



第八章 反馈控制电路

本章重点:

相位反馈控制电路的（锁相环）的电路组成，基本工作原理，基本环路方程，集成锁相环的应用。

本章难点:

锁相环路的相位反馈控制过程，捕捉过程的定性讨论。



8.1 反馈控制电路概述

各种通信和电子系统中，为了提高其性能指标，或实现某些特殊的指标要求，广泛采用各类反馈控制电路。

各种反馈控制电路，就其作用原理而言，都可看作自动调节系统，它由反馈控制电路和受控对象两部分组成，如图8.1.1所示。

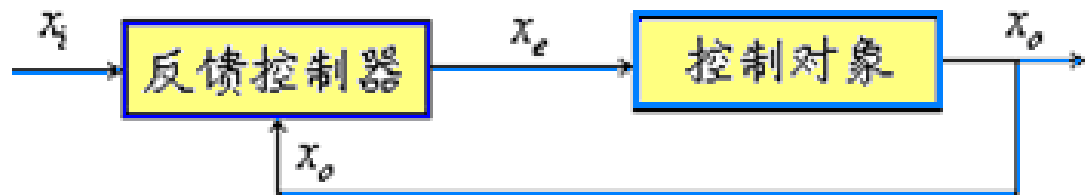


图 8.1.1 反馈控制电路的组成方框图



图中, x_i 和 x_o 分别为反馈控制电路的输入量和输出量, 它们之间的关系是根据使用要求予以设定的, 设为 $x_o = g(x_i)$

控制过程: 若 $x_o = g(x_i)$ 受某种因素的影响而遭到破坏, 则反馈控制器就对 x_o 和 x_i 进行比较, 检测出它们与预定关系之间的偏离程度, 并产生相应的误差量 x_e , x_e 加到被控制对象上对 x_o 进行调节, 使 x_o 和 x_i 之间接近到预定的状态 (关系), 而进入稳定状态。



反馈控制电路的类型不同，需要比较和调节的参量就不同。

分类

- 1、当需要比较和调节的参量为电压（电流）时，相应的 x_i 和 x_o 为电压（电流）。即为自动振幅（增益）控制电路 ALC (AGC)。
- 2、当需要比较和调节的参量为频率，相应的 x_i 和 x_o 为频率。即为自动频率控制电路（AFC）。
- 3、当需要比较和调节的参量为相位，相应的 x_i 和 x_o 为相位，即为自控相位控制电路（APC）



各种反馈控制电路，由于它们均是利用误差产生控制电压，去控制受控对象，当电路达到动态平衡以后，必然存在一定的误差——称之为稳态误差。

∴ ALC：电平误差 $(\Delta A)\Delta V$

AFC：频率误差 Δf

APC (PLL)：相位误差 $\Delta\varphi$

由于： $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$ 所以，PLL的频率误差 $\Delta f = f_i - f_o = 0$

所以 $f_i = f_o$

结论：PLL也是一种实现频率跟踪的自动控制电路，它与AFC电路的区别在于可以实现无误差的频率跟踪，即 $f_o = f_i$ 。



8.2.1 锁相环路的基本组成及数学模型

一、锁相环路的组成框图：

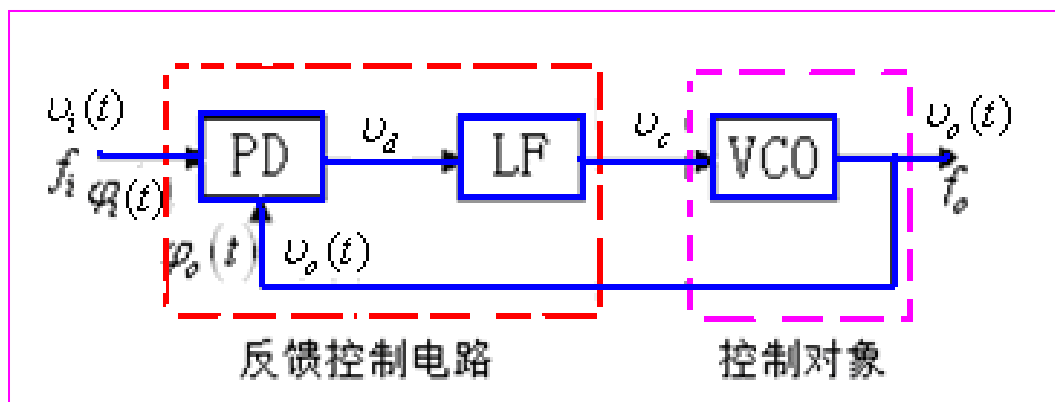


图8.1.12 锁相环路的组成方框图

锁相环路的工作原理简述如下：

当 $f_o > f_i$ 时 $\rightarrow \Delta\varphi(t) \rightarrow u_d \rightarrow u_c \rightarrow f_o \downarrow$ ，直到 $\Delta\varphi(t) = \Delta\varphi_\infty$
 $f_o = f_i$ ，环路锁定。



二、锁相环路的相位数学模型

(一) 相位检波器 (鉴相器) (PD)

1、作用：检测出 v_i 与 v_o 之间的瞬时相位差，并产生相应的输出误差电压 $v_d(t)$ 。

若图8.1.12中的输入、输出信号分别为

$$v_i(t) = V_{im} \cos[\omega_i t + \theta_i] \quad (8.2.1)$$

$$v_o(t) = V_{om} \cos[\omega_o t + \theta_o + \varphi] \quad (8.2.2)$$

式中 θ_i 、 θ_o 分别为 v_i 、 v_o 的起始相角，而 φ 一般为 $\varphi = \pi/2$



设： ω_r 为 $\nu_c = 0$ 时，VCO的固有振荡角频率，称之为参考角频率。

ω_o 为 $\nu_c \neq 0$ 时，VCO的振荡角频率。

ω_i 为输入信号角频率。

为了便于比较，将式（8.2.1）、（8.2.2）变换为

$$\nu_i(t) = V_{im} \cos[\omega_r t + \varphi_i(t)] \quad (8.2.3)$$

$$\nu_o(t) = V_{om} \cos[\omega_r t + \varphi_o(t) + \varphi] = -V_{om} \sin[\omega_r t + \varphi_o(t)] \quad (8.2.4)$$



显然:

$$\omega_i = \omega_r + \frac{d\varphi_i(t)}{dt} = \omega_r + \Delta\omega_i$$

$$\omega_o = \omega_r + \frac{d\varphi_o(t)}{dt} = \omega_r + \Delta\omega_o$$

其中

$$\frac{d\varphi_i(t)}{dt} = \Delta\omega_i \text{ 为 } \nu_i \text{ 的角频率 } \omega_i \text{ 偏离参考角频率 } \omega_r$$

的大小。

$$\frac{d\varphi_o(t)}{dt} = \Delta\omega_o \text{ 为 } \nu_o \text{ 的角频率 } \omega_o \text{ 偏离参考角频率 } \omega_r$$

的大小。



2、实现模型

乘积型鉴相器如图8.2.1所示。

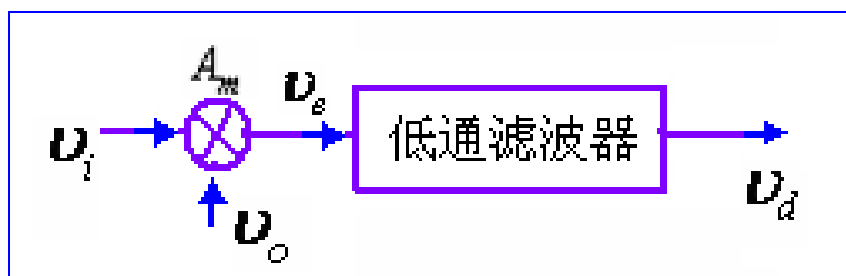


图8.2.1 乘积型鉴相器的组成模型

相乘器的输出为

$$\begin{aligned} v_e &= A_m v_i v_o = -A_m V_{im} V_{om} \cos[\omega_r t + \varphi_i(t)] \sin[\omega_r t + \varphi_o(t)] \\ &= \frac{1}{2} A_m V_{im} V_{om} \sin[\varphi_i(t) - \varphi_o(t)] \\ &\quad - \frac{1}{2} A_m V_{im} V_{om} \sin[\varphi_i(t) + \varphi_o(t) + 2\omega_r t] \end{aligned}$$



经过低通滤波器滤波后的误差输出电压为

$$\begin{aligned} v_d(t) &= \frac{1}{2} A_m V_{im} V_{om} \sin[\varphi_i(t) - \varphi_o(t)] \\ &= A_d \sin \varphi_e(t) \end{aligned} \quad (8.2.5)$$

其中, $\varphi_e(t) = \varphi_i(t) - \varphi_o(t)$ 为 v_i 、 v_o 的瞬时相位误差。

$A_d = \frac{1}{2} A_m V_{im} V_{om}$ 为鉴相灵敏度, 单位是伏特 (V)。

得到的鉴相特性曲线如图8.2.3所示。

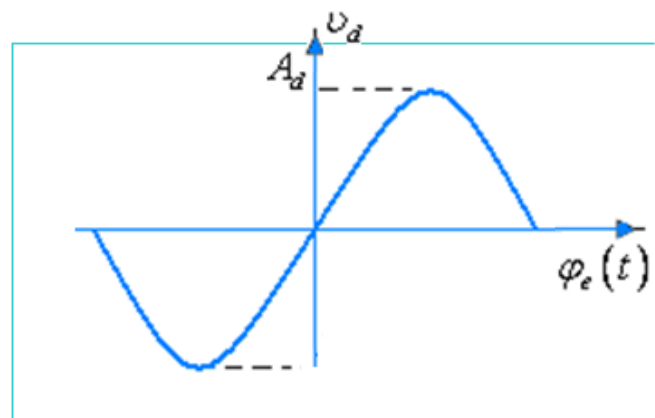


图8.2.3 正弦鉴相特性



由式 (8.2.5) 可以得到正弦鉴相器的相位功能

模型如图 8.2.2 (b) 所示,

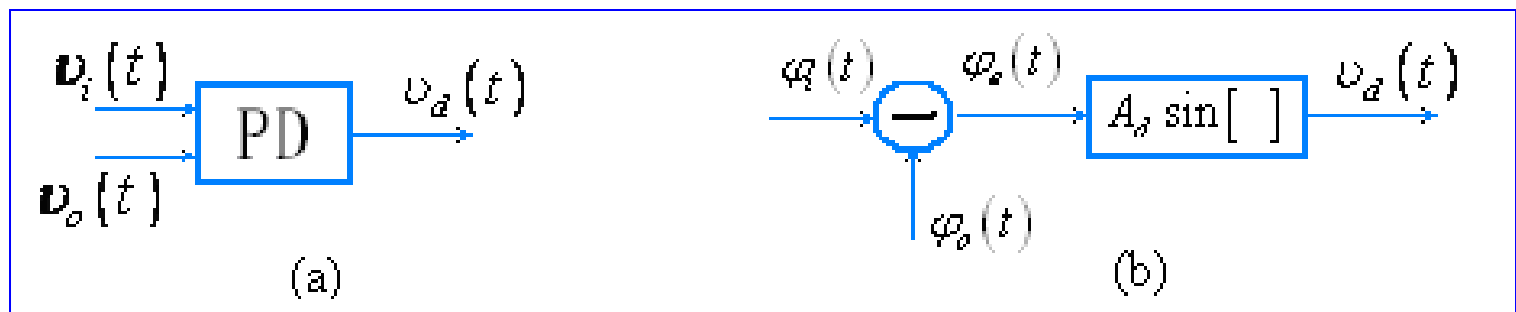


图8.2.2 正弦鉴相器的功能模型



(二) 环路低通滤波器 (LF) :

- 1、作用：滤除鉴相器输出电流中的无用组合频率分量及其它干扰分量，以达到环路性能要求，保证环路稳定性。
- 2、电路形式：常用的环路低通滤波器的电路形式。

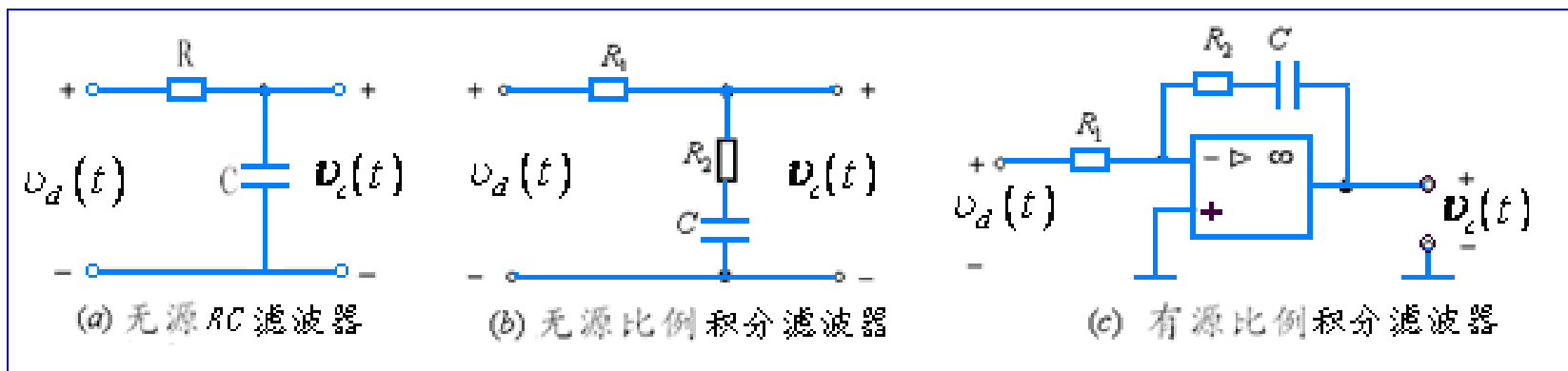


图8.2.4 常用的的环路滤波器的电路形式



3、传输特性

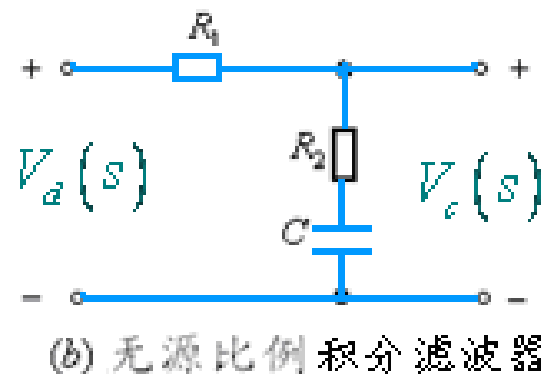
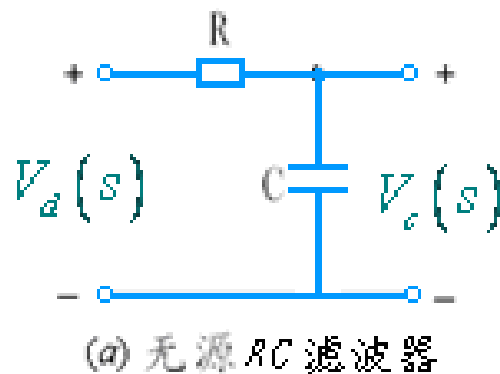
(1) 复频域传输函数

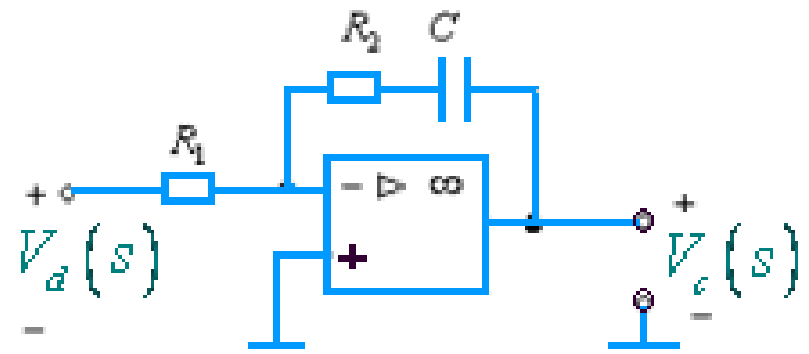
$$A_F(s) = \frac{V_c(s)}{V_d(s)} = \frac{1}{1 + s\tau}$$

其中 $\tau = RC$

$$A_F(s) = \frac{R_2 + \frac{1}{sC}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{sC}} = \frac{1 + s\tau_2}{1 + s(\tau_1 + \tau_2)}$$

其中 $\tau_1 = R_1C$ $\tau_2 = R_2C$





(c) 有源比例积分滤波器

$$A_F(s) = -\frac{R_2 + \frac{1}{sC}}{R_1} = -\frac{1 + s\tau_2}{s\tau_1}$$

其中 $\tau_1 = R_1 C$

$$\tau_2 = R_2 C$$



(2) 时域传输特性:

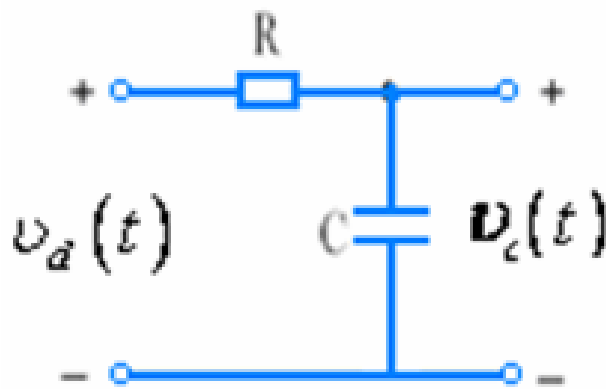
对于以上积分式滤波器, 在通带范围内, 若 $R \ll \frac{1}{\omega C}$

(或 $\omega \ll \frac{1}{RC}$), 输出电压 $v_o(t)$ 与输入电压 $v_i(t)$ 的关系为:

以 (a) 图为例:

$$\frac{v_d - v_c}{R} = C \frac{dv_c}{dt}$$

则
$$v_c = \int \frac{v_d - v_c}{RC} dt \approx \frac{1}{RC} \int v_d dt$$



(a) 无源 RC 滤波器



若令 $\frac{d}{dt} = p$ 称之为微分算子，则：

$\int () dt = \frac{1}{p}$ 为积分算子。

所以 $v_c(t) = \frac{1}{RC} \frac{1}{p} v_d(t) = A_F(p) v_d(t)$

其中 $A_F(p) = \frac{1}{RCp}$ 为时域传递函数

与频域传输函数比较： $A_F(s) = \frac{1}{1+sRC} \approx \frac{1}{sRC}$

可以得到 $p = s$

同理可得 (b) (c) 图： $v_c(t) = A_F(p) v_d(t)$



结论：对于积分式滤波器，在通频带范围内，若满足 $R \ll \frac{1}{\omega C}$ （或 $R \ll \frac{1}{\omega C}$ ）的条件，在已知频域传递函数的情况下，只需将 s 用 p 取代，即可得到时域传递函数；反之亦可。

4、电路模型

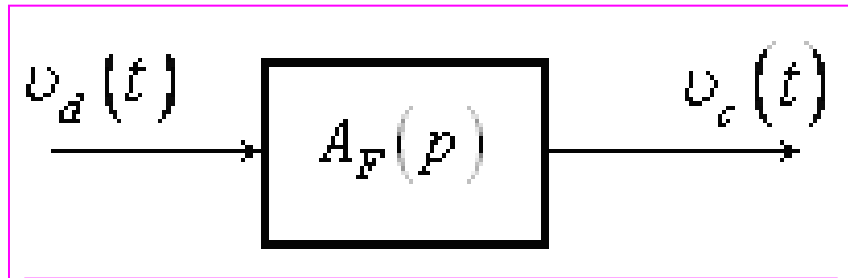


图8.2.5 环路低通滤波器的电路模型



(三) 压控振荡器 (VCO)

1、作用：产生振荡频率随控制电压 $v_c(t)$ 变化的振荡电压。是一种电压---频率变换装置。

2、电路形式：

能实现调频的振荡器都可以作为压控振荡器，控制电压即为调制电压。

3、电路模型：

例如变容二极管调频振荡器。在一般情况下，压控振荡器的振荡频率随控制电压变化的特性是非线性的，如图8.2.6 (a) 所示。



在线性范围内，压控振荡器的控制特性为

$$\omega_o(t) = \omega_r + A_0 v_c(t)$$

A_0 ：控制灵敏度，

单位 $\text{rad/s} \cdot \text{V}^{-1}$

显然，在一定范围内满足：

$$\omega_o - \omega_r = A_0 v_c(t)$$

$$\text{又} \because \omega_o = \omega_r + \frac{d\phi_o(t)}{dt}$$

$$\therefore \text{比较上式可得} \quad \frac{d\phi_o(t)}{dt} = A_0 v_c(t)$$

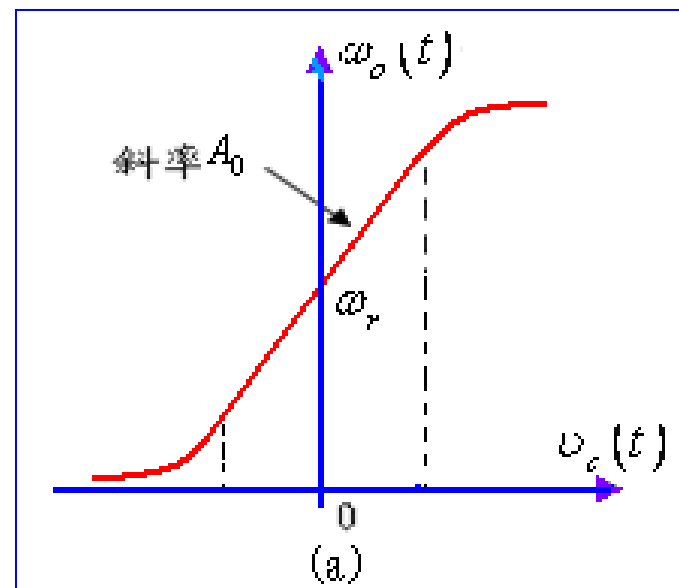


图8.2.6 压控振荡器（VCO）的控制特性



即 $\varphi_o(t) = A_0 \int_0^{t'} v_c(t) dt$

由该式知：单就 $\varphi_o(t)$ 与 $v_c(t)$ 的关系而言，VCO是一个理想的积分器。

可用积分算子表示为： $\varphi_o(t) = A_0 \frac{v_c(t)}{p}$

由此得到VCO的
电路模型如图8.2.6 (b)
所示。

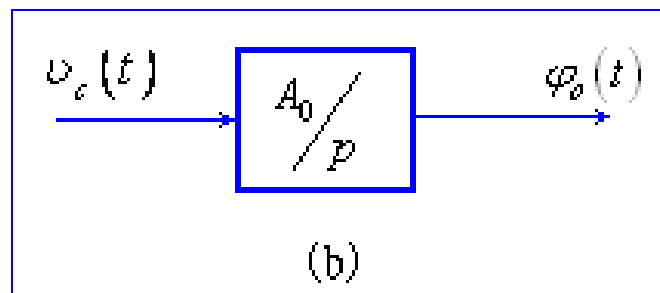


图8.2.6 压控振荡器（VCO）实现模型



四. 锁相环路的相位数学模型

将上述各部分的时域模型按图8.1.12连接起来，构成图8.2.7所示的环路相位数学模型。

1、PLL的基本环路模型

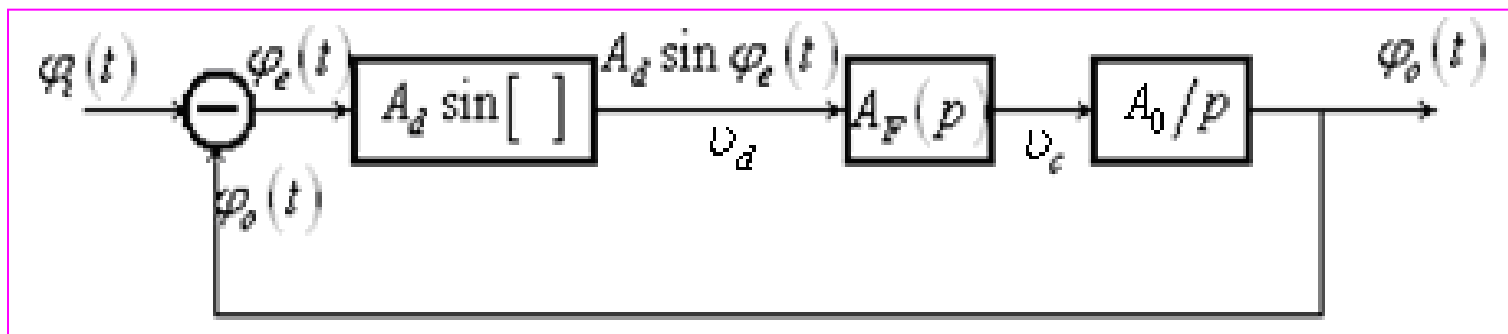


图8.2.7 锁相环路的相位数学模型



8.2.2、锁相环路的基本方程

由图8.2.7锁相环路的相位数学模型知：

$$\varphi_e(t) = \varphi_i(t) - \varphi_o(t) = \varphi_i(t) - A_d A_o A_F(p) \frac{1}{p} \sin \varphi_e(t)$$

或 $p\varphi_e(t) = p\varphi_i(t) - A_d A_o A_F(p) \sin \varphi_e(t)$

式中各项的物理意义：

(1) 瞬时角频差

$$p\varphi_e(t) = p[\varphi_i(t) - \varphi_o(t)] = p\varphi_i(t) - p\varphi_o(t) = \omega_i - \omega_o = \Delta\omega_e(t)$$

表示VCO振荡角频率 ω_o 偏离输入信号角频率 ω_i 的数值。



(2) 控制角频差

$$A_d A_o A_F (p) \sin \varphi_e (t) = p \varphi_i (t) - p \varphi_e (t) = \omega_o - \omega_r = \Delta \omega_o$$

表示VCO在控制电压 $v_c(t)$ 的作用下产生的振荡角频率

ω_o 偏离参考角频率 ω_r 的数值。



(3) 输入固有角频差 或 [初始角频差]

$$p\varphi_i(t) = \omega_i - \omega_r = \Delta\omega_i(t)$$

表示输入信号角频率 ω_i 偏离参考角频率 ω_r 的数值。

当输入信号频率确定后, $\Delta\omega_i$ 是固定数值。动态方程可进一步改写成为

$$\Delta\omega_e = \Delta\omega_i - \Delta\omega_o \quad \text{或} \quad \Delta\omega_i = \Delta\omega_e + \Delta\omega_o$$

物理意义：表明环路闭合后的任何时刻，瞬时角频差和控制角频差之和恒等于输入固有角频差。



锁相环路的跟踪特性

环路中有两种不同的自动调节过程：

跟踪过程：环路原本锁定，由于外界因素造成环路失锁，而环路通过自身的调节过程可以重新维持锁定的过程。

当环路处于跟踪状态时，一版相位误差较小，锁相环可视为线性系统。

捕捉过程：环路原本失锁，闭合后环路通过自身的调节由失锁进入锁定的过程。



8.3.1 锁相环的静态特性

1、环路锁定时瞬时角频差为零

环路闭合前：由于 $\nu_c = 0$

控制角频差 $\Delta\omega_o = 0$ $\Delta\omega_i = \Delta\omega_e$

环路闭合后： $\nu_c \neq 0$ ， $\Delta\omega_o$ 增加， $\Delta\omega_e$ 下降，

直到 $\Delta\omega_e = 0$ $\Delta\omega_i = \Delta\omega_o$

环路达到锁定状态。

环路锁定时，VCO振荡角频率等于输入信号角频率，

即 $\omega_o = \omega_i$ 。



2、稳态相差 $\varphi_{e\infty}$

当环路锁定时, $\Delta\omega_i = \Delta\omega_o$, 即

$$p\varphi_i = A_d A_o A_F(0) \sin \varphi_{e\infty}$$

$A_F(0)$ 为环路锁定时滤波器的直流增益。

其中无源滤波器: $A_F(0) = 1$

无源比例滤波器: $A_F(0) = 1$

有源比例滤波器: $A_F(0) = \infty$



稳态相位误差

$$\varphi_{e\infty} = \arcsin \frac{\Delta\omega_i}{A_d A_o A_F(0)} = \arcsin \frac{\Delta\omega_i}{A_{\Sigma o}}$$

式中：

$A_{\Sigma o} = A_d A_o A_F(0)$ 为环路锁定时的环路直流总增益。

该式说明：

环路锁定时，输入固有角频差 $\Delta\omega_i$ 越大，稳态相位误差 $\varphi_{e\infty}$ 越大，即随着 $\Delta\omega_i$ 的增加，将VCO的 ω_o 调整到等于 ω_i 所需的控制电压越大，因而产生 v_c 的 $\varphi_{e\infty}$ 也就越大。直到 $\Delta\omega_i > A_{\Sigma o}$ 时，上式无解。



或者说：

$\Delta\omega_i$ 过大，环路无法锁定。其原因在于当 $\varphi_{e\infty} = \pi/2$ 时， v_d （鉴相器输出）电压已最大，若继续使增大 $\varphi_{e\infty}$ ， v_d 反而减小，也就无法获得所需的 v_c 以调整 VCO 的 ω_o 使之等于 ω_i 。

由于环路锁定时， $\Delta\omega_e = 0$ ，即 $\omega_i - \omega_o = 0$

所以 $\omega_i = \omega_o$ 即环路可以实现无误差的频率跟踪。



3、同步带（跟踪带）

同步带定义：

若环路原本处于锁定状态，由于某种原因引起输入信号角频率变化，造成输入角频差增大，但环路通过跟踪过程，能够维持环路锁定所允许的最大输入固有频差，称为锁相环路的同步带或跟踪带，用 $\Delta\omega_L$ 表示。

由于 $\Delta\omega_i \leq A_{\Sigma 0}$ ，根据定义可知同步带为

$$\Delta\omega_L = A_{\Sigma 0}$$



实际上，由于输入信号角频率向 ω_r 两边偏离的效果是一样的，因此同步带可以表示为

$$\Delta\omega_L = \pm A_{\Sigma 0}$$

该式表明：要增大锁相环的同步带，必须提高其直流总增益。

不过，这个结论是在假设VCO的频率控制范围足够大的条件下才成立。



8.3.2 锁相环的跟踪特性

环路的瞬变过程与稳态相差统称为PLL的跟踪特性。

如前所述，锁相环在跟踪过程中， φ_e 值一般很小，

满足 $|\varphi_e| \leq \frac{\pi}{6}$ 的条件，可以近似用线性函数逼近鉴相器的
器的鉴相特性，即

$$v_d(t) = A_d \sin \varphi_e(t) \approx A_d \varphi_e(t)$$

式中 A_d 的单位为 V/rad 。

此时基本环路方程可简化为线性微分方程

$$p\varphi_e(t) = p\varphi_i(t) - A_d A_0 A_F(p) \varphi_e(t)$$



相应的线性化相位数学模型如图8.3.1所示。

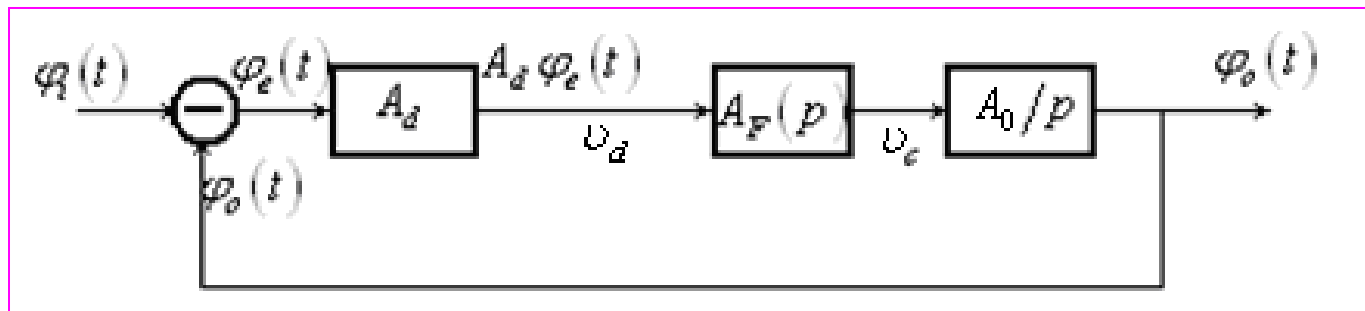


图8.3.1 锁相环路的线性化相位数学模型



一、PLL的传输特性

设 $\Phi_i(s)$ 、 $\Phi_o(s)$ 、 $\Phi_e(s)$ 分别是 $\varphi_i(t)$ 、 $\varphi_o(t)$ 、 $\varphi_e(t)$ 的拉氏变换，而 p 用 s 取代后可以得到图8.3.2所示的线性化频域模型：

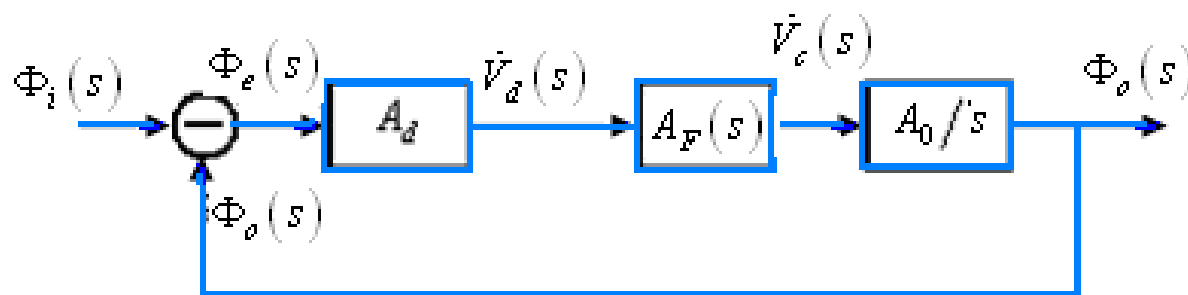


图8.3.2 电路的线性化频域模型

环路的闭环传递函数为

$$H(s) = \frac{\Phi_o(s)}{\Phi_i(s)} = \frac{A_d A_0 A_F(s)}{s + A_d A_0 A_F(s)} = \frac{H_o(s)}{1 + H_o(s)}$$



其中
$$H_o(s) = \frac{\Phi_o(s)}{\Phi_e(s)} = \frac{A_d A_0 A_F(s)}{s}$$

为环路的开环传递函数。

环路的误差传递函数为：

$$\begin{aligned} H_e(s) &= \frac{\Phi_e(s)}{\Phi_i(s)} = \frac{\Phi_e(s)}{\Phi_e(s) + \Phi_o(s)} \\ &= \frac{1}{1 + H_o(s)} = \frac{s}{s + A_d A_0 A_F(s)} \end{aligned}$$

在实际应用中，应将环路滤波器的传输函数代入到上述方程中，就可以得到实际锁相环路的传递函数。

可以看出，传递函数的性质实际上是由环路滤波器的性质决定的。环路中采用的环路滤波器的形式不同，相应的传递函数也不同。



二、瞬时响应及稳态相位误差

利用误差传递函数，在给定 $\Phi_i(s)$ 的前提下，求出 $\Phi_e(s)$ ，再求 $\Phi_e(s)$ 的拉氏反变换，即可得到瞬态响应和稳态相位误差。

即
$$\Phi_e(s) = H_e(s) \Phi_i(s)$$

瞬态响应
$$\varphi_e(t) = \mathcal{L}^{-1} [H_e(s) \Phi_i(s)]$$

利用终值定理，求得稳态相位误差

$$\varphi_{e\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \Phi_e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s H_e(s) \Phi_i(s)$$



例8.3.1 在图8.3.3所示的锁相环中，已知 $A_d = 25 \text{ mV/rad}$ ， $A_0 = 1000 \text{ rad/sV}$ ， $RC = 1 \text{ ms}$ ，当输入角频率发生阶跃变化时， $\Delta\omega_i = 100 \text{ rad/s}$ ，要求环路的稳态相位误差为 0.1 rad ，试确定放大器的增益 A_1 ，并求出相位误差函数 $\varphi_e(t)$ 。

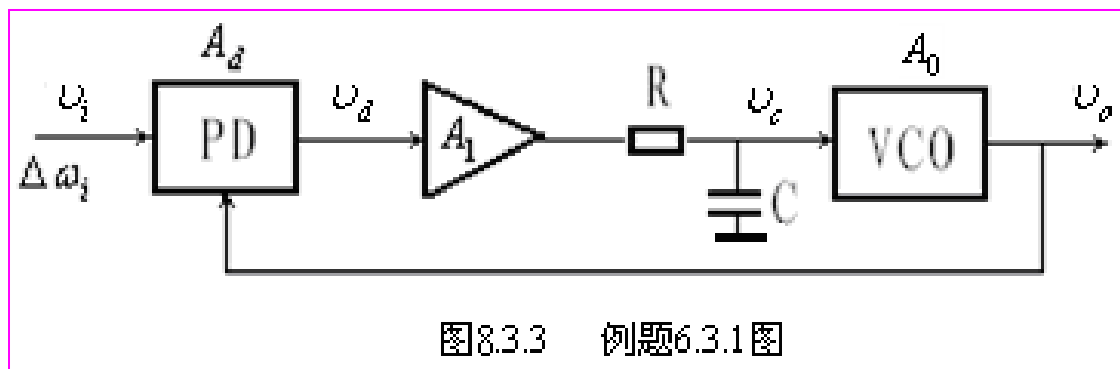


图8.3.3 例题6.3.1图

解：由于环路滤波器为RC低通滤波器，其传递函数为

$$A_F(s) = \frac{1}{1 + RCs} = \frac{1}{1 + \tau s} \quad \tau = RC$$

于是，环路的误差传递函数为

$$H_e(s) = \frac{\Phi_e(s)}{\Phi_i(s)} = \frac{s^2 + 2\xi\omega_n s}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$



式中

$$\xi = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A_d A_0 A_1 \tau} \right)^{1/2} \quad \omega_n = \left(\frac{A_d A_0 A_1}{\tau} \right)^{1/2}$$

ξ 称为阻尼系数。 ω_n 是 $\xi = 0$ 时系统的无阻尼振荡角频率——自然谐振角频率。

设 $t < 0$ 时，环路锁定，且有 $\omega_i = \omega_o = \omega_r, \varphi_i(t) = 0$ 。在 $t = 0$ 时，输入信号角频率产生幅度为 $\Delta\omega_i$ 阶跃变化，则在 $t > 0$ 后的固有相位差 $\varphi_i(t)$ 为

$$\varphi_i(t) = \int_0^t \Delta\omega_i dt = \Delta\omega_i t$$

其拉氏变换为

$$\Phi_i(s) = \frac{1}{s^2} \Delta\omega_i$$



因此环路的相位误差为

$$\Phi_e(s) = \frac{s^2 + 2\xi\omega_n s}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \times \frac{\Delta\omega_i}{s^2} = \frac{(s + 2\xi\omega_n)\Delta\omega_i}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$

瞬态响应

$$\varphi_e(t) = \mathcal{L}^{-1}[\Phi_e(s)] = \mathcal{L}^{-1}[H_e(s)\Phi_i(s)]$$

$$= 2\xi \frac{\Delta\omega_i}{\omega_n}$$

$$+ \frac{\Delta\omega_i}{\omega_n} e^{-\xi\omega_n t} \left[\frac{1 - 2\xi^2}{(1 - \xi^2)^{1/2}} \sin \omega_n (1 - \xi^2)^{1/2} t - 2\xi \cos \omega_n (1 - \xi^2)^{1/2} t \right]$$



式中，等式右边第二项为振幅按指数衰减的两个正弦函数的差值。这两个正弦函数的角频率相同（其值与 A_d 、 A_0 、 τ 有关），相位差为 $\frac{\pi}{2}$ ，振幅不同。

当 $t \rightarrow \infty$ 时，该项的振幅值趋于零，是瞬态相位误差。当 $A_d A_0 A_1$ 一定时， ξ 取不同值时，由上式画出的曲线如图8.3.4所示。

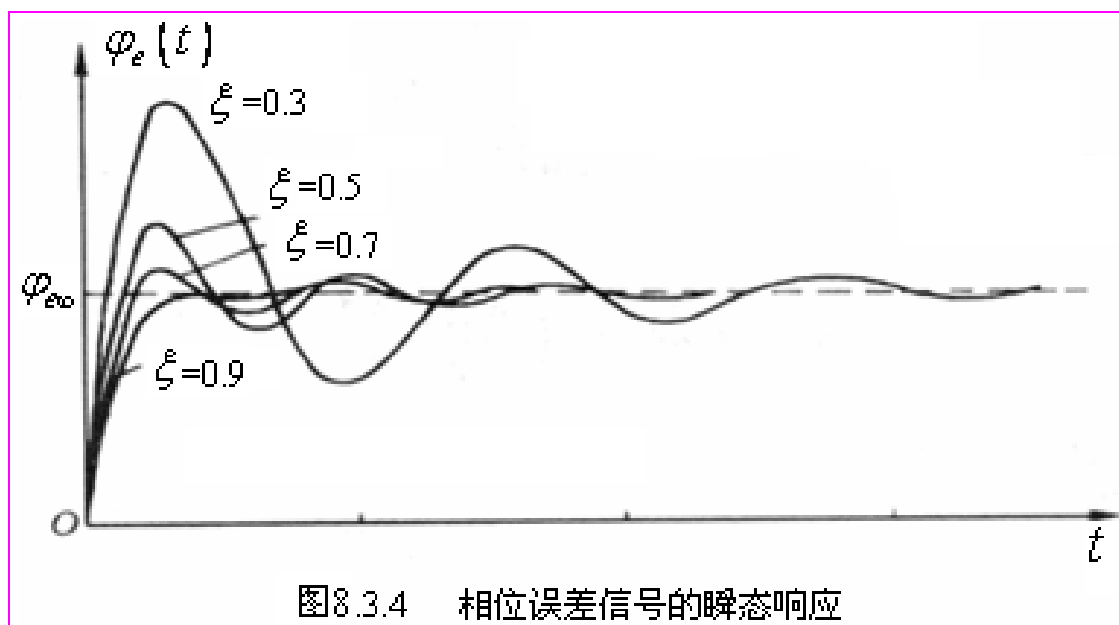


图8.3.4 相位误差信号的瞬态响应



稳态相位误差为

$$\varphi_{e\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} sH_e(s)\Phi_i(s) = 2\xi \frac{\Delta\omega_i}{\omega_n} = \frac{\Delta\omega_i}{A_d A_0 A_1}$$

显然，提高环路直流总增益 $A_{\Sigma o} = A_d A_0 A_1$ ，可以减小 $\varphi_{e\infty}$ 。

将已知数值代入上述各式中，可以求得

$$A_1 = \frac{\Delta\omega_i}{A_d A_0 \varphi_{e\infty}} = \frac{100}{25 \times 10^{-3} \times 10^3 \times 0.1} = 40$$



此时

$$\xi = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A_d A_0 A_1 \tau} \right)^{1/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{25 \times 10^{-3} \times 10^3 \times 40 \times 10^{-3}} \right)^{1/2} = \frac{1}{2}$$

$$\omega_n = \left(\frac{A_d A_0 A_1}{\tau} \right)^{1/2} = \left(\frac{25 \times 10^{-3} \times 10^3 \times 40}{10^{-3}} \right)^{1/2} = 1000 \text{ (rad/s)}$$

因而相位误差函数

$$\varphi_e(t) = 0.1 + 0.1e^{-500t} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \sin 500\sqrt{3}t - \cos 500\sqrt{3}t \right) \text{ (rad)}$$



三、正弦稳态响应

在PLL中，正弦稳态响应是指输入相位 $\varphi_i(t)$ 为正弦信号时环路的输出响应。

当输入信号的相位 $\varphi_i(t)$ 按正弦规律变化时（即输入正弦调频或调相信号），PLL的输出信号相角，即压控振荡器振荡信号的相角，也将按正弦规律变化。但相位变化的幅度和初始相位将随频率的不同而不同，称这种性质为环路的频率特性或频率响应。



若输入信号相角为

$$\varphi_i(t) = \varphi_{im} \sin(\Omega t + \theta_i)$$

则环路的稳态响应输出也必为正弦信号，即

$$\varphi_o(t) = \varphi_{om} \sin(\Omega t + \theta_o)$$

相应的锁相环路输入、输出信号电压分别为：

$$v_i = V_{im} \cos \left[\omega_r t + \varphi_{im} \sin(\Omega t + \theta_i) \right]$$

$$v_o = V_{om} \cos \left[\omega_r t + \varphi_{om} \sin(\Omega t + \theta_o) \right]$$

显然它们均为单音频调制的调相信号。



若将 $\varphi_i(t)$ 、 $\varphi_o(t)$ 用复数表示为

$$\varphi_{im}(j\Omega) = \varphi_{im}(\Omega) e^{j\theta_i(\Omega)}$$

$$\varphi_{om}(j\Omega) = \varphi_{om}(\Omega) e^{j\theta_o(\Omega)}$$

其中 φ_{im} 、 θ_i 、 φ_{om} 、 θ_o 均为 Ω 的函数。

令PLL中的正弦稳态响应即环路对调相信号中的正弦相位的频率特性为 $H(j\Omega)$

且
$$H(j\Omega) = \frac{\varphi_{om}(j\Omega)}{\varphi_{im}(j\Omega)}$$

PLL的频率特性 $H(j\Omega)$ 可以用 $j\Omega$ 代替闭环传递函数中的 S 求得。



例如，采用简单RC积分滤波器的PLL，其闭环传递函数为

$$H(s) = \frac{\Phi_o(s)}{\Phi_i(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

若令 $s = j\Omega$ ，相应的幅频特性为

$$H(\Omega) = \frac{\Phi_o(\Omega)}{\Phi_i(\Omega)} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi\Omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

图8.3.5 画出了不同 ξ 时的幅频特性曲线。



由图可见，对于输入正弦相位来说，PLL具有低通滤波器的特性。其形状与 ξ 有关。当 $\xi = 0.707$ 时，特性曲线最线最平坦，上限频率为：

$$\omega_H = \omega_n = \left(\frac{A_d A_0}{\tau} \right)^{1/2}$$

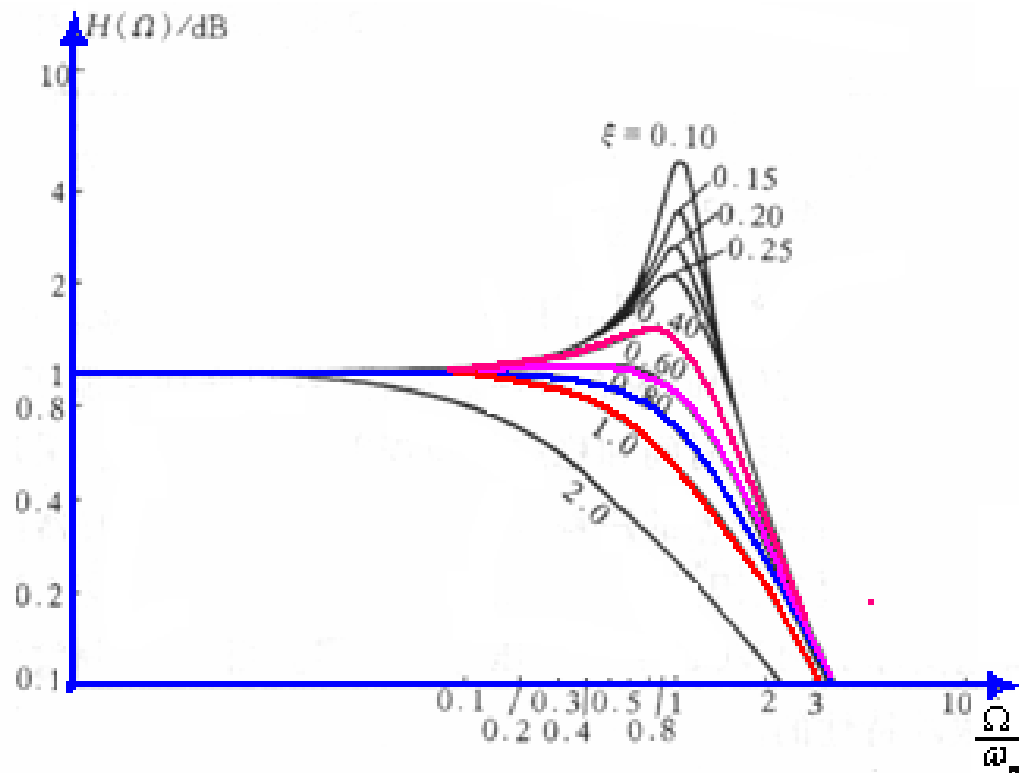


图8.3.5 不同 ξ 时的闭环幅频特性曲线



例8.3.2 在采用简单 RC 积分滤波器的PLL中, 若 $A_d A_0 = 10\pi \text{ rad/s}$

$$\tau = \frac{1}{20\pi} \text{ s}, \text{ 求 } \omega_H \text{ 。$$

解: 根据已知数据求得

$$\xi = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A_d A_0 \tau} \right)^{1/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{20\pi}{10\pi} \right)^{1/2} = 0.707$$

所以

$$\omega_H = \left(\frac{A_d A_0}{\tau} \right)^{1/2} = (20\pi \times 10\pi)^{1/2} = 14.14\pi \text{ (rad/s)}$$

由上例可见, 通过增大环路滤波器的时间常数, 减小环路的直流总增益, 可以将环路的带宽做的非常窄。



四、PLL的稳定性

从稳定性判定准则可知，如果PLL的闭环传递函数 $H(s)$ 中的极点全部位于S平面的左半平面，即极点的实部小于零，则系统是稳定的。



作业： 8.14 8.15 8.16 8.19

预习： 8.4 8.6