均匀平面波的反射和透射[1]

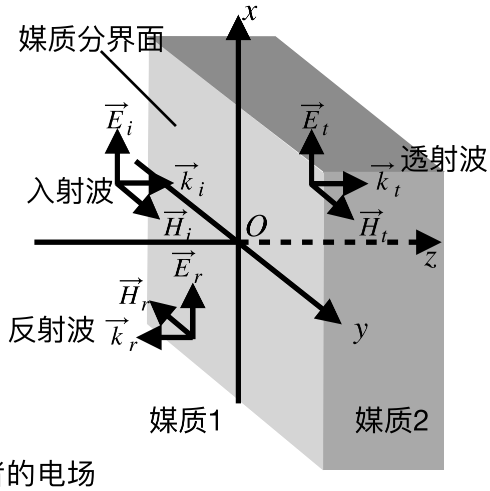
电磁场与电磁波不挂科第六讲讲义

■ **矢量的加与减的几何意义**

均匀平面波在传播过程中常会遇到不同媒质的分界面。

电磁波入射到某分界面上时，部分电磁能量被分界面反射形成反射波；

另一部分能量穿过分界面继续传播，形成透射波。



入射波的电场强度和磁场强度常用E_i和H_i表示；

反射波的电场和磁场用E_r和H_r表示；

透射波的电场和磁场用E_t和H_t表示。

反射波和透射波相较入射波，电磁能量发生改变，对应二者的电场和磁场表达式中振幅的变化；

另外，反射波的传播方向与入射波相反，对应表示传播方向的相位因子的变化；

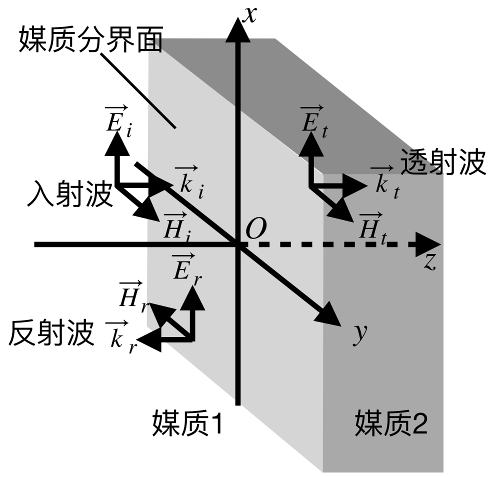
透射波的传播媒质发生变化，对应于媒质参数有关的物理量发生变化。

6.1.均匀平面波的垂直入射

6.1.1.对导电媒质分界面的垂直入射

■ **对导电媒质分界面的垂直入射**

如右图所示，$z<0$的半空间充满参数为ε_1、μ_1和σ_1的导电媒质1，$z>0$的半空间充满参数为ε_1、μ_2和σ_2的导电媒质2，均匀平面波从媒质1垂直入射到$z=0$的分界平面上。



假定入射波是沿x方向的线极化波。

■ 对导电媒质分界面的垂直入射「入射波」

媒质1中的入射波电场和磁场的表达式可写为：

$$\vec{E}_i(z)=\vec{e}_x E_{im}e^{-\gamma_1 z}$$

$$\vec{H}_i(z)=\vec{e}_z\times\frac{1}{\eta_{1c}}\vec{E}_i(z)=\vec{e}_y\frac{1}{\eta_{1c}}E_{im}e^{-\gamma_1 z}$$

其中：

$$\gamma_1=jk_{1c}=j\omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_{1c}}=j\omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1(1-j\frac{\sigma_1}{\omega\varepsilon_1})}$$

$$\eta_{1c}=\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_{1c}}}=\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}(1-j\frac{\sigma_1}{\omega\varepsilon_1})^{-\frac{1}{2}}$$

■ 对导电媒质分界面的垂直入射「反射波」

部分电磁能量被分界面反射，形成反射波。相较入射波，反射波的传播方向发生变化，幅度发生变化。

反射波的电场和磁场分别为：

$$\vec{E}_r(z)=\vec{e}_x E_{rm}e^{\gamma_1 z}$$

$$\vec{H}_r(z)=-\vec{e}_z\times\frac{1}{\eta_{1c}}\vec{E}_r(z)=-\vec{e}_y\frac{1}{\eta_{1c}}E_{rm}e^{\gamma_1 z}$$

媒质1中的电磁波由入射波和反射波合成，合成波的电场和磁场为：

$$\vec{E}_1(z)=\vec{E}_i(z)+\vec{E}_r(z)=\vec{e}_x(E_{im}e^{-\gamma_1 z}+E_{rm}e^{\gamma_1 z})$$

$$\vec{H}_1(z)=\vec{H}_i(z)+\vec{H}_r(z)=\vec{e}_y\frac{1}{\eta_{1c}}(E_{im}e^{-\gamma_1 z}-E_{rm}e^{\gamma_1 z})$$

■ 对导电媒质分界面的垂直入射「透射波」

部分电磁能量穿过分界面继续传播，形成透射波。相较入射波，透射波的传播方向不变，幅度和传播媒质发生变化。

其电场和磁场的表达式分别为：

$$\vec{E}_t(z) = \vec{e}_x E_{tm} e^{-\gamma_2 z}$$

$$\vec{H}_t(z) = \vec{e}_z \times \frac{1}{\eta_{2c}} \vec{E}_t(z) = \vec{e}_y \frac{1}{\eta_{2c}} E_{tm} e^{-\gamma_2 z}$$

其中：

$$\gamma_2 = j\omega\sqrt{\mu_2 \varepsilon_{2c}} = j\omega\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2 (1 - j\frac{\sigma_2}{\omega \varepsilon_2})}$$

$$\eta_{2c} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_{2c}}} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}(1 - j\frac{\sigma_2}{\omega \varepsilon_2})^{-\frac{1}{2}}$$

媒质2中只有透射波，即$E_2(z) = E_t(z)$，$H_2(z) = H_t(z)$。

■ 反射系数和透射系数

定义分界面上的反射系数Γ为反射波电场振幅E_{rm}与入射波电场振幅E_{im}的比值，其表达式为：$\Gamma = \dfrac{E_{rm}}{E_{im}} = \dfrac{\eta_{2c} - \eta_{1c}}{\eta_{2c} + \eta_{1c}}$。

另定义分界面上的透射系数τ为透射波电场振幅E_{tm}与入射波电场振幅E_{im}的比值，其表达式为：$\tau = \dfrac{E_{tm}}{E_{im}} = \dfrac{2\eta_{2c}}{\eta_{2c} + \eta_{1c}}$。

「对于一般媒质的分界面，电场强度和磁场强度满足的边界条件分别为：

$\vec{e}_n \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$、$\vec{e}_n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s = 0$。

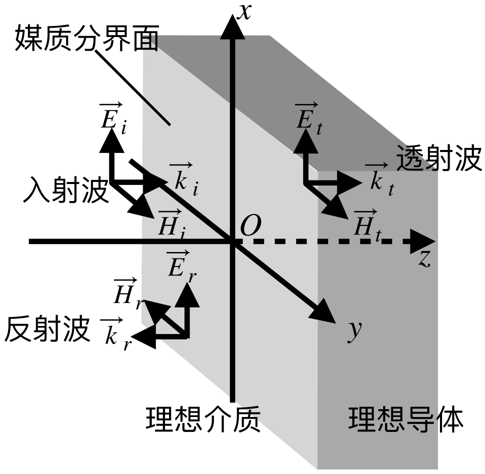
将前面求出的$E_1(z), E_2(z), H_1(z), H_2(z)$代入边界条件（此时分界面的法线方向单位矢量$\vec{e}_n$为$-\vec{e}_z$），可以得到：$\begin{cases} E_{im} + E_{rm} = E_{tm} \\ \frac{E_{im}}{\eta_{1c}} - \frac{E_{rm}}{\eta_{1c}} = \frac{E_{tm}}{\eta_{2c}} \end{cases}$。

由此可解得：$E_{rm}=\dfrac{\eta_{2c}-\eta_{1c}}{\eta_{2c}+\eta_{1c}}E_{im}$，$E_{tm}=\dfrac{2\eta_{2c}}{\eta_{2c}+\eta_{1c}}E_{im}$。」

由反射系数和透射系数的表达式可得二者关系为：$1+\Gamma=\tau$。

6.1.2.对理想导体平面的垂直入射

■ **对理想导体平面的垂直入射**



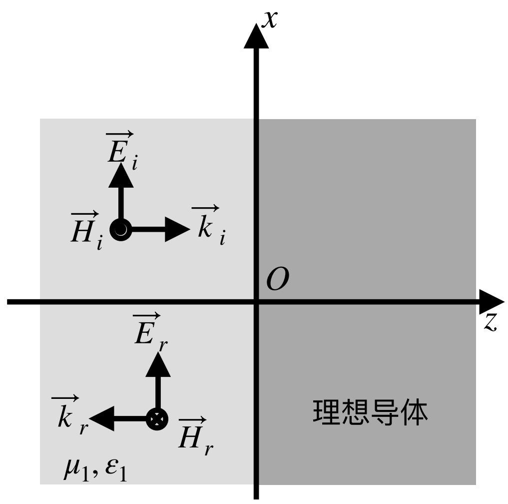
如右图所示，x方向线极化的均匀平面波沿$+z$方向从理想介质垂直入射到理想导体，分界面为xy平面。

由于理想导体的电导率$\sigma_2=\infty$，其本征阻抗为

$$\eta_{2c}=\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_{2c}}}=\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2-j\frac{\sigma_2}{\varepsilon}}}\to 0;$$

将其代入透射和反射系数的表达式，得到$\Gamma=-1,\tau=0$，这表示理想导体将电磁波全部反射，导体内部的电磁场为零，没有电磁波产生透射。

■ **对理想导体平面的垂直入射「入射波」**



假定入射波是沿x方向的线极化波。

因为媒质1为理想介质，有$\gamma_1=j\omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}=j\beta_1$，

$$\eta_{1c}=\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}=\eta_1。$$

则入射波电场和磁场的表达式可写为：

$$\vec{E}_i(z)=\vec{e}_xE_{im}e^{-j\beta_1 z}$$

$$\vec{H}_i(z)=\vec{e}_z\times\frac{1}{\eta_1}\vec{E}_i(z)=\vec{e}_y\frac{1}{\eta_1}E_{im}e^{-j\beta_1 z}$$

■ 对理想导体平面的垂直入射「反射波」

设反射波的电场表达式为$\vec{E}_r(z)=\vec{e}_x E_{rm} e^{j\beta_1 z}$，对理想导体分界面，有边界条件

$\vec{e}_n \times \vec{E}_{1|z=0} = -\vec{e}_z \times (\vec{E}_i + \vec{E}_r)_{|z=0} = -\vec{e}_y (E_{im+}E_{rm}) = 0$。

电磁能量被理想导体面全部反射，在分界面上应用理想导体的边界条件，可以得到反射波振幅$E_{rm}=-E_{im}$；

则反射波的电场和磁场表达式为：

$$\vec{E}_r(z) = -\vec{e}_x E_{im} e^{j\beta_1 z}$$

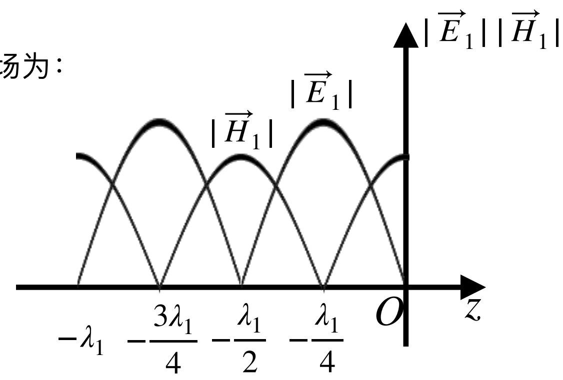
$$\vec{H}_r(z) = \vec{e}_y \frac{1}{\eta_1} E_{im} e^{j\beta_1 z}$$

■ 对理想导体平面的垂直入射「媒质1中的合成波」

媒质1中的电磁波由入射波和反射波合成，合成波的电磁场为：

$$\vec{E}_1(z) = \vec{e}_x E_{im}(e^{-j\beta_1 z} - e^{j\beta_1 z}) = -\vec{e}_x j2E_{im}\sin\beta_1 z$$

$$\vec{H}_1(z) = \vec{e}_y \frac{1}{\eta_1} E_{im}(e^{-j\beta_1 z} + e^{j\beta_1 z}) = \vec{e}_y \frac{2}{\eta_1} E_{im}\cos\beta_1 z$$



其对应的瞬时表达式为：

$$\vec{E}_1(z,t) = Re[\vec{E}_1(z)e^{j\omega t}] = \vec{e}_x 2E_{im}\sin\beta_1 z\sin\omega t$$

$$\vec{H}_1(z,t) = Re[\vec{H}_1(z)e^{j\omega t}] = \vec{e}_y \frac{2}{\eta_1} E_{im}\cos\beta_1 z\cos\omega t$$

由此可知，合成波的相位仅与时间有关，即空间中各点的相位相同；

各点处的电场和磁场强度的振幅表达式分别为：

$$|\vec{E}_1(z)| = 2E_{im}|\sin\beta_1 z|$$

$$|\vec{H}_1(z)| = \frac{2}{\eta_1} E_{im}|\cos\beta_1 z|$$

对电场来说，当$\beta_1 z=-n\pi$，即$z=-\dfrac{n\lambda_1}{2}$ $(n=0,1,2,3,...)$时，电场振幅始终为零，称这些点为波节点。

当$\beta_1 z = -(n+\frac{1}{2})\pi$，即$z = -\frac{(2n+1)\lambda_1}{4}$ $(n = 0,1,2,3,...)$时，电场振幅达到最大值，称这些点为波腹点。

合成波的波腹和波节位置始终不变。

各点处的电场强度瞬时值随时间变化，但波形不向前推进，即合成波在空间没有移动，只是在原来的位置振动，称这种波为驻波。

同样地，可以看出磁场也为驻波。

当$\beta_1 z = -n\pi$时产生波腹，当$\beta_1 z = -\frac{(2n+1)\pi}{2}$时产生波节。

电场和磁场有$\frac{\pi}{2}$的空间相位差，位置上错开$\frac{\lambda_1}{4}$。在理想导体表面上（$z = 0$处），合成波电场有最小振幅点，$|\vec{E}_1(0)|$为零；磁场有最大振幅点，$|\vec{H}_1(0)| = \frac{2}{\eta_1}E_{im}$。

合成波的平均坡印廷矢量为

$$\vec{S}_{1av} = \frac{1}{2}Re[\vec{E}_1(z) \times \vec{H}_1^*(z)] = \frac{1}{2}Re[\vec{e}_z j \frac{4\vec{E}_{im}^2}{\eta_1}\sin\beta_1 z] = 0$$

表示驻波不发生电磁能量的传输，仅在两个波节间进行电场能量和磁场能量的交换。

合成波电场和磁场的瞬时表达式为

$$\vec{E}_1(z,t) = Re[\vec{E}_1(z)e^{j\omega t}] = \vec{e}_x 2E_{im}\sin\beta_1 z \sin\omega t$$

$$\vec{H}_1(z,t) = Re[\vec{H}_1(z)e^{j\omega t}] = \vec{e}_y \frac{2}{\eta_1}E_{im}\cos\beta_1 z \cos\omega t$$

例题6-1

一右旋圆极化波垂直入射至位于$z = 0$的理想导体板上，其电场强度的复数形式为

$\vec{E}_i(z) = (\vec{e}_x - \vec{e}_y j)E_m e^{-j\beta z}$。

（1）确定反射波的极化；

（2）写出总电场强度的瞬时表达式；

（3）求板上的感应面电流密度。

■ **例题6-2**

有一频率为$100MHz$、沿y方向极化的均匀平面波从空气（$x<0$区域）中垂直入射到位于$x=0$的理想导体板上。设入射波电场$\vec{E}_i$的振幅为$10\ V/m$。

（1）入射波电场$\vec{E}_i$的磁场$\vec{H}_i$的复矢量；

（2）反射波电场$\vec{E}_r$的磁场$\vec{H}_r$的复矢量；

（3）合成波电场$\vec{E}_1$的磁场$\vec{H}_1$的复矢量；

（4）距离导体平面最近的合成波电场$\vec{E}_1$为0的位置；

（5）距离导体平面最近的合成波磁场$\vec{H}_1$为0的位置；

■ **例题6-3**

一均匀平面波沿$+z$方向传播，其电场强度矢量为

$\vec{E}=\vec{e}_x 100\sin(\omega t-\beta z)+\vec{e}_y 200\cos(\omega t-\beta z)\ V/m$。

（1）应用麦克斯韦方程求相伴的磁场$\vec{H}$；

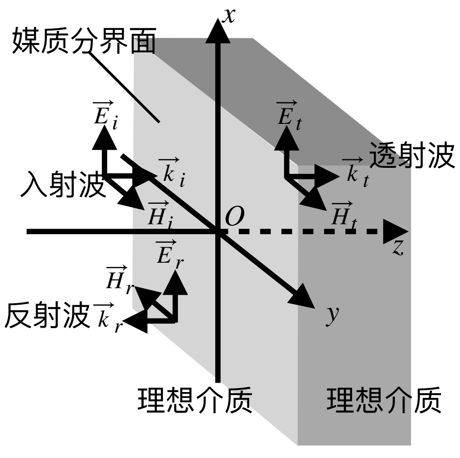
（2）若在波传播方向上$z=0$处，放置一无限大的理想导体板，求$z<0$区域中的$\vec{E}_1$和$\vec{H}_1$；

（3）求理想导体板表面的电流密度。

6.1.3.对理想介质分界面的垂直入射

■ **对理想介质分界面的垂直入射**

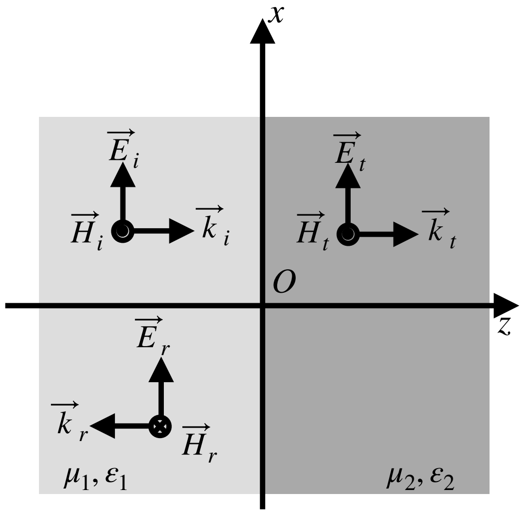
如右图所示，x方向线极化的均匀平面波沿$+z$方向从理想介质垂直入射到另一理想介质，分界面为xy平面。



由于理想介质的电导率$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$，则有

$\gamma_1 = j\omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1} = j\beta_1$、$\eta_{1c} = \sqrt{\dfrac{\mu_1}{\varepsilon_1}} = \eta_1$；

$\gamma_2 = j\omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2} = j\beta_2$、$\eta_{2c} = \sqrt{\dfrac{\mu_2}{\varepsilon_2}} = \eta_2$。



将其代入透射和反射系数的表达式，得到

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

$$\tau = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$$

此时η_1, η_2都是实数。

■ **对理想介质分界面的垂直入射「入射波」**

假定入射波是沿x方向的线极化波。

因为媒质1为理想介质，有$\gamma_1 = j\omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1} = j\beta_1$，$\eta_{1c} = \sqrt{\dfrac{\mu_1}{\varepsilon_1}} = \eta_1$。

则入射波电场和磁场的表达式可写为

$$\vec{E}_i(z) = \vec{e}_x E_{im} e^{-j\beta_1 z},\ \vec{H}_i(z) = \vec{e}_z \times \frac{1}{\eta_1}\vec{E}_i(z) = \vec{e}_y \frac{1}{\eta_1} E_{im} e^{-j\beta_1 z}。$$

■ **对理想介质分界面的垂直入射「反射波」**

电磁能量被理想介质分界面部分反射，反射波的振幅可表示为$E_{rm} = \Gamma E_{im}$；则反射波的电场和磁场表达式为$\vec{E}_r(z) = \vec{e}_x \Gamma E_{im} e^{j\beta_1 z}$，$\vec{H}_r(z) = -\vec{e}_y \dfrac{1}{\eta_1}\Gamma E_{im} e^{j\beta_1 z}$。

由反射系数的表达式可知，当$\eta_2 > \eta_1$时反射系数$\Gamma > 0$，此时分界面上反射波和入射波的电场同相位；当$\eta_2 < \eta_1$时$\Gamma < 0$，两电场符号相反，因为$-1 = e^{j\pi}$，所以分界面上二者相位相差π。

媒质1中的电磁波由入射波和反射波合成，合成波的电磁场为：

$\vec{E}_1 = \vec{e}_x E_{im}(e^{-j\beta_1 z} + \Gamma e^{j\beta_1 z})$，$\vec{H}_1 = \vec{e}_y \dfrac{E_{im}}{\eta_1}(e^{-j\beta_1 z} - \Gamma e^{j\beta_1 z})$。

■ **对理想介质分界面的垂直入射「透射波」**

部分电磁能量穿过分界面继续传播形成透射波，其振幅可表示为$E_{tm} = \tau E_{im}$，其电场和磁场的表达式分别为：$\vec{E}_t(z) = \vec{e}_x \tau E_{im} e^{-j\beta_2 z}$，$\vec{H}_t(z) = \vec{e}_y \dfrac{\tau}{\eta_2} E_{im} e^{-j\beta_2 z}$。

媒质2中只有透射波，即$E_2(z) = E_t(z)$，$H_2(z) = H_t(z)$。

■ **对理想介质分界面的垂直入射「媒质1中的合成波」**

媒质1中合成波的电场复数表达式为$\vec{E}_1 = \vec{e}_x E_{im}(e^{-j\beta_1 z} + \Gamma e^{j\beta_1 z})$；为方便理解其性质，根据$e^{j\beta_1 z} - e^{-j\beta_1 z} = j2\sin\beta_1 z$对上式进行变换，得：

$\vec{E}_1 = \vec{e}_x E_{im}(e^{-j\beta_1 z} + \Gamma e^{j\beta_1 z} + \Gamma e^{-j\beta_1 z} - \Gamma e^{-j\beta_1 z}) = \vec{e}_x E_{im}[(1+\Gamma)e^{-j\beta_1 z} + j2\Gamma\sin\beta_1 z]$

同理可得合成波的磁场复数表达式：

$$\vec{H}_1 = \vec{e}_y \frac{E_{im}}{\eta_1}(e^{-j\beta_1 z} - \Gamma e^{j\beta_1 z}) = \vec{e}_y \frac{E_{im}}{\eta_1}[(1+\Gamma)e^{-j\beta_1 z} - 2\Gamma\cos\beta_1 z]$$

观察电场表达式，由于$\vec{e}_x j2\Gamma E_{im}\sin\beta_1 z$满足驻波形式，而$e^{-j\beta_1 z} = \cos\beta_1 z - j\sin\beta_1 z$部分没有固定的波节波腹，故可将合成波电场分为行波和驻波两部分：行波对应传播因子为$e^{-j\beta_1 z}$的$\vec{e}_x E_{im}(1+\Gamma)e^{-j\beta_1 z}$部分；驻波为$\vec{e}_x j2\Gamma E_{im}\sin\beta_1 z$部分。

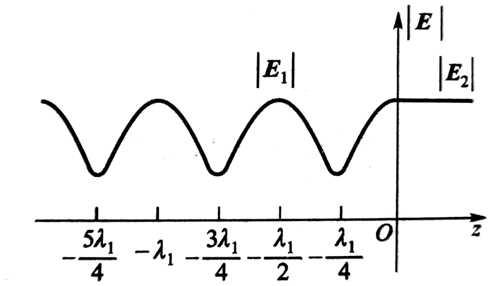
媒质1中合成波的电场复数表达式为$\vec{E}_1 = \vec{e}_x E_{im}[(1+\Gamma)e^{-j\beta_1 z} + j2\Gamma\sin\beta_1 z]$，其振幅为$|\vec{E}_1(z)| = E_{im}\sqrt{1+\Gamma^2+2\Gamma\cos(2\beta_1 z)}$。

当$\Gamma > 0$时，在$z = -\dfrac{n\lambda_1}{2}\quad(n = 0,1,2,3,...)$时合成波电场振幅取得最大值

$|\vec{E}_1(z)|_{max} = E_{im}(1+\Gamma)$；

在$z = -\dfrac{(2n+1)\lambda_1}{4}\quad(n = 0,1,2,3,...)$时振幅取得最小值$|\vec{E}_1(z)|_{min} = E_{im}(1-\Gamma)$。

此时电场振幅波形如右图所示，在分界面上有振幅最大点。

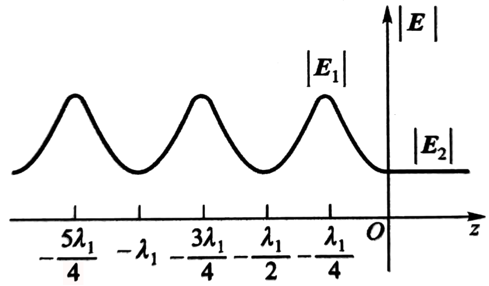


当$\Gamma < 0$时，在$z = -\frac{(2n+1)\lambda_1}{4}$ $(n = 0,1,2,3,...)$时合成波电场振幅取得最大值

$|\vec{E}_1(z)|_{max} = E_{im}(1-\Gamma)$；

在$z = -\frac{n\lambda_1}{2}$ $(n = 0,1,2,3,...)$时振幅取得最小值$|\vec{E}_1(z)|_{min} = E_{im}(1+\Gamma)$。

此时电场振幅波形如右图所示，在分界面上有振幅最小点。



媒质1中合成波的电场复数表达式为$\vec{E}_1 = \vec{e}_x E_{im}[(1+\Gamma)e^{-j\beta_1 z} + j2\Gamma\sin\beta_1 z]$，其振幅为

$|\vec{E}_1(z)| = E_{im}\sqrt{1+\Gamma^2+2\Gamma\cos(2\beta_1 z)}$。

同样的，合成波磁场的振幅也能由其复数表达式推得：

$|\vec{H}_1(z)| = \frac{E_{im}}{\eta_1}|\sqrt{1+\Gamma^2-2\Gamma\cos(2\beta_1 z)}$。

可以看出电场和磁场振幅的最大值和最小值的出现位置正好互换。

■ **驻波系数**

定义驻波系数（驻波比）S为合成波电场强度最大值和最小值之比，即

$= \frac{|\vec{E}_1|_{max}}{|\vec{E}_1|_{min}} = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}$。驻波系数的单位为分贝。

由驻波系数表达式可得：$|\Gamma| = \dfrac{S-1}{S+1}$。

■ 两种媒质中电磁波的平均功率密度

入射波的平均功率密度为：

$$\overrightarrow{S}_{iav} = \frac{1}{2}Re[\overrightarrow{e}_x E_i \times \overrightarrow{e}_y H_i^*] = \overrightarrow{e}_z \frac{E_{im}^2}{2\eta_1}$$

反射波的平均功率密度为：

$$\overrightarrow{S}_{rav} = \frac{1}{2}Re[\overrightarrow{e}_x E_r \times \overrightarrow{e}_y H_r^*] = -\overrightarrow{e}_z \frac{E_{im}^2}{2\eta_1}\Gamma^2$$

媒质1中合成波沿z方向传播的平均功率密度为：

$$\overrightarrow{S}_{1av} = \frac{1}{2}Re[\overrightarrow{e}_x E_1 \times \overrightarrow{e}_y H_1^*] = \overrightarrow{e}_z \frac{E_{im}^2}{2\eta_1}(1-\Gamma^2)$$

媒质2中透射波的平均功率密度为：

$$\overrightarrow{S}_{2av} = \frac{1}{2}Re[\overrightarrow{e}_x E_2 \times \overrightarrow{e}_y H_2^*] = \overrightarrow{e}_z \frac{E_{im}^2}{2\eta_2}\tau^2$$

利用$1+\Gamma = \tau$和$\Gamma = \dfrac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}$，容易证明$\overrightarrow{S}_{1av} = \overrightarrow{S}_{2av}$。

■ 例题6-4

一均匀平面波自空气中垂直入射到半无限大的无耗介质表面上，已知空气中合成波的驻波比为3，介质内透射波的波长是空气中波长的1/6，且介质表面上为合成波电场的最小点。求介质的相对磁导率μ_r和相对介电常数ε_r。

例题6-5

一圆极化波自空气中垂直入射于一介质板上，介质板的本征阻抗为η_2。入射波电场为

$\vec{E} = E_m(\vec{e_x} + \vec{e_y} j)e^{-j\beta z}$。

求反射波与透射波的电场，它们的极化情况如何?

例题6-6

入射波电场$\vec{E_i} = \vec{e_x} 10\cos(3\pi \times 10^9 t - 10\pi z)\ V/m$，从空气（$z < 0$区域）中垂直入射到

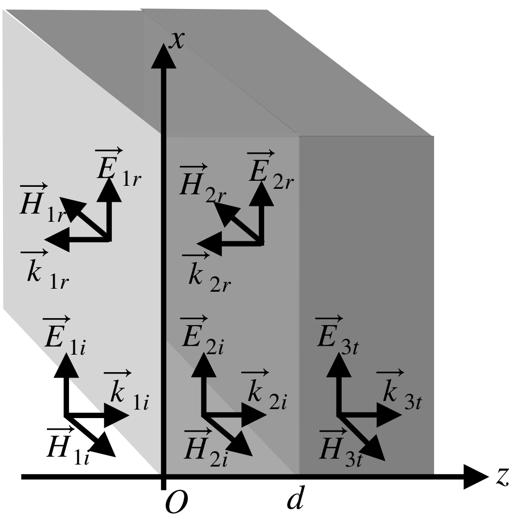
$z = 0$的分界面上，在$z > 0$区域中$\mu_r = 1$、$\varepsilon_r = 4$、$\sigma = 0$。

求$z > 0$区域的电场$\vec{E}_2$和磁场$\vec{H}_2$。

6.1.4.对多层介质分界面的垂直入射

对三层介质分界平面的垂直入射

考虑三层不同的无损耗介质产生的两个分界面，介质1和介质2产生的分界面位于$z = 0$；介质2厚度为d，并在$z = d$处与介质3交界。



电磁波从介质1垂直入射，首先在分界面$z = 0$处产生反射和透射；透射波在介质2中传播，垂直入射分界面$z = d$，再次产生反射和透射。

两个分界面的反射系数分别设为Γ_1, Γ_2,透射系数分别设为τ_1, τ_2。

■ 对三层介质分界平面的垂直入射「无损媒质1中的电磁波」

设媒质1中的入射波为$\begin{cases}\vec{E}_{1i}(z)=\vec{e}_x E_{1im}e^{-j\beta_1 z}\\ \vec{H}_{1i}(z)=\vec{e}_y\dfrac{1}{\eta_1}E_{1im}e^{-j\beta_1 z}\end{cases}$

则反射波为$\begin{cases}\vec{E}_{1r}(z)=\vec{e}_x E_{1rm}e^{j\beta_1 z}=\vec{e}_x\Gamma_1 E_{1im}e^{j\beta_1 z}\\ \vec{H}_{1r}(z)=-\vec{e}_y\dfrac{1}{\eta_1}E_{1rm}e^{j\beta_1 z}=-\vec{e}_y\dfrac{1}{\eta_1}\Gamma_1 E_{1im}e^{j\beta_1 z}\end{cases}$

媒质1中的合成波为二者之和$\begin{cases}\vec{E}_1(z)=\vec{e}_x E_{1im}(e^{-j\beta_1 z}+\Gamma_1 e^{j\beta_1 z})\\ \vec{H}_1(z)=\vec{e}_y\dfrac{E_{1im}}{\eta_1}(e^{-j\beta_1 z}-\Gamma_1 e^{j\beta_1 z})\end{cases}$

■ 对三层介质分界平面的垂直入射「无损媒质2中的电磁波」

经分界面$z=0$的透射波为分界面$z=d$的入射波，故可将其电场表示为：

$\vec{E}_{2i}(z)=\vec{e}_x E_{2im}e^{-j\beta_2(z-d)}=\vec{e}_x\tau_1 E_{1im}e^{-j\beta_2(z-d)}$.

其磁场为：$\vec{H}_{2i}(z)=\vec{e}_y\dfrac{\tau_1 E_{1im}}{\eta_2}e^{-j\beta_2(z-d)}$。

分界面$z=d$处的反射波为:$\begin{cases}\vec{E}_{2r}(z)=\vec{e}_x\tau_1\Gamma_2 E_{1im}e^{j\beta_2(z-d)}\\ \vec{H}_{2r}(z)=-\vec{e}_y\dfrac{\tau_1\Gamma_2 E_{1im}}{\eta_2}e^{j\beta_2(z-d)}\end{cases}$

媒质2中的合成波为：

$$\begin{cases}\vec{E}_2(z)=\vec{e}_x E_{2im}[e^{-j\beta_2(z-d)}+\Gamma_2 e^{j\beta_2(z-d)}]=\vec{e}_x\tau_1 E_{1im}[e^{-j\beta_2(z-d)}+\Gamma_2 e^{j\beta_2(z-d)}]\\ \vec{H}_2(z)=\vec{e}_y\dfrac{\tau_1 E_{1im}}{\eta_2}[e^{-j\beta_2(z-d)}-\Gamma_2 e^{j\beta_2(z-d)}]\end{cases}$$

■ 对三层介质分界平面的垂直入射「无损媒质3中的电磁波」

媒质3中只存在透射波，可写为：$\begin{cases}\vec{E}_3(z)=\vec{e}_x E_{3im}e^{-j\beta_3(z-d)}=\vec{e}_x\tau_1\tau_2 E_{1im}e^{-j\beta_3(z-d)}\\ \vec{H}_3(z)=\vec{e}_y\dfrac{\tau_1\tau_2 E_{1im}}{\eta_3}e^{-j\beta_3(z-d)}\end{cases}$

■ 透射系数和反射系数「z=d处」

分界面$z = d$处的情况与前面单一分界面时类似：从图中看，该分界面左侧为入射波和反射波，右侧只有透射波。

故对该分界面应用边界条件，得到相应的透射系数和反射系数：

$$\Gamma_2 = \frac{\eta_3 - \eta_2}{\eta_3 + \eta_2}$$

$$\tau_2 = 1 + \Gamma_2 = \frac{2\eta_3}{\eta_3 + \eta_2}$$

■ 透射系数和反射系数「z=0处」

分界面$z = 0$处的情况与前面单一分界面时有较大差别：从图中看，该分界面左侧为入射波和反射波，右侧不仅有透射波还有分界面$z = d$反射的反射波。故对该分界面应用边界条件，得到的透射系数和反射系数相较前面的复杂：

$$\Gamma_1 = \frac{\eta_{ef} - \eta_1}{\eta_{ef} + \eta_1}$$

$$\tau_1 = \frac{1 + \Gamma_1}{e^{j\beta_2 d} + \Gamma_2 e^{-j\beta_2 d}}$$

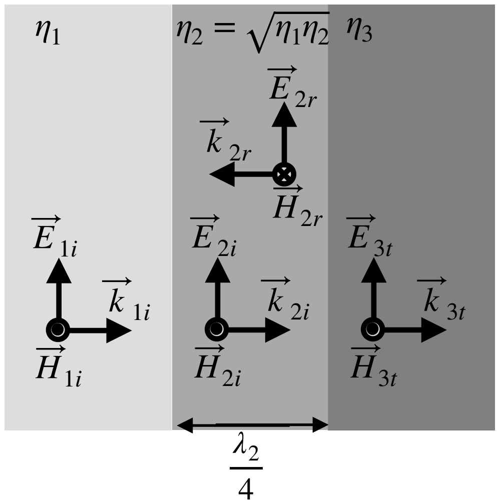
其中$\eta_{ef} = \dfrac{E_2(0)}{H_2(0)}$，称为$z = 0$处的等效波阻抗，它的另一表达式为：

$$\eta_{ef} = \eta_2 \frac{\eta_3 + j\eta_2 \tan(\beta_2 d)}{\eta_2 + j\eta_3 \tan(\beta_2 d)}。$$

■ 对多层介质分界平面的垂直入射

对$n(>3)$层媒质的垂直入射情况，依然先计算最后一个分界面的反射系数Γ_{n-1}，然后求出前一个分界面处的等效波阻抗和反射系数Γ_{n-2}，依次类推直至求得第一个分界面处的等效波阻抗和反射系数。

■ 四分之一波长匹配层



在两种不同的媒质之间插入一层媒质，其厚度为该媒质对应波长的四分之一，即$d=\dfrac{\lambda_2}{4}$。

如右图所示，插入的媒质与另外两种媒质构成三层介质的分界平面，则有$\eta_{ef}=\eta_2\dfrac{\eta_3+j\eta_2\tan(\beta_2 d)}{\eta_2+j\eta_3\tan(\beta_2 d)}$，

$\Gamma_1=\dfrac{\eta_{ef}-\eta_1}{\eta_{ef}+\eta_1}$。

$d=\dfrac{\lambda_2}{4}$时，有$\beta_2 d=\dfrac{2\pi}{\lambda_2}\dfrac{\lambda_2}{4}=\dfrac{\pi}{2}$，即$\tan(\beta_2 d)=\tan\dfrac{\pi}{2}\to\infty$。

故等效波阻抗化为$\eta_{ef}=\dfrac{\eta_2^2}{\eta_3}$。

当媒质2的本征阻抗为$\eta_2=\sqrt{\eta_1\eta_3}$时，有$\eta_{ef}=\eta_1$，此时$d=\dfrac{\lambda_2}{4}$，媒质1与2的分界面上的反射系数为$\Gamma_1=0$。

这表明，若在媒质1和媒质3之间插入一层厚度为$\dfrac{\lambda_2}{4}$的媒质作为媒质2，只要媒质2的波阻抗满足$\eta_2=\sqrt{\eta_1\eta_3}$，就能消除媒质1与媒质2分界面上的反射。称媒质2为四分之一波长匹配层。

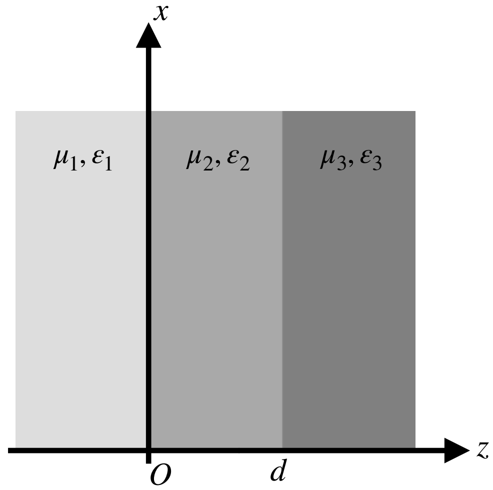
例题6-7

频率$100GHz$的均匀平面波从空气中垂直入射到$\varepsilon=4\varepsilon_0$、$\mu=\mu_0$、$\sigma=0$的理想媒质平面上，为了消除反射，在媒质表面涂上1/4波长的匹配层。

试求匹配层的相对介电常数和最小厚度。

■ **半波长介质窗**

对右图所示的三层媒质，有



$$\eta_{ef} = \eta_2 \frac{\eta_3 + j\eta_2 \tan(\beta_2 d)}{\eta_2 + j\eta_3 \tan(\beta_2 d)}$$

$$\Gamma_1 = \frac{\eta_{ef} - \eta_1}{\eta_{ef} + \eta_1}$$

$$\tau_1 = \frac{1 + \Gamma_1}{e^{j\beta_2 d} + \Gamma_2 e^{-j\beta_2 d}}$$

若媒质1和媒质3是相同的媒质，即$\eta_1 = \eta_3$。

当媒质2的厚度$d = \dfrac{\lambda_2}{2}$时，有$\beta_2 d = \dfrac{2\pi}{\lambda_2}\dfrac{\lambda_2}{2} = \pi$，即$\tan(\beta_2 d) = \tan\pi = 0$。

故等效波阻抗可化为$\eta_{ef} = \eta_3 = \eta_1$。

此时媒质1和2的分界面的反射和透射系数分别为：

$$\Gamma_1 = 0$$

$$\tau_1 = -\frac{1}{1 + \Gamma_2}$$

又因$\tau_2 = 1 + \Gamma_2$，故$\tau_1\tau_2 = -1$，则有$E_{3tm} = \tau_1\tau_2 E_{1im} = -E_{1im}$，这表明，在媒质1和3之间插入一厚度$d = \dfrac{\lambda_2}{2}$的媒质作为媒质2，则电磁波能无损耗地传入媒质3。称厚度为二分之一波长的媒质2为半波长介质窗。