FUNDAMENTALS OF INFORMATION SCIENCE

PART 4 INFORMATION TRANSMISSION VIII

—— SPREAD SPECTRUM

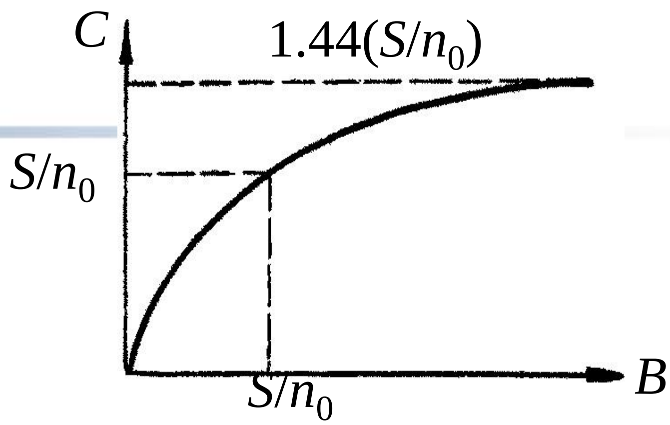
Shandong University
2025 Spring
Hailiang Xiong

§21.2　Spread Spectrum

扩展频谱获取信噪比增益

——理论依据：香农信道容量公式

$$C = B\log_2\left(1+\frac{S}{n_0 B}\right)$$



信道容量和带宽关系

结论：

- 信道容量 C依赖于 B、S 和 n_0
- 增大 S 可增加 C，若$S \to \infty$，则$C \to \infty$;
- 减小 n_0 可增加 C，若$n_0 \to 0$，则$C \to \infty$;
- 增大 B 可增加 C，但不能使 C无限制增大。

当 $B \to \infty$ 时，C 将趋向一个定值：

$$\lim_{B\to\infty} C = \lim_{B\to\infty} B\log_2\left(1+\frac{S}{n_0 B}\right) \approx \boxed{1.44\frac{S}{n_0}}$$

$$C = B\log_2\left(1+\frac{S}{n_0 B}\right)\ \text{(b/s)}$$

应用：

- C一定时，信道带宽B、信噪比S/N、传输时间t三者之间可以互相转换。
- 增加B，可以换取S/N的降低；反之亦然。
- 若S/N不变，增加B，可以换取 t 的减少。

【例如】

$$\boxed{C = 12\times10^3\ \text{b/s}}\ \begin{cases} \text{互换前：若} B_1 = 3\ \text{KHz, 则} \dfrac{S_1}{N_1} = 15 \\ \text{互换后：若} B_2 = 4\ \text{KHz, 则} \dfrac{S_2}{N_2} = 7 \end{cases}$$

■ 扩谱（扩频）的好处

- **提高抗窄带干扰的能力**，特别是敌对电台的有意干扰。

- 防止窃听。扩谱信号的发射功率谱密度可小于噪声的功率谱密度，将发射信号隐藏在背景噪声中，使侦听者很难发现。
  此外，由于采用了伪码，窃听者不能方便地听懂发送的消息。

- **提高抗多径传输效应的能力。** 由于扩谱调制采用了扩谱伪码，它可以用来分离多径信号， 所以有可能提高其抗多径的能力。

- 多个用户可以共用同一频带。在同一扩谱频带内，不同用户采用互相正交的不同扩谱码，就可以区分各个用户的信号，从而按照 码分多址的原理工作。

- **提供测距能力。** 通过测量扩谱信号的自相关特性的峰值出现时刻， 可以从信号传输时间的大小计算出传输距离。

■ 扩谱（扩频）技术的分类

◆直接序列(DS)扩谱：

用一段伪随机序列（又称为伪码）表示一个信息码元，对载波进行调制。伪码的一个单元称为一个**码片**。由于码片的速率远高于信息码元的速率，所以已调信号的频谱得到扩展。

◆跳频(FH)扩谱：

使发射机的载频在一个信息码元的时间内，按照预定的规律，离散地快速跳变，从而达到扩谱的目的。载频跳变的规律一般也是由伪码控制的。

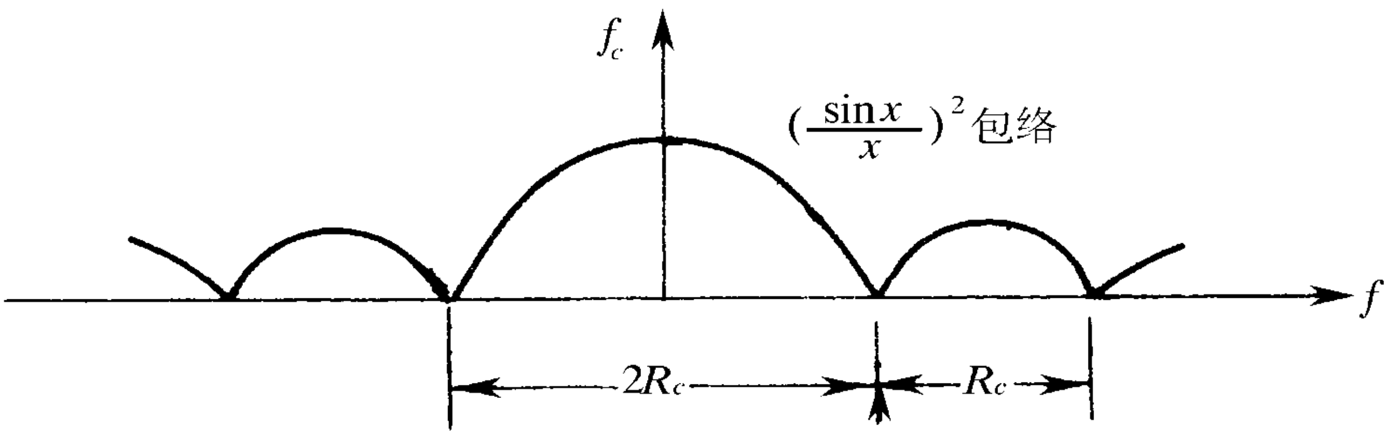
◆线性调频：

载频在一个信息码元时间内在一个宽的频段中线性地变化，从而使信号带宽得到扩展。由于此线性调频信号若工作在低频范围，则它听起来像鸟声，故又称“鸟声”调制。

■ 直接序列(DS)扩谱

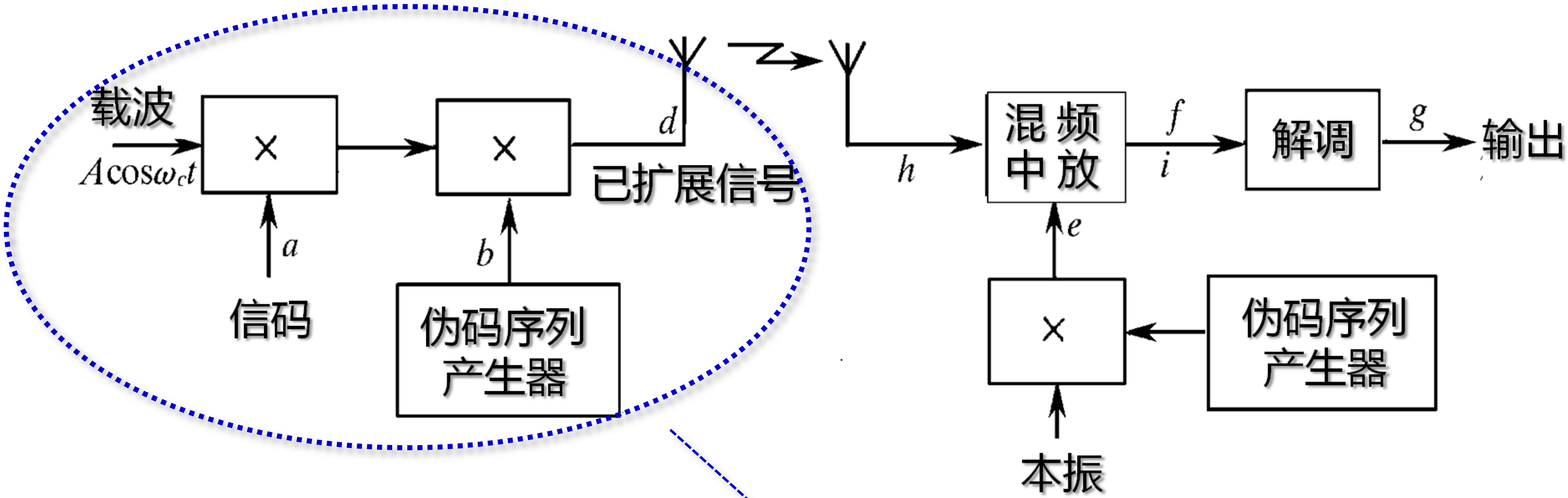
◆ 原理

用一组伪码代表信息码元去调制载波。最常用的是2PSK。这种信号的典型功率谱密度曲线示于下图中。



图中,所示主瓣带宽 是伪码时钟速率R_c的两倍。每个旁瓣的带宽等于R_c。例如，若所用码片的速率为 5 Mb/s，则主瓣带宽将为10 MHz，每个旁瓣宽为 5 MHz。

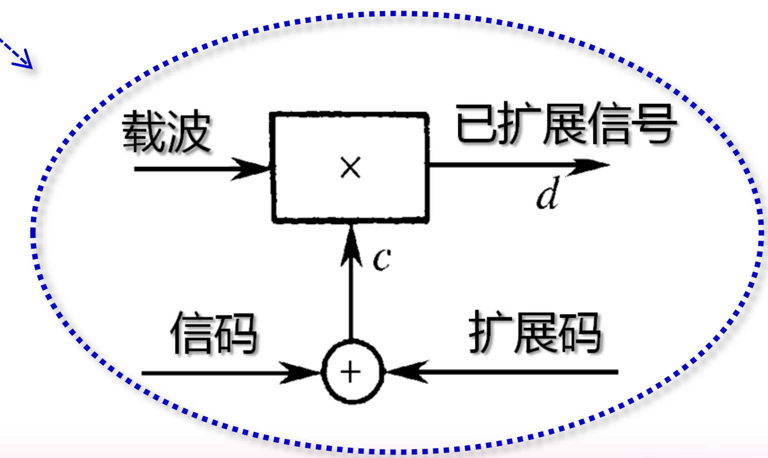
◆ 系统原理框图



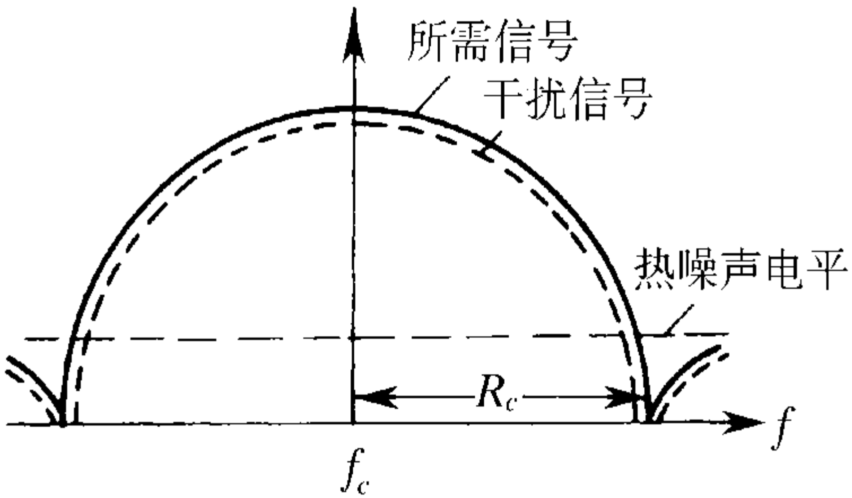
◆ 调制器简化框图：

先将两路编码序列模2相加，

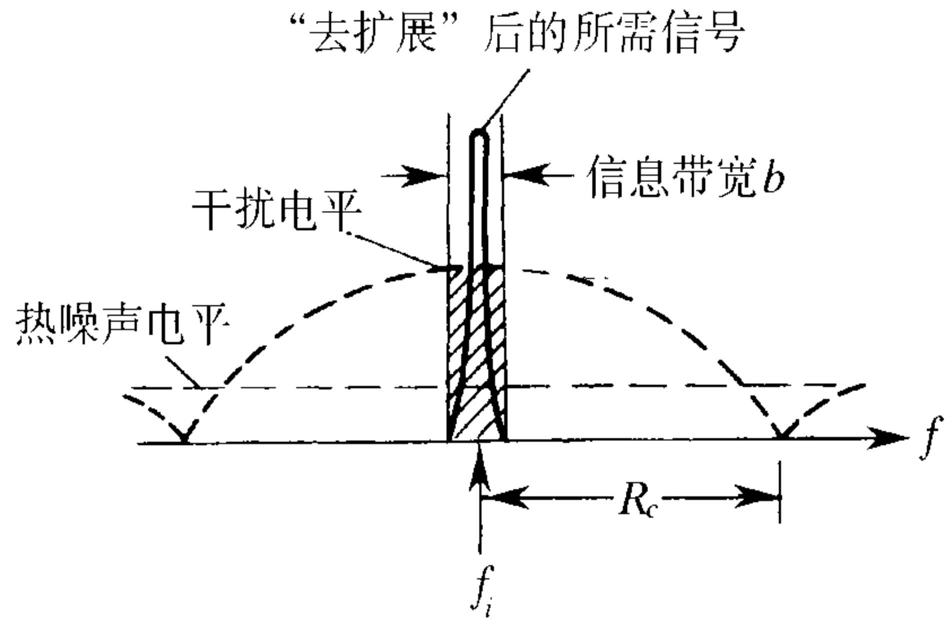
然后再去进行 反相键控 。



- 信号和干扰信号在频域中的变化

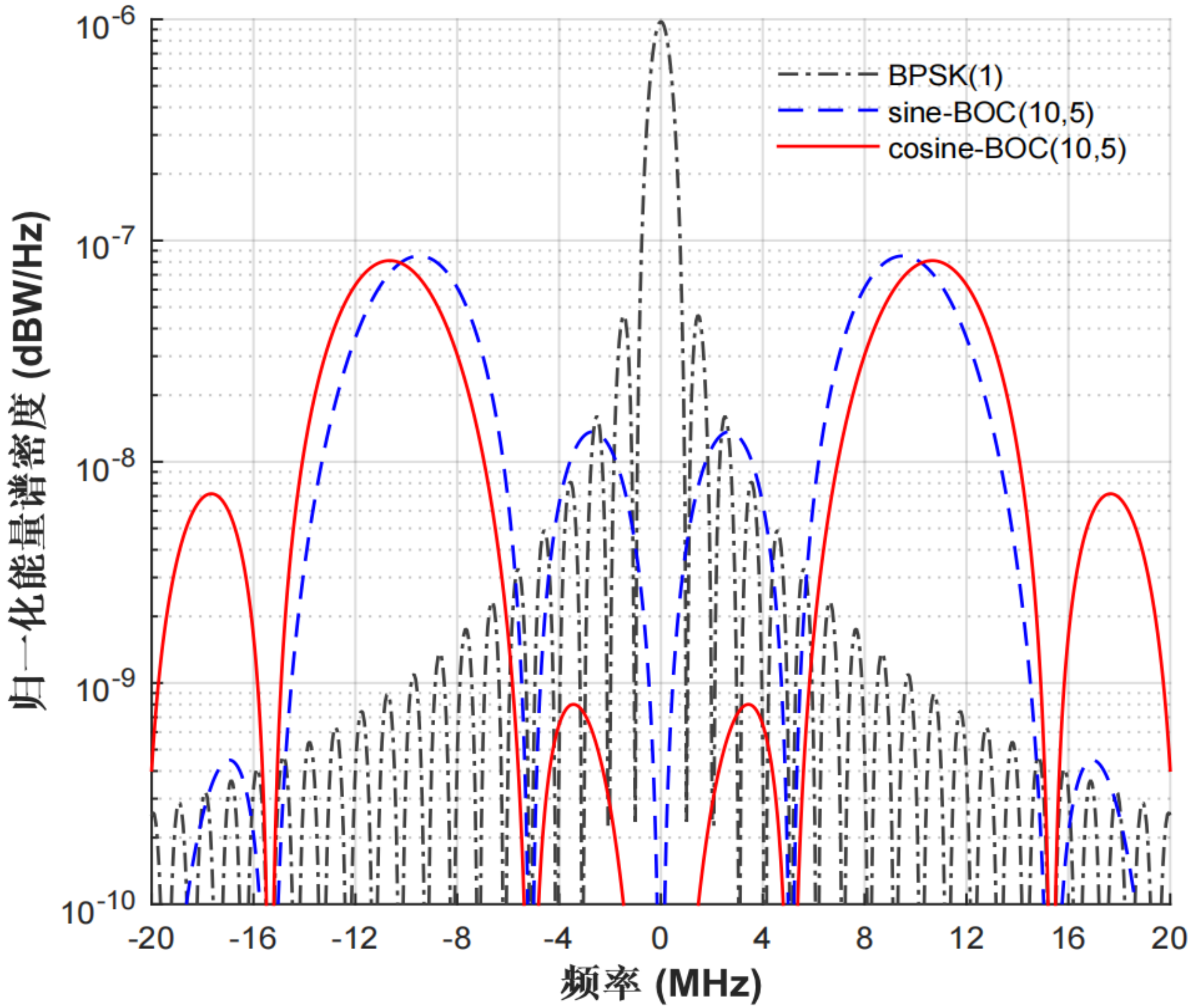


(a) 在接收机输入端



(b) 在接收机中放输出端

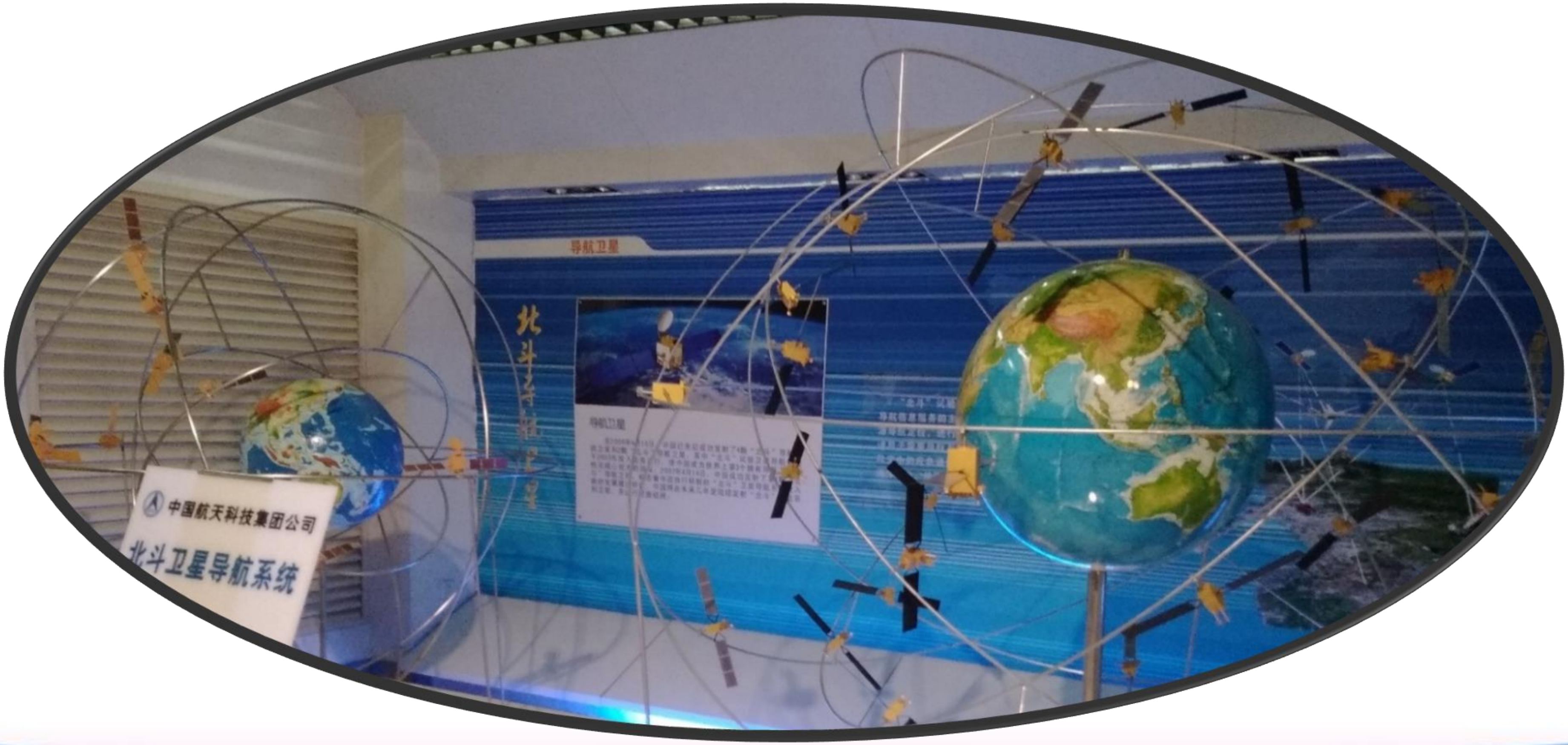
卫星导航定位系统是最典型的扩频系统


BPSK(1)
sine-BOC(10,5)
cosine-BOC(10,5)
归一化能量谱密度 (dBW/Hz)
频率 (MHz)
10^{-6}
10^{-7}
10^{-8}
10^{-9}
10^{-10}
-20 -16 -12 -8 -4 0 4 8 12 16 20

北斗“GEO+IGSO+MEO”混合星座

北斗卫星导航系统

轨道类型	卫星数量/颗	轨道高度/km
地球静止轨道卫星（GEO）	3	35786
倾斜地球轨道卫星（IGSO）	3	35786
地球中圆轨道卫星（MEO）	24	21528



卫星	发射日期	轨道类型	卫星	发射日期	轨道类型
第 1 颗北斗导航实验卫星	2000.10.31	GEO	第 22 颗北斗导航卫星	2016.03.30	IGSO
第 2 颗北斗导航实验卫星	2000.12.21	GEO	第 23 颗北斗导航卫星	2016.06.12	GEO
第 3 颗北斗导航实验卫星	2003.05.25	GEO	第 24、25 颗北斗导航卫星	2017.11.05	MEO
第 4 颗北斗导航实验卫星	2007.02.03	GEO	第 26、27 颗北斗导航卫星	2018.01.12	MEO
第 1 颗北斗导航卫星	2007.04.14	MEO	第 28、29 颗北斗导航卫星	2018.02.12	MEO
第 2 颗北斗导航卫星	2009.04.15	GEO	第 30、31 颗北斗导航卫星	2018.03.30	MEO
第 3 颗北斗导航卫星	2010.01.17	GEO	第 32 颗北斗导航卫星	2018.07.10	IGSO
第 4 颗北斗导航卫星	2010.06.02	GEO	第 33、34 颗北斗导航卫星	2018.07.29	MEO
第 5 颗北斗导航卫星	2010.08.01	IGSO	第 35、36 颗北斗导航卫星	2018.08.25	MEO
第 6 颗北斗导航卫星	2010.11.01	GEO	第 37、38 颗北斗导航卫星	2018.09.19	MEO
第 7 颗北斗导航卫星	2010.12.18	IGSO	第 39、40 颗北斗导航卫星	2018.10.15	MEO
第 8 颗北斗导航卫星	2011.04.11	IGSO	第 41 颗北斗导航卫星	2018.11.01	GEO
第 9 颗北斗导航卫星	2011.07.27	IGSO	第 42、43 颗北斗导航卫星	2018.11.19	MEO
第 10 颗北斗导航卫星	2011.12.02	IGSO	第 44 颗北斗导航卫星	2019.04.20	IGSO
第 11 颗北斗导航卫星	2012.02.25	GEO	第 45 颗北斗导航卫星	2019.05.17	GEO
第 12、13 颗北斗导航卫星	2012.04.30	MEO	第 46 颗北斗导航卫星	2019.06.25	IGSO
第 14、15 颗北斗导航卫星	2012.09.19	MEO	第 47、48 颗北斗导航卫星	2019.09.23	MEO
第 16 颗北斗导航卫星	2012.10.25	GEO	第 49 颗北斗导航卫星	2019.11.05	IGSO
第 17 颗北斗导航卫星	2015.03.30	IGSO	第 50、51 颗北斗导航卫星	2019.11.23	MEO
第 18、19 颗北斗导航卫星	2015.07.25	MEO	第 52、53 颗北斗导航卫星	2019.12.16	MEO
第 20 颗北斗导航卫星	2015.09.30	IGSO	第 54 颗北斗导航卫星	2020.03.09	GEO
第 21 颗北斗导航卫星	2016.02.01	MEO	第 55 颗北斗导航卫星	2020.06.23	GEO

§21.3

正 交 编 码

——在数字通信技术中具有十分重要的地位

——可用作纠错编码，实现码分多址通信等

21.3.1 正交编码的基本概念

■ 信号间的正交性

- 若两个周期为*T* 的模拟信号$s_1(t)$ 和 $s_2(t)$ 互相**正交**，则有:

$$\int_0^T s_1(t)s_2(t)dt = 0$$

- 若*M*个周期为*T* 的模拟信号$s_1(t)$，$s_2(t)$，…，$s_M(t)$构成一个正交信号集合，则有:

$$\boxed{\int_0^T s_i(t)s_j(t)dt = 0} \qquad i \neq j;\quad i, j = 1, 2, \ldots, M$$

■ 码组间的正交性

——可用**互相关系数**来描述。

①设长为 ***n*** 的编码中 码元只取值 **+1**和 **-1**，以及 ***x*** 和 ***y***是其中两个码组：

$$x=(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n) \qquad y=(y_1,y_2,y_3,\cdots,y_n)$$

其中 $x_i, y_i \in (+1,-1), \qquad i=1,2,\cdots,n$

则 ***x*** 和 ***y*** 间的互相关系数定义为

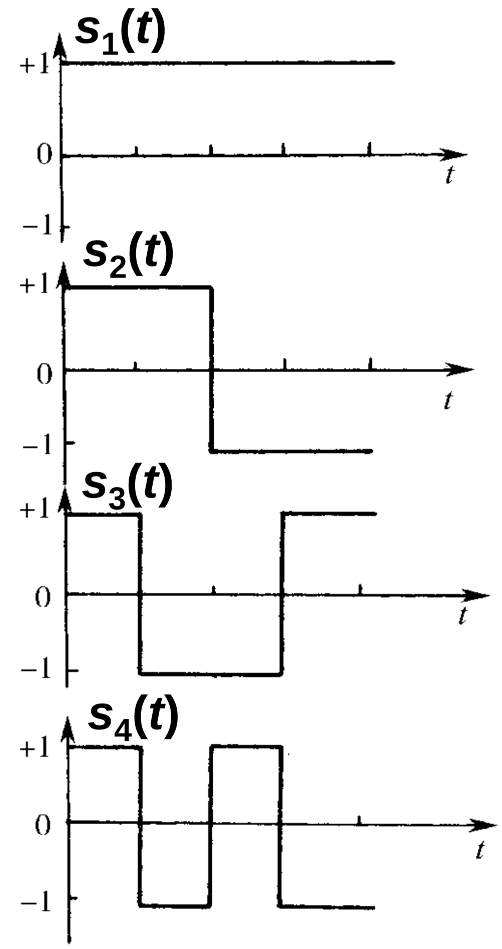
$$\boxed{\rho(x,y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i y_i} \qquad -1\le\rho\le+1$$

若 $\rho(x, y) = 0$，则 ***x*** 和 ***y*** 正交。

例 如图所示的4个数字信号

可以看作是如下4个码组：

$$\begin{cases} s_1(t):(+1,+1,+1,+1) \\ s_2(t):(+1,+1,-1,-1) \\ s_3(t):(+1,-1,-1,+1) \\ s_4(t):(+1,-1,+1,-1) \end{cases}$$



按照

$$\rho(x,y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i y_i$$

计算得知：

这4个码组中任意两者间的相关系数都为0，即这4个码组两两正交。

我们把这种两两正交的编码称为——**正交编码**。

①设长为 ***n*** 的编码中 码元只取值 **+1**和 **-1**，以及 ***x*** 和 ***y***是其中两个码组：

$$x=(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n) \qquad y=(y_1,y_2,y_3,\cdots,y_n)$$

其中 $x_i, y_i \in (+1,-1), \qquad i=1,2,\cdots,n$

则 ***x*** 和 ***y*** 间的互相关系数定义为

$$\boxed{\rho(x,y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i y_i} \qquad -1\le\rho\le+1$$

若 ρ(*x*, *y*) = 0，则 ***x*** 和 ***y*** 正交 。

②若用二进制数字 “0和1”分别代替上述码组中的 “ + 1和 - 1”，则

$$\boxed{\rho(x,y)=\frac{A-D}{A+D}}$$

A ---***x*** 和 ***y***中对应码元**相同**的个数；D ---***x*** 和 ***y***中对应码元**不同**的个数。

例 按照上式规定，上面例子:

$$\begin{cases} s_1(t):(+1,+1,+1,+1) \\ s_2(t):(+1,+1,-1,-1) \\ s_3(t):(+1,-1,-1,+1) \\ s_4(t):(+1,-1,+1,-1) \end{cases}$$

可以改写成:

$$\begin{cases} s_1(t):(0,0,0,0) \\ s_2(t):(0,0,1,1) \\ s_3(t):(0,1,1,0) \\ s_4(t):(0,1,0,1) \end{cases}$$

按照

$$\boxed{\rho(x,y)=\frac{A-D}{A+D}}$$

计算出的互相关系数仍为0。

自相关系数

一个长为n的码组x，其自相关系数定义为:

$$\boxed{\rho_x(j)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i x_{i+j}, \qquad j=0,1,\cdots,(n-1)}$$

式中，x 的下标按模n 运算，即有$x_{n+k}\equiv x_k$ 。

例 设 $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)=(+1,-1,-1,+1)$，则有:

$$\rho_x(0)=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}x_i^2=1 \qquad \rho_x(1)=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}x_i\,x_{i+1}=\frac{1}{4}(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1)=0$$

$$\rho_x(2)=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}x_i\,x_{i+2}=\frac{1}{4}(x_1x_3+x_2x_4+x_3x_1+x_4x_2)=-1$$

$$\rho_x(3)=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}x_i\,x_{i+3}=\frac{1}{4}(x_1x_4+x_2x_1+x_3x_2+x_4x_3)=0$$

§21.4

伪随机序列

——在数字通信技术中具有十分重要的地位。

——在误码率测量、时延测量、扩谱通信、密码及分离多径等方面都有着十分广泛的应用 。

21.4.1 基本概念

伪随机序列

- 又称伪随机噪声，伪随机信号，伪随机码。

什么是伪随机噪声？

- 具有类似于随机噪声的某些统计特性，同时又能够重复产生。
- 它具有随机噪声的优点，又避免了随机噪声的缺点，因此获得了日益广泛的实际应用。

如何产生伪随机噪声？

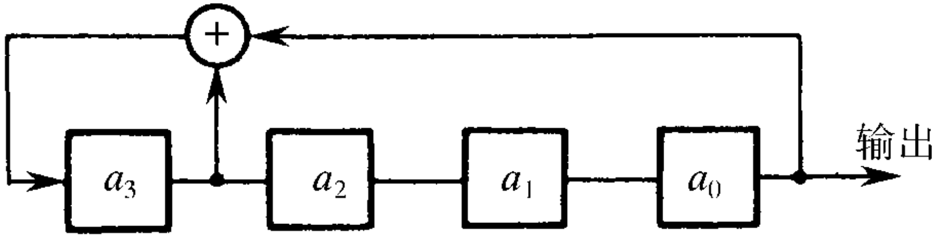
- 通常，由周期性数字序列经过滤波等处理后得到。
- 因此，将这种周期性数字序列称为伪随机序列。

21.4.2 m序列

1. m序列的产生

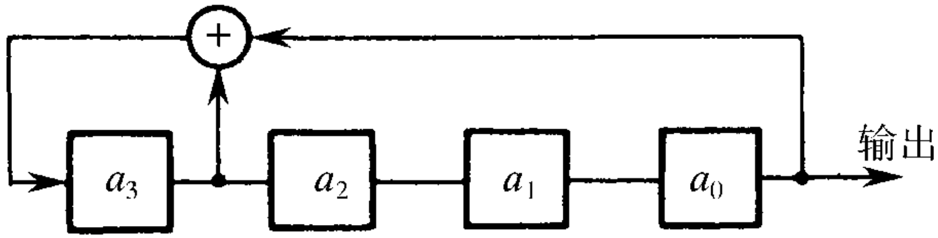
- m序列是伪随机序列中最重要的一种。
- m序列是**最长线性反馈移位寄存器序列**的简称。
- 它是由带线性反馈的移存器产生的周期最长的一种序列。

例 下图中示出一个4级线性反馈移存器。



设其初始状态$(a_3, a_2, a_1, a_0) = (1, 0, 0, 0)$，则在移位1次时，由$a_3$和$a_0$模2相加产生新的输入$a_4 = 1 \oplus 0 = 1$，新的状态变为$(a_4, a_3, a_2, a_1) = (1, 1, 0, 0)$。这样移位15次后又回到初始状态(1, 0, 0, 0)。

若初始状态为全“0”，即(0, 0, 0, 0)，则移位后得到的仍为全“0”状态。应该避免出现全“0”状态，否则移存器的状态将不 会改变



1	0	0	0
1	1	0	0
1	1	1	0
1	1	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
0	1	1	0
0	0	1	1
1	0	0	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1
1	0	0	0

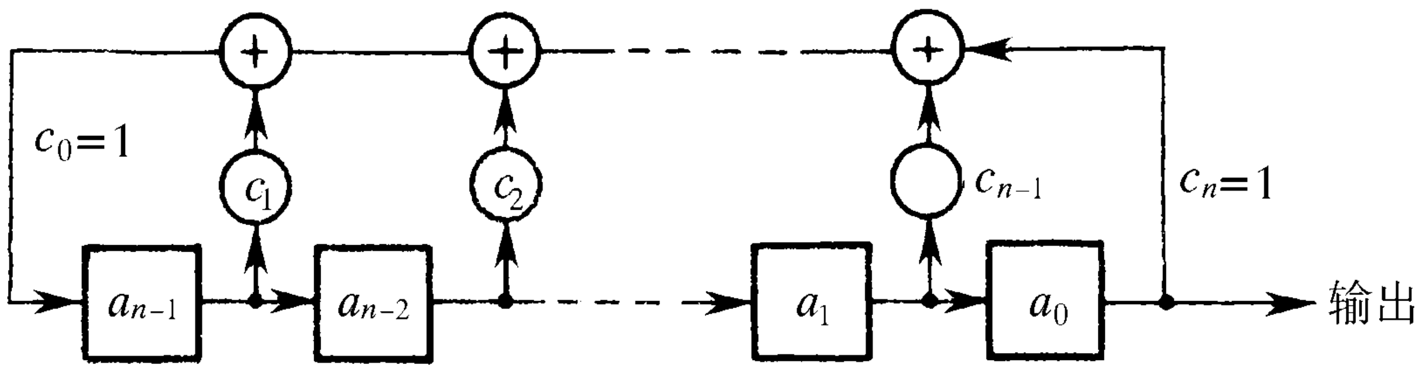
$2^4-1=15$(个)

4级 移存器共有2^4 **= 16种**可能的状态。除全“0”状态外，只剩15种状态可用。这就是说，由任何4级反馈移存器产生的序列的周期最长为15。

一般来说，一个***n*** **级**线性反馈移存器可能产生的**最长周期**等于**$(2^n - 1)$**。

核心：反馈电路如何连接才能使移存器产生的序列周期最长？

■ 一般的线性反馈移存器原理方框图



图中各级移存器的状态用 a_i 表示，$a_i = 0$ 或 1，i = 整数。

反馈线的连接状态用 c_i 表示，$c_i = 1$ 表示此线接通（参加反馈）；

$c_i = 0$ 表示此线断开。

反馈线的连接状态不同，就可能改变此移存器输出序列的周期 p。

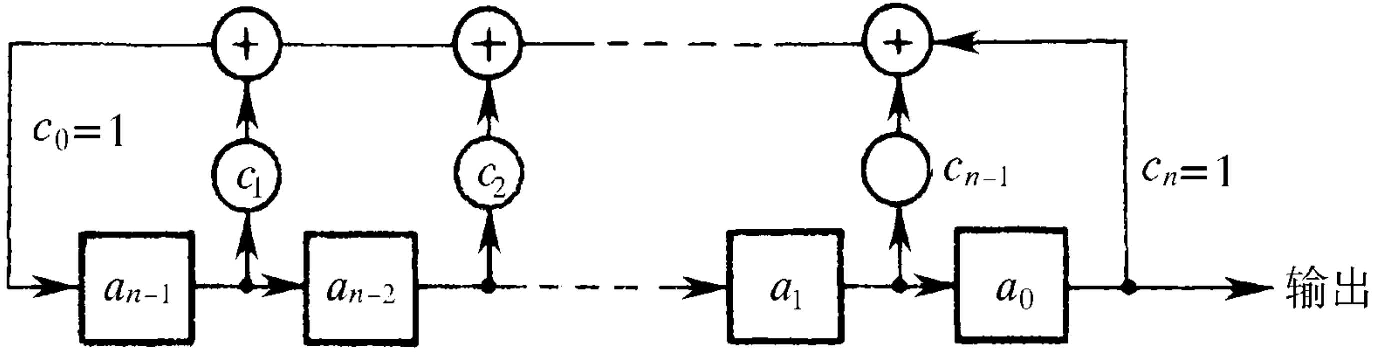
■ 基本关系式 ——与产生m序列有关的三个方程

1）递推方程

设一个n 级移存器的初始状态为：$a_{-1}\, a_{-2} \ldots a_{-n}$

1 次移位后：$a_0\, a_{-1} \ldots a_{-n+1}$ n 次移位后：$a_{n-1}\, a_{n-2} \ldots a_0$

如图：



再移位1次时，移存器左端新得到的输入a_n，按图中线路连接关系，可写为:

$$a_n = c_1 a_{n-1} \oplus c_2 a_{n-2} \oplus \cdots \oplus c_{n-1} a_1 \oplus c_n a_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i a_{n-i} \quad （模 2）$$

$$a_n = c_1 a_{n-1} \oplus c_2 a_{n-2} \oplus \cdots \oplus c_{n-1} a_1 \oplus c_n a_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i a_{n-i} \quad （模 2）$$

一般说来，对于任意一个输入a_k，有

$$\boxed{a_k = \sum_{i=1}^{n} c_i a_{k-i}}$$

--- 称为**递推方程**

它给出了移位输入a_k与移位前各级状态的关系。

按照递推方程计算，可以用软件产生***m*序列**。

2）特征方程（特征多项式）

$$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n=\sum_{i=0}^{n}c_ix^i$$

它决定了移存器的反馈连接和序列的结构。

式中， x_i仅指明其系数（1或0）代表反馈线的连接状态c_i的值，x本身的取值并无实际意义。

$c_i=1$ 表示此线接通（参加反馈）； $c_i=0$ 表示此线断开。

例 若特征方程为: $f(x)=1+x+x^4$

则它仅表示x_0，x_1和x_4的系数$c_0=c_1=c_4=1$，其余的c_i为0，即$c_2=c_3=0$。按照这一特征方程构成的反馈移存器就是上图所示的。

3）母函数

$$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

它表示反馈移存器的输出序列{ a_k }。

以上 $\left\{ \begin{array}{l} \text{递推方程} \\ \text{特征方程} \\ \text{母函数} \end{array} \right\}$ ——与产生m序列有关的三个基本方程

下面 【几个定理】 ——将给出它们与线性反馈移存器及其产生的序列之间的关系。

■ 几个定理 ——有关m序列和m序列产生器性质

【定理12.1】

$$f(x)\cdot G(x)=h(x)$$

式中，$h(x)$为次数低于$f(x)$的次数的多项式。

$$h(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i x^i\left(a_{-i}x^{-i}+a_{-(i-1)}x^{-(i-1)}+\cdots+a_{-1}x^{-1}\right)$$

可见，当电路给定后，$h(x)$仅决定于初始状态(a_{-i} … a_{-1})。

【定理12.2】 一个n级线性反馈移存器之相继状态具有周期性，周期为 $p \le 2^n - 1$。

【定理12.3】 若序列 $A = \{ a_k \}$ 具有最长周期 ($p = 2^n - 1$)，则其特征多项式 $f(x)$ 应为既约多项式。

【定理12.4】 一个n 级移存器的特征多项式$f(x)$若为既约的，则由其产生的序列 $A = \{ a_k \}$的周期等于使$f(x)$能整除的$(x^p + 1)$中最小正整数 p。

本原多项式

- 若一个 n 次多项式 $f(x)$ 满足下列条件：
  - $f(x)$为既约的；
  - $f(x)$可整除(x^m+1)，$m=2^n-1$；
  - $f(x)$除不尽(x^q+1)，$q<m$；

则称 $f(x)$为本原多项式。

- 由【**定理12.4**】可以简单写出一个线性反馈移存器能产生**m序列**的充要条件为：

反馈移存器的 特征多项式 为本原多项式。

例 要求用一个**4级**反馈移存器产生***m*序列**，试求其**特征多项式。**

解 $n = 4$，故此移存器产生的***m*序列**的**长度** $m = 2^n - 1 = 15$。

特征多项式 $f(x)$ 应可整除 $(x^m + 1) = (x^{15} + 1)$，或者说，应该是 $(x^{15}+1)$ 的一个因子，而且还应该是一个**4次本原多项式。**

$$\left(x^{15}+1\right)=\underline{\left(x^4+x+1\right)}\underline{\left(x^4+x^3+1\right)}\underline{\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)}\left(x^2+x+1\right)\left(x+1\right)$$

上式表明，$(x^{15}+1)$可以分解为 5个既约因子，其中3个是4次多项式。

可以证明，前2个是本原多项式，由其中任何一个都可产生 ***m* 序列**。

用$(x^4 + x+1)$作为特征多项式构成的4级反馈移存器见上图。

第3个不是，因为 $\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)\left(x+1\right)=\left(x^5+1\right)$

这就是说，它不仅可整除$(x^{15}+1)$，还可整除(x^5+1)，故它不是本原的。

本原多项式表

由上述可见，只要找到了**本原多项式**，我们就能由它构成***m*序列**产生器。下表中列出了部分已经找到的**本原多项式**:

n	本原多项式		n	本原多项式	
	代数式	8进制表示法		代数式	8进制表示法
2	x^2+x+1	7	14	$X^{14}+x^{10}+x^6+x+1$	42103
3	x^3+x+1	13	15	$x^{15}+x+1$	100003
4	x^4+x+1	23	16	$x^{16}+x^{12}+x^3+x+1$	210013
5	x^5+x^2+1	45	17	$x^{17}+x^3+1$	400011
6	x^6+x+1	103	18	$x^{18}+x^7+1$	1000201
7	x^7+x^3+1	211	19	$x^{19}+x^5+x^2+x+1$	2000047
8	$x^8+x^4+x^3+x^2+1$	435	20	$x^{20}+x^3+1$	4000011
9	x^9+x^4+1	1021	21	$x^{21}+x^2+1$	10000005
10	$x^{10}+x^3+1$	2011	22	$x^{22}+x+1$	20000003
11	$x^{11}+x^2+1$	4005	23	$x^{23}+x^5+1$	40000041
12	$x^{12}+x^6+x^4+x+1$	10123	24	$x^{24}+x^7+x^2+x+1$	100000207
13	$x^{13}+x^4+x^3+x+1$	20033	25	$x^{25}+x^3+1$	200000011

本原多项式也可用 **8进制** 数字表示。

例如，对于 **n = 4** 表中给出 “**23**”，它表示

2	**3**
0 1 0	**0 1 1**
$c_5c_4c_3$	$c_2c_1c_0$

即 $c_0 = c_1 = c_4 = 1$，$c_2 = c_3 = c_5 = 0$

21.4.2 m序列

1. m序列的产生

2. m序列的性质

1）均衡性

在 ***m*序列**的一个周期中，“1”和“0”的数目基本相等。准确地说，“1”的个数比“0”的个数多一个。

2）游程分布

游程——指一个序列中取值相同的那些连在一起的元素合。

游程长度——指一个游程中元素的个数。

例 在前例中给出的 ***m*序列**可以重写如下：

$$\cdots\underbrace{1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0}^{m\ =\ 15}\cdots$$

在其一个周期（*m*个元素）中，共有8个游程，其中长度为4的游程有1个，即1111，长度为3的游程有1个，即000，长度为2的游程有2个，即1 1和0 0，长度为1的游程有4个，即两个1和两个0。

一般说来，在***m*序列**中，长度为1的游程占游程总数的1/2；长度为2的游程占游程总数的1/4；长度为3的游程占1/8；. . . .。

严格地讲，长度为 k 的游程数目 占 游程总数 的 $1/2^k$，其中 $1 \le k \le (n-1)$。而且在长度为 k $[1 \le k \le (n-2)]$ 的游程中 ，连 “1” 的游程 和 连 “0”的游程 各占一半。

3）移位相加特性

一个*m*序列 M_p与其经过任意次延迟移位产生的另一个不同序列M_r模2相加，得到的仍是 M_p 的某次延迟移位序列 M_s，即

$$\boxed{M_p \oplus M_r = M_s}$$

现在分析一个$m = 7$的 *m*序列 M_p作为例子。设 M_p的一个周期为**1110010**，将其向**右移位一次**得到另一个序列 M_r 的一个相应周期为**0111001**。这两个序列的**模2和**为

$$1110010 \oplus 0111001 = 1001011$$

得出的为M_s的一个相应的周期，它与M_p**向右移位5次**的结果相同。

4）自相关函数

m 序列的自相关函数为

$$\rho(j)=\begin{cases}1, & 当\quad j=0\\ \dfrac{-1}{m}, & 当\quad j=1,\ 2,\cdots,m-1\end{cases}$$

可见：$\rho(j)$只有两种取值：**1和-1/m**，所以有时也把这类序列称为**双值自相关**序列。

由于m序列有周期性，故其自相关函数也有**周期性**，周期也是m，即

$$\rho(j)=\rho(j-km),\qquad 当\quad j\geq km,\qquad k=1,\ 2,\cdots$$

且$\rho(j)$是**偶函数**：$$\rho(j)=\rho(-j),\qquad j=整数$$

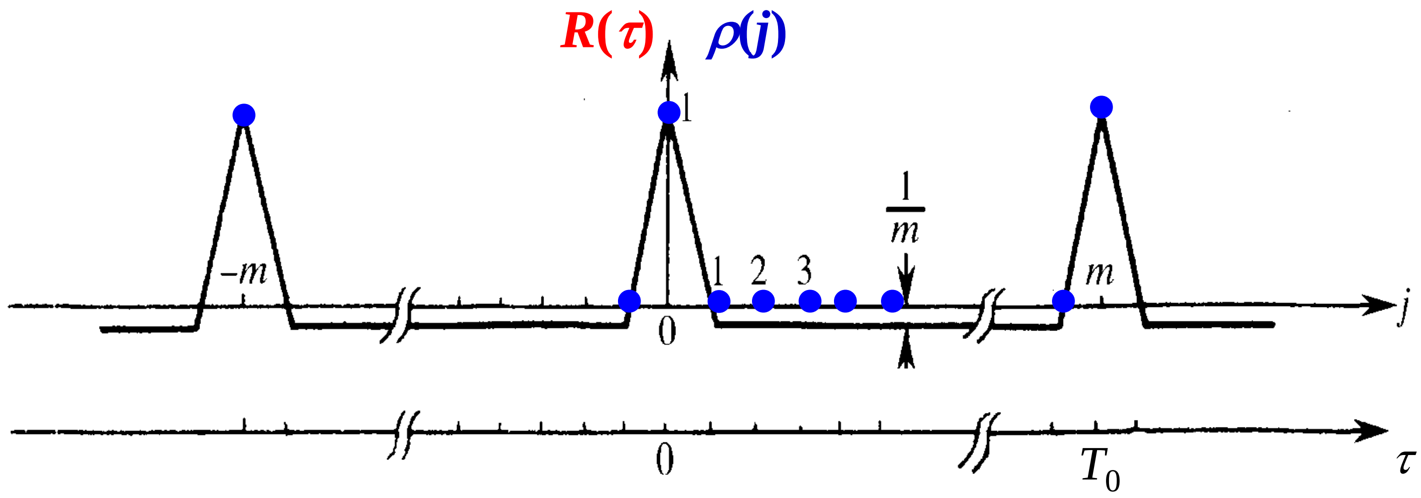
若把 ***m*序列** 当作 周期性 连续函数 求其 自相关函数，则从周期函数的自相关函数的定义：

$$R(\tau)=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t)s(t+\tau)dt \qquad [T_0 \text{ 为} s(t) \text{的周期}]$$

可以求出其自相关函数$R(\tau)$的表示式:

$$R(\tau)=\begin{cases} 1-\dfrac{m+1}{T_0}\left|\tau-iT_0\right|, & 0\le\left|\tau-iT_0\right|\le\dfrac{T_0}{m}, \qquad i=0,1,2,\cdots \\ -1/m, & \text{其他处} \end{cases}$$

按照上面的公式画出的$\rho(j)$和 $R(\tau)$ 的曲线如下图所示。



图中的**圆点**表示 j 取整数时的 $\rho(j)$ 取值，折线是 $R(\tau)$ 的连续曲线。可以看出，两者是重合的。由图还可以看出，当周期 T_0 非常长和码元宽度 T_0/m 极小时，$R(\tau)$ 近似于冲激函数 $\delta(t)$ 的形状。

由上述可知，***m*序列** 的**自相关函数**只有**两种取值**：1和 $(-1/m)$。有时把这类序列称为双值自相关序列。

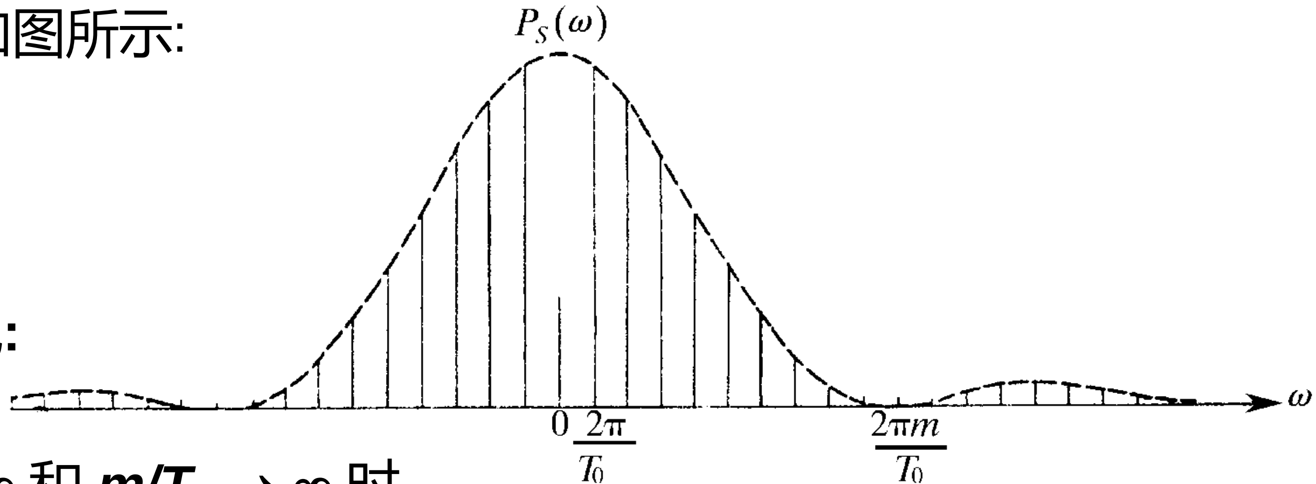
5）功率谱密度

信号的自相关函数与功率谱密度构成一对傅里叶变换。

因此，对*m*序列的自相关函数作傅里叶变换可得其功率谱密度：

$$P_s(\omega)=\frac{m+1}{m^2}\left[\frac{\sin(\omega T_0/2m)}{(\omega T_0/2m)}\right]^2\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi n}{T_0}\right)+\frac{1}{m^2}\delta(\omega)$$

其曲线如图所示:



由图可见:

在$T_0\to\infty$和 $m/T_0\to\infty$时，

$P_s(\omega)$ 的特性趋于白噪声的功率谱密度特性。

6）伪噪声特性

负 “ - ”

对一正态分布白噪声取样，若取样值为**正**，则记为“ + ”。将每次取样所得极性排成序列，例如:

$$\cdots + - + + - - - + - + + - - \cdots$$

这是一个随机序列，它具有如下**3个基本性质**：

- 序列中“ + ”和“ - ”的出现概率相等。
- 序列中长度为 k 的游程约占 $1/2^k$。而且在长度为 k 的游程中，“ + ”游程和“ - ”游程约各占一半。
- 白噪声的功率谱密度为常数，自相关函数为一冲激函数 $\delta(\tau)$。当 $\tau \neq 0$ 时，$\delta(\tau) = 0$。仅当 $\tau = 0$ 时，$\delta(\tau)$是个面积为1的脉冲。

由于***m*序列**的均衡性、游程分布和自相关特性与上述随机序列的基本性质极为相似，所以将 ***m*序列** 称为 **伪噪声(PN)序列**，或称为 **伪随机序列**。

但是，具有或部分具有上述基本性质的**PN序列**不仅只有 ***m*序列** 一种。***m*序列**只是其中最常见的一种。除 ***m*序列** 外，***M*序列**、二次剩余序列（或称为Legendre序列）、霍尔(Hall)序列和双素数序列等都是 **PN序列**。

21.5.3 其他伪随机序列简介

1. M序列

- **定义：** 由**非线性**反馈移存器产生的周期最长的序列称为M序列
  其周期可达 2^n

- **M序列的产生：**

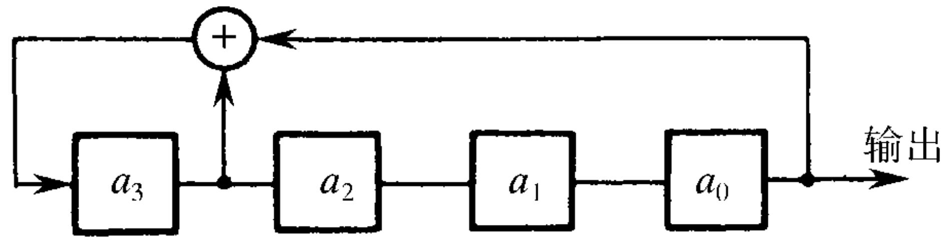
下面介绍一种利用 ***m*序列** 产生器构成 **M序列**产生器的方法。

仍以前面介绍的 n = 4级的 ***m*序列** 产生器为例。下图中给出了它的15种状态。

1	0	0	0
1	1	0	0
1	1	1	0
1	1	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
0	1	1	0
0	0	1	1
1	0	0	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

$2^4-1=15$(个)

1	0	0	0



若使它增加一个“0000”状态， 就可变成 **M序列**产生器了。

因为移存器中后级状态必须是由其前级状态移入而得，故此“**0000**”状态必须处于初始状态“**1000**”之**前**和“**0001**”状态之**后**。

这就是说，需将其递推方程修改为**非线性**方程，使“**0001**”状态代入新的递推方程后，产生状态“0000”（而不是“1000”），且在“0000”状态代入后产生状态“**1000**”（而不是保持“0000”不变）。

修改前的递推方程为

$$a_k = \sum_{i=1}^{n} c_i a_{k-i} = a_{k-1} \oplus a_{k-4}$$

修改后的递推方程应为:

$$a_k = a_{k-1} \oplus a_{k-4} \oplus \bar{a}_{k-1}\bar{a}_{k-2}\bar{a}_{k-3}a_{k-4} \oplus \bar{a}_{k-1}\bar{a}_{k-2}\bar{a}_{k-3}\bar{a}_{k-4}$$

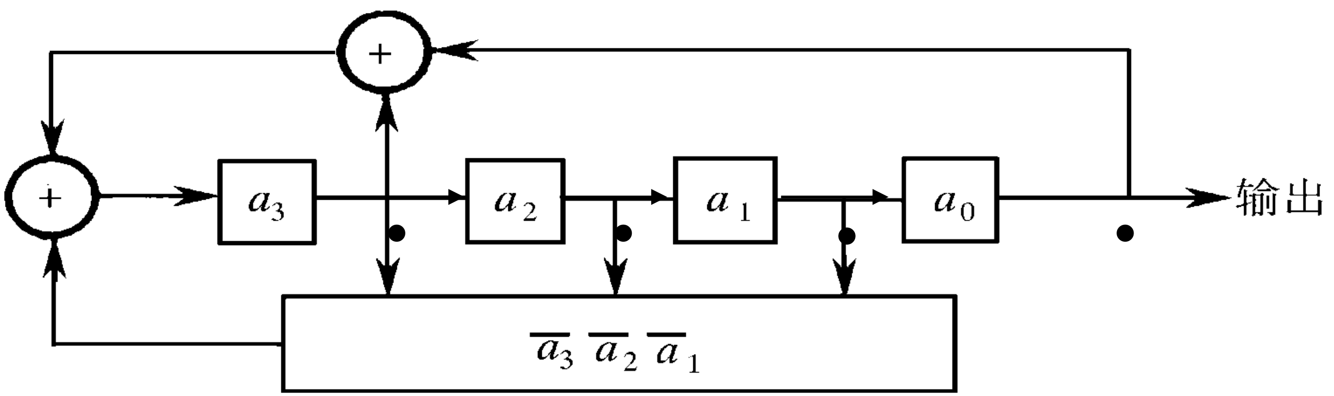
$$= a_{k-1} \oplus a_{k-4} \oplus \bar{a}_{k-1}\bar{a}_{k-2}\bar{a}_{k-3} = \sum_{i=1}^{4} c_i a_{k-i} \oplus \bar{a}_{k-1}\bar{a}_{k-2}\bar{a}_{k-3}$$

对于***n*级 *m*序列产生器**也一样。为使 ***n*级 *m*序列产生器**变成**M序列产生器**，也只需使其递推方程改为

$$a_k = \sum_{i=1}^{4} c_i a_{k-i} \oplus \bar{a}_{k-1}\bar{a}_{k-2}\cdots\bar{a}_{k-n+1} = \sum_{i=1}^{n} c_i a_{k-i} \oplus \prod_{j=1}^{n-1}\bar{a}_{k-i}$$

有了递推方程，就不难构造出此M序列产生器。

一个 **4**级 **M序列** 产生器如下图所示:



M序列的性质：

*M*序列与*m*序列类似，也在一定程度上具有噪声特性。它满足*m*序列的前两个性质：

（1）在 ***M*序列**的一个周期中，出现“1”和“0”的数目相等。

（2）在n级M序列的一个周期中，游程共有2^{n-1}个，其中长度为k的游程占$1/2^k$，$1 \le k \le n-2$；长为 n 的游程有两个，没有长为$(n-1)$的游程。在同长游程中，“0”游程和“1”游程各占一半。

但是，*M*序列 不再具有 *m*序列 的移位相加特性及双值自相关特性。

■ M序列的优点:

*M*序列与 *m*序列相比，最主要的**优点**是数量大，即同样级数 *n*的移存器能够产生的平移不等价*M*序列总数比*m*序列的大得多，且随 *n* 的增大迅速增加。

下表给出了级数 *n*与可能产生的两种序列数目的比较:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
*m*序列数目	1	1	2	2	6	6	18	16	48	60
*M*序列数目	1	1	2	16	2048	6.71088×10^{7}	1.44115×10^{17}	1.32922×10^{36}	2.26156×10^{74}	1.30935×10^{151}

谢谢！