

## 2015-2016 学年第二学期高等数学试题 (A)

一、填空题 (共 5 小题, 每题 4 分, 共 20 分)

1. 积分  $\int_0^2 dx \int_x^2 e^{-y} dy =$ \_\_\_\_\_。

2. 设已知二发数级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  及  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  各项不为负数, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \max(u_n, v_n)$  的收敛性为 \_\_\_\_\_。

3. 设  $u = f(r)$  一阶导数连续,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $f'(0) = 2$ , 则  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] =$ \_\_\_\_\_。

4. 已知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n} \sin \frac{1}{n^\alpha}$  绝对收敛, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$  条件收敛, 则  $\alpha$  的取值范围是\_\_\_\_\_。

5. 过曲线  $\begin{cases} 2y^2 + z^2 + 4x = 4z \\ y^2 + 3z^2 - 8x = 12z \end{cases}$  且母线平行于  $x$  轴的柱面方程\_\_\_\_\_。

二、选择题 (共 5 小题, 每题 4 分, 共 20 分)

6. 已知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = 2$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = 5$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n =$ \_\_\_\_\_。

(A) 3; (B) 7; (C) 8; (D) 9。

7. 设  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  均为非零向量, 则与  $\vec{a}$  不垂直的向量为\_\_\_\_\_。

(A)  $(\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ ; (B)  $\vec{b} - \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \vec{a}$ ;  
(C)  $\vec{a} \times \vec{b}$ ; (D)  $\vec{a} + (\vec{a} \cdot \vec{b}) \times \vec{a}$ 。

8. 已知  $D: x^2 + y^2 \leq 1$ , 则二重积分  $\iint_D (x^2 - y) dx dy =$ \_\_\_\_\_。

(A)  $\frac{\pi}{2}$ ; (B)  $\frac{\pi}{4}$ ; (C)  $-\frac{\pi}{4}$ ; (D)  $-\frac{\pi}{2}$ 。

9. 已知曲线  $L$  为从点  $A(1, 0)$  到  $O(0, 0)$  的上半圆周  $x^2 + y^2 = x$ , 则

$\int_L (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy =$ \_\_\_\_\_。

(A)  $\frac{m\pi}{4}$ ; (B)  $\frac{m\pi}{2}$ ; (C)  $\frac{m\pi}{8}$ ; (D)  $\frac{\pi}{8}$ 。

10.  $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} f(x) dx dy dz$  可用球坐标的累次积分表示为\_\_\_\_\_。

(A)  $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 f(r \sin \varphi \cos \theta) r^2 \sin \varphi dr$ ;

$$(B) \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 f(r \sin \varphi \cos \theta) r^2 \sin \varphi dr$$

$$(C) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r \sin \varphi \cos \theta) r^2 \sin \theta dr$$

$$(D) \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 f(r \sin \theta \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr$$

三、(共 7 小题, 共 60 分)

11. (8 分) 设  $\vec{a} + 3\vec{b}$  与  $7\vec{a} - 5\vec{b}$  垂直,  $\vec{a} - 4\vec{b}$  与  $7\vec{a} - 2\vec{b}$  垂直, 求非零向量  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的夹角。

在区间  $(-1, 1)$  内求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$  的和函数。

12. (8 分) 已知二元函数  $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ , 讨论该函数

在  $(0, 0)$  点的偏导数是否存在, 若存在, 求出偏导数数值; 若不存在, 请说明理由。

13. (8 分) 旋转抛物面  $z = x^2 + y^2$  被平面  $x + y - z = 1$  所截得的交线为空间一椭圆, 求坐标原点到该椭圆的最长与最短距离。

14. (8 分) 求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+2}{n!} x^{2n+1}$  的收敛域, 并求其和函数。

15. (8 分) 计算曲面积分  $\iint_{\Sigma} (x + y + z) dS$ , 其中  $\Sigma$  为球面  $z \geq h$  ( $0 \leq h \leq a$ ) 的部分。

16. (10 分) 计算  $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \\ x^2 + y^2 + (z - R)^2 \leq R^2 \end{cases}$  所确定。

17. (10 分) 计算  $I = \oiint_{\Sigma} \frac{z dy dz}{x \cos^2 x} + \frac{dz dx}{\cos^2 y} + \frac{dx dy}{z \cos^2 z}$ , 其中  $\Sigma$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  的外侧。