§5.2 Z变换的性质

课前学习本节内容：

按ppt内容顺序，并参考教材相应内容，学习理解z变换性质的推导方法及相关例题。

反转课堂

1. 线性

- 若 $Z[x(n)]=X(z), \quad R_{x1}<|z|<R_{x2}$
- $Z[y(n)]=Y(z), \quad R_{y1}<|z|<R_{y2}$
- 则 $Z[ax(n)+by(n)]=aX(z)+bY(z),$ $\max(R_{x1},R_{y1})<|z|<\min(R_{x2},R_{y2})$
- 即两个收敛域的重叠部分，或零极点抵消使收敛域扩大。

例5-2 已知 $x(n)=a^n u(n),\ y(n)=a^n u(n-1)$, 求 $x(n)-y(n)$的z变换。

解：$\because Z[x(n)]=X(z)=\dfrac{z}{z-a},|z|>|a|$

$$Z[y(n)]=Y(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a^n z^{-n}=\frac{a}{z-a},|z|>|a|$$

$$Z[a^n u(n)-a^n u(n-1)]=X(z)-Y(z)$$

$$=\frac{z}{z-a}-\frac{a}{z-a}=1$$

收敛于整个z平面

$$\because Z[a^n u(n)] = \frac{z}{z-a} \qquad |z| > a$$

例5-3(类似) 正余弦序列$\sin(\omega_0 n)u(n)$和 $\cos(\omega_0 n)u(n)$

$$\because Z[e^{j\omega_0 n}u(n)] = \frac{z}{z-e^{j\omega_0}}; Z[e^{-j\omega_0 n}u(n)] = \frac{z}{z-e^{-j\omega_0}}$$

$$Z[\cos(\omega_0 n)u(n)] = \frac{1}{2}\{Z[e^{j\omega_0 n}u(n)] + Z[e^{-j\omega_0 n}u(n)]\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-e^{j\omega_0}} + \frac{z}{z-e^{-j\omega_0}}\right) = \frac{z(z-\cos\omega_0)}{z^2 - 2z\cos\omega_0 + 1} \qquad |z| > 1$$

$$Z[\sin(\omega_0 n)u(n)] = \frac{z\sin\omega_0}{z^2 - 2z\cos\omega_0 + 1} \qquad |z| > 1$$

2. 移序/时移/位移特性

- 表明序列移动前后z变换之间的关系

(1) 双边z变换的位移特性

若 **Z[*x*(*n*)]=*X*(*z*)**

则 **Z[*x*(*n*±*m*)]=*z*^±*m*^*X* (*z*)**

证明：根据双边Z变换的定义，则有 $Z[x(n\pm m)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n\pm m)z^{-n}$

令 $l=n\pm m$，则有 $Z[x(n\pm m)]=\sum_{l=-\infty}^{\infty}x(l)z^{-(l\mp m)}$

$$=z^{\pm m}\sum_{l=-\infty}^{\infty}x(l)z^{-l}=z^{\pm m}X(z)$$

由于乘以 z^m, 若m<0, 将会在z=0引入极点。所以虽然z=0可以不是X(z)的极点，但却是 $z^mX(z)$的一个极点。在这种情况下，ROC要去除原点。同样，m>0时，ROC要去除∞点。所以，位移特性可使z=0或z=∞处的零极点变化，但环形收敛域不会变化，双边X(z)的收敛域为*R*x1<|*z*|<*R*x2

(2) 单边z变换位移特性

若$x(n)$为双边序列, 其单边z变换为 $X(z)$，$|z|>\alpha$，则

$$x(n+m) \leftrightarrow z^{m}[X(z)-\sum_{l=0}^{m-1} x(l) z^{-l}]$$

$$x(n-m) \leftrightarrow z^{-m}[X(z)+\sum_{l=-m}^{-1} x(l) z^{-l}]$$

$$x(n-m)u(n-m) \leftrightarrow z^{-m} X(z)$$

当$x(n)$是因果序列时，

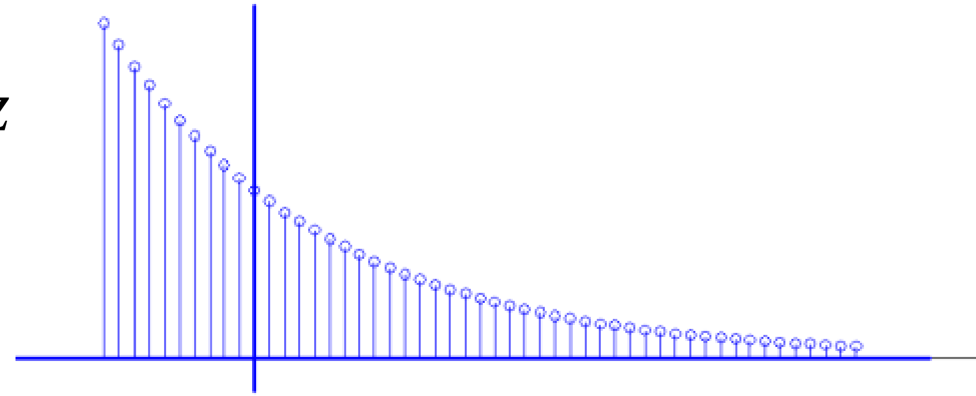
$$x(n+m) \leftrightarrow z^{m}[X(z)-\sum_{l=0}^{m-1} x(l) z^{-l}]$$ 同以上双边序列

$$x(n-m) \leftrightarrow z^{-m} X(z)$$

式中，m为整数，$m>0$。

证明：根据单边Z变换的定义：

$$Z[x(n+m)]=\sum_{n=0}^{\infty}x(n+m)z$$



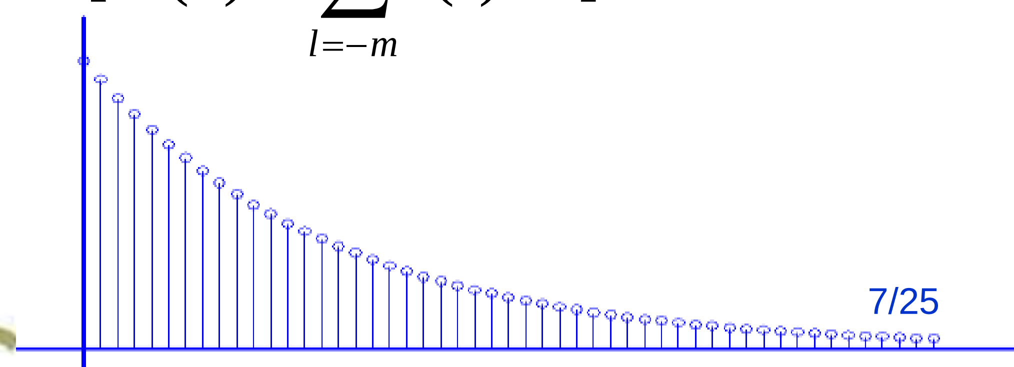
令式中的$n+m=l$，则

$$Z[x(n+m)]=\sum_{l=m}^{\infty}x(l)z^{m}z^{-l}$$

$$=z^{m}\left[\sum_{l=0}^{\infty}x(l)z^{-l}-\sum_{l=0}^{m-1}x(l)z^{-l}\right]=z^{m}\left[X(z)-\sum_{l=0}^{m-1}x(l)z^{-l}\right]$$

同理可以证明 $x(k-m)\leftrightarrow z^{-m}[X(z)+\sum_{l=-m}^{-1}x(l)z^{-l}]$

若x(n)为因果序列，如图易证以上结论



由此得到常用表达式:

$$\delta(n \pm m) \leftrightarrow z^{\pm m}$$

$$x(n-1)u(n) \leftrightarrow z^{-1}X(z) + x(-1)$$

$$x(n-2)u(n) \leftrightarrow z^{-2}X(z) + z^{-1}x(-1) + x(-2)$$

$$x(n+1)u(n) \leftrightarrow zX(z) - zx(0)$$

$$x(n+2)u(n) \leftrightarrow z^{2}X(z) - z^{2}x(0) - zx(1)$$

- 例 求宽度为N的矩形序列$\prod_N(n)$的z变换
- $\prod_N(n)=1$， $0\le n \le N-1$, 其它为 0
- 解 $\prod_N(n)=u(n)-u(n-N)$
- $\because Z[u(n)]=z/(z-1),\ |z|>1$
- 根据位移性质有

$$Z[u(n-N)]=z^{-N}\frac{z}{z-1},\quad |z|>1$$

$$Z\left[\prod{}_N(n)\right]=\frac{z}{z-1}-z^{-N}\frac{z}{z-1}=\frac{z-z^{-N+1}}{z-1},\quad |z|>1$$

例5-4 求因果冲激序列$\delta_N(n)u(n)$ 的z变换

解：

$$\delta_N(n)u(n)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(n-kN)$$

$$\delta_N(n)u(n)=\delta(n)+\delta(n\text{-}N)+\delta(n\text{-}2N)+\cdots$$

$$Z[\delta_N(n)u(n)]=1+z^{-N}+z^{-2N}\cdots=\frac{1}{1-z^{-N}}=\frac{z^N}{z^N-1}$$

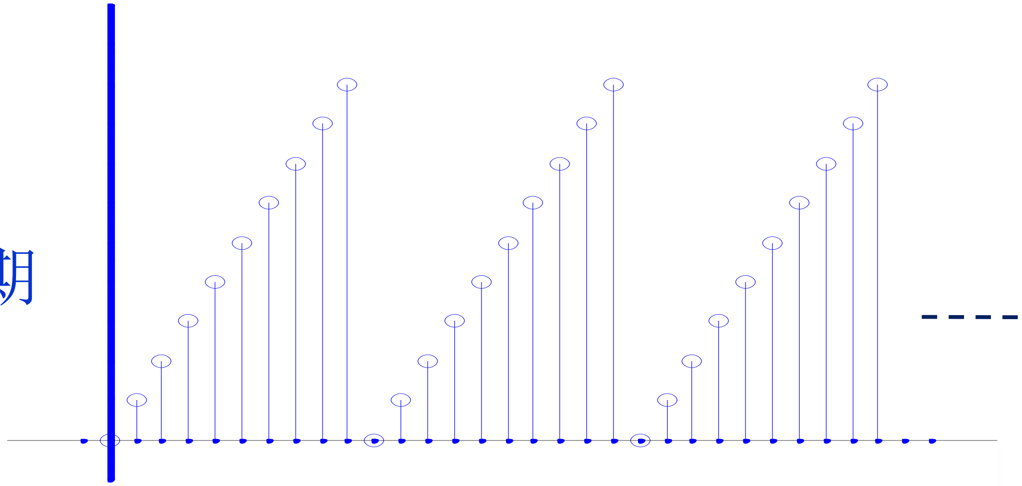
$$|z|>1$$

例 求零始周期序列x(n)的z变换

解：

$$x(n)=x(n+N)$$

N是周期。设第一个周期序列用x1(n)表示，则



$$X_1(z)=Z[x_1(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x_1(n)z^{-n} \qquad |z|>0$$

零始周期序列x(n)可表示成：

$$x(n)=x_1(n)+x_1(n-N)+x_1(n-2N)+\cdots$$

$$X(z)=X_1(z)[1+z^{-N}+z^{-2N}\cdots]=X_1(z)\frac{1}{1-z^{-N}}=\frac{z^N}{z^N-1}X_1(z)$$

3. 序列指数加权(z域尺度变换)

$a^n x(n)$称为对$x(n)$进行指数加权

若 $\mathcal{Z}[x(n)] = X(z), R_{x1} < |z| < R_{x2}$

则 $\mathcal{Z}[a^n x(n)] = X\left(\dfrac{z}{a}\right), R_{x1} < \left|\dfrac{z}{a}\right| < R_{x2}$

$\mathcal{Z}[a^{-n} x(n)] = X(az), R_{x1} < |az| < R_{x2}$ 式中，a为常数

证 根据双边Z变换的定义，则有

$$Z[a^n x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

间隔取反 $\mathcal{Z}[(-1)^n x(n)] = X(-z), R_{x1} < |z| < R_{x2}$

例5-5 已知Z[cos(nω_0)u(n)], 求β^ncos(nω_0)u(n)] 的 z变换。

解 已知 $$Z[\cos(n\omega_0)u(n)] = \frac{z(z-\cos\omega_0)}{z^2-2z\cos\omega_0+1}, \ |z|>1$$

$$Z[\beta^n\cos(n\omega_0)u(n)] = \frac{\frac{z}{\beta}\left(\frac{z}{\beta}-\cos\omega_0\right)}{\left(\frac{z}{\beta}\right)^2-2\frac{z}{\beta}\cos\omega_0+1}$$

$$= \frac{(1-\beta z^{-1}\cos\omega_0)}{1-2\beta z^{-1}\cos\omega_0+\beta^2 z^{-2}}$$

ROC: $|z| > |\beta|$

4. 时域反折特性(双边z变换性质)

若 $\mathcal{Z}\,[x(n)] = X(z), R_{x1} < |z| < R_{x2}$

则 $\mathbf{Z}[x(-n)] = X\left(z^{-1}\right), R_{x1} < \left|z^{-1}\right| < R_{x2}$

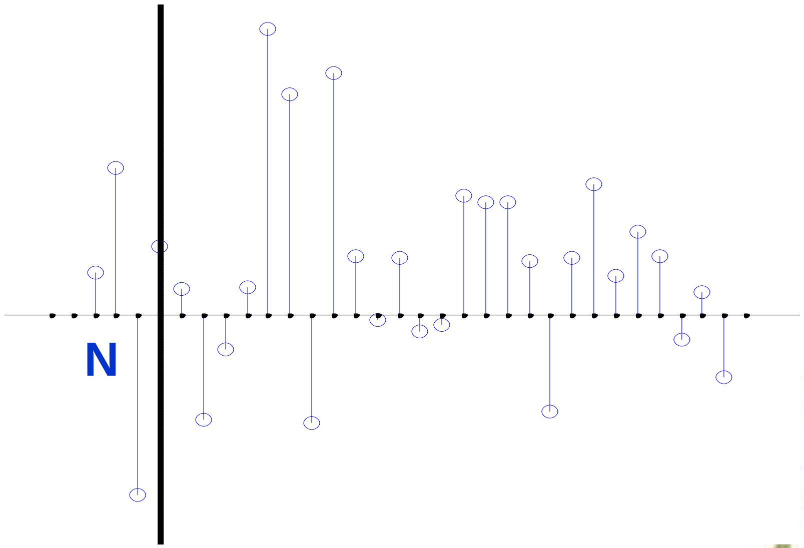
证： 根据双边*Z*变换的定义，则有

$$Z[x(-n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(z^{-1})^{-n} = X\left(z^{-1}\right)$$

5. 初值定理

若$k<N$（N为整数）时，$x(k)=0$，并且

$$x(n) \leftrightarrow X(z) \qquad \alpha<|z|<\infty$$



则 $$x(N)=\lim_{z\to\infty} z^N X(z)$$

证 根据双边Z变换的定义

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}=\sum_{n=N}^{\infty} x(n)z^{-n}=x(N)z^{-N}+x(N+1)z^{-(N+1)}+x(N+2)z^{-(N+2)}+\cdots$$

两端乘以z^N，得 $$z^N X(z)=x(N)+x(N+1)z^{-1}+x(N+2)z^{-2}+\cdots$$

取$z\rightarrow\infty$的极限，得 $$x(N)=\lim_{z\to\infty} z^N X(z)$$

如果N=0，序列为因果序列，得到x(0)点的值

$$x(0)=\lim_{z\to\infty} X(z)$$

即时域初值x(0)等效于z域X(z)终值

6. 终值定理（单边Z变换的性质）

若$x(n) \leftrightarrow X(z) \quad \alpha < |z| < \infty$,序列x(n)当n $\to \infty$ 时收敛,

则序列终值 $x(\infty) = \lim_{z\to 1}[(z-1)X(z)]$

证：根据单边Z变换的性质，则有

$$Z[x(n+1)-x(n)] = zX(z) - zx(0) - X(z) = (z-1)X(z) - zx(0)$$

移项并取极限

$$\lim_{z\to 1}[(z-1)X(z)] = \lim_{z\to 1}\{zx(0) + Z[x(n+1)-x(n)]\}$$

$$= x(0) + \lim_{z\to 1}\sum_{n=0}^{\infty}[x(n+1)-x(n)]z^{-n}$$

$$= x(0) + [x(1)-x(0)] + [x(2)-x(1)] + [x(3)-x(2)] + \cdots$$

$$= x(\infty)$$

1.由证明知终值定理是单边Z变换的性质
2.X(z)必须在单位圆上收敛

例 5-6 已知 $X(z)=\dfrac{z}{z-a}$ $(|z|>|a|)$，设 a 为正实数，试求其 $x(0)$ 与 $x(\infty)$。

解：由初值定理有 $x(0)=\lim\limits_{z\to\infty}X(z)=\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z}{z-a}=1$

由终值定理有

$$x(\infty)=\lim_{z\to1}(z-1)X(z)=\lim_{z\to1}(z-1)\frac{z}{z-a}=\begin{cases}1, & a=1\\0, & a\neq1\end{cases}$$

验证上述结论：由 $a^n u(n)\leftrightarrow\dfrac{z}{z-a}$ $(|z|>|a|)$ 可知

$$x(0)=1 \qquad x(\infty)=\begin{cases}1, & a=1\text{，极点位于单位圆上}\\0, & a<1\text{，极点位于单位圆内}\\\infty, & a>1\text{，极点位于单位圆外}\end{cases}$$

只有像函数 $X(z)$ 的全部极点都在单位圆内或含有 $z=1$ 的一阶极点时才能使用终值定理。

比较p217, 4.3节，例4-5

注意与初值定理的比较

扩展：任意值

$$x(k)=\lim_{z\to\infty}\{z^k[X(z)-\sum_{n=0}^{k-1}x(n)z^{-n}]\}$$

证明：

$$X(z)-\sum_{n=0}^{k-1}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}-\sum_{n=0}^{k-1}x(n)z^{-n}=\sum_{n=k}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

$$\lim_{z\to\infty}z^k\sum_{n=k}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

$$=\lim_{z\to\infty}\left\{z^k[x(k)z^{-k}+x(k+1)z^{-k-1}+x(k+2)z^{-k-2}+\cdots\right\}$$

$$=\lim_{z\to\infty}\left\{x(k)+x(k+1)z^{-1}+x(k+2)z^{-2}+\cdots\right\}=x(k)$$

得证

7. z域微分性质 (序列线性加权)

将$n \cdot x(n)$称为对序列$x(n)$进行线性加权

$$\text{若} \mathbf{Z}[x(n)] = X(z), \quad \alpha < |z| < \beta$$

$$\text{则} \mathbf{Z}[nx(n)] = -z \frac{d}{dz} X(z), \quad \alpha < |z| < \beta$$

$$\mathbf{Z}[n^m x(n)] = -z \frac{d}{dz}[-z \frac{d}{dz} \cdots - z \frac{d}{dz} X(z)]$$

式中， m为正整数。

证 根据双边Z变换的定义，则有

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}\qquad \alpha<|z|<\beta$$

对上式关于z求导一次， 得

$$\frac{dX(z)}{dz}=\frac{d}{dz}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\frac{d}{dz}(z^{-n})\right]$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)(-n)z^{-n-1}=-z^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}nx(n)z^{-n}$$

上式两边乘以-z，得

$$-z\frac{dX(z)}{dz}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}nx(n)z^{-n}$$

即：$\mathbf{Z}[nx(n)]=-z\dfrac{d}{dz}X(z),\quad \alpha<|z|<\beta$

同理可以证明 $\boldsymbol{Z}[n^m x(n)]=-z\dfrac{d}{dz}[-z\dfrac{d}{dz}\cdots-z\dfrac{d}{dz}X(z)]$

例5-7：已知Z[u(n)]=z/(z-1)，|z|>1
求nu(n)的z变换。

$$\mathcal{Z}[nu(n)] = -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}[u(n)]$$

$$= -z\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{z-1}\right] = \frac{z}{(z-1)^2}$$

|z|>1

8. 时域卷积定理

- 若 $Z[x(n)]=X(z),\ R_{x1}<|z|<R_{x2}$
- $Z[h(n)]=H(z),\ R_{h1}<|z|<R_{h2}$
- 则 $Z[x(n)*h(n)]=X(z)H(z)$
- $\max(R_{x1},R_{h1})<|z|<\min(R_{x2},R_{h2})$

零极点抵消时，收敛域可能会扩大

证 根据双边Z变换的定义，则有

$$Z[x(n)*h(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(n)*h(n)]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)]z^{-n}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n-m)z^{-n}$$

式中，第二个求和项是*h(n-m)*的双边*Z*变换。根据位移性质，有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n-m)z^{-n}=z^{-m}H(z)$$

$$Z[x(n)*h(n)]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)z^{-m}H(z)=X(z)H(z)$$

由证明过程知：

对任意序列，其双边z变换适用该性质；

对非因果序列，其单边z变换不适用该性质。

对因果序列，其单边z变换适用该性质。

p66 常函数卷积和

例 5-8 用时域卷积定理求斜变序列 $nu(n)$ 的 z 变换。

解：根据 $u(n)*u(n)=(n+1)u(n)$，且 $nu(n-1)=nu(n)$

$$u(n)*u(n)*\delta(n-1)=(n+1)u(n)*\delta(n-1)=nu(n-1)=nu(n)$$

$\updownarrow$

$$\left(\frac{z}{z-1}\right)^2 z^{-1}=\frac{z}{(z-1)^2}\quad(|z|>1)$$

$$(n+1)u(n)=nu(n)+u(n)$$

$$nu(n)=(n+1)u(n)-u(n)$$

例 5-10 已知 $x(n)=u(n)$，$h(n)=a^n u(n)-a^{n-1}u(n-1)$，求 $y(n)=x(n)*h(n)$

解：

$$\mathscr{Z}[x(n)]=\mathscr{Z}[u(n)]=\frac{z}{z-1}\quad(|z|>1)$$

$$\mathscr{Z}[h(n)]=\frac{z}{z-a}-\frac{1}{z-a}=\frac{z-1}{z-a}\quad(|z|>|a|)$$

$$\mathscr{Z}[y(n)]=\mathscr{Z}[x(n)*h(n)]=\frac{z}{z-1}\cdot\frac{z-1}{z-a}=\frac{z}{z-a}\quad(|z|>|a|)$$

所以

$$x(n)*h(n)=a^n u(n)$$

z=1 的极点被对应零点抵消

例5-11 求序列前n项累加和（部分和）的z变换

结论：若$x(n) \longleftrightarrow X(z)$，$\alpha<|z|<\beta$，则有

$$\sum_{m=-\infty}^{n} x(m) \leftrightarrow \frac{z}{z-1} X(z) \qquad \max(\alpha,1) < |z| < \beta$$

证 由于

$$x(n) * u(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)u(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{n} x(m)$$

$$u(k) \leftrightarrow \frac{z}{z-1}$$

|z|>1

所以，根据卷积性质，得

$$\sum_{m=-\infty}^{n} x(m) = x(n) * u(n) \leftrightarrow \frac{z}{z-1} X(z)$$

例：求x(n)=(0.5)^{n}u(n)序列的前n项累加和。

因为

$$Z[\sum_{m=-\infty}^{n} x(m)]=[\frac{z}{z-1}][\frac{z}{z-0.5}] = \frac{2z}{z-1} - \frac{z}{z-0.5}$$

$$\leftrightarrow \sum_{m=-\infty}^{n} x(m) = \sum_{m=0}^{n} 0.5^m = [2-0.5^n]u(n)$$

7. 序列相乘(z域卷积定理)

- 若 $Z[x(n)]=X(z)$, $R_{x1}<|z|<R_{x2}$
- $Z[h(n)]=H(z)$, $R_{h1}<|z|<R_{h2}$
- 则

$$\mathbf{Z}\,[x(n)h(n)]=\frac{1}{2\pi j}\oint_{c_1} X\left(\frac{z}{v}\right)H(v)v^{-1}dv$$

或

$$\mathbf{Z}\,[x(n)h(n)]=\frac{1}{2\pi j}\oint_{c_2} X(v)H\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv$$

- 式中c_1与c_2分别为两函数收敛域重叠部分逆时针旋转围线 。

典型序列Z变换

$x(n)$	$X(z)$
$\delta(n)$	1
$\delta(n-m) \quad (m>0)$	z^{-m}
$u(n)$	$\frac{z}{z-1}$
$a^n u(n)$	$\frac{z}{z-a}$
$e^{bn} u(n)$	$\frac{z}{z-e^b}$
$e^{jn\Omega} u(n)$	$\frac{z}{z-e^{j\Omega}}$
$\sin n\Omega u(n)$	$\frac{z\sin\Omega}{z^2-2z\cos\Omega+1}$
$\cos n\Omega u(n)$	$\frac{z(z-\cos\Omega)}{z^2-2z\cos\Omega+1}$
$\beta^n \sin n\Omega u(n)$	$\frac{z\beta\sin\Omega}{z^2-2\beta z\cos\Omega+\beta^2}$
$\beta^n \cos n\Omega u(n)$	$\frac{z(z-\beta\cos\Omega)}{z^2-2\beta z\cos\Omega+\beta^2}$

典型序列Z变换

$nu(n)$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$na^n u(n)$	$\frac{az}{(z-a)^2}$
$\mathrm{sh}n\Omega$	$\frac{z\,\mathrm{sh}\Omega}{z^2-2z\,\mathrm{ch}\Omega+1}$
$\mathrm{ch}n\Omega$	$\frac{z(z-\mathrm{ch}\Omega)}{z^2-2z\,\mathrm{ch}\Omega+1}$
$\frac{a^n}{n!}$	$e^{\frac{a}{z}}$
$\frac{(\ln a)^n}{n!}$	$a^{\frac{1}{z}}$
$\frac{1}{n}\quad(n=1,2,\cdots)$	$\ln\left(\frac{z}{z-1}\right)$
$\frac{n(n-1)}{2!}$	$\frac{z}{(z-1)^3}$
$\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$	$\frac{z}{(z-1)^{m+1}}$

z变换性质表

线性		$ax(n)+bh(n)$	$aX(z)+bH(z)$
共轭对称		$x^*(n)$	$X^*(z^*)$
反折		$x(-n)$	$X(z^{-1})$
尺度		$a^n x(n)$	$X(\frac{z}{a})$
z 域微分		$nx(n)$	$-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}X(z)$
z 域积分		$\frac{x(n)}{n}$	$\int_z^{\infty}\frac{X(\eta)}{\eta}\mathrm{d}\eta$
移序	双边	$x(n\pm m)$	$z^{\pm m}X(z)$
	单边	$x(n-m)\mathrm{u}(n)$	$z^{-m}\left[X(z)+\sum_{k=-m}^{-1}x(k)z^{-k}\right]$
		$x(n-m)\mathrm{u}(n-m)$	$z^{-m}X(z)$
		$x(n+m)\mathrm{u}(n)$	$z^{m}\left[X(z)-\sum_{k=0}^{m-1}x(k)z^{-k}\right]$

z变换性质表

时域卷积	$x(n) * h(n)$	$X(z)H(z)$
z 域卷积	$x(n)h(n)$	$\frac{1}{j2\pi}\oint_c X(v)H\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv$
部分和	$\sum_{m=0}^{n} x(m)$	$\frac{z}{z-1}X(z)$
初值定理	$x(0)=\lim_{z\to\infty}X(z)$	
终值定理	$x(\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$	