本科生高等数学（二）考试A卷答案及评分标准

一、填空题（共5小题，每题4分，共20分)

1. 1; 2. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e}{n!}x^{n+1}$; 3. $\frac{4}{3}$; 4. $\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$; 5. πa^3;

二、选择题（共5小题，每题4分，共20分)

6. （A） 7.（D） 8. (B) **9.** (C) 10. (D)

三、分析计算题（共7小题，共60分)

11. (8分)

解： 令$a_n=\tan(\sqrt{n^2+2}-n)\pi=\tan\frac{2\pi}{\sqrt{n^2+2}+n}$,

显见$a_n\to 0(n\to\infty)$，且数列$\{a_n\}\left(n=1,2,\cdots\right)$单调递减.

应用莱布尼茨判别法，得级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n\text{-}1}a_n$收敛.

因为 $a_n=\tan\frac{2\pi}{\sqrt{n^2+2}+n}>\frac{2\pi}{\sqrt{n^2+2}+n}>\frac{2\pi}{n+1+n}>\frac{1}{n}$

且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，所以原级数非绝对收敛。

综上所述，原级数条件收敛。

12. (8分)

解： 收敛域为$(-1,1)$.

设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-\frac{1}{2}}{n+1}x^{2n},x\in(-1,1)$,则$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}-\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{2n}$

$=\frac{x^2}{1-x^2}-\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{2n}$.

设 $f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}t^n$,由 $\frac{d}{dt}(tf(t))=\sum_{n=1}^{\infty}t^n=\frac{t}{1-t}$知

$tf(t)=-t-\ln(1-t)$, 从而 $f(t)=-1-\frac{1}{t}\ln(1-t),\ t\neq 0,$

$f(0)=0$.

因此,$S(x)=\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{3}{2}(1+\frac{1}{x^2}\ln(1\text{-}x^2)),\ x\in(-1,0)\cup(0,1);$

$S(0)=0.$

13. (8 分)

解: 先求椭圆内部的可能的极值点。

由$\begin{cases} f_x(x,y)=2x=0 \\ f_y(x,y)=-2y=0 \end{cases}$求得1个可能的极值点$(0,\ 0)$。

再由$f_{xx}(0,0)=2,\ f_{yy}(0,0)=-2,\ f_{xy}(0,0)=0$知$(0,\ 0)$

不是极值点。

再求椭圆边界上可能的最值点。构造拉格朗日辅助函数

$F(x,y)=x^2-y^2+1+\lambda(x^2+\frac{y^2}{4}-1)$。

由$\begin{cases} F_x=2x+2\lambda x=0 \\ F_y=-2y+\frac{\lambda y}{2}=0 \\ F_z=x^2+\frac{y^2}{4}-1=0 \end{cases}$ 求得4个可能的极值点$(0,2)$,$(0,-2)$,$(1,0)$和$(-1,\ 0)$。

经验证,$f(x,y)$在D上的最大值为2.

或, 在区域边界上 $f(x,y)=2\text{-}\frac{5}{4}\mathrm{y}^2$, 其最大值为 2.

因此,$f(x,y)$ 在整个闭区域上的最大值为 2。

14. (8 分)

解： 设切点为 (x_0, y_0, z_0)，则切平面方程为

$$6x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)-2z_0(z-z_0)=0,$$

即 $3x_0x+y_0y-z_0z=27.$

又，过直线 $\begin{cases}10x+2y-2z=27,\\ x+y-z=0\end{cases}$ 的平面束方程为

$$10x+2y-2z-27+\lambda(x+y-z)=0.$$

二者表示同一平面，因此

$$\frac{10+\lambda}{3x_0}=\frac{2+\lambda}{y_0}=\frac{-2-\lambda}{-z_0}=\frac{-27}{-27}=1.$$

切点在曲面上，解得 $\lambda=-1$ 和 $\lambda=-19.$

切平面方程为

$$9x+y-z-27=0 \text{ 和 } 9x+17y-17z+27=0$$

15. (8 分)

解： $$I=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2} e^{|z|}dxdydz=2\int_0^R e^z\pi(R^2-z^2)dz$$

$$=2\pi\int_0^R e^z(R^2-z^2)dz=2\pi[(R^2-z^2)e^z\big|_0^R+2\int_0^R ze^z dz]$$

$$=2\pi[(R^2-z^2)e^z\big|_0^R+2(z-1)e^z\big|_0^R]=2\pi(2(\mathrm{R}-1)\mathrm{e}^R+2-R^2).$$

16.(10 分)

解： 记 $P(x,y)=\dfrac{1+y^2e^{xy}}{y}, Q(x,y)=\dfrac{x(y^2e^{xy}-1)}{y^2},$

因为 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，积分与路径（不过x轴）无关。

选取积分路径为从 $A(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ 到 $C(1,\frac{\sqrt{2}}{2})$，再到$B(1,1)$的直线段.

所求积分为

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{2}(1+\frac{1}{2}e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x})\ dx+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\frac{y^2e^y-1}{y^2}dy$$

$$=e-e^{\frac{\sqrt{2}}{4}}+1-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

17. (10 分)

解：　添加平面Σ_1：　$x=e^a$，使其与旋转曲面Σ组成封闭曲面，并记该闭曲面所围的立体为Ω。

利用高斯公式，$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(1-x^2)dydz+4xydzdx-2xzdxdy=\iiint\limits_{\Omega}0dxdydz=0.$

因此，$\iint\limits_{\Sigma}(1-x^2)dydz+4xydzdx-2xzdxdy=$

$$-\iint\limits_{\Sigma_1}(1-x^2)dydz+4xydzdx-2xzdxdy$$

$$=-\iint\limits_{D_{yz}}(1-e^{2a})dydz,$$

这里D_{yz}是Σ_1在yoz坐标面上的投影：$D_{\mathrm{yz}}=\{(y,z)\,|\,y^2+z^2\le a^2\}.$

所以　$\iint\limits_{\Sigma}(1-x^2)dydz+4xydzdx-2xzdxdy$

$$=(e^{2a}-1)\iint\limits_{D_{yz}}dydz=\pi(e^{2a}-1)a^2.$$