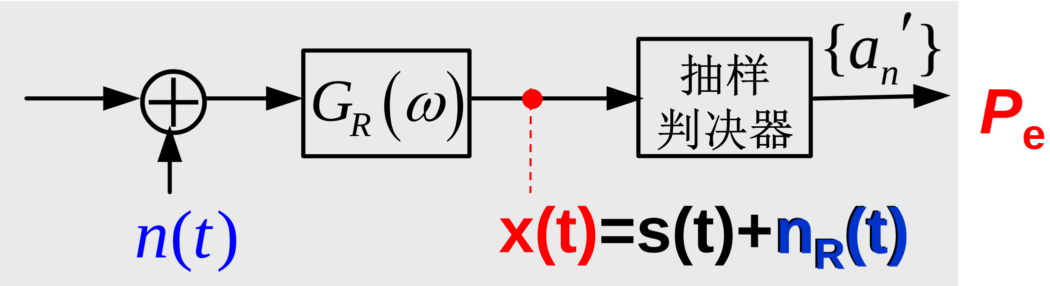
FUNDAMENTALS OF INFORMATION SCIENCE

PART 4 INFORMATION TRANSMISSION VI
—— DIGITAL DEMODULATION

Shandong University
2025 Spring

§20.2.0.1 二进制双极性基带系统的P_e

■ 分析模型



■ n_R(t)特性

高斯

白噪

E[n(t)]=0

$$P_n(f)=\frac{n_0}{2}$$

高斯

E[n_R(t)]=0

$$P_R(f)=\frac{n_0}{2}\left|G_R(f)\right|^2$$

$$\sigma_n^2=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{n_0}{2}\left|G_R(f)\right|^2 df$$

$\therefore$ $n_R(t)$ 的一维概率密度函数为

$$f(v)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n}\exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

可简记为：

$$n_R \sim N\left(0,\sigma_n^2\right)$$

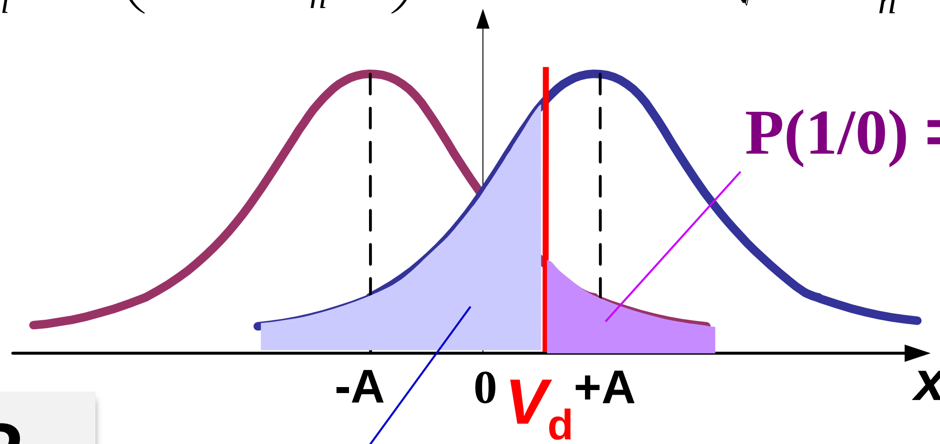
■ **x(t)特性** ——高斯 $x \sim N\left(\pm A,\sigma_n^2\right)$

对于**双极性**基带信号，其抽样值为（**+A,-A**），

则合成波 **x(t)=s(t)+n_R(t)** 在抽样时刻的取值为：

$$x(kT_{\mathrm{B}})=\begin{cases} A+n_R(kT_{\mathrm{B}}), & \text{“1”} \\ -A+n_R(kT_{\mathrm{B}}), & \text{“0”} \end{cases}$$

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left(-\frac{(x+A)^2}{2\sigma_n^2}\right) \qquad f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left(-\frac{(x-A)^2}{2\sigma_n^2}\right)$$



P(1/0) =P(x>V_d)

P(0/1) =P(x≤V_d)

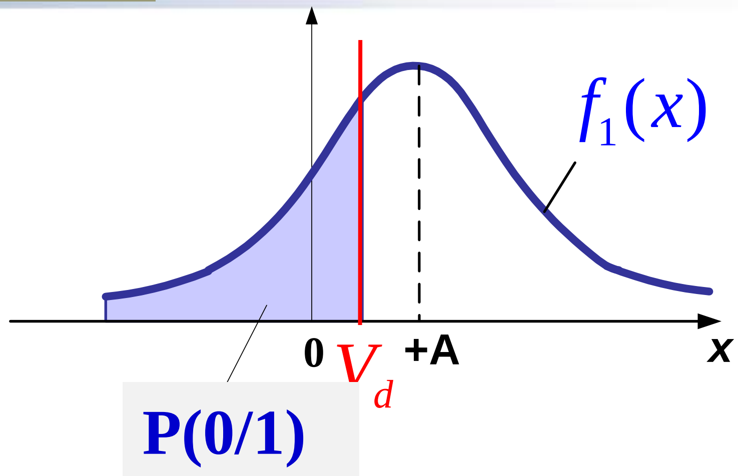
■ 误码率 P_e

设判决门限为 V_d，判决规则:

“0”	$x(kT_B) > V_d$,	判为“1”码	—错误
“1”	$x(kT_B) \le V_d$,	判为“0”码	—正确

◆ P(0/1) ——发 1 错判为 0 的概率：

$$= P(x \le V_d) = \int_{-\infty}^{V_d} f_1(x)dx$$



$$= \int_{-\infty}^{A} f_1(x)dx - \int_{V_d}^{A} f_1(x)dx$$

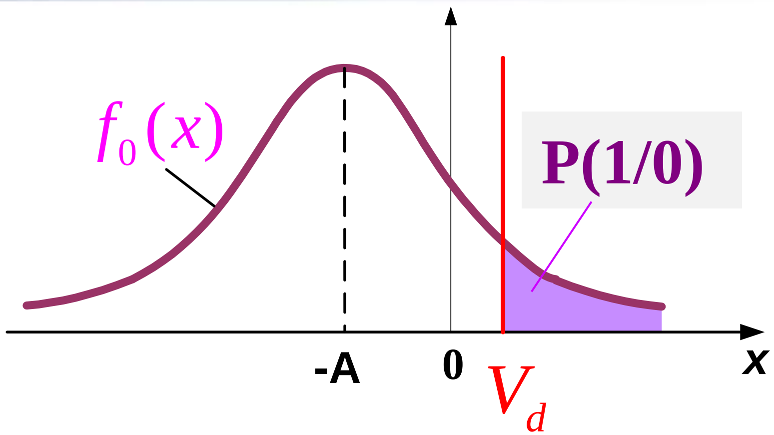
$$= \frac{1}{2} - \int_{V_d}^{A} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left(-\frac{(x-A)^2}{2\sigma_n^2}\right) dx$$

令：$\dfrac{x-A}{\sqrt{2}\sigma_n} = t$

$$= \frac{1}{2} - \int_{\frac{V_d - A}{\sqrt{2}\sigma_n}}^{0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} erf\left(\frac{V_d - A}{\sqrt{2}\sigma_n}\right)$$

◆ P(1/0) ——发 0 错判为 1 的概率：

$$= P(x > V_d) = \int_{V_d}^{\infty} f_0(x)dx$$



$$= \int_{-A}^{\infty} f_0(x)dx - \int_{-A}^{V_d} f_0(x)dx$$

$$= \frac{1}{2} - \int_{-A}^{V_d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left(-\frac{(x+A)^2}{2\sigma_n^2}\right)dx$$

令：$\dfrac{x+A}{\sqrt{2}\sigma_n} = t$

$$= \frac{1}{2} - \int_{0}^{\frac{V_d + A}{\sqrt{2}\sigma_n}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} erf\left(\frac{V_d + A}{\sqrt{2}\sigma_n}\right)$$

◆ 双极性基带系统的总误码率：

$$P_e = P(1)P(0/1) + P(0)P(1/0)$$

$$= P(1)\int_{-\infty}^{V_d} f_1(x)dx + P(0)\int_{V_d}^{\infty} f_0(x)dx$$

$$= P(1)\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{V_d - A}{\sqrt{2}\sigma_n}\right)\right] + P(0)\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{V_d + A}{\sqrt{2}\sigma_n}\right)\right]$$

可见

P_e的值取决于

—— $P(1)$、$P(0)$、A、σ_n^2 和V_d

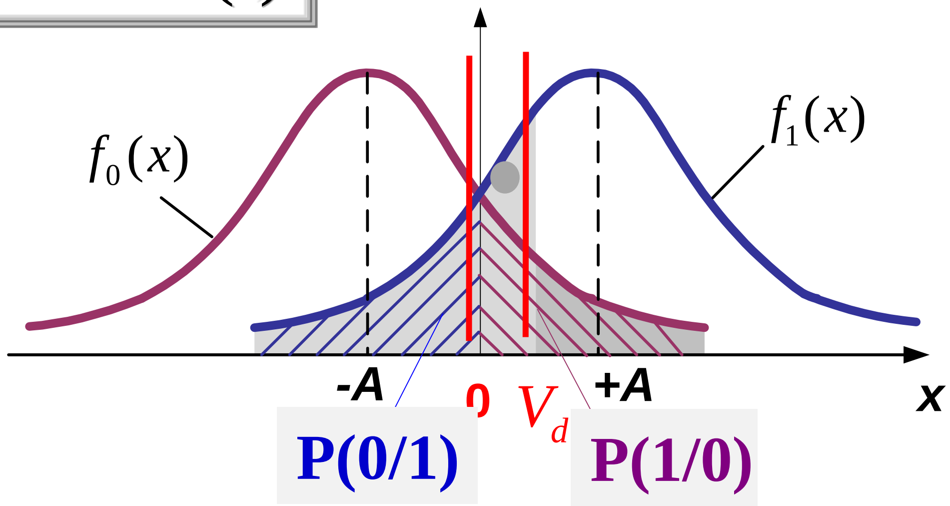
Q&A

■ 最佳门限电平——使P_e最小的判决门限电平

令 $\dfrac{\partial P_e}{\partial V_d}=0$ → $V_d^* = \dfrac{\sigma_n^2}{2A}\ln\dfrac{P(0)}{P(1)}$

P(1)=P(0)时:

$$\boxed{V_d^*=0}$$



P_e= P(0/1) =P(1/0)

$$=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}erf\left(\frac{0\mp A}{\sqrt{2}\sigma_n}\right)$$

$$\boxed{P_e=\frac{1}{2}erfc\left(\frac{A}{\sqrt{2}\sigma_n}\right)}$$

§ 20.2.0.2 二进制单极性基带系统的P_e

对于**单极性**基带信号，其抽样值为（**+A,0**），

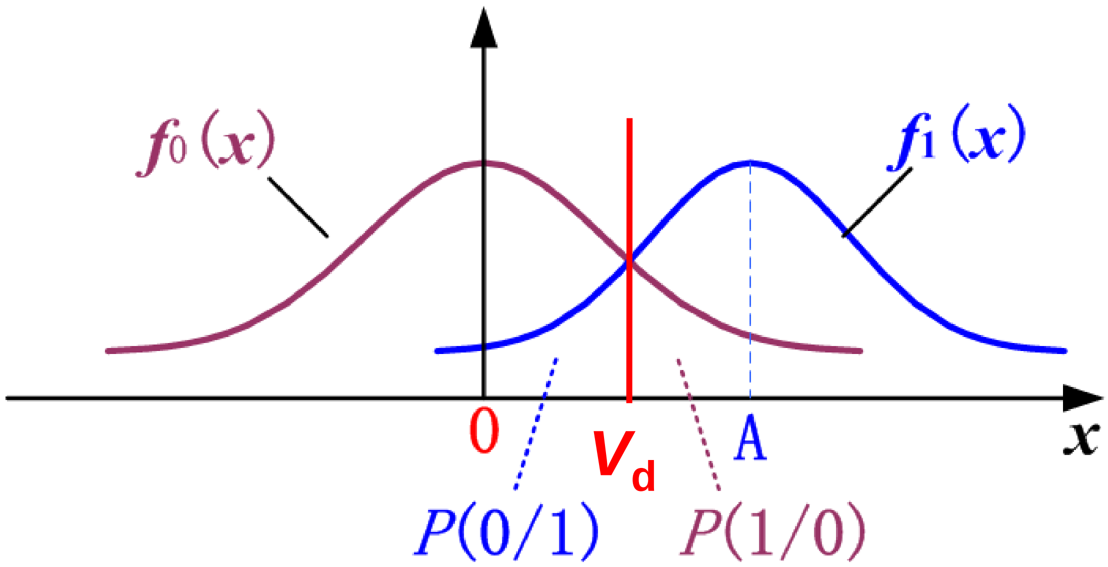
则合成波 **x(t)=s(t)+n_R(t)** 在抽样时刻的取值为:

$$\boxed{x(kT_B)=\begin{cases} A+n_R(kT_B), & \text{“1”} \\ 0+n_R(kT_B), & \text{“0”} \end{cases}}$$

对比：**双极性**基带信号，其抽样值为（**+A,-A**）

$$\boxed{x(kT_B)=\begin{cases} A+n_R(kT_B), & \text{“1”} \\ -A+n_R(kT_B), & \text{“0”} \end{cases}}$$

∴ 只需将 $f_0(x)$的分布中心由**-A** 移到**0**即可：



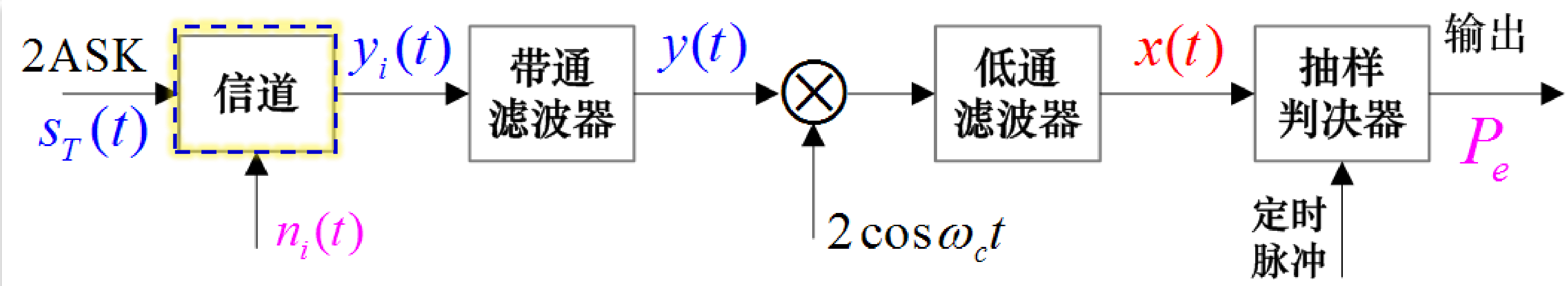
- 推导过程与双极性系统类同；
- 推导结果也可借助双极性的结果进行变通。

■ 归纳　对比：

双极性系统	单极性系统
$V_d^* = \frac{\sigma_n^2}{2A}\ln\frac{P(0)}{P(1)}$	$V_d^* = \frac{A}{2} + \frac{\sigma_n^2}{A}\ln\frac{P(0)}{P(1)}$
等概时：$V_d^* = 0$	等概时：$V_d^* = A/2$
$P_e = \frac{1}{2}erfc(\frac{A}{\sqrt{2}\sigma_n})$	$P_e = \frac{1}{2}erfc(\frac{A}{2\sqrt{2}\sigma_n})$

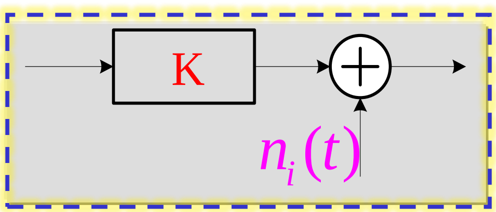
§ 20.2.1　2ASK系统的抗噪声性能

■ 2ASK---相干解调



$$s_T(t)=\begin{cases} A\cos\omega_c t, & \text{发“1”时} \\ 0\quad, & \text{发“0”时} \end{cases}$$

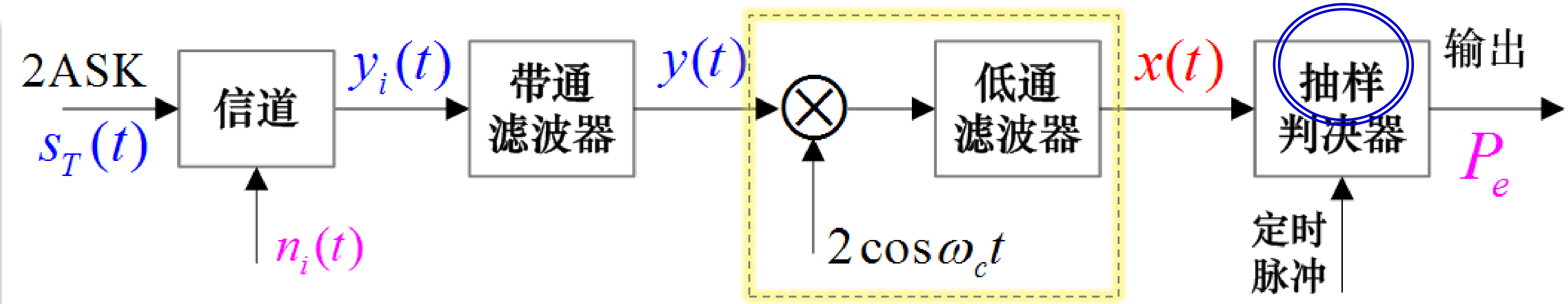
$a = \mathrm{kA}$



$$y_i(t)=\begin{cases} a\cos\omega_c t + n_i(t) & \text{发“1”时} \\ 0 \qquad + n_i(t) & \text{发“0”时} \end{cases}$$

$$y(t)=\begin{cases} a\cos\omega_c t + n(t) & \text{发“1”时} \\ 0 \qquad + n(t) & \text{发“0”时} \end{cases}$$

$$y(t)=\begin{cases} a\cos\omega_c t + n(t) & \text{发 “1” 时} \\ 0 \quad\quad + n(t) & \text{发 “0” 时} \end{cases}$$



$$n(t)=n_c(t)\cos\omega_c t - n_s(t)\sin\omega_c t$$

$$y(t)=\begin{cases} [a+n_c(t)]\cos\omega_c t - n_s(t)\sin\omega_c t \\ n_c(t)\cos\omega_c t - n_s(t)\sin\omega_c t \end{cases}$$

$$\boxed{x(t)=\begin{cases} a+n_c(t), & \text{发 “1” 时} \\ 0+n_c(t), & \text{发 “0” 时} \end{cases}}$$

$n_c(t)$是高斯过程

（0， σ_n^2）

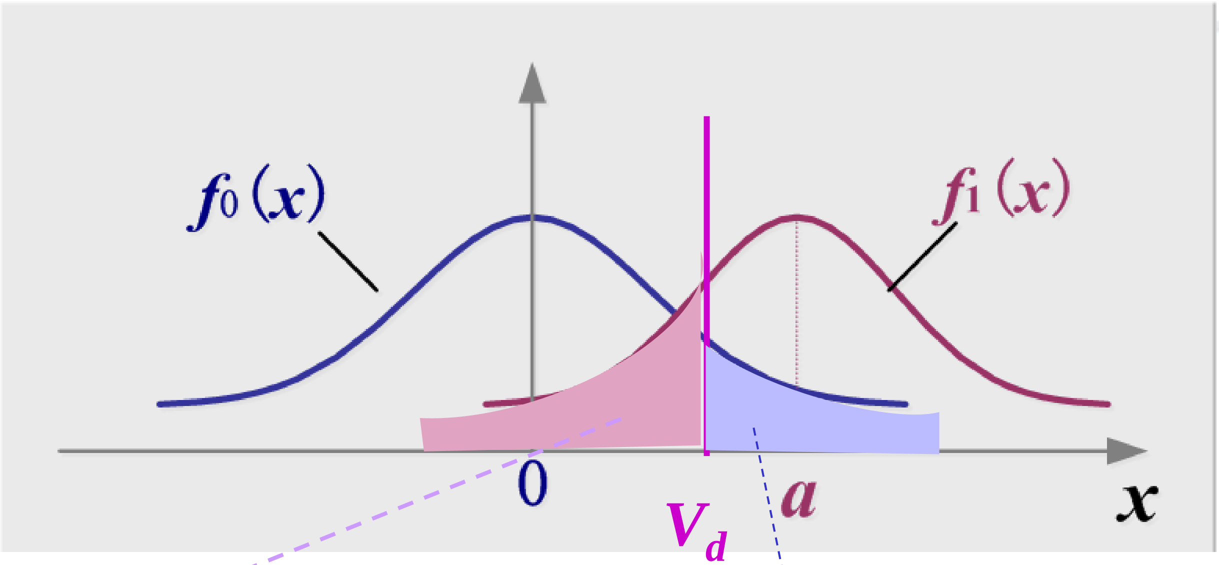
抽样:

$$x = x\left(kT_s\right) = \begin{cases} a + n_c(kT_s) & 发“1”时 \\ 0 + n_c(kT_s) & 发“0”时 \end{cases}$$

x ~高斯 （均值 a或 **0**，方差 σ_n^2），一维概率密度函数:

$$\boxed{f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n}\exp[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_n^2}]}$$ 发送“1”时

$$\boxed{f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n}\exp[-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}]}$$ 发送“0”时



$$P(0/1) = P(x \le V_d) = \int_{-\infty}^{V_d} f_1(x)dx$$

$$P(1/0) = P(x > V_d) = \int_{V_d}^{\infty} f_0(x)dx$$

设判决门限为 V_d，则判决规则为：

$x > V_d$，判为“1”

$x \le V_d$，判为“0”

◆ 总误码率：

$$P_e = P(1)P(0/1) + P(0)P(1/0)$$

$$= P(1)\int_{-\infty}^{V_d} f_1(x)dx + P(0)\int_{V_d}^{\infty} f_0(x)dx$$

$$\boxed{\text{令} \quad \frac{\partial P_e}{\partial V_d} = 0 \Rightarrow V_d^* = \frac{a}{2} + \frac{\sigma_n^2}{2a}\ln\frac{P(0)}{P(1)}}$$

$$\boxed{V_d^* = \frac{a}{2} + \frac{\sigma_n^2}{a}\ln\frac{P(0)}{P(1)}}$$

等概时

$$\boxed{V_d^* = a/2}$$

$$\boxed{P_e = \frac{1}{2}erfc\left(\frac{a}{2\sqrt{2}\sigma_n}\right)}$$

双极性系统

$$V_d^* = \frac{\sigma_n^2}{2A}\ln\frac{P(0)}{P(1)}$$

等概时：

$$V_d^* = 0$$

$$P_e = \frac{1}{2}erfc(\frac{A}{\sqrt{2}\sigma_n})$$

单极性系统

$$V_d^* = \frac{A}{2} + \frac{\sigma_n^2}{A}\ln\frac{P(0)}{P(1)}$$

等概时：

$$V_d^* = A/2$$

$$P_e = \frac{1}{2}erfc(\frac{A}{2\sqrt{2}\sigma_n})$$

借用:

$$x(t)=\begin{cases} a + n_c(t), & \text{发“1”时} \\ 0 + n_c(t), & \text{发“0”时} \end{cases}$$

$$x(t)=\begin{cases} A + n_R(t) \\ 0 + n_R(t) \end{cases}$$

=单极性基带信号+高斯噪声

因此，借助单极性基带系统的分析结果:

$$V_d^* = \frac{A}{2} + \frac{\sigma_n^2}{A}\ln\frac{P(0)}{P(1)}$$

等概时

$$V_d^* = A/2$$

$$P_e = \frac{1}{2}erfc\left(\frac{A}{2\sqrt{2}\sigma_n}\right)$$

可方便地得到**2ASK-相干**系统的分析结果:

$$V_d^* = \frac{a}{2} + \frac{\sigma_n^2}{a}\ln\frac{P(0)}{P(1)}$$

等概时

$$V_d^* = a/2$$

$$P_e = \frac{1}{2}erfc\left(\frac{a}{2\sqrt{2}\sigma_n}\right)$$

2ASK信号相干解调时系统的总误码率为

$$P_e = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{a}{2\sqrt{2}\sigma_n}\right)$$

$$r = \frac{a^2}{2\sigma_n^2}$$

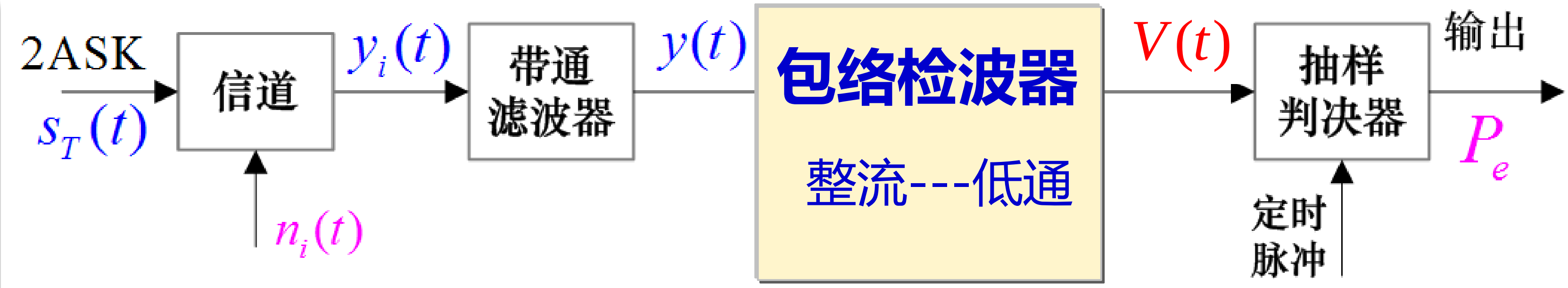
解调器输入端信噪比

$$P_e = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{r/4}\right)$$

r>>1时

$$P_e \approx \frac{1}{\sqrt{\pi r}} e^{-r/4}$$

■ 2ASK---包络检波



$$y(t)=\begin{cases} a\cos\omega_c t+n(t) & \text{发“1”时} \sim \text{正弦波+窄带高斯噪声} \\ 0 \qquad +n(t) & \text{发“0”时} \sim \text{窄带高斯噪声} \end{cases}$$

$$\boxed{n(t)=n_c(t)\cos\omega_c t-n_s(t)\sin\omega_c t}$$

- 当发送“1”符号时，包络检波器的输出为

$$V(t)=\sqrt{[a+n_c(t)]^2+n_s^2(t)}$$

$$\boxed{f_1(V)=\frac{V}{\sigma_n^2}I_0\left(\frac{aV}{\sigma_n^2}\right)e^{-(V^2+a^2)/2\sigma_n^2}}$$ ~ 广义瑞利分布

- 当发送“0”符号时，包络检波器的输出为

$$V(t)=\sqrt{n_c^2(t)+n_s^2(t)}$$

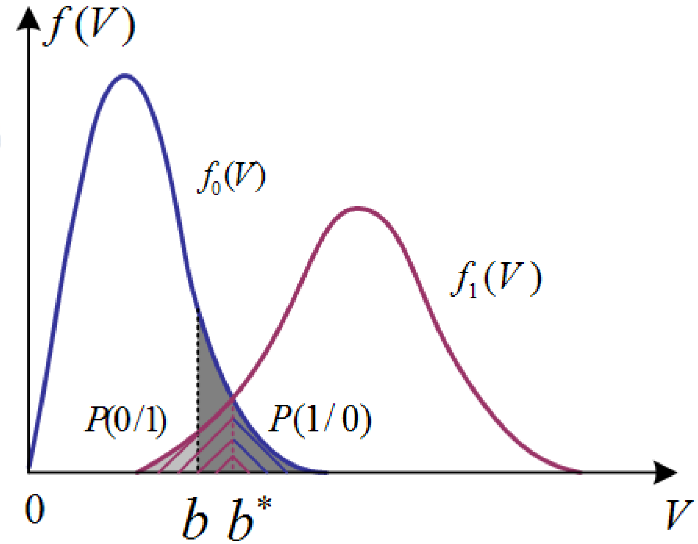
$$\boxed{f_0(V)=\frac{V}{\sigma_n^2}e^{-V^2/2\sigma_n^2}}$$ ~ 瑞利分布

式中，σ_n^2为窄带高斯噪声$n(t)$的方差。

设判决门限为***b***，判决规则为：

抽样值 ***V* > *b*** 时，判为 “1”

抽样值 ***V* ≤ *b*** 时，判为 “0”



- 发 “1” 错判为 “0” 的概率为

$$P(0/1) = P(V \le b) = \int_0^b f_1(V)dV = 1 - \int_b^{\infty} f_1(V)dV$$

$$= 1 - \int_b^{\infty} \frac{V}{\sigma_n^2} I_0\left(\frac{aV}{\sigma_n^2}\right) e^{-(V^2+a^2)/2\sigma_n^2} dV$$

$$\alpha = \frac{a}{\sigma_n} \quad \beta = \frac{b}{\sigma_n} \quad t = \frac{V}{\sigma_n}$$

利用**Marcum Q**函数：

$$Q(\alpha,\beta) = \int_\beta^{\infty} t I_0(\alpha t) e^{-(t^2+\alpha^2)/2} dt$$

则 ***P*(0/1)** 可借助**Marcum Q**函数表示为

$$P(0/1)=1-Q(\frac{a}{\sigma_n},\frac{b}{\sigma_n})=1-Q(\sqrt{2r},b_0)$$

$r=a^2/2\sigma_n^2$ 信号噪声功率比

$b_0=b/\sigma_n$ 归一化门限值

- 发“0”错判为“1”的概率为

$$P(1/0)=P(V>b)=\int_b^\infty f_0(V)dV$$

$$=\int_b^\infty \frac{V}{\sigma_n^2}e^{-V^2/2\sigma_n^2}dV=e^{-b^2/2\sigma_n^2}=e^{-b_0^2/2}$$

- 系统的总误码率为

$$\boxed{P_e = P(1)P(0/1) + P(0)P(1/0)}$$

$$= P(1)\left[1 - Q(\sqrt{2r}, b_0)\right] + P(0)e^{-b_0^2/2}$$

当 **$P(1) = P(0)$** 时，有

$$\boxed{P_e = \frac{1}{2}\left[1 - Q(\sqrt{2r}, b_0)\right] + \frac{1}{2}e^{-b_0^2/2}}$$

包检系统的P_e取决于信噪比r和归一化门限值b_0

- 求最佳判决门限，令：

$$\boxed{\frac{\partial P_e}{\partial b}=\mathbf{0}}$$

$$P(1)f_1(b^*)=P(0)f_0(b^*)$$

当*P*(1)=*P*(0)时，有

$$f_1(b^*)=f_0(b^*)$$

最佳判决门限：

$$\boxed{b^*=\begin{cases} a/2, & r>>1\text{时} \\ \sqrt{2}\sigma_n, & r<<1\text{时} \end{cases}}$$

归一化最佳判决门限：

$$\boxed{b_0^*=\frac{b^*}{\sigma_n}=\begin{cases} \sqrt{r/2}, & r>>1\text{时} \\ \sqrt{2}, & r<<1\text{时} \end{cases}}$$

实际情况

——系统工作在大信噪比情况下，∴最佳门限应取：

$$\boxed{b^* = \frac{a}{2}}$$

$$b^* = \begin{cases} a/2, & r >> 1\text{时} \\ \sqrt{2}\sigma_n, & r << 1\text{时} \end{cases}$$

此时，系统的总误码率为：

$$P_e = \frac{1}{4} erfc\left(\sqrt{\frac{r}{4}}\right) + \frac{1}{2} e^{-r/4}$$

当 $r \to \infty$ 时，上式的下界为：

$$\boxed{P_e = \frac{1}{2} e^{-r/4}}$$

归纳 ——2ASK系统抗噪声性能

相干解调：

$$P_e = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{r}{4}}\right) \xrightarrow{r>>1} \frac{1}{\sqrt{\pi r}} e^{-r/4}$$

包络检波：

$$\boldsymbol{P_e = \frac{1}{2} e^{-r/4}}$$

$$r = \frac{a^2}{2\sigma_n^2}$$

$$\sigma_n^2 = n_0 B$$

条件：

$$P(0) = P(1), \quad b^* = \frac{a}{2}$$

比较：

- 当 ***r*** 相同时，$P_{e相干}$ < $P_{e包检}$；
- 当 ***r*** >>1时，两者性能相差不大。

例

【7-1】 2ASK系统，$R_B = 4.8\times10^6$ 波特，1、0等概，接收机输入信号幅度 a =1 mV，信道加性高斯白噪声的单边PSD为 $n_0 = 2\times10^{-15}$ W/Hz。试求：

(1) 相干解调时系统的P_e；(2) 包络检波时系统的P_e 。

解

接收端带通滤波器带宽为：

$$B = 2R_B = 9.6\times10^6 \text{ Hz}$$

带通滤波器输出噪声平均功率为：

$$\sigma_n^2 = \mathrm{n}_0 B = 1.92\times10^{-8} \text{ W}$$

信噪比为：

$$r = \frac{a^2}{2\sigma_n^2} = \frac{1\times10^{-6}}{2\times1.92\times10^{-8}} \approx 26 >> 1$$

(1) **同步检测**法解调时系统的误码率为

$$P_e \approx \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\pi r}} e^{-r/\mathbf{4}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3.1416} \times 26}} \times e^{-6.5} = 1.66 \times \mathbf{10}^{-4}$$

(2) **包络检波**法解调时系统的误码率为

$$P_e = \frac{1}{2} e^{-r/4} = \frac{1}{2} e^{-6.5} = 7.5 \times 10^{-4}$$

评注

- 当 r 相同时，$P_{e相干} < P_{e包检}$，
- 当 $r >> 1$ 时，两者的性能相差不大。

谢谢！