FUNDAMENTALS OF INFORMATION SCIENCE

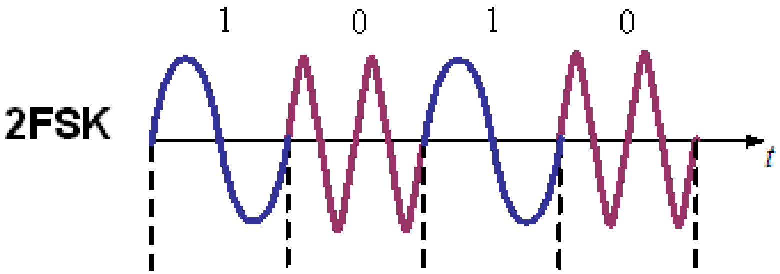
PART 4 INFORMATION TRANSMISSION VI

—— DIGITAL DEMODULATION
ANTI INTERFERENCE & NOISE

Shandong University
2025 Spring

§ 20.2.2　二进制频移键控（2FSK）

- **原理：** s(t)→载波频率
- **波形：**



2FSK可视为
两个不同载频的
2ASK的叠加

- **表达式：**

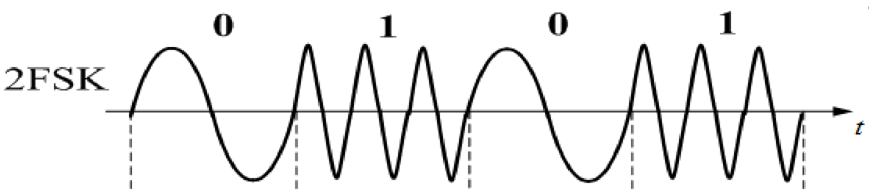
$$\boxed{e_{2FSK}(t) = s_1(t)\cos\omega_1 t + s_2(t)\cos\omega_2 t}$$

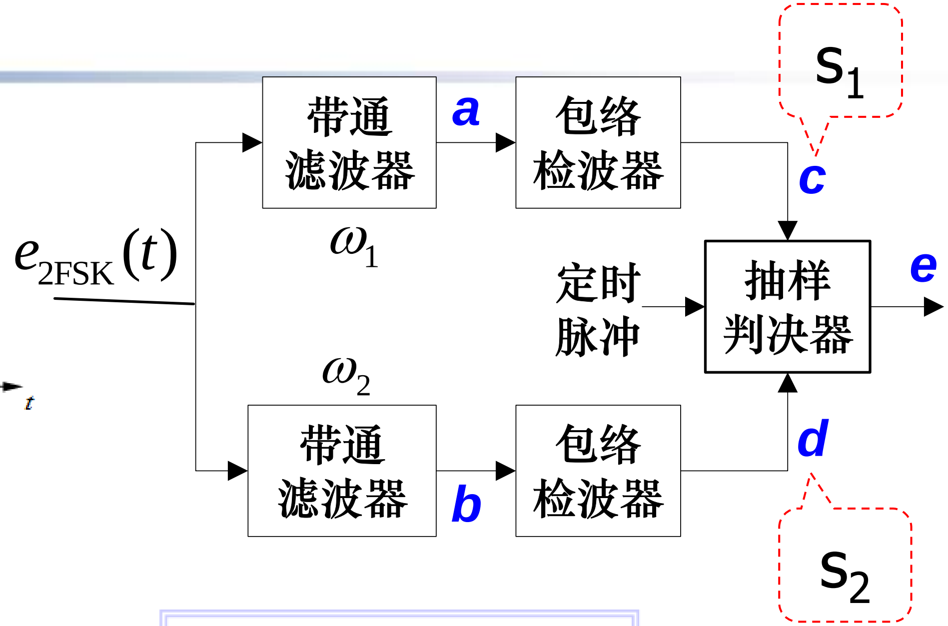
$$s_1(t) = \sum_n a_n g(t - nT_s)$$

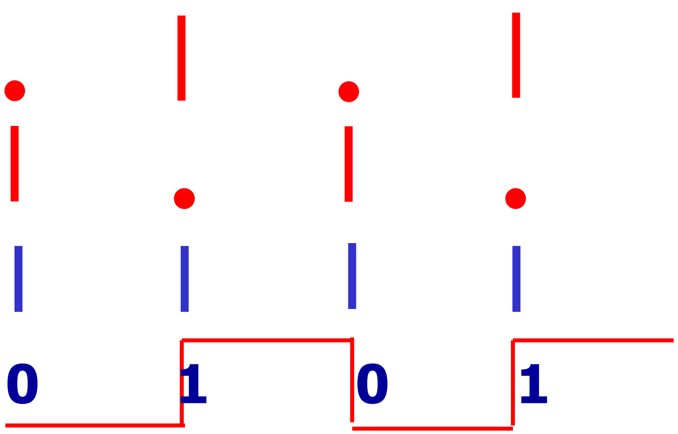
$$s_2(t) = \sum_n \bar{a}_n g(t - nT_s)$$

2FSK 解调

包络检波法







调制规则：

ω_1 ——"1"

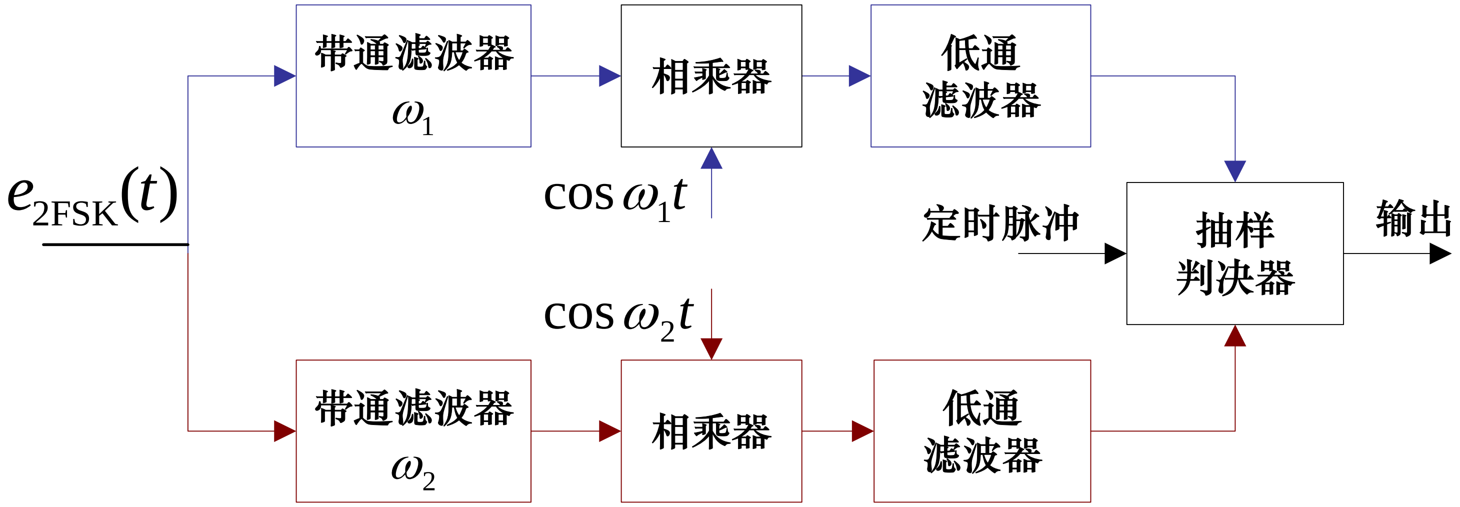
ω_2 ——"0"

判决规则：

$s_1 > s_2$ 判为"1"

$s_1 \le s_2$ 判为"0"

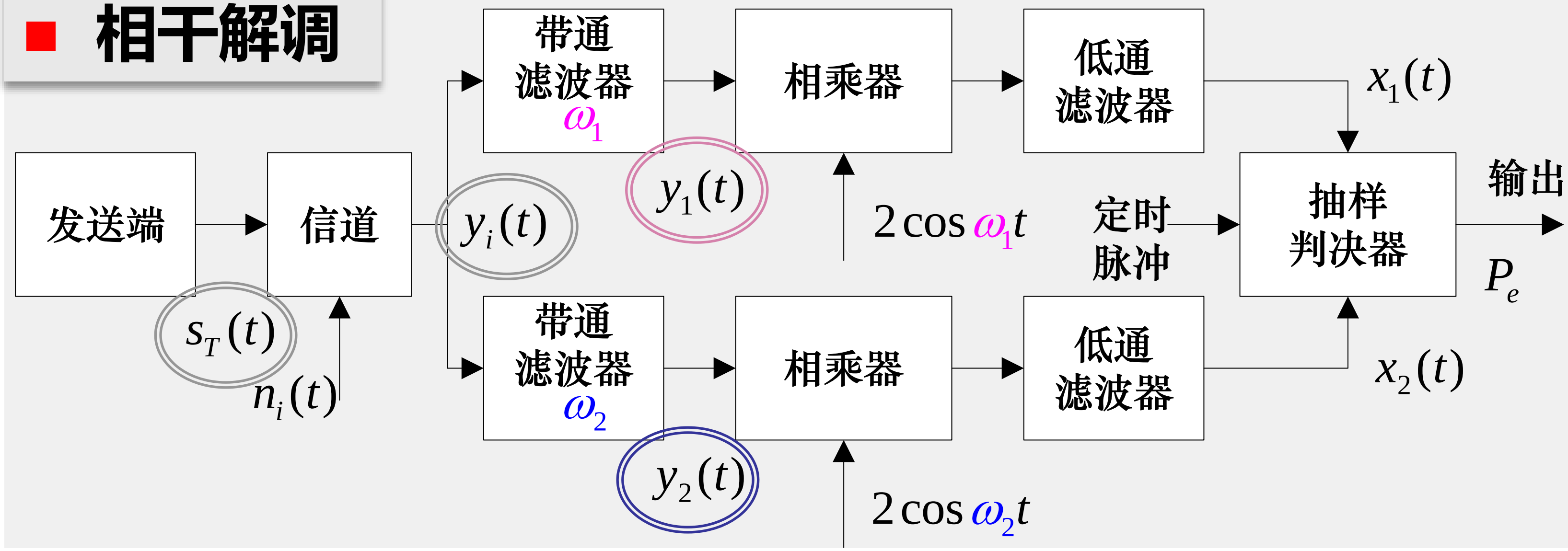
◆ 相干解调法



$e_{2FSK}(t)$
带通滤波器
ω_1
相乘器
低通
滤波器
$\cos\omega_1 t$
定时脉冲
抽样
判决器
输出
$\cos\omega_2 t$
带通滤波器
ω_2
相乘器
低通
滤波器

§ 20.2.2 2FSK 系统的抗噪声性能

■ 相干解调

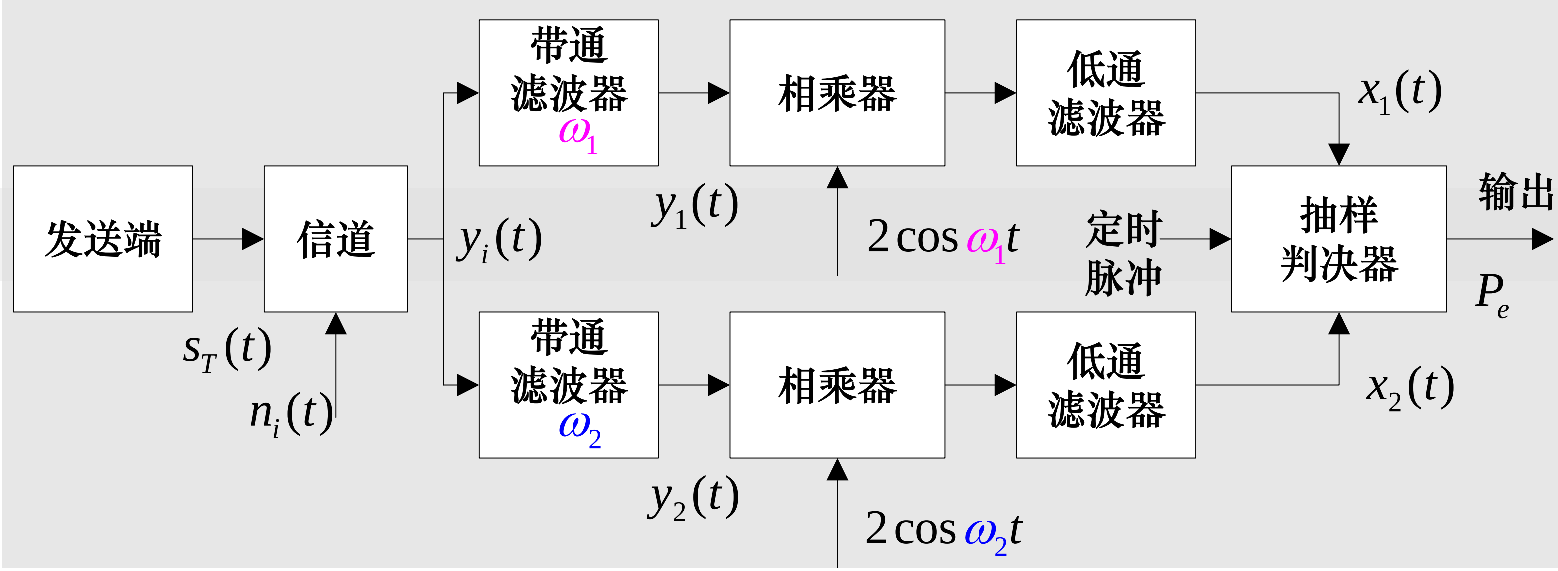


$$s_T(t)=\begin{cases} A\cos\omega_1 t & 发送“1”时 \\ A\cos\omega_2 t & 发送“0”时 \end{cases}$$

$$y_1(t)=\begin{cases} a\cos\omega_1 t+n_1(t), & 发“1”时 \\ n_1(t), & 发“0”时 \end{cases}$$

$$y_i(t)=\begin{cases} a\cos\omega_1 t+n_i(t), & 发送“1”时 \\ a\cos\omega_2 t+n_i(t), & 发送“0”时 \end{cases}$$

$$y_2(t)=\begin{cases} n_2(t) \\ a\cos\omega_2 t+n_2(t) \end{cases}$$



发"1"时：

$$y_1(t) = a\cos\omega_1 t + n_1(t)$$

$$y_2(t) = 0 + n_2(t)$$

$$n_1(t) = n_{1c}(t)\cos\omega_1 t - n_{1s}(t)\sin\omega_1 t$$

$$n_2(t) = n_{2c}(t)\cos\omega_2 t - n_{2s}(t)\sin\omega_2 t$$

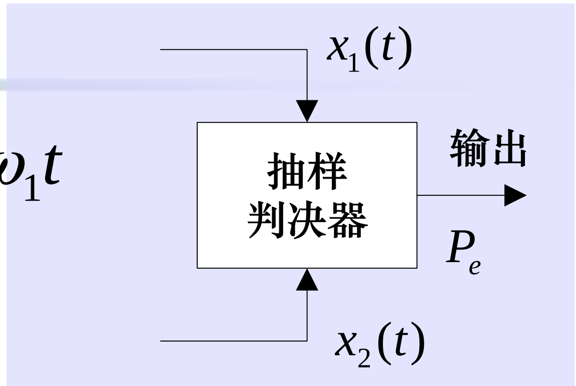
均值同为**0**
方差同为σ_n^2

$n_1(t)$和$n_2(t)$是$n_i(t)$经过上、下带通滤波器的输出噪声——**窄带高斯噪声**

只是中心频率不同而已

$$y_1(t) = [a + n_{1c}(t)]\cos\omega_1 t - n_{1s}(t)\sin\omega_1 t$$

$$y_2(t) = n_{2c}(t)\cos\omega_2 t - n_{2s}(t)\sin\omega_2 t$$



经过相干解调后，送入抽样判决器的两路波形分别为：

上支路 $\boxed{x_1(t) = a + n_{1c}(t)}$ $\quad f(x_1) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n}\exp\left\{-\dfrac{(x_1 - a)^2}{2\sigma_n^2}\right\}$

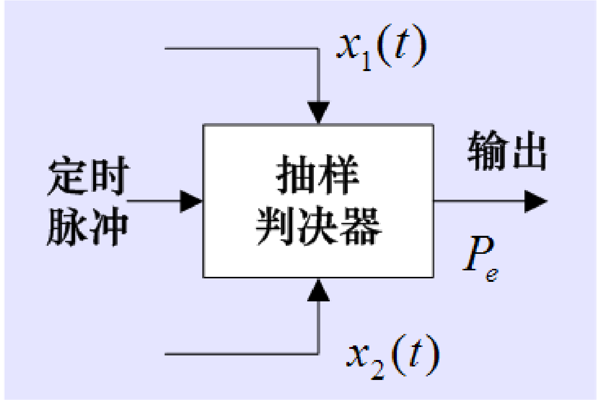
下支路 $\boxed{x_2(t) = n_{2c}(t)}$ $\quad f(x_2) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n}\exp\left\{-\dfrac{x_2^2}{2\sigma_n^2}\right\}$

式中，$\boldsymbol{n_{1c}(t)}$ 和 $\boldsymbol{n_{2c}(t)}$ 均为低通型高斯噪声，（**0**，$\boldsymbol{\sigma_n^2}$）

判决规则

$x_1 > x_2$时，判为“1”

$x_1 \le x_2$时，判为“0”



- 发 “1” 错判为“0”的概率为

$$\boxed{P(0/1) = P(x_1 \le x_2) = P(x_1 - x_2 \le 0)}$$

$$= P(z \le 0) = \int_{-\infty}^{0} f(z)dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z}\int_{-\infty}^{0} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_z^2}\right\}dz$$

$$= \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{r}{2}}\right)$$

$z = (x_1 - x_2)$

~高斯分布

均值

a

方差

$\sigma_z^2 = 2\sigma_n^2$

- 发 “0” 错判为 “1” 的概率

$$P(1/0)=P(x_1>x_2)=\frac{1}{2}erfc\left(\sqrt{\frac{r}{2}}\right)$$

∵ 上、下支路的对称性， ∴ P(1/0) = P(0/1)

- 2FSK-相干解调系统的总误码率为

$$P_e=\frac{1}{2}erfc\left(\sqrt{\frac{r}{2}}\right)$$

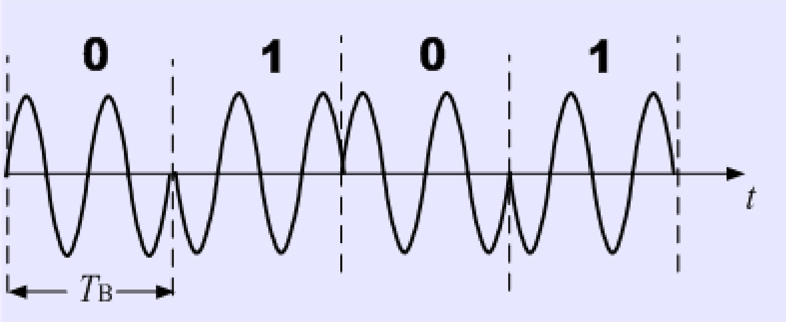
$r>>1$时

$$\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}e^{-\frac{r}{2}}$$

$$r=\frac{a^2}{2\sigma_n^2}$$

§ 20.2.3回顾：二进制相移键控 （2PSK）

- **原理：** s(t)→载波相位
- **波形：**



- **表达式：** 双极性

$$\boxed{e_{2PSK}(t) = s(t)\cos\omega_c t}$$

$$s(t) = \sum_n a_n g(t - nT_s)$$

$$a_n = \begin{cases} 1, & P \\ -1, & 1-P \end{cases}$$

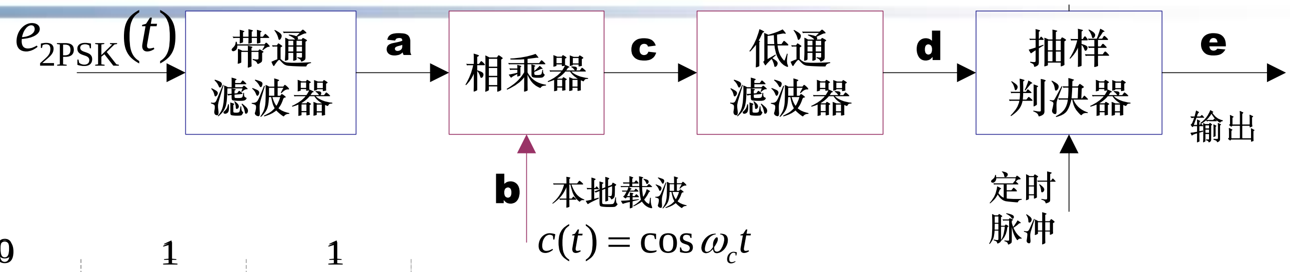
$$e_{2PSK}(t) = A\cos(\omega_c t + \varphi_n)$$

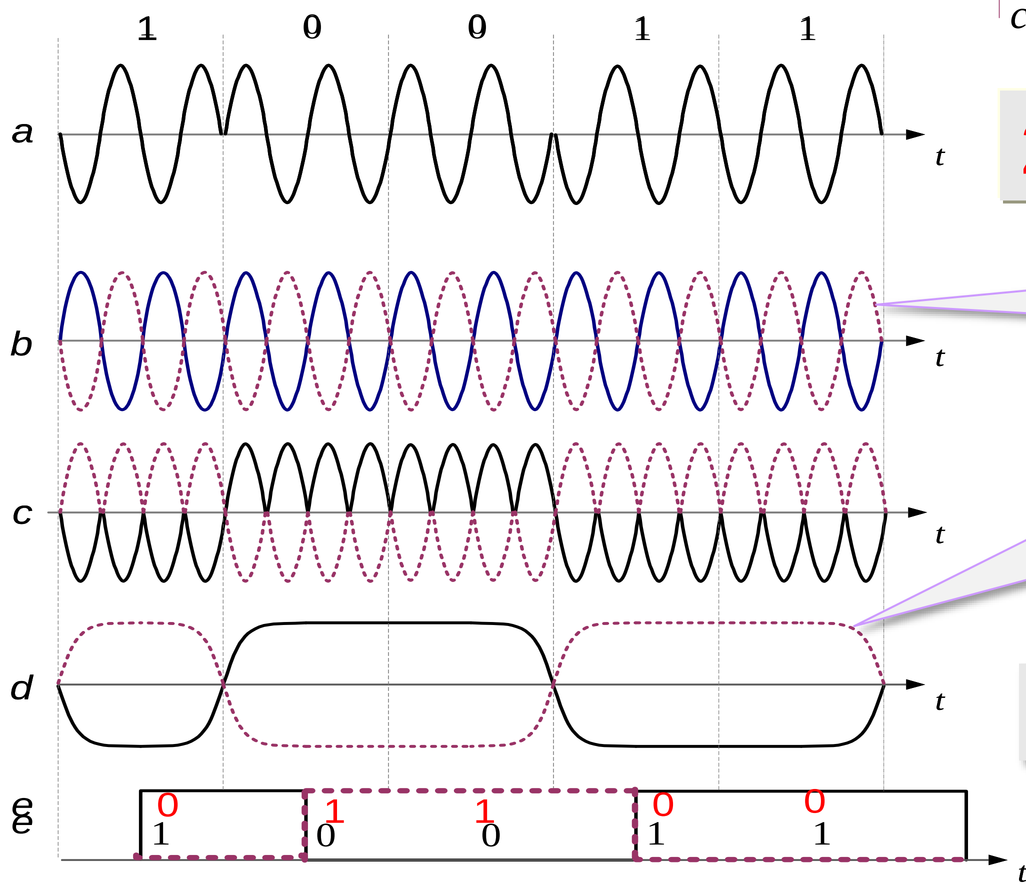
$$\varphi_n = \begin{cases} 0, & \text{发“0”时} \\ \pi, & \text{发“1”时} \end{cases}$$

$$e_{2PSK}(t) = \begin{cases} A\cos\omega_c t, & P \\ -A\cos\omega_c t, & 1-P \end{cases}$$

2PSK 解调原理

框图 和 各点波形：





2PSK存在问题：

载波相位模糊

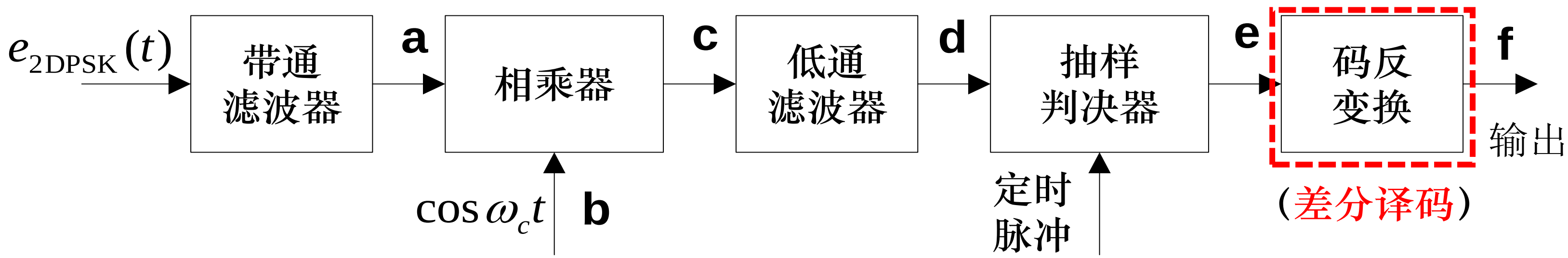
倒π现象（反相工作）

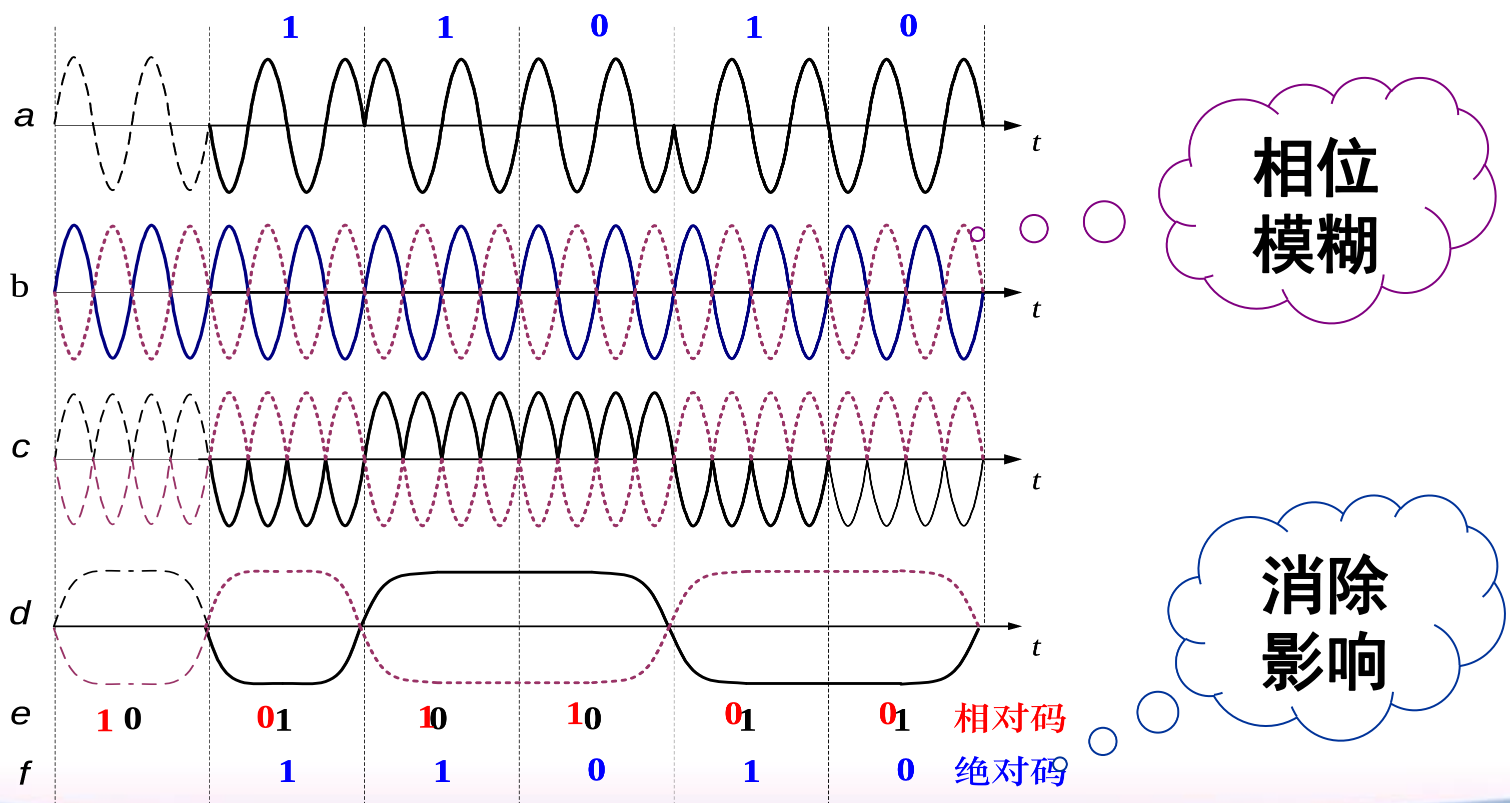
解决方案： DPSK

Differential PSK

2DPSK 相干解调 + 码反变换法

$$a_n = b_n \oplus b_{n-1}$$





§ 20.2.3　2PSK/2DPSK系统的抗噪声性能

在任意一个T_B内， 2PSK 和2DPSK都可表示为：

$$s_T(t)=\begin{cases} A\cos\omega_c t\,, & \text{发送“1”时} \\ -A\cos\omega_c t\,, & \text{发送“0”时} \end{cases}$$

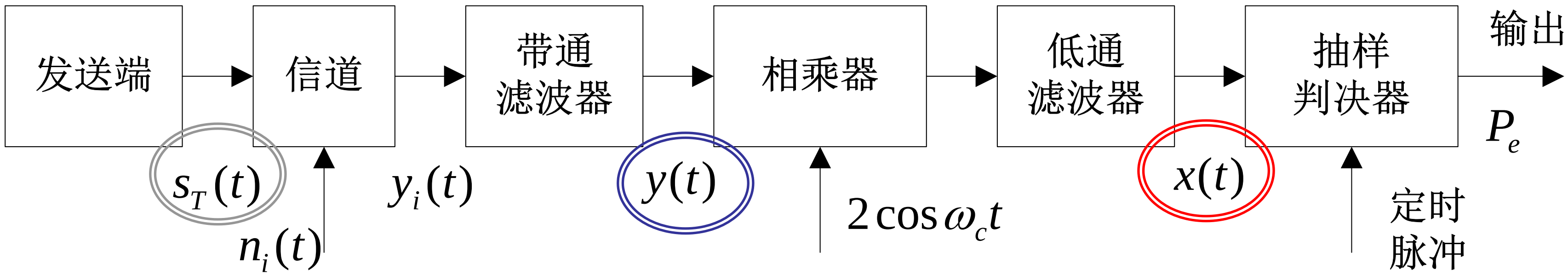
2PSK信号

原始数字信息（绝对码）

2DPSK信号

相对码

1 2PSK相干解调系统



$$s_T(t)=\begin{cases}A\cos\omega_c t\,, & 发“1”时\\ -A\cos\omega_c t\,, & 发“0”时\end{cases}$$

$$y(t)=\begin{cases}[a+n_c(t)]\cos\omega_c t-n_s(t)\sin\omega_c t\\ [-a+n_c(t)]\cos\omega_c t-n_s(t)\sin\omega_c t\end{cases}$$

$$x(t)=\begin{cases}a+n_c(t), & 发“1”时\\ -a+n_c(t), & 发“0”时\end{cases}$$

高斯噪声
（±a，σ_n^2）

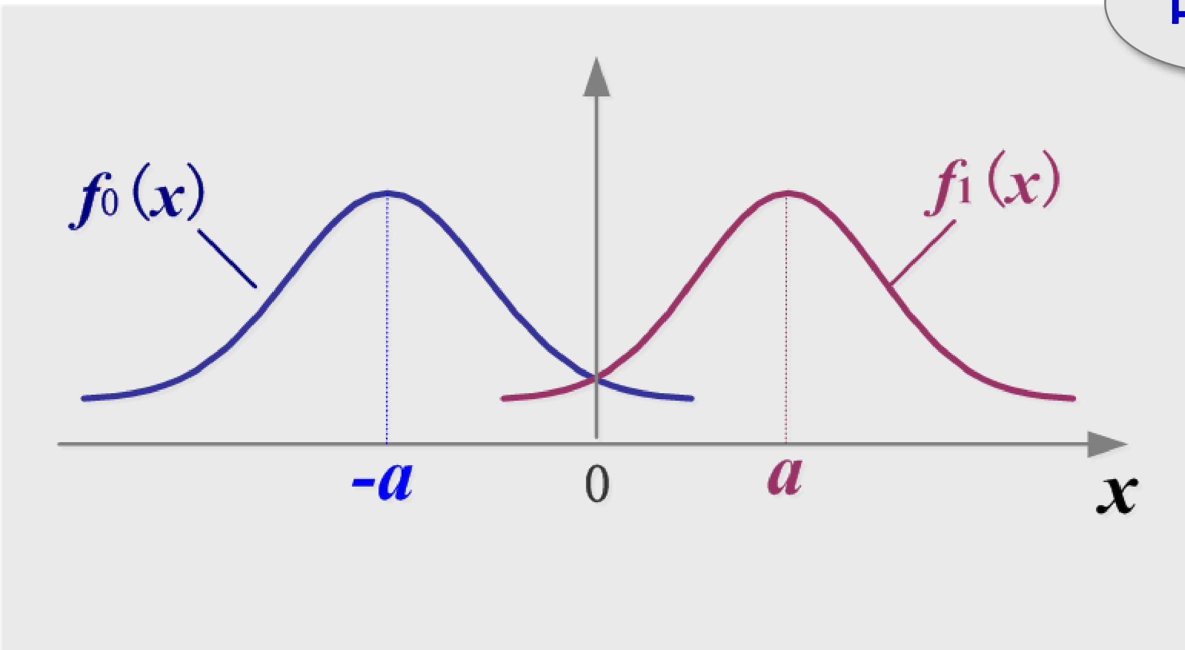
高斯噪声
（0，σ_n^2）

$$x(t)=\begin{cases} a+n_c(t), & \text{发“1”时} \\ -a+n_c(t), & \text{发“0”时} \end{cases}$$

因此，$x(t)$的一维概率密度函数为:

$$f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n}\exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_n^2}\right\} \qquad \text{发“1”时}$$

$$f_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n}\exp\left\{-\frac{(x+a)^2}{2\sigma_n^2}\right\} \qquad \text{发“0”时}$$



可见

与双极性基带系统的情况类似

$$x(t)=\begin{cases} A+n_R(t) \\ -A+n_R(t) \end{cases}$$

$$x(t)=\begin{cases} a+n_c(t), & \text{发“1”时} \\ -a+n_c(t), & \text{发“0”时} \end{cases}$$

=双极性基带信号+高斯噪声

因此，借助双极性基带系统的分析结果：

$$V_d^* = \frac{\sigma_n^2}{2A} \ln \frac{P(0)}{P(1)}$$

等概时

$$V_d^* = 0$$

$$P_e = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{A}{\sqrt{2}\sigma_n}\right)$$

可方便地得到**2PSK-相干系统**的分析结果：

$$V_d^* = \frac{\sigma_n^2}{2a} \ln \frac{P(0)}{P(1)}$$

等概时

$$V_d^* = 0$$

$$P_e = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{a}{\sqrt{2}\sigma_n}\right)$$

2PSK信号**相干**解调系统的总误码率：

$$P_e = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{a}{\sqrt{2}\sigma_n}\right)$$

$$r = \frac{a^2}{2\sigma_n^2}$$

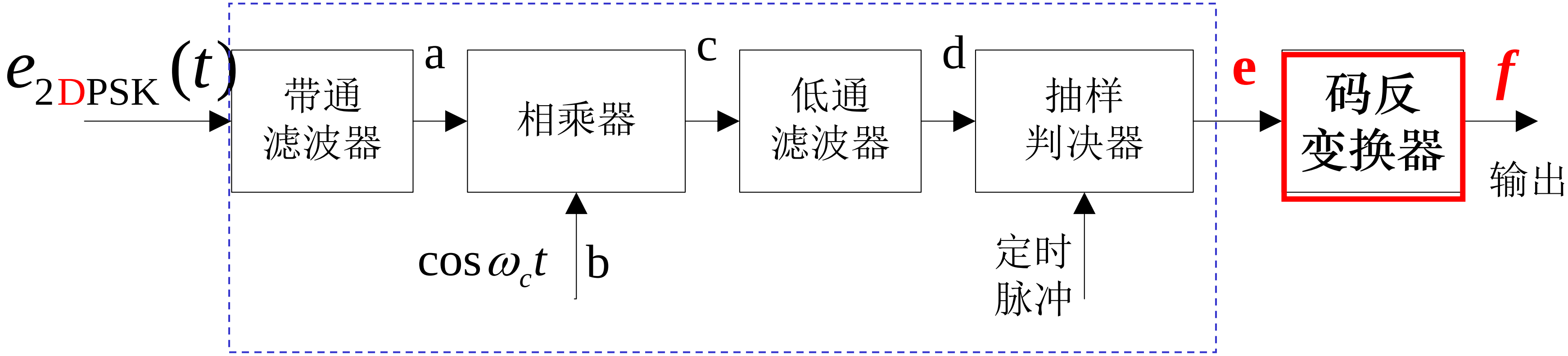
解调器输入端信噪比

$$P_e = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{r}\right)$$

r >>1 时

$$P_e \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi r}} e^{-r}$$

2 2DPSK相干解调(极性比较) +码反变换



e点：**相对码**序列。由**2PSK**误码率公式来确定：

$$P_{e2PSK} = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{r}\right) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi r}} e^{-r}$$

f点：**绝对码**序列。只需在P_{e2PSK}基础上考虑码反变换器对误码率的影响即可。

码反变换器对误码的影响：

$$a_n = b_n \oplus b_{n-1}$$

相对码 $\{b_n\}$ P_e → 码反变换器 → $\{a_n\}$ 绝对码 P_e'

a_n 总是错 2个

$\{b_n\}$	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	（无误码）
$\{a_n\}$		1	1	0	1	0	1	0	0	1	
$\{b_n\}$	1	0	1	×	0	0	1	1	1	0	（b_n错1个码）
$\{a_n\}$		1	1	×	×	0	1	0	0	1	
$\{b_n\}$	1	0	1	×	×	0	1	1	1	0	（b_n连错2个码）
$\{a_n\}$		1	1	×	1	×	1	0	0	1	
$\{b_n\}$	1	0	1	×	×	×	×	⋯	×	0	（b_n连错 n 个码）
$\{a_n\}$		1	1	×	1	0	1	⋯	0	×	

∴ 2DPSK相干+码反变换系统的误码率：

$$P_e' = (1-P_e)P_e + P_e(1-P_e) = 2P_e(1-P_e)$$

在大信噪比（r >>1）时，P_e<<1，因此：

$$\boxed{P_e' \approx 2P_e \approx \frac{1}{\sqrt{\pi r}} e^{-r}}$$

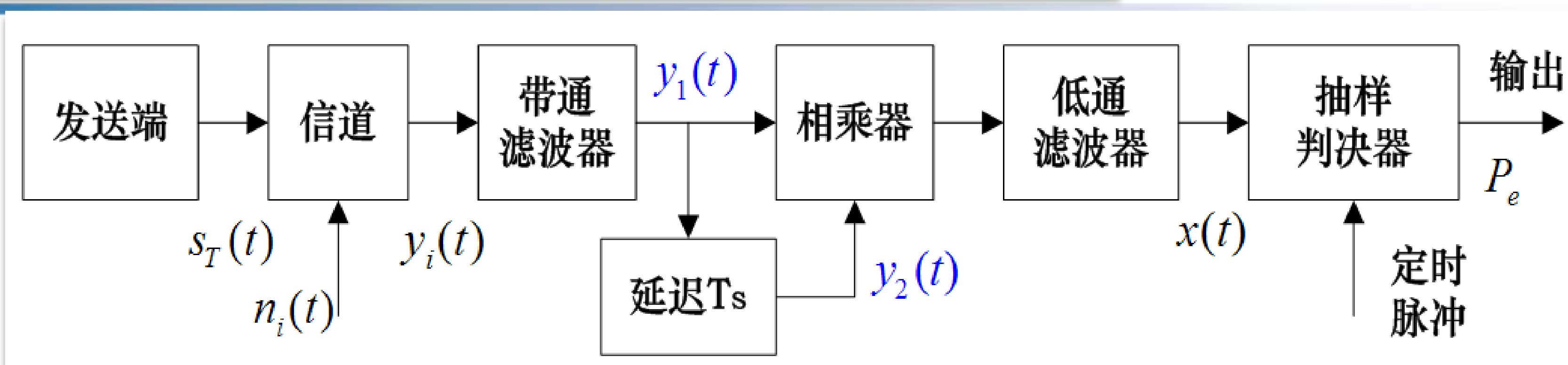
式中：

$$P_e = P_{e2\text{PSK}} = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{r}\right) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi r}} e^{-r}$$

条件：

假设每个相对码出错概率相等且统计独立

3 2DPSK 差分相干解调（相位比较）



设 当前发送 “1”，且令前一个码元也是 “1”（或 “0”）
则 送入相乘器的两个信号$y_1(t)$和$y_2(t)$可表示为：

$$y_1(t) = a\cos\omega_c t + n_1(t) = [a + n_{1c}(t)]\cos\omega_c t - n_{1s}(t)\sin\omega_c t$$

$$y_2(t) = a\cos\omega_c t + n_2(t) = [a + n_{2c}(t)]\cos\omega_c t - n_{2s}(t)\sin\omega_c t$$

$$\left.\begin{array}{l}n_1(t)\text{为叠加在前一码元上的窄带高斯噪声}\\ n_2(t)\text{为叠加在后一码元上的窄带高斯噪声}\end{array}\right\}\text{两者独立}$$

则低通滤波器的输出为:

$$x(t)=\frac{1}{2}\{[a+n_{1c}(t)][a+n_{2c}(t)]+n_{1s}(t)n_{2s}(t)\}$$

经抽样后的样值为:

$$x=\frac{1}{2}[(a+n_{1c})(a+n_{2c})+n_{1s}n_{2s}]$$

判决

$x>0$，判为“1”——正确

$x\leq 0$，判为“0”——错误

- 发“1”错判为“0”的概率为：

$$P(0/1)=P\{x<0\}=P\{\frac{1}{2}[(a+n_{1c})(a+n_{2c})+n_{1s}n_{2s}]<0\}$$

利用恒等式

$$x_1x_2+y_1y_2=\frac{1}{4}\{\left[(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2\right]-\left[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\right]\}$$

令上式中

$$x_1=a+n_{1c}\quad x_2=a+n_{2c}\quad y_1=a+n_{1s}\quad y_2=a+n_{2s}$$

则

$$P\left(0/1\right)=P\{[(2a+n_{1c}+n_{2c})^2+(n_{1s}+n_{2s})^2-(n_{1c}-n_{2c})^2-(n_{1s}-n_{2s})^2]<0\}$$

$$P(0/1)=P\{[\underbrace{(2a+n_{1c}+n_{2c})^2+(n_{1s}+n_{2s})^2}_{R_1^2}-\underbrace{(n_{1c}-n_{2c})^2-(n_{1s}-n_{2s})^2}_{R_2^2}]<0\}$$

简化为

令

$$\begin{cases} R_1=\sqrt{(2a+n_{1c}+n_{2c})^2+(n_{1s}+n_{2s})^2} \\ R_2=\sqrt{(n_{1c}-n_{2c})^2+(n_{1s}-n_{2s})^2} \end{cases}$$

$$P(0/1)=P(R_1^{\ 2}\text{-}R_2^{\ 2}<0)=P(R_1<R_2)$$

——— **类似 2FSK-包络检波 的情形 ！**

由随机信号理论可知：R_1的一维分布服从广义瑞利分布，R_2的一维分布服从瑞利分布，其概率密度函数分别为：

$$f(R_1)=\frac{R_1}{2\sigma_n^2}I_0\left(\frac{aR_1}{\sigma_n^2}\right)e^{-(R_1^2+4a^2)/4\sigma_n^2}$$

$$f(R_2)=\frac{R_2}{2\sigma_n^2}e^{-R_2^2/4\sigma_n^2}$$

将以上两式代入： $P(0/1)=P\{R_1<R_2\}$

可得：$P(0/1)=P\{R_1<R_2\}=\int_0^{\infty}f(R_1)\left[\int_{R_2=R_1}^{\infty}f(R_2)dR_2\right]dR_1$

$$=\int_0^{\infty}\frac{R_1}{2\sigma_n^2}I_0\left(\frac{aR_1}{\sigma_n^2}\right)e^{-(2R_1^2+4a^2)/4\sigma_n^2}\,dR_1=\frac{1}{2}e^{-r}$$

- 发“0”错判为“1”的概率为：

$$P(1/0)=P(0/1)=\frac{1}{2}e^{-r}$$

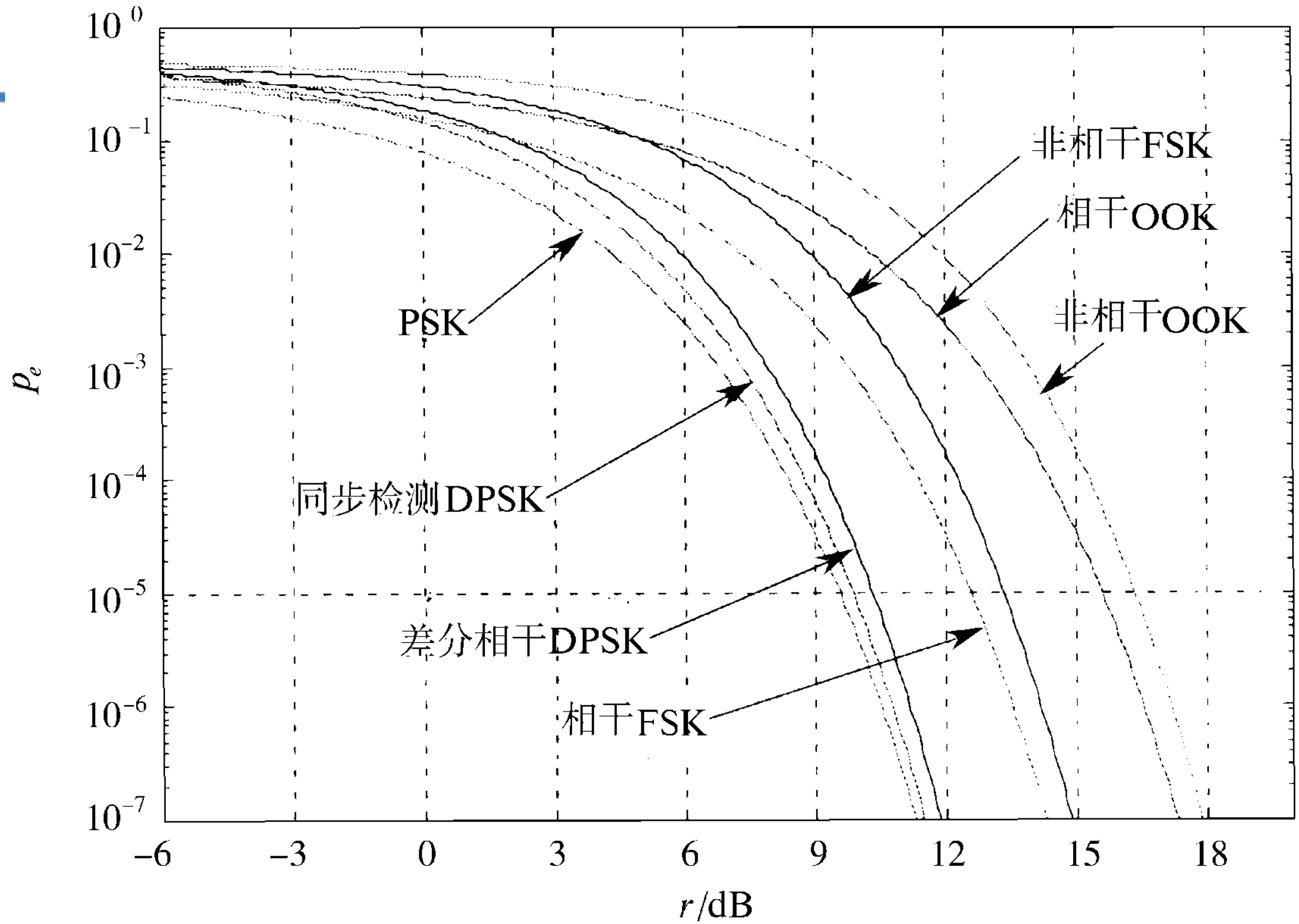
- 2DPSK -差分相干解调系统的总误码率为：

$$\boxed{P_e=\frac{1}{2}e^{-r}}$$

§ 20.3

二进制数字调制系统

性能比较



二进制调制系统的抗噪声性能

1 误码率——可靠性

$$r = \frac{a^2}{2\sigma_n^2}$$

$$\sigma_n^2 = n_0 B = n_0 \cdot \frac{2}{T_s}$$

	相干解调		非相干解调
	精确值	近似值	
2ASK	$P_e = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{r}{4}}\right)$	$\approx \frac{1}{\sqrt{\pi r}} e^{-r/4}$	$P_e = \frac{1}{2} e^{-r/4}$
2FSK	$P_e = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{r}{2}}\right)$	$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} e^{-r/2}$	$P_e = \frac{1}{2} e^{-r/2}$
2PSK	$P_e = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{r}\right)$	$\approx \frac{1}{2\sqrt{\pi r}} e^{-r}$	
2DPSK	$P_e = erfc(\sqrt{r})$	$\approx \frac{1}{\sqrt{\pi r}} e^{-r}$	$P_e = \frac{1}{2} e^{-r}$

讨论

- r 一定，相同解调方式（如相干解调），抗高斯白噪声性能优劣的顺序： 2PSK、2DPSK、2FSK、2ASK

2ASK	$P_e = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{r}{4}}\right)$	$\approx \frac{1}{\sqrt{\pi r}} e^{-r/4}$	$P_e = \frac{1}{2} e^{-r/4}$
2FSK	$P_e = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{r}{2}}\right)$	$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} e^{-r/2}$	$P_e = \frac{1}{2} e^{-r/2}$
2PSK	$P_e = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{r}\right)$	$\approx \frac{1}{2\sqrt{\pi r}} e^{-r}$	
2DPSK	$P_e = erfc(\sqrt{r})$	$\approx \frac{1}{\sqrt{\pi r}} e^{-r}$	$P_e = \frac{1}{2} e^{-r}$

讨论

- r 一定，相同解调方式（如相干解调），抗高斯白噪声性能优劣的顺序： 2PSK、2DPSK、2FSK、2ASK

2ASK	$P_e=\frac{1}{2}erfc\left(\sqrt{\frac{r}{4}}\right)$	$\approx\frac{1}{\sqrt{\pi r}}e^{-r/4}$	$P_e=\frac{1}{2}e^{-r/4}$
2FSK	$P_e=\frac{1}{2}erfc\left(\sqrt{\frac{r}{2}}\right)$	$\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}e^{-r/2}$	$P_e=\frac{1}{2}e^{-r/2}$
2PSK	$P_e=\frac{1}{2}erfc\left(\sqrt{r}\right)$	$\approx\frac{1}{2\sqrt{\pi r}}e^{-r}$	

- Pe一定，所需的信噪比： $r_{2ASK}=2r_{2FSK}=4r_{2PSK}$

讨论

- r 一定，相同解调方式（如相干解调），抗高斯白噪声性能优劣的顺序： 2PSK、2DPSK、2FSK、2ASK

2ASK	$P_e = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{r}{4}}\right)$	$\approx \frac{1}{\sqrt{\pi r}} e^{-r/4}$	$P_e = \frac{1}{2} e^{-r/4}$
2FSK	$P_e = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{r}{2}}\right)$	$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} e^{-r/2}$	$P_e = \frac{1}{2} e^{-r/2}$

- r 一定，相同调制方式： $P_{e\text{相干}} < P_{e\text{非相干}}$

- Pe一定，所需的信噪比： $r_{2ASK} = 2r_{2FSK} = 4r_{2PSK}$

讨论

- r 一定，相同解调方式（如相干解调），抗高斯白噪声性能优劣的顺序： 2PSK、2DPSK、2FSK、2ASK

- Pe一定，所需的信噪比： $r_{2ASK} = 2r_{2FSK} = 4r_{2PSK}$

$$(r_{2ASK})_{dB} = 3_{dB} + (r_{2FSK})_{dB} = 6_{dB} + (r_{2PSK})_{dB}$$

- r 一定，相同调制方式： $P_{e相干} < P_{e非相干}$

- 大信噪比(r >>1)时， 两者性能相差不大。

2 对信道特性变化的敏感性

2ASK： $b^* = a/2$ 易受信道参数变化的影响。不适于在变参信道中传输。

2PSK： $b^* = 0$ （等概时）不易受信道参数变化的影响。

2FSK： 不需要人为地设置判决门限，因而对信道的变化不敏感。适用于变参信道传输场合。

3 设备的复杂度

通常，**非相干**方式 比 **相干**方式简单。

这是因为相干解调需要提取相干载波，

故设备相对复杂些，成本也略高。

综述

- 以上比较结果，为选择调制解调方式提供了一定的理论参考依据。

数字信息传输系统

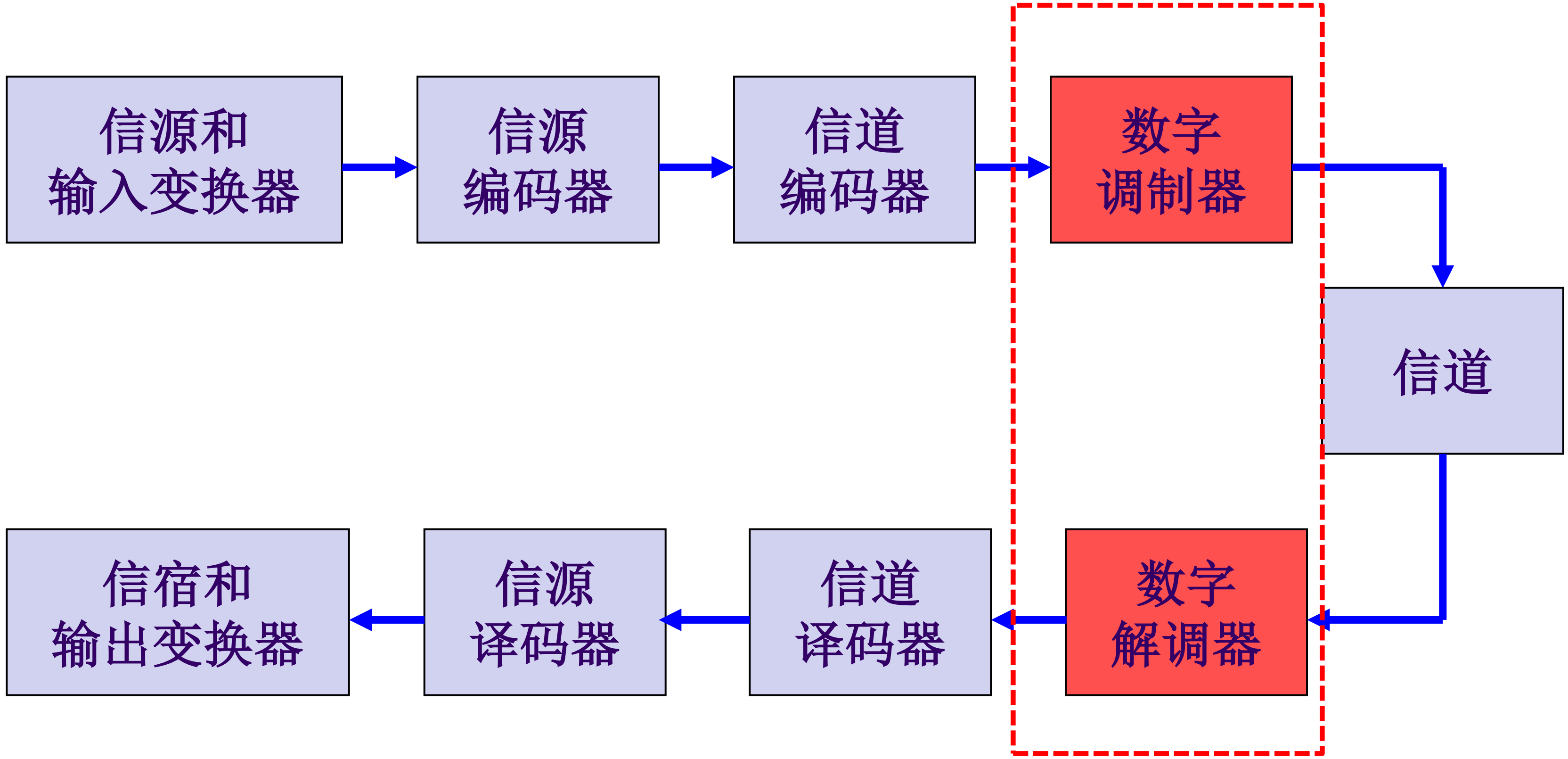
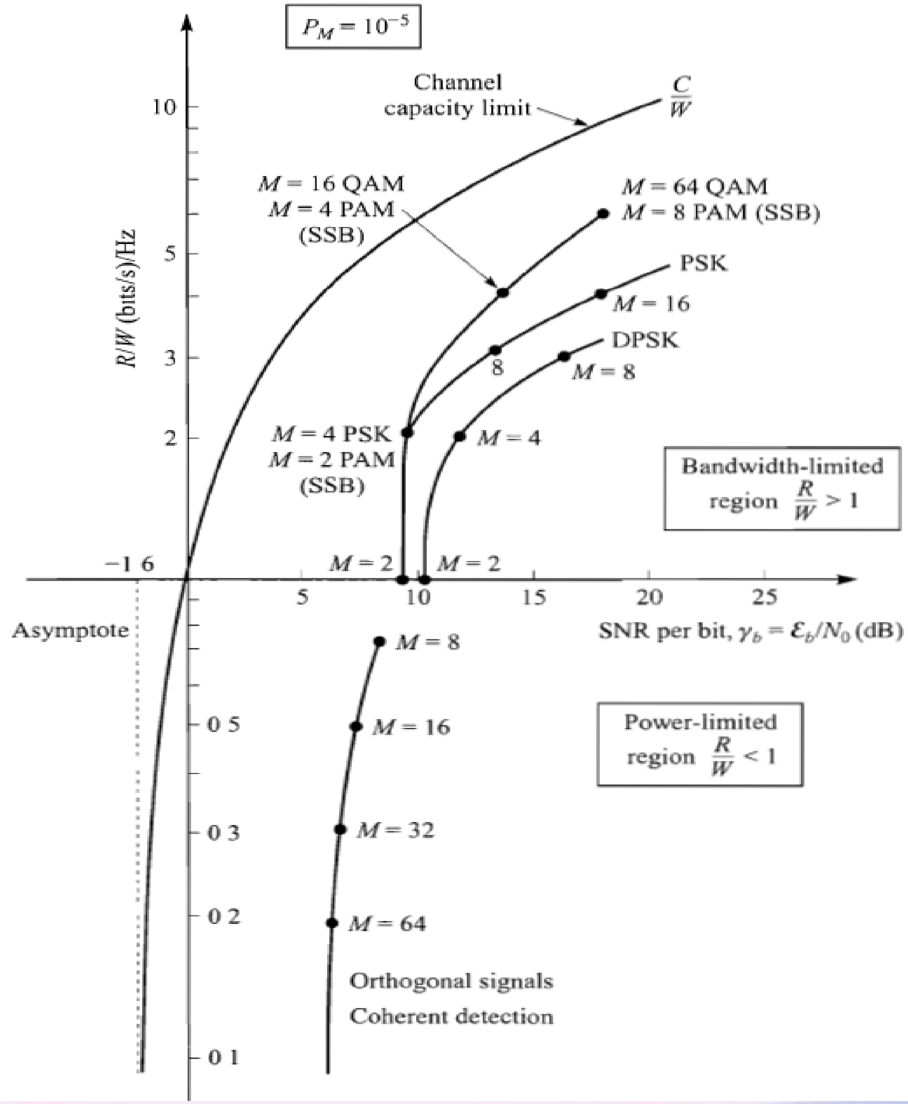


FIGURE 4.6–1

Comparison of several modulation schemes at $P_e = 10^{-5}$ symbol error probability.



回顾　连续信道容量

由**香农信息论**可证，白噪声背景下的连续信道容量为：

$$\boxed{C = B\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)\ \text{(b/s)}}$$ ——**香农公式**

等价式：

$$\boxed{C = B\log_2\left(1+\frac{S}{n_0 B}\right)\ \text{(b/s)}}$$

S − 信号平均功率（W）；B − 带宽（Hz）

n_0 −噪声单边功率谱密度；$N = n_0 B$ −噪声功率（W）

$$C = B\log_2\left(1+\frac{S}{n_0 B}\right)\ \text{(b/s)}$$

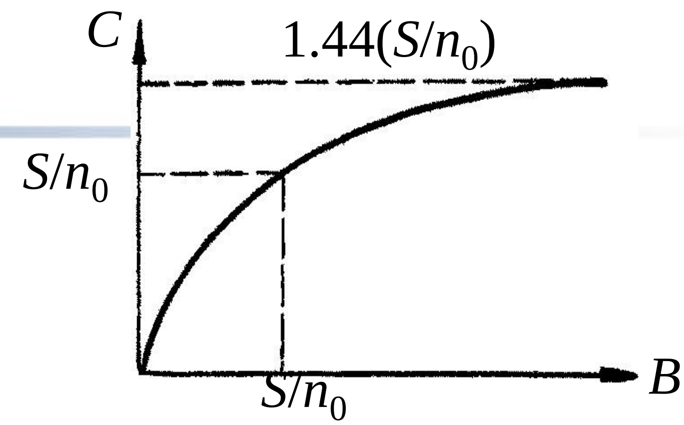
含义：

当信号和信道噪声的平均功率给定时，在具有一定频带宽度的信道上，理论上单位时间内可能传输的信息量的极限数值。

意义：

若 $R_b \leq C$，则总能找到一种信道编码方式，实现无差错传输；若传输速率大于信道容量，则不可能实现无差错传输。

$$C = B\log_2\left(1+\frac{S}{n_0 B}\right)$$



信道容量和带宽关系

结论：

- 信道容量 **C**依赖于 **B**、**S** 和 $\mathbf{n_0}$
- 增大 **S** 可增加 **C**，若$S\to\infty$，则$C\to\infty$;
- 减小 n_0 可增加 **C**，若$n_0\to 0$，则$C\to\infty$;
- 增大 **B** 可增加 **C**，但不能使 **C**无限制增大。

当 $B\to\infty$ 时，**C** 将趋向一个定值：

$$\lim_{B\to\infty} C = \lim_{B\to\infty} B\log_2(1+\frac{S}{n_0 B}) \approx \boxed{1.44\frac{S}{n_0}}$$

$$C = B\log_2\left(1+\frac{S}{n_0 B}\right) \ \text{(b/s)}$$

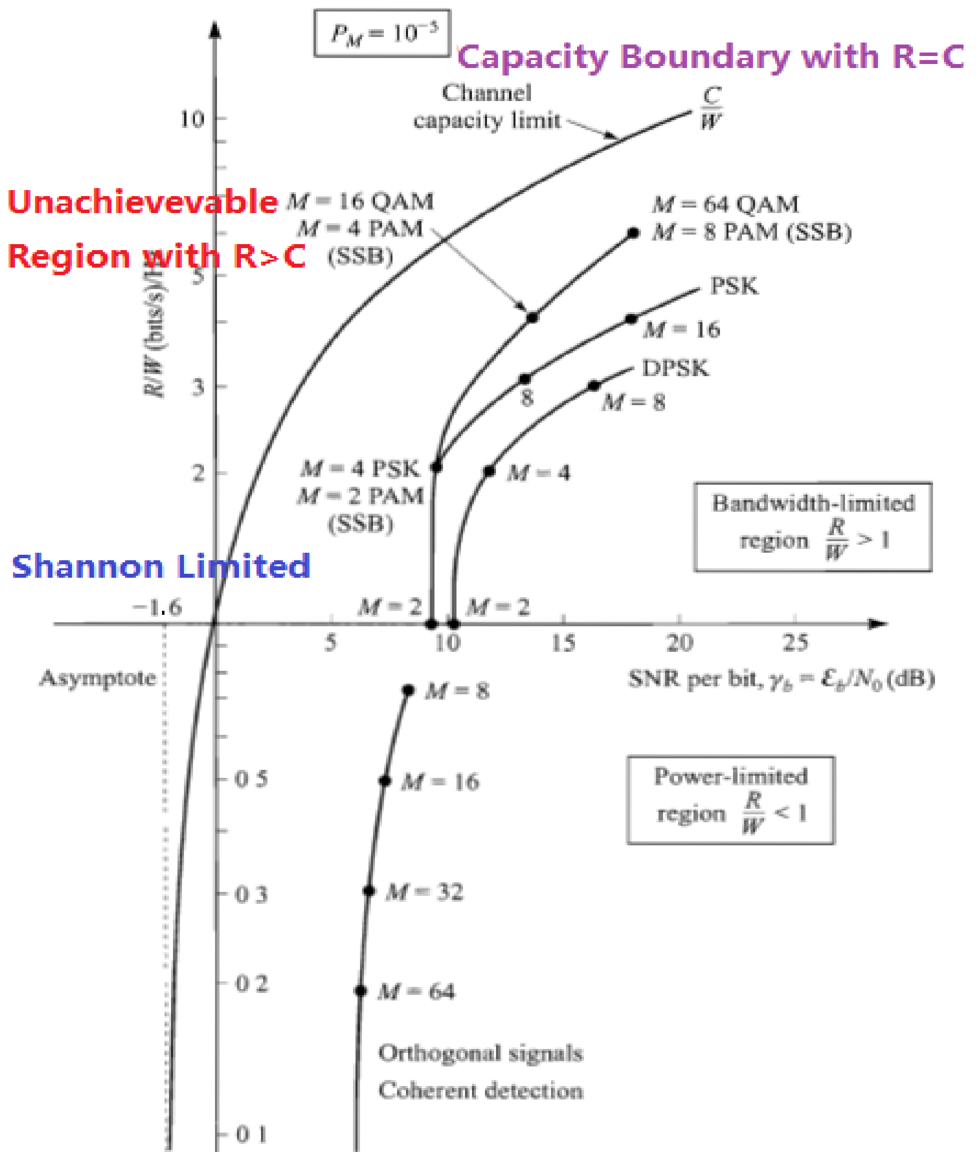
应用：

- C一定时，信道带宽B、信噪比S/N、传输时间t三者之间可以互相转换。
- 增加B，可以换取S/N的降低；反之亦然。
- 若S/N不变，增加B，可以换取 t 的减少。

【例如】

$$\boxed{C = 12\times 10^3 \text{ b/s}} \begin{cases} \text{互换前：若} B_1 = 3\,\text{KHz}, \ \text{则} \dfrac{S_1}{N_1} = 15 \\ \text{互换后：若} B_2 = 4\,\text{KHz}, \ \text{则} \dfrac{S_2}{N_2} = 7 \end{cases}$$

FIGURE 4.6–1
Comparison of several modulation schemes at $P_e = 10^{-5}$ symbol error probability.



$$C = B\log_2(1+\frac{S}{N}) = B\log_2(1+\frac{E_b R}{N_0 B})$$

$$R \le C$$

$$\gamma_b = \frac{E_b}{N_0} \ge \frac{1}{\frac{C}{B}}\left(2^{\frac{C}{B}} - 1\right) = \frac{2^r - 1}{r}$$

$$\to \ln 2 = -1.6\text{dB}$$

谢谢！