2018-2019 学年第一学期期末考试 A 卷参考答案

一、填空题(每小格 3 分，共 33 分)

1、【正解】$\frac{b}{a}$;$\frac{3b(a-b)(a-b-1)}{a(a-1)(a-2)}$

【解析】任意一名抽签者抽中停车位的概率都是$\frac{b}{a}$；前三个人恰好有一人抽中停车位的概率

$$\frac{b}{a}\cdot\frac{a-b}{a-1}\cdot\frac{a-b-1}{a-2}+\frac{a-b}{a}\cdot\frac{b}{a-1}\cdot\frac{a-b-1}{a-2}+\frac{a-b}{a}\cdot\frac{a-b-1}{a-1}\cdot\frac{b}{a-2}=$$
$$\frac{3b(a-b)(a-b-1)}{a(a-1)(a-2)}$$

【考点延伸】《考试宝典》第一章：概率运算.

2、【正解】$5e^{-2}$;$\frac{1}{1+e^{2}}$;0.8413

【解析】因为 X 服从参数为 2的泊松分布，所以 $E(X)=2$

$$P(X\leqslant E(X))=\sum_{k=0}^{2}\frac{2^{k}e^{-2}}{k!}=5e^{-2}$$

$P(X_1+X_2\geqslant 1)=1-P(X_1=0,X_2=0)=1-e^{-4}$,

$P(X_1=0,X_1+X_2\geqslant 1)=(1-e^{-2})e^{-2}$,

所以$P(X_1=0|X_1+X_2\geqslant 1)=\frac{P(X_1=0,X_1+X_2\geqslant 1)}{P(X_1+X_2\geqslant 1)}=\frac{1}{1+e^{2}}$

$$P\left(\sum_{i=1}^{200}X_i>380\right)=P\left(\frac{\sum_{i=1}^{200}X_i-200\times 2}{\sqrt{200}\times\sqrt{2}}>\frac{380-200\times 2}{\sqrt{200}\times\sqrt{2}}\right)\approx 1-\Phi(-1)=0.8413$$

【考点延伸】《考试宝典》第二章知识清单 2.4：常见的一维随机变量及分布.

3、【正解】$\frac{\pi}{4}$

【解析】用四分之一圆盘 $x^2+y^2\leqslant 1(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$ 的面积除以区 $\{(x,y):0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$的面积即得答案

【考点延伸】《考试宝典》第一章知识清单 1.7：三种常见的概型（几何概型）.

4、【正解】14.4; $-\frac{1}{4}$

【解析】$Cov(X,Y)=\rho\sqrt{Var(X)Var(y)}=-1.6$,

$Var(X-2Y-1)=Var(X)+Var(2Y)-4Cov(X,Y)=14.4$

若独立，则协方差为0。

$Cov(X+Y,aX-Y)=Cov(X,aX-Y)+Cov(Y,aX-Y)$

$=aDX-Cov(X,Y)+aCov(Y,X)-DY=4a+1.6-1.6a-1=0$

$a=-\frac{1}{4}$

【考点延伸】《考试宝典》第四章重要题型 1：随机变量的数字特征

扫描全能王 创建

5、【正解】$\dfrac{4-5\theta}{3}$;$\dfrac{4-3\overline{X}}{5}$;$\dfrac{25}{9}\theta^2$

【解析】$E(X)=-\dfrac{\theta}{3}+0+\dfrac{2(1-\theta)}{3}+\dfrac{2(1-\theta)}{3}=\dfrac{4-5\theta}{3}$，令 $\overline{X}=E(X)$ 得矩估计量

$\hat{\theta}=\dfrac{4-3\overline{X}}{5}$，当 $n\to\infty$ 时，$\overline{X}\to E(X)$，$\left(\overline{X}-\dfrac{4}{3}\right)^2\to\dfrac{25}{9}\theta^2$

【考点延伸】《考试宝典》第四章重要题型 1：随机变量的数字特征

二、(15 分)

【解析】(1) X 服从二项分布，所以 $F(x)=\begin{cases}0, x<0\\ \dfrac{1}{4}, 0\leq x<1\\ \dfrac{3}{4}, 1\leq x<2\\ 1, x\geq 2\end{cases}$

(2) Y 的分布函数 $F(y)=\begin{cases}0, y<0\\ \dfrac{y}{2}, 0\leq y<2\\ 1, y\geq 2\end{cases}$

(3) M 的分布函数为 $F(m)=\begin{cases}0, m<0\\ \dfrac{m}{8}, 0\leq m<1\\ \dfrac{3m}{8}, 1\leq m<2\\ 1, m\geq 2\end{cases}$

(4) Z 的分布函数为 $F(z)=\begin{cases}0, z<0\\ \dfrac{z}{8}, 0\leq z<1\\ \dfrac{3z}{8}-\dfrac{1}{4}, 1\leq z<3\\ \dfrac{z+4}{8}, 3\leq z<4\\ 1, z\geq 4\end{cases}$

【考点延伸】《考试宝典》第二章重要题型 4：随机变量的函数的分布

三、(15 分)

【解析】(1) $P(X+Y\leq 1)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{1-x}f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}\int_{-x}^{x}\dfrac{3}{2}xdxdy+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{-x}^{1-x}\dfrac{3}{2}xdxdy$

$=\dfrac{11}{16}$

扫描全能王 创建

（2）$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\frac{3}{4}-\frac{3}{4}y^2,-1<y<1\\0, \quad 其他\end{cases}$，所以

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{2x}{1-y^2}, & |y|<x<1\\0, & 其他\end{cases}$$

$$f_{X|Y=0}(x|y=0)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\0, & 其他\end{cases}$$

$$P(X>0.5|Y=0)=\int_{0.5}^{1}2xdx=1-0.5^2=0.75$$

（3）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}3x^2,0<x<1\\0, \quad 其他\end{cases}$

所以$Cov(X,Y)=E(XY)-EXEY=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy-\int_{+\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy$
$=0$，所以X与Y不相关

【考点延伸】《考试宝典》第二章重要题型4：连续型随机变量函数的概率分布

四、（10分）

【解析】（1）$t=\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}\sim t(n-1),(n=16)$，计算得$t=-2.6$，故 P_=0.01,当$\alpha=0.05$时拒绝原设

（2）$\frac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu-\mu_Y)}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\sqrt{\frac{(n-1)s^2+(m-1)s_y^2}{n+m-2}}}\sim t(n+m-2)$

所以$\mu-\mu_Y$置信度的双侧置信区间为

$$\left((\bar{x}-\bar{y})-t_{0.025}(25)\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\sqrt{\frac{(n-1)s^2+(m-1)s_y^2}{n+m-2}},(\bar{x}-\bar{y})+t_{0.025}(25)\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\sqrt{\frac{(n-1)s^2+(m-1)s_y^2}{n+m-2}}\right)$$

即(-1.79,0.29)

【考点延伸】《考试宝典》第九章重要题型2：t检验；第八章知识清单8.2：置信区间.

五、（12分）

【解析】（1）$E(T_k)=E\left(k\bar{X}+(1-k)S^2\right)=kE\left(\bar{X}\right)+(1-k)ES^2=k\theta+(1-k)\theta=\theta$，所以$T_k$是$\theta$的无偏估计量

（2）$Var(T_k)=k^2Var\left(\bar{X}\right)+(1-k)^2Var(S^2)=k^2\theta/n+(1-k)^2\frac{2\theta^2}{n-1}$，所以

$Var(T_0)=\frac{2\theta^2}{n-1},Var(T_1)=\frac{\theta}{n}$，因为$n>2$且$0<\theta<\frac{1}{4}$，所以$Var(T_0)<Var(T_1)$，因此$T_0$更有效

【考点延伸】《考试宝典》第四章重要题型1：随机变量的数字特征.

六、（15分）

【解析】（1）取$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}2x_i/\theta^2$，取对数得$\ln L(\theta)=n\ln 2-2n\ln\theta+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

扫描全能王 创建

求导得 $\dfrac{-2n}{\theta}$，所以 $L(\theta)$ 单调递减，$\hat{\theta}=\max\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$

（2）$\chi^2=\sum\limits_{i=1}^{6}\dfrac{\left(f_i-n\hat{p}_i\right)^2}{n\hat{p}_i}\sim\chi_{\alpha}^2(4)$，计算得 $\chi^2=6.242<9.49$，所以接受原假设

【考点延伸】《考试宝典》第七章知识清单 7.1：点估计（极大似然估计）

扫描全能王 创建