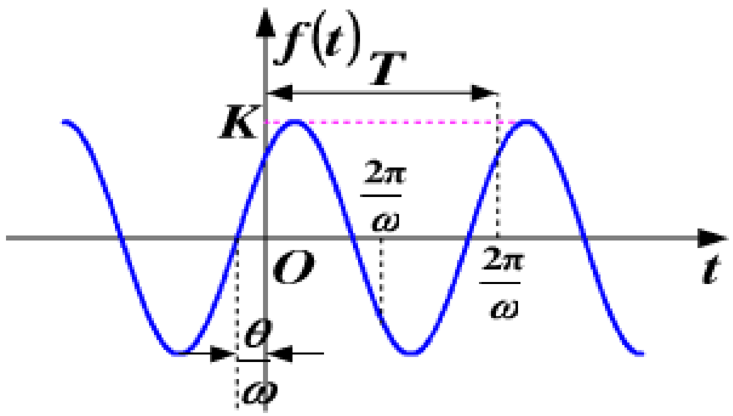
§1.3 典型信号

1.3.1 典型连续时间信号

1. 正弦信号

$$f(t)=K\sin(\omega t+\theta)$$



振幅： K

周期： $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{1}{f}$

频率： f

角频率： $\omega=2\pi f$

初相： θ

性质：正弦信号对时间的微分和积分仍然是正弦信号形式

2. 复指数信号

欧拉公式

$$e^{i\omega t}=\cos(\omega t)+i\sin(\omega t)$$

阅读p2-4及教材对应内容，讨论复指数信号与直流信号、实指数信号、虚指数信号和振荡信号的关系

$$f(t)=Ke^{st} \qquad (-\infty<t<\infty)$$

$$=Ke^{\sigma t}\cos(\omega t)+iKe^{\sigma t}\sin(\omega t)$$

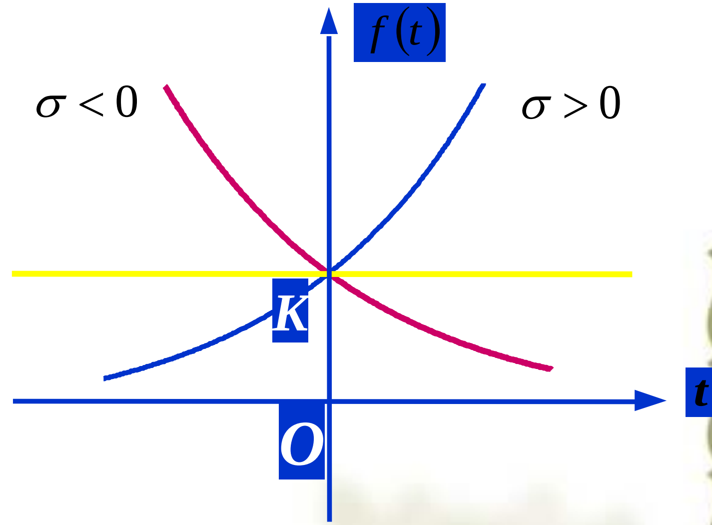
$s=\sigma+i\omega$ $\quad$ σ,ω 均为实常数, ω的单位rad/s

讨论:

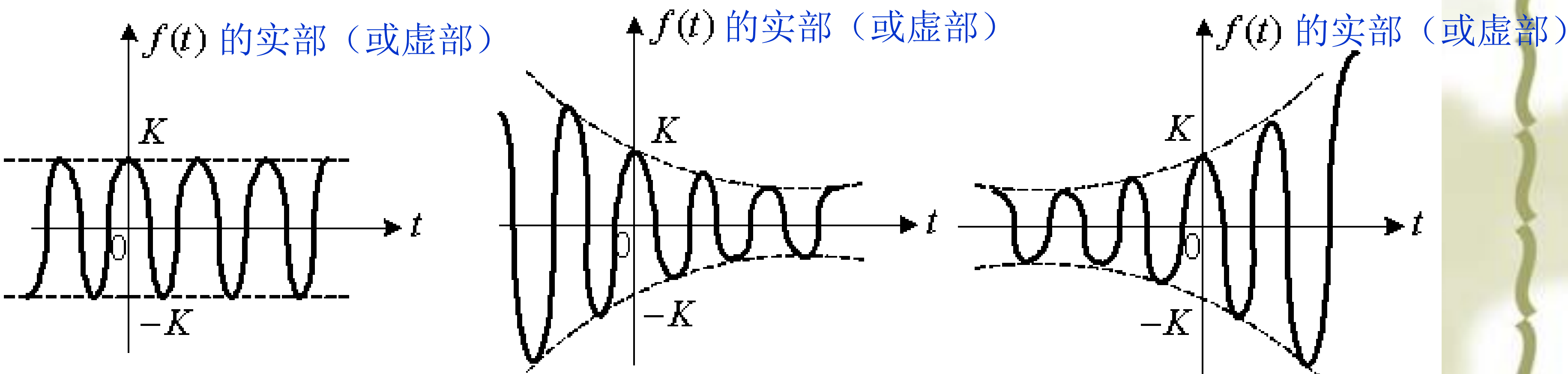
$$f(t) = Ke^{st} \qquad (-\infty < t < \infty)$$
$$= Ke^{\sigma t}\cos(\omega t) + iKe^{\sigma t}\sin(\omega t)$$

$\sigma = \omega = 0$ 直流

$\omega = 0$ 实指数信号 $\begin{cases} \sigma < 0 \\ \sigma > 0 \end{cases}$



$\left.\begin{cases} \omega \neq 0, \sigma = 0 \text{ 等幅} \\ \omega \neq 0, \sigma < 0 \text{ 衰减} \\ \omega \neq 0, \sigma > 0 \text{ 增幅} \end{cases}\right\}$振荡



$\sigma = 0$ $\qquad$ $\sigma < 0$ $\qquad$ $\sigma > 0$

$$\sigma = 0, x(t) = ke^{j\omega t} = k(\cos\omega t + j\sin\omega t)$$

称为虚指数信号，为等幅震荡或无阻尼震荡信号，周期：

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad e^{j\omega(t+T)} = e^{j\omega t} \cdot e^{j\omega T} = e^{j\omega t} \cdot e^{j2\pi} = e^{j\omega t}$$

幅值：$\left|e^{j\omega t}\right| = \sqrt{(\cos\omega t)^2 + (\sin\omega t)^2} = 1$

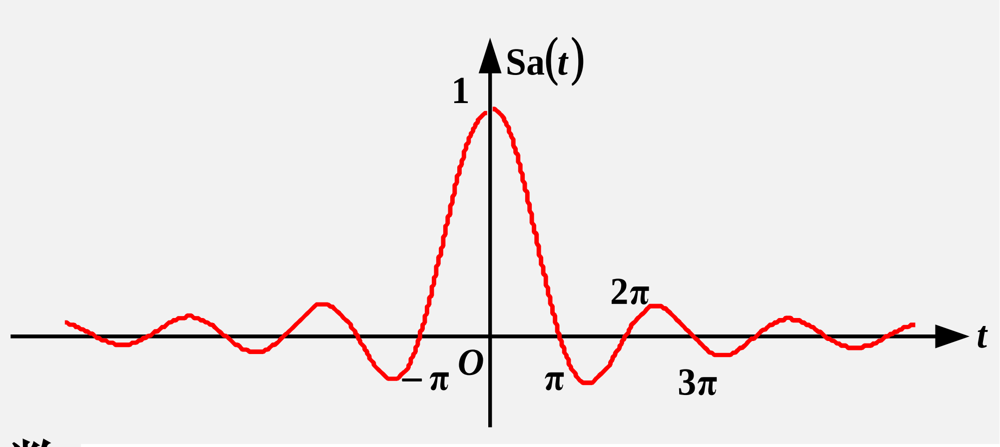
相位：$\varphi = \arctan(\dfrac{\sin\omega t}{\cos\omega t}) = \omega t$

常用表达式：$e^{j2\pi} = 1; \quad e^{j\pi} = -1; \quad e^{\pm j\frac{\pi}{2}} = \pm j;$

重要性质：指数信号对时间的微分和积分仍然是同幂的指数信号。

3. 抽样信号(Sampling Signal)

$$\mathrm{Sa}(t)=\frac{\sin t}{t}$$



性质

① $\mathrm{Sa}(-t)=\mathrm{Sa}(t)$，偶函数

② $t=0,\mathrm{Sa}(t)=1$，即 $\lim\limits_{t\to 0}\mathrm{Sa}(t)=1$

③ $\mathrm{Sa}(t)=0,\ t=\pm n\pi,\quad n=1,2,3\cdots$

④ $\int_{-\infty}^{\infty} Sa(t)\,\mathrm{d}t=\pi$ $\qquad \int_{-\infty}^{\infty} Sa(kt)\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{k}$ $\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}(t)\,\mathrm{d}t=1$

⑤ $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\mathrm{Sa}(t)=0$

⑥ $\mathrm{sinc}(t)=\sin(\pi t)/(\pi t)=Sa(\pi t)$ 辛格函数

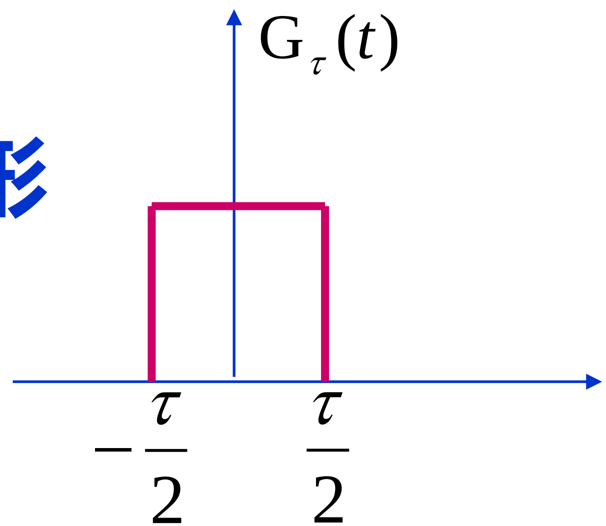
Useful in sampling theorem

4、门函数/窗函数 $G_\tau(t)$

(1）定义

$$G_\tau(t)=\begin{cases}1, & |t|<\dfrac{\tau}{2}\\ 0, & |t|>\dfrac{\tau}{2}\end{cases}$$

(2）波形



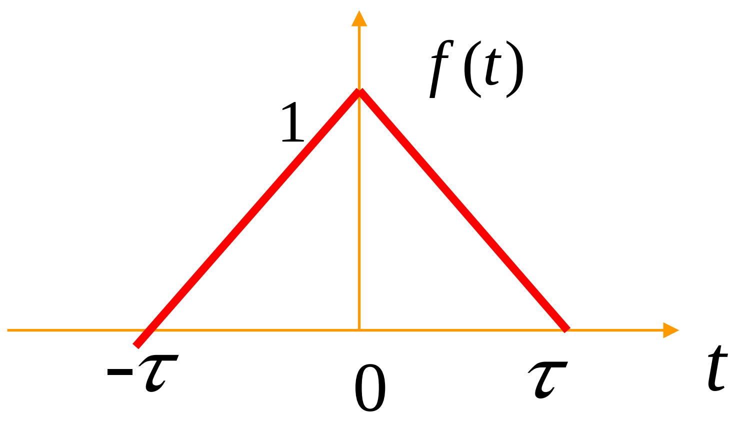
也可以表示成：

$$G_\tau(t)=u(t+\frac{\tau}{2})-u(t-\frac{\tau}{2})$$

（3）作用：信号区间筛选

5. 三角形脉冲

$$T_{2\tau}(t)=\begin{cases}1-\frac{1}{\tau}|t| & (|t|<\tau)\\ 0 & (|t|>\tau)\end{cases}$$



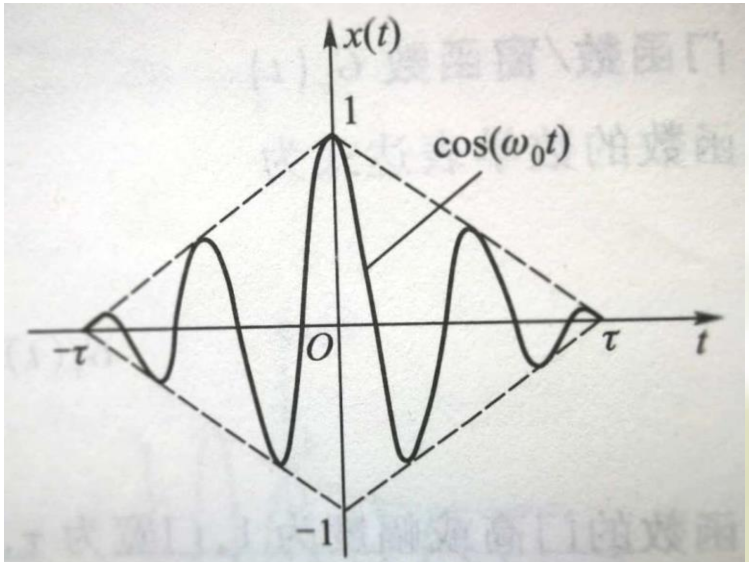


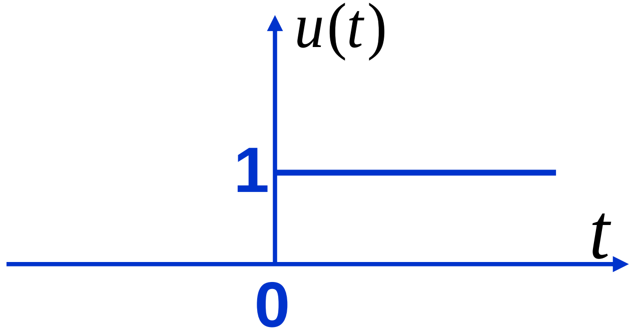
图 1-42　$x(t) = T_{2\tau}(t)\cos\omega_0 t$

三角形脉冲具有窗口特性和幅度约束特性。

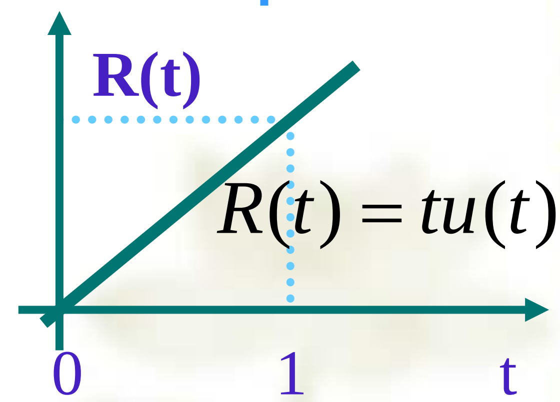
6、单位阶跃信号(*unit step*)

(1) 定义 $u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$

或 $\varepsilon(t)$



积分 ↓ ↑ 微分



单位斜变信号

Unit ramp function

U(0)没有定义或u(0)=1/2

(2) 性质

$u(t-t_0)$?

(a)可以方便地表示某些信号

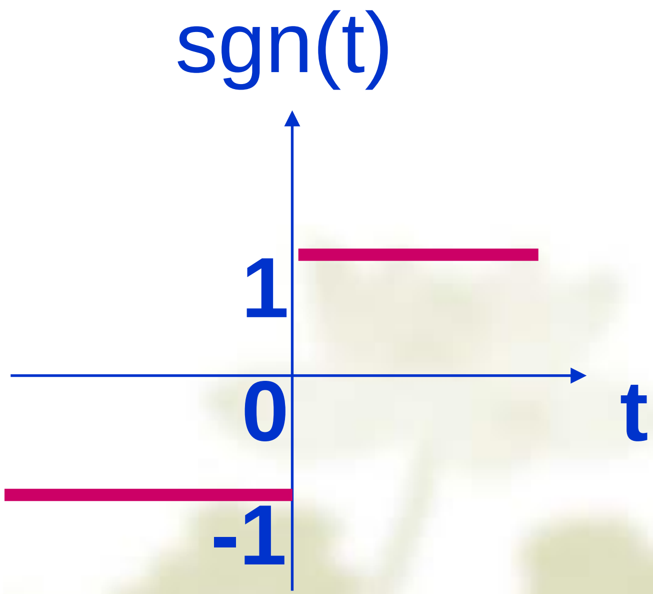
(b)用阶跃函数表示信号的作用区间

(c) 积分 $R(t)=\int_{-\infty}^{t}u(\tau)d\tau = tu(t)$

$$R(t-t_0)=\int_{-\infty}^{t}u(\tau-t_0)d\tau=(t-t_0)u(t-t_0)$$

7.正负号函数[符号函数(sign)] sgn(t)

定义 $$sgn(t)=\begin{cases}1 & (t>0)\\ -1 & (t<0)\end{cases}$$



Sgn(0)没有定义或Sgn(0)=0

可用阶跃表示

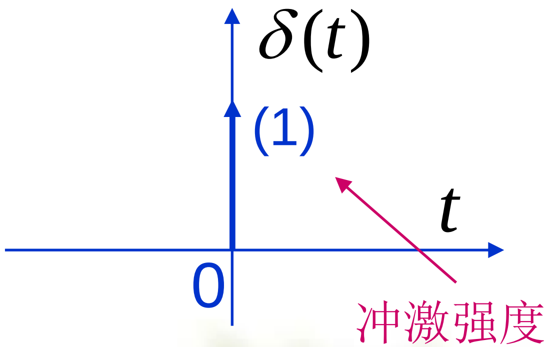
$$sgn(t)=2u(t)-1$$

8、单位冲激信号(Unit Impulse)
又叫 冲激函数 或 狄拉克（Dirac）函数 (或Dirac-Delta函数）

(1) 定义

$$\left.\begin{aligned}\delta(t)&=0 \quad for\ t\neq 0\\ \delta(t)&=\infty \quad for\ t=0\end{aligned}\right\}$$

$$\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt=1$$



可以由普通函数极限获得：门函数、三角形脉冲函数、抽样函数

$$\int_{-\infty}^{\infty} Sa(kt)\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{k} \qquad \delta(t)=\lim_{k\to\infty}\frac{k}{\pi}Sa(kt)$$

讨论—电路:电容充放电

奇异函数是强度极大、作用时间极短一种物理量的理想化模型。

(2) 性质

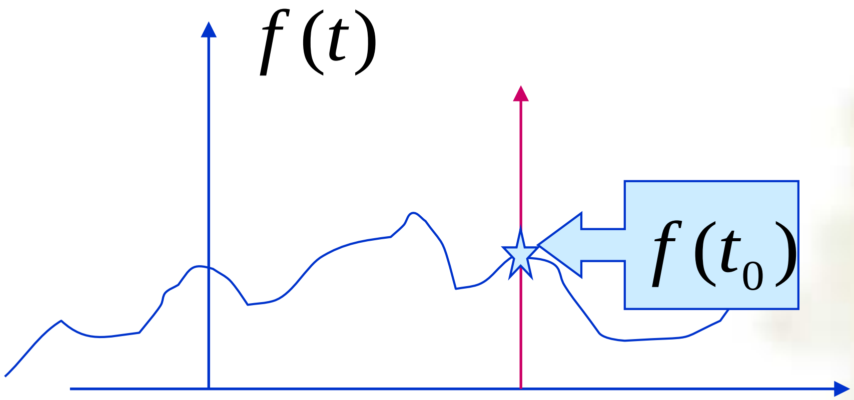
1、乘积性质 $f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$ $f(t)$ 在t=0处连续

$$\delta(t-t_0)f(t)=\delta(t-t_0)f(t_0)$$

2、抽样性（筛选）

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)f(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)f(0)dt=f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t_0)dt=f(t_0)$$



3、偶函数 $\delta(t)=\delta(-t)$

4、积分

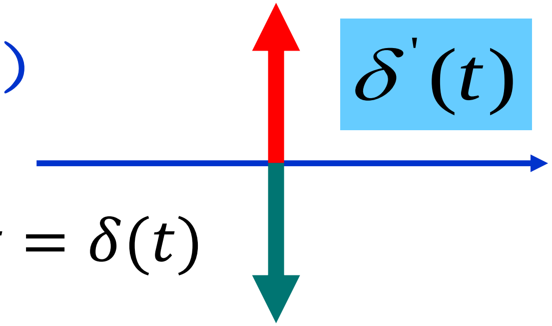
$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=u(t) \qquad \frac{d}{dt}u(t)=\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{t-b}\delta(\tau-a)d\tau=$$

5、尺度变换特性

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$$

6、冲激导函数（冲激偶）（Unit doublet）



冲激偶的性质 $\delta'(t)=\frac{d}{dt}\delta(t)$ $\int_{-\infty}^{t}\delta'(\tau)d\tau=\delta(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)dt=0$$ 奇对称

$$f(t)\delta'(t)=f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t)$$ 乘积特性

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)f(t)dt=-f'(0)$$ 积分特性

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t-t_0)f(t)dt=-f'(t_0)$$

$$(f(t)\delta(t))'=(f(0)\delta(t))'$$
$$=f(0)\delta'(t)$$
$$=f(t)\delta'(t)+f'(t)\delta(t)$$
$$=f(t)\delta'(t)+f'(0)\delta(t)$$

$$\delta^{(n)}(at)=\frac{1}{|a|}\frac{1}{a^n}\delta^{(n)}(t)$$

$$\delta^{(n)}(-t)=(-1)^n\delta^{(n)}(t)$$ n为偶数和奇数？

思考：积分 $\int_{-\infty}^{t} e^{-2\tau}\delta(\tau)\,d\tau$ 等于（　　）

$2\varepsilon(t)$

$\varepsilon(t)$

$\delta(t)+\varepsilon(t)$

$\delta(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty}(t+\cos\pi t)(\delta(t)+\delta'(t))dt=$$

思考：下列关于冲激函数性质的表达式不正确的是（B H I K）

A $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$

B $\delta(at) = \frac{1}{a}\delta(t)$

C $\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \varepsilon(t)$

D $\delta(-t) = \delta(t)$

E $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\,\mathrm{d}t = 0$

F $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)\,\mathrm{d}t = f(0)$

G $f(t+1)\delta(t) = f(1)\delta(t)$

H $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\,\mathrm{d}t = \delta(t)$

I $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t)\,\mathrm{d}t = f'(0)$

J $\int_{-\infty}^{t} \delta'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \delta(t)$

K $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-t_0)\delta(t)dt = f(t_0)$

L $\int_{-\infty}^{t-b} \delta(\tau-a)d\tau = u(t-a-b)$

思考：$\int_{y}^{x} \delta(z_1 \Theta z_2)d\tau = u(t)$ x, y, z_1, z_2，分别是什么？

Θ 是什么符号能够满足公式 15

见L31b

$$\int_{-\infty}^{\infty}(t-2)^2\delta'(-t)\,\mathrm{d}\,t$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(2t)}{t}\delta(t)dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}(t^3-3t^2+5t-1)\delta'(t-1)dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}(t^3+5)\delta(\frac{t}{2})dt$$

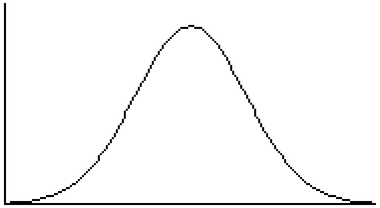
$$\int_{-\infty}^{t}(2-x)\delta'(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{t}\sin 2\tau\delta'(2\tau-1)d\tau=?$$

$$(1-t)\frac{d\left[e^{-2t}\delta(t)\right]}{dt}$$

9. 高斯函数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\left(-\frac{x^2}{2}\right)}$$



(3)

它的所有阶导数都是连续的

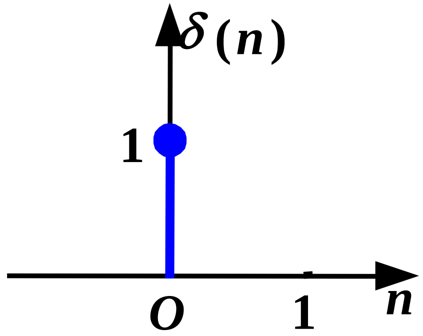
例 1-12 求下列信号的导函数。

① $x_1(t)=\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{u}(t)$； ② $x_2(t)=\sin 3t\mathrm{u}(t)$。

阅读p18-23及教材对应内容，学习离散时间信号.

1.3.2 典型离散时间信号

1. 单位冲激/单位脉冲/单位样值序列



$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau = u(t)$$

$$\delta(n)=\begin{cases}0, n\neq 0\\ 1, n=0\end{cases}$$

显然$x(n)\delta(n)=x(0)\delta(n)$，一般：$x(n)\delta(n-m)=$

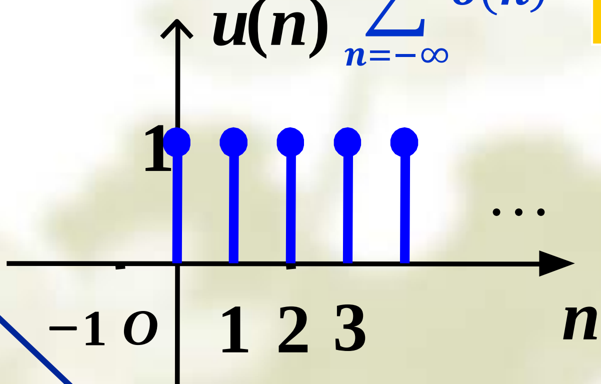
注意： $\delta(t)$用强度表示，($t\to 0$，幅度为 ∞)；

$\delta(n)$在$n=0$取有限值1。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n)=$$

2. 单位阶跃序列

$$u(n)=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$

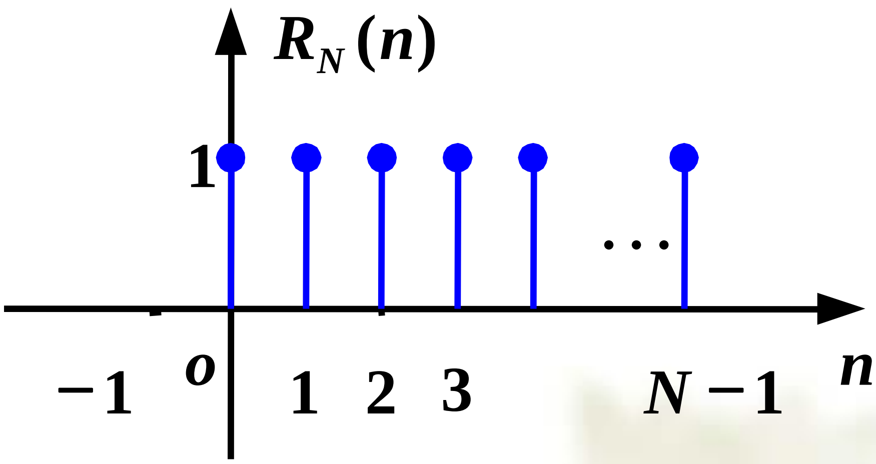


$\delta(n)=u(n)-u(n-1)$ **一阶后向差分**

$$u(n)=\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(n-k)\ \underline{\underline{m=n-k}}\ \sum_{m=-\infty}^{n}\delta(m)$$ **累加和**

3．矩形序列

$$G_N(n)=\begin{cases}1 & 0\le n\le N-1\\ 0 & n<0, n\ge N\end{cases}$$



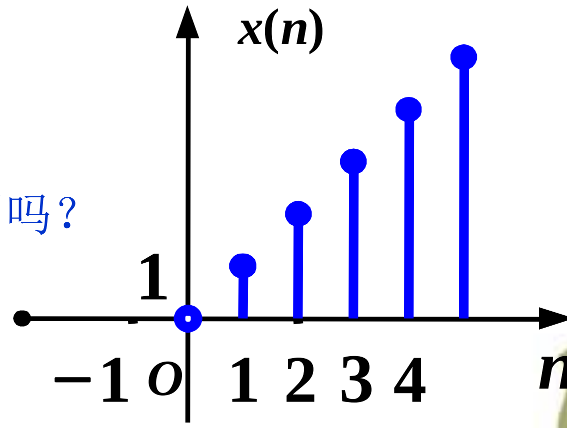
与其它序列的关系：

$$G_N(n)=u(n)-u(n-N)$$

$$G_N(n)=\delta(n)+\delta(n-1)+\cdots+\delta(n-(N-1))=\sum_{k=0}^{N-1}\delta(n-k)$$

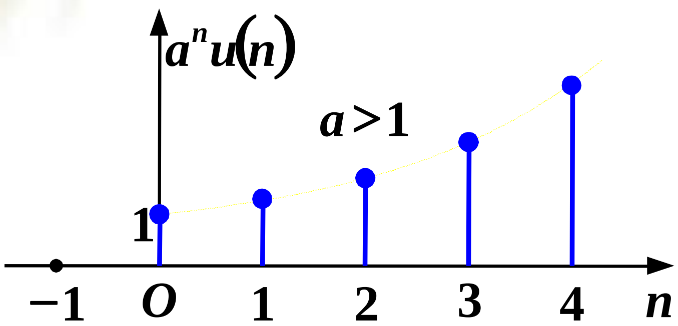
4．斜变序列 $x(n)=nu(n)$

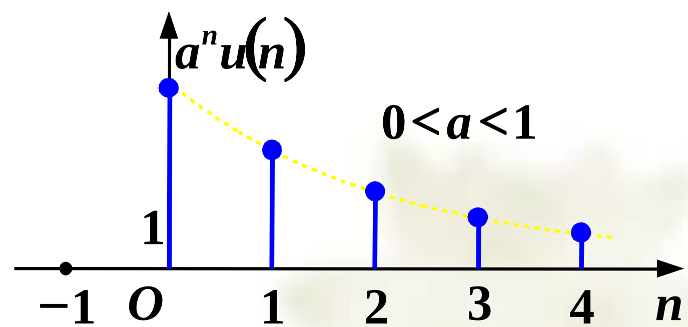
$\mathrm{x}(n) = nu(n-1)$ 相同吗？

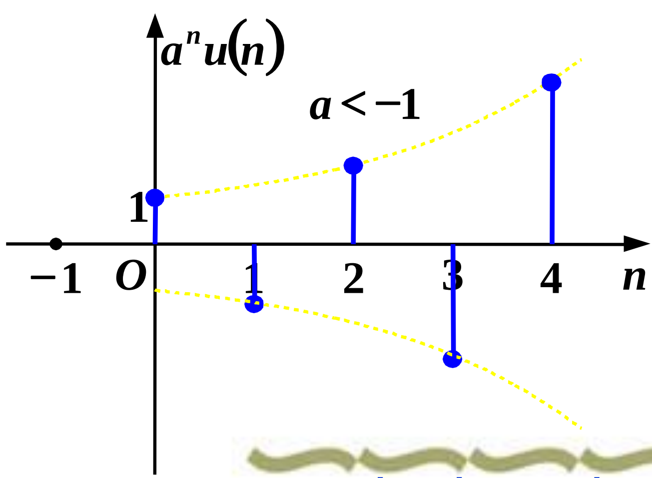


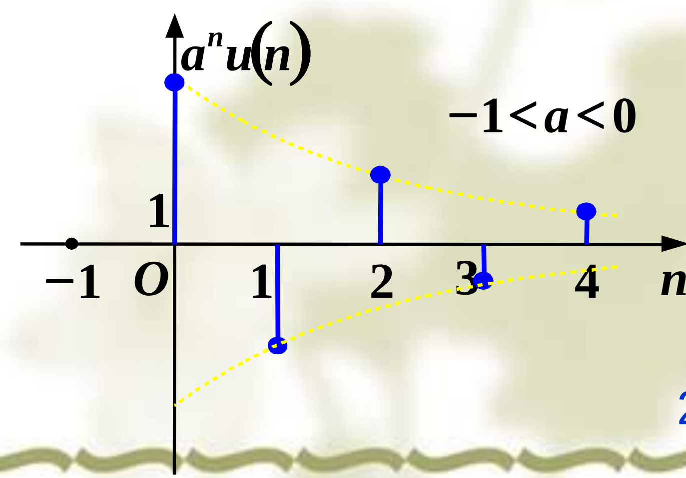
5．指数序列

实指数序列 $x(n)=a^{n}u(n)$









复指数序列

$$x(n) = Ce^{j\Omega n} = C\cos\Omega n + jC\sin\Omega n = |x(n)|e^{j\varphi(n)}$$

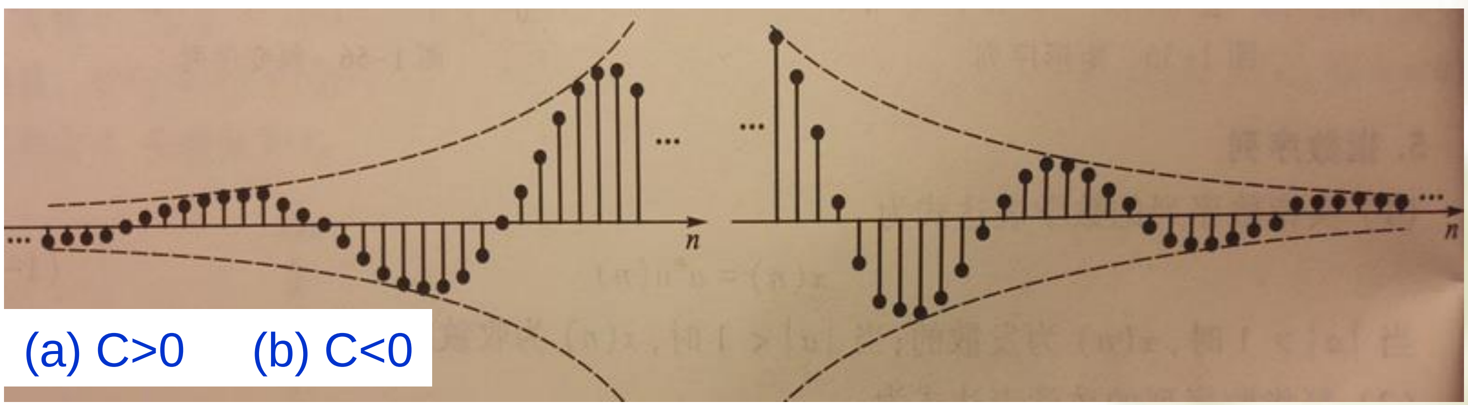
C为常数，序列振幅保持恒定。

$$|x(n)| = |C|$$

$$\varphi(n) = \Omega n$$

或

$$x(n) = e^{(C+j\Omega)n} = e^{Cn}e^{j\Omega n} = e^{Cn}(\cos\Omega n + j\sin\Omega n)$$



(a) C>0　　(b) C<0

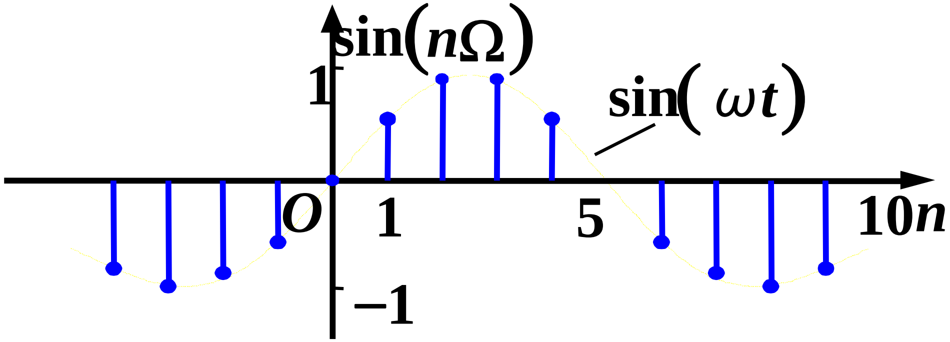
$$|x(n)| = e^{Cn}$$

$$\varphi(n) = \Omega n$$

计算 $(3^n - 2^n)[\delta(n) + \delta(n+2)]$

6．正弦序列

$$x(n)=\sin(\Omega n)$$



模拟信号 $x(t)=\sin\omega t$ 采样 $x(nT_s)=\sin\omega nT_s$

则：$\Omega=\omega T_s=\dfrac{\omega}{f_s}$ 即数字角频率 Ω 是模拟角频率 ω 关于采样频率 f_s 的归一化频率。

ω	单位	弧度/秒	连续	连续域的模拟频率
Ω	单位	弧度	连续	离散域的数字频率

[讨论]：正弦序列的周期性

周期序列： $\boldsymbol{x(n+N)=x(n)}$ **其中N为序列周期，为任意正整数**

$$x(n)=\sin\Omega n=\sin[\Omega(n+N)]$$

$$\Omega N=2\pi\cdot m$$ **m是任意整数**

即：若 $\dfrac{2\pi}{\Omega}=\dfrac{N}{m}$ **因为N为序列周期，为任意正整数，m也是整数**

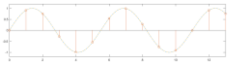
$$\begin{cases}\text{有理数，则正弦序列为周期序列，且周期 } N=\dfrac{2\pi m}{\Omega} \\ \text{无理数，则正弦序列为非周期序列}\end{cases}$$

结论：Ω 中必须包含 π 因子，正弦序列为周期序列；
复指数序列的结论同上。

P37 例1-14

x=sin(4/11*pi*n);

N=11



信号处理及其目的

信号处理是指：

对信号进行**提取**、**变换**、**分析**和**综合**等处理过程的统称

信号处理的目的：

去伪存真	去除信号中冗余的和次要的部分；或滤除信号中混杂的噪声和干扰。
特征提取	把信号变成易于进行分析和识别的形式。
编码解码	把信号变成易于传输、交换与存储的形式（编码），或从编码信号中恢复出原始信号（解码）。

完成实验一　　作业问题

第一章作业:

1.1节

1. （2）
2. （3） （4）
3.
5.

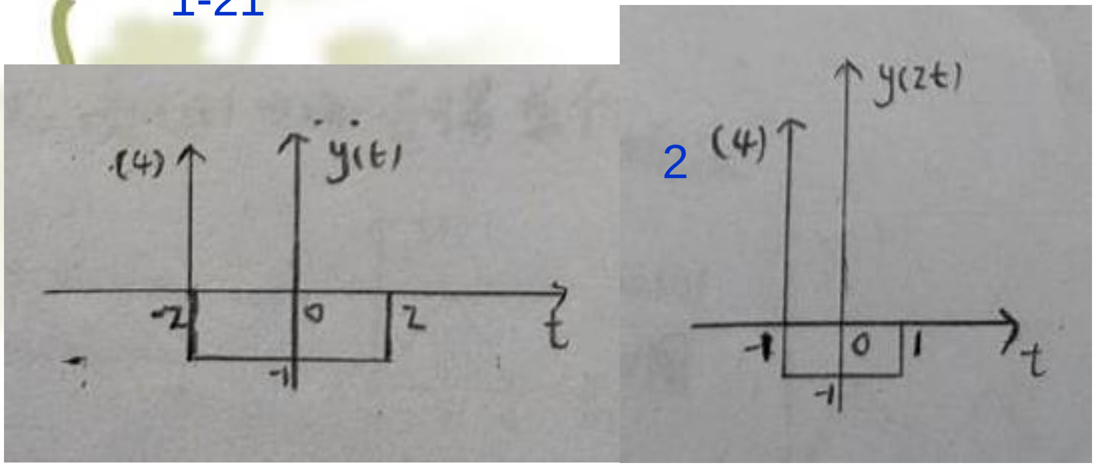
1.2节

7. （2） （3）
8.
9.
10. （2）
11.

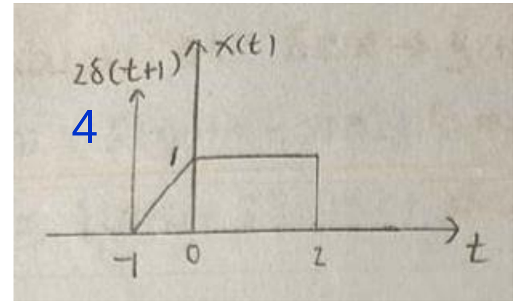
1.3节

12. （2） （5）
14. （2） （4）
15.
16. （5） （6）
17. （2） （3） （5）
19. （3）
21.
22.
23.
24.
25. （2）
26.
28.
30. （2）
31.
33. （1） （3）
34.
36. （3）

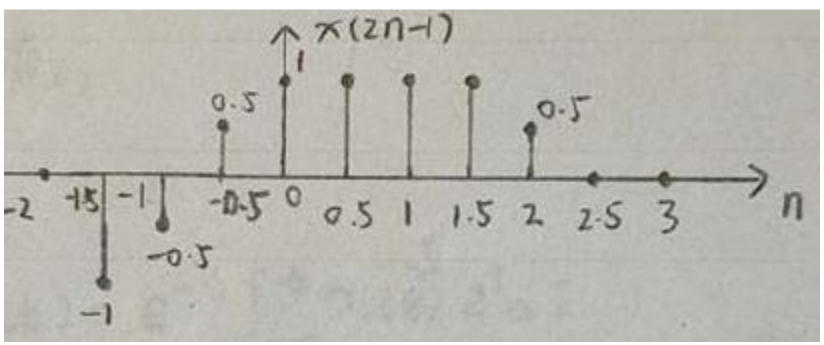
1-21



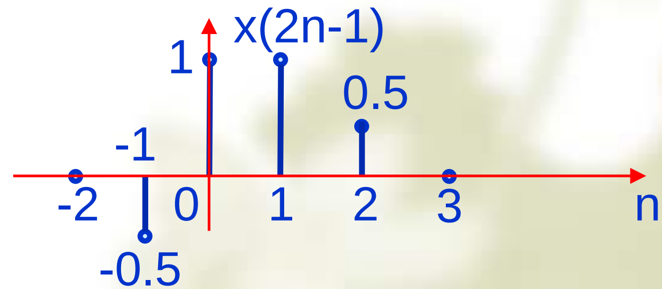
1-22



1-25



x在2n-1点的值作为新函数在n点的值



1-28

解: $x(t)=u(t)-u(t-2)$

∵系统是线性时不变连续系统,

∴经过第1个系统得到的输出为 $u(t)-2u(t-1)+u(t-2)-u(t-2)+2u(t-3)-u(t-4)$

$$=u(t)-2u(t-1)+2u(t-3)-u(t-4)$$

分别输入 $u(t)$、$u(t-1)$、$u(t-3)$、$u(t-4)$,

输出为 $u(t)-2u(t-1)+u(t-2)$ ①

$u(t-1)-2u(t-2)+u(t-3)$ ②

$u(t-3)-2u(t-4)+u(t-5)$ ③

$u(t-4)-2u(t-5)+u(t-6)$ ④

∴ $y(t)=$ ① $-2\times$ ② $+2\times$ ③ $-$ ④ $=u(t)-4u(t-1)+5u(t-2)-5u(t-4)+4u(t-5)-u(t-6)$