第一章习题《基础物理 I 波动理论导引》

习题 1.1：两个固定的点电荷，电荷量分别是 q 和 $4q$，相距为 l。（1）试问在什么地方放一个什么样的点电荷，可以使这三个电荷都达到平衡（即每个电荷受另外两个电荷的库仑力之和都等于零）？

解：（1）设所放的点电荷其电荷量为 q'。若 q'与 q 同号，则三者互相排斥，不可能达到平衡，故 q'只能与 q 异号。若 q'在 q 和 $4q$ 连线之外的任何地方，也不可能达到平衡。由此可知，只有 q'与 q 异号且 q'在 q 和 $4q$ 的连线上，才有可能达到所要求的平衡。设 q'到 q 的距离为 x，$\hat{x}$ 为从 q 到 $4q$ 方向上的单位矢量（如图所示），则 q'所受的力为

$$\vec{F}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{x^2}\hat{x} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4qq'}{(l-x)^2}(-\hat{x}) = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{x^2} - \frac{4}{(l-x)^2}\right]$$

平衡时，$\vec{F}'=0$，所以 $(l-x)^2 = 4x^2$，解得

$$x = l/3 \quad \text{和} \quad x = -l$$

其中 $x=-l$ 是 q'在 q 和 $4q$ 的连线之外，故舍去。于是所求的值为 $x = l/3$。

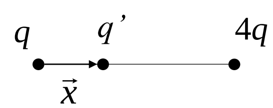
这时 q 所受的力为

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{(l/3)^2}(-\hat{x}) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4q^2}{l^2}(-\hat{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l^2}\left[9q' + q^2\right](-\hat{x})$$

平衡时 $\vec{F}=0$，故得

$$q' = -\frac{4}{9}q$$

很容易验证，这时 $4q$ 所受的力也是零，即三个电荷都达到平衡。



习题 1.2：电荷量 q 均匀地分布在半径为 R 的半圆环上，试求环心的电场强度。

解：如图所示，半圆环 ACB 上 C 处的电荷量 $dq = \frac{q}{\pi R}Rd\theta = \frac{q}{\pi}d\theta$ 在环心 O 产生的电场强度 $d\vec{E}$，其大小为

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{q}{4\pi^2\varepsilon_0 R^2}d\theta$$

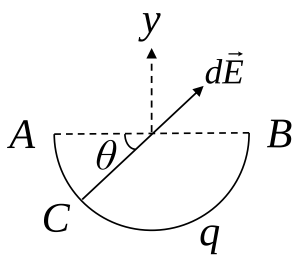
由对称性可知，半圆环上的电荷在 O 点产生的电场强度 $\vec{E}$ 其方向必定垂直于直径 AB，其大小为

$$E=\int(dE)\sin\theta=\frac{q}{4\pi^2\varepsilon_0R^2}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta=\frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0R^2}$$

于是得

$$\vec{E}=\frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0R^2}\hat{y}$$

式中 $\hat{y}$ 为垂直于 AB 并向上的单位矢量。



习题 1.3：电荷分布在半径为 R 的球体内，电荷量密度为 $\rho=\rho_0\left(1-r/R\right)$，式中为 ρ_0 为常数，r 为球心到球内一点的距离。试求：（1）球内外离球心为 r 处的电场强度；（2）电场强度的最大值。

解：（1）根据对称性和高斯定理得：球内离球心为 r 处有

$$\oiint_S\vec{E}\cdot d\vec{S}=4\pi r^2E=\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint\rho dV=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r\rho_0\left(1-\frac{r}{R}\right)\cdot4\pi r^2dr$$
$$=\frac{4\pi\rho_0}{3\varepsilon_0}\left(r^3-\frac{3r^4}{4R}\right)$$

所以

$$\vec{E}=\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\left(1-\frac{3r}{4R}\right)\vec{r}\text{，}\quad r<R$$

式中 $\vec{r}$ 是从球心到场点的位矢，$|\vec{r}|=r$ 。

球外离球心为 r 处有

$$\oiint_S\vec{E}\cdot d\vec{S}=4\pi r^2E=\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint\rho dV=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^R\rho_0\left(1-\frac{r}{R}\right)\cdot4\pi r^2dr$$
$$=\frac{\pi\rho_0}{3\varepsilon_0}R^3$$

所以

$$\vec{E}=\frac{\rho_0R^3}{12\varepsilon_0r^3}\vec{r}\text{，}\quad r>R$$

（2）由（1）中式子可见，电场强度在球内有极大值，得

$$\frac{dE}{dr}=\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\frac{d}{dr}\left(r-\frac{3r^2}{4R}\right)=\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\left(1-\frac{6r}{4R}\right)=0$$

所以

$$r=\frac{2}{3}R$$

即 E 在 $r=\frac{2}{3}R$ 处有极大值，其值为

$$E_{\max}=\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\left(r-\frac{3r^2}{4R}\right)=\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\left(1-\frac{3}{4R}\cdot\frac{2}{3}R\right)\frac{2}{3}R=\frac{\rho_0 R}{9\varepsilon_0}$$

习题 1.4： 电荷量分别为 q 和-q 的两个点电荷，相距为 l，对于离它们很远的区域来说（$r\gg l$），这两个电荷构成一个电偶极子。试求电偶极子在远区的电势分布和等势面方程。

解：根据电势叠加原理，电偶极子在 P 点产生的电势就是它的正负电荷在该点产生的电势之和，即

$$\begin{aligned}\varphi&=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_+}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r_-}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_+}-\frac{1}{r_-}\right]=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+l^2/4-rl\cos\theta}}-\frac{1}{\sqrt{r^2+l^2/4+rl\cos\theta}}\right]\\&=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(r^2+l^2/4-rl\cos\theta\right)^{-1/2}-\left(r^2+l^2/4+rl\cos\theta\right)^{-1/2}\right]\\&=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\left(1+\frac{l^2}{4r^2}-\frac{l}{r}\cos\theta\right)^{-1/2}-\left(1+\frac{l^2}{4r^2}+\frac{l}{r}\cos\theta\right)^{-1/2}\right]\\&\approx\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\left(1-\frac{l^2}{8r^2}+\frac{l}{2r}\cos\theta\right)-\left(1-\frac{l^2}{8r^2}-\frac{l}{2r}\cos\theta\right)\right]\\&=\frac{ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\end{aligned}$$

等势面方程为

$$\frac{ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=const$$

在直角坐标系下：

$$\frac{qlz}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}=const$$

习题 1.5： 一球壳体的内外半径分别是 a 和 b，壳体中均匀分布着电荷，电荷量密度为 ρ。试求离球心为 r 处的电场强度 E，并画出 E-r 曲线（以 r 为横坐标、E 的大小为纵坐标）。

解：以球壳心为心、r 为半径作球面（高斯面）S，由对称性和高斯定理得

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0} Q$$

式中 Q 是 S 所包住的电荷量的代数和。

$r<a$（壳体腔内）：Q = 0，故 E = 0，所以

$$\vec{E}=0$$

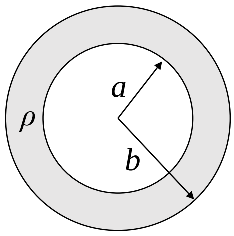
$a<r<b$（壳体中）：$Q=\frac{4\pi}{3}\rho\left(r^3-a^3\right)$，所以

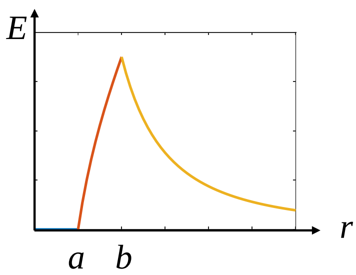
$$\vec{E}=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r^3-a^3\right)\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$r>b$（壳体外）：$Q=\frac{4\pi}{3}\rho\left(b^3-a^3\right)$，所以

$$\vec{E}=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(b^3-a^3\right)\frac{\vec{r}}{r^3}$$

式中 $\vec{r}$ 为从球壳心到场点的位矢。





***习题 1.6：** 平面内有 2 个任意位置、任意电荷量的点电荷，用 MATLAB 绘制电场强度分布，观察电场方向、等势面与电荷参数之间的变化关系。