矢量分析

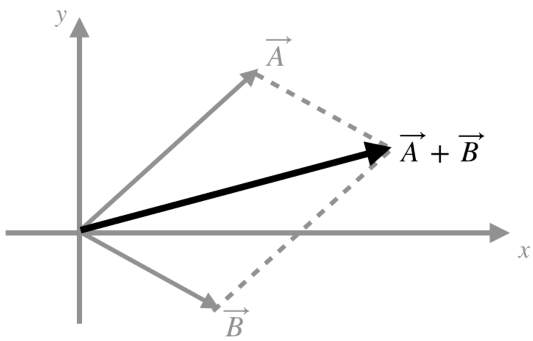
电磁场与电磁波不挂科第一讲讲义

1.1.矢量代数

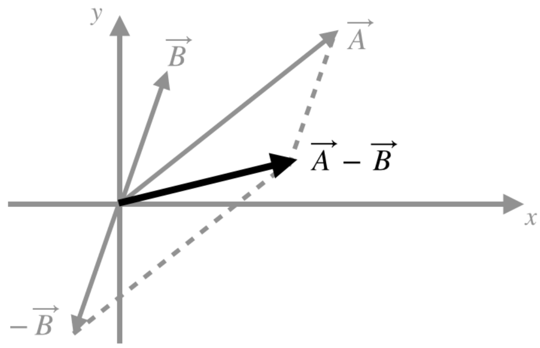
1.1.1.矢量加减法

■ **矢量的加与减的几何意义**

两个矢量相加，遵循平行四边形法则。



两个矢量相减，遵循$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$。



1.1.2.矢量乘积

■ **矢量的标量积（点积）**

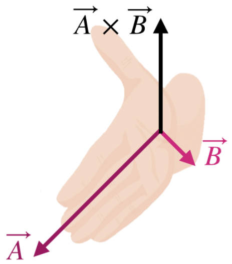
对于矢量$\vec{A}$和矢量$\vec{B}$，两者的标量积（点积）为$\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}|\cdot|\vec{B}|\cos\theta$,

其中θ为矢量$\vec{A}$和矢量$\vec{B}$之间较小的夹角，小于等于180度。

由$\vec{A}\cdot\vec{A}=A^2$得$A=\sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}$。

矢量标量积符合交换律、分配律，不符合结合律：$\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$，
$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$，而$\vec{A}\cdot\vec{B}\cdot\vec{C}$无意义。

■ 矢量的矢量积（叉积）



对于矢量$\vec{A}$和矢量$\vec{B}$，两者的矢量积（叉积）为
$\vec{A}\times\vec{B}=|A\cdot B\cdot\sin\theta|\cdot\vec{a_n}$，其中$\vec{a_n}$为单位矢量，与矢量$\vec{A}$和矢量$\vec{B}$满足**右手螺旋定则**；$\theta$为$\vec{A}$和$\vec{B}$之间较小的夹角。

矢量的矢量积不满足交换律和结合律，满足分配律：
$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$，$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})\neq(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$，
$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$。

$\vec{A}\times\vec{B}$的模代表两个矢量围成的平行四边形面积。

例题1-1

（1）如果$\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{A}\cdot\vec{C}$，能否说明$\vec{B}=\vec{C}$?

（2）如果$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{A}\times\vec{C}$，能否说明$\vec{B}=\vec{C}$?

■ 标量三重积、矢量三重积

标量三重积$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})=\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$，其值代表矢量$\vec{A}$、$\vec{B}$、$\vec{C}$围成的六面体的体积；

矢量三重积$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$。

例题1-2

若$\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{A}\cdot\vec{C}$且$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{A}\times\vec{C}$，证明$\vec{B}=\vec{C}$。

1.2.正交坐标系

基础知识

■ 正交坐标系

确定三个基矢量$\overrightarrow{e_{u_1}}$、$\overrightarrow{e_{u_2}}$、$\overrightarrow{e_{u_3}}$三者满足$\overrightarrow{e_{u_1}} \times \overrightarrow{e_{u_2}} = \overrightarrow{e_{u_3}}$，$\overrightarrow{e_{u_2}} \times \overrightarrow{e_{u_3}} = \overrightarrow{e_{u_1}}$，$\overrightarrow{e_{u_3}} \times \overrightarrow{e_{u_1}} = \overrightarrow{e_{u_2}}$；

且可推出：$\overrightarrow{e_{u_1}} \cdot \overrightarrow{e_{u_1}} = \overrightarrow{e_{u_2}} \cdot \overrightarrow{e_{u_2}} = \overrightarrow{e_{u_3}} \cdot \overrightarrow{e_{u_3}} = 1$，$\overrightarrow{e_{u_1}} \cdot \overrightarrow{e_{u_2}} = \overrightarrow{e_{u_2}} \cdot \overrightarrow{e_{u_3}} = \overrightarrow{e_{u_3}} \cdot \overrightarrow{e_{u_1}} = 0$

即为正交坐标系。

在正交坐标系中，任意矢量$\overrightarrow{A}$都能表示为三个正交方向上的分量之和：

$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{e_{u_1}} A_1 + \overrightarrow{e_{u_2}} A_2 + \overrightarrow{e_{u_3}} A_3$。

结合前面的知识，可知在正交坐标系中矢量A大小可以表示为：

$|\overrightarrow{A}| = \sqrt{{A_1}^2 + {A_2}^2 + {A_3}^2}$。

■ 正交坐标系的点积、叉积、标量三重积

在正交坐标系中$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{e_{u_1}} A_1 + \overrightarrow{e_{u_2}} A_2 + \overrightarrow{e_{u_3}} A_3$，$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{e_{u_1}} B_1 + \overrightarrow{e_{u_2}} B_2 + \overrightarrow{e_{u_3}} B_3$；

两矢量的点积和叉积分别为：$\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$，

$\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_{u_1}} & \overrightarrow{e_{u_2}} & \overrightarrow{e_{u_3}} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$；

另外，由上面两个式子能很容易推出标量三重积：$\overrightarrow{C} \cdot (\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}) = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$，其中

下角标1、2、3为各坐标系中的坐标变量。

■ **度量系数**

计算线积分、面积分、体积分时（需要表示微分长度变化），而有些坐标（u_i）也许不是长度如圆柱坐标系中的角度（需要一个转换因子将du_i转换成一个长度变化dl_i），转化关系为$dl_i = h_i du_i$，其中h_i为度量系数，并不一定是一个常数，如圆柱坐标中的$d\varphi \to \rho d\varphi$。

任意长度上的**微分长度变化**都可以写成长度变化分量的矢量和：

$d\vec{l} = \vec{e_1} dl_1 + \vec{e_2} dl_2 + \vec{e_3} dl_3$;

将长度变化矢量与坐标矢量通过度量系数连接起来，上式即为：

$d\vec{l} = \overrightarrow{e_{u_1}}(h_1 du_1) + \overrightarrow{e_{u_2}}(h_2 du_2) + \overrightarrow{e_{u_3}}(h_3 du_3)$，其中$h_i(i = 1,2,3,\ldots)$为度量系数。

同样，在计算面积分和体积分时也要通过度量系数将坐标变化转化为长度变化。

1.2.1.直角坐标系

■ **直角坐标系**

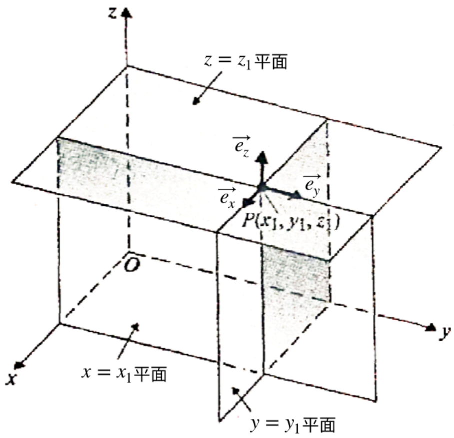
坐标变量：x、y、z，

其中$-\infty < x < +\infty$，$-\infty < y < +\infty$，$-\infty < z < +\infty$。

基矢量：$\vec{e_x}$、$\vec{e_y}$、$\vec{e_z}$，

任一矢量在直角坐标系下的表示：

$\vec{A} = \vec{e_x} A_x + \vec{e_y} A_y + \vec{e_z} A_z$。

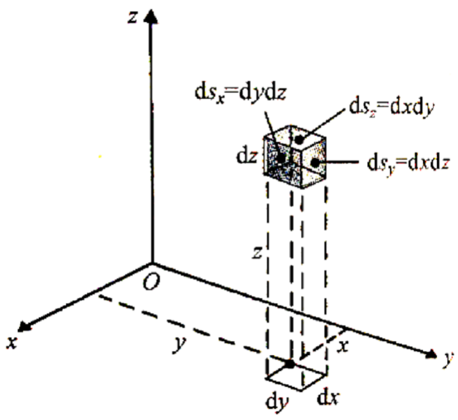


■ **直角坐标系的元**

线元：$d\vec{l} = \vec{e_x} dx + \vec{e_y} dy + \vec{e_z} dz$，

面元：$dS_x = dydz$，$dS_y = dxdz$，$dS_z = dxdy$，

体积元：$dV = dxdydz$。



■ **例题1-3**

给定三个矢量$\vec{A}$、$\vec{B}$、$\vec{C}$如下：$\vec{A}=\vec{e_x}+\vec{e_y}2-\vec{e_z}3$、$\vec{B}=-\vec{e_y}4+\vec{e_z}$、$\vec{C}=\vec{e_x}5-\vec{e_z}2$。

求：（1）$\vec{e_A}$　　（2）$|\vec{A}-\vec{B}|$　　（3）$\vec{A}\cdot\vec{B}$

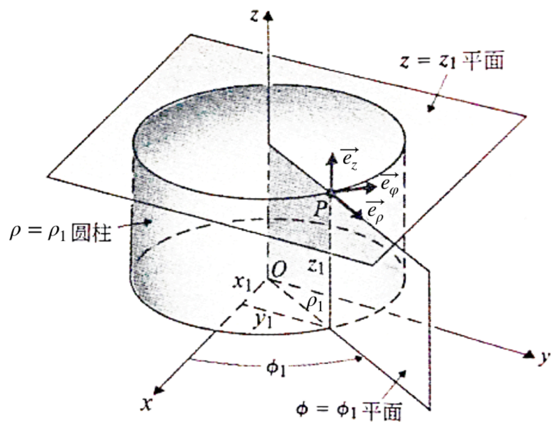
（4）$\vec{A}$在$\vec{B}$上的分量　　（5）$\vec{A}\times\vec{C}$　　（6）$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$和$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}$

（7）$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$和$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$

1.2.2.圆柱坐标系

■ **圆柱坐标系**

圆柱坐标系适用于无限长线电荷或者电流，以及存在圆柱或圆柱边界的地方



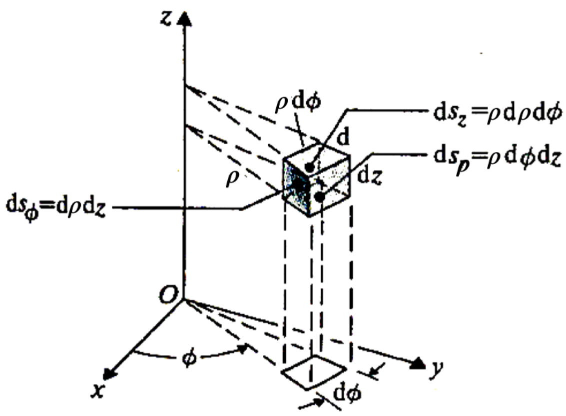
坐标变量: ρ（或r）、φ、z，其中

$0\le\rho<+\infty$，$0\le\varphi\le 2\pi$，

$-\infty<z<+\infty$。

基矢量：$\vec{e_\rho}$（或$\vec{e_r}$）、$\vec{e_\varphi}$、$\vec{e_z}$，任一矢量在圆柱坐标系下的表示：$\vec{A}=\vec{e_\rho}A_\rho+\vec{e_\varphi}A_\varphi+\vec{e_z}A_z$。

■ **圆柱坐标系的元**



线元：$d\vec{l}=\vec{e_\rho}d\rho+\vec{e_\varphi}\rho d\varphi+\vec{e_z}dz$

面元：$dS_\rho=\rho d\varphi dz$，$dS_\varphi=d\rho dz$，

$dS_z=\rho d\rho d\varphi$

体积元：$dV=\rho d\rho d\varphi dz$

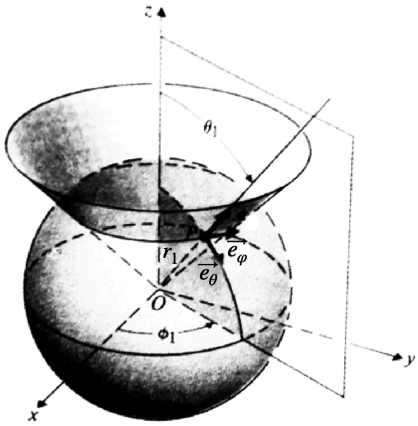
■ **圆柱坐标系与直角坐标系的转换**

$x = \rho\cos\varphi$，$y = \rho\sin\varphi$，$z = z$

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$，$\varphi = \arctan\dfrac{y}{x}$，$z = z$

1.2.3.球坐标系

■ **球坐标系**



适用于涉及点源以及球形边界时（解决远场天线问题）

坐标变量: r（或R）、θ、φ，其中$0 \le r < +\infty$，

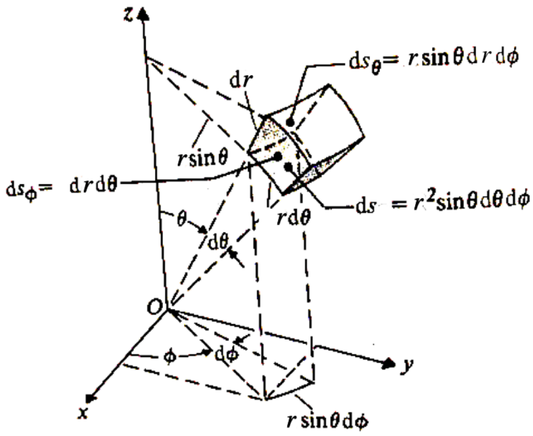
$0 \le \theta \le \pi$，$0 \le \varphi \le 2\pi$。

基矢量：$\vec{e_r}$（或$\vec{e_R}$）、$\vec{e_\theta}$、$\vec{e_\varphi}$。

任一矢量在球坐标系的表示：

$\vec{A} = \vec{e_r}A_r + \vec{e_\theta}A_\theta + \vec{e_\varphi}A_\varphi$。

■ **球坐标系的元**



线元：$d\vec{l} = \vec{e_r}dr + \vec{e_\theta}rd\theta + \vec{e_\varphi}r\sin\theta d\varphi$

面元：$dS_r = r^2\sin\theta d\theta d\varphi$，

$dS_\theta = r\sin\theta drd\varphi$，$dS_\varphi = rdrd\theta$

体积元：$dV = r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$

■ **球坐标系与直角坐标系的转换**

$x = r\sin\theta\cos\varphi$，$y = r\sin\theta\sin\varphi$，$z = r\cos\theta$

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$，$\theta = \arctan\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$，$\varphi = \arctan\dfrac{y}{x}$

球坐标系与圆柱坐标系的转换

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2},\ \theta = \arctan\frac{\rho}{z},\ \varphi = \varphi$$

补充总结

度量系数

坐标系关系		直角坐标系 (x, y, z)	直角坐标系 (ρ, φ, z)	直角坐标系 (r, θ, φ)
基矢量	$\overrightarrow{e_{u_1}}$	$\overrightarrow{e_x}$	$\overrightarrow{e_\rho}$	$\overrightarrow{e_r}$
	$\overrightarrow{e_{u_2}}$	$\overrightarrow{e_y}$	$\overrightarrow{e_\varphi}$	$\overrightarrow{e_\theta}$
	$\overrightarrow{e_{u_3}}$	$\overrightarrow{e_z}$	$\overrightarrow{e_z}$	$\overrightarrow{e_\varphi}$
度量系数	h_1	1	1	1
	h_2	1	ρ	r
	h_3	1	1	$r\sin\theta$
体积元	dv	$dxdydz$	$\rho d\rho d\varphi dz$	$r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$

例题1-4

一点的圆柱坐标为$(4,\dfrac{2\pi}{3},3)$，求：（1）其直角坐标　　（2）其球坐标

1.3.矢量微积分

1.3.1.矢量函数的积分

矢量函数的线积分

形如$\int_C \vec{A}\cdot d\vec{l}$，$C$表示积分路径，积分结果与积分路径无关，结果是标量；

形如 $\int_C B \cdot d\vec{l}$，C表示积分路径，积分结果与积分路径有关，结果是矢量。

■ **矢量函数的面积分**

形如 $\int_s \vec{A} \cdot d\vec{s}$, 也可以表示为二重积分的形式，如 $\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} A dxdy$；

注意面元方向：$d\vec{s} = \vec{e_n} ds$，$\vec{e_n}$为面元法线方向，对封闭面指向外方向，对开曲面满足右手螺旋定则。

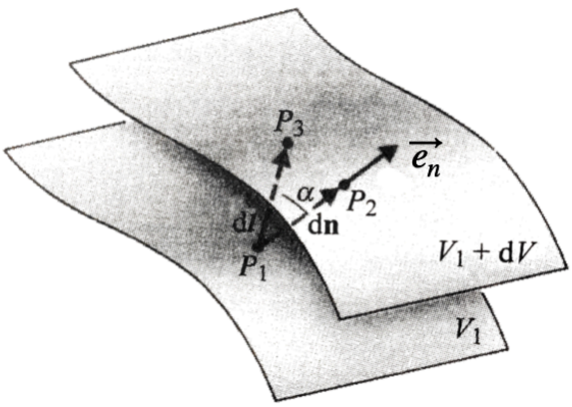
■ **矢量函数的体积分**

形如 $\int_v \vec{A} \cdot d\vec{v}$, 也可以表示为三重积分的形式，如 $\int_{z_1}^{z_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} A dxdydz$。

1.3.2.梯度、散度、旋度

■ **标量场的梯度**

梯度为一矢量，其大小为标量的空间最大变化率，方向为标量增加率最大的方向。



考虑空间中的一个标量函数v：

梯度记为$grad\ v = \vec{e_n}\dfrac{dv}{dn}$，习惯将$grad\ v$用哈密顿算符$\nabla$表示，读作$del$或者$nabla$；

即 $\nabla v = \vec{e_n}\dfrac{dv}{dn}$，其中$\vec{e_n}$为梯度方向。

梯度遵循梯度恒等式：$\nabla C = 0$，$\nabla(Cu) = C\,\nabla u$，$\nabla(u \pm v) = \nabla u \pm \nabla v$，$\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u$。

■ 标量场的梯度与方向导数

标量场u中在某点沿任意方向l的方向导数等于梯度在该方向的投影：

即$\dfrac{du}{dl}=\dfrac{du}{dn}\dfrac{dn}{dl}=\dfrac{du}{dn}\cos\theta=\dfrac{du}{dn}\vec{e_n}\cdot\vec{e_l}=(\nabla u)\cdot\vec{e_l}$,

又$\vec{e_l}=\dfrac{d\vec{l}}{dl}$，则$du=(\nabla u)\cdot d\vec{l}$;

考虑直角坐标系满足：$d\vec{l}=\vec{e_x}dx+\vec{e_y}dy+\vec{e_z}dz$，$du=\dfrac{\partial u}{\partial x}dx+\dfrac{\partial u}{\partial y}dy+\dfrac{\partial u}{\partial z}dz$;

可以将du写作两个矢量的点积：

$$du=(\vec{e_x}\frac{\partial u}{\partial x}+\vec{e_y}\frac{\partial u}{\partial y}+\vec{e_z}\frac{\partial u}{\partial z})\cdot(\vec{e_x}dx+\vec{e_y}dy+\vec{e_z}dz)=(\vec{e_x}\frac{\partial u}{\partial x}+\vec{e_y}\frac{\partial u}{\partial y}+\vec{e_z}\frac{\partial u}{\partial z})\cdot d\vec{l}$$

对比得到梯度的表达式：$\nabla u=\vec{e_x}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\vec{e_y}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\vec{e_z}\dfrac{\partial u}{\partial z}$，是一种微分运算，对于任意坐标系均成立；

对于圆柱坐标系：$\nabla u=\vec{e_\rho}\dfrac{\partial u}{\partial\rho}+\vec{e_\phi}\dfrac{\partial u}{\rho\partial\phi}+\vec{e_z}\dfrac{\partial u}{\partial z}$;

对于球坐标系：$\nabla u=\vec{e_r}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\vec{e_\theta}\dfrac{\partial u}{r\partial\theta}+\vec{e_\phi}\dfrac{\partial u}{r\sin\theta\partial\phi}$;

对于任一坐标系：$\nabla u=\vec{a_1}\dfrac{\partial u}{h_1\partial e_1}+\vec{a_2}\dfrac{\partial u}{h_2\partial e_2}+\vec{a_3}\dfrac{\partial u}{h_3\partial e_3}$，其中$h_i(i=1,2,3,\ldots)$为度量系数。

例题1-5

已知标量函数$u=x^2+2y^2+3z^2+3x-2y-6z$，求：

（1）∇u　　　　（2）∇u为0的点

■ **例题1-6**

已知标量函数$u = x^2yz$，求u在点(2,3,1)处沿$\vec{e_l} = \vec{e_x}\dfrac{3}{\sqrt{50}} + \vec{e_y}\dfrac{4}{\sqrt{50}} + \vec{e_z}\dfrac{5}{\sqrt{50}}$的方向导数。

■ **矢量场的散度**

散度可以用来度量流量源$\vec{F}$的强度，用符号$\nabla \cdot \vec{F}$来表示；

散度只和流量源有关，可以用**散度定理**进行计算：$\int_V \nabla \cdot \vec{A} dV = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$；

对于任意坐标系，$\nabla \cdot \vec{F} = \dfrac{1}{h_1h_2h_3}[\dfrac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3A_1) + \dfrac{\partial}{\partial u_2}(h_1h_3A_2) + \dfrac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2A_3)]$；

在直角坐标系中，散度$\nabla \cdot \vec{F} = \dfrac{\partial F_x}{\partial x} + \dfrac{\partial F_y}{\partial y} + \dfrac{\partial F_z}{\partial z}$；

在圆柱坐标系中，散度$\nabla \cdot \vec{F} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \dfrac{\partial F_z}{\partial z}$；

在球坐标系中，散度$\nabla \cdot \vec{F} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial(r^2F_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial(\sin\theta F_\theta)}{\partial \theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial F_\phi}{\partial \phi}$。

■ **例题1-7**

已知矢量$\vec{A} = \vec{e}_x x^2 + \vec{e}_y x^2y^2 + \vec{e}_z 24x^2y^2z^3$，

求：（1）散度$\nabla \cdot \vec{A}$　　（2）直接求$\nabla \cdot \vec{A}$对中心在原点的一个单位立方体的体积分

（3）求$\vec{A}$对此立方体表面的积分，与（2）得结果对比验证散度定理

■ **矢量场的旋度**

旋度可以用来度量旋涡源的密度，用符号$\nabla \times$来表示；

旋度只和旋涡源有关，用**斯托克斯定理**计算：$\int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \oint_c \vec{A} \cdot d\vec{l}$；

对于任意坐标系，旋度$\nabla \times \overrightarrow{F} = \dfrac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} h_1 & \overrightarrow{e_y} h_2 & \overrightarrow{e_z} h_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$；

在直角坐标系中，旋度$\nabla \times \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$；

在圆柱坐标系中，旋度$\nabla \times \overrightarrow{F} = \dfrac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \overrightarrow{e_\rho} & \rho\overrightarrow{e_\phi} & \overrightarrow{e_z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\phi & F_z \end{vmatrix}$；

在球坐标系中，旋度$\nabla \times \overrightarrow{F} = \dfrac{1}{r^2 \sin\theta}\begin{vmatrix} \overrightarrow{e_r} & r\overrightarrow{e_\theta} & r\sin\theta\,\overrightarrow{e_\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ F_r & rF_\theta & r\sin\theta F_\phi \end{vmatrix}$。

例题1-8

已知矢量$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{e_x} x + \overrightarrow{e_y} x^2 + \overrightarrow{e_z} y^2 z$,

（1）直接求该矢量沿xy平面上一个边长为2的正方形回路的线积分，此正方形两边分别与x轴和y轴重合

（2）求$\nabla \times \overrightarrow{A}$对此回路所包围的曲面的面积分，结果与（1）中结果对比，验证斯托克斯定理

矢量场的散度和旋度

任意一标量场的梯度的旋度恒等于0：$\nabla \times (\nabla u) = 0$

反过来说，如果一个矢量场的旋度为0（无旋场、保守场），则该场可以表示为一个标量场的梯度。

任意一矢量场的旋度的散度恒等于0：$\nabla \cdot (\nabla \times \overrightarrow{A}) = 0$

反过来说，如果一个矢量场的散度为0（无散场），则该场可以表示为一个矢量场的旋度。

两个重要的结论：$\nabla \cdot (fA) = f\nabla \cdot A + A \cdot \nabla f$，$\nabla \times (fG) = f\nabla \times G + \nabla f \times G$。

■ 拉普拉斯运算符

对标量场u，有$\nabla \cdot (\nabla u) = \nabla^2 u$，其中$\nabla^2$称为拉普拉斯算符；

将其展开得 $\nabla^2 u = \nabla \cdot (\overrightarrow{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \overrightarrow{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \overrightarrow{e}_z \frac{\partial u}{\partial z}) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$。

对矢量场$\overrightarrow{F}$，重新定义拉普拉斯运算符：$\nabla^2 \overrightarrow{F} = \nabla(\nabla \cdot \overrightarrow{F}) - \nabla \times (\nabla \times \overrightarrow{F})$。

■ 格林恒等式

可以借助拉普拉斯算符，用格林恒等式（格林定理）表示两个标量场的关系：

$$\int_v (\varphi \nabla^2 \psi + \nabla \varphi \cdot \nabla \psi) dV = \oint_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS,$$

$$\int_v (\varphi \nabla^2 \psi - \nabla \varphi \cdot \nabla \psi) dV = \oint_S (\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}) dS。$$

格林恒等式既可以在已知一个标量场的情况下求另一个；也可以将体积分向面积分转换，把区域中场的问题转化为边界上场的问题。

■ 亥姆霍兹定理

如果一个矢量场的散度和旋度都已经给定，那么这个矢量场就确定了，最多附加一个常量。

即$\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}) = -\nabla \cdot u(\overrightarrow{r}) + \nabla \times \overrightarrow{A}(\overrightarrow{r})$。

其中$u(\overrightarrow{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_v \frac{\nabla' \cdot \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r'})}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}|} dV' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\overrightarrow{e'_n} \cdot \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r'})}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} dS'$,

$$\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_v \frac{\nabla' \cdot \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r'})}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r'}|} dV' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\overrightarrow{e'_n} \cdot \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r'})}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'|} dS'。$$