2015-16 学年第二学期高等数学试题(A)参考答案

一、填空题（共 5 小题，每题 4 分，共 20 分)

1. $1-3e^{-2}$　　**2.**发散　　**3.** 4

4. $\frac{3}{2}<\alpha<2$　　　　**5.** $y^2+z^2=4z$

二、选择题（共 5 小题，每题 4 分，共 20 分)

6.C　7.D　8. B　9.C　10.A

三、计算题（共 7 小题，共 60 分)

11.(8 分)

由$(\vec{a}+3\vec{b})\perp(7\vec{a}-5\vec{b})$，得$(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(7\vec{a}-5\vec{b})=0$，

即$7|\vec{a}|^2+16\vec{a}\cdot\vec{b}-15|\vec{b}|^2=0$　　　(1)

由$(\vec{a}-4\vec{b})\perp(7\vec{a}-2\vec{b})$，得$(\vec{a}-4\vec{b})\cdot(7\vec{a}-2\vec{b})=0$，

即$7|\vec{a}|^2-30\vec{a}\cdot\vec{b}+8|\vec{b}|^2=0$　　　(2)……………………………4分

$(1)-(2)$得,$46\vec{a}\cdot\vec{b}-23|\vec{b}|^2=0$，即$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}|\vec{b}|^2$　　　(3)

把(3)代入(1)，得$|\vec{a}|=|\vec{b}|$，从而$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|$，

$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{1}{2}$，故$(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{\pi}{3}$.……………………………8分

12.(8 分)

解　$\frac{\partial f}{\partial x}|_{(0,0)}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{[(\Delta x)^2+0^2]\sin\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+0^2}}-0}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x\cdot\sin\frac{1}{|\Delta x|}=0$　　……………………………4分

$\frac{\partial f}{\partial y}|_{(0,0)}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{[0^2+(\Delta y)^2]\sin\frac{1}{\sqrt{0^2+(\Delta y)^2}}-0}{\Delta y}$

$=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\Delta y\cdot\sin\frac{1}{|\Delta y|}=0$　　……………………………8分

故该函数在$(0,0)$点的偏导数存在，且$\frac{\partial f}{\partial x}|_{(0,0)}=0$，$\frac{\partial f}{\partial y}|_{(0,0)}=0$.

13.(8 分)

解：设(x,y,z)为椭圆上任意一点，则该题就是求函数$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，

在约束条件$z=x^2+y^2$与$x+y+z=1$下的最大值与最小值.

为了简化计算，也可以取目标函数为$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$，

构造拉格朗日辅助函数$L(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-1)$，

则

$$\begin{cases} L'_x=2x+2\lambda x+\mu=0 \\ L'_y=2y+2\lambda y+\mu=0 \\ L'_z=2z-\lambda+\mu=0 \\ L'_\lambda=x^2+y^2-z=0 \\ L'_\mu=x+y+z-1=0 \end{cases}$$ ……………………………4分

由前两个方程得$x=y$，由后两个方程相加，并将$x=y$代入，得$2x^2+2x=1$，

于是解得$x=y=\dfrac{-2\mp\sqrt{4+8}}{4}=\dfrac{-1\mp\sqrt{3}}{2}$.

再由最后一个方程得$z=1-2x=2\mp\sqrt{3}$.

所得驻点为$P_1(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2},\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2},2-\sqrt{3})$，$P_2(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2},\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2},2+\sqrt{3})$，

$$d_1=\{(\frac{-1+\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{-1+\sqrt{3}}{2})^2+(2-\sqrt{3})^2\}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{9-5\sqrt{3}},$$

$$d_2=\{(\frac{-1-\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{-1-\sqrt{3}}{2})^2+(2+\sqrt{3})^2\}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{9+5\sqrt{3}},$$

比较可得，坐标原点到该椭圆的最长距离为$\sqrt{9+5\sqrt{3}}$，最短距离为$\sqrt{9-5\sqrt{3}}$.

……………………………8分

14.(8 分)

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+4)x^{2n+3}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{(2n+2)x^{2n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+4)x^2}{(n+1)(2n+2)}=0<1,$$

故该级数的收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

……………………………4分

设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+2}{n!}x^{2n+1}$，

则

$$S(x)=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{n!}\right]'=\left[x^2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}\right]'$$

$$=[x^2(e^{x^2}-1)]'=2x(e^{x^2}-1)+2x^3e^{x^2},\quad -\infty<x<+\infty$$

……………………………8分

15.(8 分)

解 Σ 为：$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，

Σ 在 xOy 面上的投影为 $D_{xy}: x^2+y^2\leqslant a^2-h^2$，故

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-2y}{2\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

…………………………4分

$$\iint_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{D_{xy}}\left(x+y+\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\xrightarrow{\text{对称性}}\iint_{D_{xy}}a\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=a\cdot S_{D_{xy}}=\pi a(a^2-h^2).$$

…………………………8分

16.(10 分)

计算 $\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2\le R^2\\ x^2+y^2+(z-R)^2\le R^2\end{cases}$ 所确定

解法一： 本题不宜用球面坐标系

利用柱面坐标，得

$$\iiint\limits_{\Omega}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R}r\mathrm{d}r\int_{R-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}}z^2\mathrm{d}z$$ …………………………5分

$$=\frac{2}{3}\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R}r[(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}-(R-\sqrt{R^2-r^2})]\mathrm{d}r$$

$$=\frac{2}{3}\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R}r[2(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}+3R^2(R^2-r^2)^{\frac{1}{2}}-4R^3+3Rr^2]\mathrm{d}r=\frac{59}{480}\pi R^5.$$ ………10分

利用“先二后一” 计算 .

$$I=\int_0^{R/2}z^2\,\mathrm{d}z\iint_{D_{1z}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\int_{R/2}^{R}z^2\,\mathrm{d}z\iint_{D_{2z}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$ …………………………5分

$$=\int_0^{R/2}z^2\cdot\pi\quad(2Rz-z^2)\,\mathrm{d}z+\int_{R/2}^{R}z^2\cdot\pi\quad(R^2-z^2)\,\mathrm{d}z=\frac{59}{480}\pi R^5$$ …………10分

17.(10 分)

解　由Σ的对称性知

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{2dxdy}{z\cos^2 z}+\frac{dxdy}{\cos^2 z}-\frac{dxdy}{z\cos^2 z}=\iint_{\Sigma}(\frac{1}{z\cos^2 z}+\frac{1}{\cos^2 z})dxdy$$

$$=\iint_{\Sigma}\frac{1}{z\cos^2 z}dxdy+\iint_{\Sigma}\frac{1}{\cos^2 z}dxdy \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 4分$$

$$\iint_{\Sigma}\frac{1}{\cos^2 z}dxdy=\iint_{x^2+y^2\le 1}\frac{1}{\cos^2\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy-\iint_{x^2+y^2\le 1}\frac{1}{\cos^2(-\sqrt{1-x^2-y^2})}dxdy=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 6分$$

因此，

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{1}{z\cos^2 z}dxdy$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le 1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}\cos^2\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy-\iint_{x^2+y^2\le 1}\frac{1}{-\sqrt{1-x^2-y^2}\cos^2\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=2\iint_{x^2+y^2\le 1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}\cos^2\sqrt{1-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}\cos^2\sqrt{1-\rho^2}}\rho d\rho$$

$$=-4\pi\int_0^1\frac{1}{\cos^2\sqrt{1-\rho^2}}d\sqrt{1-\rho^2}$$

$$=-4\pi\left[\tan\sqrt{1-\rho^2}\right]_0^1=4\pi\tan 1. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 10分$$