《通信原理》第二章

主讲教师：朱维红

学习目标

- 复习傅里叶级数，写成周期信号傅里叶级数公式，能够求出典型周期信号的傅里叶级数。
- 复习傅里叶变换，写出信号傅里叶变换对的公式，列举傅里叶变换的性质，求出典型信号的傅里叶变换。
- 复习功率与能量，区分功率信号和能量信号，计算信号功率或能量，求出信号的自相关函数、能谱密度或功率谱密度。

Chapter 2 信号与系统的频域分析（复习）

- 2.1 傅立叶级数——Fourier Series
- 2.2 傅立叶变换——Fourier Transforms
- 2.3 功率和能量——Power and Energy
- 2.4 带宽受限信号的抽样——Sampling of Bandlimited Signals
- 2.5 带通信号——Bandpass Signals (new)

主观题 10分

设置

已知周期信号$x(t)$的周期为T_0，请写出其傅里叶级数，并用其傅里叶级数作为系数，写出$x(t)$的表达式

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

2.1 Fourier Series (傅立叶级数)

Theorem 2.1.1 [fourier Series] 设信号$x(t)$是周期为T_0的周期信号，如果满足下列条件：

1. $x(t)$ 在其周期上绝对可积,

$$\int_0^{T_0} |x(t)|\,dt < \infty$$

2. $x(t)$在每个周期中的最大值和最小值的个数是有限的,
3. $x(t)$在每个周期中的不连续点的个数是有限的。

则$x(t)$可按复指数信号 $\left\{e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 扩展成傅立叶级数的形式：

2.1 Fourier Series (傅立叶级数)

$$x_{\pm}(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t}$$

其中对任意的α有

$$x_n=\frac{1}{T_0}\int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t)e^{-j2\pi\frac{n}{T_0}t}dt$$

x_n称为$x(t)$的傅立叶级数的系数

$$x_{\pm}(t)=\begin{cases} x(t) \quad if \quad x(t) \quad is \quad continuous \quad at \quad t \\ \dfrac{x(t^+)+x(t^-)}{2} \quad if \quad x(t) \quad is \quad discontinuous \quad at \quad t \end{cases}$$

2.1 Fourier Series (傅立叶级数)

- *Note 1*：$f_0=1/T_0$ 称为信号**$x(t)$**的基频（**fundamental frequency**），其**n**倍称为**n**次谐波（**harmonic**）
- *Note 2*：傅立叶级数的角频率$\omega_0=2\pi f_0$的形式为

$$x_n = \frac{\omega_0}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+\frac{2\pi}{\omega_0}} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

和

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{j2\pi\omega_0 t}$$

2.1 Fourier Series (傅立叶级数)

- *Note 3*: $x_n = |x_n|e^{j\angle x_n}$， $|x_n|$ **n次谐波的振幅**

  $\angle x_n$ 是其相位. 它们都是离散谱. (Figure2.1).

- *Note 4*: 若$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$是实信号，则

$$x_{-n} = x_n^*$$

对周期实信号x(t), 正负系数呈共轭关系，因此,
$|x_n|$ 关于n=0 偶对称， $\angle x_n$ 关于n=0奇对称.

2.1 Fourier Series (傅立叶级数)

- *Note 5*: 三角级数展开。对实信号 $x(t)$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(2\pi \frac{n}{T_0} t) + b_n \sin(2\pi \frac{n}{T_0} t) \right]$$

where

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t) \cos(2\pi \frac{n}{T_0} t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t) \sin(2\pi \frac{n}{T_0} t) dt$$

2.1 Fourier Series (傅立叶级数)

- 例 2.1.1

设$x(t)$ 代表Figure 2.1 所示的周期信号，其表达式如下

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\prod\left(\frac{t-nT_0}{\tau}\right) \qquad \prod(t)=\begin{cases}1, & |t|<\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}, & |t|=\frac{1}{2}\\ 0, & |t|>\frac{1}{2}\end{cases}$$

请确定其傅立叶级数

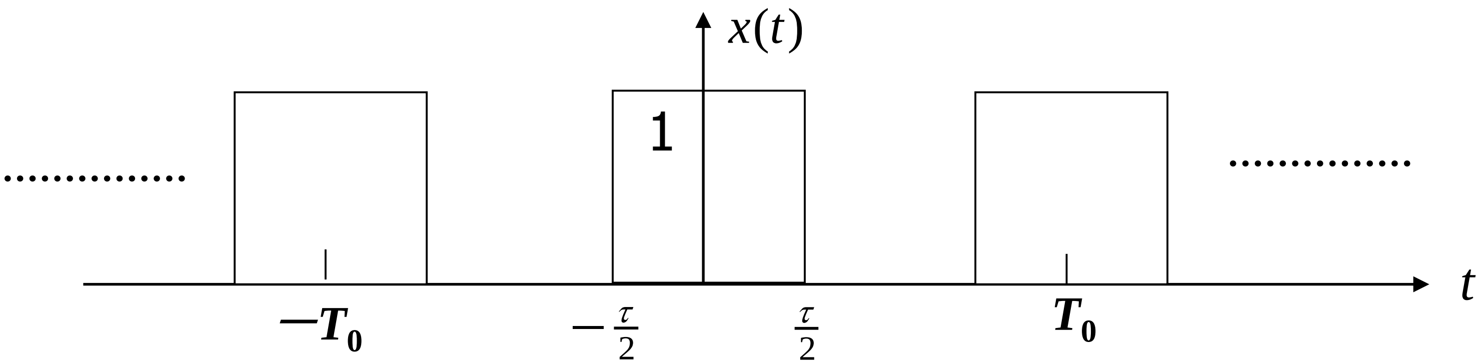


Figure 2.1

2.1 Fourier Series (傅立叶级数)

- **Solution The period of the signal is T_0, so**

$$x_n = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-jn\frac{2\pi t}{T_0}}dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} 1\cdot e^{-jn\frac{2\pi t}{T_0}}dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\frac{T_0}{-jn2\pi}\left[e^{-jn\frac{\pi\tau}{T_0}} - e^{+jn\frac{\pi\tau}{T_0}}\right]$$

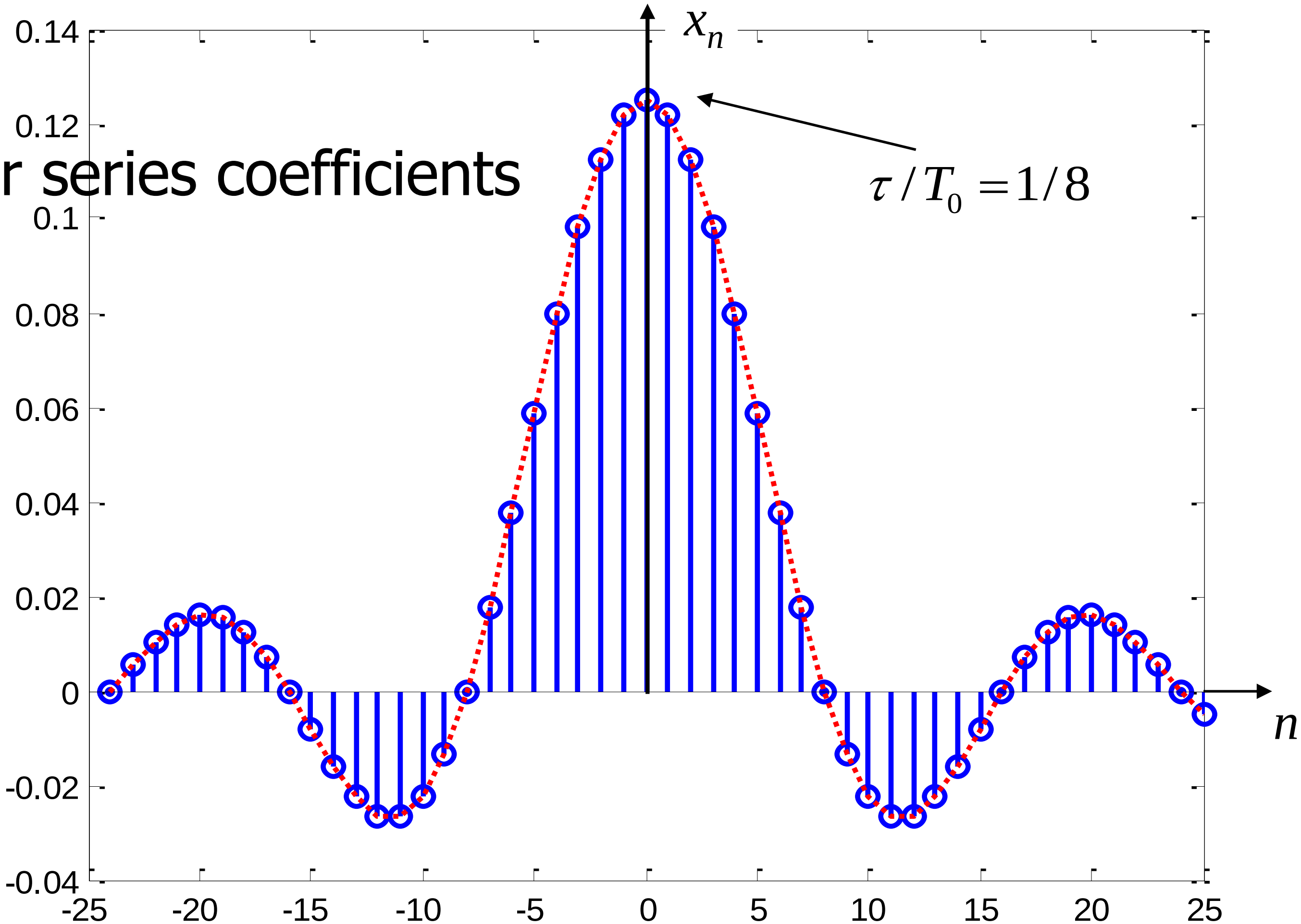
$$= \frac{1}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi\tau}{T_0}\right) = \frac{\tau}{T_0}\sin c\left(\frac{n\tau}{T_0}\right)$$

$$where \qquad \sin c\,(t) = \sin(\pi t)\,/(\pi t)$$

$$so \qquad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\tau}{T_0}\sin c\left(\frac{n\tau}{T_0}\right)e^{jn\frac{2\pi t}{T_0}}$$

2.1 Fourier Series (傅立叶级数)

Fourier series coefficients



已知信号$x(t)$满足Dirichlet 条件，请写成其傅里叶变换$X(f)$,及傅里叶逆变换。

2.2 Fourier Transforms (傅立叶变换)

Theorem 2.2.1. [傅立叶变换] 如果信号 $x(t)$ 满足 **Dirichlet 条件, 即,**

1. ***x(t)*** **在实直线上绝对可积, 即**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$$

2. 其在实直线上任何有限间隔内的最大值和最小值是有限的;
3. 其在实直线上任何有限间隔内的不连续点的数量是有限的，则$\boldsymbol{x}(t)$的傅立叶变换定义为：

2.2 Fourier Transforms (傅立叶变换)

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$x_{\pm}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} dt$$

Note 1: $X(f)$ 称为是信号$x(t)$的频谱，通常为复数函数。

2.2 Fourier Transforms (傅立叶变换)

Note 2: 傅立叶变换的基本性质

- 线性. 如果 $x_1(t) \Leftrightarrow X_1(f)$ $x_2(t) \Leftrightarrow X_2(f)$

  则 $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \Leftrightarrow \alpha X_1(f) + \beta X_2(f)$

- 对称性： 如果 $X(f) \Leftrightarrow x(t)$，则 $x(f) \Leftrightarrow X(-t)$

  和 $x(-f) \Leftrightarrow X(t)$

- 时移特性： $x(t - t_0) \Leftrightarrow e^{-j2\pi f t_0} X(f)$

- 尺度特性： $x(at) \Leftrightarrow \frac{1}{a} X(\frac{f}{a})$

2.2 Fourier Transforms (傅立叶变换)

- **卷积特性**： $x(t) * y(t) \Leftrightarrow X(f)Y(f)$
- **调制特性**： $x(t)e^{j2\pi f_0 t} \Leftrightarrow X(f-f_0)$

$$x(t)\cos(2\pi f_0 t) \Leftrightarrow \frac{1}{2}X(f-f_0) + \frac{1}{2}X(f+f_0)$$

- **Parseval's 特性**：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y^*(f)df$$

2.2 Fourier Transforms (傅立叶变换)

- **Rayleigh 特性：**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

- **自相关特性：**

$$R_x(\tau) \Leftrightarrow |X(f)|^2$$

2.2 Fourier Transforms (傅立叶变换)

- 微分特性：$\frac{d}{dt}x(t) \Leftrightarrow j2\pi f X(f)$

- 积分特性：$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \Leftrightarrow \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2}X(0)\delta(f)$

- 矩特性：$\int_{-\infty}^{+\infty} t^n x(t)dt = \left(\frac{j}{2\pi}\right)\frac{d^n}{df^n}X(f)|_{f=0}$

- 实信号：$X(-f) = X^*(f)$

$$|X(-f)| = |X(f)|$$

$$\angle X(-f) = -\angle X(f)$$

2.2 Fourier Transforms (傅立叶变换)

Note 3. 周期信号的傅立叶变换

若 x(t) 是周期信号，则

$$X(f)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \delta\left(f-\frac{n}{T_0}\right)$$

其中

$$x_n=\frac{1}{T_0} X_{T_0}\left(\frac{n}{T_0}\right)$$

2.2 Fourier Transforms (傅立叶变换)

- *Note 4:*

$$\delta(t) \Leftrightarrow 1$$

$$\Pi(t) \Leftrightarrow \operatorname{sinc}(f)$$

$$\cos(2\pi f_0 t) \Leftrightarrow \tfrac{1}{2}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f - f_0)\right]$$

$$\sin(2\pi f_0 t) \Leftrightarrow \tfrac{1}{2j}\left[\delta(f - f_0) - \delta(f - f_0)\right]$$

$$\Lambda(t) \Leftrightarrow \operatorname{sinc}^2(f)$$

$$\operatorname{sgn}(t) \Leftrightarrow 1/(j\pi f)$$

$$\vdots$$

请查阅表2.1

主观题 10分

设置

请分别写出确知信号$x(t)$能量和功率的定义式。

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

2.3 Power and Energy（功率和能量）

- *Energy* (能量). 信号 $x(t)$ 的能量定义为

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

- *Power* (功率）. 信号 $x(t)$ 的功率定义为

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

- 若 $x(t)$ 是周期为T_0的周期信号,则

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} |x(t)|^2 dt$$

2.3 Power and Energy （功率和能量）

2.3.1 Energy-Type Signals（能量型信号）.

若信号的能量 $E_x < \infty$，则该信号为能量型信号。

- 对能量型信号 ***x(t)***, 定义其自相关函数 $R_x(\tau)$ 为

$$R_x(\tau) = x(\tau) * x^*(-\tau)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)x^*(t)dt$$

其能量为：

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

2.3 Power and Energy （功率和能量）

- **Energy spectral density（能谱密度）：**

$$G_x(f) = \mathcal{F}[R_x(\tau)] = |X(f)|^2$$

2.3 Power and Energy （功率和能量）

2.3.2 Power-Type Signals （功率型信号）

若信号的功率满足 $0 < Px < \infty$，则称其为功率型信号。

- 功率型信号 $x(t)$ 的时间平均自相关函数定义为

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x^*(t-\tau)dt$$

其功率为：$P_x = R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)df$

其中 $S_x(f)$ 是该信号的功率谱密度，且有

$$S_x(f) \Leftrightarrow R_x(\tau), or, S_x(f) = \mathcal{F}[R_x(\tau)]$$

2.3 Power and Energy （功率和能量）

若功率型信号 $x(t)$ 经过冲激响应为 $h(t)$的滤波器，其输出为

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

则$y(t)$的时间平均自相关函数为

$$R_y(\tau)=R_x(\tau)*h(\tau)*h(-\tau)$$

且

$$S_y(f)=S_x(f)H(f)H^*(f)=S_x(f)|H(f)|^2$$

2.3 Power and Energy （功率和能量）

对于周期信号，有

$$R_x(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x_n|^2 e^{j2\pi\frac{n}{T_0}\tau}$$

$$S_x(f)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x_n|^2\delta(f-\frac{n}{T_0})$$

$$P_x=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x_n|^2$$

2.3 Power and Energy （功率和能量）

- 例 (problem 2.29) 判断下列信号是功率型信号还是能量型信号，或者两者都不是，并计算其功率或能量。

1. $x_1(t)=e^{-t}\cos t\cdot u(t)$

   Energy type and Ex=3/8

2. $x_2(t)=e^{-t}\cos t$

   Neither

3. $x_3(t)=\operatorname{sgn}(t)$

   Power type and Px=1

4. $x_4(t)=A\cos 2\pi f_1 t+B\cos 2\pi f_2 t$

   Power type and Px=0.5(A^2+B^2)

多选题 2分

设置

下列信号中，是能量信号的有

A $e^{-at}u(t), a > 0$

B $sgn(t)$

C $sinc(t) = \frac{sin(\pi t)}{\pi t}$

D $\sum_{i=-\infty}^{\infty} \prod(t - iT)$

提交

2.3 Power and Energy （功率和能量）

常见信号的分类

1、指数衰减信号：$e^{-at}u(t), a>0$ 能量型

2、单位阶跃函数： $u(t)$ 功率型

3、单位门函数序列：$\sum_{i=-\infty}^{\infty}\prod(t-iT)$ 功率型

4、抽样函数：$sinc(t)=\frac{sin(\pi t)}{\pi t}$ 能量型

5、符号函数：$sgn(t)$ 功率型

主观题 10分

设置

信号$x(t) = t, -\infty < t < \infty$是什么信号?

请写出判断过程。

学习目标

- 证明并熟练应用带限信号抽样定理。
- 解释带通信号的定义。
- 给定带通信号，能够求出其预包络、等效低通信号、同相和正交分量以及包络和相位。
- 复习希尔伯特变换的定义、性质。

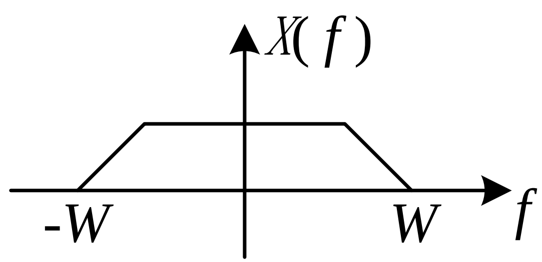
带限信号的定义

- 带限信号↔低通信号，信号的频谱范围为

$$|f| \le W$$

→基带信号。

对基带信号的采样是模拟信号数字化的第一步。



2.4 Sampling of Bandlimited Signals(带限信号抽样)

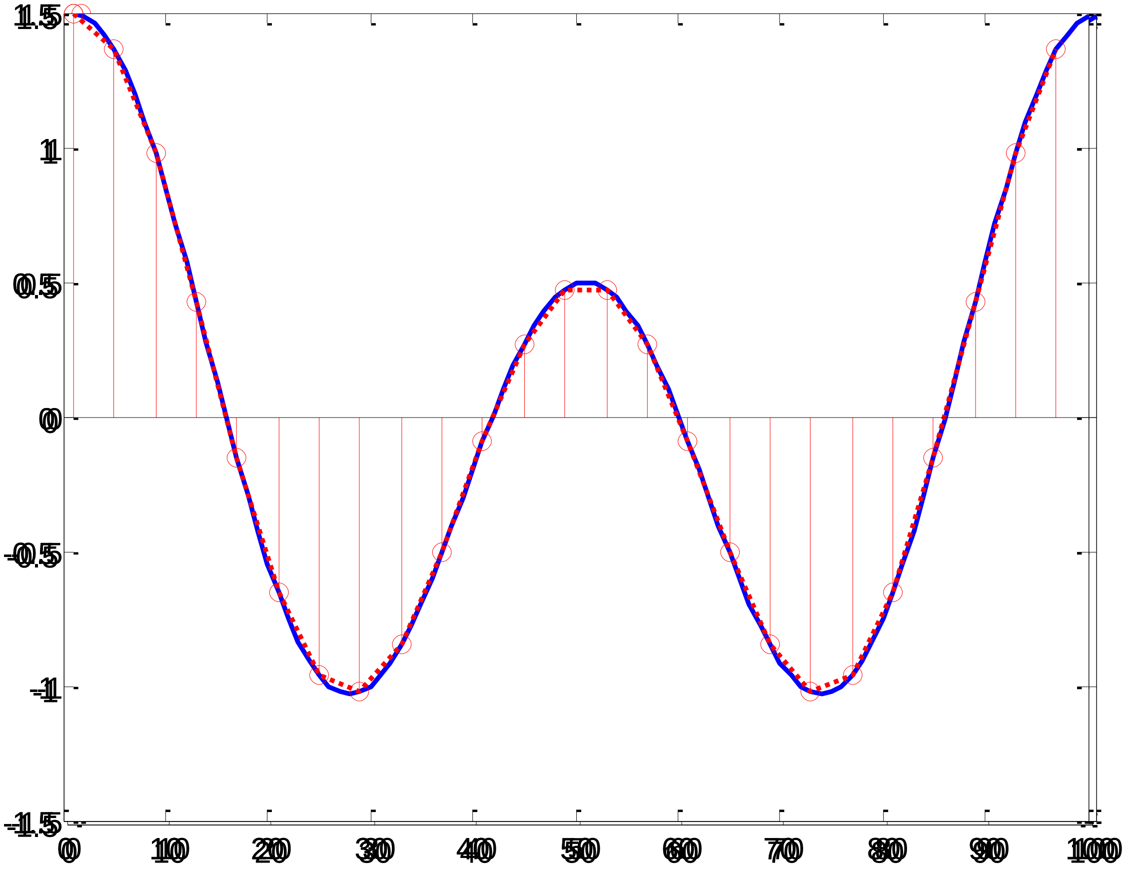


Figure 2.4.1 信号 x(t) 的采样

2.4 Sampling of Bandlimited Signals(带限信号抽样)

Theorem 2.4.1. [Sampling (抽样定理)] 假设信号 $x(t)$ 的带宽限制在 W; 即满足当 $|f|\geq W$ 时， $X(f)\equiv 0$。如果以抽样间隔T_s的倍数对 $x(t)$ 进行抽样，其中 $T_s\leq 1/2W$, 就可以得到序列$\{x(nT_s)\}_{n=-\infty}^{\infty}$,这样就可以由以下重构公式重构信号 $x(t)$。

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2W'T_s x(nT_s)\sin c\,[2W'(t-nT_s)]$$

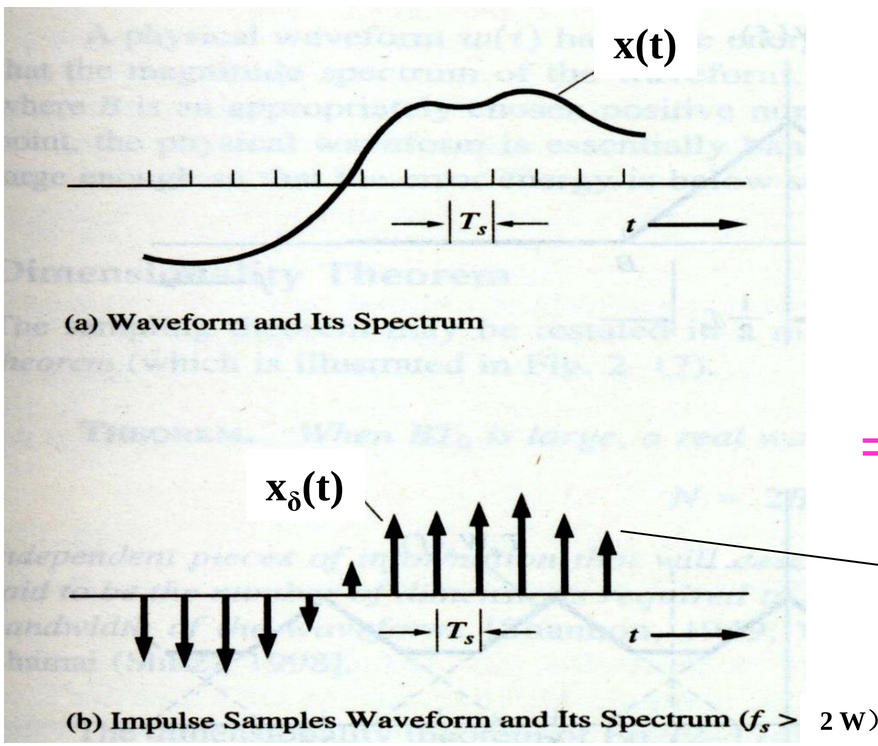
其中 W' 满足

$$W\leq W'\leq \frac{1}{T_s}-W$$

2.4 Sampling of Bandlimited Signals(带限信号抽样)

Theorem 2.4.1 (continue). T_s=1/2W 时, 重构公式简化为

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\sin c\left(\frac{t}{T_s}-n\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{n}{2W}\right)\sin c\left[2W\left(t-\frac{n}{2W}\right)\right]$$



左图中:

$$x_\delta(t)=x(t)\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t-nT_s)$$

理想抽样

2.4 Sampling of Bandlimited Signals(带限信号抽样)

Proof. 假设 $x_\delta(t)$ 表示在 nT_s 时刻进行脉冲抽样所得到的原始信号的抽样结果，有：

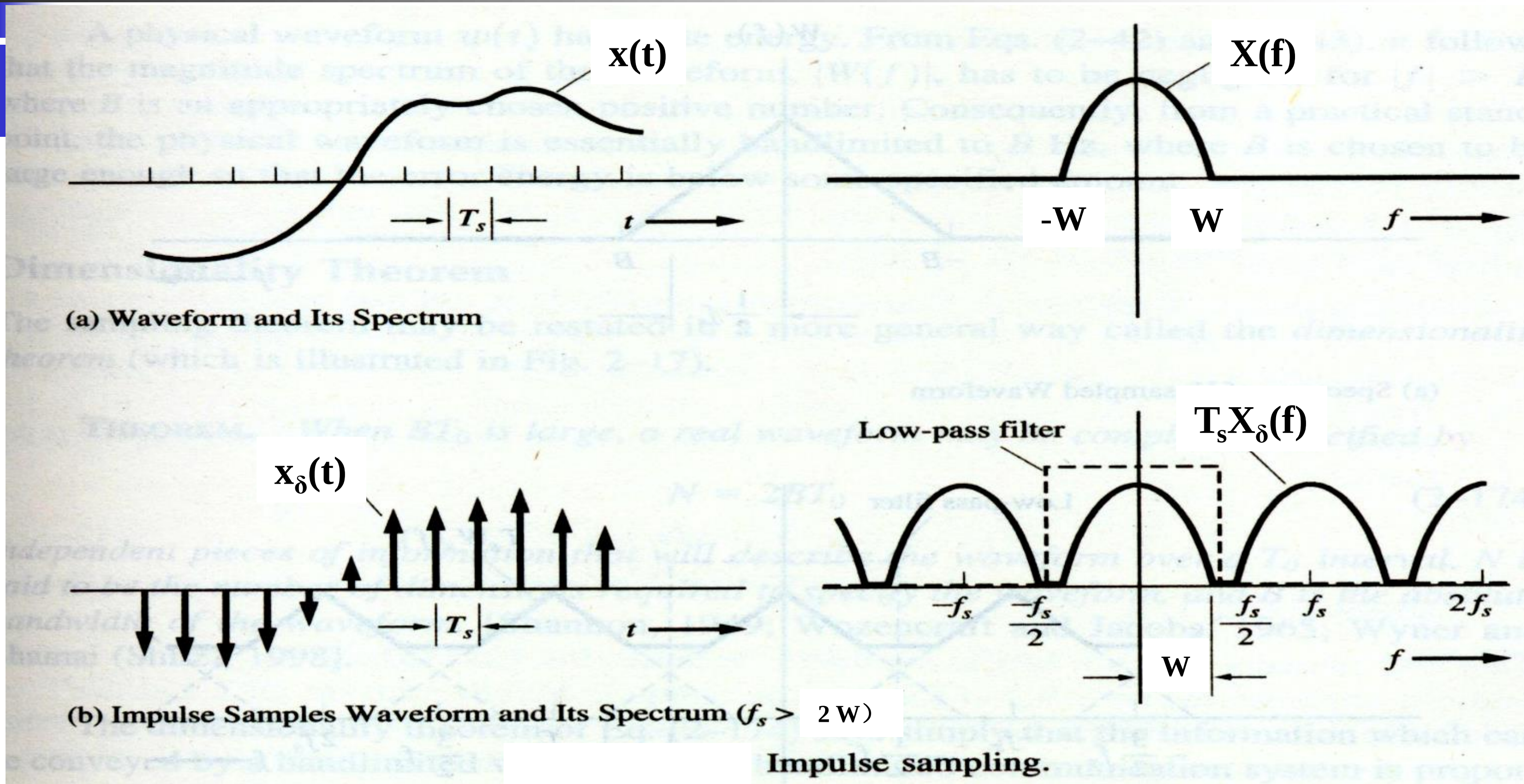
$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t-nT_s) = x(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_s)$$

傅里叶变换

$$X_\delta(f) = X(f) * \mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT_s)\right]$$

$$= X(f) * \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T_s}\right) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X\left(f-\frac{n}{T_s}\right)$$

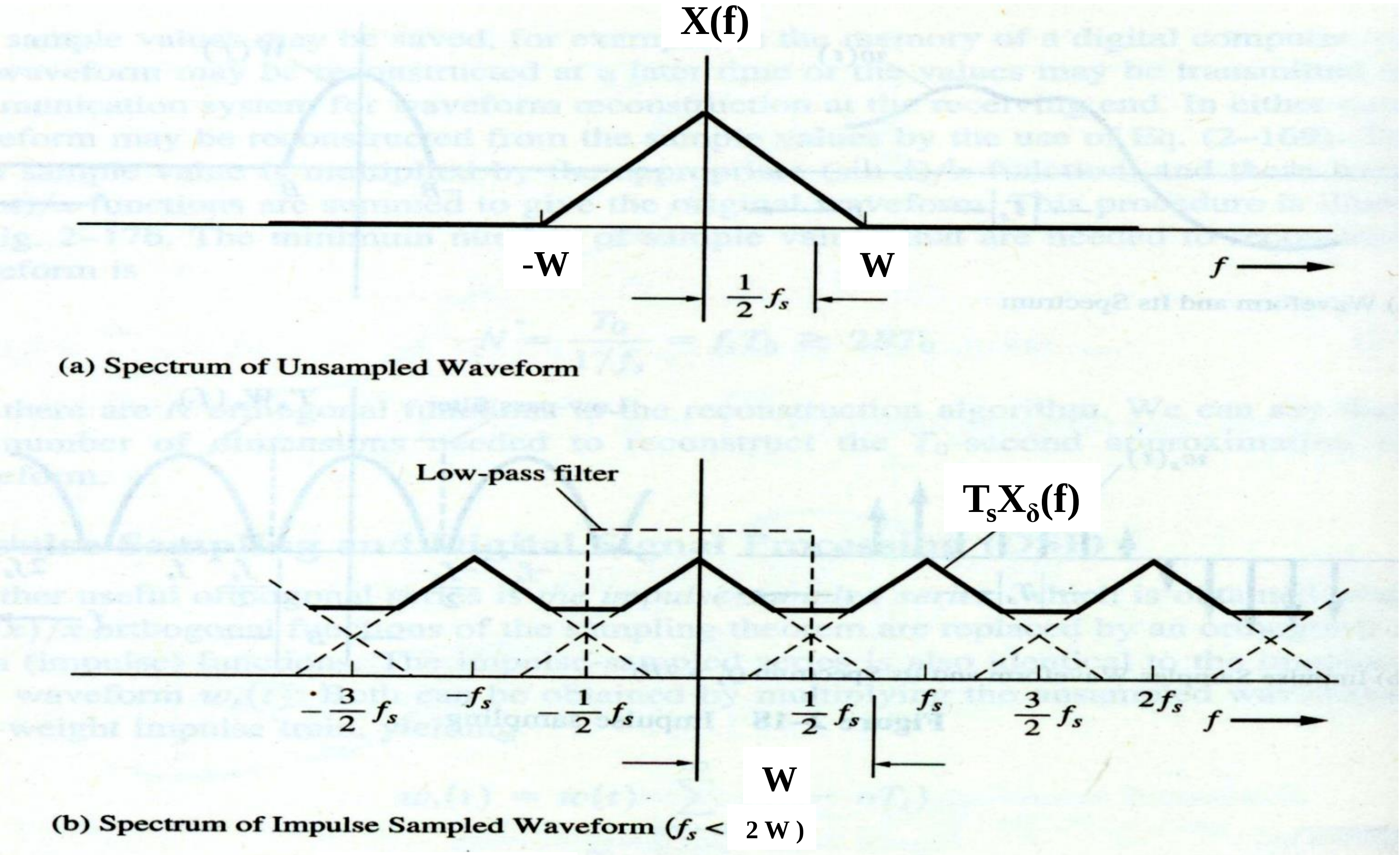
2.4 Sampling of Bandlimited Signals(带限信号抽样)



- 抽样信号的频谱是原信号频谱以频率 f_s Hz重复，其中 f_s 为抽样频率.

2.4 Sampling of Bandlimited Signals(带限信号抽样)

- *Notes1.* 若$T_s > \frac{1}{2W}$ or $W > \frac{f_s}{2}$会发生混叠失真.



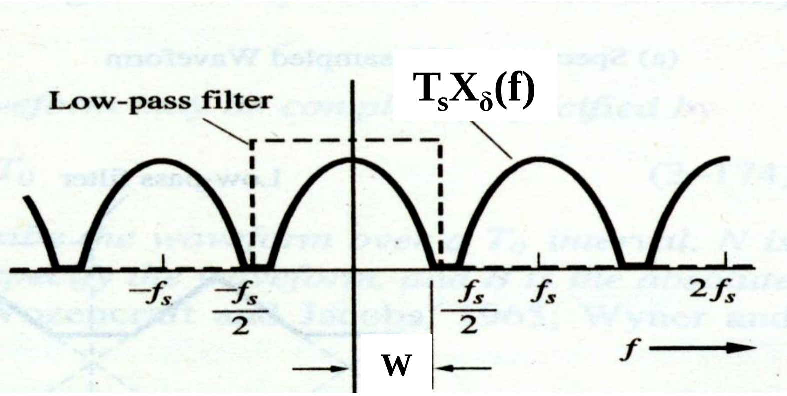
Undersampling and aliasing.

2.4 Sampling of Bandlimited Signals(带限信号抽样)

Notes 2. 若 $T_s < 1/2W$, $x(t)$ 可由 $X_\delta(f)$ 经过如下低通滤波器恢复。

$$H(f) = T_s \quad for \quad |f| < W \ \& \quad H(f) = 0 \quad for \quad |f| \geq \frac{1}{T_s} - W$$

$$H(f) = T_s \prod\left(\frac{f}{2W'}\right), where \quad W \leq W' < \frac{1}{T_s} - W$$



2.4 Sampling of Bandlimited Signals(带限信号抽样)

$$X(f) = X_\delta(f) T_s \prod\left(\frac{f}{2W'}\right)$$

傅里叶逆变换

$$x(t) = x_\delta(t) * 2W'T_s \sin c\,(2W't)$$

$$= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t-nT_s)\right) * 2W'T_s \sin c\,(2W't)$$

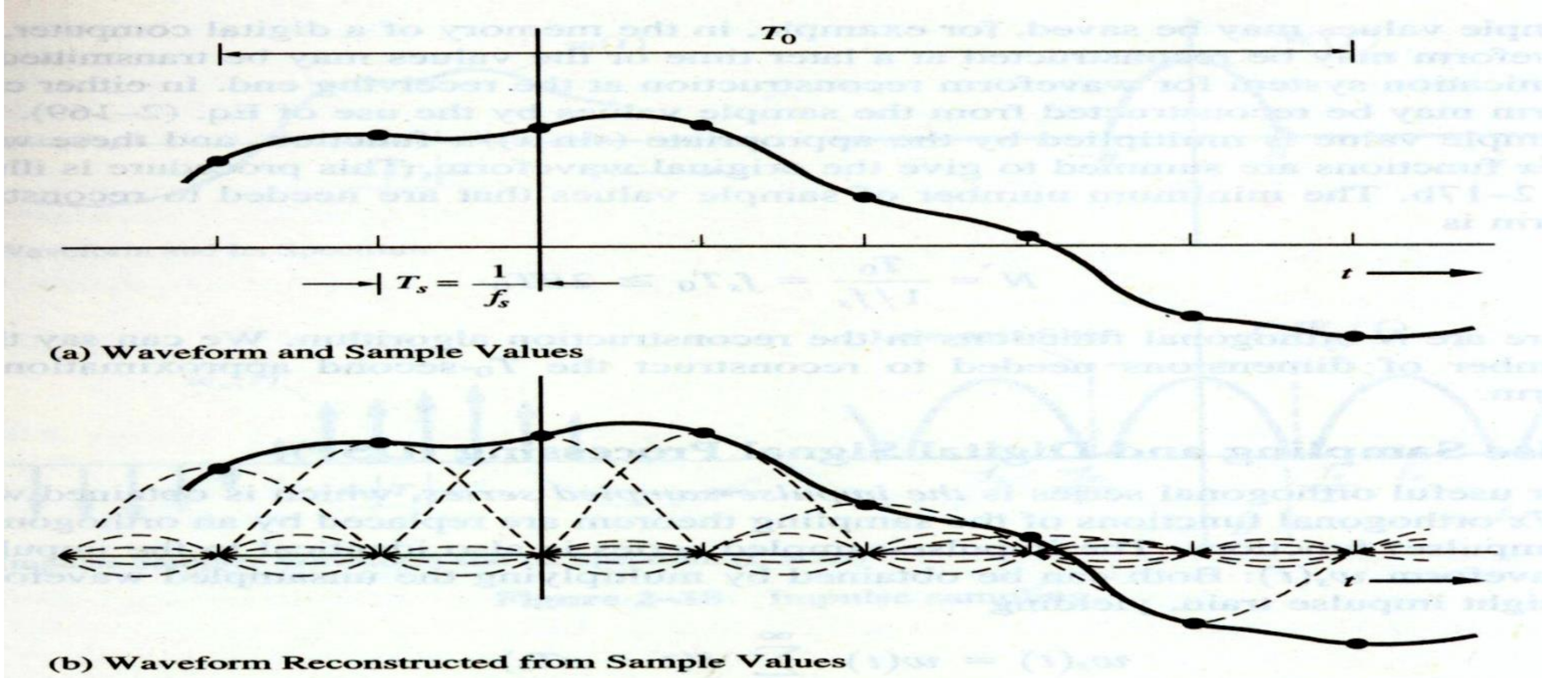
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2W'T_s x(nT_s) \sin c\,(2W'(t-nT_s))$$

若 $W' = W = 1/2Ts$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \sin c\,(\frac{t}{T_s} - n)$$

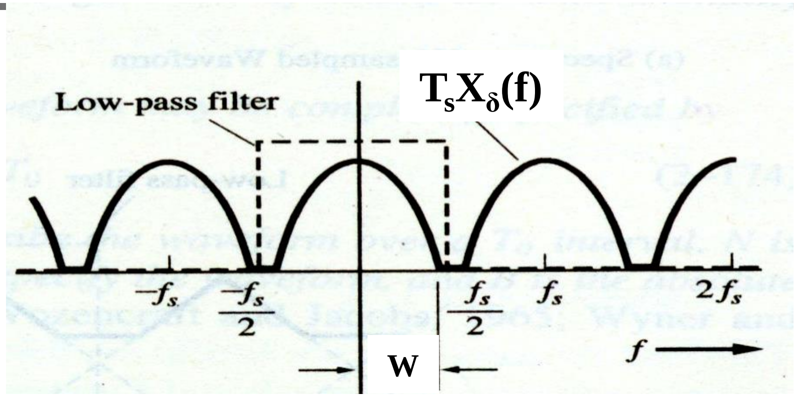
2.4 Sampling of Bandlimited Signals(带限信号抽样)

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\,\text{sin}\,c\left(\frac{t}{T_s} - n\right)$$



Sampling theorem.

2.4 Sampling of Bandlimited Signals(带限信号抽样)



- 很明显能够重构信号的最小抽样速率为$(f_s)_{min}$=2W，该速率也称为奈奎斯特速率（Nyquist frequency）

Note 3. 抽样保护间隔： $1/T_s - 2W$

投票 最多可选4项

设置

正弦信号$x(t) = A\sin(2\pi f_c t)$ 的抽样频率是多少？

A f_c

B $2f_c$

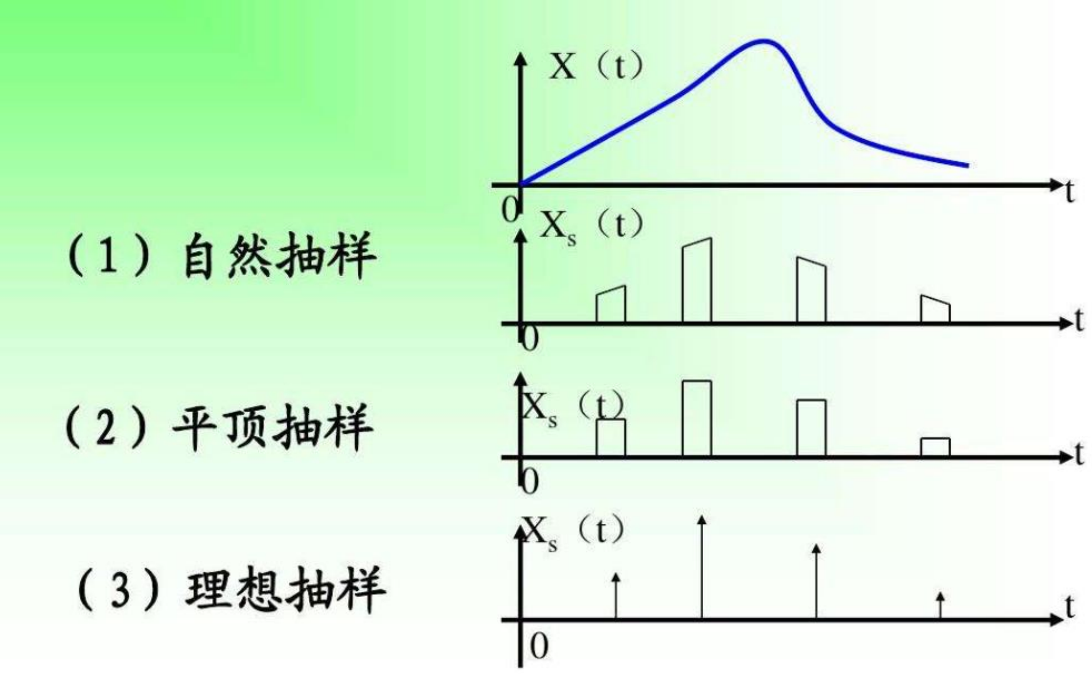
C $3f_c$

D $4f_c$

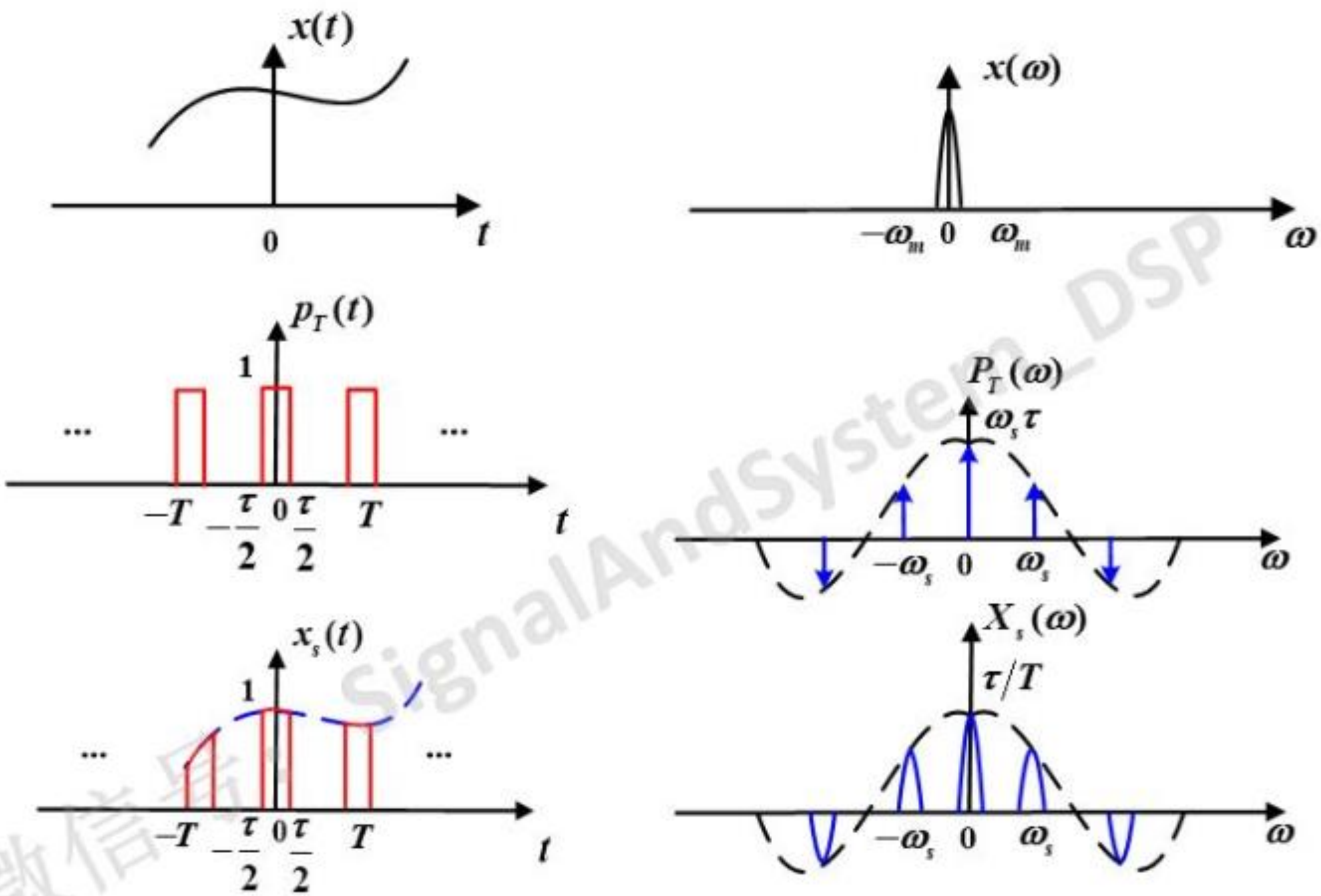
提交

2.4 Sampling of Bandlimited Signals(带限信号抽样)

- 思考：实际的抽样是如何完成的？会有什么问题？



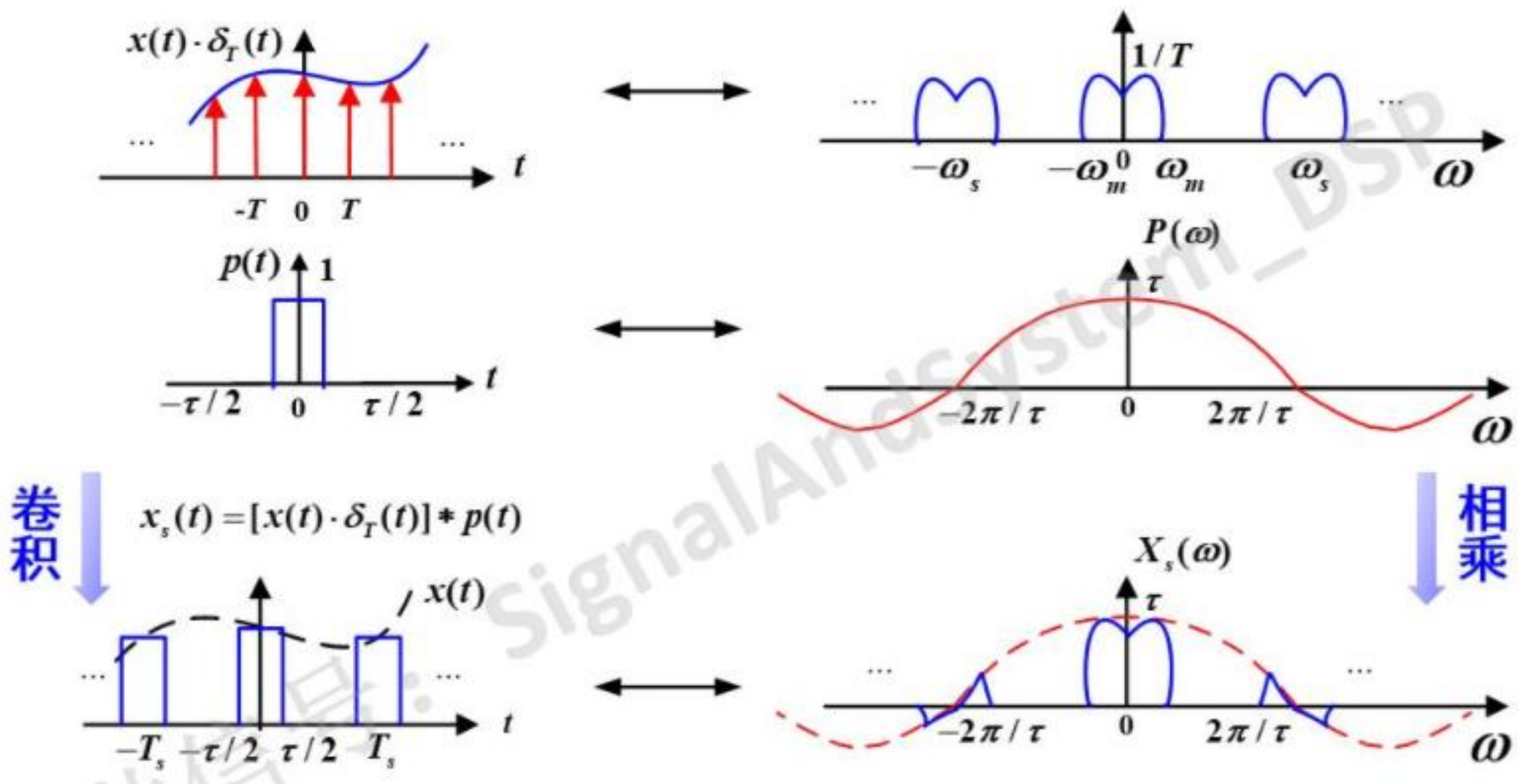
自然（曲顶）抽样



$$x_s(t) = x(t)p_T(t)$$

$$X_s(\omega) = \frac{\tau}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} Sa\left(\frac{k\omega_s\tau}{2}\right)X(\omega - k\omega_s)$$

平顶抽样-抽样保持



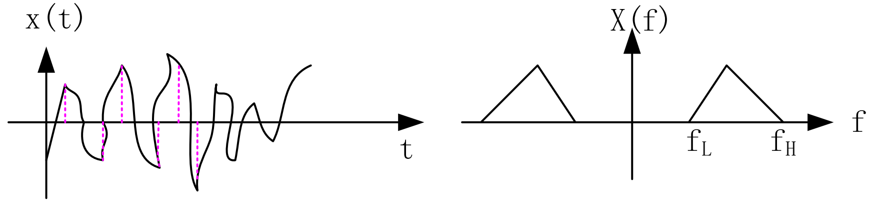
$$X_s(\omega)=\frac{\tau}{T}Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(\omega-k\omega_0)$$

2.4 Sampling of Bandlimited Signals(带限信号抽样)

- 信号很难严格带限，故抽样前需要抗混叠滤波器。
- 平顶有孔径效应，需要克服。

实际应用场景：信号处理（语音、图像等）

带通信号抽样定理



一个连续带通信号受限于$[f_L, f_H]$，其信号带宽为$B = f_H - f_L$，且有

$$f_H = mB + kB \qquad (1)$$

其中，$m = [f_H/(f_H - f_L)] - k$，$k$为不超过$f_H/(f_H - f_L)$的最大正整数，由此可知，必有$0 \le m < 1$。

则最低不失真取样频率$f_{s\min}$为

$$f_{s\min} = 2f_H/k = 2(mB + kB)/k = 2B\left(1 + \frac{m}{k}\right) \qquad (2)$$

即: $2B \le f_{s\,min} < 4B$

2.5 Bandpass Signal(带通信号)

目的：建立一种数学分析的方法，可以用复低通信号（complex lowpass signal）来分析带通（bandpass）或窄带信号（narrowband signal ）。

为什么要这样做？

2.5 Bandpass Signal(带通信号)

Definition 2.5.1. 带通或窄带信号 $x(t)$ (real-valued)的频域表达式$X(f)$ 在某个高频f_0 附近不为零，即满足 $X(f)\equiv 0$ for $|f-f_0|\geq W$, 其中 $W<<f_0$.

带通系统是一个允许某个高频f_0 附近的频率分量通过的系统，即满足 $H(f)=1$ for $|f-f_0|\leq W$，并且当频率分量范围超出此频带后迅速衰减.

或者说：带通系统就是其冲激响应为带通信号的系统。

2.5 Bandpass Signal(带通信号)

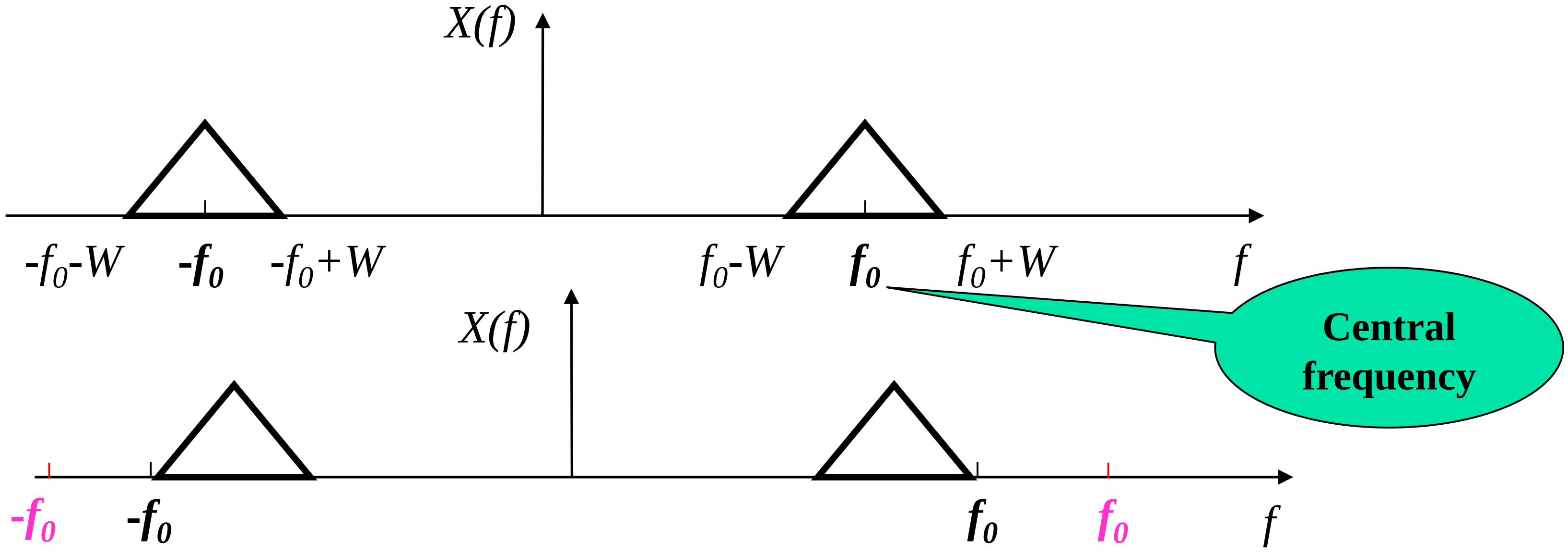


Figure 2.5.1 Example of narrowband signals

Note. 不要求 f_0 位于信号频带的中心，甚至可以位于信号频带之外。

2.5 带通信号（Bandpass Signal）

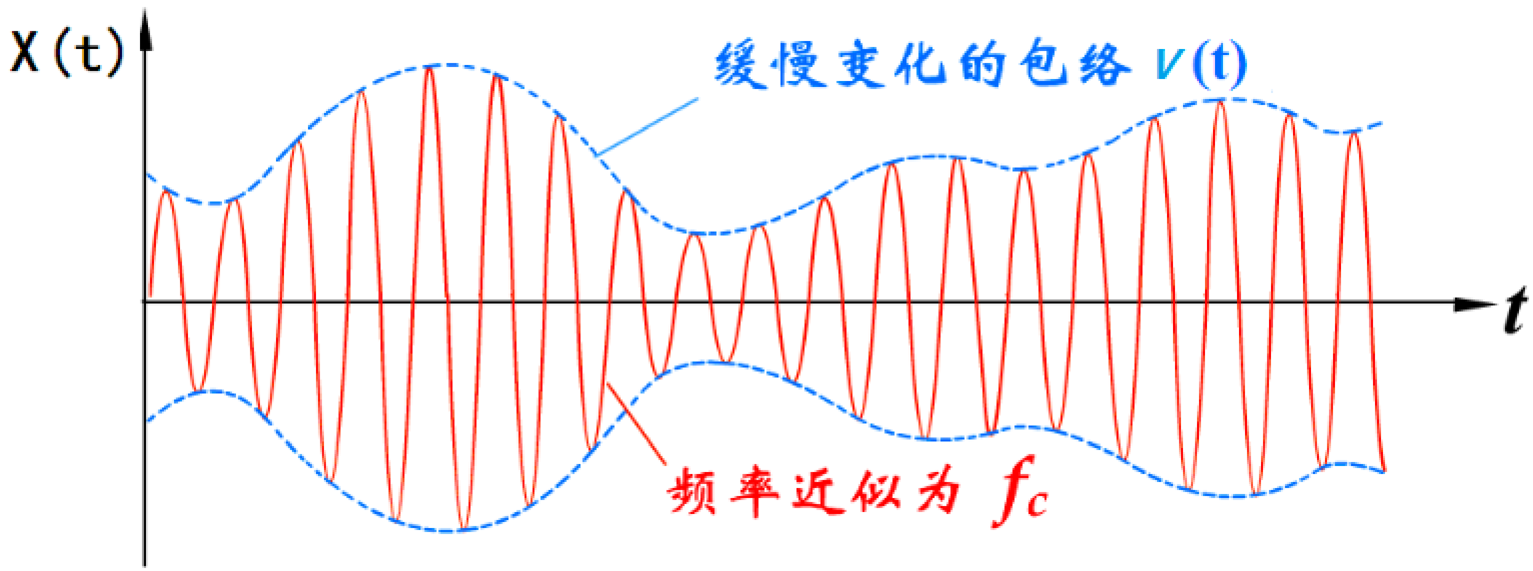


Figure2.5.2 带通（窄带）信号的时域波形

2.5 Bandpass Signal(带通信号)

带通信号的表示有三种：

1、等效低通信号 (equivalent lowpass signal) 表示；

2、同相 (inphase) 和正交 (quadrature)分量的表示；

3、矢量 (Phasor)：即包络和相位表示。

2.5 带通信号（Bandpass Signal）

1. 解析信号 (Analytic signal)or预包络 (pre-envelop)

假设实信号$x(t)$ 是中心频率位于f_0 的带通（或窄带）信号(如图 2.5.3). 首先, 我们构造一个信号$z(t)$, 它的频谱$Z(f)$只含有$x(t)$ 的正频谱， 即

$$Z(f) = 2u(f)X(f)$$

其中

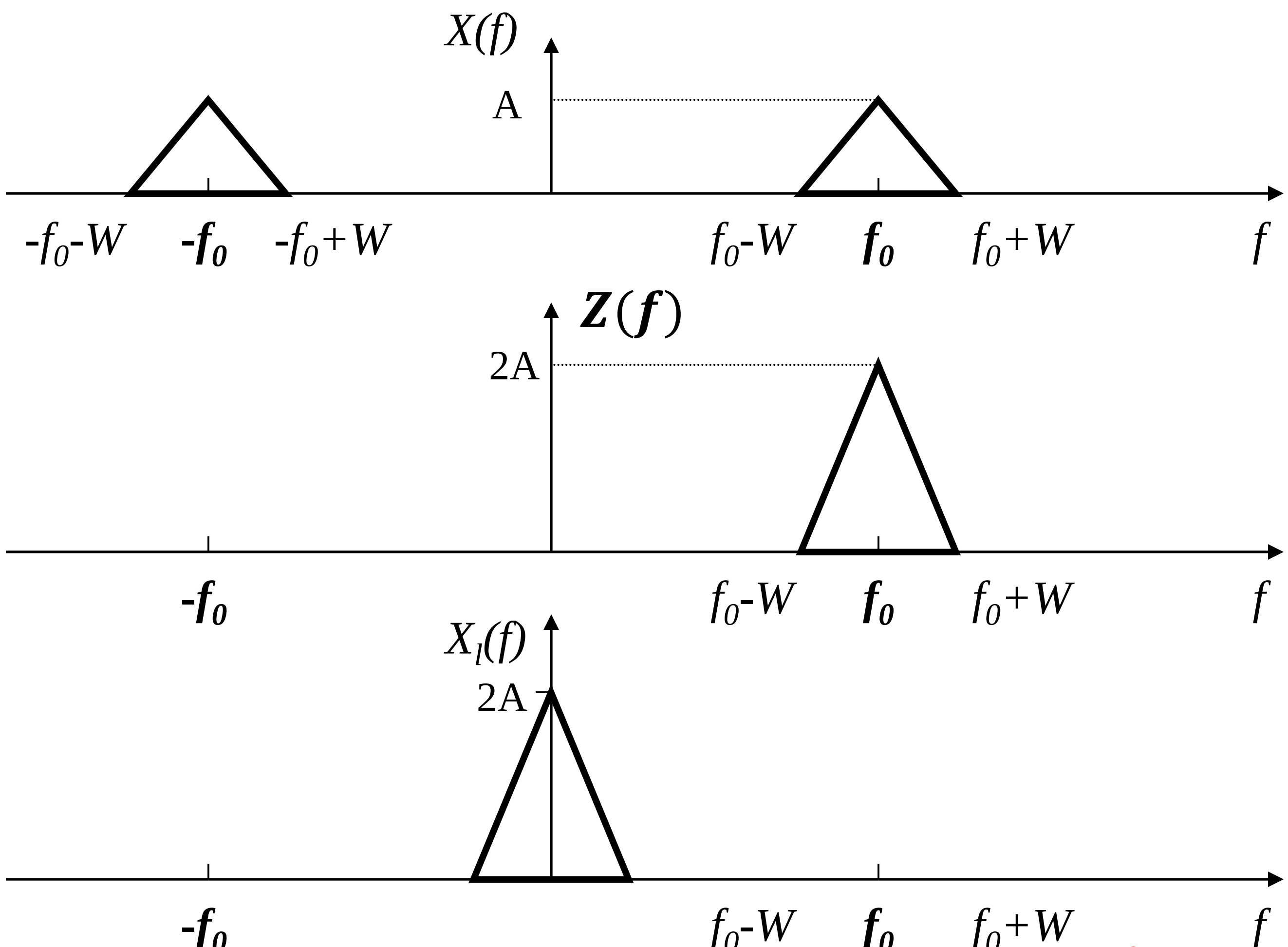
$$u(f) = \mathcal{F}\left[\frac{1}{2}\delta(t) + \frac{j}{2\pi t}\right]$$

从而

$$z(t) = \left(\delta(t) + \frac{j}{\pi t}\right) * x(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$$

2.5 带通信号（Bandpass Signal）

Figure 2.5.3 $Z(f)$ and $X_l(f)$ corresponding to $x(t)$



2.5 带通信号（Bandpass Signal）

$$z(t)=\left(\delta(t)+\frac{j}{\pi t}\right)*x(t)=x(t)+j\hat{x}(t)$$

z(t) 称为 *x(t)* 的解析信号 (analytic signal) 或预包络 (pre-envelope) 。

$$\hat{x}(t)=\frac{1}{\pi t}*x(t)$$

是*x(t)*的希尔波特变换 (Hilbert transform) 。 可以看成是$x(t)$经过冲激响应为$h(t)$的希尔伯特滤波器的输出，

$$h(t)=\frac{1}{\pi t},\quad -\infty<t<\infty$$

2.5 带通信号（Bandpass Signal）

解析信号*z(t)* 是带通信号。*x(t)*的等效低通信号$x_l(t)$可以由*Z(f)*通过频移到低通获得，即

$$X_l(f) = Z(f + f_0)$$

Figure 2.5.4 给出了 *X(f)*, *Z(f)*, 和 $X_l(f)$的关系.

$$\boxed{x_l(t) = z(t)e^{-j2\pi f_0 t}}$$

x(*t*) 的等效低通表示

一般来说, $x_l(t)$ 是复信号，因此可以表示成实部$x_c(t)$和虚部$x_s(t)$的组合，即

$$x_l(t) = x_c(t) + jx_s(t)$$

2.5 带通信号（Bandpass Signal）

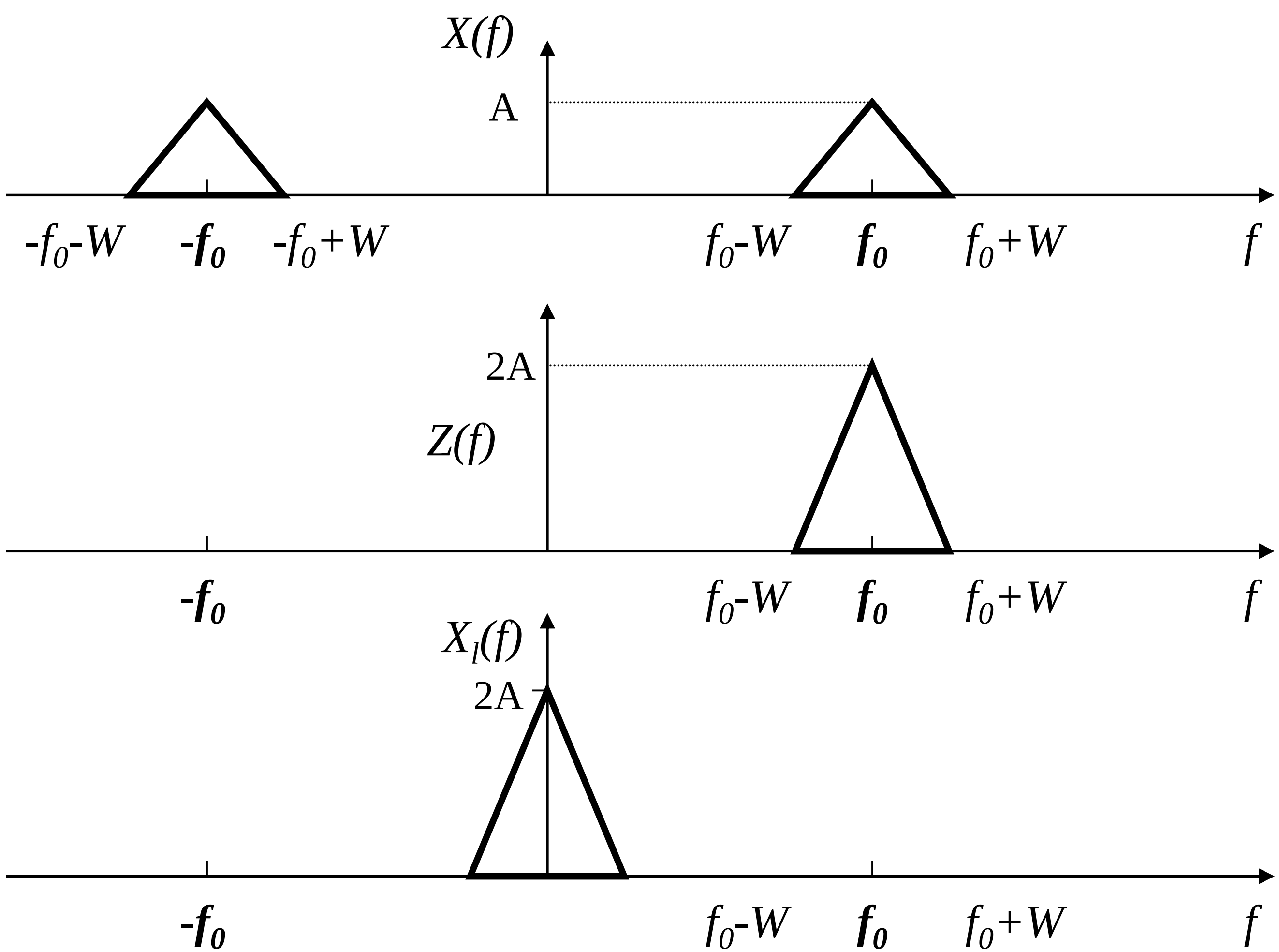


Figure 2.5.4 $Z(f)$ and $X_l(f)$ corresponding to $x(t)$

2.5 带通信号（Bandpass Signal）

•*Relationship of z(t), x(t), and $x_l(t)$*

$$z(t) = x_l(t)e^{j2\pi f_0 t}$$
$$= (x_c(t) + jx_s(t))e^{j2\pi f_0 t}$$
$$= [x_c(t)\cos(2\pi f_0 t) - x_s(t)\sin(2\pi f_0 t)]$$
$$+j[x_c(t)\sin(2\pi f_0 t) + x_s(t)\cos(2\pi f_0 t)]$$
$$= x(t) + j\hat{x}(t)$$

$x(t)$ 的同相和正交分量的表示

令实部和虚部分别相等，我们得到

$$\boxed{x(t) = x_c(t)\cos(2\pi f_0 t) - x_s(t)\sin(2\pi f_0 t)}$$

and

$$\hat{x}(t) = x_c(t)\sin(2\pi f_0 t) + x_s(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

2.5 带通信号（Bandpass Signal）

Note: $x_c(t)$ 和 $x_s(t)$ 是低通信号,分别称为带通信号 $x(t)$的同相 (**in-phase**)和正交 (**quadrature**) 分量。

2. $x(t)$ 的与其等效低通信号$x_l(t)$的关系

$$x(t)=\mathrm{Re}\left\{\left[x_c(t)+jx_s(t)\right]e^{j2\pi f_0 t}\right\}$$

$$=\mathrm{Re}\left[x_l(t)e^{j2\pi f_0 t}\right]$$

低通信号$x_l(t)$ 称为实信号$x(t)$的复包络或$x(t)$的等效低通信号。

2.5 带通信号（Bandpass Signal）

3. 将$x_l(t)$做如下变换，可得到$\boldsymbol{x(t)}$的矢量表示

$$x_l(t) = V(t)e^{j\Theta(t)}$$

矢量

where

$$V(t) = \sqrt{x_c(t)^2 + x_s(t)^2} \qquad \Theta(t) = \tan^{-1}\frac{x_s(t)}{x_c(t)}$$

V(t) **是*x(t)*的包络，** ***Θ(t)*** **是*x(t)*的相位**

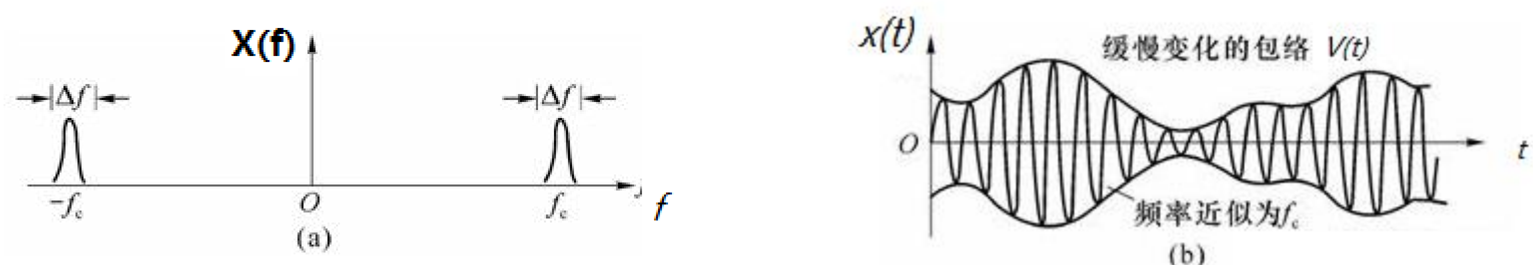


图2.5.5 带通信号的频谱和包络

2.5 带通信号（Bandpass Signal）

$$x(t) = \mathrm{Re}[x_l(t)e^{j2\pi f_0 t}]$$

$$= \mathrm{Re}\left[V(t)e^{j[2\pi f_0 t + \Theta(t)]}\right]$$

$$= V(t)\cos(2\pi f_0 t + \Theta(t))$$

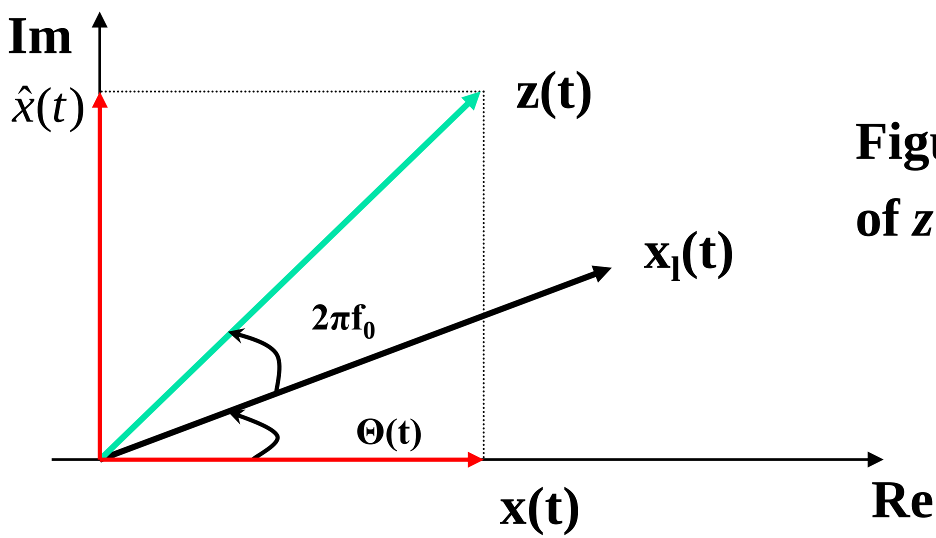


Figure 2.5.6 The relationship of *z(t)*, *x(t)*, *$x_l(t)$* and $\hat{x}(t)$

2.5 带通信号（Bandpass Signal）

The Fourier transform of *x(t)* is

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \mathrm{Re}[x_l(t)e^{j2\pi f_0 t}] \right\} e^{-j2\pi ft}dt$$

$$\Big\downarrow \text{欧拉公式}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} [x_l(t)e^{j2\pi f_0 t} + x_l^*(t)e^{-j2\pi f_0 t}]e^{-j2\pi ft}dt$$

$$= \frac{1}{2}[X_l(f - f_0) + X_l^*(-f - f_0)]$$

2.5 带通信号（Bandpass Signal）

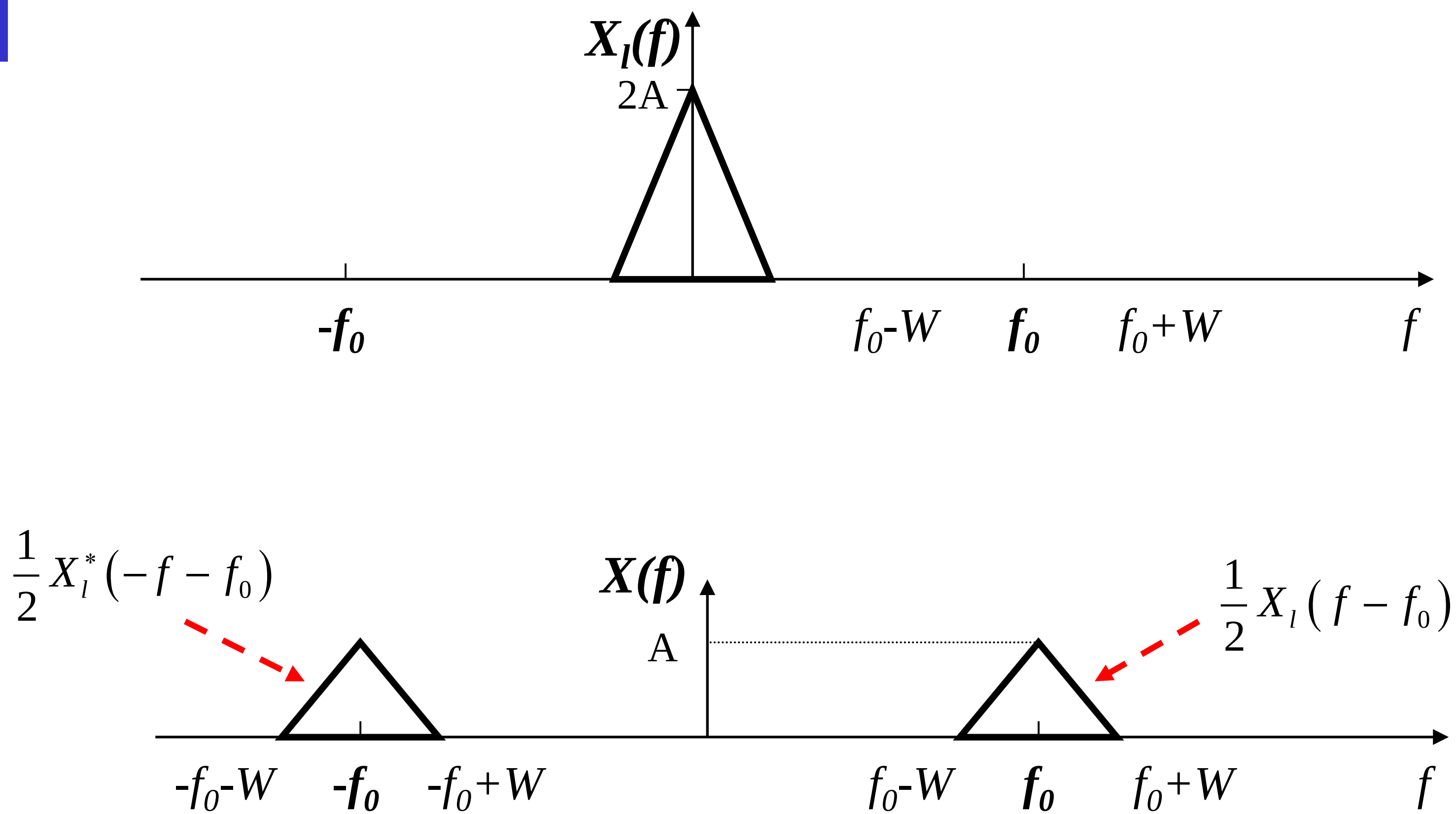


图2.5.5 $X(f)$和$X_l(f)$的关系

2.5 Bandpass Signal

- **Example (problem 2.59) 令 $m(t)=sinc^2(t)$,**

$$x(t)=m(t)\cos 2\pi f_0 t-\hat{m}(t)\sin 2\pi f_0 t$$

表示一个带通信号.

1. 求预包络 $z(t)$, 和$x(t)$的等效低通信号.
2. 求$x(t)$的傅立叶变换，并确定$x(t)$的带宽。

Solution

1. 预包络,

$$z(t)=x(t)+j\hat{x}(t)$$

$$=\left[m(t)\cos 2\pi f_0 t-\hat{m}(t)\sin 2\pi f_0 t\right]+j\left[m(t)\sin 2\pi f_0 t+\hat{m}(t)\cos 2\pi f_0 t\right]$$

$$=\left[m(t)+j\hat{m}(t)\right]e^{j2\pi f_0 t}$$

2.5 Bandpass Signal

x(t) 的等效低通信号

$$x_l(t) = z(t)e^{-j2\pi f_0 t} = m(t) + j\hat{m}(t)$$

2.

$$M(f) = F\left[\sin c^2(t)\right] = \Lambda(f)$$

$$= \begin{cases} f+1, & -1 \le f < 0 \\ -f+1, & 0 \le f < 1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

2.5 Bandpass Signal

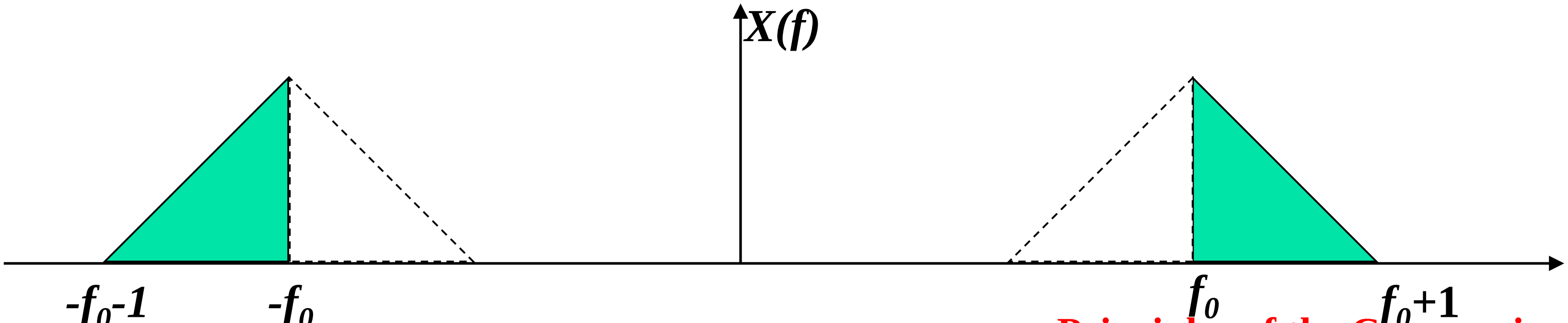
$$X(f)=\frac{1}{2}\left[M(f+f_0)+M(f-f_0)\right]+\frac{1}{2j}\left[\hat{M}(f-f_0)-\hat{M}(f+f_0)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[M(f+f_0)+M(f-f_0)\right]$$

$$+\frac{1}{2j}\cdot(-j)\left[\operatorname{sgn}(f-f_0)M(f-f_0)-\operatorname{sgn}(f+f_0)M(f+f_0)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[1-\operatorname{sgn}(f+f_0)\right]M(f+f_0)+\frac{1}{2}\left[1+\operatorname{sgn}(f-f_0)\right]M(f-f_0)$$

$$=\frac{1}{2}\left[1-\operatorname{sgn}(f+f_0)\right]\Lambda(f+f_0)+\frac{1}{2}\left[1+\operatorname{sgn}(f-f_0)\right]\Lambda(f-f_0)$$



主观题 10分

设置

求$x(t)=cos2\pi f_0 t$的预包络$z(t)$、等效低通信号$x_l(t)$、同相和正交分量$x_c(t),x_s(t)$、包络$V(t)$和相位$\Theta(t)$

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

- 预包络

$$\mathbf{z(t)} = \mathbf{x(t)} + \mathbf{j}\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{cos2\pi f_0 t} + \boldsymbol{jsin2\pi f_0 t}$$
$$= \boldsymbol{e^{j2\pi f_0 t}}$$

- 等效低通

$$\boldsymbol{x_l(t)} = \boldsymbol{z(t)e^{-j2\pi f_0 t}} = \mathbf{1}$$

- 同相和正交分量

$$x(t) = x_c(t)\cos(2\pi f_0 t) - x_s(t)\sin(2\pi f_0 t)$$
$$= \cos(2\pi f_0 t)$$

$$\boldsymbol{x_c(t)} = \mathbf{1}, \boldsymbol{x_s(t)} = \mathbf{0}$$

- 包络和相位

$$x_l(t) = V(t)e^{j\Theta(t)} = 1$$

故

$$\boldsymbol{V(t) = 1, \Theta(t) = 0}$$

- $\boldsymbol{x(t) = sin2\pi f_0 t}$的预包络$\boldsymbol{z(t)}$和等效低通信号$\boldsymbol{x_l(t)}$?

2.5 带通信号（Bandpass Signal）

- 带通信号通过带通系统.

1. 线性带通系统的表示

假设 $h(t)$ 表示一个LTI 系统. 定义 $H_l(f-f_0)$ 为

$$H_l(f-f_0)=\begin{cases}2H(f) & (f>0)\\ 0 & (f<0)\end{cases}$$

Then

$$H_l^*(-f-f_0)=\begin{cases}0 & (f>0)\\ 2H^*(f) & (f<0)\end{cases}$$

?

2.5 带通信号（Bandpass Signal）

$$H(f)=\frac{1}{2}[H_l(f-f_0)+H_l^*(-f-f_0)]$$?

$$h(t)=\frac{1}{2}[h_l(t)e^{j2\pi f_0 t}+h_l^*(t)e^{-j2\pi f_0 t}]$$

$$=\mathrm{Re}\left[h_l(t)e^{j2\pi f_0 t}\right]$$

其中 $h_l(t)$ 是$H_l(f)$ 的逆傅立叶变换. $h_l(t)$ 是 $h(t)$的等效低通.

2.5 带通信号（Bandpass Signal）

2. 带通信号通过带通系统的响应.

带通信号通过带通系统的响应可以通过其等效低通信号通过等效低通系统的响应来表示。

2.5 带通信号（Bandpass Signal）

$$y(t) = x(t) * h(t) = \mathrm{Re}[y_l(t)e^{j2\pi f_0 t}]$$

$$\begin{aligned}Y(f) &= X(f)H(f) \\ &= \frac{1}{4}[X_l(f-f_0)+X_l^*(-f-f_0)][H_l(f-f_0)+H_l^*(-f-f_0)] \\ &= \frac{1}{4}[X_l(f-f_0)H_l(f-f_0)+X_l^*(-f-f_0)H_l^*(-f-f_0)] \\ &= \frac{1}{2}[Y_l(f-f_0)+Y_l^*(-f-f_0)]\end{aligned}$$

where

$$\boxed{Y_l(f) = \frac{1}{2}X_l(f)H_l(f)}$$

so

$$\boxed{y_l(t) = \frac{1}{2}x_l(t) * h_l(t)}$$

2.5 带通信号（Bandpass Signal）

$$Y_l(f)=\frac{1}{2}X_l(f)H_l(f)$$

$$y_l(t)=\frac{1}{2}x_l(t)*h_l(t)$$

$$\boldsymbol{y(t)=Re\left[y_l(t)e^{j2\pi f_0 t}\right]}$$

为什么这么做？

仅仅对基带信号进行处理，节省了处理载频的资源。

基带芯片非常重要

2.5 带通信号

2022年2月19日发布

- 麒麟-华为：

1. 麒麟990 5G，集成基带处理

3. 麒麟990处理器+巴龙5000基带

- 骁龙-高通

2. 骁龙865处理器+骁龙X55 基带（目前有X65，5nm）

Summarizing

- **Sampling of Bandlimited Signals**
- **Bandpass Signals**
- 思考题1：抽样定理的意义是什么？
- 思考题2：为什么要用等效低通信号表示带通信号？

问题1：什么样的系统是线性时不变系统?

答：

$$y(t)=T\left[x(t)\right]$$

$$T\left[\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)\right]=\alpha T\left[x_1(t)\right]+\beta T\left[x_2(t)\right]$$

$$T\left[x(t-t_0)\right]=y(t-t_0)$$

Summarizing

- 问题2：已知x(t)是一带通信号，其解析信号是什么么信号？其同相分量和正交分量是什么么信号？

答：其解析信号是带通信号。

其同相分量和正交分量是低通信号，可以分别表示为

$$x_c(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t) + \hat{x}(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

$$x_s(t) = \hat{x}(t)\cos(2\pi f_0 t) - x(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

$$X_c(f) = \frac{1}{2}\left[X_l(f) + X_l^*(f)\right]$$

$$X_s(f) = -\frac{j}{2}\left[X_l(f) - X_l^*(f)\right]$$

Summarizing

- 问题3：希尔伯特变换频率响应、性质、典型信号希尔伯特变换。

答：希尔伯特滤波器的频率响应为

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t} e^{-j2\pi f t} \, dt$$

$$= \begin{cases} -j & (f > 0) \\ 0 & (f = 0) \\ j & (f < 0) \end{cases} = \begin{cases} e^{-j\frac{\pi}{2}} & f > 0 \\ 0 & f = 0 \\ e^{j\frac{\pi}{2}} & f < 0 \end{cases}$$

Notes： $|H(f)| = 1$，当 $f > 0$ 时 $\Theta(f) = -90°$；当 $f < 0$ 时，$\Theta(f) = 90°$. 因此希尔伯特滤波器是 **-90°** 相移器.

Summarizing

- **Hilbert transform的性质**

$$1.\mathcal{H}\left[\cos(2\pi f_0 t)\right]=\sin(2\pi f_0 t)$$

$$2.\mathcal{H}\left[\sin(2\pi f_0 t)\right]=-\cos(2\pi f_0 t)$$

3. If $x(t)$ is a bandpass signal for $\left|f-f_0\right|<W$

$$\mathcal{H}\left[x(t)\sin(2\pi f_0 t)\right]=-x(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

$$\mathcal{H}\left[x(t)\cos(2\pi f_0 t)\right]=x(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

$$4.\mathcal{H}\left[\mathcal{H}\left(x(t)\right)\right]=\hat{\hat{x}}(t)=-x(t)$$

Chapter 2

Thank you for your attention!

Any question?