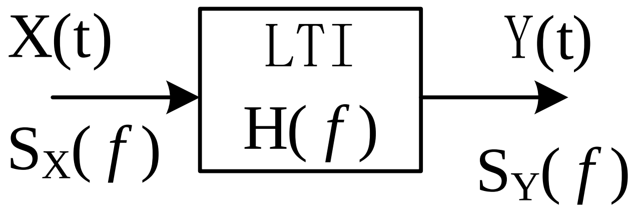
- *Note 1*. 随机过程的功率为：

$$P_X = E\left[\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} X^2(t)dt\right]$$

- *Note2*. 对于平稳及遍历过程，任意样本函数的功率谱密度等于过程的功率谱密度。

- *Note3*.功率谱密度是 f 的实数的、非负的偶函数.

4.3.2 线性时不变系统的传输



$$m_Y = m_X H(0)$$

$$S_Y(f) = S_X(f)\left|H(f)\right|^2$$

$$S_{XY}(f) = \mathscr{F}\left[R_{XY}(\tau)\right] = S_X(f)H^*(f)$$

$$S_{YX}(f) = S_{XY}^*(f) = S_X(f)H(f)$$

随机信号经过线性时不变系统

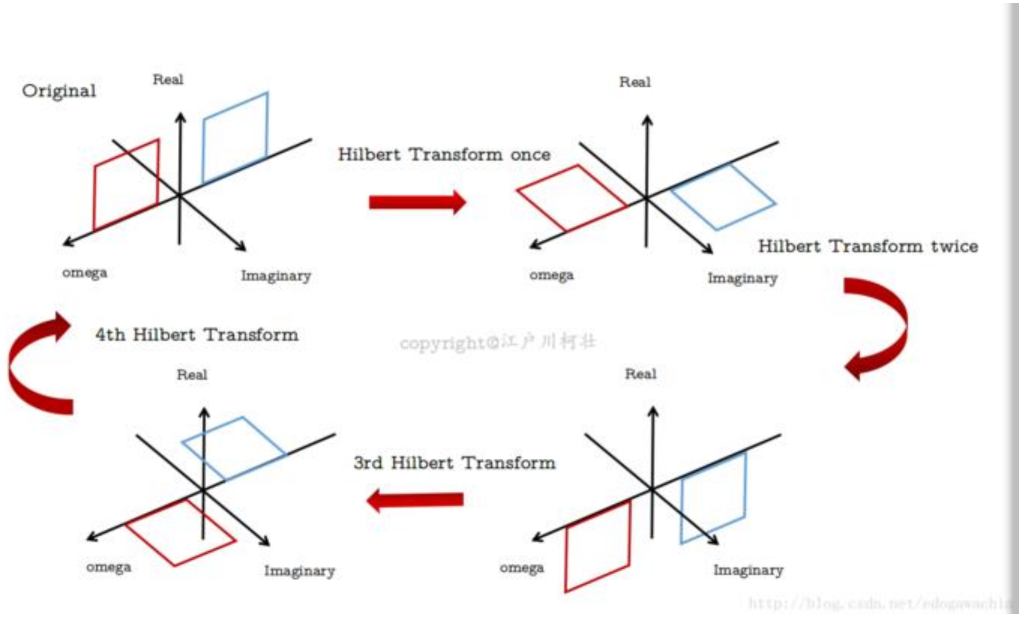
- **例：** 已知某线性时不变系统的冲激响应为 $h(t)=\frac{1}{\pi t}$，平稳随机信号$X(t)$的自相关函数为$R_X(\tau)$，求系统输出信号$Y(t)$的自相关函数，功率谱密度和与 $X(t)$ 的互相关函数。

- 解： $h(t)=\frac{1}{\pi t}\rightarrow H(f)=-j sgn(f)$,

$$R_{XY}(\tau)=R_X(\tau)*\frac{1}{-\pi\tau}=-\hat{R}_X(\tau)$$

$$R_Y(\tau)=R_X(\tau)\rightarrow S_Y(f)=S_X(f)$$

希尔伯特变换图解-4次变换后信号的频谱



Ps: 希尔伯特逆变换：$x(t) = -\hat{x}(t) * \frac{1}{\pi t}$

设置

请求$x(t)=a\cos(2\pi f t)$，$y(t)=a\sin(2\pi f t)$的希尔伯特变换.

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

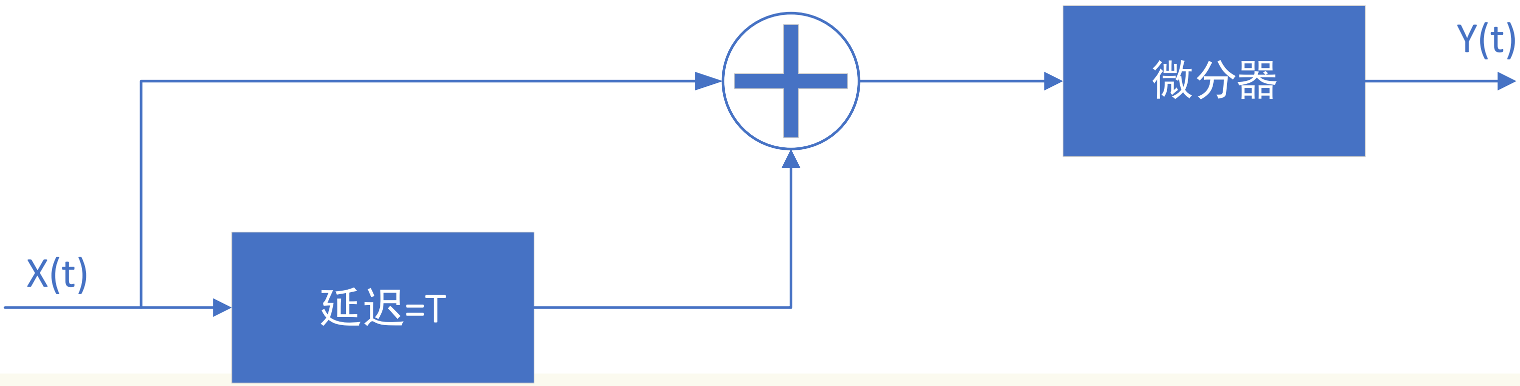
作答

X(t)是平稳随机过程，功率谱密度为$S_X(f)$，通过下图所示的系统，请问：

1、Y(t)平稳吗?

2、求Y(t)的功率谱密度。

3、输出过程中不会存在哪些频率成分?



4.3.2 线性时不变系统的传输

- 解：

1、 $h(t)=\delta'(t)+\delta'(t-T)$ 显然这是一个线性时不变系统。因为 $X(t)$ 平稳，故$Y(t)$平稳。

2、

$$S_Y(f)=|H(f)|^2 S_X(f)=\left|j2\pi f\ +j2\pi f e^{-j2\pi fT}\right|^2 S_X(f)$$

$$=4\pi^2 f^2\left|1+e^{-j2\pi fT}\right|^2 S_X(f)=8\pi^2 f^2(1+cos2\pi fT)S_X(f)$$

3、令上式=0的频率分量都不可能出现。故

$f=0\ and\ 2\pi fT=(2k+1)\pi\rightarrow f=\frac{2k+1}{2T}$ 都不可能出现。

主观题 10分

设置

假设 $Z(t) = X(t) + Y(t)$, 其中 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 联合平稳，它们的功率谱密度分别为$\boldsymbol{S}_X(f)$&$\boldsymbol{S}_Y(f)$，求$Z(t)$的功率谱密度

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

4.3.2 线性时不变系统的传输

- 和过程的功率谱密度.

假设 $Z(t)=X(t)+Y(t)$, 其中 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 联合平稳，则：

$$R_Z(\tau)=R_X(\tau)+R_Y(\tau)+R_{XY}(\tau)+R_{YX}(\tau)$$

故

$$S_Z(f)=S_X(f)+S_Y(f)+S_{XY}(f)+S_{YX}(f)$$

$$=S_X(f)+S_Y(f)+S_{XY}(f)+S_{XY}^*(f)$$

$$=S_X(f)+S_Y(f)+2\,\mathrm{Re}[S_{XY}(f)]$$

4.4-4.6 学习目标

- 能够阐述高斯随机过程的性质、特点，写出高斯随机过程的一维概率密度函数；
- 能够阐述白过程的概念，写出白过程的功率谱密度和自相关函数；
- 能够阐述带通系统和带通（窄带信号）的基本概念，写出窄带信号同相分量、正交分量及其相应的自相关函数表达式；
- 能够根据窄带信号的功率谱密度推导出其同相分量和正交分量的功率谱密度

4.4 高斯及白过程

■ 4.4.1 高斯过程

Definition 4.4.1. 如果对于所有的 n 以及所有的 $(t_1,t_2,\ldots,t_n)$，随机变量$\{X(t_i)\}_{i=1}^{n}$具有联合高斯概率密度函数，则随机过程$X(t)$ 是高斯过程。

Theorem 4.4.1. 对于高斯过程，均值与自相关，即 $m_X(t)$ 和 $R_X(t_1,t_2)$ 给出了过程的完全统计描述。

Theorem 4.4.2. 高斯过程 $X(t)$ 通过线性时不变系统后，其输出过程$Y(t)$ 仍然是高斯过程.

4.4 高斯及白过程

- **Theorem 4.4.3**. 对于高斯过程，宽平稳与严平稳是等价的。

- **Theorem 4.4.4**. 平稳零均值高斯随机过程 ***X(t)*** 的遍历特性的充分条件是：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R_X(\tau)| d\tau < \infty$$

4.4 高斯及白过程

联合高斯随机过程.

Definition 4.4.2. 随机过程 X(t) 和 Y(t) 是联合高斯随机过程，如果对所有的 n, m 和所有的 $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, 和 $(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$, 随机矢量 $(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n), Y(\tau_1), Y(\tau_2), \ldots, Y(\tau_m))$ 服从n+m 维联合高斯分布。

Theorem 4.4.5. 对于联合高斯随机过程，不相关与相互独立是等价的.

4.4 高斯及白过程

如何判断两个随机变量统计独立？

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

所以n个随机信号$X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)$统计独立的充要条件是：

$$f_{X_1(t_1),X_2(t_2),\ldots,X_n(t_n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$f_{X_1(t_1)}(x_1) f_{X_2(t_2)}(x_2) \cdots f_{X_n(t_n)}(x_n)$$

4.4 高斯及白过程

如何判断两个随机变量不相关?

$$COV(AB) = E[A - E(A)]E[B - E(B)] = 0$$

故两个随机信号不相关的充要条件是

$$COV\big(X(t), Y(t)\big) = E[(X(t) - m_X)(Y(t) - m_Y)] = 0$$

- 相关系数的定义：

两个随机信号的相关系数定义为：

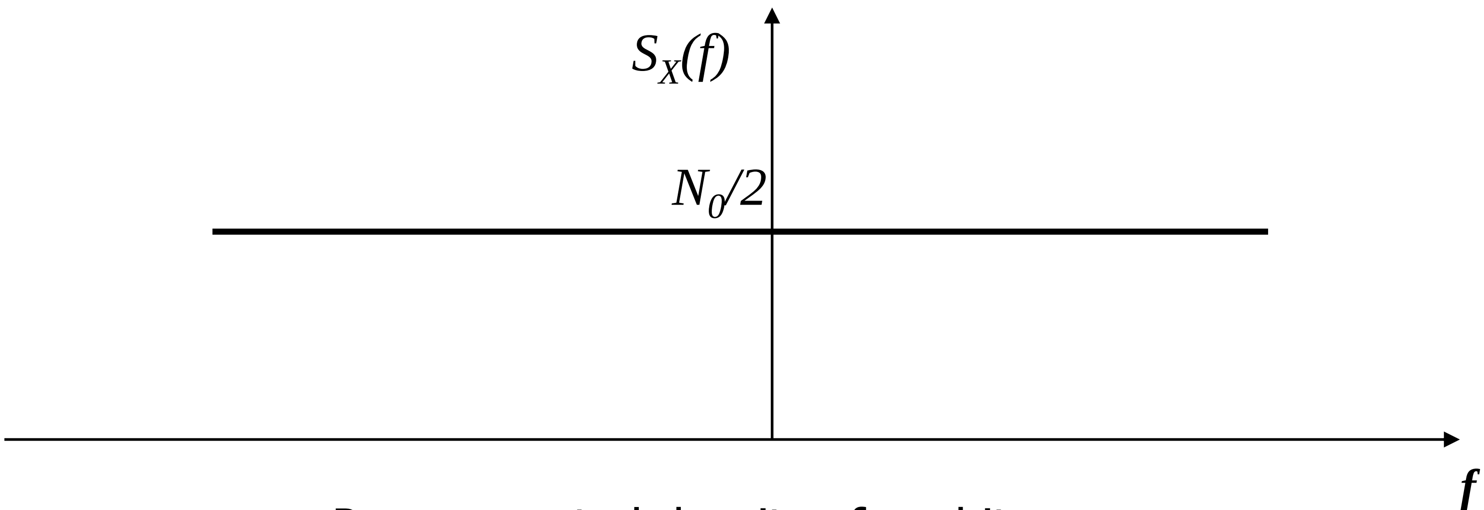
$$\rho_{X,Y} = \frac{COV\big(X(t), Y(t)\big)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

故若两个随机信号的相关系数$\boldsymbol{\rho = 0}$，则两个随机信号不相关。

4.4 高斯及白过程

4.4.2 白过程

Definition 4.4.3. 如果过程 $X(t)$ 具有平坦的谱密度，即对所有的 f， $S_X(f)$ 为常数，那么称该过程为白过程.

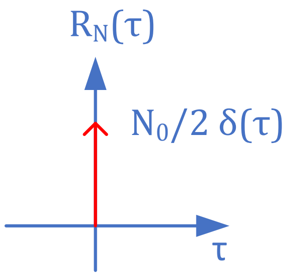


Power-spectral density of a white process

4.4 高斯及白过程

- 白过程的自相关函数为

$$R_n(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{N_0}{2}\right] = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$



How to explain the upper equation?

- 等效噪声带宽.

高斯白噪声经过带通滤波器后，输出仍然为高斯噪声。定义滤波器的噪声带宽如下，以便于计算输出噪声的功率。

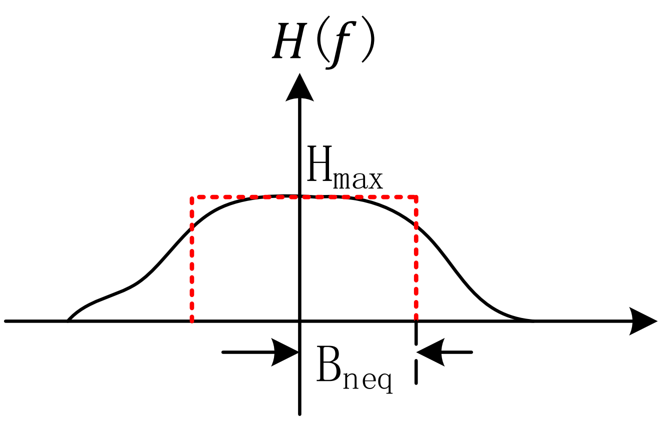
$$B_{neq} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df}{2H_{\max}^2}$$

4.4 高斯及白过程

- 假设 ***X(t)*** 是一白高斯过程，经过一滤波器, ***Y(t)*** 是输出过程，那么

$$P_Y = \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(f)df = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df$$

$$= \frac{N_0}{2} \times 2B_{neq}H_{\boldsymbol{max}}^2 = N_0 B_{neq} H_{\boldsymbol{max}}^2 = N_0 B_{neq} H(0)$$



随机信号的带宽(补充)

信号频带宽度（带宽）用于描述它所占据的有效频带范围。对应随机信号，由它的功率谱的非零情况来计算，度量方法很多种，如右图所示。

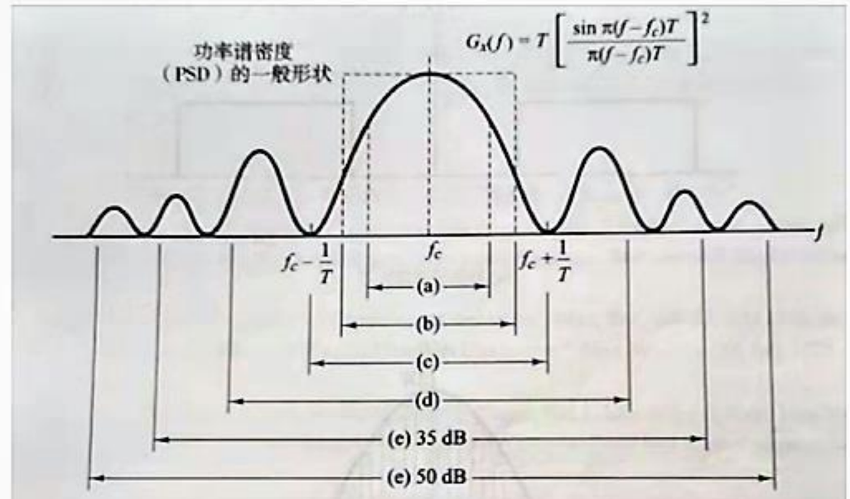
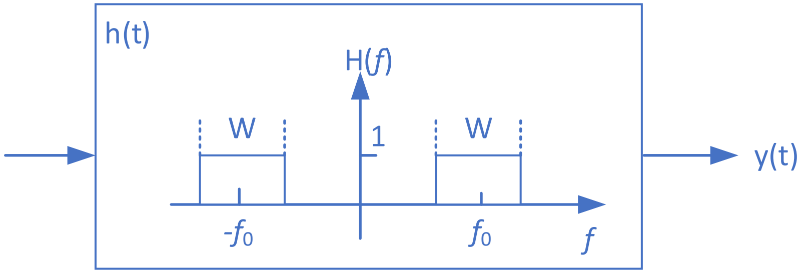


图 1.20 数字数据的带宽。(a)半功率带宽；(b)等效噪声带宽；(c)零点到零点带宽；(d)99%功率带宽；(e)限制 PSD（即限制带外衰减）在 35～50 dB 之间

4.4 高斯及白过程

- **Example1. 带宽为 W 的理想带通滤波器的等效噪声带宽是多少？(problem 4.66)**

解： $B_{neq}=\dfrac{\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2df}{2H_{max}^2}$



理想带通滤波器满足：$H(f)=1\,,|f-f_0|<W/2$

故：

$$B_{neq}=\frac{1}{2}\left[\int_{f_0-W/2}^{f_0+W/2}df+\int_{-f_0-W/2}^{-f_0+W/2}df\right]=W$$

4.4.1白噪声通过线性系统

4.4.1.1 白噪声通过LTI系统

线性系统冲击响应 $h(t)$,传输函数 $H(f)$，输入信号$X(t)$满足

$$S_X(f)=\frac{N_0}{2}\quad(-\infty<\omega<\infty),\ R_X(\tau)=\frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$

则输出过程$Y(t)$的自相关函数:

$$R_Y(\tau)=\frac{N_0}{2}h(\tau)*h(-\tau)$$

功率谱密度: $S_Y(f)=\frac{N_0}{2}|H(f)|^2$

输出噪声功率：$P_Y=R_Y(0)=\frac{N_0}{2}R_h(0)$

白噪声通过线性系统后，输出为一随机过程，完全由线性系统的特性决定。因此可用来

①估计未知系统的频率响应特性，

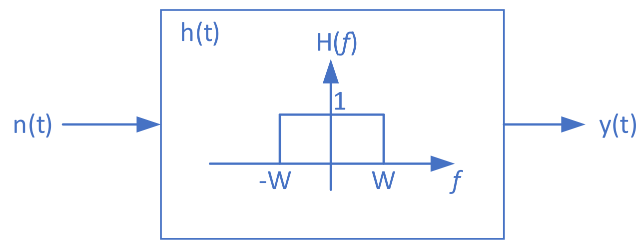
②利用白噪声通过线性系统产生所需要的特定随机过程。

（任意实过程的功率谱形式与白噪声通过线性系统后的谱形式完全相同）

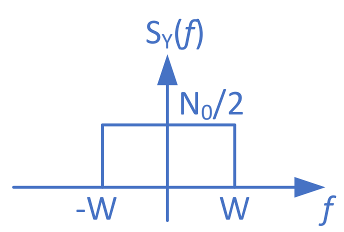
4.4.1.2 低通与带限白噪声

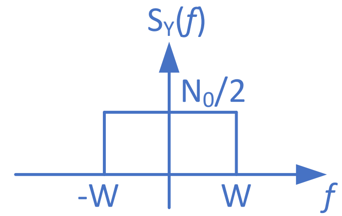
1. 低通白噪声

白噪声$n(t)$通过理想低通滤波器$h(t)$（带宽为WHz），输出过程为低通白噪声 $y(t)$。



$y(t)$的功率谱密度为





自相关函数为：

$$R_Y(\tau) = \frac{N_0 sin2\pi W\tau}{2\pi\tau} = N_0 W sinc(2W\tau)$$

相关系数为：

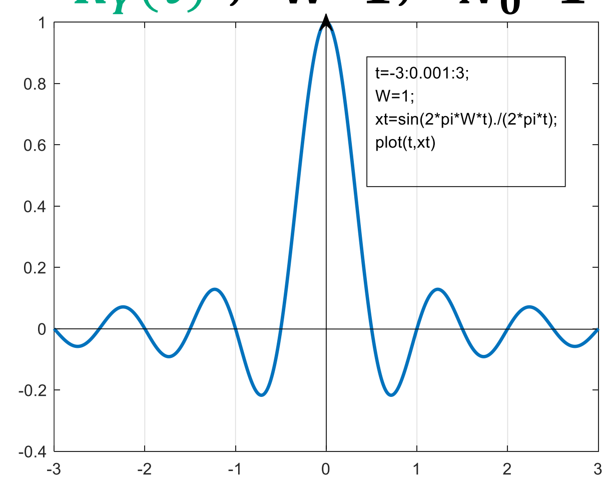
$$\rho_Y(\tau) = \frac{sin2\pi W\tau}{2\pi W\tau} = sinc(2W\tau)$$

噪声功率为：

$$N_0 W$$

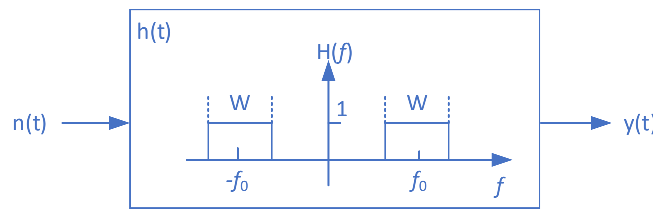
注： $sinc(x) = \dfrac{sin(\pi x)}{\pi x}$

$R_Y(\tau)$ ，W=1， N_0=1

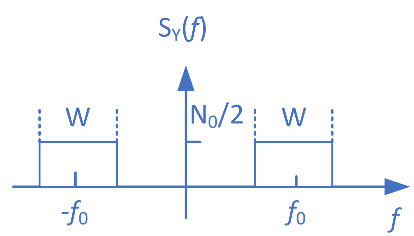


2、带通白噪声

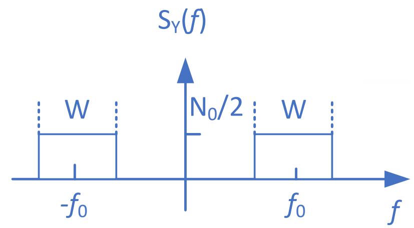
白噪声$n(t)$通过理想带通滤波器$h(t)$（带宽为WHz），输出过程为带通白噪声 $y(t)$。



$y(t)$的功率谱密度为



自相关函数为



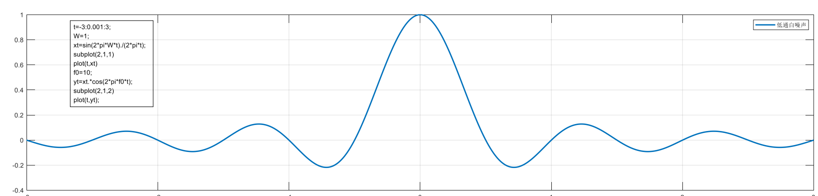
$$R_Y(\tau)=\frac{N_0 \sin \pi W\tau}{\pi\tau}\cos 2\pi f_0\tau$$
$$=N_0 W sinc(W\tau)\cos 2\pi f_0\tau$$

相关系数为：

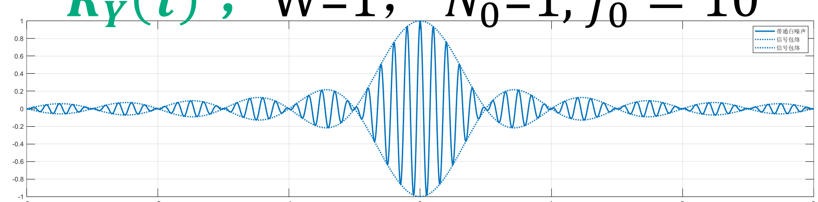
$$\rho(\tau)=\frac{\sin \pi W\tau}{\pi W\tau}\cos 2\pi f_0\tau$$
$$=sinc(W\tau)\cos 2\pi f_0\tau$$

噪声功率为

$$N_0 W$$



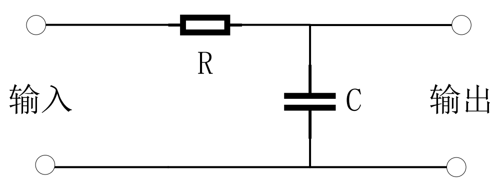
$R_Y(\tau)$，W=1， N_0=1, $f_0=10$



例：白噪声通过RC滤波器

- 将功率谱密度$S_N(f)=\frac{N_0}{2}$的白噪声，输入下图所示的RC滤波器，试求输出信号的功率谱密度$S_Y(f)$和自相关函数$R_Y(\tau)$

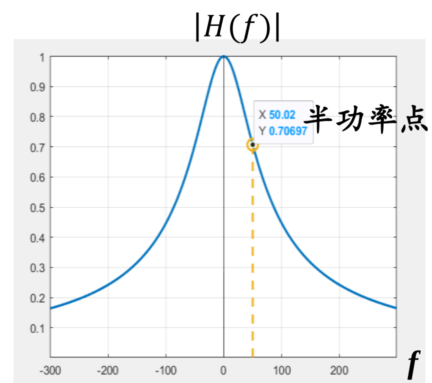
解：$H(f)=\dfrac{1}{1+j2\pi fRC}$



$$S_Y(f)=S_N(f)|H(f)|^2$$

$$=\frac{N_0}{2}\frac{1}{1+(2\pi fRC)^2}$$

$$R_Y(\tau)=\frac{N_0}{4RC}exp\left(-\frac{\tau}{RC}\right)$$



4.5 带限过程及抽样

本节目的：证明抽样定理对带限随机过程同样有效.

- **Theorem 4.5.1**. 令 $X(t)$ 为平稳带限过程, 即对所有的 $|f|\geq W$ 有 $S_X(f)\equiv 0$。则下面的关系式成立：

$$E\left|X(t)-\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(kT_s)\operatorname{sinc}(2W(t-kT_s))\right|^2=0$$

其中 $T_s=1/2W$ 表示抽样间隔（证明自学）.
该等式一般称为均方相等或均方意义下的相等。

4.6 带通系统

- **Definition 4.6.1**. 如果对于 $|f - f_0| \geq W$，有 $S_X(f) \equiv 0$，其中 $W << f_0$，则 $X(t)$ 是带通或窄带过程。

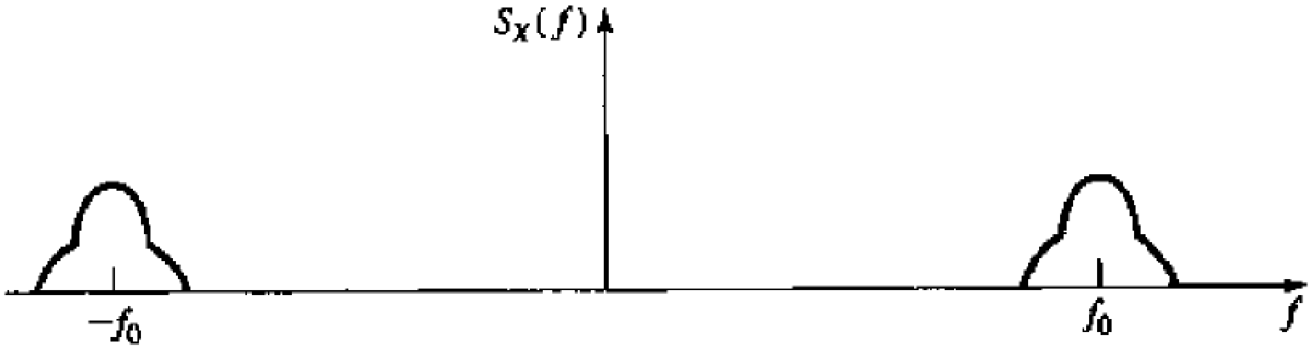
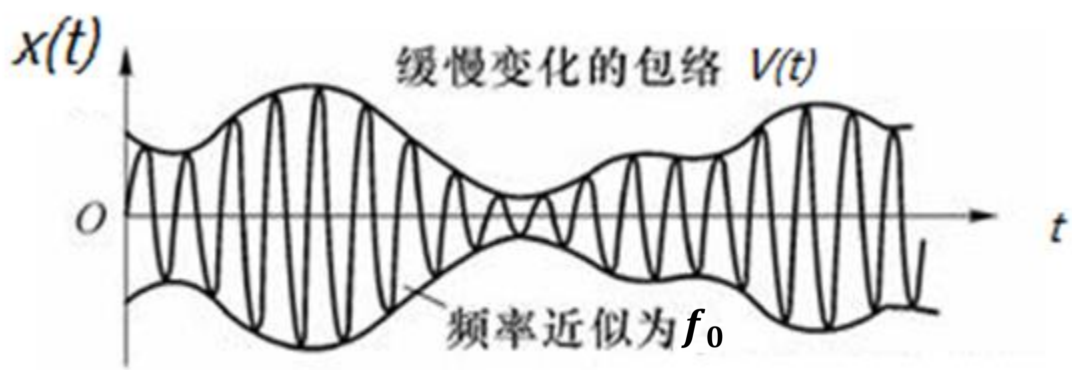


图 4.24 带通过程的功率谱密度



4.6 带通系统

$$
\begin{aligned}
X(t) &= V(t)\cos(2\pi f_0 t + \Theta(t)) \\
&= V(t)\cos\big(\Theta(t)\big)\cos(2\pi f_0 t) \\
&- V(t)\sin\big(\Theta(t)\big)\sin(2\pi f_0 t) \\
&= X_c(t)\cos(2\pi f_0 t) - X_s(t)\sin(2\pi f_0 t)
\end{aligned}
$$

其中

$$X_c(t) = V(t)\cos(\Theta(t)), \quad and \quad X_s(t) = V(t)\sin(\Theta(t))$$

同相分量

正交分量

4.6 带通系统

- 若$X(t)$是**零均值的平稳带通过程**, $X_c(t)$和$X_s(t)$可以表示为：

$$X_c(t) = X(t)\cos(2\pi f_0 t) + \hat{X}(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

$$X_s(t) = \hat{X}(t)\cos(2\pi f_0 t) - X(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

其中$\hat{X}(t)$是$X(t)$的希尔伯特变换

$X_c(t)$和 $X_s(t)$ 分别是 X(t)的同相分量和正交分量。

4.6 带通系统

- **Theorem 4.6.1**. 如果 X(t) 是零均值的平稳带通过程, 那么 $X_C(t)$ 和$X_S(t)$ 是零均值的联合平稳过程.

证明：以$X_c(t)$为例证明

$$R_{X_c}(t+\tau,t)=E[X_c(t+\tau)X_c(t)]$$

$$=E\Big[(X(t+\tau)cos2\pi f_0(t+\tau)+\hat{X}(t+\tau)sin2\pi f_0(t+\tau))$$

$$\times(X(t)cos2\pi f_0 t+\hat{X}(t)sin2\pi f_0 t)\Big]$$

$$=R_X(\tau)cos2\pi f_0(t+\tau)cos2\pi f_0 t$$

$$+R_{X\hat{X}}(\tau)cos2\pi f_0(t+\tau)sin2\pi f_0 t$$

$$+R_{\hat{X}X}(\tau)sin2\pi f_0(t+\tau)cos2\pi f_0 t$$

$$+R_{\hat{X}}(\tau)sin2\pi f_0(t+\tau)sin2\pi f_0 t$$

$$=R_X(\tau)cos2\pi f_0\tau+\hat{R}_X(\tau)sin2\pi f_0\tau$$

这里利用：

$$R_{X\hat{X}}(\tau)=-\hat{R}_X(\tau)$$

$$R_{\hat{X}X}(\tau)=\hat{R}_X(\tau)$$

$$R_{\hat{X}}(\tau)=R_X(\tau)$$

4.6 带通系统

同理有：

$$R_{X_c}(\tau) = R_{X_s}(\tau)$$
$$= R_X(\tau)\cos(2\pi f_0\tau) + \hat{R}_X(\tau)\sin(2\pi f_0\tau)$$
$$R_{X_cX_s}(\tau) = R_X(\tau)\sin(2\pi f_0\tau) - \hat{R}_X(\tau)\cos(2\pi f_0\tau)$$

可见：

$X_c(t)$和$X_s(t)$ 是联合平稳的，并且具有相同的自相关函数 $\Longrightarrow$具有相同的功率谱密度。

Theorem 4.6.2. $X_c(t)$ 和 $X_S(t)$ 是低通过程；即它们的功率谱密度在 $|f| \geq W$ 时为0。

如何获得同相分量和正交分量的功率谱密度?

$$R_{X_c}(\tau) = R_{X_s}(\tau) = R_X(\tau)\cos(2\pi f_0\tau) + \hat{R}_X(\tau)\sin(2\pi f_0\tau)$$

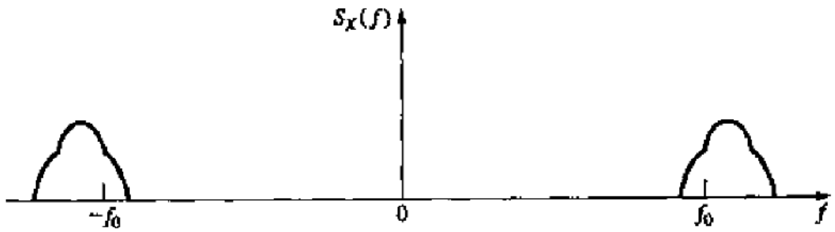
$$S_{X_c}(f) = S_{X_s}(f)$$

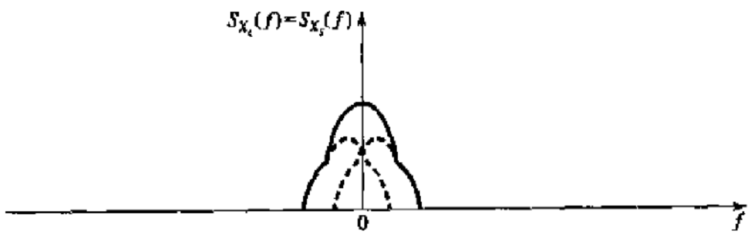
$$= \frac{S_X(f - f_0)}{2} + \frac{S_X(f + f_0)}{2}$$

$$+\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(f + f_0)S_X(f + f_0) - \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(f - f_0)S_X(f - f_0)$$

$$= \frac{S_X(f - f_0)}{2}[1 - \mathrm{sgn}(f - f_0)] + \frac{S_X(f + f_0)}{2}[1 + \mathrm{sgn}(f + f_0)]$$

$$= \begin{cases} S_X(f - f_0) + S_X(f + f_0) & |f| < f_0 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$





$$R_{X_cX_s}(\tau)=R_X(\tau)\sin(2\pi f_0\tau)-\hat{R}_X(\tau)\cos(2\pi f_0\tau)$$

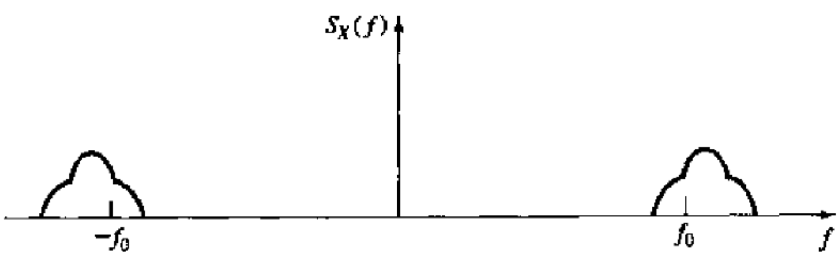
$$S_{X_cX_s}(f)=\mathcal{F}\left[R_{X_cX_s}(\tau)\right]$$

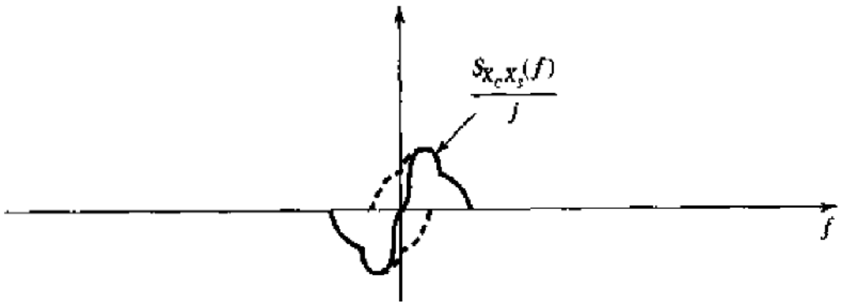
$$=S_X(f)*\left[\frac{\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)}{2j}\right]$$

$$-[-j\,\mathrm{sgn}(f)S_X(f)]*\left[\frac{\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)}{2}\right]$$

$$=\frac{j}{2}S_X(f+f_0)[1+\mathrm{sgn}(f+f_0)]-\frac{j}{2}S_X(f-f_0)[1-\mathrm{sgn}(f-f_0)]$$

$$=\begin{cases} j[S_X(f+f_0)-S_X(f-f_0)] & |f|<f_0 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

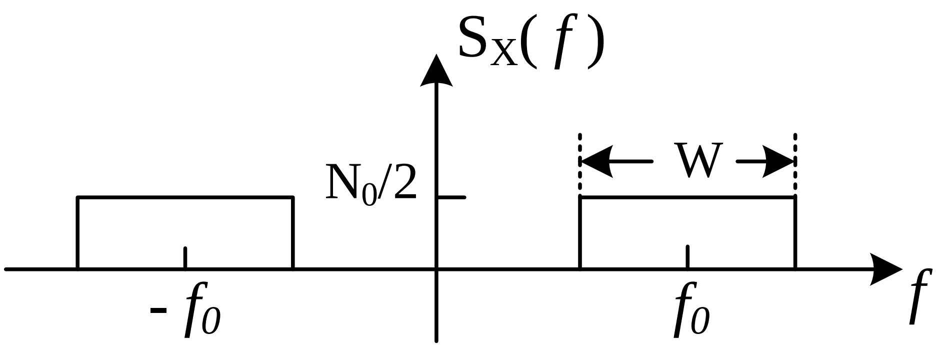




主观题 10分

设置

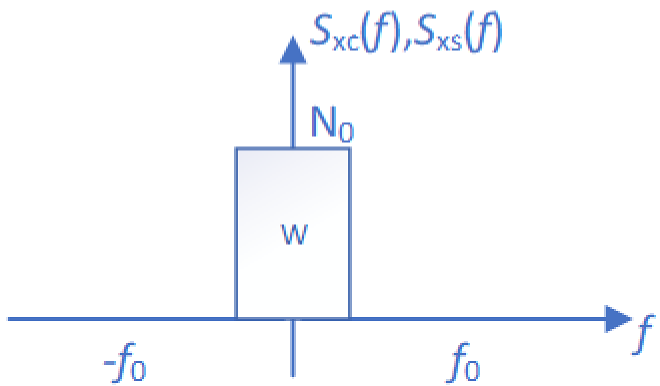
已知带通（窄带）过程的功率谱密度如下图所示，请画出其同相分量和正交分量的功率谱密度,以及它们的互谱密度



正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

答案



（b）窄带信号同相或正交分量的频谱

$$S_{X_c X_s}(f) = j[S_X(f + f_0) - S_X(f - f_0)] = 0$$

4.6 带通系统

- 讨论：

1. 互相关函数

$$R_{X_cX_s}(\tau) = R_X(\tau)\sin(2\pi f_0 t) - \hat{R}_X(\tau)\cos(2\pi f_0 t)$$

是奇函数，并且有：$R_{X_cX_s}(0) = 0$

2. 若 $S_X(f)$ 关于 f_0 对称，则 $X_C(t)$ 和 $X_S(t)$ 不相关.

3. 若 $X(t)$ 是零均值的平稳高斯过程, 则 $X_C(t)$ 和 $X_S(t)$ 联合平稳，且在相同的时刻, $X_C(t)$ 和 $X_S(t)$ 统计独立。

4.6 带通系统

- 功率： $P_{X_c} = P_{X_s} = R_{X_c}(0) = R_X(0) = P_X$

同相分量和正交分量的功率和原带通信号的功率相等。

主观题 10分

设置

令$X(t)$是带通过程，$V(t)$为其包络，证明任意选择中心频率f_0， $V(t)$ 始终不变。

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

解答

- 解：$V(t)=\sqrt{X_c^2(t)+X_s^2(t)}$，因为$X_c(t)$、$X_s(t)$是低通信号，和$f_0$无关，故$V(t)$也是低通信号，始终不变。

例：零均值窄带高斯平稳随机过程

$$X(t) = X_c(t)cos2\pi f_c t - X_s(t)sin2\pi f_c t$$
$$= V(t)cos(2\pi f_c t + \theta(t))$$

其中

$$V(t) = \sqrt{X_c^2(t) + X_s^2(t)}$$

$$\theta(t) = arctan\left(\frac{X_s(t)}{X_c(t)}\right)$$

请求出$V(t)$和$\theta(t)$的一维概率密度函数

解：因为$X(t)$为零均值窄带高斯平稳随机过程，$X_c(t)$和$X_s(t)$为零均值不相关的高斯随机过程，故

$$f_{X_cX_s}(x_c,x_s)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}exp\left(-\frac{x_c^2+x_s^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial X_c}=\frac{x_c}{\sqrt{x_c^2+x_s^2}},\frac{\partial V}{\partial X_s}=\frac{x_s}{\sqrt{x_c^2+x_s^2}}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial X_c}=-\frac{x_s}{x_c^2+x_s^2},\frac{\partial \theta}{\partial X_s}=\frac{x_c}{x_c^2+x_s^2}$$

$$|J|=\begin{vmatrix}\frac{x_c}{\sqrt{x_c^2+x_s^2}} & \frac{x_s}{\sqrt{x_c^2+x_s^2}}\\ -\frac{x_s}{x_c^2+x_s^2} & \frac{x_c}{x_c^2+x_s^2}\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{x_c^2+x_s^2}}=\frac{1}{v}$$

故

$$f_{V\theta}(v,\theta)=\frac{1}{|J|}f_{X_cX_s}(v,\theta)=\frac{v}{2\pi\sigma^2}exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$f_{V\theta}(v,\theta) = \frac{v}{2\pi\sigma^2} exp(-\frac{v^2}{2\sigma^2})$$

因$\theta(t)$是相位函数，主值区间为[0,2π)，故

$$f_v(v) = \int_0^{2\pi} f_{V\theta}(v,\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{v}{2\pi\sigma^2} exp(-\frac{v^2}{2\sigma^2})\, d\theta$$

$$= \frac{v}{\sigma^2} exp(-\frac{v^2}{2\sigma^2})$$

瑞利分布

$$f_\theta(\theta) = \int_0^{+\infty} f_{V\theta}(v,\theta) dv$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{v}{2\pi\sigma^2} exp(-\frac{v^2}{2\sigma^2})\, dv$$

$$= -\frac{1}{2\pi} exp(-\frac{v^2}{2\sigma^2}) \Big|_{v=0}^{+\infty} = \frac{1}{2\pi}$$

均匀分布，且满足

$$f_{V\theta}(v,\theta) = f_v(v)\, f_\theta(\theta)$$

Summarizing

- 带限过程及抽样
- 带通过程

思考题:

1、零均值的平稳带通过程的同相分量和正交分量是什么类型的信号?

2、零均值的平稳带通过程的同相分量和正交分量之自相关函数和互相关函数及功率谱密度各是什么?

Chapter4

Thank you for your attention!

Any question?