§5.4 离散时间系统z域分析

5.4.1 差分方程的变换解

$$y''(t)+a_1y'(t)+a_0y(t)=b_2f''(t)+b_1f'(t)+b_0f(t)$$

$$[s^2Y(s)-sy(0^-)-y'(0^-)]+a_1[sY(s)-y(0^-)]+a_0Y(s)$$
$$=b_2s^2F(s)+b_1sF(s)+b_0F(s)$$

与连续系统比较记忆

❖ 1. 求解方法

一般形式 $$\sum_{k=0}^{N}a_k y(n-k)=\sum_{r=0}^{M}b_r x(n-r)$$

x(n)在n=0时接入系统，即x(n)=0, 当n<0时。取单边 z 变换

$$\sum_{k=0}^{N}a_k z^{-k}[Y(z)+\sum_{l=-k}^{-1}y(l)z^{-l}]=\sum_{r=0}^{M}b_r z^{-r}X(z)$$

$$x(n-1)u(n)\leftrightarrow z^{-1}X(z)+x(-1)$$

$$x(n-2)u(n)\leftrightarrow z^{-2}X(z)+z^{-1}x(-1)+x(-2)$$

一定记准确

零输入 $x(n)=0$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}[Y(z)+\sum_{l=-k}^{-1} y(l)z^{-l}]=0$$

$$Y(z)=\frac{-\sum_{k=0}^{N}[a_k z^{-k}\cdot\sum_{l=-k}^{-1} y(l)z^{-l}]}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

零输入响应

$$y_{zi}(n)=Z^{-1}[Y(z)],\quad y(l)(-N\le l\le -1)$$

由起始状态$y(l)$产生

零状态$y(l)$=0， -N≤ l ≤-1

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r} X(z)$$

$$Y(z) = X(z) \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = X(z)H(z)$$

零状态响应

$$y_{zs}(n) = Z^{-1}[X(z)H(z)]$$

完全响应

$$y(n) = y_{zi}(n) + y_{zs}(n)$$

补充例：求差分方程 $y(n)-by(n-1)=x(n)$ 的响应？

- 设 $x(n)=a^n u(n)$, (1) $y(-1)=0$;
- 解 (1) 作单边z变换:
- $Y(z)-bz^{-1}Y(z)-by(-1)=X(z)$,
- $\because y(-1)=0$,
- $\therefore Y(z)=X(z)/(1-bz^{-1})=z^2/[(z-a)(z-b)]$
- 其极点在$z=a$, $z=b$,将$Y(z)/z$展成部分分式，再两边乘以z得

$$Y(z)=\frac{1}{a-b}\left(\frac{az}{z-a}-\frac{bz}{z-b}\right)$$

$$y(n)=\frac{1}{a-b}\left(a^{n+1}-b^{n+1}\right)u(n)$$

即：全响应只有零状态响应

- (2) $\because Y(z)-bz^{-1}Y(z)-by(-1)=X(z)$
- $Y(z)-bz^{-1}Y(z)-2b=X(z)$
- $\therefore$ $$Y(z)=\frac{X(z)+2b}{1-bz^{-1}}=\frac{X(z)}{1-bz^{-1}}+\frac{2b}{1-bz^{-1}}$$

完全响应

$$y(n)=\underbrace{[\frac{1}{a-b}\left(a^{n+1}-b^{n+1}\right)]u(n)}_{\text{零状态响应}}+\underbrace{[2b^{n+1}]u(n)}_{\text{零输入响应}}$$

例5-15 同 p90例2-26

一线性时不变离散系统为 $7\left(z^2X(z)-z^2x(0)-zx(1)\right)-2\left(zX(z)-zx(0)\right)$

$$y(n+2)-0.7y(n+1)+0.1y(n)=7x(n+2)-2x(n+1)$$

已知 $x(n)=u(n)$, $y(0)=9$, $y(1)=13.9$，求系统的全响应 $y(n)$。

解：对差分方程两边进行单边 z 变换，有

$$[z^2Y(z)-z^2y(0)-zy(1)]-0.7[zY(z)-zy(0)]+0.1Y(z)=\cancel{(7z^2-2z)X(z)}$$

整理得： $Y(z)(z^2-0.7z+0.1)-9z^2-7.6z=\cancel{X(z)(7z-2)z}$

$7\left(z^2X(z)-z^2-z\right)-2\left(zX(z)-z\right)$

$X(z)=\dfrac{z}{z-1}$ 代入上式，整理后有

$$Y(z)=\frac{9z^3-1.4z^2-2.6z}{(z-1)(z-0.5)(z-0.2)}=\frac{12.5z}{z-1}+\frac{7z}{z-0.5}+\frac{-10.5z}{z-0.2}$$

对 $Y(z)$ 求 z 反变换得

$$y(n)=[12.5+7(0.5)^n-10.5(0.2)^n]u(n)$$

总结：单边z变换---求Y(z)---求反变换

5.4.2 系统函数与冲激响应h(*n*)

由于 $y_{zs}(n)=x(n)*h(n)$

两边取z变换得

$$Y_{zs}(z)=H(z)X(z)$$

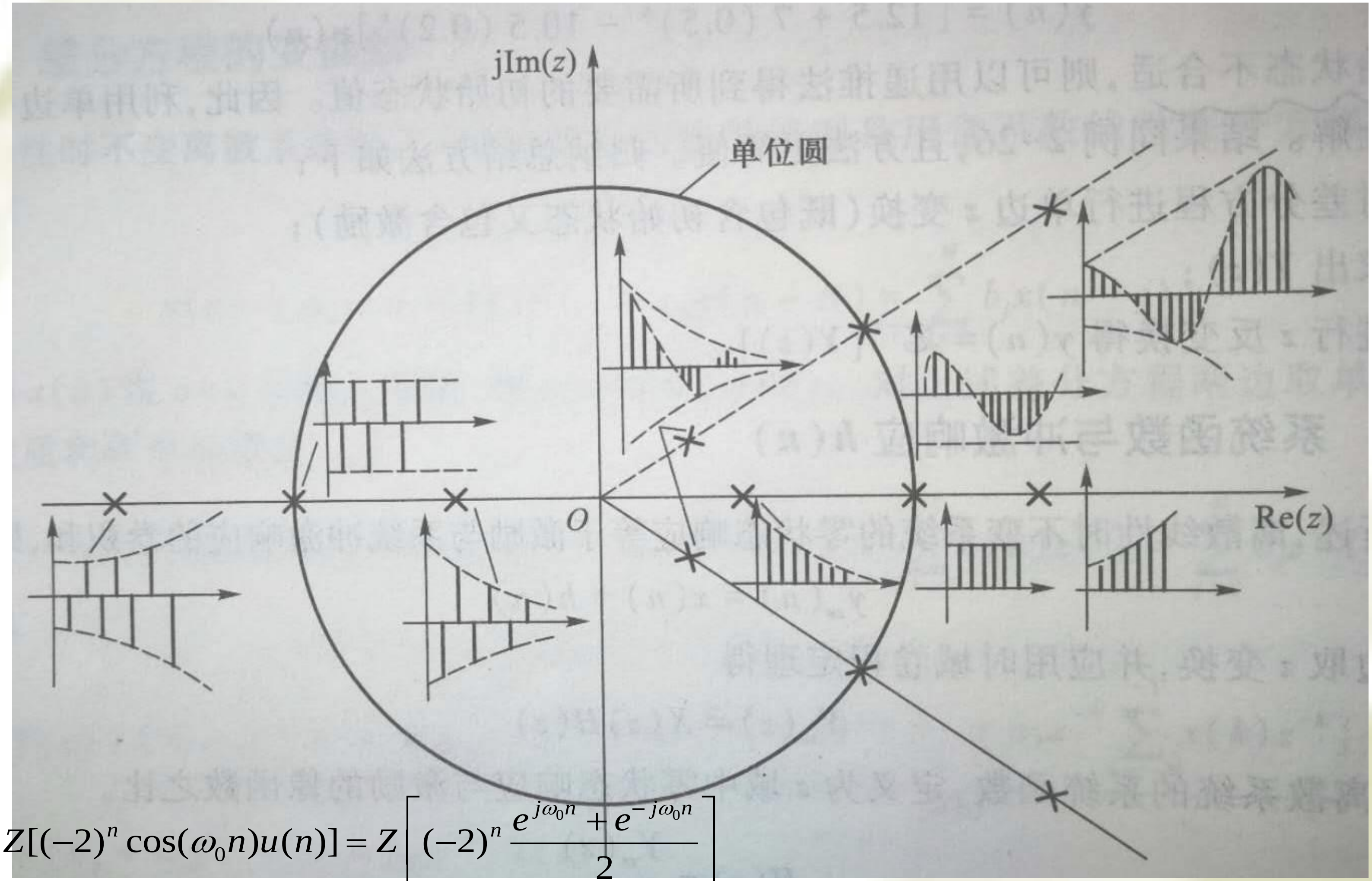
$$H(z)=\frac{Y_{zs}(z)}{X(z)}$$

$$H(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_Mz^{-M}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_Nz^{-N}}$$

$$=H_0\frac{\prod_{j=1}^{M}(z-z_j)}{\prod_{i=1}^{N}(p-p_i)}$$

极点、零点、自然频率的定义同H(s)

系统函数H(z)的单极点位置与冲激响应h(n)的关系



$$Z[(-2)^n \cos(\omega_0 n)u(n)] = Z\left[(-2)^n \frac{e^{j\omega_0 n}+e^{-j\omega_0 n}}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}Z\left[(-2e^{j\omega_0})^n+(-2e^{-j\omega_0})^n\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{z}{z+2e^{j\omega_0}}+\frac{z}{z+2e^{-j\omega_0}}\right]$$

P274 说明。注意与连续域进行比较

(1) 位于正实轴模量为 1 的单阶极点所对应的 $h(n)$ 是阶跃序列；

(2) 位于单位圆上的单阶共轭极点所对应的 $h(n)$ 是等幅正弦序列；

(3) 位于 z 平面上单位圆内正实轴上的极点所对应的 $h(n)$ 为衰减指数序列；位于 z 平面单位圆内的共轭极点所对应的 $h(n)$ 是振幅随时间的增长而衰减的正弦振荡序列；

(4) 位于 z 平面上单位圆外正实轴上的极点所对应的 $h(n)$ 为增长指数序列；位于 z 平面单位圆外的共轭极点所对应的 $h(n)$ 是振幅随时间的增长而增长的正弦振荡序列。

如果极点落在左半 z 平面，变化规律相仿于以上(1)~(4)，只是离散时间信号的取值变成正负相间的形式。

思考：下列说法不正确的是（　D　）。

A、H(z)在单位圆内的极点所对应的响应序列为衰减的。即当$k\to\infty$时，响应均趋于0。

B、H(z)在单位圆上的一阶极点所对应的响应函数为稳态响应。

C、H(z)在单位圆上的高阶极点或单位圆外的极点，其所对应的响应序列都是递增的。即当$k\to\infty$时，响应均趋于∞。

D、H(z)的零点在单位圆内所对应的响应序列为衰减的。即当$k\to\infty$时，响应均趋于0。

p10~12讨论学习：
如何用系统函数及其收敛域判断系统的因果性和稳定性？

5.4.3 线性时不变系统的性质

1. 因果性： 响应不超前于激励发生的系统。

时域角度看：

$$h(n)=0 \qquad n<0 \quad \text{或} \quad h(n)=h(n)u(n)$$

系统函数角度看：H(z)的分子的阶数不大于分母的阶数，且在z平面无穷远处收敛。

$\delta(n+1) \leftrightarrow z$

即收敛域形式为 $|z|>\beta$

例 5-16 求系统函数 $H(z)=\dfrac{z^2+0.4z+0.9}{z-0.6}$ ($|z|>0.6$) 的 z 反变换，并分析系统的因果性。

解：由长除法处理有

$$H(z)=\frac{z^2+0.4z+0.9}{z-0.6}\xlongequal{\text{长除法}}z+\boxed{\frac{z+0.9}{z-0.6}}=z+H_0(z)$$

将真分式 $H_0(z)$ 部分分式展开为

$$\frac{H_0(z)}{z}=\frac{z+0.9}{z(z-0.6)}=\frac{1.5}{z}+\frac{2.5}{z-0.6}\quad(|z|>0.6)$$

根据典型 z 变换对有 $h_0(n)=1.5\delta(n)+2.5(0.6)^n u(n)$

所以所求 z 反变换为

$$h(n)=\delta(n+1)+h_0(n)=\delta(n+1)+1.5\delta(n)+2.5(0.6)^n u(n)$$

因响应超前于激励发生，所以这是一个非因果系统。

2. 稳定性：对于有界的输入，其零状态响应也是有界。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

已知：$H(z) = \mathbf{Z}[h(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n}$

满足 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)||z^{-n}| < \infty$ 的所有z的集合是H(z)的收敛域。

当|z|=1，H(z)收敛时，即 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$ 系统稳定。

结论：**当且仅当系统函数H(z)的收敛域包含单位圆时，系统稳定。**

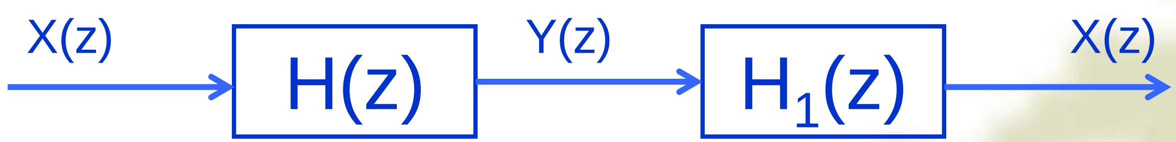
高阶离散系统稳定性判定：朱利判据。（不要求）

3、可逆性：

系统的每一个互不相同的输入可以产生各不相同的唯一的一个输出，则该系统可逆。由于

$$h(n) * h_1(n) = \delta(n)$$

所以 $H(z)H_1(z) = 1$ 或 $H_1(z) = \dfrac{1}{H(z)}$



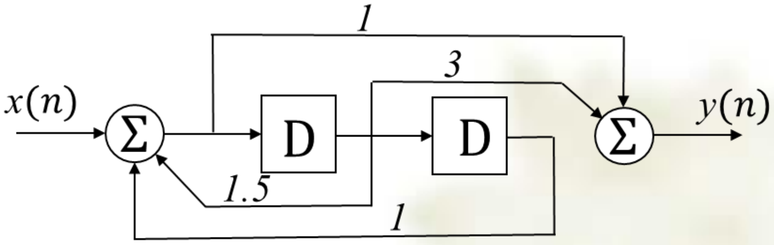
- 已知一LTI的系统函数 $H(z)=\dfrac{z(z+3)}{z^2-\dfrac{3}{2}z-1}$

（1）求稳定系统的单位冲激响应 $h(n)$

（2）写出（含待定系数）系统零输入响应的数学表达式 $y_{zi}(n)$

（3）画出系统框图；

（4）写出系统的差分方程。



第五章作业（1~5节）

5.1
1、
2、

5.2
3、（2），（3），（4）
4、（1）
6、（1），（3），（4）

5.3
7、（3），（4），（5）

5.4
8、
9、
10、
12、
13、
15、
17、（1），（2）
18、（1），（2）
19、
20、
21、
22、
23、

5.5
24、
25、
26、
27、
28、
31、
33

提交时间
第五章作业：12月1日交（周三）
实验7、8:　12月3日交（周五）
选做课程设计（2个）：12月6日（周一）

实验面试
面试时间：12月13日左右
面试内容：八个实验的全部内容
面试方法：可以携带相关资料，看到题目后有15秒准备时间
实验复习方法：独立完成实验即可通过面试

期末考试
时间：期末考试周
最终成绩组成：平时成绩与期末成绩加权
平时成绩包括：出勤情况+作业成绩+实验成绩+课程设计
考试内容：课堂讲述的全部内容
复习建议：1、以PPT为主线，顺序复习后再做关联总结
2、所有例题、作业均独立完成
3、另外发部分往年试题，供参考。