



第四章 连续时间系统的复频域分析

主讲人 杨明强
山东大学信息学院

频域---FT ----- $e^{j\omega t}$

FT enables us to do a lot of things, e.g.

—**Analyze frequency response of LTI systems**

—**Modulation**

讨论：为什么
将 $e^{j\omega t}$ 换成 e^{st} ，
就能将不满足
绝对可积的函
数实现积分变
换。

**FT cannot handle large (and important) classes of
signals and unstable systems, i.e. when**

$$e^{at}u(t) \quad a > 0 \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \infty$$

复频域---LT ----- $e^{st} \quad (s = \sigma + j\omega)$

发展简介

Pierre-Simon Laplace



20 世纪 20 年代，英国电气工程师赫维赛德（**Oliver Heaviside**, 1850 — 1925 ）提出了应用于电工理论中的微积分算子法（运算术）——行之有效，但缺乏严格的数学证明。

法国数学家和天文学家拉普拉斯（**Pierre Simon de Laplace**, 1749—1827）1779 年在发表题为 “On What Follows ” 论文中提出的一些积分方法为算子法提供严密的数学基础。到 20 世纪 30 年代中期出现的拉普拉斯变换法，历经一个多世纪。

Laplace Transform (LT)

LT is as an extension of the FT to allow analysis of broader class of signals and systems

- 拉普拉斯变换是求解常系数线性微分方程的工具, 使求解方程得到简化, 且初始条件自动包含在变换式里 → 全响应
- 利用系统函数零点、极点分布分析系统的行为规律 → 稳定性分析

§ 4.1 拉普拉斯变换及其收敛域



1、从FT到LT

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) \quad \begin{cases} F(\omega) = F[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \\ f(t) = F^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega \end{cases}$$

存在条件 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$

引入：衰减因子 $e^{-\sigma t}$ (σ 为实常数)

选择合适的 σ 使得： $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}[f(t)e^{-\sigma t}] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt = F(\sigma+j\omega) \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$f(t)e^{-\sigma t} = \mathcal{F}^{-1}[F(\sigma+j\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma+j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma+j\omega) e^{(\sigma+j\omega)t} d\omega \quad (2)$$

设: $s = \sigma + j\omega$ (复频率), $d\omega = ds/j$

(Bilateral LT)

$$\begin{cases}
 F_b(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \\
 f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F_b(s)e^{st} ds
 \end{cases}$$

说明:

$$1 \cdot \begin{cases} F_b(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt & \text{正变换} \\ f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_b(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F_b(s) e^{st} ds & \text{逆变换} \end{cases}$$

$f(t)$ 称为原函数, $F_b(s)$ 或 $F(s)$ 称为象函数

2• 采用0_系统的单边拉氏变换: 拉普拉斯变换记作:

$$\begin{cases} F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{0_-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt & f(t) \leftrightarrow F(s) \\ f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds & \text{或 } \mathcal{L}[f(t)] \end{cases}$$

双边拉普拉斯变换

记作: $f(t) \leftrightarrow F_b(s)$

2、拉普拉斯变换的收敛域

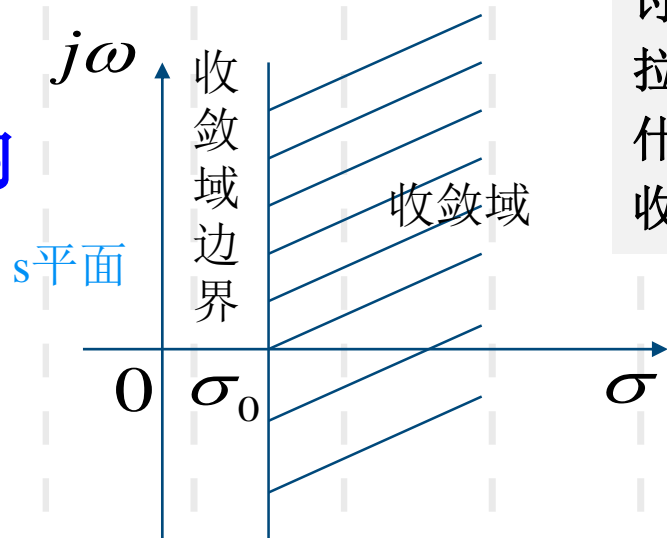
使得 $f(t)e^{-\sigma t}$ 满足绝对可积条件的 σ 值范围，称为 $f(t)$ 的拉普拉斯收敛域ROC (region of convergence)

对于单边拉普拉斯变换，使得 $f(t)e^{-\sigma t}$ 在 $t \rightarrow +\infty$ 的极限等于零时的 σ 值范围，即：

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-\sigma t} = 0, \quad (\sigma > \sigma_0)$$

根据 σ_0 的值可以在s平面内划出收敛域：

收敛域边界：通过 σ_0 垂线；
收敛坐标： σ_0



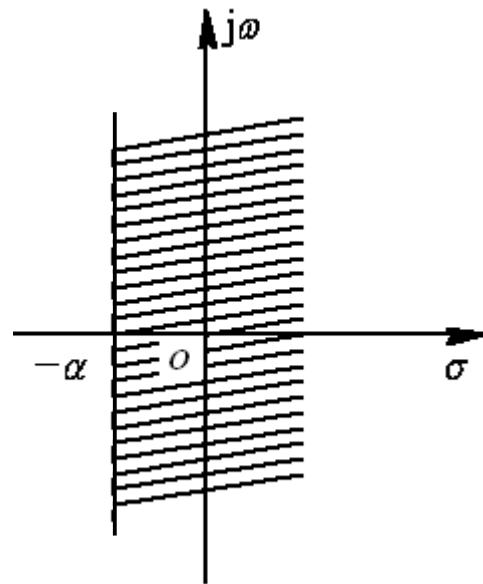
讨论：拉普拉斯变换为什么要说明收敛域



例 4-1 ①（类似）求因果信号 $f_2(t)=e^{-\alpha t}\varepsilon(t)(\alpha>0)$ 的双边拉氏变换及其收敛域。

解 设 $f_2(t)$ 的双边拉氏变换为 $F_2(s)$, 则

$$F_2(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t} \varepsilon(t) e^{-st} dt$$



即当 $\sigma > -\alpha$ 时, 积分收敛。因此得

$$\begin{aligned} F_2(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t} \varepsilon(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+\alpha)t} dt = -\frac{1}{s+\alpha} e^{-(s+\alpha)t} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{s+\alpha} \quad \text{Re}[s] > -\alpha \end{aligned}$$

实际中的信号都是有起始时刻的 ($t < t_0$ 时 $f(t) = 0$)，若起始时刻 $t_0 = 0$ ，则 $f(t)$ 为因果信号。因果信号的双边拉普拉斯变换的积分下限为“0”，即因果信号的双边拉普拉斯变换即为单边拉普拉斯变换。

由以上例题可知：一般的，只要 σ 取足够大，都可以使有始信号 $f(t)$ 满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-\sigma t} = 0$ ，即单边拉普拉斯变换一定存在。

某些函数随时间的增长较指数函数更快，如 e^{t^2} 、 t^t 等，其单边拉普拉斯变换不存在。

例 4-1 ② (类似) 求反因果信号 $f_3(t) = -e^{-\beta t}\varepsilon(-t)$ ($\beta > 0$) 的双边拉氏变换及其收敛域。

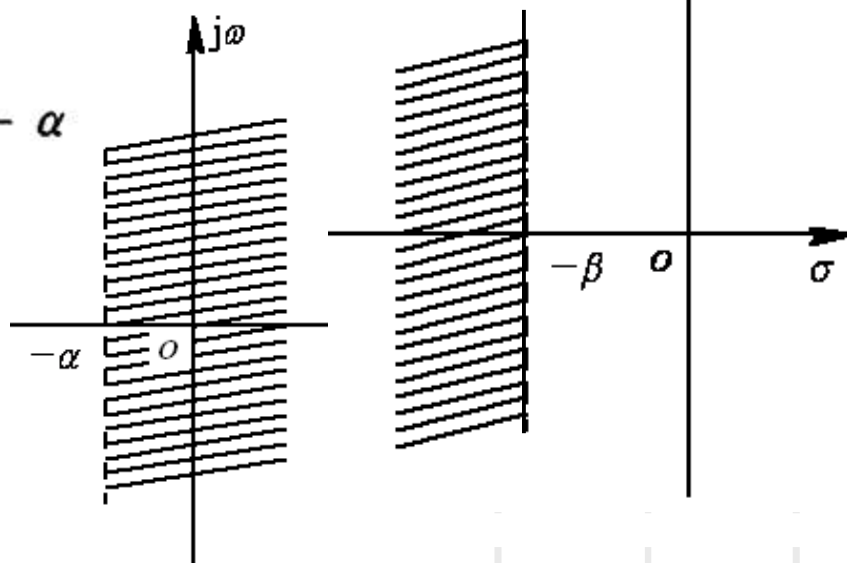
$$F_3(s) = \int_{-\infty}^{\infty} [-e^{-\beta t}\varepsilon(-t)]e^{-st} dt = \int_{-\infty}^0 -e^{-(s+\beta)t} dt = \frac{1}{s+\beta} e^{-(s+\beta)t} \Big|_{-\infty}^0$$

$$\text{Re}[s] + \beta < 0$$

$$f_2(t) = e^{-\alpha t}\varepsilon(t) \quad (\alpha > 0)$$

$$\frac{1}{s + \alpha}$$

$$\text{Re}[s] > -\alpha$$



例 4-1 ③（类似）求时限信号 $f_1(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-\tau)$ 的双边拉氏变换及其收敛域。式中， $\tau>0$ 。

解：（注： $\varepsilon(t)=u(t)$ ）

$$\begin{aligned} F_1(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} [\varepsilon(t) - \varepsilon(t - \tau)] e^{-st} dt = \int_0^{\tau} e^{-st} dt \\ &= -\left. \frac{1}{s} e^{-st} \right|_0^{\tau} = \frac{1 - e^{-s\tau}}{s} \quad \text{Re}[s] > -\infty \end{aligned}$$

收敛域为整个s平面



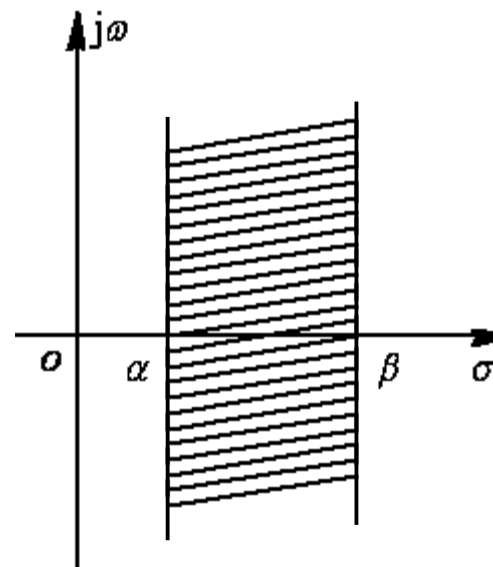
例 4-1 ④ (类似) 时限双边信号 $f_4(t) = e^{\alpha t} \epsilon(t) - e^{\beta t} \epsilon(-t)$ 的双边拉氏变换及其收敛域。
式中, $\alpha > 0, \beta > 0, \beta > \alpha$ 。

解 设 $f_4(t)$ 的双边拉氏变换为 $F_4(s)$, 则

$$F_4(s) = \int_{-\infty}^{\infty} [e^{\alpha t} \epsilon(t) - e^{\beta t} \epsilon(-t)] e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{\alpha t} e^{-st} dt - \int_{-\infty}^0 e^{\beta t} e^{-st} dt \quad (4.1-9)$$

式(4.1-9)中第一项积分在 $\sigma = \text{Re}[s] > \alpha$ 时收敛, 第二项积分在 $\sigma < \beta$ 时收敛, 因此, $F_4(s)$ 的收敛域为 $\alpha < \sigma < \beta$ 。于是得

$$\begin{aligned} F_4(s) &= \int_0^{\infty} e^{(\alpha-s)t} dt - \int_{-\infty}^0 e^{(\beta-s)t} dt = \frac{1}{\alpha-s} e^{(\alpha-s)t} \Big|_0^{\infty} - \frac{1}{\beta-s} e^{(\beta-s)t} \Big|_{-\infty}^0 \\ &= \frac{2s - \alpha - \beta}{(s - \alpha)(s - \beta)} \quad \alpha < \text{Re}[s] < \beta \end{aligned}$$



双边拉普拉斯变换的收敛域

双边拉普拉斯变换可以看成因果信号与非因果信号两个单边拉普拉斯变换的迭加。

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

$f_1(t)$ 表示 $t > 0$ 时的信号， $f_2(t)$ 表示 $t < 0$ 时的信号

$$\begin{aligned} E_b(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^0 f_2(t)e^{-st} dt + \int_0^{\infty} f_1(t)e^{-st} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 f_2(-t)e^{st} dt + \int_0^{\infty} f_1(t)e^{-st} dt \end{aligned}$$

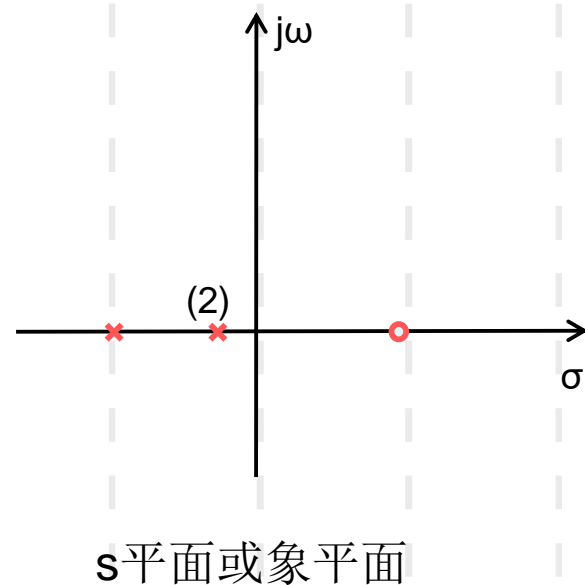
对于第一项 $\text{Re}[s] = \sigma$ 必须小于某个值，收敛域有右边界 σ_R ，第二项同前有左边界 σ_L 。如果 $\sigma_L < \sigma_R$ ，则两个积分有公共收敛域，双边拉普拉斯变换存在，否则无公共收敛域，双边拉普拉斯变换不存在。

工程上常用像函数形式:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

分母多项式 $A(s)$ 为系统的**特征多项式**;
 $A(s)=0$, 为系统的特征方程, 其根叫
特征根, 或象函数 $F(s)$ 的**极点**; 在 s
平面上用“ \times ”表示;

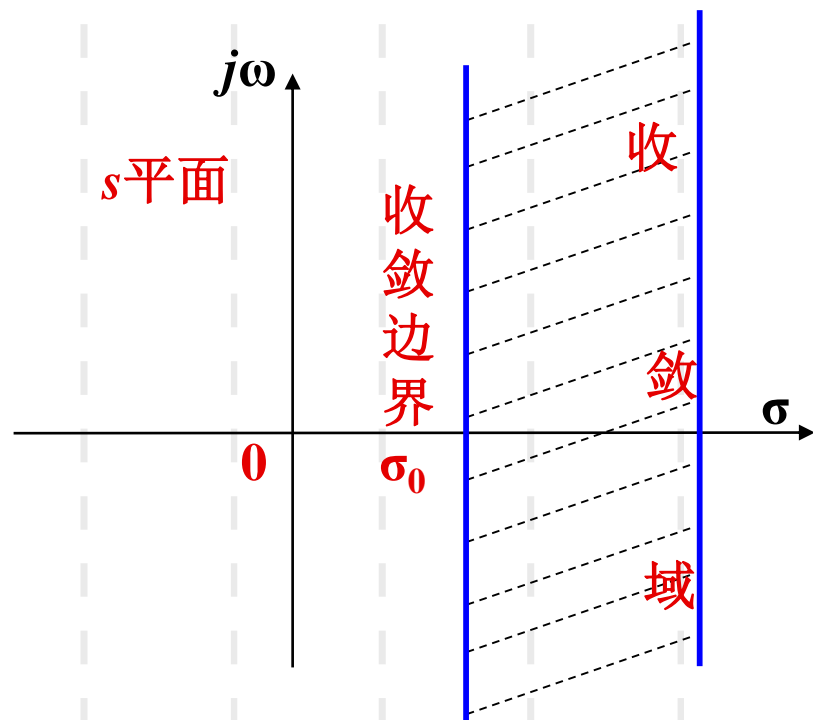
分子多项式 $B(s)=0$ 的根称为象函数
 $F(s)$ 的**零点**。在 s 平面上用“ \circ ”表示;
 r 重极点或零点, 在极点或零点旁标
注以 (r)



结论:

牢记该页结论!

- 1、收敛域在 s 平面是一个平行于 $j\omega$ 轴的有限或无限宽的带状连通区域。
- 2、收敛域内不包括任何极点。
- 3、因果（右边）信号 $F(s)$ 的收敛域为收敛边界的右边域；
- 4、反因果（左边）信号 $F(s)$ 的收敛域为收敛边界的左边域；
- 5、双边信号 $F(s)$ 的收敛域为收敛带；
- 6、时限信号 $F(s)$ 的收敛域为整个 s 平面。



注意：不同函数的双边拉普拉斯变换可能相同，即函数与其双边拉普拉斯变换不是一一对应的。函数的双边拉普拉斯变换连同收敛域一起与函数才是一一对应的。

说明：双边拉普拉斯变换的收敛域比较复杂，并且信号与其双边拉普拉斯变换不是一一对应，这就使其应用受到限制。

单边拉普拉斯变换收敛域简单，计算方便，且在工程上应用广泛，因此线性连续系统的复频域分析主要使用单边拉普拉斯变换。