

# 电磁场的基本规律[2]

## 电磁场与电磁波不挂科第三讲讲义

### 3.1.时变电磁场

#### 3.1.1.法拉第电磁感应定律

##### 楞次定律

楞次定律指感应电流产生的磁场总要阻碍引起感应电流的磁通量的变化。

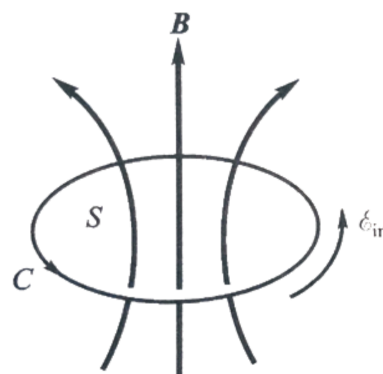
##### 法拉第电磁感应定律

时变磁场产生时变电场，其电动势为

$$\varepsilon_{in} = -\frac{d\psi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}。$$

导体内有感应电场且满足  $\varepsilon_{in} = \oint_C \vec{E}_{in} \cdot d\vec{l}$ ，即

$$\oint_C \vec{E}_{in} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}。$$



空间总电场为  $\vec{E} = \vec{E}_{in} + \vec{E}_c$ ，其中  $\vec{E}_c$ （库伦电场）无旋： $\oint_C \vec{E}_c \cdot d\vec{l} = 0$ 。

得到推广的法拉第电磁感应定律  $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{E}_{in} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}。$

### ■ 三种不同的磁通变化的原因

回路静止，磁场变化引起磁通量变化；

导体棒在恒定磁场中切割磁感线运动；

导体棒在时变磁场中切割磁感线运动。

### ■ 三种不同的磁通变化的原因(回路静止，磁场变化引起磁通量变化)

$$\text{法拉第电磁感应定律 } \varepsilon_{in} = \oint_C \vec{E}_{in} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S};$$

当回路静止时，磁场变化引起磁通量变化，此时可将微分运算只限定于  $\vec{B}$ ，

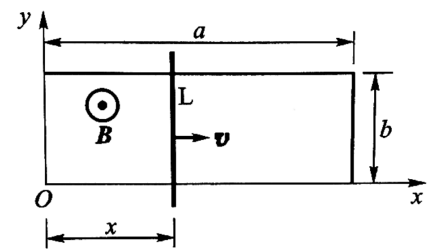
$$\text{原式可变为 } \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}, \text{ 微分形式为 } \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

### ■ 三种不同的磁通变化的原因(导体棒在恒定磁场中切割磁感线运动)

$$\text{法拉第电磁感应定律 } \varepsilon_{in} = \oint_C \vec{E}_{in} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S};$$

当导体棒切割磁感线时  $\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B}$ ,  $\vec{E}_{in} = \vec{v} \times \vec{B}$ , 则因

$$\text{回路运动引起的感应电动势为 } \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}.$$



### ■ 三种不同的磁通变化的原因(导体棒在时变磁场中切割磁感线运动)

$$\text{法拉第电磁感应定律 } \varepsilon_{in} = \oint_C \vec{E}_{in} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S};$$

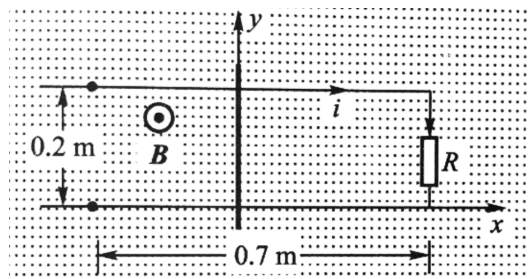
导体在时变磁场中做切割磁感线运动时，其结果为前两种情况的合成，

$$\text{即 } \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \oint_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l},$$

$$\text{微分形式为 } \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}).$$

## ■ 例题3-1

一导体滑片在两根平行的轨道上滑动，整个装置位于正弦时变磁场  $\vec{B} = \vec{e}_z 5 \cos \omega t \text{ mT}$  中，滑片位置由  $x = 0.35(1 - \cos \omega t) \text{ m}$  确定。轨道终端电阻  $R = 0.2 \Omega$ ，求感应电流。



## 3.1.2. 位移电流

## ■ 位移电流—时变电场产生时变磁场

恒定磁场中的安培环路定理  $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$  在时变电磁场中不再适用，因为此式本身包含隐藏条件。对恒定磁场中的安培环路定理公式的两边取散度，得  $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \vec{J}$ ；由“矢量的旋度的散度为零”，得  $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ ，而根据电流连续方程  $\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ ，可以看出：

$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$  的适用范围为  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ，即为恒定电流产生的恒定磁场中。所以在时变电磁场中应用安培环路定理要对其进行修正。

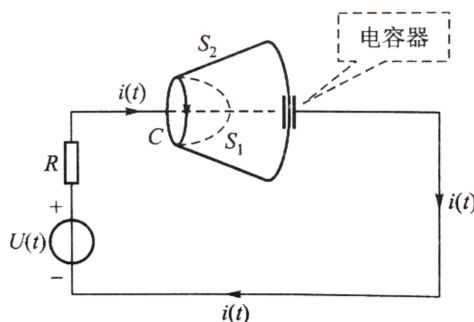
如图电路，时变电流产生时变磁场；

选定以闭合路径  $C$  为周界的开放曲面  $S_1$ ，则由安培环

路定理得到  $\oint_C \vec{H}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = i(t)$ ；

选定另一个以闭合路径  $C$  为周界的开放曲面  $S_2$ ，穿

过  $S_2$  的传导电流为零，则得到  $\oint_C \vec{H}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = 0$ ；



两者矛盾，即静磁场中的安培环路定理对时变场不再适用，故电容两个极板之间存在另一种形式的电流，即位移电流，应用位移电流的概念对时变场中的安培环路定理进行修正。

修正后的安培环路定理： $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ 。

设静电场中的高斯定律  $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$  在时变场中仍然成立，代入电流连续方程

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{D}) = -\nabla \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \text{ 即 } \nabla \cdot (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) = 0, \text{ 令 } \vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

将其称为位移电流密度。

### ■ 例题3-2

求下列情况下位移电流密度的大小。

- (1) 某移动天线发射的电磁波的磁场强度：

$$\vec{H} = \vec{e}_x 0.15 \cos(9.36 \times 10^8 t - 3.12y) \text{ A/m}$$

- (2) 一大功率变压器在空气中产生的磁感应强度：

$$\vec{B} = \vec{e}_y 0.8 \cos(3.77 \times 10^2 t - 1.26 \times 10^{-6} x) \text{ T}$$

- (3) 一大功率电容器在填充的油中产生的电场强度：

$$\vec{E} = \vec{e}_x 0.9 \cos(3.77 \times 10^2 t - 2.81 \times 10^{-6} z) \text{ MV/m}$$

设油的相对介电常数  $\epsilon_r = 5$ 。

- (2) 如果  $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{A} \times \vec{C}$ ，能否说明  $\vec{B} = \vec{C}$ ？

## 3.2. 麦克斯韦方程组

### 3.2.1. 三种形式的方程组

#### ■ 麦克斯韦方程组的积分形式

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

磁场强度沿任何闭合曲线的环量=穿过以该闭合曲线为周线的任意曲面的传导电流与位移电流的和

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

电场强度沿任何闭合曲线的环量=穿过以该闭合曲线为周线的任意曲面的磁通变化率的负值

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

穿过任意闭合曲面的磁感应强度的通量恒为0。

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV$$

穿过任意闭合曲面的电位移的通量等于该闭合面所包围的自由电荷的代数和。

#### ■ 麦克斯韦方程组的微分形式

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

时变磁场由传导电流和位移电流产生，时变电场产生时变磁场。

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

时变磁场产生时变电场。

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

磁通永远是连续的，磁场是无散场，磁力线是闭合线。

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

电荷产生电场。

#### ■ 麦克斯韦方程组与媒质本构关系

考虑线性和各向同性物质，描述其媒质特性： $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ ， $\vec{B} = \mu \vec{H}$ ， $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ ；

将上述三个本构关系代入微分形式的麦克斯韦方程组，得到只适用于线性和各向同性物质的限定形式的麦克斯韦方程组：

$$\nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

### 3.2.2. 方程组的独立性

---

#### ■ 从麦克斯韦方程组推导电流连续方程

麦克斯韦方程组也满足电流连续方程，为对称性将此方程省去不写，但可由麦克斯韦方程组将其推导出来：

对麦克斯韦第一方程  $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  两边同时取散度，得到：

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right);$$

$$\text{又 } \nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = 0, \text{ 即 } \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial (\nabla \cdot \vec{D})}{\partial t} = 0;$$

再由  $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ ，代入上式，得到： $\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ，即为电流连续方程。

#### ■ 麦克斯韦方程组的独立性

麦克斯韦方程组中的四个方程和电流连续方程中只有三个方程是互相独立的。

这就构成了方程间的“制约关系”。

对于不同的问题求解，选择的方程不同。如对于静电场问题，因不涉及磁场，故只选用第二式和第四式；对于时变电磁场等问题，常常只选用第一式和第二式，因为其中体现了时间 $t$ 的影响。

### ■ 例题3-3

在无源 ( $\vec{J} = 0, \rho = 0$ ) 的电介质 ( $\sigma = 0$ ) 中，若已知矢量

$\vec{E} = \vec{e}_x E_m \cos(\omega t - kz) \text{ V/m}$ ，式中的 $E_m$ 为振幅、 $\omega$ 为角频率、 $k$ 为相位常数。在各常数满足什么条件时， $\vec{E}$ 可能是电磁场的电场强度矢量？求出此时各常数的关系，以及与 $\vec{E}$ 相应的其他场矢量。

### ■ 例题3-4

由置于 $\rho = 3\text{mm}$ 和 $\rho = 10\text{mm}$ 的导体圆柱面积和 $z = 0$ 、 $z = 20\text{cm}$ 的导体平面围成的圆柱形空间充满 $\epsilon = 4 \times 10^{-11} \text{ F/m}$ 、 $\mu = 2.5 \times 10^{-6} \text{ H/m}$ 、 $\sigma = 0$ 的媒质，设媒质中磁场强度为 $\vec{H} = \vec{e}_\phi \frac{2}{\rho} \cos 10\pi z \cos \omega t \text{ A/m}$ ，求 $\omega$ 和 $\vec{E}$ 。

## 3.3. 边界条件

---

### 边界条件

---

电磁场问题中总会涉及到由不同的本征参数的媒质构成的相邻区域，求解含不同媒质的区域中的电磁问题，需要知道四类电磁场矢量在不同媒质分界面上的边界条件。

只有使麦克斯韦方程组的通解适合于某个包含给定区域和相关的边界条件的实际问题，这个解才是有实际意义的，也才能保证唯一性。

电磁场的边界条件由麦克斯韦方程组导出。由于在分界面上媒质的本征参数 $\epsilon$ 、 $\sigma$ 、 $\mu$ 会发生突变，某些场量也会发生突变，所以麦克斯韦方程组的微分形式失去意义，需要通过其积分形式导出边界条件。

电磁场矢量的边界条件与麦克斯韦方程组一一对应。

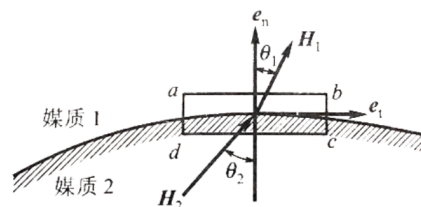
### 3.3.1.一般形式的边界条件

#### ■ 磁场强度的边界条件

已知两种介质，磁场强度视角下的边界条件可以写为：

$$\vec{e}_n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s, \quad H_{1t} - H_{2t} = J_s.$$

这个式子表明，磁场强度 $\vec{H}$ 的切向分量是不连续的。

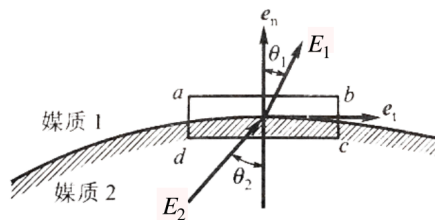


#### ■ 电场强度的边界条件

已知两种介质，电场强度视角下的边界条件可以写为：

$$\vec{e}_n \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0, \quad E_{1t} - E_{2t} = 0.$$

这个式子表明，电场强度 $\vec{E}$ 的切向分量是不连续的。

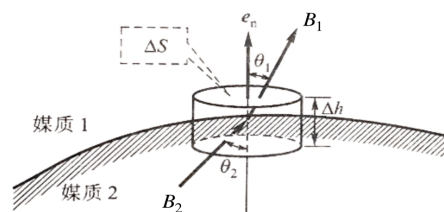


#### ■ 磁感应强度的边界条件

已知两种介质，磁感应强度视角下的边界条件可以写

$$\text{为: } \vec{e}_n \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0, \quad B_{1n} - B_{2n} = 0.$$

这个式子表明，磁感应强度 $\vec{B}$ 的法向分量是连续的。

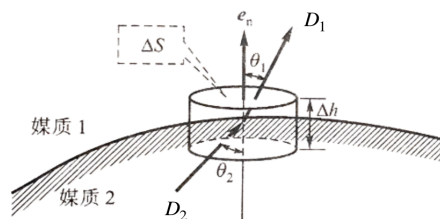


#### ■ 电位移矢量的边界条件

已知两种介质，电位移矢量视角下的边界条件可以写

$$\text{为: } \vec{e}_n \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s, \quad D_{1n} - D_{2n} = \rho_s.$$

这个式子表明，电位移矢量 $\vec{D}$ 的法向分量是不连续的。





### 3.3.2.理想介质的边界条件

#### ■ 理想介质的边界条件

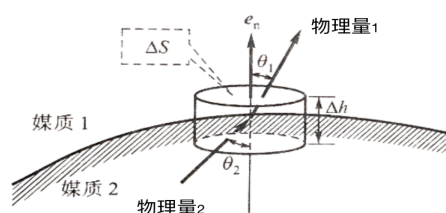
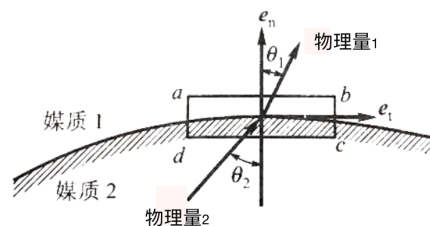
若两种媒质是两种不同的理想介质, 则电流由体电流定义, 即分界面上不存在面电流 $\vec{J}_s$ 和面电荷 $\rho_s$ 分布, 所以边界条件可以写为:

$$\vec{e}_n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = 0$$

$$\vec{e}_n \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$$

$$\vec{e}_n \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$$

$$\vec{e}_n \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = 0$$



### 3.3.2.理想导体的边界条件

#### ■ 理想介质的边界条件

若媒质2为理想导体, 其所带电荷只存在于导体表面, 内部不存在电场, 即 $\vec{E}_2 = 0$ , 根据麦克斯韦方程组,  $\vec{D}_2 = 0$ ,  $\vec{B}_2 = 0$ ,  $\vec{H}_2 = 0$ 。

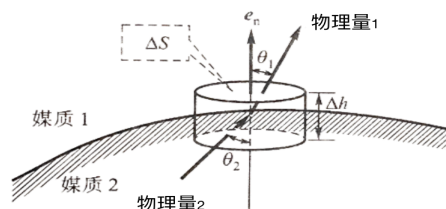
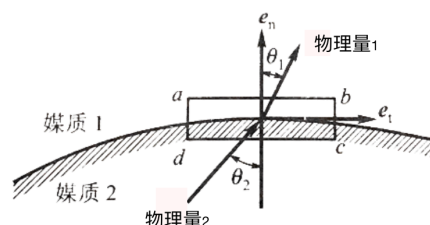
所以边界条件可以写为:

$$\vec{e}_n \times \vec{H}_1 = \vec{J}_s$$

$$\vec{e}_n \times \vec{E}_1 = 0$$

$$\vec{e}_n \cdot \vec{B}_1 = 0$$

$$\vec{e}_n \cdot \vec{D}_1 = \rho_s$$



## ■ 例题3-5

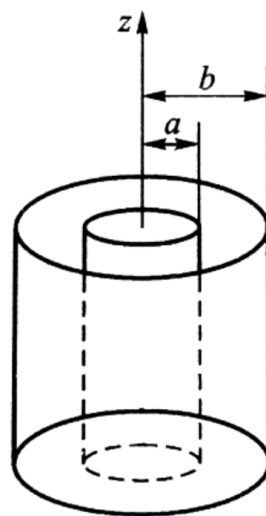
如图所示，1区的介质参数为 $\epsilon_1 = 5\epsilon_0$ ， $\mu_1 = \mu_0$ ， $\sigma_1 = 0$ ；2区的媒质参数为 $\epsilon_2 = \epsilon_0$ ， $\mu_2 = \mu_0$ ， $\sigma_2 = 0$ 。若已知自由空间的电场强度为 $E_2 = [\vec{e}_x 2y + \vec{e}_y 5x + \vec{e}_z (3+z)] \text{ V/m}$ ，求2区中的 $\vec{E}_1$ 和 $\vec{D}_1$ ？

## ■ 例题3-6

同轴线的内导体半径 $a = 1\text{mm}$ ，外导体的内半径 $b = 4\text{mm}$ ，内外导体间为空气，如图所示。假设内、外导体间的电场强度

$$\vec{E} = \vec{e}_\rho \frac{100}{\rho} \cos(10^8 t - kz) \text{ V/m}。$$

- (1) 求与 $\vec{E}$ 相伴的 $\vec{H}$ ；
- (2) 确定 $k$ 的值；
- (3) 求内导体表面的电流密度；
- (4) 求沿轴线 $0 \leq z \leq 1 \text{ m}$ 区域内的位移电流。



微信扫描二维码获取更多课程



斐多课堂   
Phaedo Classes