



模拟信号的数字化和时分复用

朱维红



学习目标

- 熟练运用抽样定理；
- 解释量化器的作用，计算均匀量化器的量化信噪比；
- 进行PCM编码并计算译码误差；
- 解释DPCM和 ΔM
- 定义时分复用并牢记其特点。



Schedule 时间表

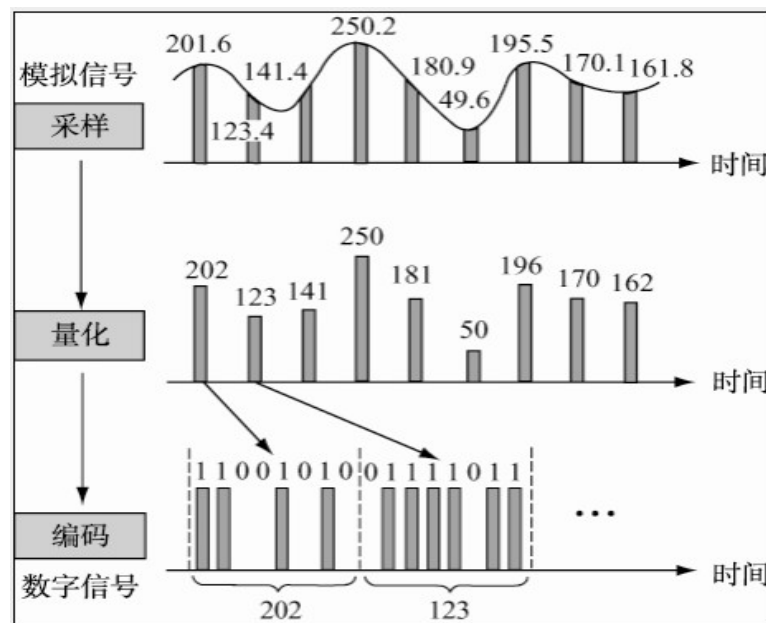
- 复习抽样定理 10分钟
- 均匀量化vs非均匀量化 30分钟
- PCM编码 40分钟



模拟信号数字化

连续（模拟）信源数字化是一种限失真信源编码。其过程为：

抽样（采样）→ 量化 → 编码

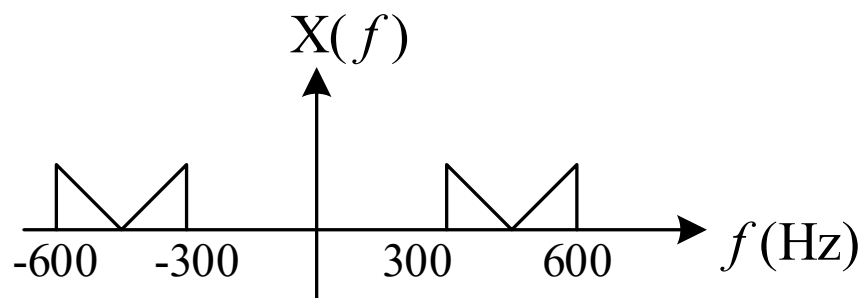




某低通信号的带宽为 B Hz， 对其进行抽样， 若要无失真恢复该信号， 最小抽样速率是 [填空1] Hz。

正常使用填空题需3.0以上版本雨课堂

已知某模拟信号的频谱如下图所示，对其进行抽样，最小抽样频率为 [填空1] Hz，可以用抽样值无失真恢复原信号。



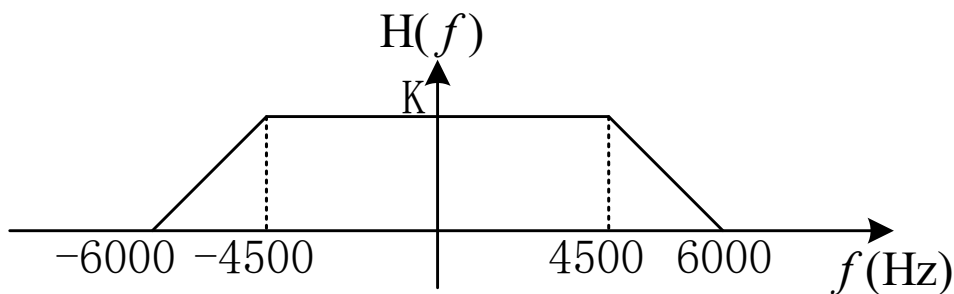
正常使用填空题需3.0以上版本雨课堂



- (练习题) 对于一个带宽为4000Hz的低通信号，重构滤波器具有如下的频率响应，

$$H(f) = \begin{cases} K, & |f| < 4500\text{Hz} \\ K - \frac{|f| - 4500}{1500}, & 4500 \leq |f| < 6000 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

问理想重构所需的最小抽样频率及K值是多少？

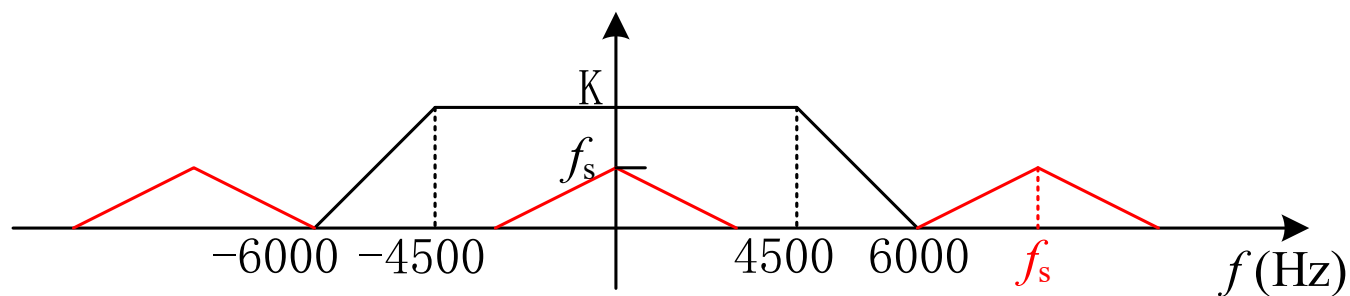




解: $X_{\delta}(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{n}{T_s}\right) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s)$

$$f_s - 4000 \geq 6000 \Rightarrow f_s \geq 10000 \text{ Hz}$$

$$Kf_s = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{f_s} = T_s$$





请简述理想抽样、平顶抽样和曲顶抽样的实现过程和各自存在的问题。



量化

- 什么是量化?

抽样是对模拟信号在时间轴上进行离散化处理；量化是对模拟信号在取值域上进行的离散化处理。

- 量化分类

标量量化 VS 矢量量化;

- 编码的分类

波形编码 VS 分析合成编码;



6.1 (标量) 量化

在标量量化中，模拟信号的值域范围被量化为有限个电平，这些电平之后输入编码器编码成一个二进制序列。

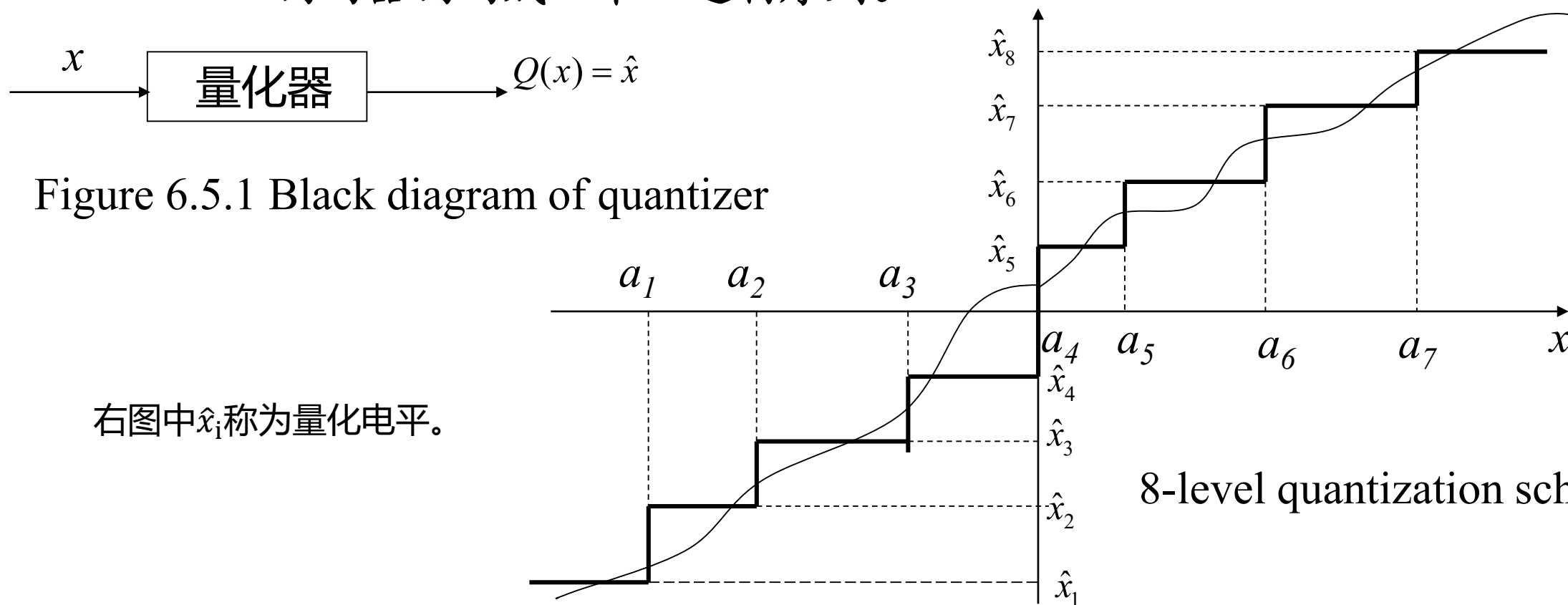


Figure 6.5.1 Block diagram of quantizer

右图中 \hat{x}_i 称为量化电平。

8-level quantization scheme



• 量化器性能指标

Definition. 如果随机变量 X 量化为 $Q(X)$, 信号-量化噪声功率比 (signal-to-quantization-noise ratio ($SQNR$)) 定义为

$$SQNR = \frac{E(X^2)}{E(X - Q(X))^2}$$

$E(X^2)$ 表示随机变量 X 的功率, $E(X - Q(X))^2$ 被称为均方失真或“量化误差”, 表示量化噪声的功率。



处理随机信号时, SQNR 为

$$SQNR = \frac{P_X}{P_{\tilde{X}}}$$

其中,

$$P_X = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E(X^2(t)) dt,$$

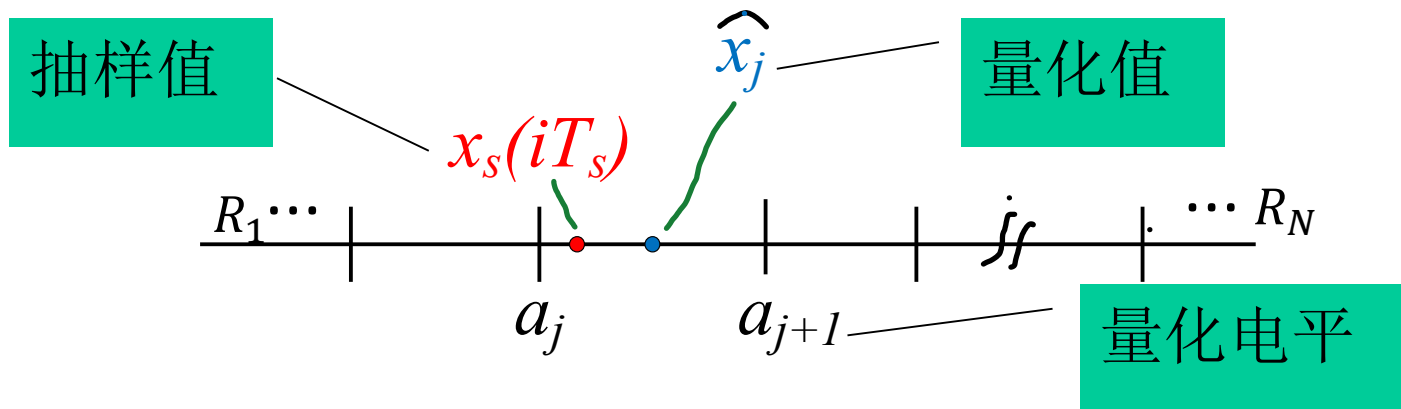
$$P_{\tilde{X}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E(X(t) - Q(X(t)))^2 dt$$



• 均匀量化

在均匀量化器中，整个实轴分割为 N 个区间. 除了区间 R_1 和 R_N 其他区间都等长, 用 Δ 表示, 有

$$a_{j+1} - a_j = \Delta$$



量化原理

对于均匀量化器，一般量化值 \hat{x}_j 取量化区间的中点。

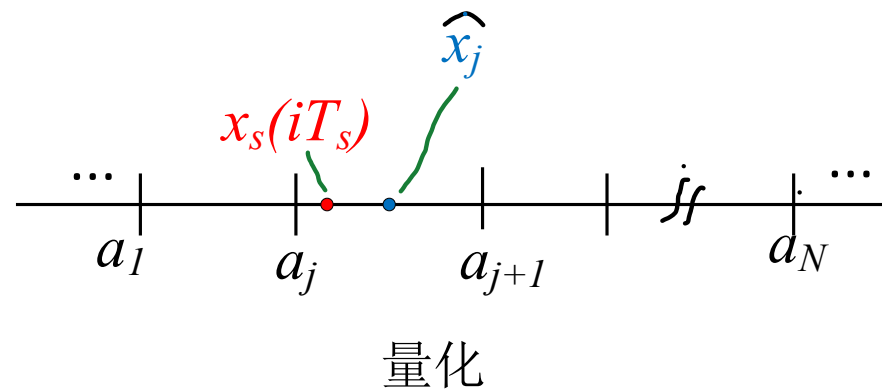
量化噪声: $\hat{x}_j - x_s(it_s)$ 或 $x_s(it_s) - \hat{x}_j$, 有时也称为量化误差。



• 均匀量化量化噪声的功率

$$P_{\tilde{X}}$$

$$= \int_{-\infty}^{a_1} (x - \hat{x}_0)^2 f_X(x) dx + \sum_{i=1}^{N-2} \int_{a_1+i\Delta}^{a_1+(i+1)\Delta} (x - \hat{x}_i)^2 f_X(x) dx \\ + \int_{a_1+(N-1)\Delta}^{\infty} (x - \hat{x}_N)^2 f_X(x) dx$$





- 非均匀量化或最佳量化器.

非均匀量化是指量化区间不相等。

在最佳量化器中，量化区间的边界（量化电平）是量化值的中点，为

$$a_i = \frac{1}{2}(\hat{x}_i + \hat{x}_{i+1})$$

量化值为量化区间的质心，为

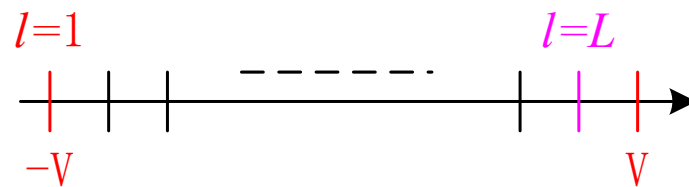
$$\begin{aligned}\hat{x}_i &= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{f_X(x)}{P(a_{i-1} < X \leq a_i)} \\ &= E[X | a_{i-1} < X \leq a_i]\end{aligned}$$



- **Example :** 假设信号在 $(-V, V)$ 之间均匀分布, 对该信号进行均匀量化, 量化电平数 (量化级数) 为 L , 量化值取量化区间的中点, 求该量化器的 $SQNR$ 。

- 解: $E[X^2] = \int_{-V}^V \frac{1}{2V} \times x^2 dx = \frac{1}{6V} x^3 \Big|_{-V}^V = \frac{V^2}{3}$

$$\therefore P_X = \frac{V^2}{3}$$



因为量化间隔数为 L , 所以该均匀量化器的量化间隔为

$$\Delta_l = \Delta = \frac{V - (-V)}{L} = \frac{2V}{L} \quad l = 1, 2, \dots, L$$



$$Q(x) = \hat{x}_l = -V + (l-1)\Delta + \frac{\Delta}{2} = -V + (l - \frac{1}{2})\Delta$$

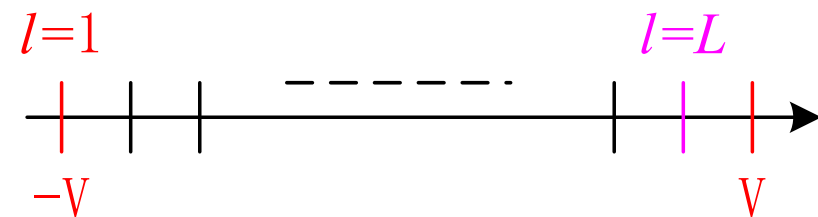
$$E[X - Q(x)]^2 = \sum_{l=1}^L \int_{-V+(l-1)\Delta}^{-V+l\Delta} \frac{1}{2V} \left(x - \left(-V + (l - \frac{1}{2})\Delta \right) \right)^2 dx$$

$$\stackrel{u=x+V}{=} \sum_{l=1}^L \int_{(l-1)\Delta}^{l\Delta} \frac{1}{2V} \left(u - (l - \frac{1}{2})\Delta \right)^2 du$$

$$= L \times \frac{\Delta^3}{24V} = L\Delta \times \frac{\Delta^2}{24V} = 2V \times \frac{\Delta^2}{24V}$$

$$= \frac{\Delta^2}{12} = \frac{V^2}{3L^2} = P_{\tilde{X}}$$

$$SQNR = P_X / P_{\tilde{X}} = \frac{V^2/3}{V^2/3L^2} = L^2$$



可见，均匀量化器的SQNR取决于量化级数。



6.2、波形编码 (Waveform Coding)

• 6.2.1 脉冲编码调制 (Pulse-Code Modulation (PCM))



Figure Block diagram of a PCM system





均匀 PCM

在均匀 PCM 中,假设输入抽样值的范围是 $[-x_{max}, +x_{max}]$, 量化电平数目 L 是 2 的幂次, $L=2^v$. 则每个量化区间的长度, 即量化间隔为

$$\Delta = \frac{2x_{max}}{L}$$

则量化误差为取值范围在 $[-\Delta/2, \Delta/2]$ 分布的随机变量, 若 Δ 较小, 每个区间的误差可以由在该范围内均匀分布的随机变量来很好的近似。

注: 若对量化后的抽样值进行二进制等长编码, 每个样值至少需要 **v bit**。



即

$$E[(X - Q(X))^2] = E[\tilde{X}^2] = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \frac{1}{\Delta} \tilde{x}^2 d\tilde{x} = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{x_{max}^2}{3L^2} = \frac{x_{max}^2}{3 \times 4^v}$$

$$SQNR = \frac{\bar{X}^2}{\tilde{\tilde{X}}^2} = \frac{3 \times L^2 \bar{X}^2}{x_{max}^2} = 3 \times 4^v \tilde{\tilde{X}}^2$$

where

$$\tilde{\tilde{X}} = \frac{X}{x_{max}}$$

归一化信号功率

$$SQNR|_{dB} \approx P_{\tilde{\tilde{X}}}|_{dB} + 6v + 4.8$$

量化电平数增加一倍，或者说增加一个额外的比特，可使 SQNR 改善 6 dB



• 信息速率 R_b

在PCM中，若 $x(t)$ 的抽样频率为 f_s ，每个抽样值编码 v bit，
则模数变换后的信息速率

$$R_b = v f_s$$

例：已知信号 $x(t)$ 的带宽为 W Hz，对其进行均匀PCM编码，量化电平数为 $L = 2^v$ ，求

(1) 信息速率。(2) 若 $L \neq 2^v$ ，求信息速率

解：(1) $R_b = 2Wv$ bit/s.

(2) 若 $L \neq 2^v$ ，令 $v = \lfloor \log_2 L \rfloor$ ， $R_b = 2Wv$ bit/s



非均匀 PCM

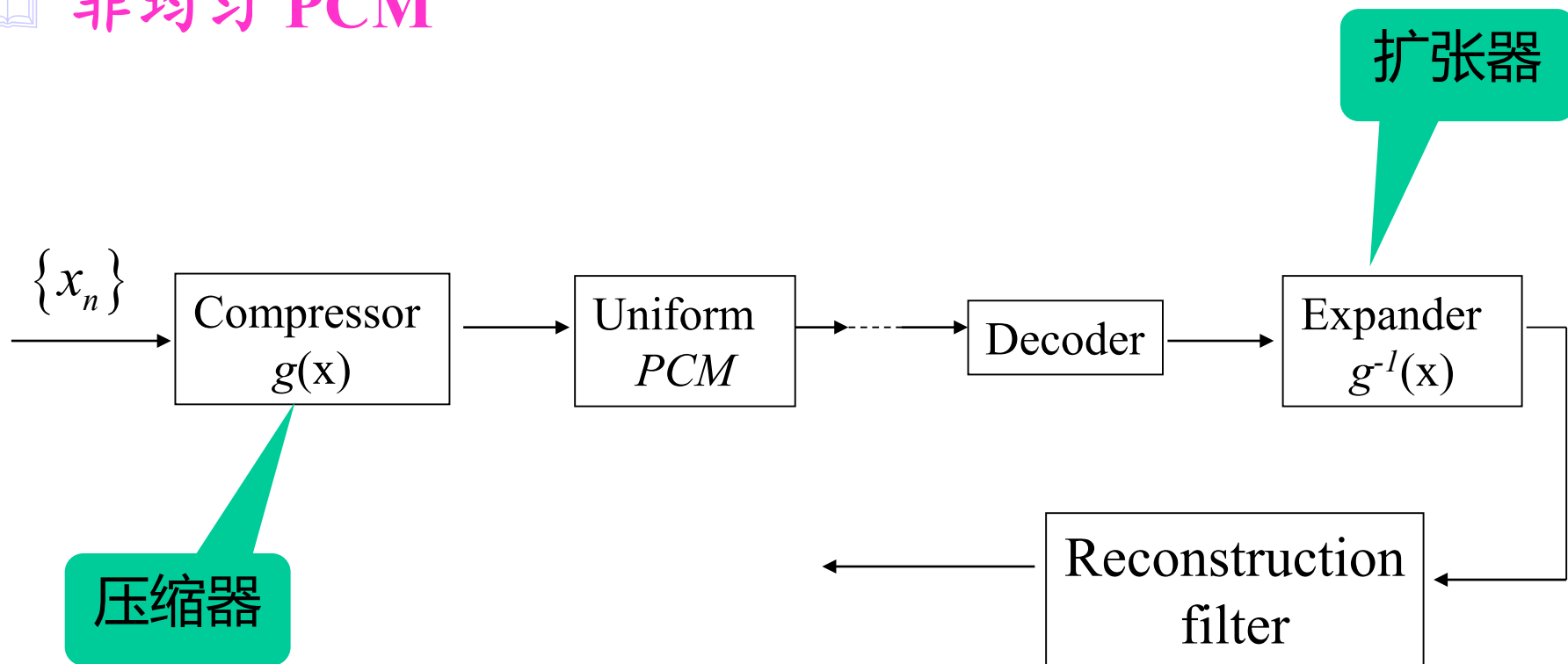


Figure Block diagram of a nonuniform PCM system



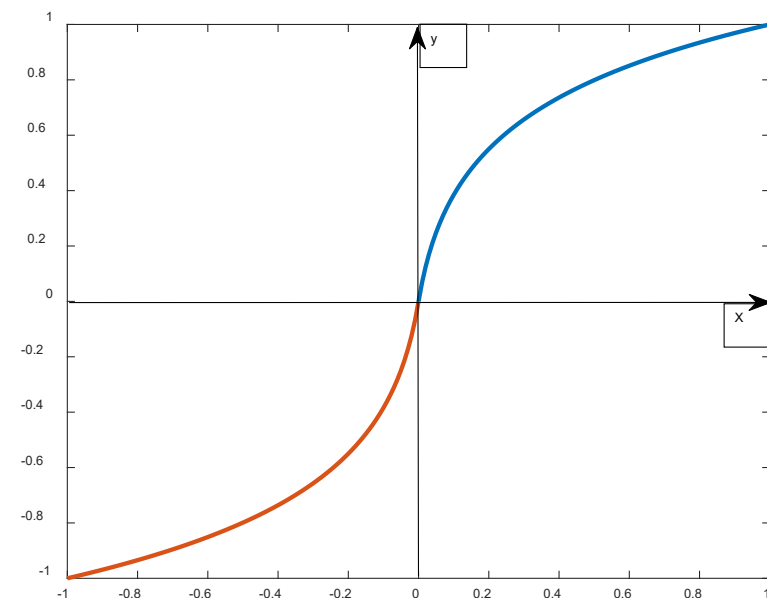
- 有两种广泛应用于语音编码的压缩扩展器.

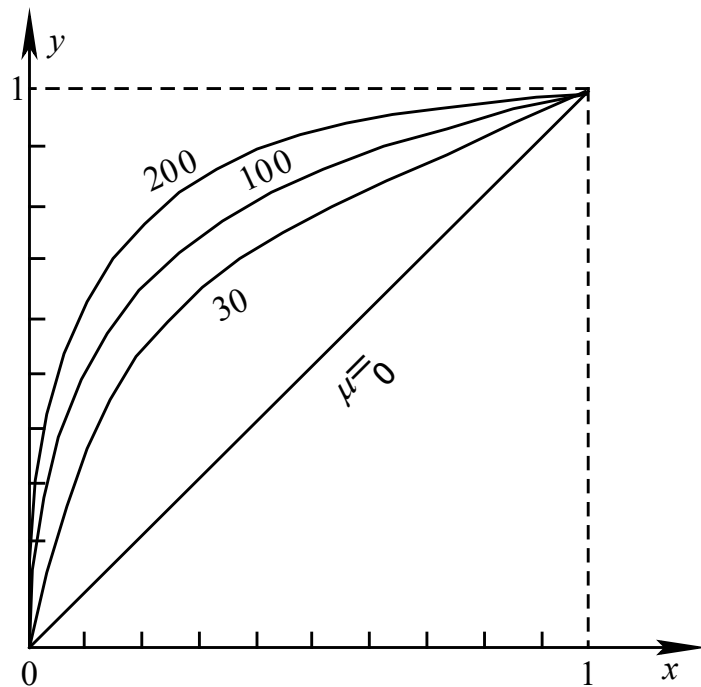
μ -律压缩扩展器和 A -律压缩扩展器

可见压扩特性曲线是奇对称的。

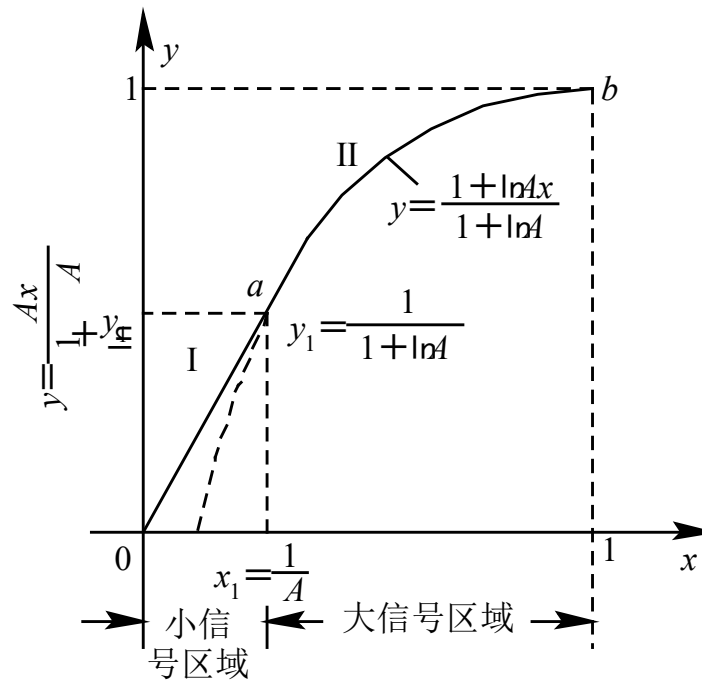
$$g(x) = \frac{\ln(1 + \mu|x|)}{\ln(1 + \mu)} \operatorname{sgn}(x) \quad \mu = 255$$

$$g(x) = \frac{1 + \ln A |x|}{1 + \ln A} \operatorname{sgn}(x) \quad A = 87.56$$





(a)



(b)

对数压缩特性

(a) μ 律; (b) A律



2. PCM编码 (A律)

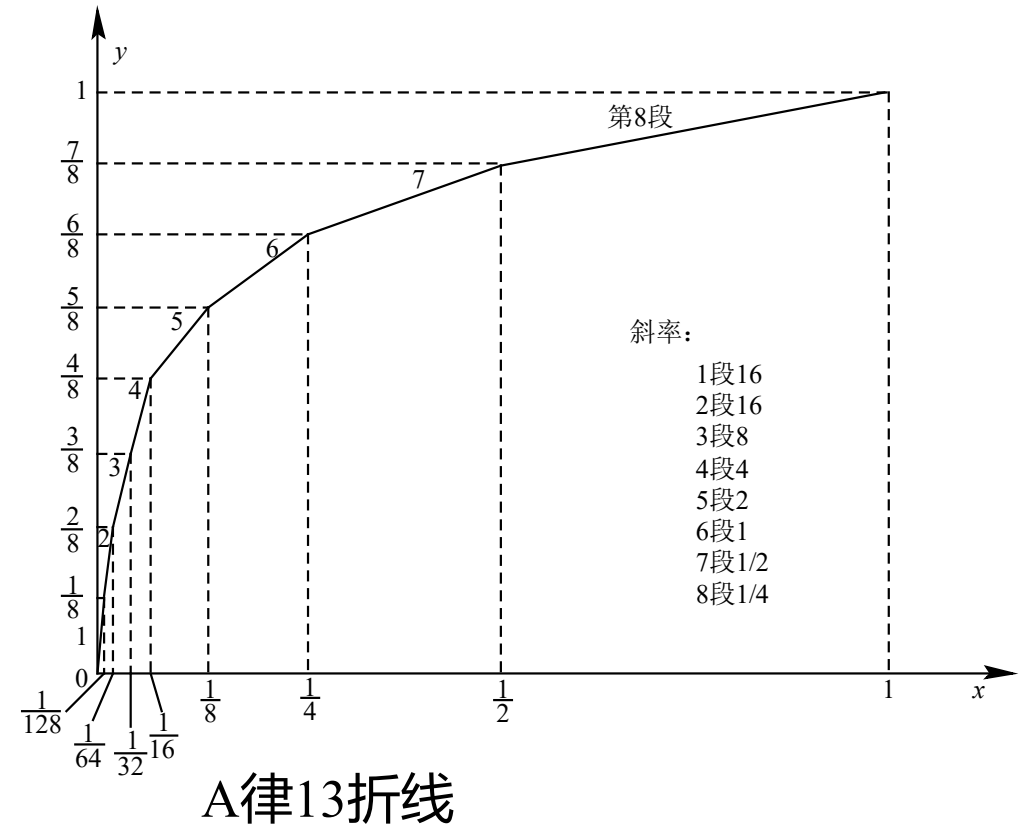
1)、A律13折线压缩特性

实际电路中，抽样，量化，编码是一次完成的。以A律13折线压缩特性为例说明PCM原理

右图中，将信号的值域范围分为了16个量化级。

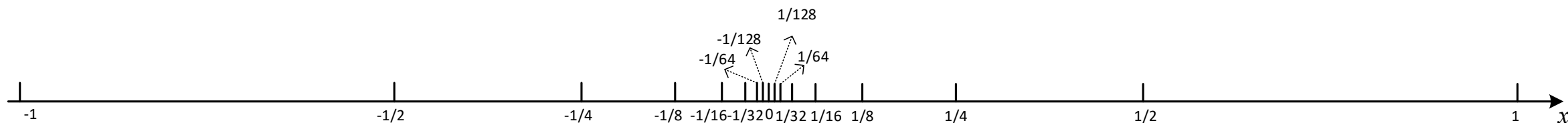
从图中可以看出， x 和 y 的取值范围均是 $[-1,1]$ ，这是因为对量化器的输入和输出进行了幅度归一化。

例：若抽样值的取值范围 $[-5V, 5V]$ ，某抽样值为 $-2.5V$ ，则送入量化器的值为 -0.5 。





下图是A律量化方案。图中， x 表示量化器的输入。该方案将抽样值取值范围（即量化器的输入 x ）归一化为 $[-1,1]$ ，然后将 x 按照图中所示先分成16个非均匀的段，为了保证量化精度，再将每一个段划分为16个均匀量化区间，即相当于共划分了 $16 \times 16 = 256$ 个量化区间，最小的量化区间长度为 $\sigma = \frac{1}{128} \div 16 = \frac{1}{2048}$ ，最大的量化区间长度为 $64\sigma = \frac{1}{2} \div 16 = \frac{1}{32}$ 。256个量化区间（值）用二进制等长编码表示，需要8bit。该方案中，量化值（量化器的输出）为每一个量化区间的**中点值**。

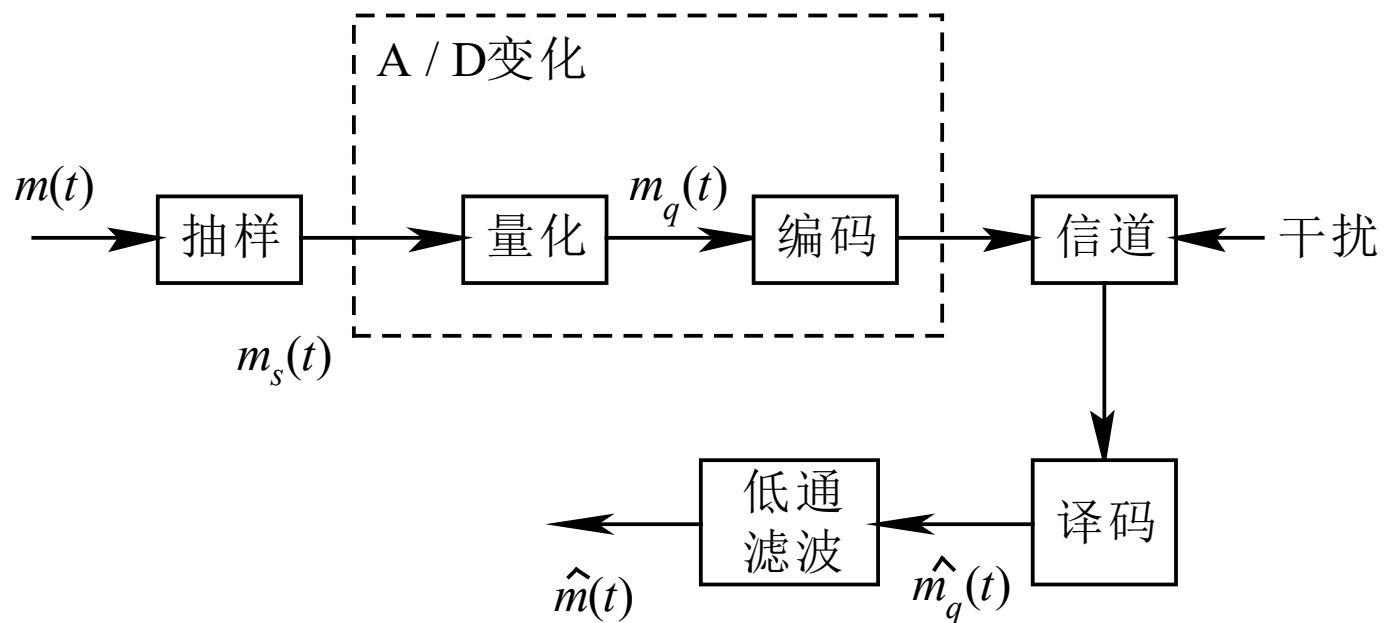


A律量化方案



2) PCM 编码和译码

把量化后的信号电平值变换成二进制码组的过程称为编码，其逆过程称为解码或译码。





首先需要确定用哪种编码方案

表：常用二进制码型

样值脉冲极性	格雷二进制	自然二进制	折叠二进制	量化级序号
正极性部分	1000	1111	1111	15
	1001	1110	1110	14
	1011	1101	1101	13
	1010	1100	1100	12
	1110	1011	1011	11
	1111	1010	1010	10
	1101	1001	1001	9
	1100	1000	1000	8
负极性部分	0100	0111	0000	7
	0101	0110	0001	6
	0111	0101	0010	5
	0110	0100	0011	4
	0010	0011	0100	3
	0011	0010	0101	2
	0001	0001	0110	1
	0000	0000	0111	0



在A律13折线编码中，普遍采用8位二进制码，对应应有 $M=2^8=256$ 个量化级，即正、负输入幅度范围内各有128个量化级。这需要将13折线中的每个折线段再均匀划分16个量化级，由于每个段落长度不均匀，因此正或负输入的8个段落被划分成 $8 \times 16 = 128$ 个不均匀的量化级。按折叠二进制码的码型，这8位码的安排如下：

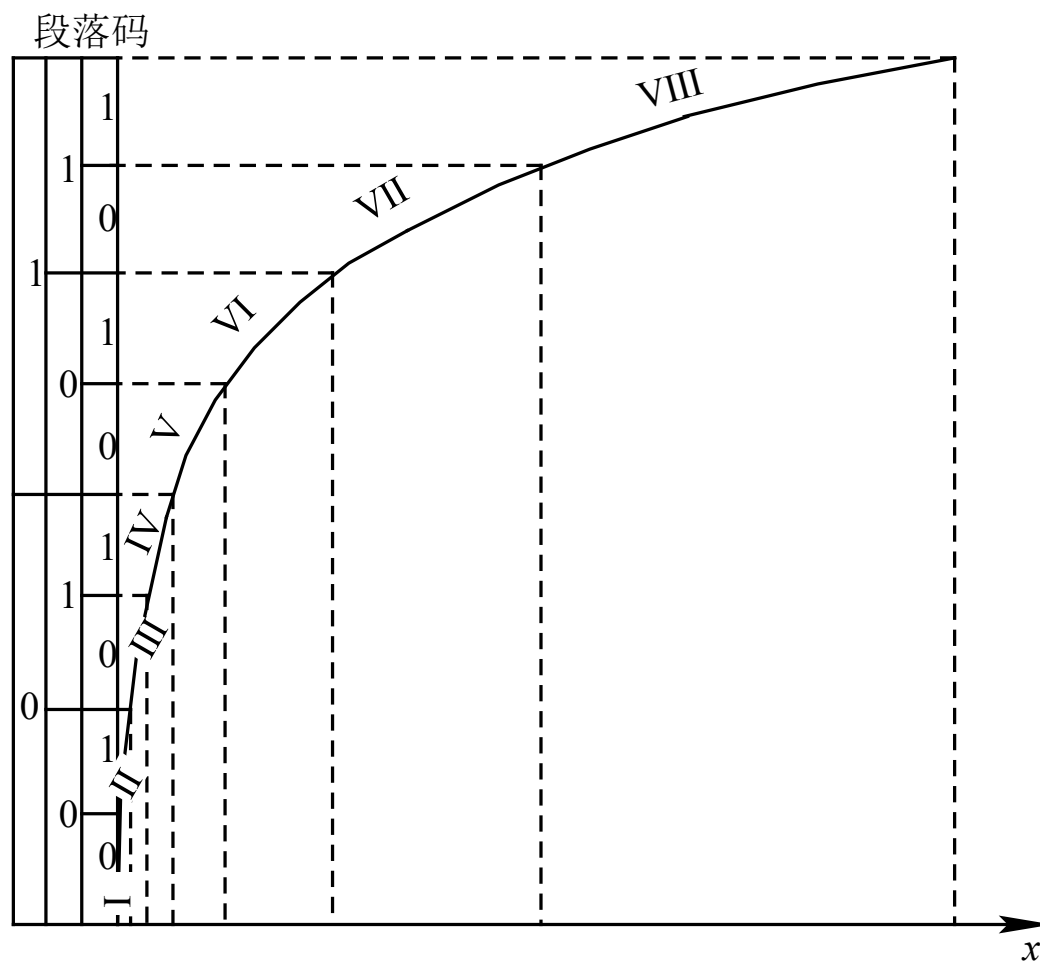
极性码	段落码	段内码
C_1	$C_2C_3C_4$	$C_5C_6C_7C_8$

其中第1位码 C_1 的数值“1”或“0”分别表示信号的正、负极性，称为极性码。



- 第2至第4位码 $C_2C_3C_4$ 为段落码，表示信号绝对值处在哪个段落，3位码的8种可能状态分别代表8个段落的起点电平。但应注意，段落码的每一位不表示固定的电平，只是用它们的不同排列码组表示各段的起始电平。

段落序号	段落码		
	C_2	C_3	C_4
8	1	1	1
7	1	1	0
6	1	0	1
5	1	0	0
4	0	1	1
3	0	1	0
2	0	0	1
1	0	0	0



段落码与各段的关系



第5至第8位码 **$C_5C_6C_7C_8$** 为**段内码**，这4位码的16种可能状态用来分别代表每一段落内的16个均匀划分的量化级。段内码与16个量化级之间的关系如表所示。

电平序号	段内码	电平序号	段内码
	$C_5C_6C_7C_8$		$C_5C_6C_7C_8$
15	1 1 1 1	7	0 1 1 1
14	1 1 1 0	6	0 1 1 0
13	1 1 0 1	5	0 1 1 0
12	1 1 0 0	4	0 1 0 1
11	1 0 1 1	3	0 0 1 1
10	1 0 1 0	2	0 0 1 0
9	1 0 0 1	1	0 0 0 1
8	1 0 0 0	0	0 0 0 0



注意：在13折线编码方法中，虽然各段内的16个量化级是均匀的，但因段落长度不等，故不同段落间的量化级是非均匀的。**小信号时，段落短，量化间隔小；反之，量化间隔大。（意味着什么？为什么这样做？）**

- 13折线中的第一、二段最短，只有归一化的 $1/128$ ，再将它等分16小段，每一小段长度为 $1/2048$ 。这是最小的量化级间隔，**它仅有输入信号归一化值的 $1/2048$ ，记为 Δ ，代表一个量化单位**。第八段最长，它是归一化值的 $1/2$ ，将它等分16小段后，每一小段归一化长度为 $1/32$ ，包含64个最小量化间隔，记为 64Δ 。
- 如果以非均匀量化时的最小量化间隔 $\Delta=1/2048$ 作为输入x轴的单位，那么各段的起点电平分别是0、16、32、64、128、256、512、1024个量化单位



13 折线幅度码及其对应电平

量化段序号 $i=1\sim 8$	电平范围 (Δ)	段落码			段落起始 电平 $I_n(\Delta)$	量化间隔 $\Delta(\Delta)$	段内码对应权值(Δ)			
		M_1	M_2	M_3			M_5	M_6	M_7	M_8
8	1 024~2 048	1	1	1	1 024	64	512	256	128	64
7	512~1 023	1	1	0	512	32	256	128	64	32
6	256~511	1	0	1	256	16	128	64	32	16
5	128~255	1	0	0	128	8	64	32	16	8
4	64~127	0	1	1	64	4	32	16	8	4
3	32~63	0	1	0	32	2	16	8	4	2
2	16~31	0	0	1	16	1	8	4	2	1
1	0~15	0	0	0	0	1	8	4	2	1

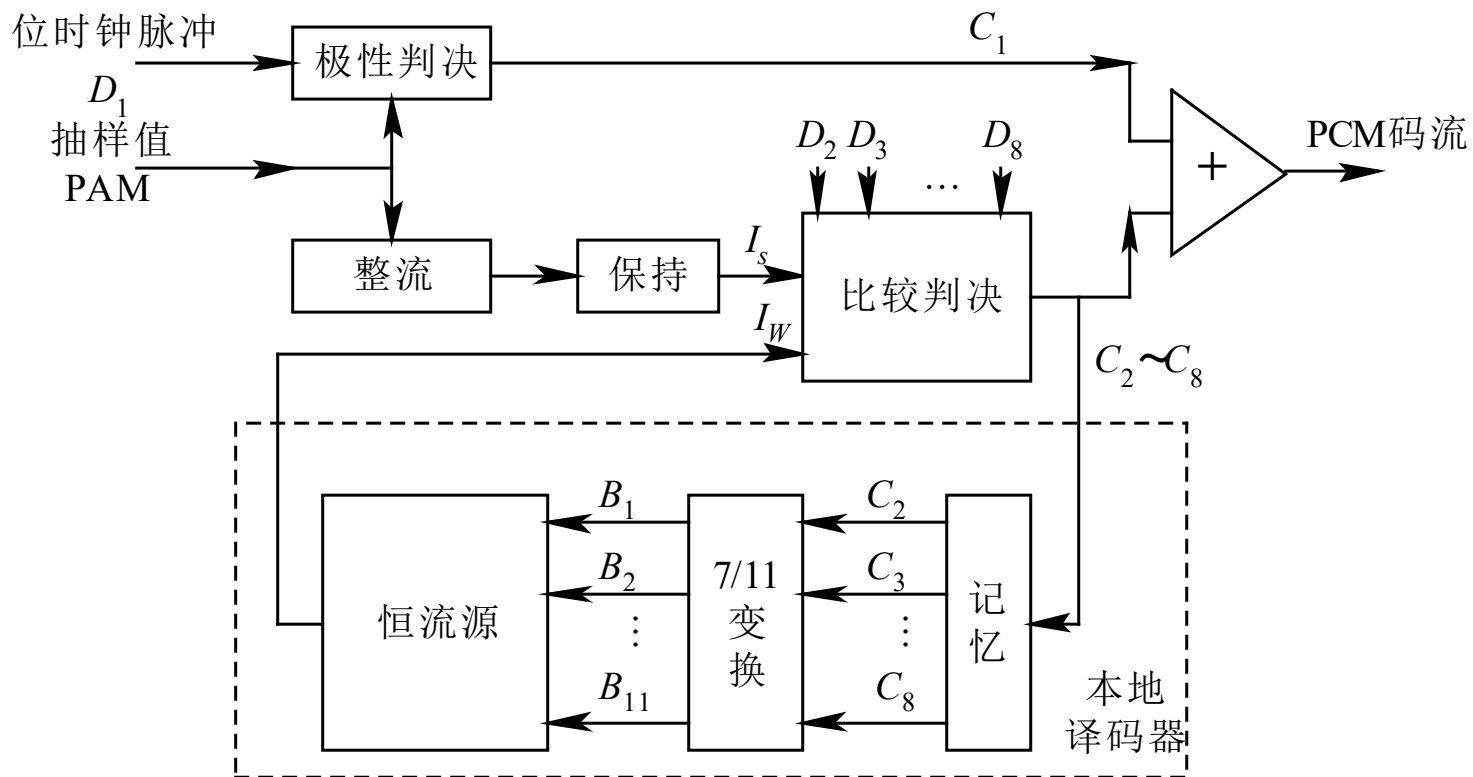


- 假设以非均匀量化时的最小量化间隔 $\Delta=1/2048$ 作为均匀量化的量化间隔，那么从13折线的第一段到第八段的各段所包含的均匀量化级数分别为16、16、32、64、128、256、512、1024，**总共有2048个均匀量化级(11位)**，**而非均匀量化只有128个量化级(7位)**。
- 按照二进制编码位数 v 与量化级数 L 的关系： $L = 2^v$ ，均匀量化需要编**11位码**，而非均匀量化只要编**7位码**。**通常把按非均匀量化特性的编码称为非线性编码；按均匀量化特性的编码称为线性编码。**
- 可见，**在保证小信号时的量化间隔相同的条件下，7位非线性编码与11位线性编码等效。**由于非线性编码的码位数减少，因此设备简化，**信息传输速率减小，所需带宽降低（第八章讲解原因）。**



• 编码

采用逐次比较的编码方法。





例：设输入信号抽样值 $I_s = +1260\Delta$ （ Δ 为一个量化单位，表示输入信号归一化值的 $1/2048$ ），采用逐次比较型编码器，按A律13折线编成8位码 $C_1C_2C_3C_4C_5C_6C_7C_8$ 。

解 编码过程如下：

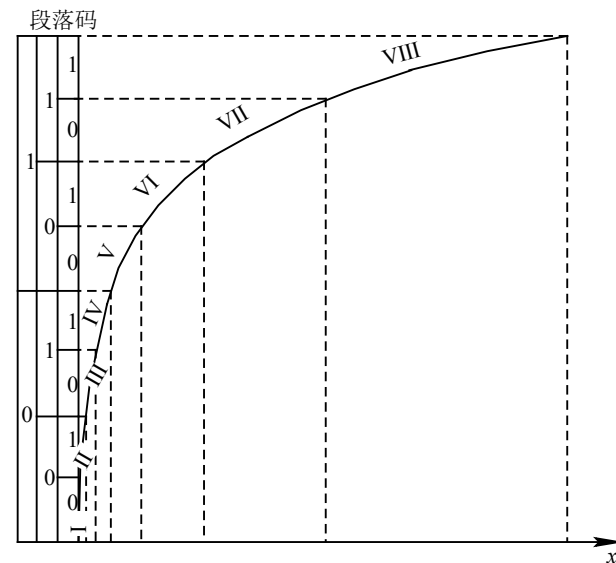
（1）确定极性码 C_1 ：由于输入信号抽样值 I_s 为正，故极性码 $C_1=1$ 。



(2) 确定段落码 $C_2C_3C_4$:

思考：逐次比较的原则？

二分法



由右图可知，段落码 C_2 是用来表示输入信号抽样值 I_s 处于13折线8个段落中的前四段还是后四段，故确定 C_2 的标准电流应选为

$$I_w = 128\Delta$$



C_3 是用来进一步确定 I_s 处于5~6段还是7~8段，故确定 C_3 的标准电流应选为

$$I_W=512\Delta$$

第二次比较结果为 $I_s > I_W$ ，故 $C_3=1$ ，说明 I_s 处于7~8段。

同理，确定 C_4 的标准电流应选为

$$I_W=1024\Delta$$

第三次比较结果为 $I_s > I_W$ ，所以 $C_4=1$ ，说明 I_s 处于第8段。

经过以上三次比较得段落码 $C_2C_3C_4$ 为“111”， I_s 处于第8段，起始电平为 1024Δ 。



(3) 确定段内码C5C6C7C8: 段内码是在已知输入信号抽样值 I_s 所处段落的基础上, 进一步表示 I_s 在该段落的哪一量化级 (量化间隔)。参看表可知, 第8段的16个量化间隔均为 $\Delta_8=64\Delta$, 故确定C5的标准电流 (取中间) 应选为

$$I_w = \text{段落起始电平} + 8 \times (\text{量化间隔})$$

$$= 1024 + 8 \times 64 = 1536\Delta$$



第四次比较结果为 $I_s < I_W$ ，故 $C_5=0$ ，可知 I_s 处于前8级（0~7量化间隔）。

同理，确定 C_6 的标准电流为

$$I_W = 1024 + 4 \times 64 = 1280 \Delta$$

第五次比较结果为 $I_s > I_W$ ，故 $C_6=0$ ，表示 I_s 处于前4级（0~4量化间隔）。



确定 C_7 的标准电流为

$$I_W = 1024 + 2 \times 64 = 1152\Delta$$

第六次比较结果为 $I_s > I_W$ ，故 $C_7=1$ ，表示 I_s 处于2~3量化间隔。

最后，确定 C_8 的标准电流为

$$I_W = 1024 + 3 \times 64 = 1216\Delta \quad 1152\Delta + 1 \times 64\Delta = 1216\Delta$$

第七次比较结果为 $I_s > I_W$ ，故 $C_8=1$ ，表示 I_s 处于序号为3的量化间隔。原为 $+1260\Delta$



• 量化误差:

量化电平为量化区间的中点，故抽样值 $I_s = +1260\Delta$

对应的量化电平 = $1024 + 3 \times 64 + 64/2 = 1248\Delta$

量化误差:

$$1248 - 1260 = -12\Delta \rightarrow |-12\Delta| < 64\Delta/2$$

即量化误差小于量化间隔的一半。



练习题：若已知一个模拟信源的输出信号的动态范围为 $[-5V, +5V]$ ，现将该信号进行抽样，设某一个抽样值为 $-3.46V$ ，请问将该信号进行PCM编码所得的码字是什么？译码后的量化误差是多少？

解： $3.46 * 2048 / 5 = 1417\Delta > 1024\Delta$ ，故 $C_2C_3C_4 = 111$

$(1417 - 1024) / 64 = 6 \sim 9$ ，故 $C_5C_6C_7C_8 = 0110$ ，信号为“-”，
 $C_1 = 0$

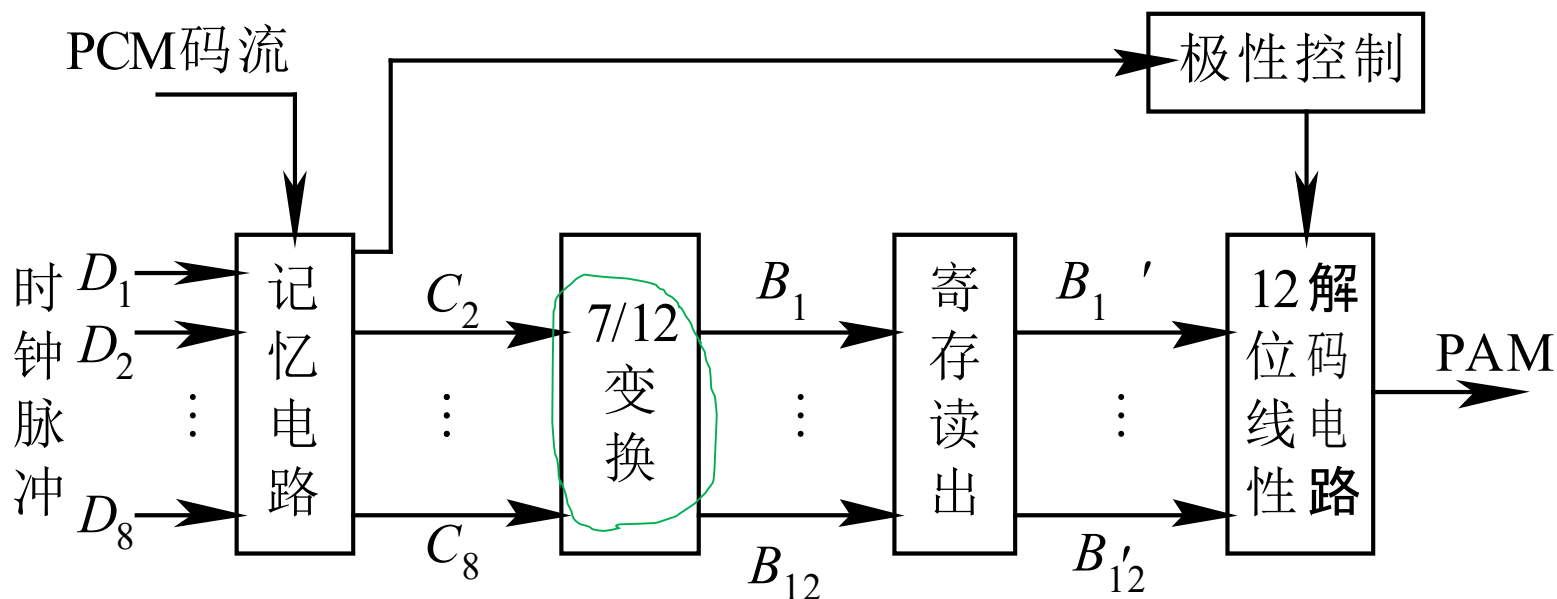
编码为：01110110

量化误差为 $1024 + 6 * 64 + 64 / 2 - 1417 = 23\Delta$



• 译码

译码的作用是把收到的PCM信号还原成相应的PAM样值信号，即进行D/A变换。



A律13折线译码器原理框图



A律13折线非线性码与线性码间的关系

量化 段序 号	段落 标志	非线性码(幅度码)						线性码(幅度码)											
		起始电 平(Δ)	段落码 $M_2M_3M_4$	段内码的权值(Δ)				B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}	B_{11}	B_{12}^*
				M_5	M_6	M_7	M_8	1 024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1	$\Delta/2$
8	C_8	1 024	1 1 1	512	256	128	64	1	M_5	M_6	M_7	M_8	1*	0	0	0	0	0	0
7	C_7	512	1 1 0	256	128	64	32	0	1	M_5	M_6	M_7	M_8	1*	0	0	0	0	0
6	C_6	256	1 0 1	128	64	32	16	0	0	1	M_5	M_6	M_7	M_8	1*	0	0	0	0
5	C_5	128	1 0 0	64	32	16	8	0	0	0	1	M_5	M_6	M_7	M_8	1*	0	0	0
4	C_4	64	0 1 1	32	16	8	4	0	0	0	0	1	M_5	M_6	M_7	M_8	1*	0	0
3	C_3	32	0 1 0	16	8	4	2	0	0	0	0	0	1	M_5	M_6	M_7	M_8	1*	0
2	C_2	16	0 0 1	8	4	2	1	0	0	0	0	0	0	1	M_5	M_6	M_7	M_8	1*
1	C_1	0	0 0 0	8	4	2	1	0	0	0	0	0	0	0	M_5	M_6	M_7	M_8	1*

注：① $M_5 \sim M_8$ 码以及 $B_1 \sim B_{12}$ 码下面的数值为该码的权值。

② B_{12}^* 与 1* 项为收端解码时 $\Delta/2$ 补差项，在发端编码时，该两项均为零。



无论是均匀量化，还是非均匀量化，若量化级数增加一倍，则量化信噪比会增加 [填空1] dB

正常使用填空题需3.0以上版本雨课堂



已知一模拟信号的动态范围为【-5V, +5V】，对其进行抽样，得抽样值-1.55V。现对该抽样值按照折叠二进制码进行8位PCM编码，所得的码字是 [填空1]，译码输出的量化误差是 [填空2]

正常使用填空题需3.0以上版本雨课堂



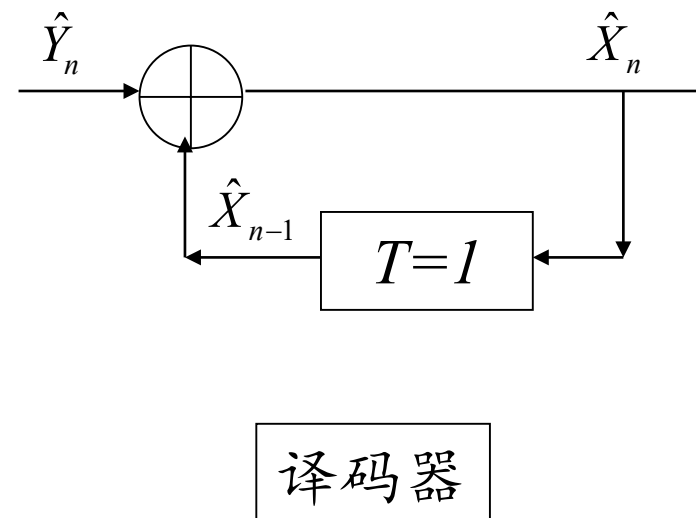
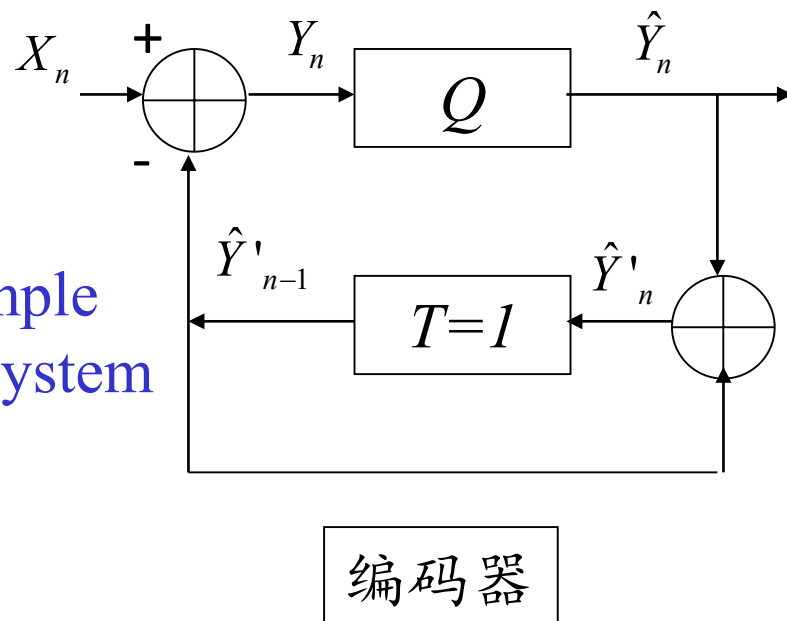
6.2.2 差分脉冲编码调制 (DPCM)

💡 DPCM 原理

差分脉冲编码调制的最简单形式，是对两个相邻抽样值的差值进行量化。由于两个相邻抽样值的互相关性很大，而他们的差值变化很小，因而只需较少的比特数进行量化就可以达到一定程度的性能。这说明DPCM在低比特速率时就可达到PCM的性能。



A Sample DPCM system

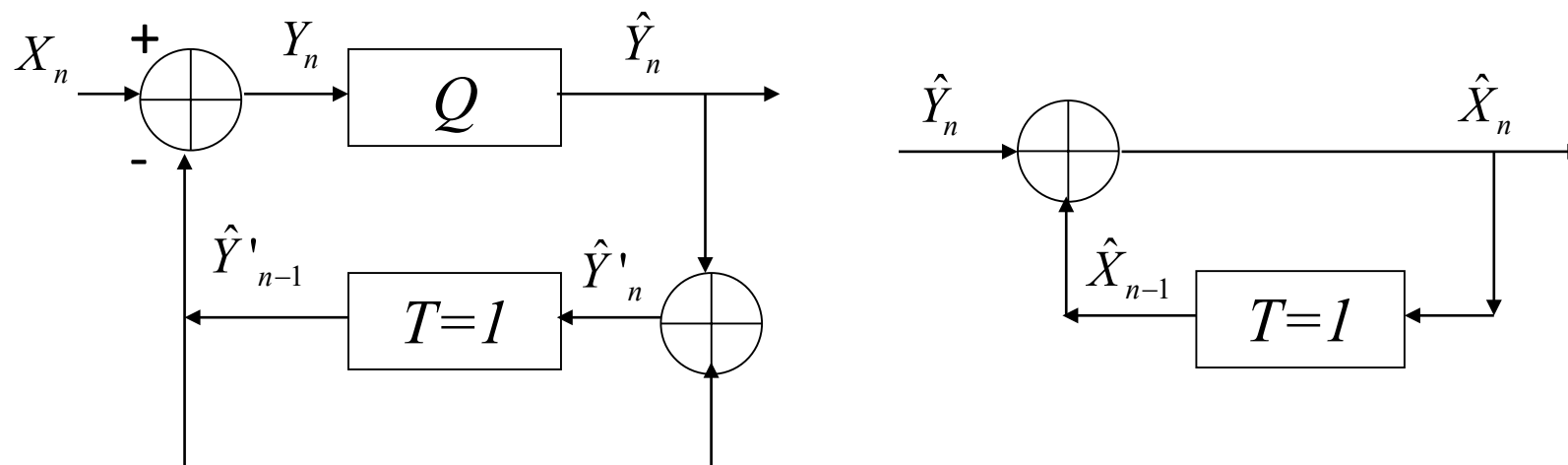


量化器输入为 Y_n

$$Y_n = X_n - \hat{Y}'_{n-1}, \quad \hat{Y}'_n = \hat{Y}_n + \hat{Y}'_{n-1}$$

$$\begin{aligned} \hat{Y}_n - Y_n &= \hat{Y}_n - (X_n - \hat{Y}'_{n-1}) = \hat{Y}_n - X_n + \hat{Y}'_{n-1} \\ &= \hat{Y}'_n - X_n \end{aligned}$$

量化误差



A Sample DPCM system

Encoder

decoder

Y_n 的变化范围远小于 X_n 的变化范围

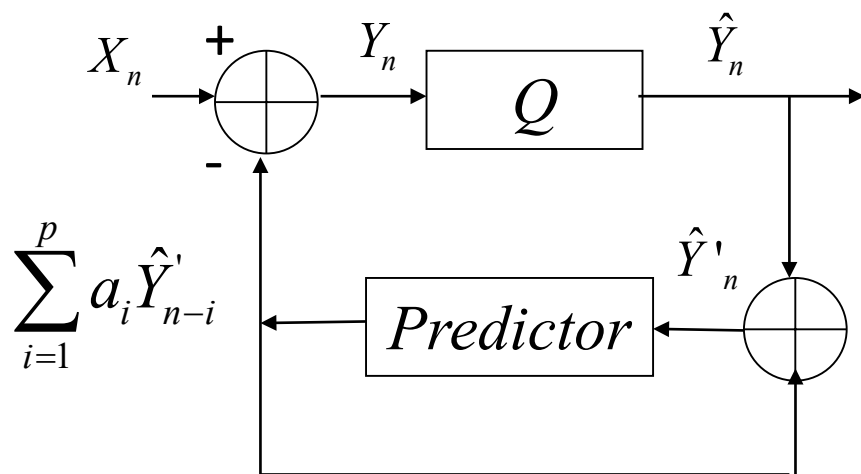
$$\hat{Y}'_n = \hat{Y}_n + \hat{Y}'_{n-1}, \quad \hat{X}_n = \hat{Y}_n + \hat{X}_{n-1}$$

if $\hat{Y}'_{-1} = \hat{X}_{-1} = 0$, then $\hat{Y}'_n = \hat{X}_n$

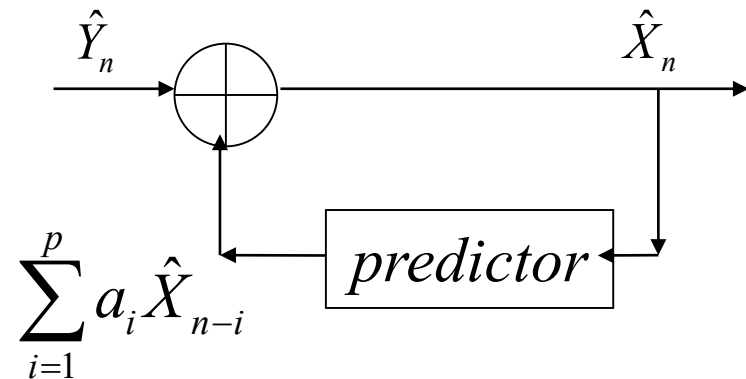
$$\hat{Y}_n - Y_n = \hat{X}_n - X_n$$

Y_n 可由较少的比特数量化

量化误差相等



Encoder



decoder

如何得到 a_i ?

通过选择系数 a_i 使抽样值 X_n 及其预测值之间的均方误差最小。

$$D = E \left[\left(X_n - \sum_{i=1}^p a_i X_{n-i} \right)^2 \right] = R_X(0) - 2 \sum_{i=1}^p a_i R_X(i) + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p a_i a_j R_X(i-j)$$

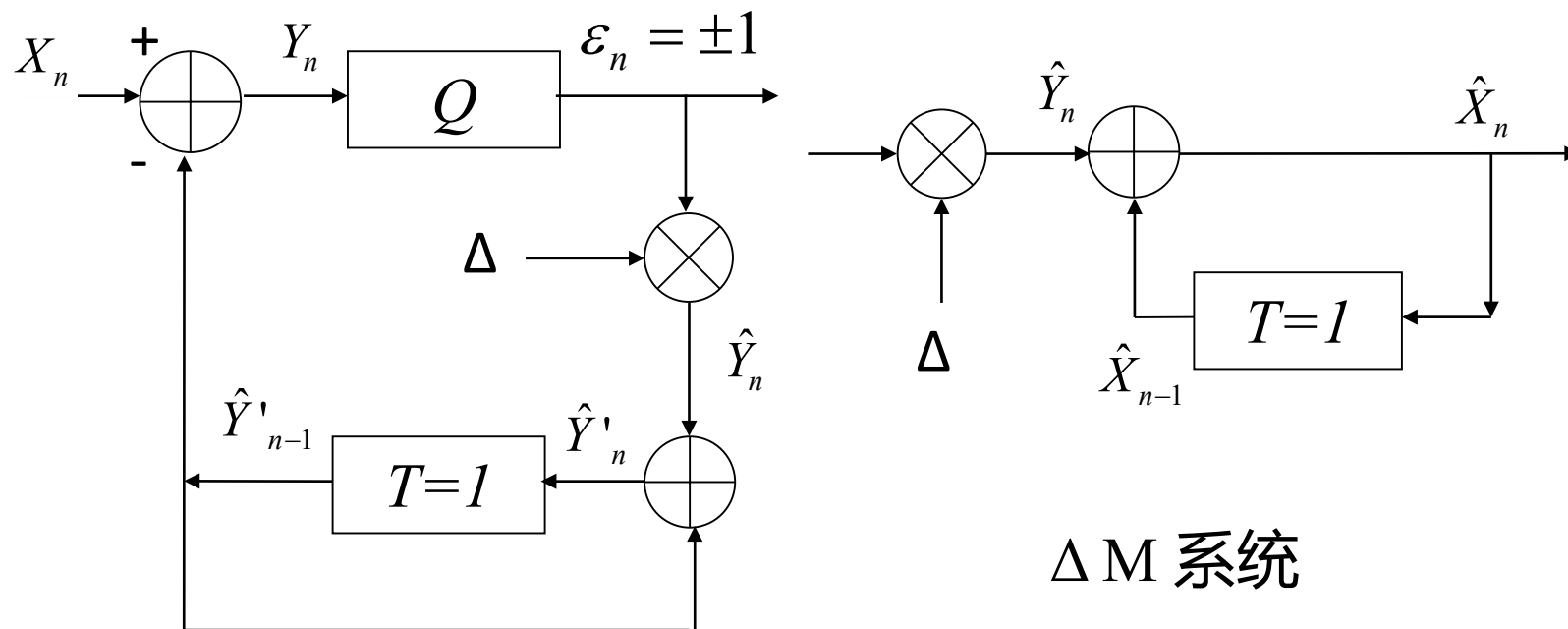
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^p a_i R_X(i-j) = R_X(j) \quad 1 \leq j \leq p$$

Yule-Walker
equations

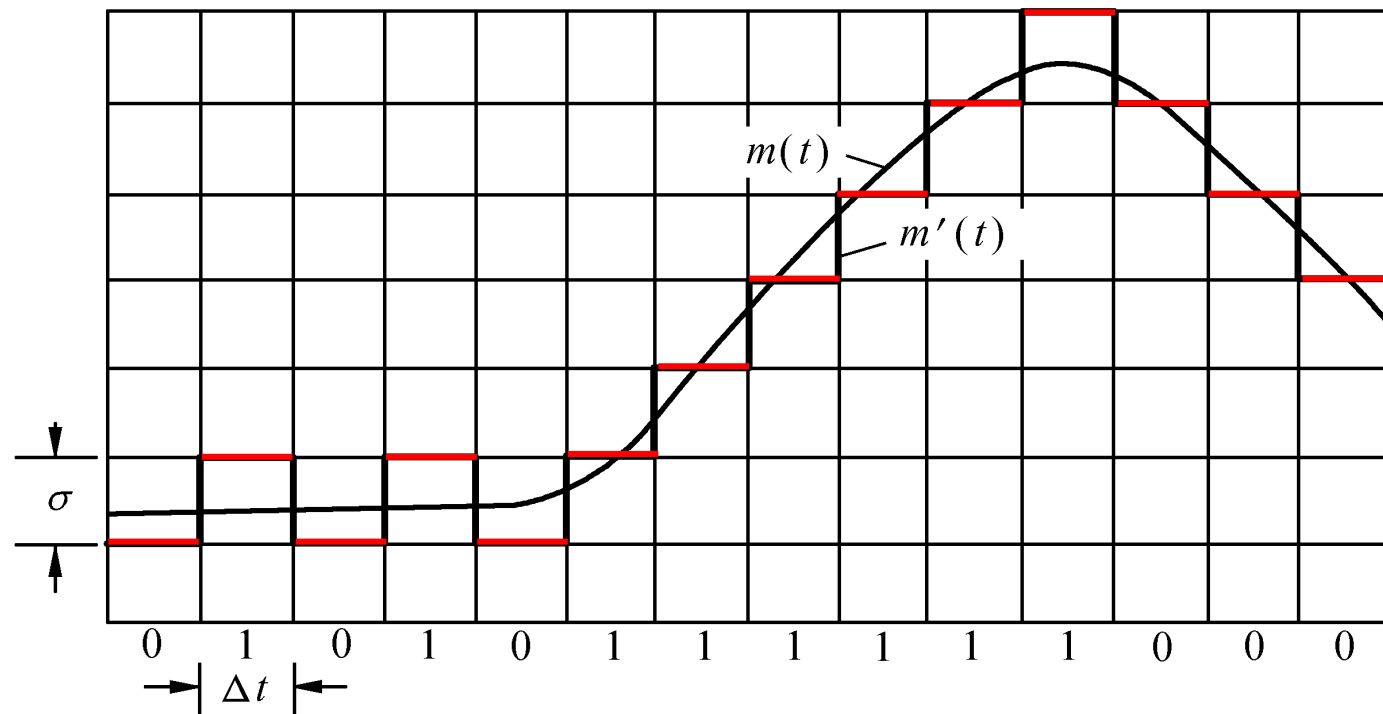


6.2.3 增量调制 (ΔM)

增量调制是简单 DPCM 的一种简化模型。在增量调制中，量化器是幅度为 $\pm \Delta$ 的 1bit（两电平）量化器。



在 ΔM 系统中，抽样率远大于奈氏速率。



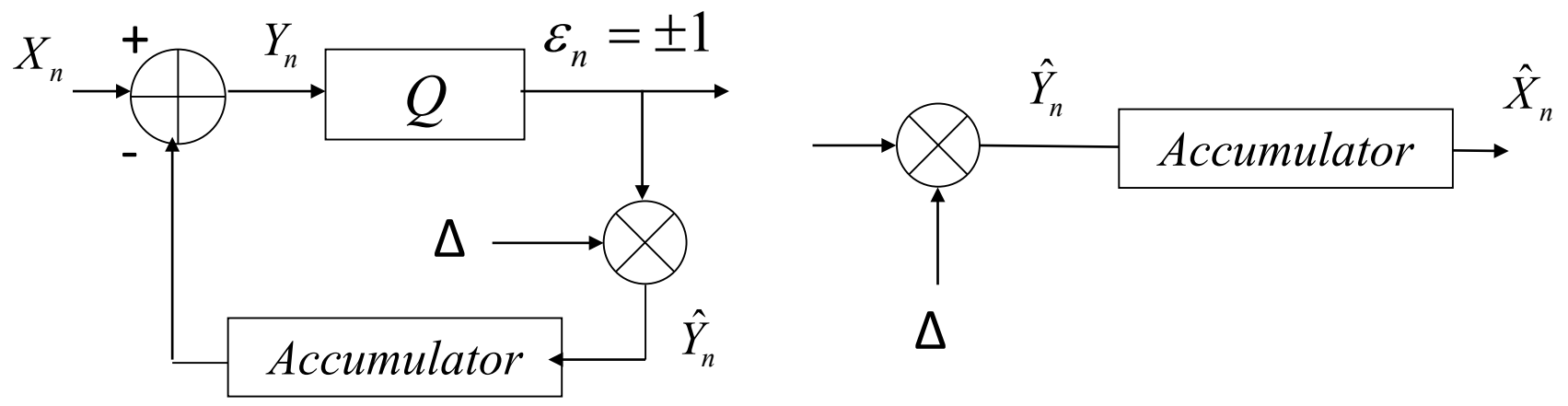
Encoding principle of ΔM

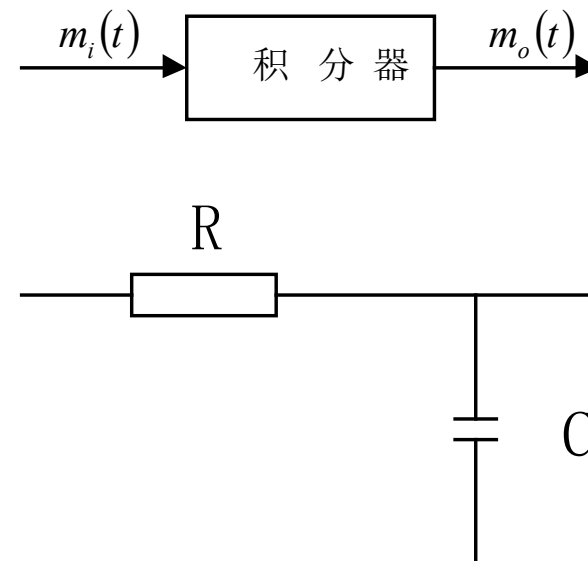
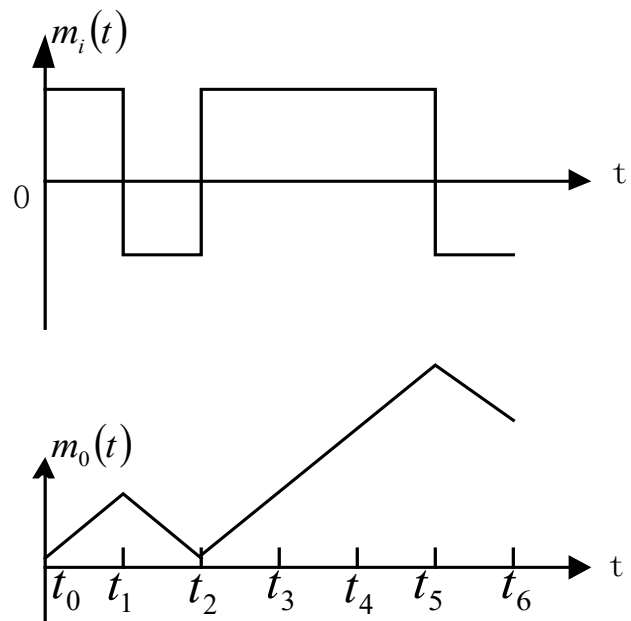


• ΔM 的一个主要优点是系统结构简单。在接收端，对于重构的信号 \hat{X}_n ，具有如下形式

$$\hat{X}_n = \hat{Y}_n + \hat{X}_{n-1} \quad \hat{X}_{-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{X}_n = \sum_{i=0}^n \hat{Y}_i$$

这说明要求得 \hat{X}_n ，只需求得 \hat{Y}_n 的累加和。如果使用脉冲代替抽样值，则累加器变为积分器。





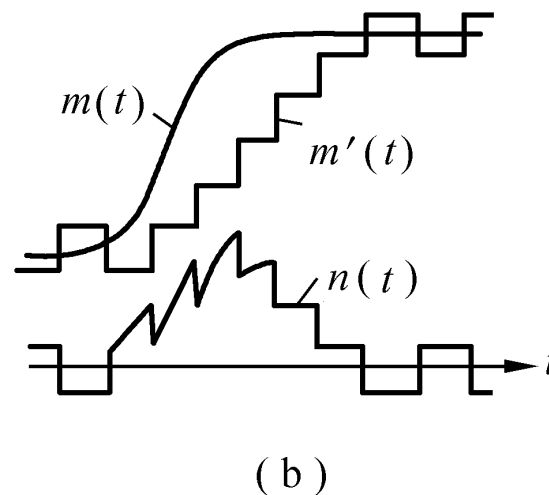
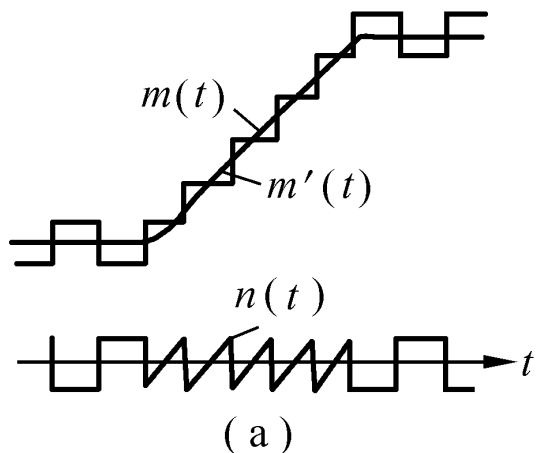
ΔM 译码原理图



增量调制有两种噪声.

1. 一般量化噪声 见 figure (a)

2. 斜率过载失真或过载量化噪声 见 figure (b)



自适应 ΔM

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} K^{\varepsilon_n \times \varepsilon_{n-1}}$$

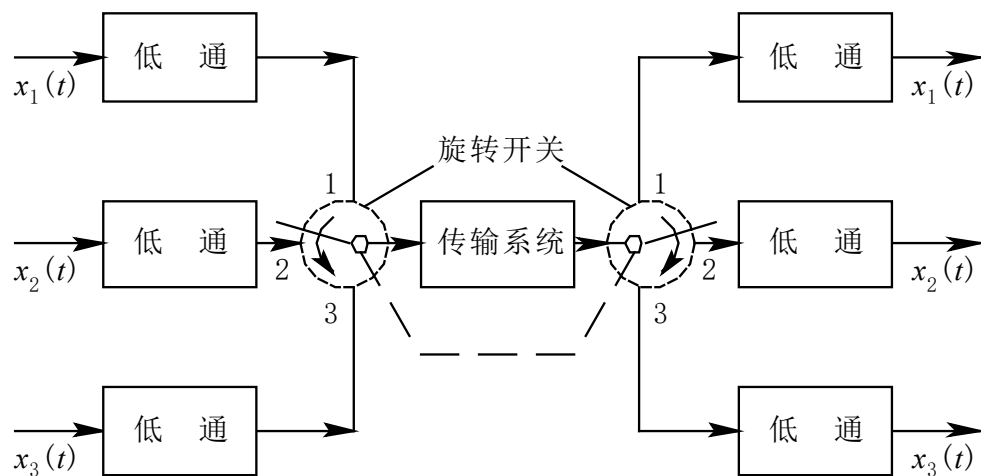


如何保证 ΔM 不发生过载?

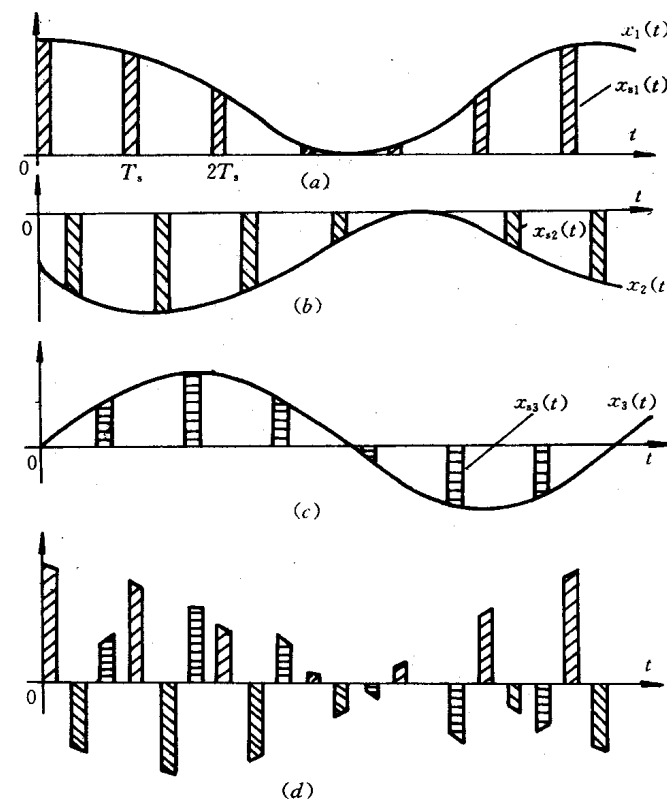
$$\Delta \times f_s \geq m'(t)$$

时分复用与数字复接原理

1、PAM时分复用原理



3路时分复用方框图

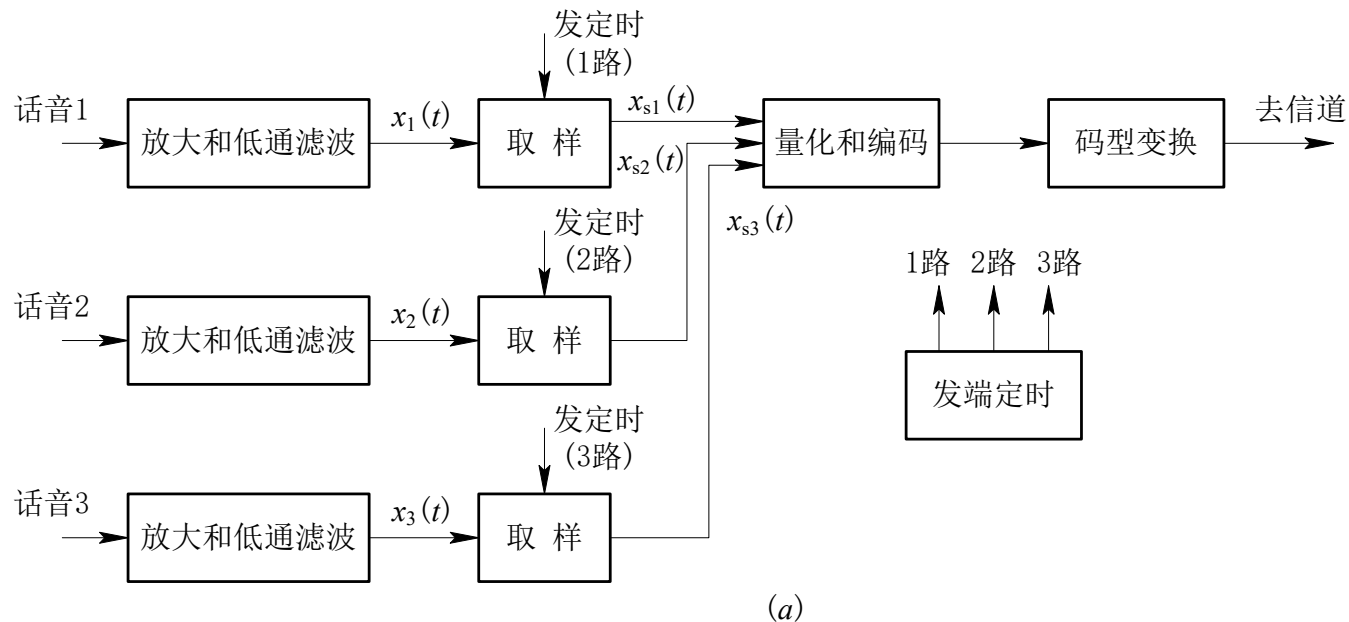


3 路时分复用波形

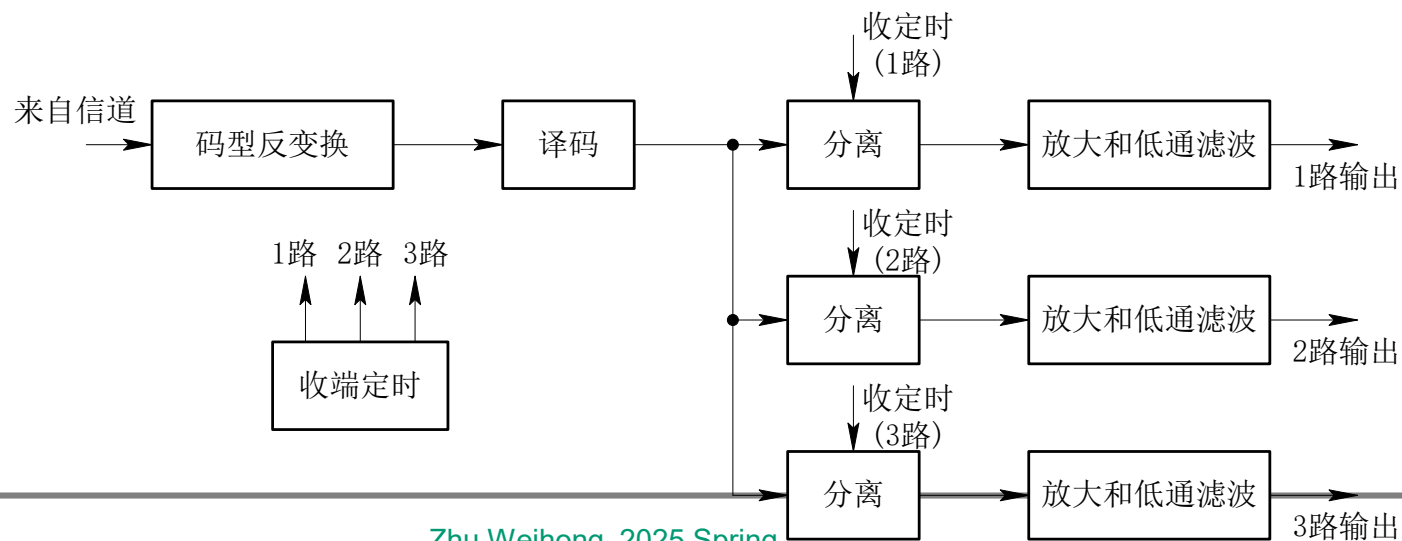
(a) 第 1 路; (b) 第 2 路; (c) 第 3 路; (d) 3路合成的波形



2、时分复用的PCM系统



TDM—PCM方框图





3、 PCM 30/32路典型终端设备介绍

(1) 基本特性:

话路数目: 30

抽样频率: 8 kHz

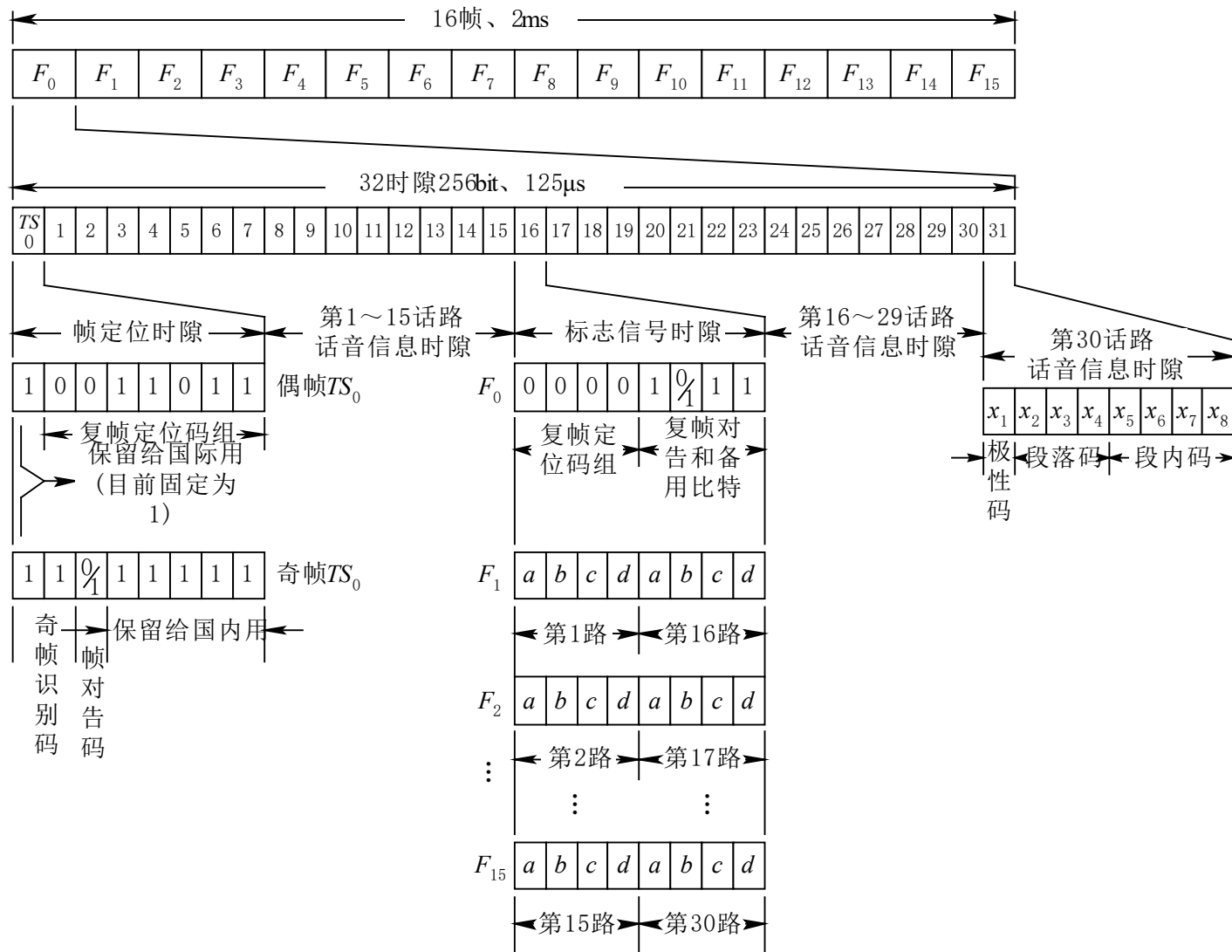
压扩特性: $A=87.6/13$ 折线压扩律, 编码位数 $k=8$, 采用逐次比较型编码器, 其输出为折叠二进制码。

每帧时隙数: 32。

总数码率: $8 \times 32 \times 8\ 000 = 2\ 048\ \text{kb/s}$



(2) 帧与复帧结构





1) 时隙分配。在PCM 30/32路的制式中，抽样周期为 $1/8000=125\mu\text{s}$ ，它被称为一个帧周期，即 $125\mu\text{s}$ 为一帧。一帧内要时分复用32路，每路占用的时隙为 $125/32=3.9\mu\text{s}$ ，称为一个**时隙 (time slot)**。因此一帧有32个时隙，按顺序编号为 TS_0 、 TS_1 、.....、 TS_{31} 。时隙的使用分配为□

① $TS_1\sim TS_{15}$, $TS_{17}\sim TS_{31}$ 为30个话路时隙。 □

② TS_0 为帧同步码，监视码时隙。 □

③ TS_{16} 为信令(振铃、占线、摘机.....等各种标志信号)时隙。



2) **话路比特的安排**。每个话路时隙内要将样值编为8位二进制码，每个码元占 $3.9 \mu\text{s}/8=488 \text{ ns}$ ，称为1比特，编号为1~8。第1比特为极性码，第2~4比特为段落码，第5~8比特为段内码。

3) **TS_0 时隙比特分配**。为了使收发两端严格同步，每帧都要传送一组特定标志的帧同步码组或监视码组。帧同步码组为“**0011011**”，占用偶帧 TS_0 的第2~8码位。第1比特供国际通信用，不使用时发送“1”码。奇帧比特分配为第3位为帧失步告警用，以 A_1 表示。同步时送“0”码，失步时送“1”码。为避免奇帧 TS_0 的第2~8码位出现假同步码组，第2位码规定为监视码，固定为“1”，第4~8位码为国内通信用，目前暂定为“1”。□



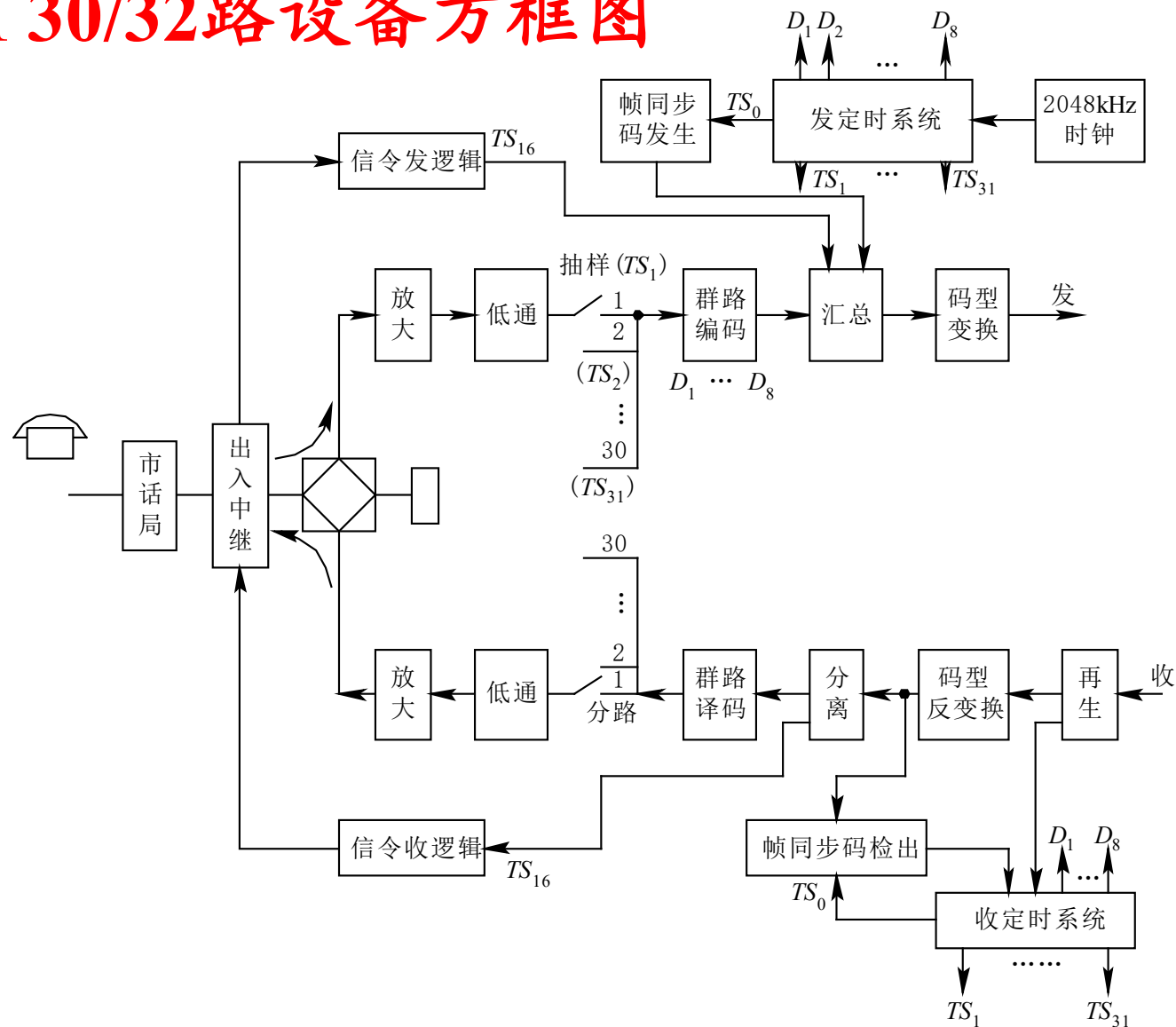
4) TS_{16} 时隙的比特分配。若将 TS_{16} 时隙的码位按时间顺序分配给各话路传送信令，需要用16帧组成一个复帧，分别用 F_0 、 F_1 、..... F_{15} 表示，复帧周期为2ms，复帧频率为500 Hz。复帧中各子帧的 TS_{16} 分配为□

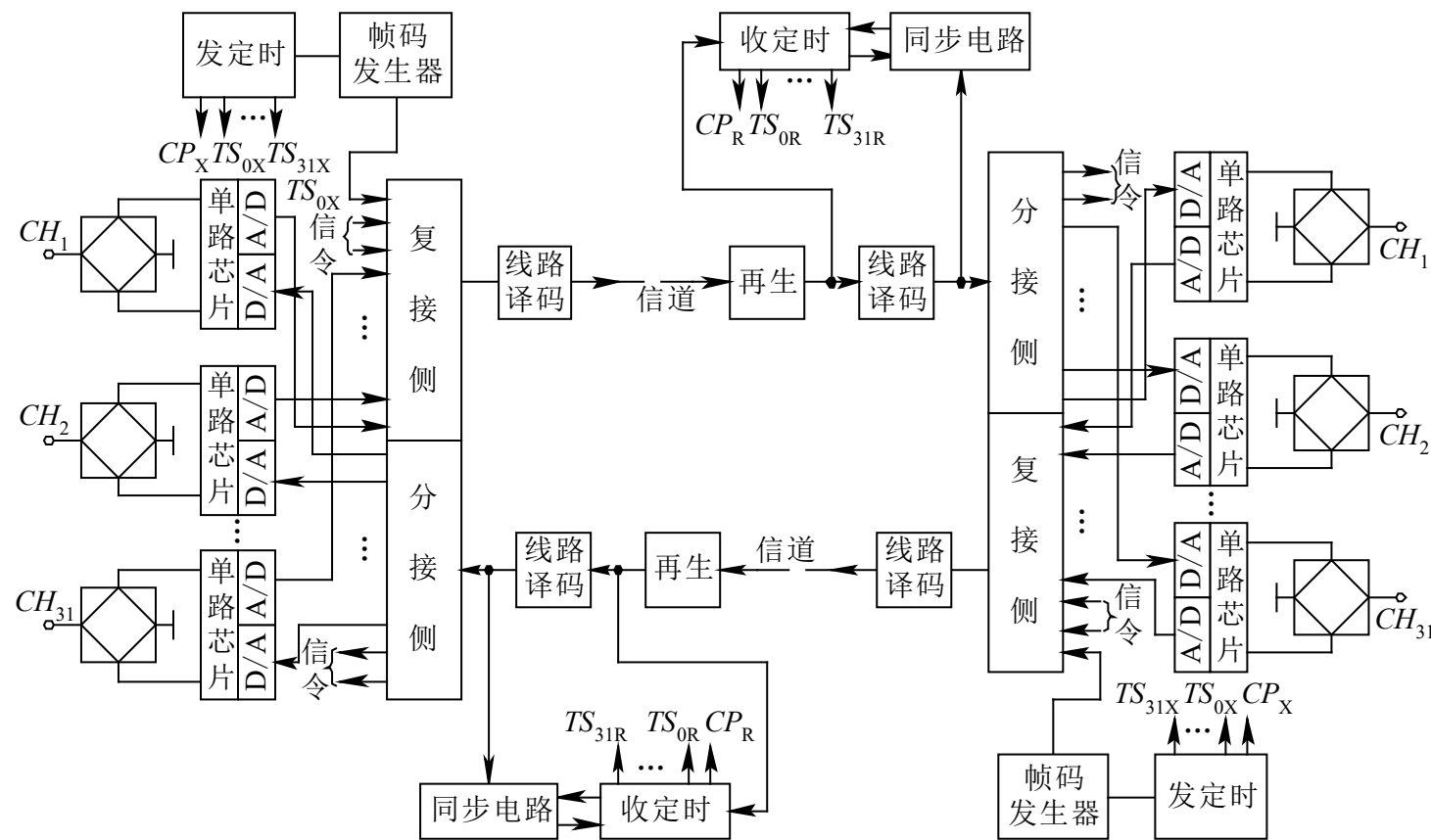
① F_0 帧：1~4码位传送复帧同步信号“0000”；第6码位传送复帧失步对局告警信号 A_2 ，同步为“0”，失步为“1”。5、7、8码位传送“1”码。□

② $F_1 \sim F_{15}$ 各帧的 TS_{16} 前4比特传1~15话路信令信号，后4比特传16~30话路的信令信号。



(3). PCM 30/32路设备方框图

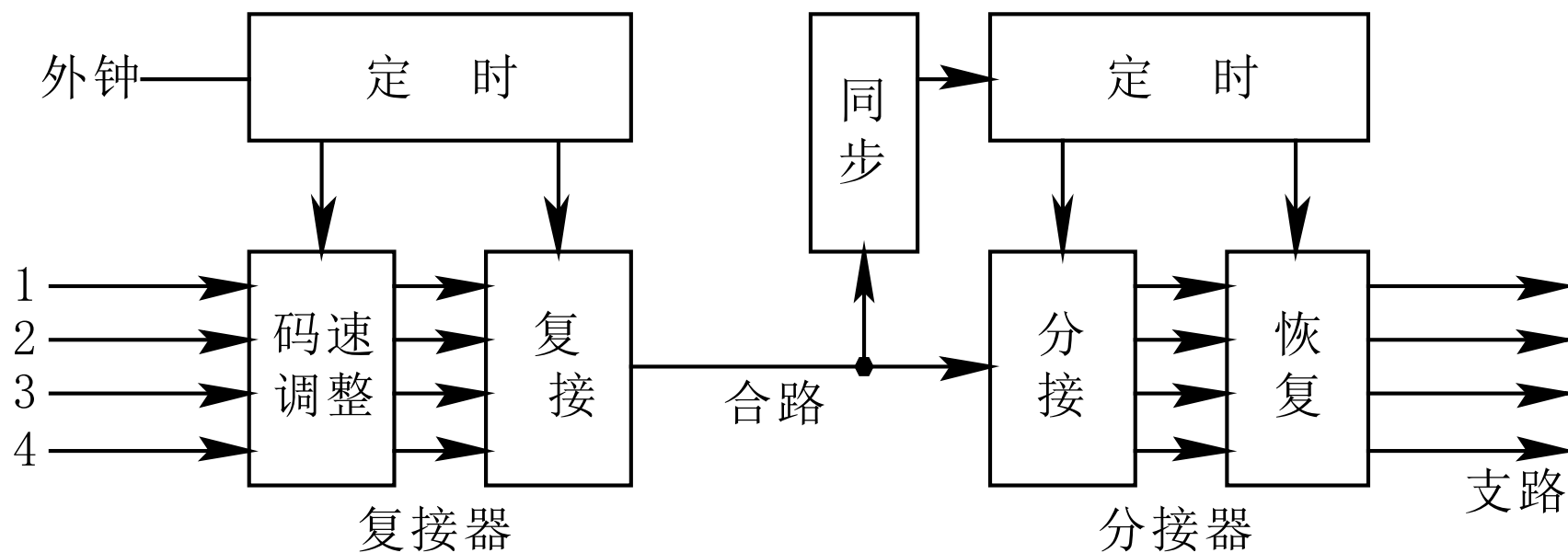




单路编译码片构成的PCM30/32路方框图



数字复接技术

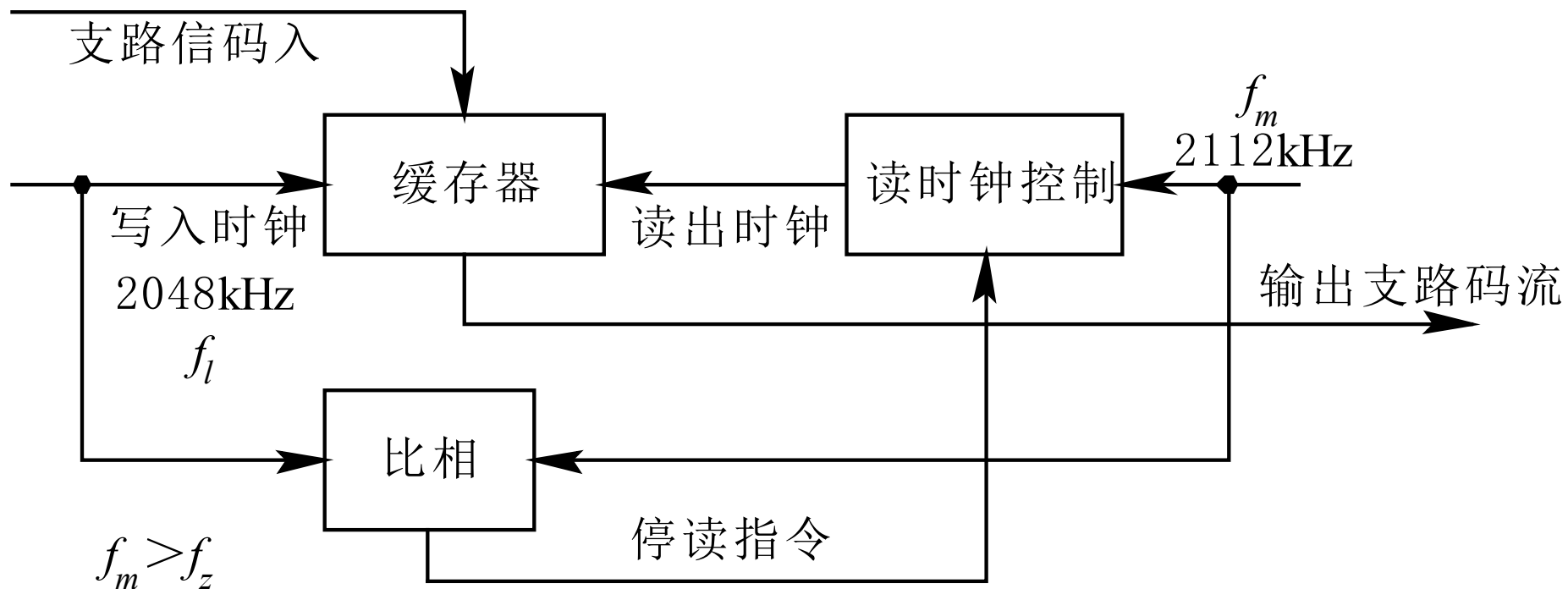


数字复接系统方框图

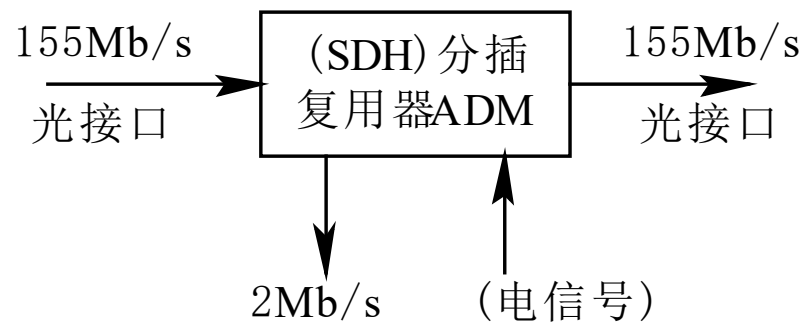
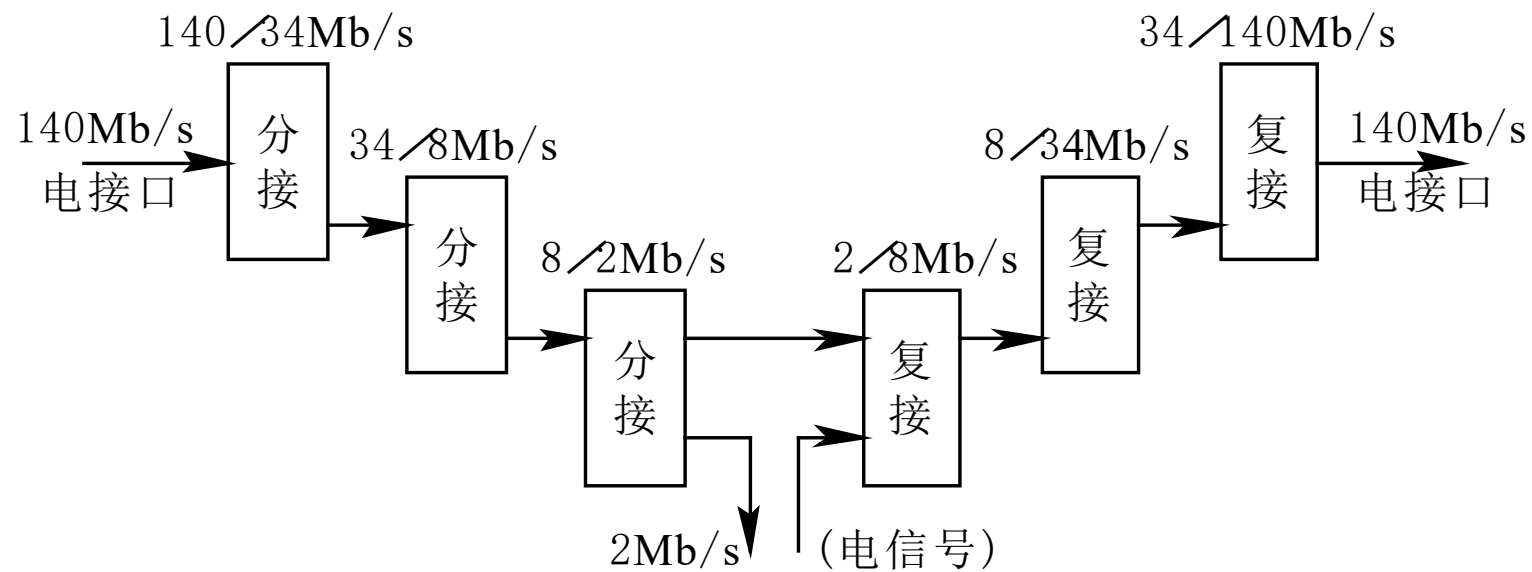


复接等级和速率列表表

地区	一次群(基群)	二次群	三次群		四次群	五次群
日本	24 路	96 路(24×4)	672 路(69×7)	480 路(96×5)	1 440 路 (480×3)	
北美	1 544 kb/s	6 312 kb/s	44 736 kb/s	3 206 kb/s	97 728 kb/s	
中国	30 路	120 路(30×4)	480 路(120×4)		1 920 路 (480×4)	7 680 路 (1920×4)
欧洲	2 048 kb/s	8 448 kb/s	34 368 kb/s		139 264 kb/s	564 992 kb/s



正码速调整原理



分插信号流图的比较



Summarizing

- 量化
- PCM编码
- DPCM& ΔM
- 数字复接和时分复用

思考题

1. DPCM和 ΔM 的基本原理是什么？
2. PCM30/32基群的数据速率是多少？如何得到的？



矢量量化

(vector quantization VQ)



一、矢量量化的应用

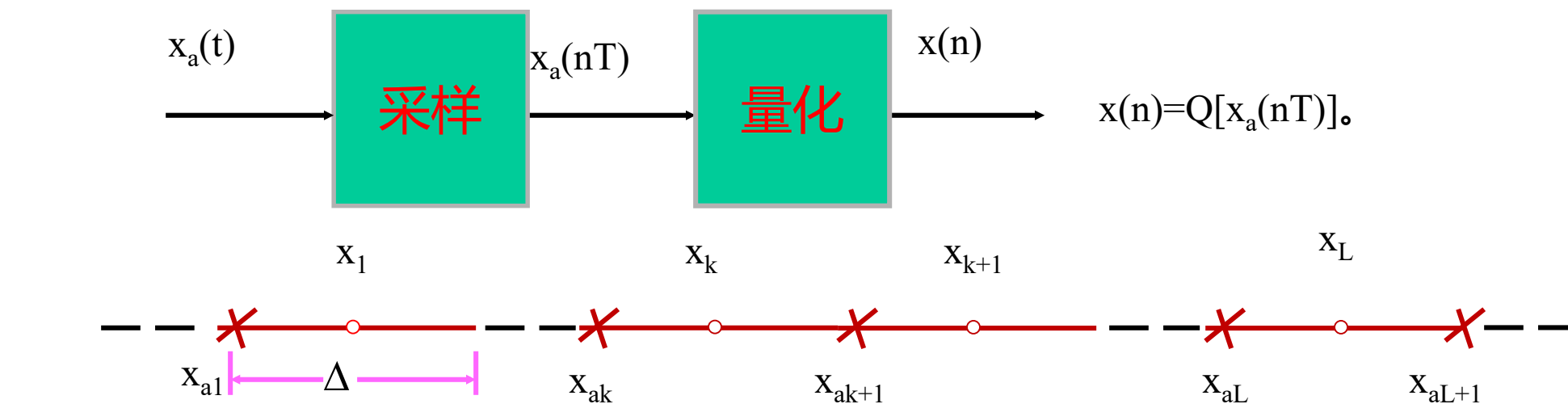
- 矢量量化技术是一种数据压缩和编码技术，矢量量化压缩技术的应用领域非常广阔，如军事部门和气象部门的卫星(或航天飞机)遥感照片的压缩编码和实时传输、雷达图像和军用地图的存储与传输、数字电视和DVD的视频压缩、医学图像的压缩与存储、网络化测试数据的压缩和传输、语音编码、图像识别和语音识别等等。



二、标量量化和矢量量化的区别

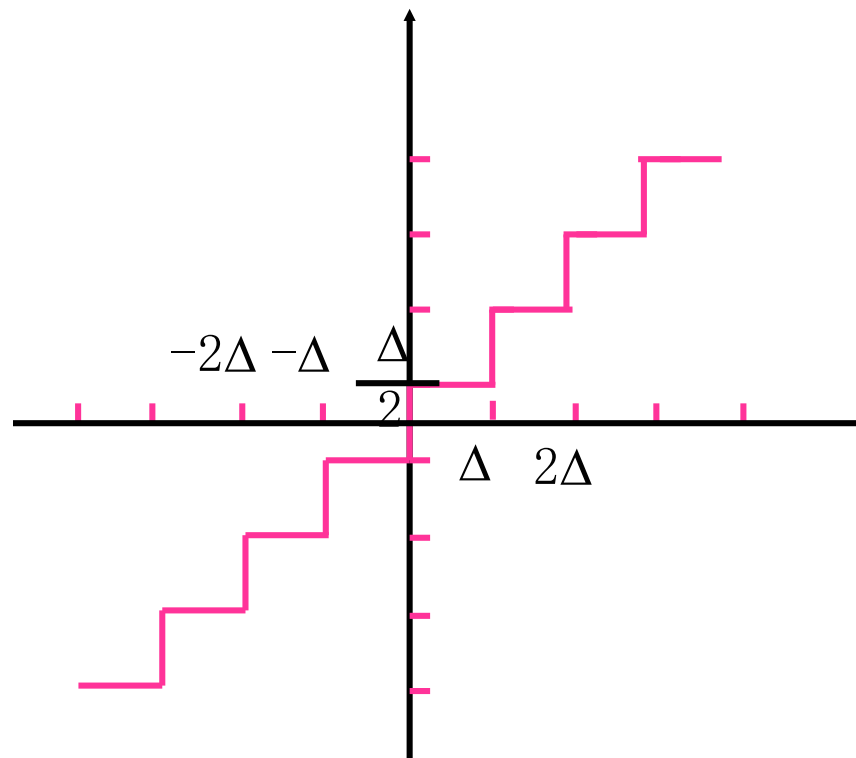
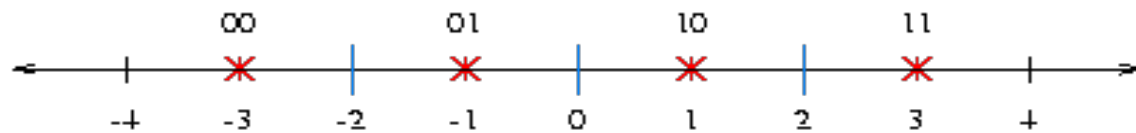
2.1. 标量量化:

整个动态范围被分成若干个小区间，每个小区间有一个代表值，量化时落入小区间的信号值就用这个代表值代替，或者叫被量化为这个代表值。这时的信号量是一维的，所以称为标量量化。





1-dimensional VQ is shown below:



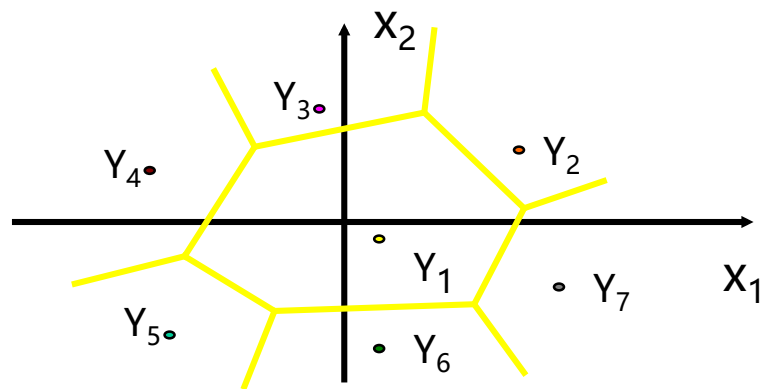
标量量化



2.2. 矢量量化

- 若干个标量数据组成一个矢量，矢量量化是对矢量进行量化，和标量量化一样，它把矢量空间分成若干个小区域，每个小区域寻找一个代表矢量，量化时落入小区域的矢量就用这个代表矢量代替，或者叫做被量化为这个代表矢量。例如，所有可能的二维矢量就构成了一个平面，将平面分成7个小区域。

$$Y_i(x_{i1}, x_{i2}) = Q(X)$$





2.3 举例说明标量量化与矢量量化的区别

- 假设声道滤波器传输函数用4个系数来描述，而且，又假设声道只能为4个可能的形状之一。这意味着只存在4组可能的声道滤波器传输函数。

现在考虑对每一个滤波器系数单独进行标量量化，需要2bit，每一分析帧需要8个比特来进行编码。

如果我们知道只有4种可能的声道形状，与4个可能的声道滤波器系数组成的矢量相对应，若某一个滤波器系数知道了，其它系数就知道了，也就是矢量中的标量值之间是高度相关的，在这种情况下，一个分析帧，只需要一个2bits对4个滤波器系数进行编码，这样降低了所需的比特数。**矢量量化就是利用数据之间的相关性来降低所需的比特率。**



三、 矢量量化的基本原理

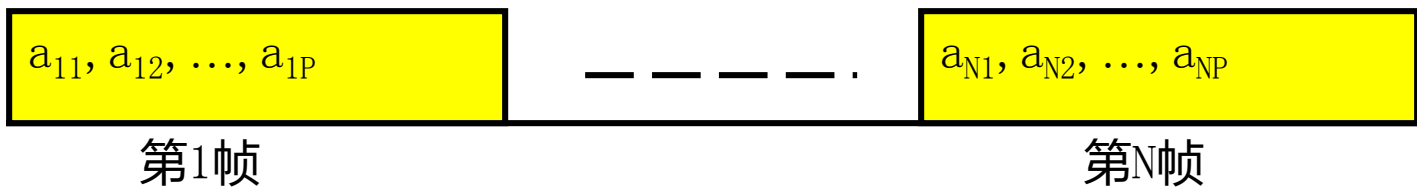
1. 矢量量化的基本原理
2. 矢量量化的关键之处



3.1、矢量量化的基本原理

3.1.1 基础知识

若干个标量数据组成一个矢量，标量的个数就是矢量的维数。如语音信号某一帧中提取的声道参数，共P个， $X_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{iP}\}$ 。则 X_i 是一个P维矢量。设共有N个P维矢量 $X = \{X_1, X_2, \dots, X_N\}$ ，其中第i个矢量为 X_i ， $i=1, 2, \dots, N$ 。类比过来，N个语音帧，每帧中共有P个声道参数，共组成N个P维矢量。



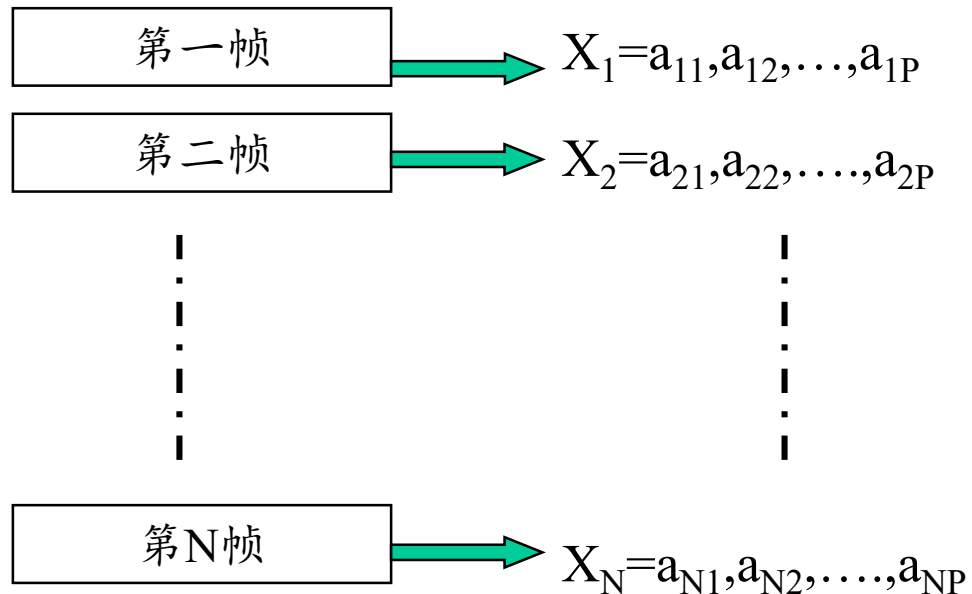


图1 N个矢量，每个矢量的维数为P

矢量量化就是将一个P维随机矢量映射成另一个离散取值的实P维矢量的过程,即

$$Q(X) = Y$$



3.1.2. 矢量空间的划分

- 所有 P 维矢量构成的空间为 R^P ，无遗漏地划分成 J 个互不相交的子空间 R_1, R_2, \dots, R_J , R_j 称为胞腔。在每一个子空间（胞腔） R_j 中找一个代表矢量 Y_j ，则 J 个代表矢量可以组成矢量集为：

$$Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_J\}$$

这样就构成了一个矢量量化器， Y 叫着码本， J 称为码本长度， Y_j 称为码字，有： $Y_j = \{y_{j1}, y_{j2}, \dots, y_{jP}\}$ ， $j=1, 2, \dots, J$ 。



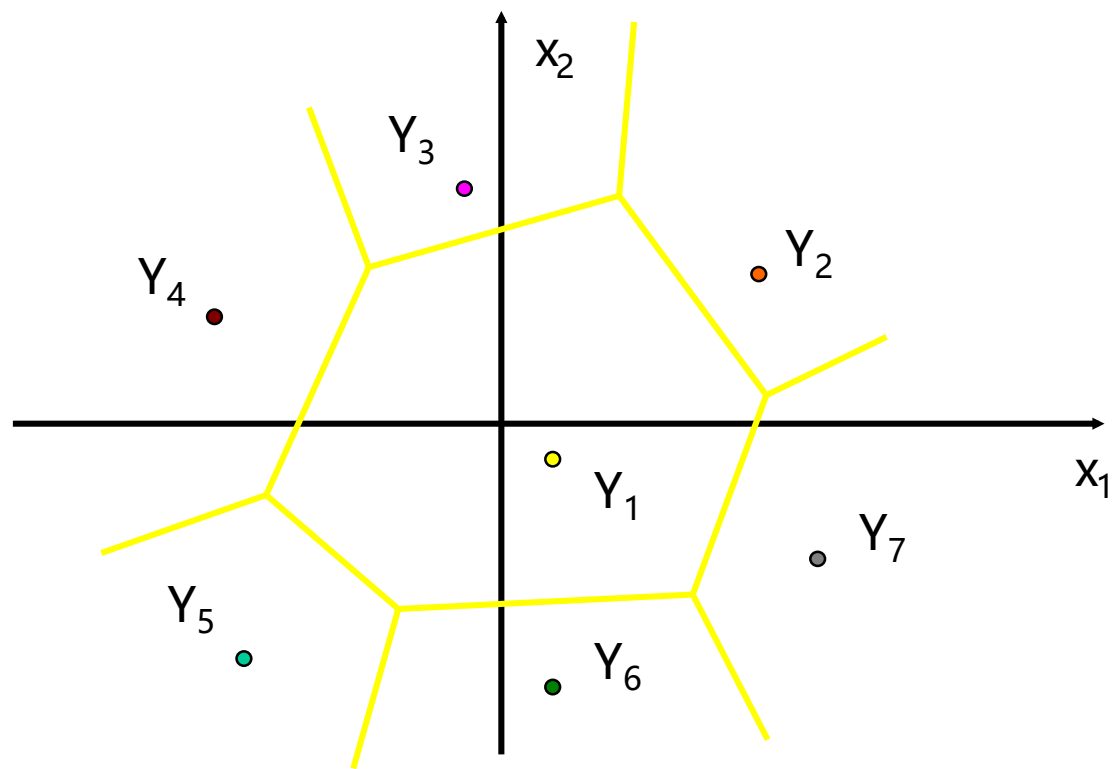
例：当 $P=2$ 时，所得到的是二维矢量。所有可能的二维矢量就构成了一个平面。第 i 个二维矢量记为： $X_i = \{x_{i1}, x_{i2}\}$ 。先把这个平面划分成 J 块互不相交的子区域，从每个子区域中找出一个代表矢量。如右图 $J=7$ 。

这个矢量量化方案中：

码本 $Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_J\}$

码本长度 $J=7$

码字 $Y_j = \{x_{j1}, x_{j2}\}$ ， $j=1, 2, \dots, J$





矢量量化器定义

- 维数为 P ，码本长度为 J 的矢量量化器 Q 定义为从 P 维欧几里德空间 R^P 到一个包含 J 个输出(重构)点的有限集合 Y 的映射，

$$Q: R^P \rightarrow Y, \text{ 其中 } Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_J\}$$

$$Y_i \in R^P, i=1, \dots, J$$

集合 Y 称作**码本或码书**，码本长度为 J 。

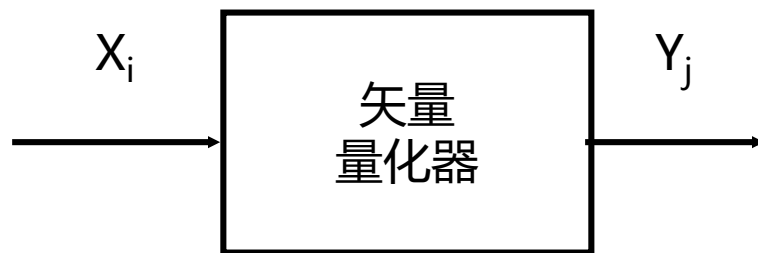
码本的 J 个元素称作**码字**或码矢量，它们均为 R^P 中的 P 维矢量。



3.1.3、矢量量化的过程

- 当给矢量量化器输入一个任意矢量 X_i 进行矢量量化时，矢量量化器首先判断它属于那个子空间，然后输出该子空间的代表矢量 Y_j 。矢量量化过程就是用 Y_j 代替 X_i 的过程。

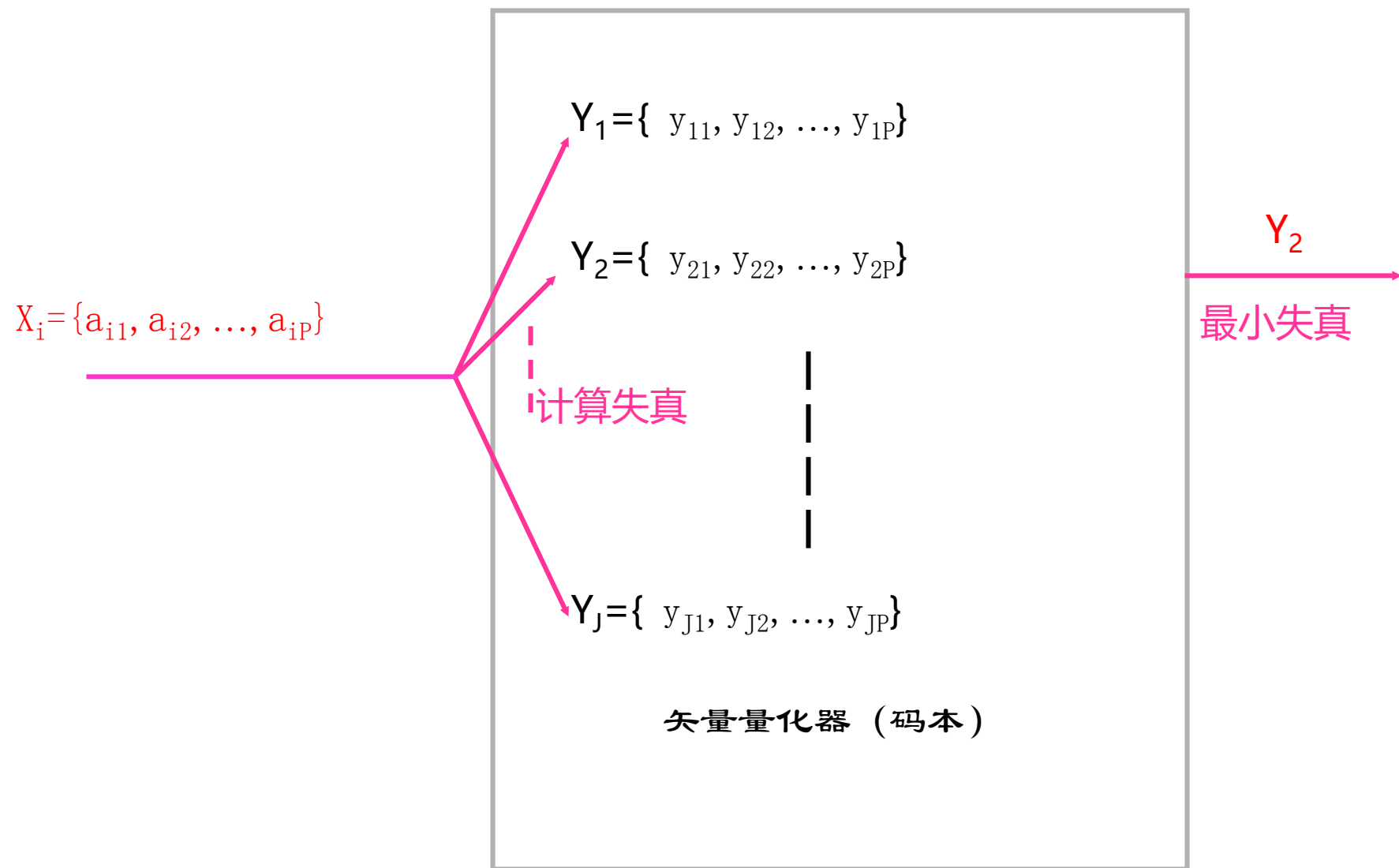
$$Y_j = Q(X_i) \quad 1 \leq j \leq J \quad 1 \leq i \leq N$$





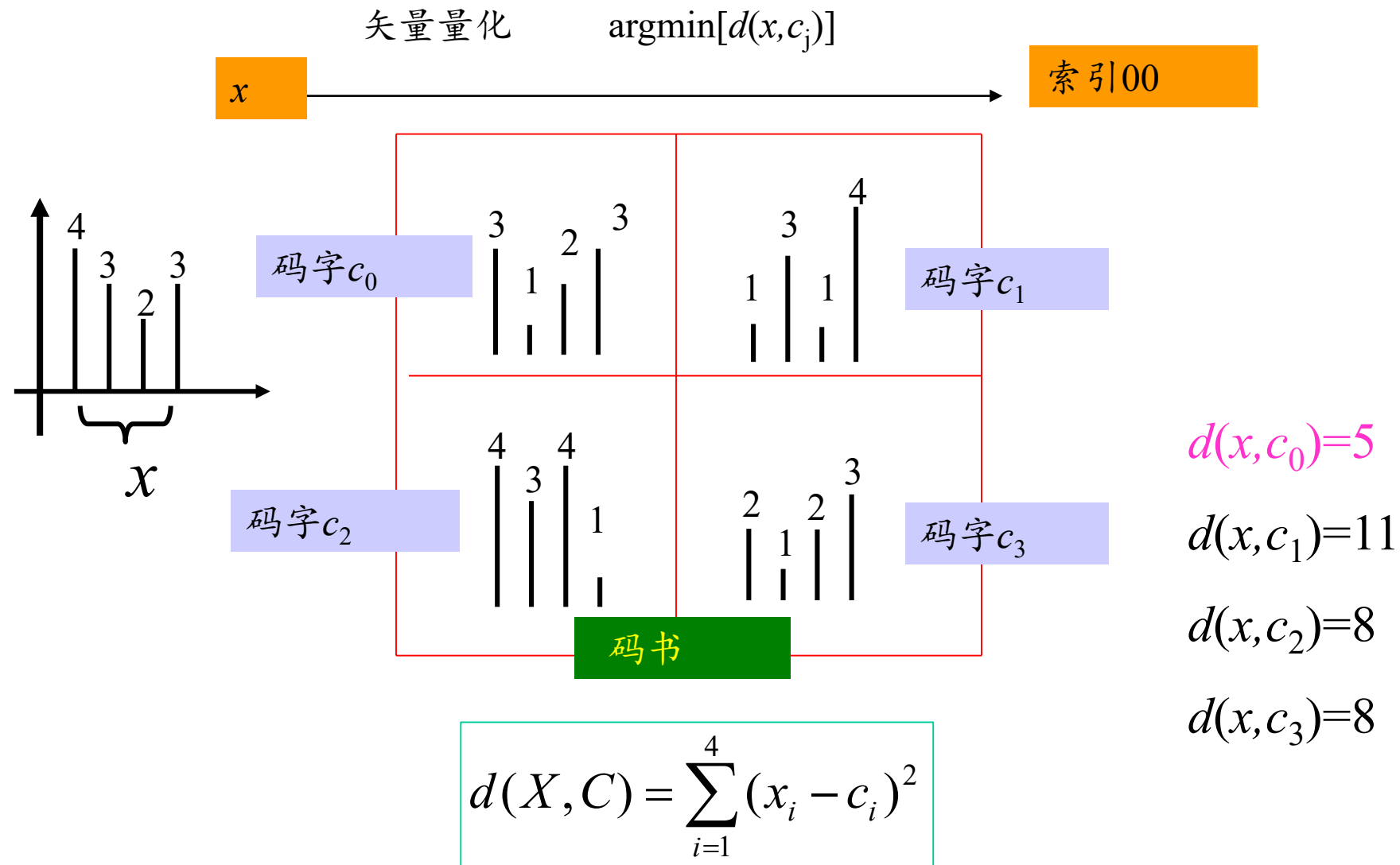
3.1.4. 判断规则

- 当给矢量量化器输入一个任意矢量 X_i 进行矢量量化时，矢量量化器首先判断它属于那个子空间，如何判断就是要依据一定的规则，选择一个合适的失真测度，分别计算每个码字代替 X_i 所带来的失真，当确定产生最小失真的那个码字 Y_j 时，就将 X_i 量化成 Y_j ， Y_j 就是 X_i 的重构矢量（和恢复矢量）。





抽样信号的矢量量化举例



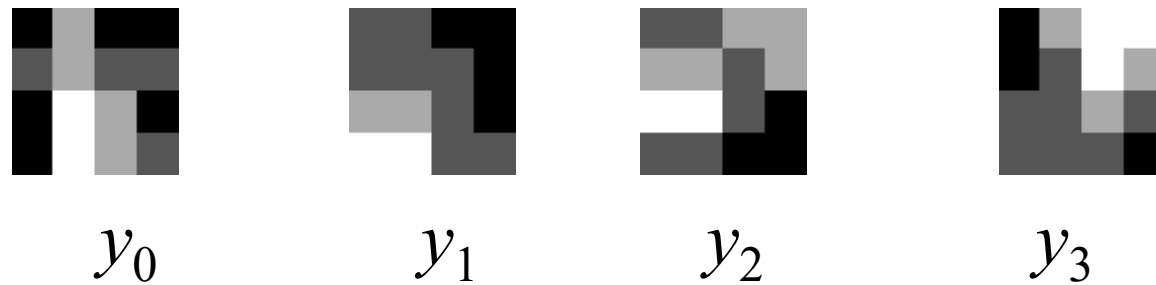


图像编码例子：

原图象块（4灰度级， 矢量维数 $k=4 \times 4=16$ ）



码书 $C = \{y_0, y_1, y_2, y_3\}$



$$d(x, y_0) = 25$$

$$d(x, y_1) = 5$$

$$d(x, y_2) = 25$$

$$d(x, y_3) = 46$$

码字 y_1 最接近输入矢量图象块 x ，故用索引 “01” 编码



3.1.5 标量量化和矢量量化比较

- ✓ 标量量化是维数为1的矢量量化。一般矢量量化均指大于1的多维量化。
- ✓ 一个 P 维最佳矢量量化器的性能总是优于 P 个最佳标量量化器。
- ✓ 在相同的编码速率下，矢量量化的失真明显比标量量化的失真小；而在相同的失真条件下，矢量量化所需的码速率比标量量化所需的码速率低得多。
- ✓ 由于矢量量化的复杂度随矢量维数成指数形式增加，故矢量量化的复杂度比标量量化的复杂度高。



3.2、矢量量化的关键之处

2.1 **首先设计一个好码本**。关键在于如何划分J个区域边界。这需要大量的输入信号矢量，经过统计实验才能确定，这个过程称为“训练”或“学习”。

应用**聚类算法**，按照一定的**失真度准则**，对训练的数据进行**分类**，从而把训练数据在多维空间中划分成一个以码字为中心的胞腔，常用的是LBG算法、k-mean聚类和深度学习。

2.2 **未知矢量的量化**。按照选定的**失真度准则**，把未知矢量，量化为失真度最小的码字。

失真度就是两矢量之间的**距离**。



四、矢量量化的失真测度

- 1、失真测度的定义
- 2、欧氏距离测度
- 3、线性预测失真测度



4.1、失真测度的定义

- **失真测度（距离测度）**就是将输入矢量 X_i 用码本重构矢量 Y_j 来表征时所产生的**误差或失真的度量方法**，它可以描述两个或多个模型矢量之间的相似程度。常用的失真测度为**欧氏距离测度、加权欧氏距离测度和识别失真测度**。



4.2、欧氏距离测度

• P维特征矢量:

$$X_i = \{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iP}\}; \quad Y_j = \{y_{j1}, y_{j2}, \dots, y_{jP}\}$$

1. 均方误差欧氏距离

$$d_2(X, Y) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K (x_i - y_i)^2$$

2. 绝对值平均误差

$$d_1(X, Y) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K |x_i - y_i|$$

3. 加权欧氏距离测度

$$d(X, Y) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K w(i)(x_i - y_i)^2$$

五、最佳矢量量化

- 通常用最小失真的方法——最近邻准则 (NNR Rule) 来设计矢量量化器，即满足

$$\alpha(X) = i \text{ or } j_{\max} \Leftrightarrow d(X, Y_i) \leq d(X, Y_j) \forall j \in I_N$$

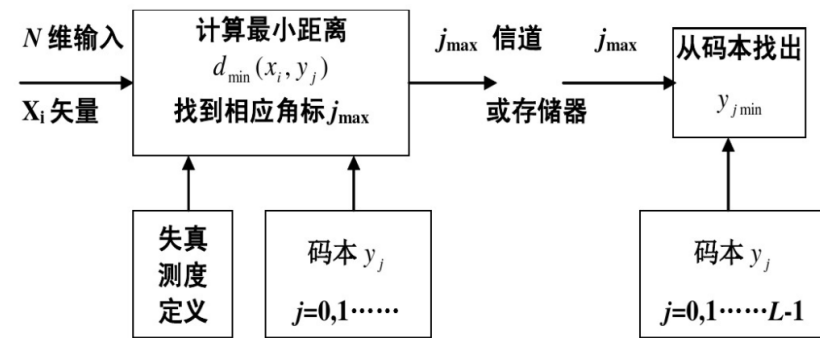
其中， $I_N = \{1, 2, \dots, i, \dots, N\}$; N 为码书的大小。 \Leftrightarrow 表示充要条件。

• 最佳矢量量化器

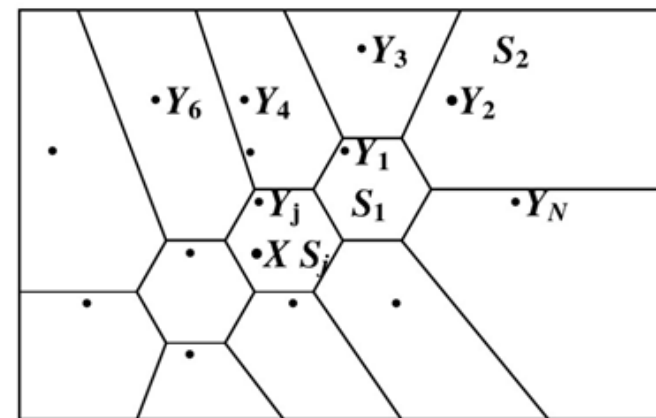
在给定条件下，失真最小的矢量量化器。

- 最佳矢量量化器的必要条件

1. 空间的最佳划分——NNR准则划分;
2. 最佳码书-给定划分后，使码书的平均失真最小。



矢量量化原理框图

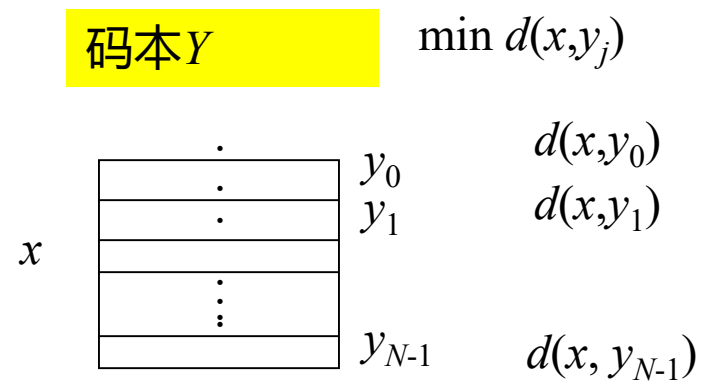
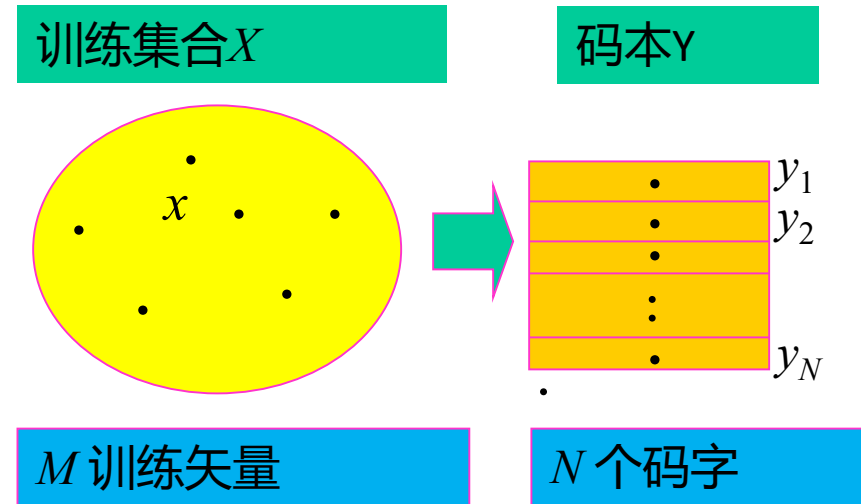


最佳划分示意图



矢量量化的三大关键技术

- 码本设计
- 码字搜索
- 码字索引分配





5.1、最佳码本设计的原则

- 所谓最佳设计，就是从大量信号样本中训练出好的码本；从实际效果出发寻找到好的失真测度定义公式；用最少的搜索和计算失真的运算量。
- 最佳码本的设计，就是在一定条件下，使得 $d(X,Y)$ 的统计平均最小。需满足下列条件：

(1) **最邻近准则**；根据该条件对信号空间进行最佳划分，得到 S_l 称为一个胞腔：

$$S_l = \{X \in R^K : d(X, Y_l) \leq d(X, Y_i); i \neq l, i = 1, \dots, J\}$$

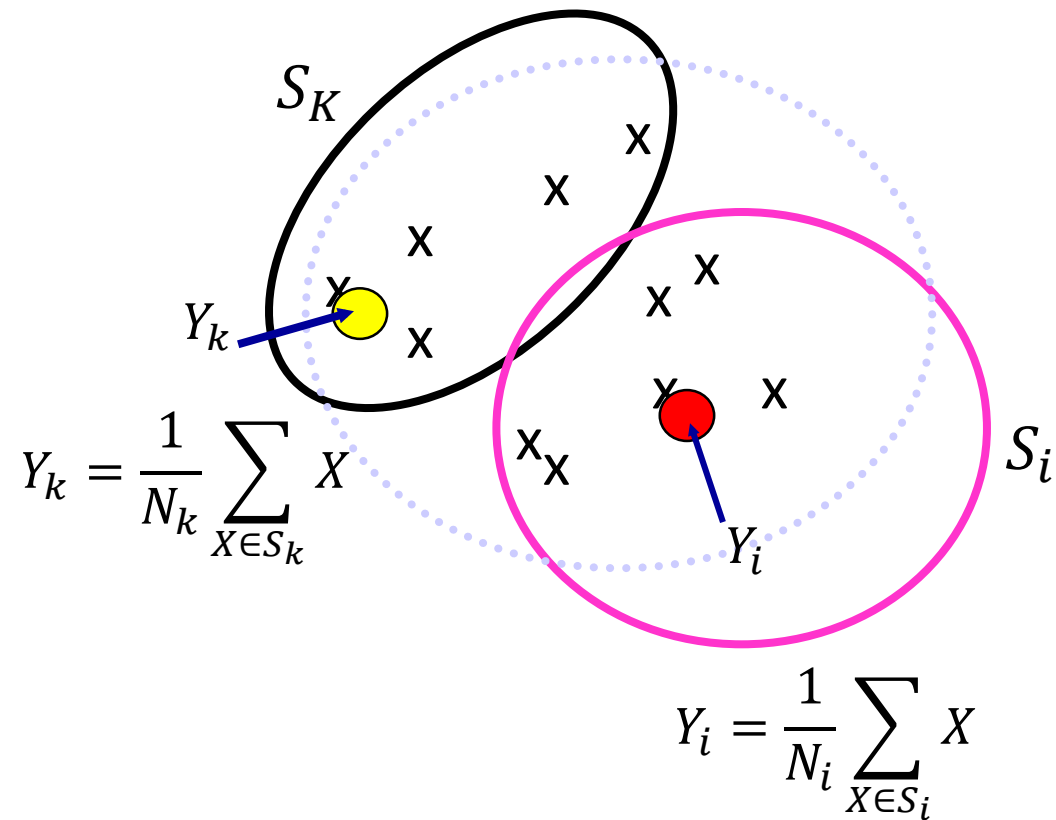
(2) **所有选择码字 Y_l 的输入矢量 X 的集合为 S_l ， Y_l 是 S_l 中所有矢量的质心**。根据这两条原则，这个算法就是LBG算法。

$$Y_l = \frac{1}{N_l} \sum_{X \in S_l} X$$

N_l 为集合中矢量的个数



$$S_k = \{X \in R^K : d(X, Y_k) < d(X, Y_i)\}$$





质心的形成

X1(220, 400, 430, 390, 300)

X2(220, 400, 410, 380, 310)

X3(220, 450, 410, 390, 300)

X4(220, 450, 420, 370, 290)

所有选择码字Y的输入矢量X的集合为S， Y是S中所有矢量的质心。

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{N} \sum_{X \in S} X = \frac{1}{4} (X_1 + X_2 + X_3 + X_4) \\ &= \frac{1}{4} (X_1 + X_2 + X_3 + X_4) = (220, 425, 382.5, 300) \end{aligned}$$



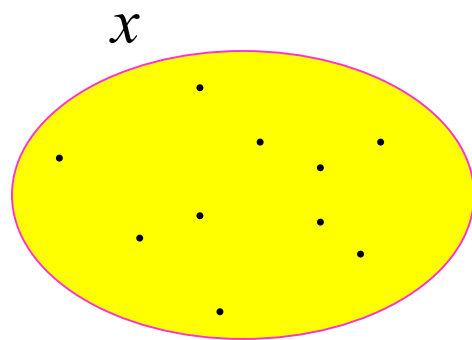
5.2、LBG算法

- **LBG算法**是一种递推算法，从一个事先选定的初始码本开始迭代。把训练序列按照码本中的元素根据最邻近准则分组，对每一分组找质心，得到新的码本，又作为初始码本，再进行分组，重复上述过程，直到系统性能满足要求和不再有明显的改进为止。

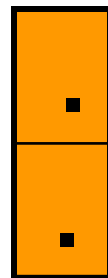


(1) 初始码本的选择

(1.1) 随机选取法：从训练序列中随机选取 J 个矢量作为初始码字，从而构成初始码本。



训练集合 S



初始码本
 $J=2$ 个码字

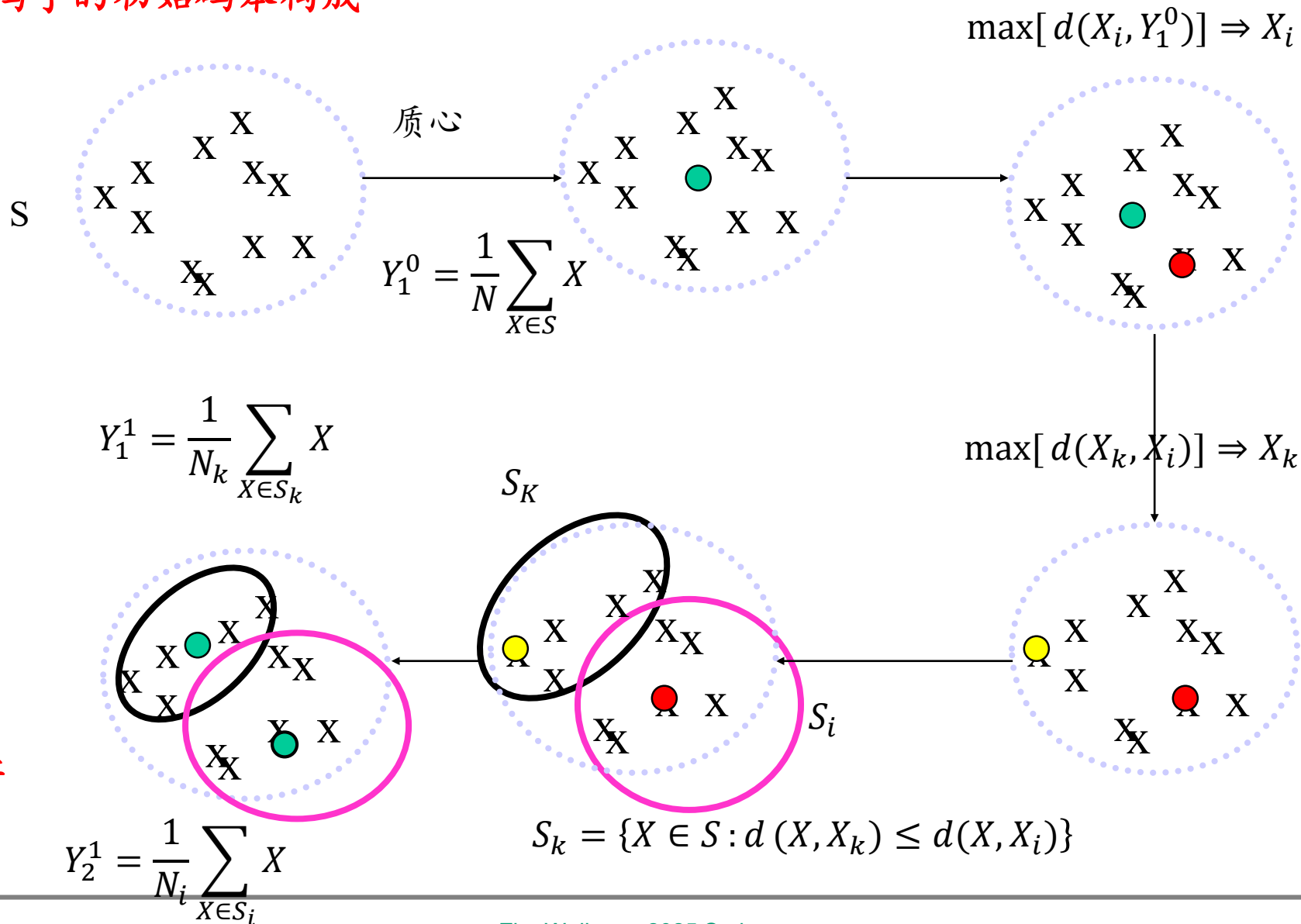


(1.2) 分裂法

- (1) 求出S中全体训练序列的质心 \mathbf{Y}_1^0
- (2) 然后在S中找一个与此质心的失真测度最大的矢量 $\max[d(\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_1^0)] \rightarrow \mathbf{X}_i$ ，再在S中找一个与 \mathbf{X}_i 的失真测度最大的矢量 $\max[d(\mathbf{X}_k, \mathbf{X}_i)] \rightarrow \mathbf{X}_k$
- (3) 以 \mathbf{X}_i 和 \mathbf{X}_k 为基准，根据最邻近准则，进行S的划分，得到两个子集 \mathbf{S}_i 和 \mathbf{S}_k ，求其质心；
- (4) 对这两个子集分别按同样方法进行处理，可以得到四个子集。依次类推，经过r次分裂，得到 $J=2^r$ 个子集，分别求子集的质心，得到J个初始码字，构成初始码本。



J=2 2个码字的初始码本构成



分裂1次,
得到2个码字



(2) 最佳码本的设计

第一步：初始化。给定全部训练矢量集合S，设定失真控制门限 δ ，算法最大迭代次数L，以及初始码本 $\{Y_1^0 Y_2^0 \cdots Y_J^0\}$ ，设置总失真 $D^0 = \infty$ ，初始迭代次数 $m=1$ ，最大迭代次数为L。

第二步：迭代。

(1) 根据最邻近准则将S分成J个子集，

$$\{S_1^m \ S_2^m \ \dots S_J^m\} \quad S_l^m = \left\{ X \in R^K : d(X, Y_l^{m-1}) \leq d(X, Y_i^{m-1}); \right. \\ \left. i \neq l, i = 1, \dots, J; l = 1, \dots, J \right\}$$

(2) 计算总失真

$$D^m = \sum_{l=1}^J \sum_{X \in S_l^m} d(X, Y_l^{m-1})$$



(3) 计算新码字：每一个码字为其对应子集的质心。

$$\{Y_1^m \ Y_2^m \ \dots Y_J^m\} \quad Y_l^m = \frac{1}{N_l} \sum_{X \in S_l^m} X$$

(4) 计算相对失真改进量，

$$\delta^m = \frac{|D^{m-1} - D^m|}{D^m}$$

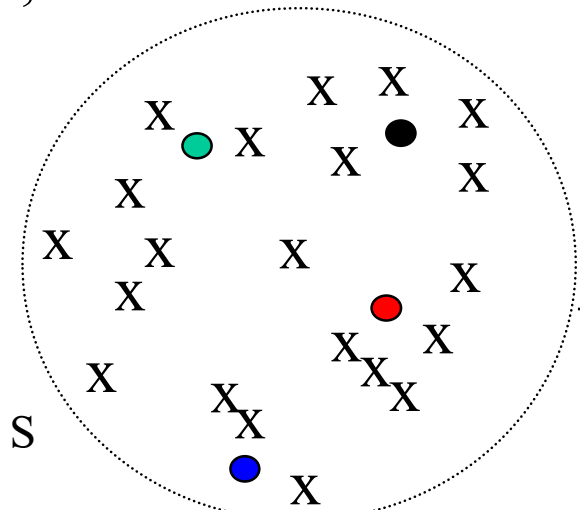
与失真控制门限比较， $\delta^m > \delta$ 转入(5)； $\delta^m \leq \delta$ 转入 (6) 。

(5) 若m大于L，则转入(6)，否则m+1，转入(1)

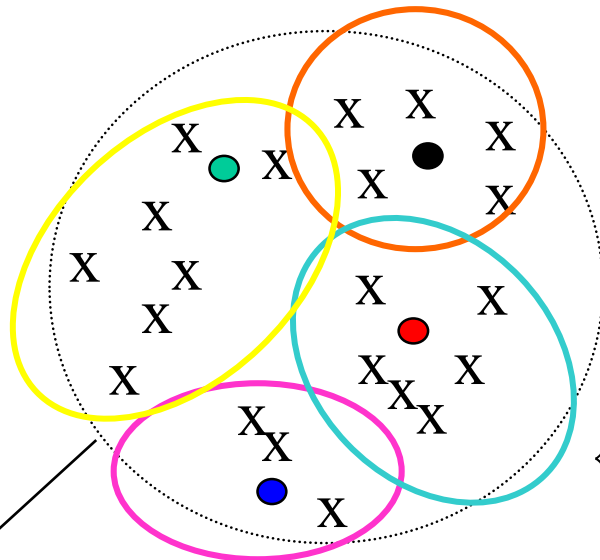
(6) 得到最终的码书： $\{Y_1^m \ Y_2^m \ \dots Y_J^m\}$



$J=4, m=1$



$\{Y_1^0 \ Y_2^0 \ Y_3^0 \ Y_4^0\}$

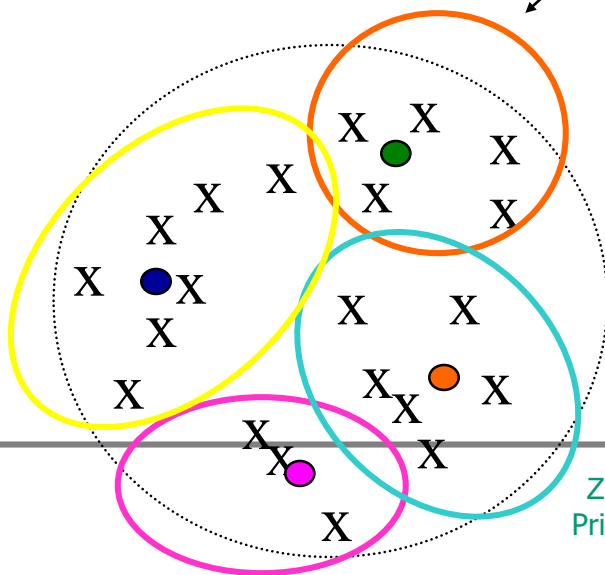


$\{S_1^1 \ S_2^1 \ S_3^1 \ S_4^1\}$

$$S_l^1 = \left\{ X \in R^K : d(X, Y_l^0) \leq d(X, Y_i^0); \right. \\ \left. i \neq l, \quad i, l = 1, 2, \dots, 4 \right\}$$

$$D^1 = \sum_{l=1}^4 \sum_{X \in S_l^m} d(X, Y_l^0)$$

$$\delta^1 = \frac{|D^0 - D^1|}{D^1}$$



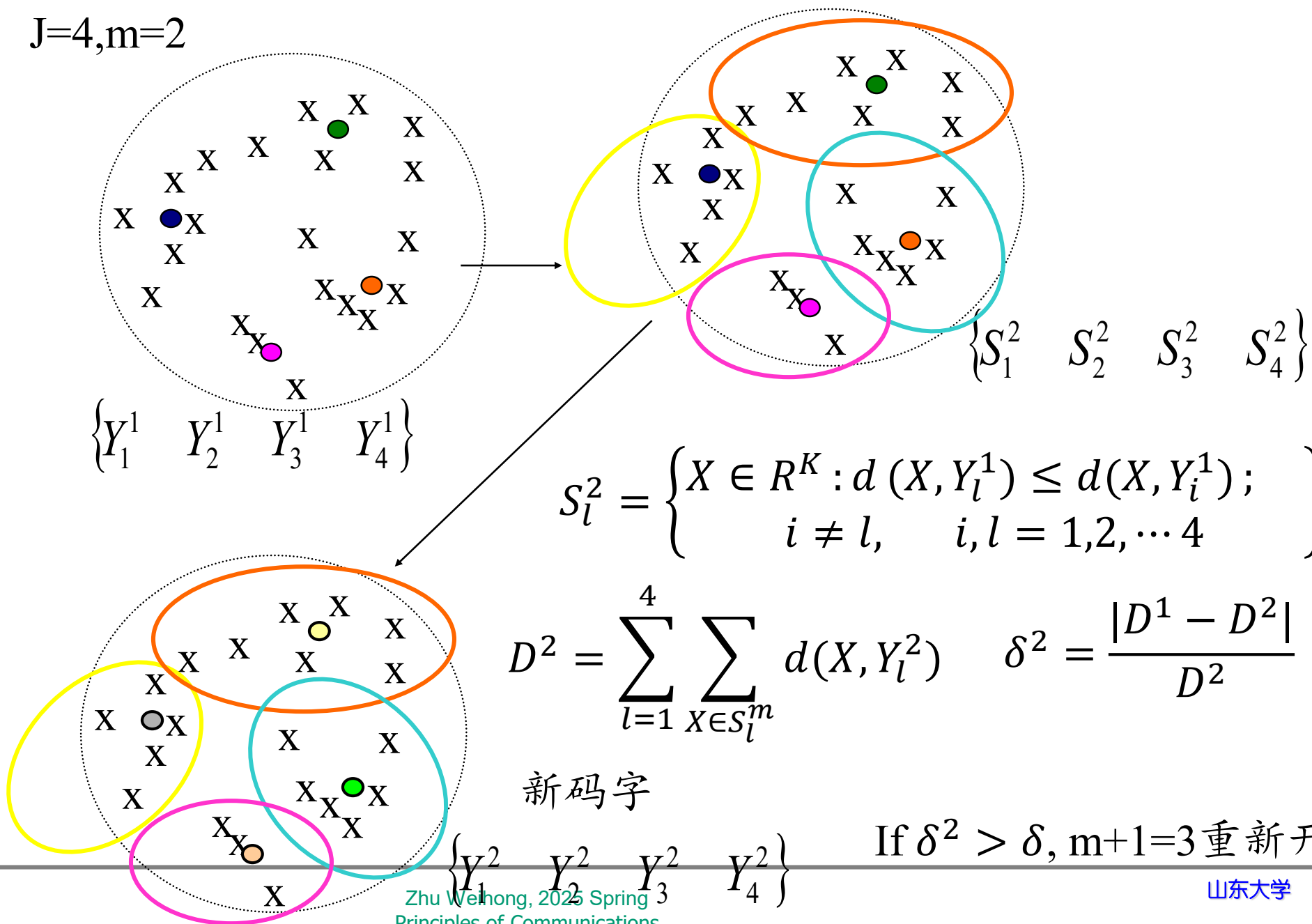
新码字

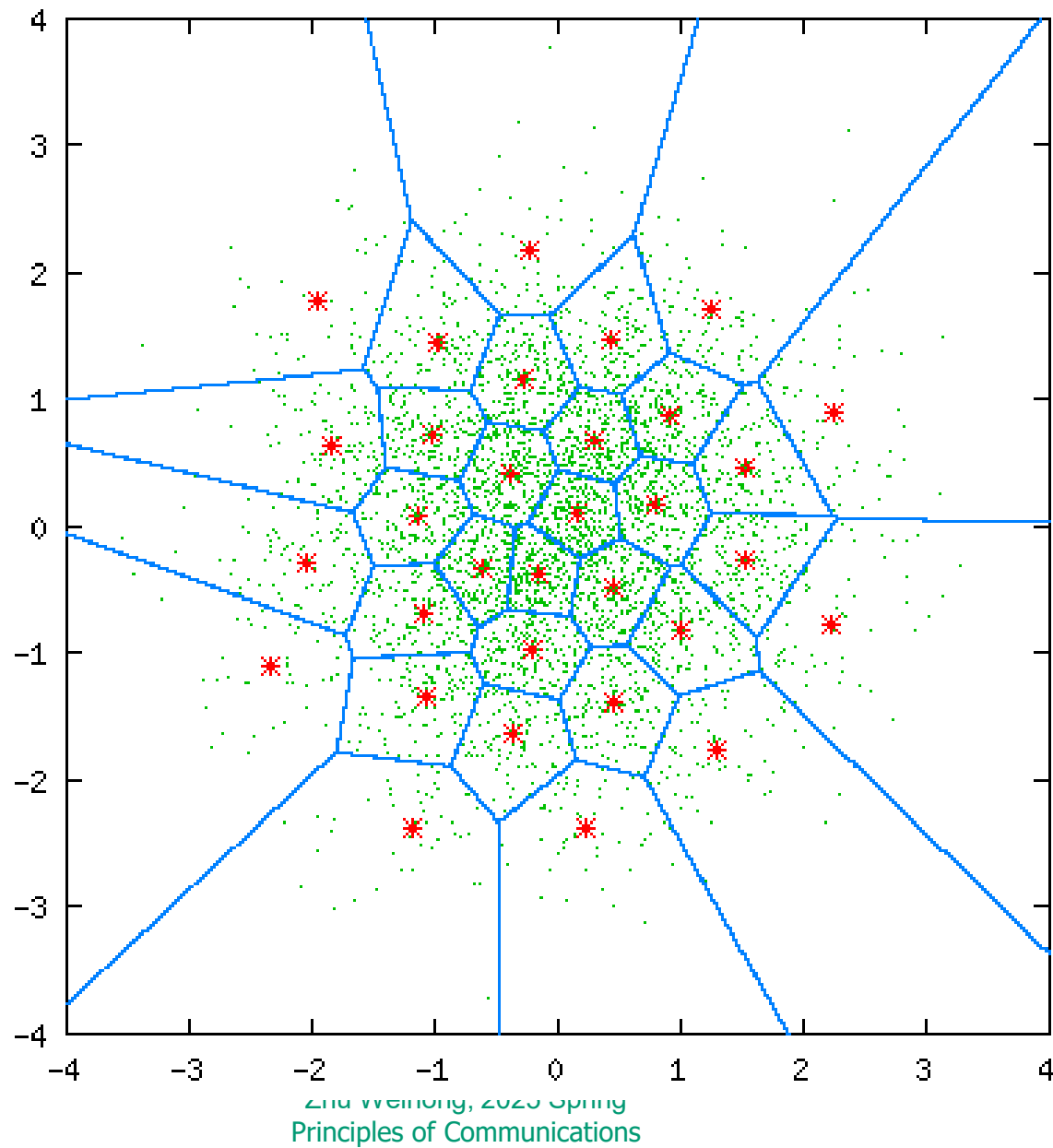
$\{Y_1^1 \ Y_2^1 \ Y_3^1 \ Y_4^1\}$

If $\delta^1 > \delta$, $m+1=2$ 重新开始



$J=4, m=2$







LBG算法特性优势:

- 结构简单, 适合离线码本训练
- 通过分裂法逐步逼近最优码本

•劣势:

- 对初始值敏感, 可能陷入局部最优
- 需预设码本大小, 不适用于动态场景



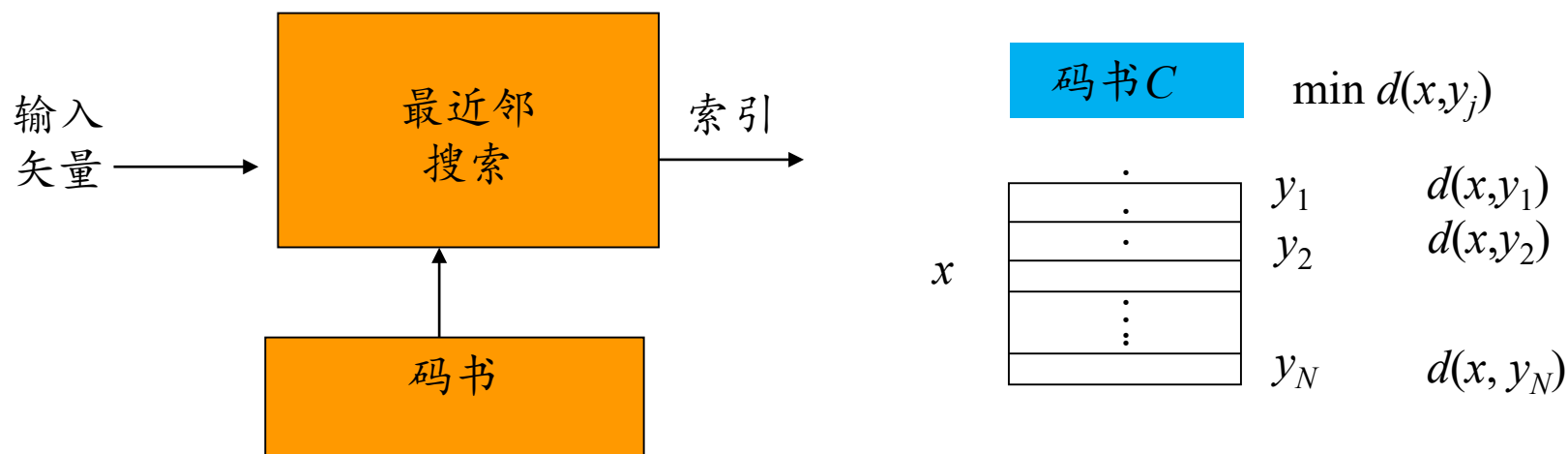
5.3、码字搜索

1. 全搜索
2. 快速搜索算法（二叉树形搜索）



1、全搜索VQ

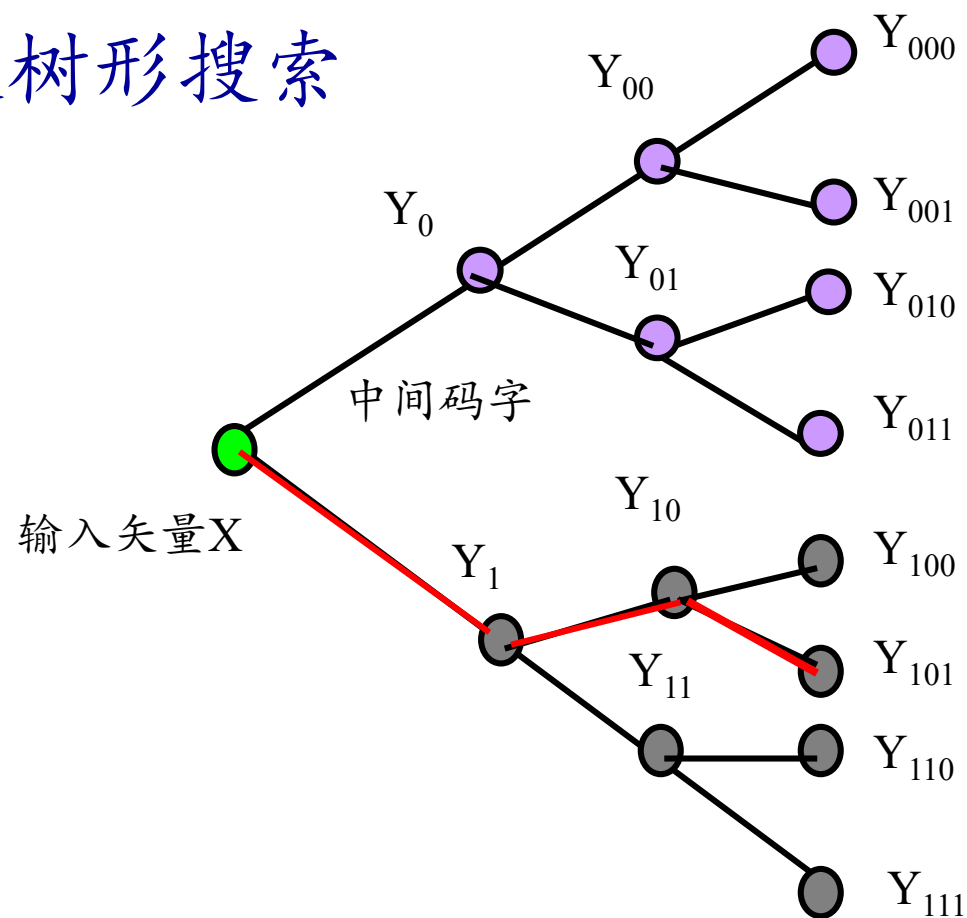
- ✓时间复杂度: $N(2k-1)$ 次加法, kN 次乘法和 $N-1$ 次比较 (每个输入矢量)
- ✓空间复杂度: kN 个标量
- ✓如何降低复杂度:采用约束结构;采用快速码字搜索算法



$$d(x, y_j) = (x_1 - y_{j1})^2 + (x_2 - y_{j2})^2 + \dots + (x_k - y_{jk})^2 \quad (2k-1) \text{次加法, } k \text{次乘法}$$



2、二叉树形搜索



X 先与 Y_0 和 Y_1 比较,计算出失真 $d(X, Y_0)$ 和 $d(X, Y_1)$, 如果后者较小, 则走下支路, 同时送“1”输出; 如此类推, 最后到达, 则送出标号101。



图中各层的码字，用下面的方法得到：

如 $J=8$ ，已知码本中8个码字，则按最邻近的原则配对：

【 Y_{000} , Y_{001} 】 ； 【 Y_{010} , Y_{011} 】 ；

【 Y_{100} , Y_{101} 】 ； 【 Y_{110} , Y_{111} 】 。

求各对的质心，得到 【 Y_{00} , Y_{01} 】 ；

【 Y_{10} , Y_{11} 】 ，再求这两对的质心，得到 Y_0 和 Y_1 。



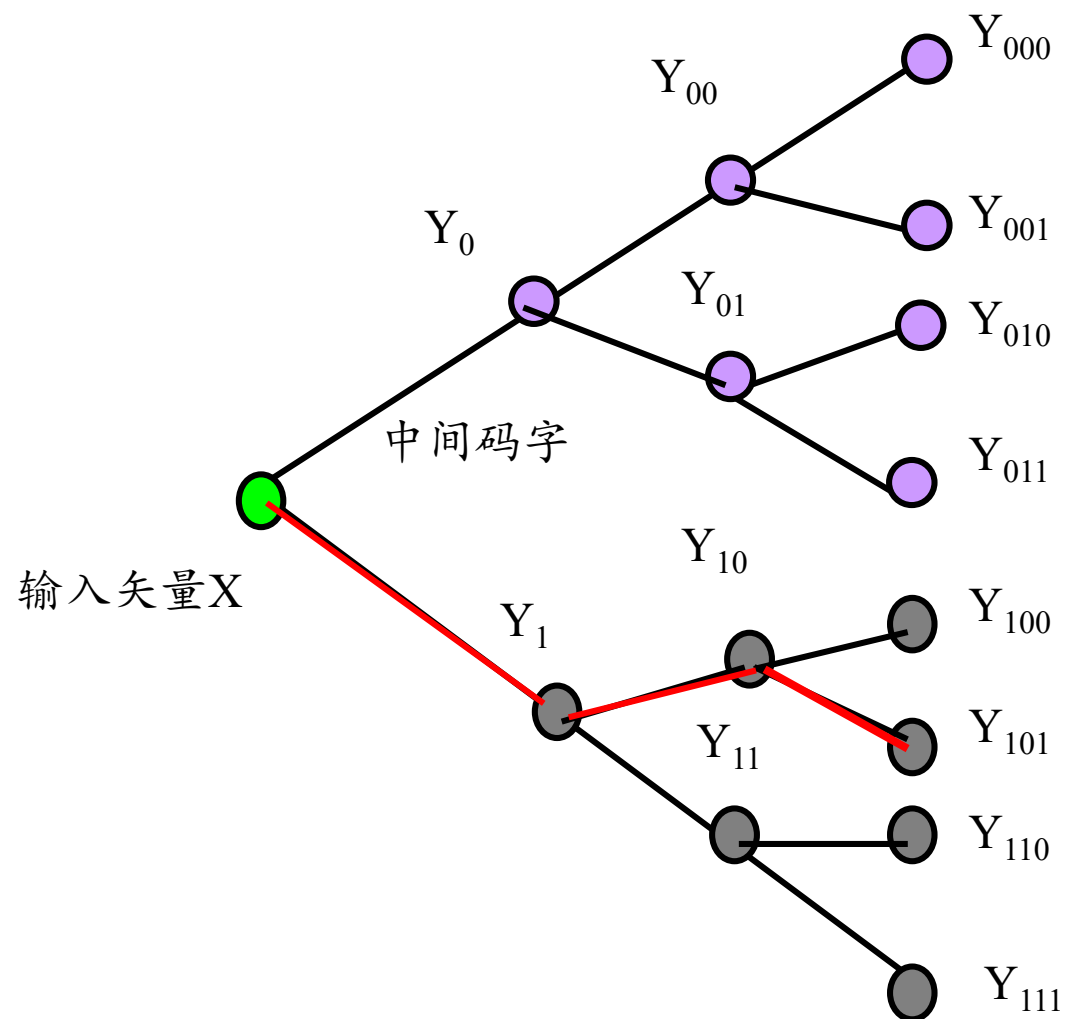
比较全搜索和树形搜索的算法量

输入矢量X



Y_{000}
Y_{001}
Y_{010}
Y_{011}
Y_{100}
Y_{101}
Y_{110}
Y_{111}

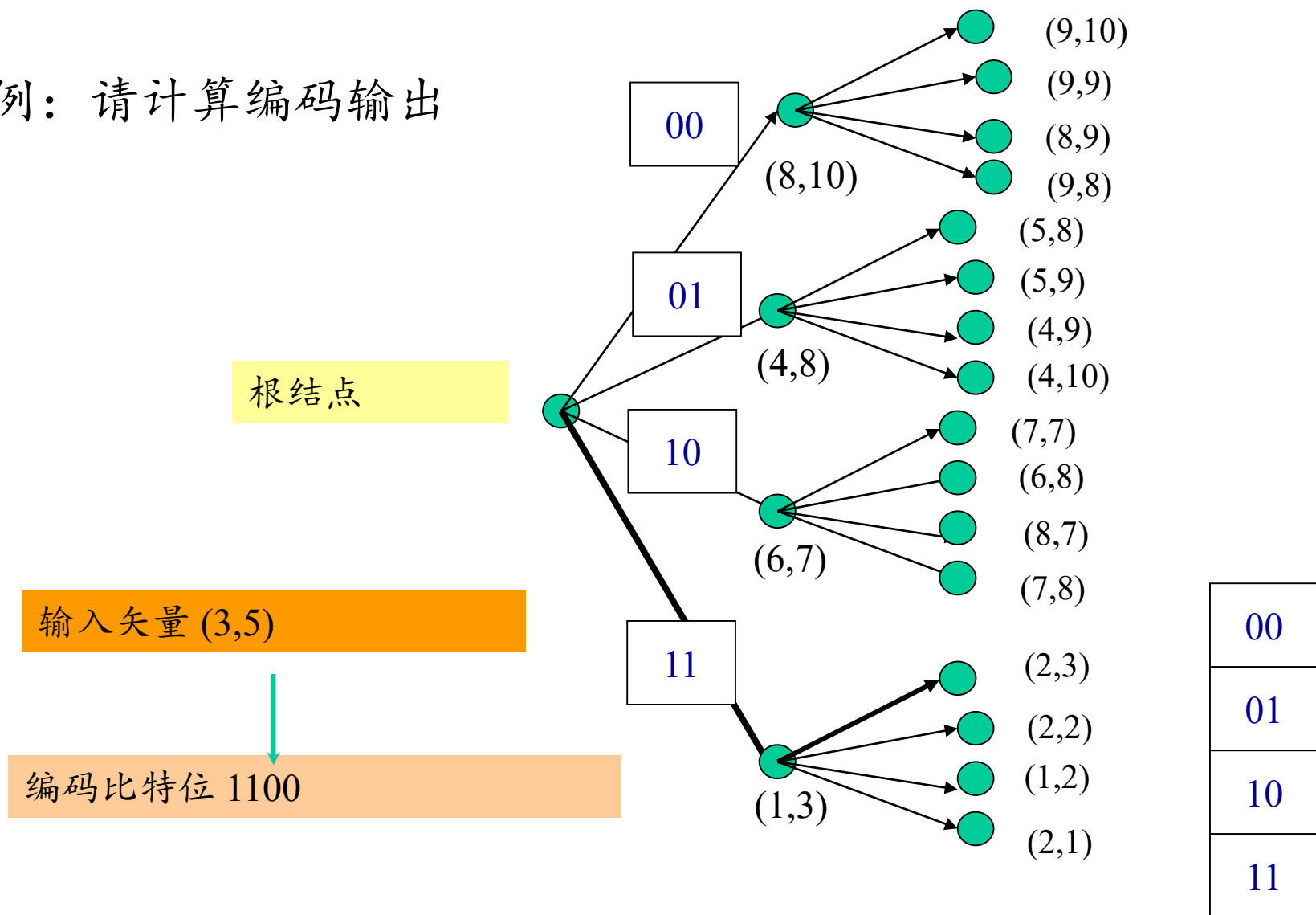
全搜索需要8次失真测度计算。



树形搜索需要 $2\log_2 J=6$ 次失真测度计算。



举例：请计算编码输出





请上网搜索k-means聚类算法的说明，并上传。



总结

- 了解矢量量化的基本原理
- 了解LGB算法