姓名＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿ 级＿＿＿＿ 专业＿＿＿＿ 学院＿＿＿＿

密 封 线

山东大学 复变函数与拉氏变换 课程试卷　　　　2011-2012 学年 第 一 学期

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分	总分人
得分												

得分	阅卷人

一、　判断题（每小题 1 分，分别用√或×表示正确和错误）

1、函数 $\omega=\arg(z)$ 在负实轴上处处不连续　√

2、$\mathrm{Re}(5e^{\frac{\pi}{4}i})<\mathrm{Im}(7e^{\frac{3\pi}{4}i})$　√

3、函数在 z 点不解析是其在 z 点不可导的充分条件　×

4、函数 $\sin z$ 的模最大值为 1　×

5、幂级数在其收敛域内收敛于一个解析函数　×

6、若 $z=0$ 为偶函数 $f(z)$ 的一个孤立奇点，则 $\mathrm{Res}[f(z),0]=0$　√

7、若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在 $z=2i$ 处收敛，则它必在 $z=1+i$ 处绝对收敛　√

8、函数 $u=y-x$ 是 $v=x+y$ 的共轭调和函数　√

9、$\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{(z^2+5z+6)^2}dz=\oint_{|z|=2}\frac{\sin z}{(z^2+5)^2}dz$　√

10、$L[(t-1)^2]=\frac{e^{-\pi s}}{s^{10}}$　×

得分	阅卷人

二、　填空题（每小题 2 分）

1、$i^i=$ $e^{-(2m+\frac{1}{2})\pi}$　m 为整数

2、若 $|a|=1$，则 $\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right|=$ 1

3、方程 $e^z=1+\sqrt{3}i$ 的解为：$\ln 2+(2k\pi+\frac{\pi}{3})i$，（$k$为整数）

4、$L(1-te^t)=$ $\frac{1}{s}-\frac{1}{(s-1)^2}$

5、函数 $\frac{1}{(1+z^2)^2}$ 在 $z=0$ 处展开所成的幂级数的收敛半径是：1

6、$\mathrm{Res}\left[z^ne^{\frac{1}{z}},0\right]=$ $\frac{1}{(n+1)!}$

7、$\oint_{|z|=1}\tan(\pi z)dz=$ $-4i$

8、令 n 为任意整数，则 $\oint_{|z-z_0|=\sqrt{2}}\frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}=$ $\begin{cases}2\pi i, & (n=0)\\ 0, & (n\neq 0)\end{cases}$

得分	阅卷人

三、 计算题（每题 8 分）

1、计算 $(i-\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}$

解：$=\sqrt[3]{2}e^{i(2k\pi+\frac{5}{6}\pi)/3}$

2、讨论函数 $f(z)=x^3-i(y^3-3y)$ 在何处可导？何处解析？并在可导点求出其导数。

解：令 $f(z)=u+iv$，根据 C-R 方程知 f(z) 仅在单位圆上可导，因此处处不解析且

$f'(z)=3x^2$。

3、计算下列积分：(1) $\int_{+i}^{2+2i} z^2dz$ 。 (2) $\oint_{|z|=2}\frac{1}{z^2-z}dz$

解：

(1) $\int_{+i}^{2+2i} z^2dz=\left.\frac{z^3}{3}\right|_{1+i}^{2+2i}=\frac{14}{3}(-1+i)$。

(2) 应用复合闭路定理或本卷填空题第 8 题得：

$\oint_{|z|=2}\frac{1}{z^2-z}dz=\oint_{|z|=2}\frac{1}{z-1}dz-\oint_{|z|=2}\frac{1}{z}dz=2\pi i-2\pi i=0$。

4、已知 $u=\frac{x}{x^2+y^2}$ 在右半平面（$\mathrm{Re}(z)>0$）是调和函数，求在该半平面解析的函数 $f(z)=u+iv$，使 $f(1+i)=\frac{1-i}{2}$。

解：此题为教材 56 页例 3.4.3。在该半平面内 $f'(z)=-\frac{1}{z^2}$，所以 $f(z)=\frac{1}{z}+C$。将 $f(1+i)=\frac{1-i}{2}$ 带入 $f(z)$ 得 $C=0$。

5、求 $\frac{1}{(z+1)(z-2)}$ 在 $1<|z|<2$ 内的洛朗展式。

解：$\frac{1}{(z+1)(z-2)}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z+1}\right]=\frac{1}{3}\left[\frac{-1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{1}{z}}\right]$

其中 $\left|\frac{z}{2}\right|<1,\left|-\frac{1}{z}\right|<1$。因此 $\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$，$\frac{1}{1+\frac{1}{z}}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{z}\right)^k$ 带入即得结果。

6、计算积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\cos(mx)}{1+x^2}dx,\quad (m>0)$。

解：教材 99 页例 5.4.5。$I=\int_0^{+\infty}\frac{\cos(mx)}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}e^{-m}$。

7、利用拉氏变换象函数积分性质计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}e^{-t}dt$。（提示：$L[\sin t]=\frac{1}{s^2+1}$）

解：根据拉氏变换象函数积分性质有 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}e^{-t}dt=\int_1^{+\infty}\frac{1}{s^2+1}ds=\arctan s\Big|_1^{+\infty}=\frac{\pi}{4}$。

得分	阅卷人

四、 证明题（每题 9 分）

1、设复平面上的点 z_1,z_2,z_3 满足 $z_1+z_2+z_3=0$ 且 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$，证明这三个点是内接于单位圆的正三角形顶点。

证明：根据 $-z_3=z_1+z_2$ 且 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ 可得 z_1 和 $-z_3$ 之间的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，证毕。

2、应用留数的概念证明方程 $x'(t)=-x(t)$，$x(0)=1$ 的解为 e^{-t}。

证明：对上式应用拉氏变换得到：$X(s)=\frac{1}{s+1}$。对 $X(s)$ 应用逆拉氏变换且根据 $s=-1$ 是 $\frac{e^{st}}{s+1}$ 的一级极点得 $x(t)=e^{st}|_{s=-1}=e^{-t}$。

08～09 学年 一 学期

山东大学 复变、场论与拉氏变换 课程试卷 （A） 2009.1

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分	总分人
得分												

注意：仅未学场论的同学做带*号的考题（即有关场论的考题换为带*号的题目）

得分	阅卷人

一、判断题（正确打 √，错打×．每题 1 分，共 6 分）

1. 若 $f(z)=u+iv$ 在点 $z_0=x_0+iy_0$ 可微，则在点 (x_0,y_0) 必有 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$．（ √ ）

2. $\arg(-3+4i)>\mathrm{Im}(\dfrac{3+i}{2-i})$ （ √ ）

3. 设 C 为 $f(z)$ 的解析域 D 内的一条简单正向闭曲线，则 $\oint_C f(z)dz=0$．（ × ）

4. 若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-i)^n$ 在 $z=\sqrt{3}$ 点收敛，则它必在 $z=-i$ 点收敛．（ × ）

5. 若 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(z+1)^{n+3}}$ 成立，则 $z_0=1$ 必是 $f(z)$ 的本性奇点．（ × ）

6. $L^{-1}\left[\dfrac{1}{s}\right]=L[\delta(t)]$．（ √ ）

得分	阅卷人

二、填空题（每小题 2 分，共 20 分）

1. $1^{\sqrt{2}}+i^i=$ $e^{2\sqrt{2}k\pi i}+e^{-2k\pi-\frac{1}{2}\pi}$．

2. 若 $|a|=1$ 或 $|b|=1$，则 $\left|\dfrac{a-b}{1-\bar{a}b}\right|$ 的值 A．

A． 大于 1； B． 等于 1； C． 小于 1； D． 无穷大

3. 函数 $w=\dfrac{1}{z}$ 将 z 平面上的曲线 $y=kx$ 映射到 w 平面上的曲线方程为 $-\dfrac{v}{u^2+v^2}=k\dfrac{u}{u^2+v^2}$

4. 若函数 $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$，则 $\mathrm{Res}[f(z),0]=$ $e-1$．

5. 设 $u(x,y,z)$ 为数量函数，$\vec{A}(x,y,z)$ 为矢量函数，则下列有意义的式子的序号为 ①③⑥．

①$rot(rot\vec{A})$； ②$rot(div\vec{A})$； ③$grad(div\vec{A})$；

④$grad(gradu)$； ⑤$div(div\vec{A})$； ⑥$div(rot\vec{A})$

5*．函数 $f(z)=\tan z$ 在 $z_0=-\dfrac{\pi}{8}$ 处所展泰勒级数的收敛半径为 $\dfrac{3}{8}\pi$．

6. 函数 $u=3x^2z-xy+z^2$ 在点 $P(1,-1,0)$ 处沿方向 ~~{0,-1,0}~~ $\{-1,1,-3\}$ 的函数值减小最快，且沿该方向的方向导数值为 $\sqrt{11}$．

6*. $L\left[(t-\pi)^3u(t-\pi)\right]=$ $e^{-s\pi}\cdot\dfrac{3!}{s^4}$．

7. 函数 $f(z)=\dfrac{z-1}{z(z+1)(z+4)}$ 在 $z_0=-1$ 处可展罗朗级数的所有圆环域为 $(0,1)$ $(1,3)$ $(3,+\infty)$．

8. 广义积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{t\cos 2t}{e^{3t}}dt=$ $-\dfrac{5}{169}$．

9. $L[\int_0^t e^{-t^2}dt+\int_0^t\cos(t-\tau)\sin\tau d\tau]=$ ________．

10. 设 C 为正向单位圆周 $|z|=1$，则积分 $\oint_C z^8\sin\dfrac{2}{z}dz=$ $\dfrac{2^9\pi i}{9!}$．

得分	阅卷人

三、计算题（每小题 8 分，共 48 分）

1. 讨论函数 $f(z)=x^3-i(y^3-3y)$ 的可导性，解析性，并写出可导点处的导数。

解：$u=x^3$，$v=3y-y^3$ $f'(z)=3x^2$

$\therefore u'_x=3x^2$，$u'_y=0$

$v'_x=0$，$v'_y=3-3y^2$

$\therefore$ 令 $\begin{cases}u'_x=v'_y\\u'_y=-v'_x\end{cases}$

$\therefore f(z)$ 在 $x^2+y^2=1$ 上可导

在复平面内处处不解析．

姓名 学号 级 专业 学院 密 封 线

姓名　学号　级　专业　学院

密　封　线

2. 设 C 为从 $z_1=0$ 到 $z_2=2+i$ 的直线段，求 $\int_C \mathrm{Im}(z)dz$.

解：C对应的方程为 $y=\frac{1}{2}x$.

$\therefore z=x+iy=2y+iy$.

$dz=(2+i)dy$.

$y\in(0,1)$.

$\mathrm{Im}(z)=y$.

$\therefore \int_C \mathrm{Im}(z)dz$

$=\int_0^1 y(2+i)dy$

$=(2+i)\cdot\frac{1}{2}y^2\big|_0^1$

$=1+\frac{1}{2}i$.

3. 设 $f(z)=\oint_C \dfrac{\sin\frac{\pi}{2}\xi}{\xi-z}d\xi$，其中 $C:|\xi|=2$ 且 $|z|\neq 2$，求 $f(1+5i)$，$f(\frac{3}{2})$，$f'(\frac{3}{2})$.

解：① $\because 1+5i$ 不在C内

$\therefore f(1+5i)=0$.

② $\because \frac{3}{2}$ 在C内

$\therefore f(\frac{3}{2})=\oint_C \dfrac{\sin\frac{\pi}{2}\xi}{\xi-\frac{3}{2}}d\xi$

$=2\pi i\cdot\sin(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{3}{2})$

$=+\sqrt{2}\pi i$.

③ $f(z)=2\pi i\cdot\sin(\frac{\pi}{2}z)$.

$f'(z)=2\pi i\cdot\cos(\frac{\pi}{2}z)\cdot\frac{\pi}{2}$

$\therefore f'(\frac{3}{2})$

$=\pi^2 i\cos(\frac{3}{4}\pi)$

$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi^2 i$.

4. 计算积分 $I=\oint_C \dfrac{e^{z+1}}{z(1-z)^3}dz$，其中 $C:|z|=r\,(r\neq 0,1)$.

解：被积函数有2个奇点：0和1

~~当两奇点均不在C内时~~

~~$I=0$~~

当0在C内，1不在C内时.

$I=e$.

当两奇点均在C内时

$I=e+\cancel{\ }\frac{2\pi i}{2!}e^2$

$=e+\pi i e^2$

5. 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)^2}$ 分别在圆环域 $0<|z|<1$ 和 $1<|z-1|<+\infty$ 内展成罗朗级数。

解：$0<|z|<1$ 时.

$f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)^2}$

$=\frac{1}{z}\cdot(-\frac{1}{1-z})'$

$=\frac{1}{z}\cdot(-\sum_{n=0}^{\infty}z^n)'$

$=\frac{1}{z}\cdot(-\sum_{n=0}^{\infty}nz^{n-1})$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-n)z^{n-2}$

$1<|z-1|<+\infty$ 时.

$f(z)=\frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{z}=\frac{1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{1+(z-1)}$

$=\frac{1}{(z-1)^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$.

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^{n-2}$.

6. 验证 $u=(x-y)(x^2+4xy+y^2)$ 为调和函数，并求出解析函数 $f(z)=u+iv$ 关于 z 的表达式。

解：$u'_x=x^2+4xy+y^2+(x-y)(2x+4y)$.

$=3x^2+6xy-3y^2$.

$u''_x=6x+6y$

$u'_y=-(x^2+4xy+y^2)+(x-y)(2y+4x)$.

$=3x^2-6xy-3y^2$

$u''_y=-6x-6y$

$\therefore u''_x+u''_y=0$.

$\therefore u$ 是调和函数

$\because f(z)=u+iv$ 解析

$\therefore u'_x=v'_y=3x^2+6xy-3y^2$

$v'_x=-u'_y=-3x^2+6xy+3y^2$.

设 $v=\int v'_y dy+\varphi(x)$

$=3x^2y+3xy^2-y^3+\varphi(x)$.

$\therefore v'_x=6xy+3y^2+\varphi'(x)$.

$=-3x^2+6xy+3y^2$

$\therefore \varphi'(x)=-3x^2$

$\therefore \varphi(x)=-x^3+C$

$\therefore v=3x^2y+3xy^2-x^3-y^3+C$

$\therefore f(z)=z^3+\bar{z}^3+iC$

山东大学________________课程试卷

08～09 学年 一 学期

得分	阅卷人

四、应用题（每小题 10 分，共 20 分）

1．利用 Laplace 变换求微分方程 $y''-2y'-3y=3e^{2t}(t>0)$ 满足条件 $y(0)=1, y'(0)=-1$ 的特解。

解：设 $y(t)=Y(s)$

$\therefore (s^2Y(s)-s+1)-2(sY(s)-s)-3Y(s)=\frac{3}{s-2}$

$Y(s)(s^2-2s-3)=\frac{3}{s-2}+s-1-2s$

$=\frac{-s^2+s+5}{s-2}$

$Y(s)=\frac{-s^2+s+5}{(s+1)(s-2)(s-3)}$

$Res[Y(s)e^{st},-1]=\frac{1}{4}e^{-t}$

$Res[\cdots,2]=-e^{2t}$

$Res[\cdots,3]=\frac{1}{4}e^{3t}$

$\therefore$ 特解为 $y=\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{4}e^{3t}-e^{2t}$

2．设力场 $\vec{F}=2xyz^3\vec{i}+x^2z^3\vec{j}+3x^2yz^2\vec{k}$，(1) 试证 $\vec{F}$ 为有势场，并求出 $\vec{F}$ 的所有原函数 $u(x,y,z)$ 及势函数 $v(x,y,z)$；(2) 求质点在力场内从 $A(-2,3,-1)$ 移动到 $B(-3,4,2)$ 所作的功。

2*．(1) 利用留数计算积分 $\oint_C \tan \pi z dz$，其中 C 为正向圆周 $|z|=3$。

(2) 设 $u(x,y)$ 为区域 D 内的调和函数，试问函数 $f=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$ 在 D 内是否解析？为什么？

解：(1) $rot\vec{F}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xyz^3 & x^2z^3 & 3x^2yz^2 \end{vmatrix}$

$=0$

$\therefore \vec{F}$ 是有势场

$u(x,y,z)=\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} 2xyz^3dx+x^2z^3dy+3x^2yz^2dz$

$=-x^2yz^3+C$

$v(x,y,z)=u(x,y,z)=-x^2yz^3+C$

(2) $W=u(B)-u(A)$

$=-300$

得分	阅卷人

五、证明题(本题 6 分)

计算积分 $\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz$，从而证明：$\int_0^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta=\pi$.

$\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z}=2\pi i\cdot e^z|_{z=0}=2\pi i$

~~设 $e^z=e^{x+iy}$~~

设 $z=e^{it}$，$t\in(0,2\pi)$

$\therefore z=\cos t+i\sin t$

$e^z=e^{e^{it}}=e^{\cos t}\cdot e^{i\sin t}$

$=e^{\cos t}[\cos(\sin t)+i\sin(\sin t)]$

$dz=ie^{it}dt$

$\therefore \oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz=\int_0^{2\pi}\frac{e^{\cos t}[\cos(\sin t)+i\sin(\sin t)]}{e^{it}}\cdot ie^{it}dt$

$=\int_0^{2\pi}ie^{\cos t}\cos(\sin t)dt-\int_0^{2\pi}e^{\cos t}\sin(\sin t)]dt$

$\because ie^{\cos t}\cos(\sin t)$ 是偶函数，$e^{\cos t}\sin(\sin t)$ 是奇函数

$\therefore \oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz$

$=\int_0^{2\pi}ie^{\cos t}\cos(\sin t)dt$

$=2\int_0^{\pi}ie^{\cos t}\cos(\sin t)dt$

$=2\pi i$

$\therefore \int_0^{\pi}e^{\cos t}\cos(\sin t)dt=\pi$

姓名 学号 级 专业 学院

密 封 线

姓名 ______ 学号 ______ 级 ______ 专业 ______ 学院 ______

密 封 线

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分	总分人
得分												

注意：仅未学场论的同学做带*号的考题（即有关场论的考题换为带*号的题目）

得分	阅卷人

一、判断题（正确打√，错打×. 每题1分，共8分）

1. 若 z_0 为函数 $f(z)$ 的奇点，则 $f'(z_0)$ 不存在. （ √ ）

2. 若函数 $f(z)=u+iv$ 在点 $z_0=x_0+iy_0$ 可微，则在点 (x_0,y_0) 处必有

$$u'_x-iu'_y=v'_y+iv'_x.$$ （ × ）

3. $\arg(-3+4i)>\mathrm{Re}(3e^{\frac{\pi}{3}i})$ （ ）

4. 设 C 为 $f(z)$ 的解析域 D 内的一条简单正向闭曲线，则 $\oint_C f(z)f''(z)dz=0$.

（ × ）

5. 复级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[(1+\frac{1}{n})^n+i\frac{3}{n^2}\right]$ 必为发散级数. （ ）

6. $z_0=-1$ 必是 $f(z)=\ln(z+1)$ 的本性奇点. （ × ）

7. $L^{-1}\left[\frac{1}{s^4}e^{-s\pi}\right]=\frac{1}{6}(t-\pi)^3u(t-\pi)$，其中 $u(t-\pi)$ 为单位阶跃函数. （ √ ）

8. $\left|2\cos^2 z+1\right|\le 3\left|\frac{x+iy}{x-iy}e^{ixy}\right|$. （ ）

得分	阅卷人

二、填空题（每小题3分，共24分）

1. 复数 $(-\sqrt{3}-i)^3$ 的指数表达式为 $8e^{i(\pi+2k\pi)}$.

2. $1^{\sqrt{2}}+i^i=$ $e^{\sqrt{2}k\pi}+e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi}$.

3. $L[1+\delta(t)+2^t]=$ $\frac{1}{s}+1+\frac{1}{s-\ln 2}$.

4. z 平面上的曲线 $x^2+y^2=2$ 在映射 $w=\frac{1}{z}$ 下的像曲线方程为 $\frac{1}{u^2+v^2}=2$.

5. 函数 $f(z)=3\tan z$ 在 $z_0=-\frac{\pi}{6}$ 处所展泰勒级数的收敛半径为 $\frac{1}{3}\pi$.

6. 矢量场 $\vec{A}=\{\frac{x^3}{3},\frac{y^3}{3},\frac{z^3}{3}\}$ 穿过闭曲面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 外侧的通量 $\Phi=$ $\frac{4}{5}\pi R^5$.

6*. 函数 $f(z)=\frac{z-1}{z(z+1)(z+4)}$ 在 $z_0=-1$ 处可展罗朗级数的所有圆环域为 (1, 2) (2, 5) (5, +∞).

7. 函数 $u=x^2y+xyz$ 在点 (1, 1, 1) 处方向导数的最大值为 $\cancel{\sqrt{15}}\sqrt{14}$.

7*. $L[\int_0^t\cos(t-\tau)\sin\tau d\tau]=$ $\frac{s}{s^2+1}$.

8. 设向量场 $\vec{A}=\{3y,\ 2z^2,\ xy\}$，$\vec{B}=\{x^2,\ 0,\ -4\}$，则 $div(\vec{A}\times\vec{B})=$ x^3-4x^2z+12

8*. $\mathrm{Res}\left[z^ne^{\frac{1}{z}},0\right]=$ $\frac{1}{(n+1)!}$.

得分	阅卷人

三、计算题（每小题7分，共42分）

1. 已知 $\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1$，计算 $\mathrm{Res}[\frac{1}{z\cos z},\frac{\pi}{2}]$.

解：$\mathrm{Res}[\frac{1}{z\cos z},\frac{\pi}{2}]$

$=\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}(z-\frac{\pi}{2})\frac{1}{z\cos z}$

$=\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{z}{\cos z+z(-\sin z)}$

$=1$

姓名________ 学号________ 级 ________ 专业________ 学院________

密　封　线

2. 计算广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{t\sin 2t}{e^{3t}}dt$.

解：原式 $= \cancel{F}\, L[t\sin 2t]\big|_{s=+3}$

$= -L'[\sin 2t]\big|_{s=3}$

$= -\frac{-4s}{(s^2+4)^2}\Big|_{s=3}$

$= \frac{12}{169}$

3. 利用留数计算积分 $\oint_C \tan\pi z dz$，其中 C 为正向圆周 $|z|=3$.

介绍这种　留数定理

4. 计算积分 $I=\oint_C\frac{e^{z+1}}{z(1-z)^3}dz$，其中　$C:|z|=r\,(r\neq 0,1)$.

解：

5. 将函数 $f(z)=\frac{1}{z(1+z)^2}$ 分别在圆环域 $0<|z|<1$ 和 $1<|z+1|<+\infty$ 内展成罗朗级数。

解：在 $0<|z|<1$ 内

$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\left(-\frac{1}{1+z}\right)'$

$=\frac{1}{z}\cdot\left(-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n\right)'$

$=\frac{1}{z}\cdot\left(-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n\cdot z^{n-1}\right)$

$=\sum_{n=0}^{\infty}n(-1)^{n+1}\cdot z^{n-2}$

在 $1<|z+1|<+\infty$ 内

$f(z)=\cancel{\frac{1}{z}\cdot\left(-\frac{1}{1+z}\right)'}\ \frac{1}{(z+1)^2}\cdot\frac{1}{z}$

$=\cancel{\frac{1}{z}}\ \frac{1}{(z+1)^2}\cdot\cancel{\left[\frac{1}{1-(z+1)}\right]}\left[\frac{1}{z+1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z+1}}\right]$

$=\frac{1}{(z+1)^3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z+1}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+1)^{n+3}}$

6. 问正实数 k 取何值时，$v=e^{kx}\sin y$ 为调和函数，并求出解析函数 $f(z)=u+iv$ 关于 z 的表达式。

解：$v_x'=ke^{kx}\sin y$

$v_x''=k^2e^{kx}\sin y$

$v_y'=e^{kx}\cos y$

$v_y''=-e^{kx}\sin y$

∵ v 是调和函数

∴ $v_x''+v_y''=0$

即 $(k^2-1)e^{kx}\sin y=0$

∴ $k=\pm 1$

$u_x'=v_y'=e^{kx}\cos y$

$u_y'=-v_x'=ke^{kx}\sin y$

∴ 设 $u=\int ke^{kx}\sin y\,dy+\varphi(x)$

$=-ke^{kx}\cos y+\varphi(x)$

$u_x'=-k^2e^{kx}\cos y+\varphi'(x)=e^{kx}\cos y$

∴ $\varphi'(x)=2e^{kx}\cos y$　∴ $\varphi(x)=2e^{kx}\cos y+C$

∴ $u=-ke^{kx}\cos y+2e^{kx}\cos y+C$

当 $k=1$ 时　$f(z)=e^x e^{iy}+C$

$=e^z+C$

当 $k=-1$ 时 $f(z)=$

姓名 学号 级 专业 学院

密 封 线

得分	阅卷人

四、应用题（每小题 10 分，共 20 分）

1. 利用 $Laplace$ 变换求积分方程 $y'-4y+4\int_0^t y dt=\frac{1}{3}t^3$ 满足条件 $y(0)=0$ 的特解.

2. 设力场 $\vec{F}=\{2xyz^3, x^2z^3, 3x^2yz^2\}$，(1) 试证 $\vec{F}$ 为保守场；(2) 求出 $\vec{F}$ 的所有原函数 $u(x,y,z)$ 及势函数 $v(x,y,z)$；(3) 求质点在力场内从 $A(-3,3,-1)$ 移动到 $B(-2,3,1)$ 所作的功。

2*. (1) 设 $u(x,y)$ 为区域 D 内的调和函数，试问函数 $f=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$ 在 D 内是否解析？为什么？

(2) 设 C 为从 $z_1=0$ 到 $z_2=3+i$ 的直线段，求 $\int_C \bar{z}\,\mathrm{Im}(z)dz$.

得分	阅卷人

五、证明题(本题 6 分)

计算积分 $\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz$ ，并证明：$\int_0^{\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta=\pi$.

姓名　　学号　　班级　　专业　　学院　　密　封　线

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分	总分人
得分												

一、判断题（正确打√，错误打×，每小题 1 分）

1．复变函数 $f(z)=u+iv$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 点连续的充分必要条件是 $u(x,y),v(x,y)$ 均在 (x_0,y_0) 点连续．（√）

$\Rightarrow$ $\Leftarrow$

2．$\mathrm{Re}(5e^{\frac{\pi}{3}i})<\arg(7+5i)$．（√）

解式有

3．设 $f(z)=u+iv$，若 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$ 存在，则 $\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=f'(z)$．（×）

4．设 C 为 $f(z)$ 的解析域 D 内的一条简单正向闭曲线，则 $\oint_C f^2(z)dz=0$．（×）

单连

5．若 $f(z)=u+iv$ 是解析函数，则 u,v 都是调和函数．（×）

6．幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ 必在其收敛圆上收敛．（×）

7．$z_0=1$ 为函数 $f(z)=\frac{\cot \pi z}{(z-1)^2}$ 的二级极点．3级（√）

8．$\oint_{|z|=4}\frac{1}{(z-1)(z+3)}dz=\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}}\frac{1}{(z-1)(z+3)}dz+\oint_{|z+2|=2}\frac{1}{(z-1)(z+3)}dz$（√）

1, −3　　−3内

9．$L^{-1}\left[\frac{1}{s^3}+1\right]=\frac{1}{2}t^2+u(t)$　$\delta(t)$（×）

10．设 $f(z)$、$g(z)$ 在单连域 D 内解析，C 为 D 内的任意一条正向简单闭曲线，如果 $f(z)=g(z)$ 在 C 上处处成立，则在 C 内必有 $f(z)=g(z)$ 处处成立．（√）

二、填空题（每小题 3 分）

$x=1+\cos\theta$　$y=\sin\theta$

1．复数 $z=1+\cos\theta+i\sin\theta$　$(-\pi<\theta\le\pi)$ 的三角表示式为 $\sqrt{2(1+\cos\theta)}$

$1+e^{i\theta}$

$2|\cos\frac{\theta}{2}|\left[\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right]$

$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2}$

2．若实数 a,b,x,y 满足等式 $(x+iy)e^{i(a+y)}=(a+ib)(x-iy)$，则 $a^2+b^2=$ 1．

3．函数 $W=iz$ 将 z 平面上的曲线 $|z-i|=2$ 映射到 W 平面的曲线方程为 $(v-1)^2+u^2$

4．方程的 $e^{2iz}+\frac{1-i}{1+i}$ 全部解为 $-\frac{\pi}{4}+k\pi$．

$-i$　$e^{\ln(-i)}$

5．设 $f(z)=k\ln(x^2+y^2)+i\arctan\frac{y}{x}$ 在区域 $x>0$ 内是解析函数，则实数 $k=\frac{1}{2}$．

6．函数 $f(z)=\tan z$ 在点 $z_0=\frac{2\pi}{3}$ 处所展泰勒级数的收敛半径为 $\frac{\pi}{6}$．

$\frac{\pi}{2}+k\pi$

$0<|z+1|<1$，$1<|z+1|<3$

7．函数 $f(z)=\frac{z+3}{z(z+1)(z+4)}$ 在 $z_0=-1$ 处可展罗朗级数的所有圆环域是 $3<|z+1|<\infty$

8．$\mathrm{Res}[z^4\sin\frac{1}{z},0]=\frac{1}{5!}$．

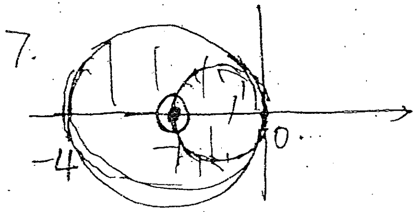
$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{2n-3}}$

9．广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$．　$\frac{\pi}{2}-\arctan 0$

10．设 $L[f_1(t)]=F_1(s)$，$L[f_2(t)]=F_2(s)$，则 $L[5^t+\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau]=\frac{1}{s-\ln 5}+F_1F_2$

三、计算题（第 1、2 小题每题 6 分，其余每小题 8 分）

1．讨论函数 $f(z)=(x-y)^2+2(x+y)i$ 在何处可导，何处解析，并求其可导点处的导数．



-4　0

$\arctan\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\arctan\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}$

$=\arctan\frac{\sin\theta/2}{\cos\frac{\theta}{2}}\Rightarrow\frac{\theta}{2}$

$\gamma=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2+2\cos\theta}=\sqrt{2\cdot 2\cos^2\frac{\theta}{2}}=2|\cos\frac{\theta}{2}|$

学院________ 专业________ 级________ 学号________ 姓名________

密 封 线

山东大学________________课程试卷　　　　　　　　　　　　　　07~08 学年 第二 学

2. 设C为从$z_1=0$到$z_2=2+i$的直线段，求$\int_C \mathrm{Im}(z)dz$.

3. 设C为$|z-(1+i)|=\sqrt{2}$的正向，求$\oint_C \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$.

4.（力学 06 的同学不做该题）

计算积分$\oint_C \tan \pi z dz$，其中C为正向圆周$|z|=4$.

5. 将$f(z)=\frac{1}{z(1-z)^2}$分别在圆环域$0<|z|<1$和$1<|z-1|<+\infty$内展开成罗朗级数.

姓名________ 学号________ 级________ 专业________ 学院________ 密 封 线

四、应用题（8 分）

利用 *Laplace* 变换求积分方程 $y'-4y+4\int_0^t y\,dt=\frac{1}{3}t^3$ 满足条件 $y(0)=0$ 的特解.

五、证明题（16 分）（力学 06 的同学不做该大题）

1．证明 $u(x,y)=y^3-3x^2y$ 为调和函数，再求其共轭调和函数 $v(x,y)$，并写出 $f(z)=u+iv$ 关于 z 的表示式.

2．设 $\varphi(x,y),\psi(x,y)$ 都是调和函数，而 $s=\varphi_y-\psi_x, t=\varphi_x+\psi_y$，试证：$s+it$ 是 $x+iy$ 的解析函数.

*五、综合题（24 分）（仅力学 06 的同学做该大题）

1．设矢量场 $\vec{A}=\{axz+x^2,\ \ by+xy^2,\ \ z-z^2+cxz-2xyz\}$ 为无源场，求实常数 a、b、c、的值。

2．设矢量场 $\vec{A}=(4xy-3x^2z^2)\vec{i}+2x^2\vec{j}-2x^3z\vec{k}$，(1) 试证 $\vec{A}$ 为保守场；(2) 求 $\vec{A}$ 的所有势函数 $v(x,y,z)$；(3) 求质点在场内由 A(1,-2,1)移动到 B(3,1,4)所作的功。

3．证明 $u(x,y)=y^3-3x^2y$ 为调和函数，再求其共轭调和函数 $v(x,y)$，并写出 $f(z)=u+iv$ 关于 z 的表示式.

姓名______ 学号______ 级______ 专业______ 学院______

密 封 线

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

一、判断题（正确打√，错误打×，每小题 1 分）

1.函数 $\sin z+\cos z$ 的模的最大值为 2. （　）

2..设 $v=v(x,y)$ 是区域 D 内的调和函数，则 $f(z)=v'_y+iv'_x$ 在 D 内解析。（　）

3.函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在点 $z_0=x_0+iy_0$ 可微等价于 $u(x,y)$和$v(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微。 （　）

4.若 $f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-z_0)^m}$， $g(z)$ 在 z_0 点解析，则 z_0 必为 $f(z)$ 的 m 级极点。（　）

5.若 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(z-1)^{n+3}}$ 在 $1<|z-1|<+\infty$ 内成立，由式中含无限个负幂项知 $z_0=1$ 是 $f(z)$ 的本性奇点。 （　）

6.设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，$F(z)$ 是 $f(z)$ 的一个原函数，C 为 D 内的一条正向闭曲线，则 $\oint_C F^{(n)}(z)dz=0$. （　）

7.函数 $f(z)=\tan z$ 在 $z_0=\dfrac{\pi}{6}$ 处所展成泰勒级数的收敛半径必为 $\dfrac{\pi}{3}$.（　）

8. 数量函数 $u(x,y,z)$ 的梯度场必是无源场。 （　）

二、填空题（每小题 3 分）

1. $\mathrm{Re}(\cos i)=$______.

2. $Ln(-1+\sqrt{3}i)=$______.

3.函数 $w=\dfrac{1}{z}$ 将 z 平面上的曲线 $y=4$ 映射到 w 平面上的曲线方程为______.

4. $i^{\frac{1}{i}}=$______.

5.设 $f(z)$ 在 z 平面上解析，且在 $z=0$ 点所展成的幂级数为 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，则对任意正整数 k，有 $\mathrm{Re}s\left[\dfrac{f(z)}{z^k},0\right]=$______.

6.若 $f(\xi)=\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{2z^2+z+1}{z-\xi}dz$，$|\xi|\neq 2$，则 $f(1)=$___. $f(3+5i)=$___, $f'(1)=$___.

7.数量场 $u=xy^2+yz^3$ 在点 P(2,-1,1)处沿方向 $\vec{\Gamma}=$______ 的函数值减小最快。

8. $\mathrm{Re}\,s[z^2\sin\dfrac{1}{z},0]=$______.

9. $L[3^t+\int_0^t\sin\tau\cos(t-\tau)d\tau]=$______.

10.广义积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{t\cos 2t}{e^{3t}}dt=$______.

三、计算、证明题（第 1、2 小题每题 7 分，其余每小题 8 分）

1. 讨论函数 $f(z)=x^3-i(y^3-3y)$ 的可导性，解析性，并写出可导点处的导数。

密 封 线

2．设 C 为从 $z_1=0$ 到 $z_2=2+i$ 的直线段，求 $\int_C \mathrm{Im}(z)dz$．

3．计算积分 $\oint_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz$，(1)当点 0 在 C 内，点 1 在 C 外；(2)当点 1 在 C 内，点 0 在 C 外；(3)当点 0，1 均在 C 内；(4)当点 0，1 均在 C 外。

4．将函数 $f(z)=\frac{1}{z^2(z+1)^2}$ 分别在圆环域 $0<|z|<1$ 和 $1<|z|<+\infty$ 内展成罗朗级数。

5．设向量场 $\vec{A}=\{3y,\ 2z^2,\ xy\}$，$\vec{B}=\{x^2,\ 0,\ -4\}$，求 $div(\vec{A}\times\vec{B})$；$grad(\vec{A}\cdot\vec{B})$．

姓名________ 学号________ 级________ 专业________ 学院________

密 封 线

6. 设矢量场 $\overline{A}=(4xy-3x^2z^2)\overline{i}+2x^2\overline{j}-2x^3z\overline{k}$，(1) 试证 $\overline{A}$ 为保守场；(2) 求 $\overline{A}$ 的所有势函数 $v(x,y,z)$；(3) 求质点在场内由 A(1,-2,1)移动到 B(3,1,4)所作的功。

7. 利用 *Laplace* 变换求微分方程 $y''-2y'-3y=4e^{2t}\,(t>0)$ 满足条件 $y(0)=2,y'(0)=8$ 的特解。

8. 证明 $u(x,y)=y^3-3x^2y$ 为调和函数，再求其共轭调和函数 $v(x,y)$，并写出 $f(z)=u+iv$ 关于 z 的表示式。

2006. 6 复变函数、场拉试卷参考答案

一、判断：2、6、7 正确打√，其余错误打×

二、填空：1. $\frac{1}{2}(e+e^{-1})$； 2. $\ln 2+(2k\pi+\frac{2\pi}{3})i$； 3. $u^2+v^2+\frac{1}{4}v=0$； 4. $e^{2k\pi+\pi i/2}$ ；

5. a_{k-1}； 6. $8\pi i$， 0， $10\pi i$； 7. $\{-1,\ 3,\ 3\}$； 8. $-\frac{1}{6}$； 9. $\frac{1}{s-\ln 3}+\frac{s}{(s^2+1)^2}$； 10. $\frac{5}{169}$.

三、1. 由 $u'_x=v'_y,u'_y=-v'_x$ 得 $x^2+y^2=1$ 上可导,……4 分,但处处不解析, $f'(z)=3x^2$； …7 分.

2. 曲线 C 的参数方程 $z=x+\frac{1}{2}xi$， $\int_C \mathrm{Im}(z)dz=\int_C ydz=\int_0^2\frac{1}{2}x(1+\frac{1}{2}i)dx=1+\frac{1}{2}i$. ……7 分.

3. (1)C 内只含一级极点 $z_1=0$ 时， $I_1=2\pi i\,\mathrm{Re}\,s[f(z),0]=2\pi i\lim\limits_{z\to 0}\frac{e^z}{(1-z)^3}=2\pi i$ 或由柯西积分

公式得 $I_1=2\pi i\frac{e^z}{(1-z)^3}\Big|_{z=0}=2\pi i$……2 分

(2)C 内只含三级极点 $z_2=1$ 时， $I_2=2\pi i\,\mathrm{Re}\,s[f(z),1]$

$=2\pi i\cdot\frac{1}{2!}\lim\limits_{z\to 1}\frac{d^2}{dz^2}[(z-1)^3\frac{e^z}{z(1-z)^3}]=-e\pi i$ ……5 分

(3) C 内既含 $z_1=0$ 又含 $z_2=0$ 时， $I_3=I_1+I_2=(2-e)\pi i$

(4) C 内不奇点时， $I_4=0$. ……8 分

4. 在 $0<|z|<1$ 内， 由 $\frac{1}{1+z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$，两边求导得 $-\frac{1}{(1+z)^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n nz^{n-1}$，

$f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nz^{n-3}$，在 $1<|z|<+\infty$ 内， $\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+1/z}=\frac{1}{z}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^n}$

两边求导得 $-\frac{1}{(1+z)^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{z^{n+2}}$ ， $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{z^{n+4}}$ ……8 分

5. $\vec{A}\times\vec{B}=\{-8z^2,\ x^3y+12y,\ -2x^2z^2\}$ $div(\vec{A}\times\vec{B})=x^3-4x^2z+12$ ……5 分

$grad(\vec{A}\cdot\vec{B})=\{6xy-4y,\ 3x^2-4x,\ 0\}$……8 分

6. $D\vec{A}=\begin{pmatrix}4y-6xz^2 & 4x & -6x^2z\\ 4x & 0 & 0\\ -6x^2z & 0 & -2x^3\end{pmatrix}$， $rot\vec{A}=\vec{0}$，故 $\vec{A}$ 为保守场 ……2 分

（2） $u=\int_0^x 0dx+\int_0^y 2x^2dy+\int_0^z(-2x^3z)dz=2x^2y-x^3z^2$，

姓名________ 学号________ 级________ 专业________ 学院________

密 封 线

注意：仅未学场论的同学做带*号的考题（即有关场论的考题换为带*号的题目）.

一、判断题（正确打√，错误打×. 每小题1分）

1. 函数$w=\arg(z)$在$z=-1$处不连续.　（　）

2. $\operatorname{Re}(5e^{\frac{\pi}{6}i})>\operatorname{Im}(7e^{\frac{\pi}{6}i})$.　（　）

3. 函数$f(z)$在z_0点不解析是$f(z)$在z_0点不可导的充分条件.　（　）

4. 函数$\cos z$的模的最大值为1.　（　）

5. 设函数$f(z)$在单连域B内处处解析，且不为零，C为B内的任意一条正向简单闭曲线，则$\oint_C\left[\frac{f'(z)}{f(z)}\right]^2dz=0$　（　）

6. 已知$\frac{1}{z(z-1)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+3}}$在$1<|z-1|<+\infty$内成立，由式中含无限个负幂项知$z_0=1$是它的本性奇点。　（　）

7. 若幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$在$z=2i$处收敛，则它必在$z=-1+i$处收敛。　（　）

8. 函数$u=y-x$是$v=y+x$的共轭调和函数。　（　）

9. $\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{(z^2+5z+6)^3}dz=\oint_{|z|=2}\frac{\sin^3 z}{z^2+5}dz$.　（　）

10. $L\left[(t-\pi)^9\right]=\frac{1}{s^{10}}e^{-\pi s}$.　（　）

二、填空题（每小题2分）

1. 复数$(-\sqrt{3}-i)^2$的模为____，幅角主值为______.

2. $i^i=$______________________.

3. 设$u(x,y,z)$为数量函数，$\bar{A}(x,y,z)$为矢量函数，则下列有意义的式子的序号为__________.

①$div(grad\bar{A})$；　②$rot(rot\bar{A})$；　③$div(div\bar{A})$；

④$grad(gradu)$；　⑤$grad(rot\bar{A})$；　⑥$grad(div\bar{A})$

3*. 方程$e^z=1+\sqrt{3}i$的解为______________________.

4. 函数$u=3x^2z-xy+z^2$在点$P(1,-1,0)$处沿方向__________的方向导数最大，其最大值为______.

4*. $L[\int_0^t\sin\tau\cos(t-\tau)d\tau]=$__________，$\oint_{|z|=1}\bar{z}dz=$______.

5. 函数$f(z)=\tan z$在$z_0=\frac{\pi}{3}$处所展成泰勒级数的收敛半径为________.

6. $\operatorname{Res}\left[z^ne^{\frac{1}{z}},0\right]=$________.

7. $L^{-1}\left[1+\frac{1}{s}\right]=$__________.

8. 广义积分$\int_0^{\infty}te^{-2t}\cos 3t\,dt$的值为________.

三、计算题（第1-5小题每题6分，其余每小题8分）

1. 求函数$w=\frac{1}{z}$将z平面上的曲线$x=1$映射到w平面上的曲线方程。

2. 讨论函数$f(z)=x^3-i(y^3-3y)$的可导性，解析性，并写出可导点处的导数。

姓名______ 学号______ 级______ 专业______ 学院______

密 封 线

3．设C为从$z_1=0$到$z_2=2+i$的直线段，求$\int_C \mathrm{Im}(z)dz$.

4．计算留数$\mathrm{Re}\,s\left[\frac{5z-2}{z(z-1)^2},0\right]$，$\mathrm{Re}\,s\left[\frac{5z-2}{z(z-1)^2},1\right]$.

5．计算积分$\oint_C \tan \pi z dz$，其中C为正向圆周$|z|=4$.

6．计算积分$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz$，(1)当点0在C内，点1在C外；(2)当点1在C内，点0在C外；(3)当点0，1均在C内；(4)当点0，1均在C外。

7．$f(z)=\frac{1}{z(1-z)^2}$分别在圆环域$0<|z|<1$和$1<|z-1|<+\infty$内展开成罗朗级数。

姓名______ 学号______ 级______ 专业______ 学院______

密　封　线

8．利用 *Laplace* 变换求方程 $y''-2y'-3y=4e^{2t}$ 满足条件 $y(0)=2, y'(0)=8$ 的解。

9．设向量场 $\overline{A}=\{3y,\ 2z^2,\ xy\}$，$\overline{B}=\{x^2,\ 0,\ -4\}$，求 $div(\overline{A}\times\overline{B})$；$rot(\overline{A}+\overline{B})$；$grad(\overline{A}\cdot\overline{B})$．

9*．求拉氏变换 $L[3^t+\int_0^t\frac{\sin t}{t}dt]$ 和拉氏逆变换 $L^{-1}\left[\frac{s+1}{s^2+2s}\right]$．

四、证明题(12 分)

1．证明 $u(x,y)=y^3-3x^2y$ 为调和函数，再求其共轭调和函数 $v(x,y)$，并写出 $f(z)=u+iv$ 关于 z 的表示式。

2．设 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<R$ 内解析且不为零，z_0 是 $f(z)$ 的 n 级极点，试证：

$$\oint_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz=-2n\pi i$$

其中 C 为正向圆周 $0<|z-z_0|<r$　（$r<R$）．

复变、场论与拉氏变换试卷参考答案

一、判断：3、4、6、10 错误，其余正确

二、填空：1. 4、$\pi/3$；2. $e^{-(2k+\frac{1}{2})\pi}$；3. (2),(6)；3*. $\ln 2+(2k\pi+\frac{\pi}{3})i$；4. $\{1,\ -1,\ 3\}$, $\sqrt{11}$；

4*. $\frac{s}{(s^2+1)^2}$, $2\pi i$；5. $\frac{\pi}{6}$；6. $\frac{1}{(n+1)!}$；7. $1+\delta(t)$或$u(t)+\delta(t)$；8. $-\frac{5}{169}$.

三、1.设 $w=u+iv$，则 $u=\frac{x}{x^2+y^2}$，$v=\frac{-y}{x^2+y^2}$ (3 分)，将 $x=1$ 代入得 $u^2+v^2-u=0$ (6 分).

2.由 $u'_x=v'_y, u'_y=-v'_x$ 得 $x^2+y^2=1$ 上可导，……4 分,但处处不解析，$f'(z)=3x^2$；……6 分.

3.曲线 C 的参数方程 $z=x+\frac{1}{2}xi$，$\int_C \mathrm{Im}(z)dz=\int_C ydz=\int_0^2\frac{1}{2}x(1+\frac{1}{2}i)dx=1+\frac{1}{2}i$. ……6 分.

4. $\mathrm{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to0}\frac{5z-2}{(z-1)^2}=-2$，(3 分)；$\mathrm{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to1}\frac{d}{dz}[\frac{5z-2}{z}]=2$. (6 分)

5. C 内 $z_k=\pm\frac{1}{2},\pm\frac{3}{2},\pm\frac{5}{2},\pm\frac{7}{2}$ 均为一级极点，$\oint_C\tan\pi z dz=2\pi i\sum_{k=1}^{8}\mathrm{Res}[\tan\pi z,z_k]$ (3 分)

$=2\pi i\sum_{k=1}^{8}\frac{\sin\pi z}{(\cos\pi z)'}|_{z_k}=-16i$. (6 分)

6.(1)C 内只含一级极点 $z_1=0$ 时，$I_1=\mathrm{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to0}\frac{e^z}{(1-z)^3}=1$ ……2 分

(2)C 内只含三级极点 $z_2=1$ 时，$I_2=\mathrm{Res}[f(z),1]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to1}\frac{d^2}{dz^2}[(z-1)^3\frac{e^z}{z(1-z)^3}]=-\frac{e}{2}$ …5 分

(3) C 内既含 $z_1=0$ 又含 $z_2=0$ 时，$I_3=I_1+I_2=1-\frac{e}{2}$

(4) C 内不奇点时，$I_4=0$. ……8 分

7. 在 $0<|z|<1$ 内，由 $\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ 求导得 $\frac{1}{(1-z)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}nz^{n-1}$，$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}nz^{n-2}$ ……3 分

在 $1<|z-1|<+\infty$ 内，$\frac{1}{z}=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1+1/(z-1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}}$，$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+3}}$ ……8 分

8. 设 $L[y]=Y(s)$，取拉氏变换得 $s^2Y(s)-2s-8-2[sY(s)-2]-3Y(s)=\frac{4}{s-2}$，

$Y(s)=\frac{2s^2-4}{(s-2)(s^2-2s-3)}$ ……5 分

取拉氏逆变换得 $y=L^{-1}[Y(s)]=-\frac{1}{6}e^{-t}-\frac{4}{3}e^{2t}+\frac{7}{2}e^{3t}$. ……8 分

9. $\bar{A}\times\bar{B}=\{-8z^2,\ x^3y+12y,\ -2x^2z^2\}$　$div(\bar{A}\times\bar{B})=x^3-4x^2z+12$ ……3 分

$rot(\bar{A}+\bar{B})=\{x-4z,\ -y,\ -3\}$……5 分

$grad(\bar{A}\cdot\bar{B})=\{6xy-4y,\ 3x^2-4x,\ 0\}$……8 分

9*. $L[3^t+\int_0^t\frac{\sin t}{t}dt]=L[e^{t\ln 3}]+L[\int_0^t\frac{\sin t}{t}dt]=\frac{1}{s-\ln 3}+\frac{1}{s}L[\frac{\sin t}{t}]$ ……2 分

$=\frac{1}{s-\ln 3}+\frac{\mathrm{arc}\cot s}{s}$ ……4 分

$L^{-1}[\frac{s+1}{s^2+2s}]=\frac{1}{2}L^{-1}[\frac{1}{s}+\frac{1}{s+2}]=\frac{1}{s}+\frac{1}{s}e^{-2t}$ ……8 分

四、1. $u'_x=-6xy$，$u'_y=3y^2-3x^2$，$u''_{xx}=-6y$，$u''_{yy}=6y$，$u''_{xx}+u''_{yy}=0$，……2 分

设其共轭调和函数为 $v(x,y)$，由 $v'_y=u'_x=-6xy$ 积分得 $v(x,y)=-3xy^2+\varphi(x)$ ……4 分

由 $v'_x=-u'_y=-3y^2+3x^2$ 得 $-3y^2+\varphi'(x)=-3y^2+3x^2$，$\varphi(x)=x^3+C$

故 $v(x,y)=x^3-3xy^2+C$， ……6 分

且 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=y^3-3x^2y+i\,(x^3-3xy^2+C)=i(z^3+C)$. ……8 分

2.由已知 $f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}$，其中 $\varphi(z)$ 在 z_0 点解析且 $\varphi(z_0)\neq0$，

$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}-\frac{n}{z-z_0}$ ……2 分

$\oint_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\oint_C\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}dz-\oint_C\frac{n}{z-z_0}dz=-2n\pi i$ ……4 分