§3.5 系统的物理可实现性

讨论学习本节，并回答下列问题：

1、物理可实现系统的冲击响应满足什么条件？

2、物理可实现系统的系统函数满足什么条件？

3、什么是希尔伯特变换？希尔伯特变换器的系统函数是什么？

4、用佩利-维纳准则解释理想滤波器是物理不可实现。

1、时域准则

即：$h(t)=0 \qquad t<0 \qquad$ 或 $h(t)=h(t)\cdot u(t)$

取FT：$$H(\omega)=\frac{1}{2\pi}H(\omega)*\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\right]$$

设：$H(\omega)=R(\omega)+\mathrm{i}X(\omega)$

$$R(\omega)+\mathrm{i}X(\omega)=\frac{1}{2\pi}[R(\omega)+\mathrm{i}X(\omega)]*\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\right]$$

$$=\frac{1}{2}[R(\omega)+iX(\omega)]+\frac{1}{i2}R(\omega)*\frac{1}{\pi\omega}+\frac{1}{2}X(\omega)*\frac{1}{\pi\omega}$$

$$=\frac{1}{2}[R(\omega)+X(\omega)*\frac{1}{\pi\omega}]+\frac{i}{2}[X(\omega)-R(\omega)*\frac{1}{\pi\omega}]$$

$$R(\omega)=\frac{1}{2}[R(\omega)+X(\omega)*\frac{1}{\pi\omega}]$$

$$X(\omega)=\frac{1}{2}[X(\omega)-R(\omega)*\frac{1}{\pi\omega}]$$

只在系统的自变量是时间的情况下，因果性和物理可实现性具有一致性。但：非因果系统可能是物理可实现的，如：气象预测，股票分析，人口预测等。信号处理时，待处理的时间信号被保存下来，利用后一时刻的输入决定前一时刻的输出，从而物理实现。

即： $R(\omega)=X(\omega)*\frac{1}{\pi\omega}$ $\qquad X(\omega)=-R(\omega)*\frac{1}{\pi\omega}$

结论：1、因果系统的频响函数 实部 $\xleftrightarrow[\text{唯一确定}]{\text{相互约束}}$ 虚部

实部和虚部各自包含了信号的全部信息

2、希尔伯特(*Hilbert*)变换

设： $f(t)\underset{HT}{\leftrightarrow}\hat{f}(t)$ 则： $\hat{f}(t)\underset{def}{=}f(t)*\frac{1}{\pi t}$ 正变换

$$f(t)\underset{def}{=}-\hat{f}(t)*\frac{1}{\pi t}$$ 逆变换

Hilbert变换器

$$f(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow \hat{f}(t)$$

$$\frac{1}{\pi t} \leftrightarrow -\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(\omega)$$

$$H(\omega) = -\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(\omega) = \begin{cases} -\mathrm{i} & \omega > 0 \\ \mathrm{i} & \omega < 0 \end{cases}$$

经希尔伯特变换后，频率分量幅度保持不变，相位出现90度相移，即正频滞后pi/2，负频超前pi/2。因此，希尔伯特变换又称为90度相移全通网络。

例：求下列信号的希尔伯特变换$\hat{f}(t)$。

1) $f(t)=\cos\omega_0 t$ 2) $\dfrac{1}{\pi t}$

解： $\hat{f}(t)=f(t)*\dfrac{1}{\pi t}=\cos\omega_0 t*\dfrac{1}{\pi t}$

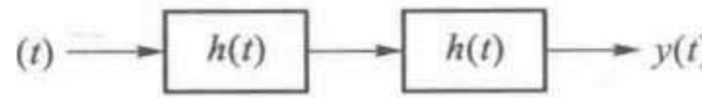
$$\leftrightarrow \pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]\cdot -i\,\mathrm{sgn}(\omega)$$

$$=i\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$$

$\therefore \hat{f}(t)=\sin\omega_0 t$ $\cos\omega_0 t \xleftrightarrow{HT} \sin\omega_0 t$

2) $\dfrac{1}{\pi t}*\dfrac{1}{\pi t}\leftrightarrow[-i\,\mathrm{sgn}(\omega)]^2=-1$ $\therefore \dfrac{1}{\pi t}\xleftrightarrow{HT}-\delta(t)$

例 3-27 如图 3-70 所示系统中，设 $x(t)$ 为已知激励，$h(t)=\dfrac{1}{t\pi}$，求系统的零状态响应。



由 $\operatorname{sgn}(t) \leftrightarrow \dfrac{2}{\mathrm{j}\omega}$，运用对称性有

$$2\pi \operatorname{sgn}(-\omega) = -2\pi \operatorname{sgn}(\omega) \leftrightarrow \frac{2}{\mathrm{j}t}$$

$$\frac{1}{t\pi} \leftrightarrow -\mathrm{j}\operatorname{sgn}(\omega) \qquad\qquad h(t) * h(t) = \frac{1}{t\pi} * \frac{1}{t\pi}$$

$$H(\omega) \cdot H(\omega) = [-\mathrm{j}\operatorname{sgn}(\omega)]^2 = -1$$

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)H(\omega) = -X(\omega) \quad 或 \quad y(t) = -x(t)$$

此系统为一反相器。

2、频域准则

佩利（Paley）和维纳（Wiener）证明了物理可实现的幅频特性必须满足（平方可积）：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 \, \mathrm{d}\omega < \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln|H(\omega)||}{1+\omega^2} \mathrm{d}\omega < \infty \quad \text{佩利—维纳准则}$$

•物理可实现系统：允许***H*(*ω*)** 特性在某些不连续频率点上为零，但不允许在一个有限频带内为零。

•佩利-维纳准则是系统物理可实现的必要条件，而不是充分条件。 → 理想滤波器都是不可实现的；

实际滤波器设计原则：通带内足够平坦，截止频率处足够陡峭