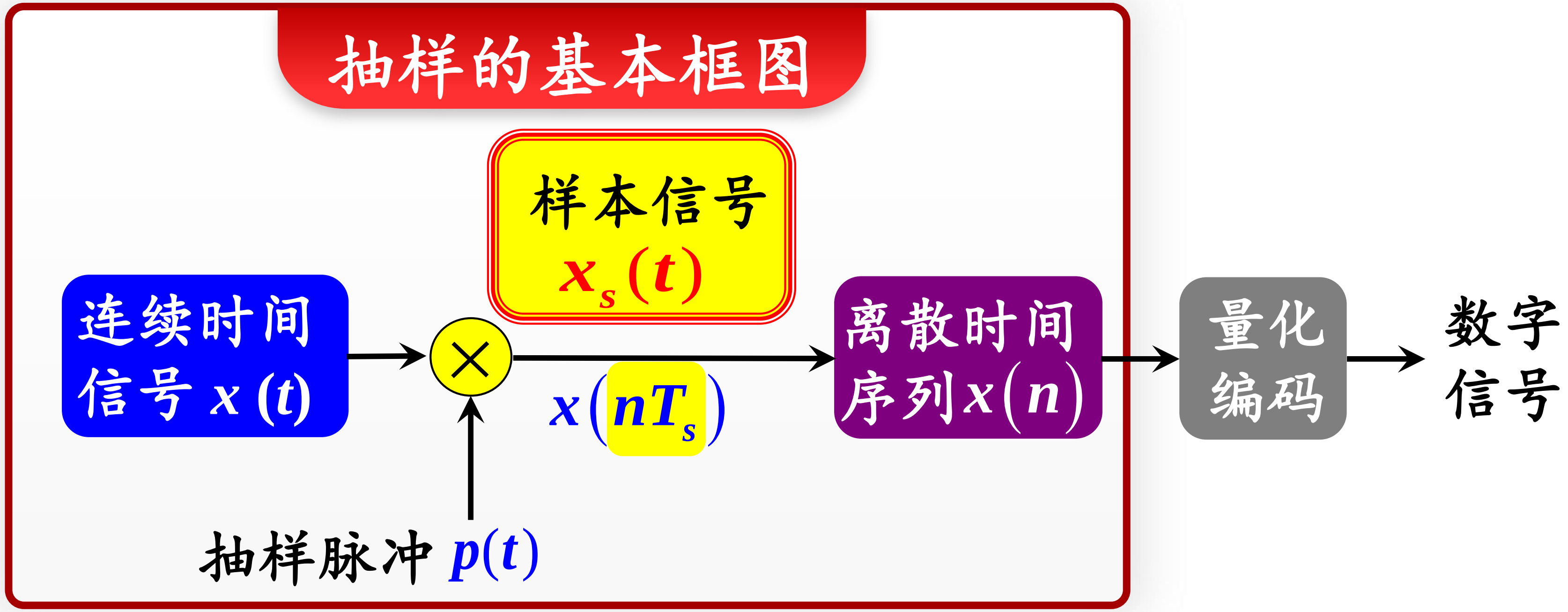
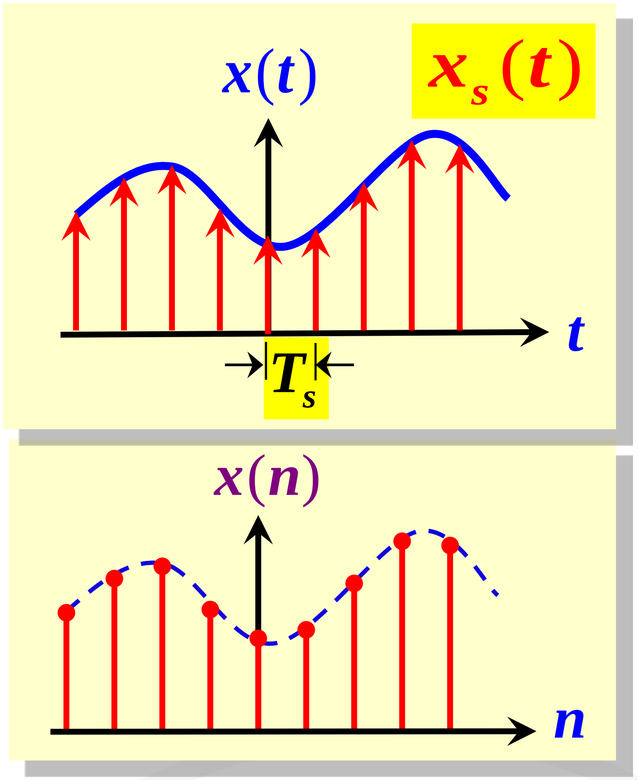
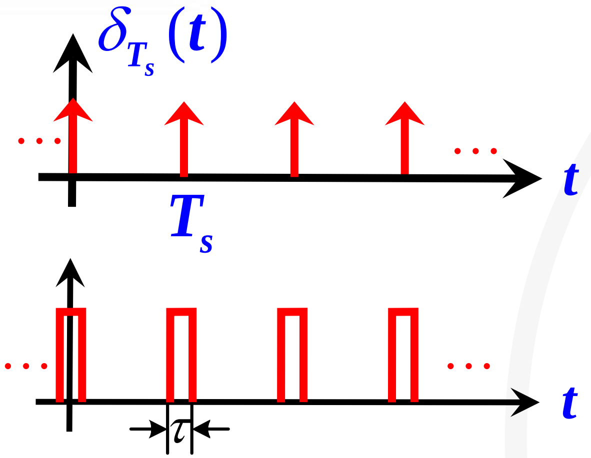
1. 信号的抽样





抽样脉冲$p(t)$

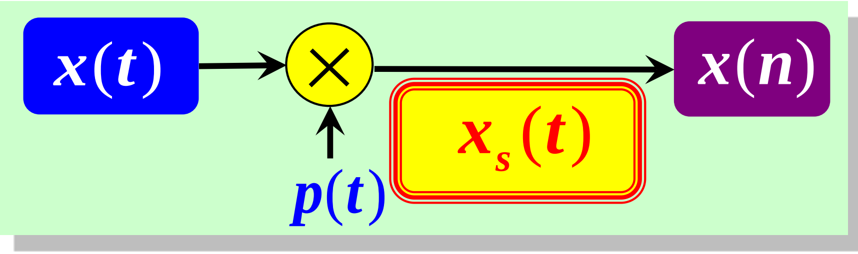
- 冲激抽样/理想抽样
- 自然抽样



1. 信号的抽样

时域分析

频域



理想情况下，采用冲激串作为采样信号：

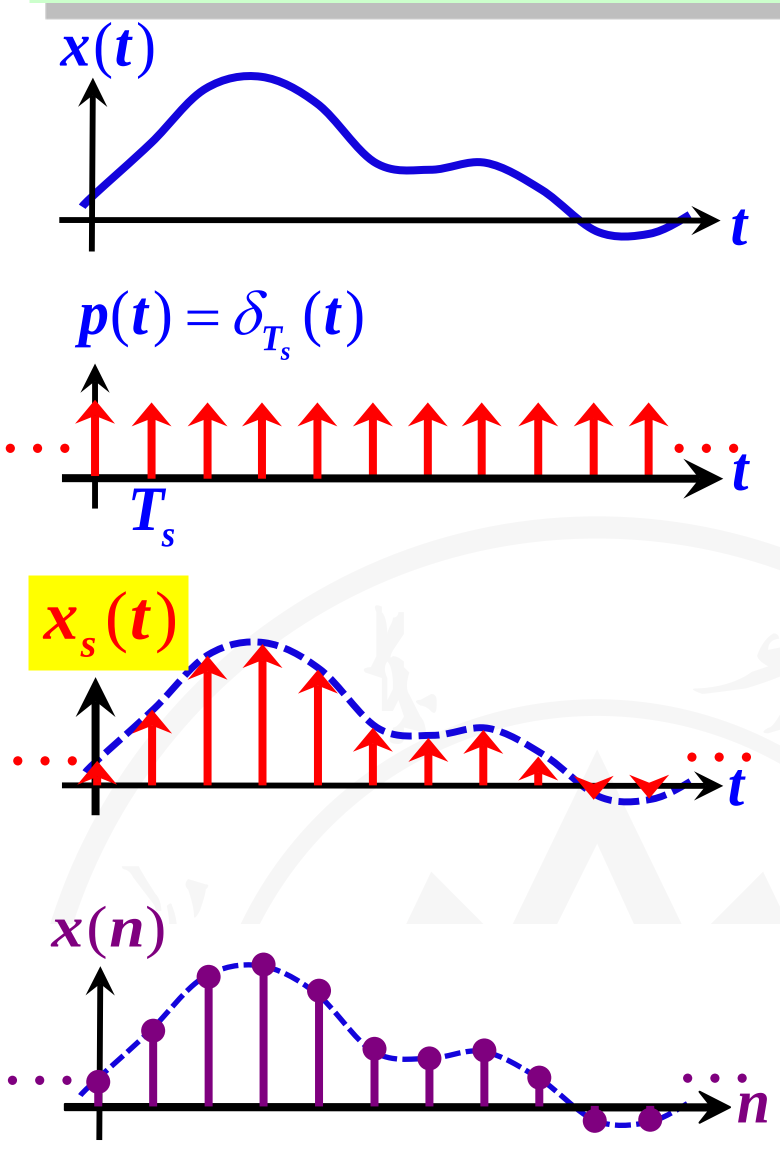
$$p(t)=\delta_{T_s}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$$

对应的样本信号

$$x_s(t)=x(t)p(t)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)\delta(t-nT_s)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\delta(t-nT_s)$$



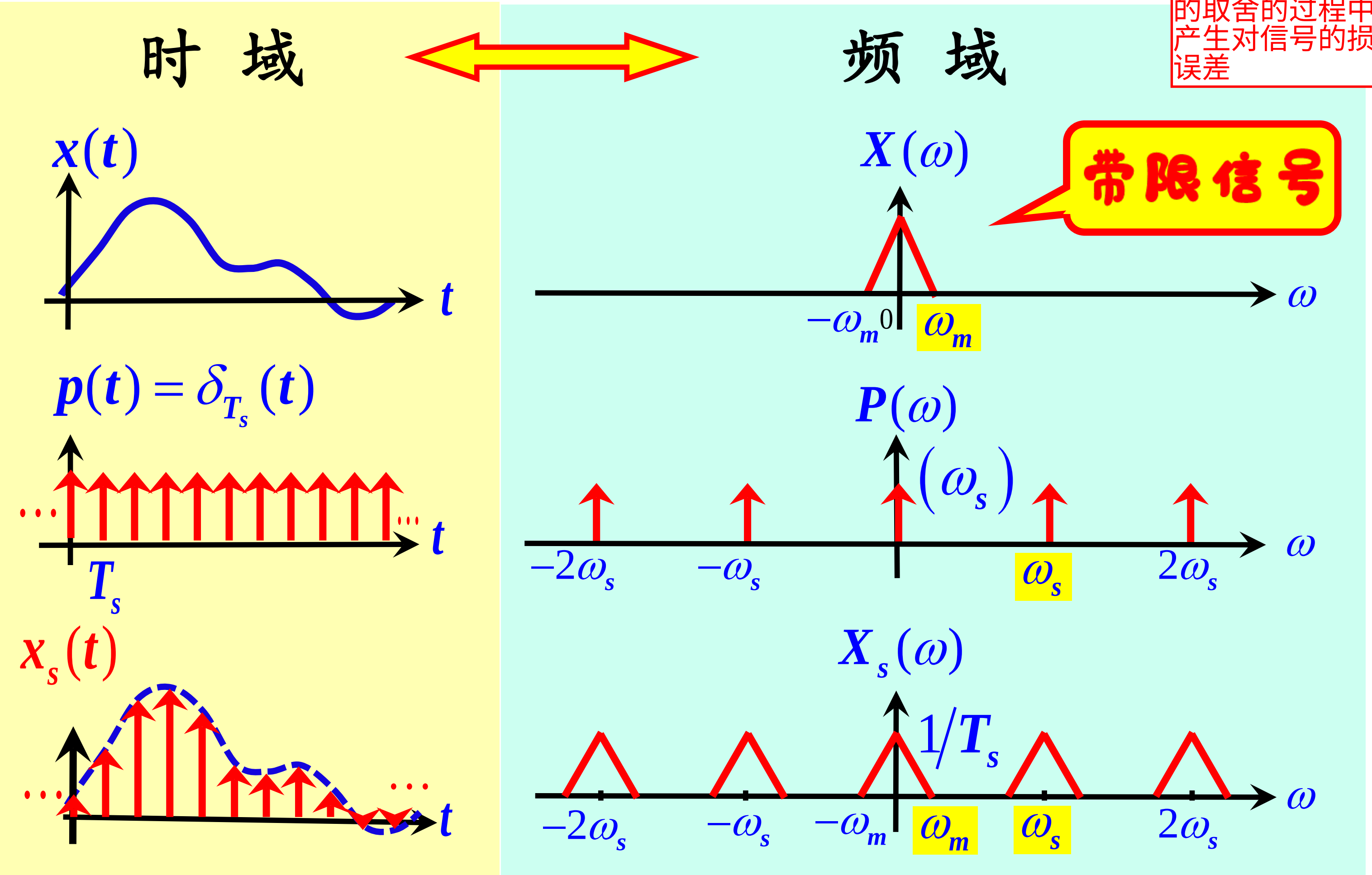
1 $x(n)$是否保留了$x(t)$的全部信息？

2. 样本信号的频谱

1 $x(n)$是否保留了$x(t)$的全部信息？

在这个对信号频域的取舍的过程中会产生对信号的损耗误差

频域分析



有限带宽信号，即：

$|\omega|>\omega_m$ 时，$X(\omega)=0$，

其中 ω_m 为信号的最高频率。

$$X_p(\omega)=\frac{1}{2\pi}[X(\omega)*P(\omega)]$$

$$=\frac{1}{2\pi}X(\omega)*\left[\frac{2\pi}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_s)\right]$$

$$=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X(\omega-n\omega_s)$$

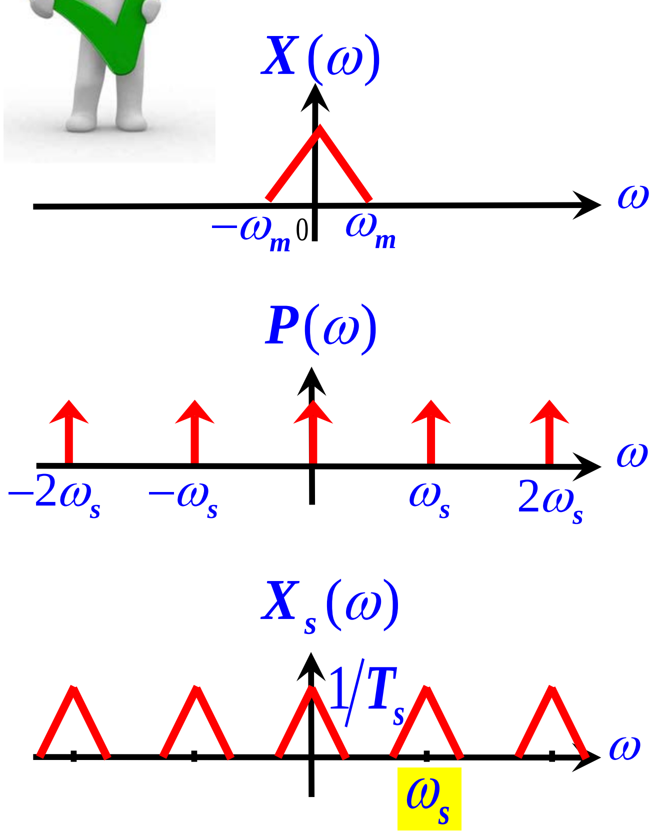
理想样本信号的频谱是连续信号频谱的周期性延拓！

2. 样本信号的频谱

$\omega_s \ge 2\omega_m$ 时，可由 $x(n)$ 完全重建 $x(t)$！

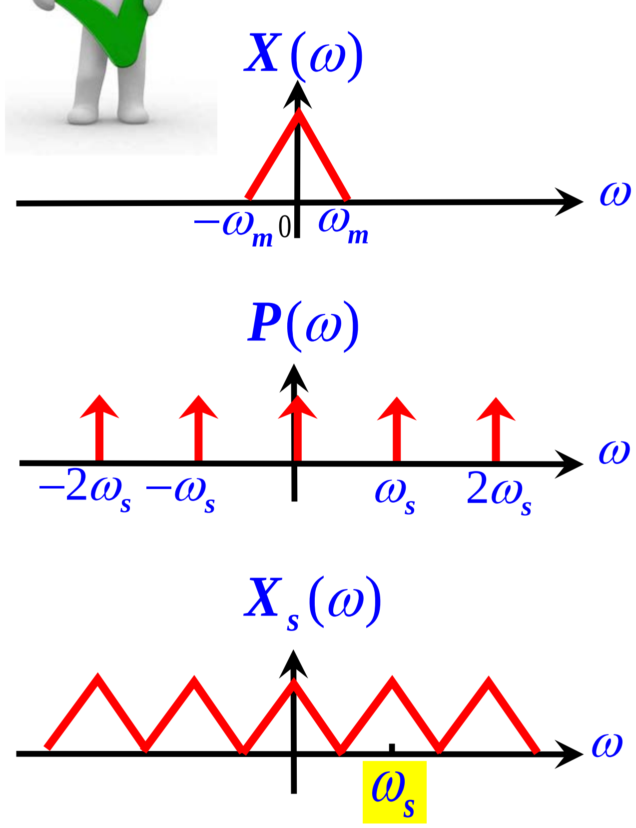
采样频率 ω_s 对频谱的影响

$\omega_s > 2\omega_m$



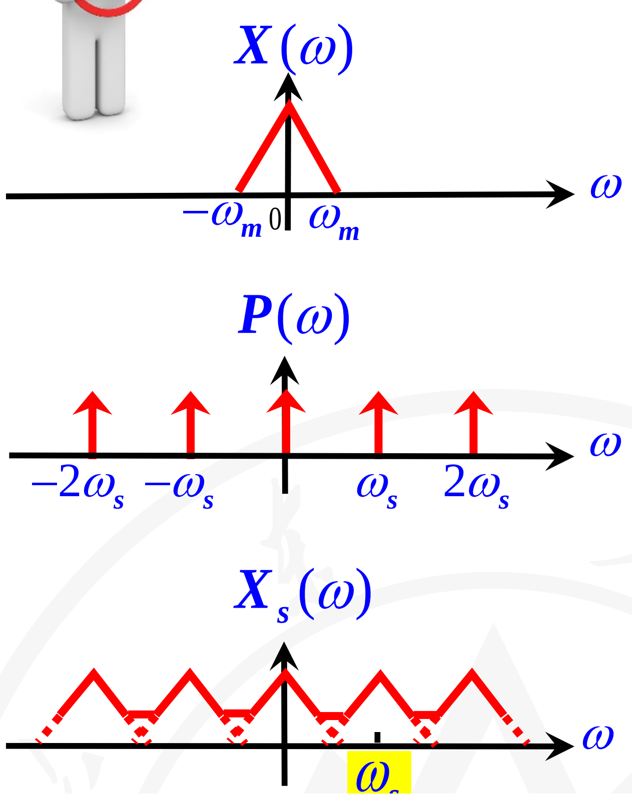
过采样

$\omega_s = 2\omega_m$



临界采样

$\omega_s < 2\omega_m$

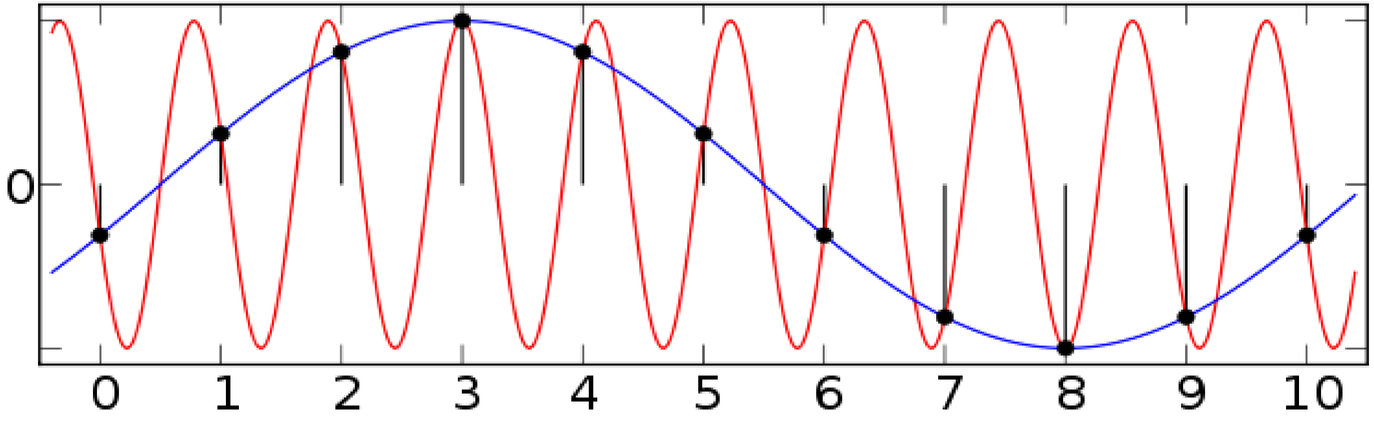


欠采样

2. 样本信号的频谱

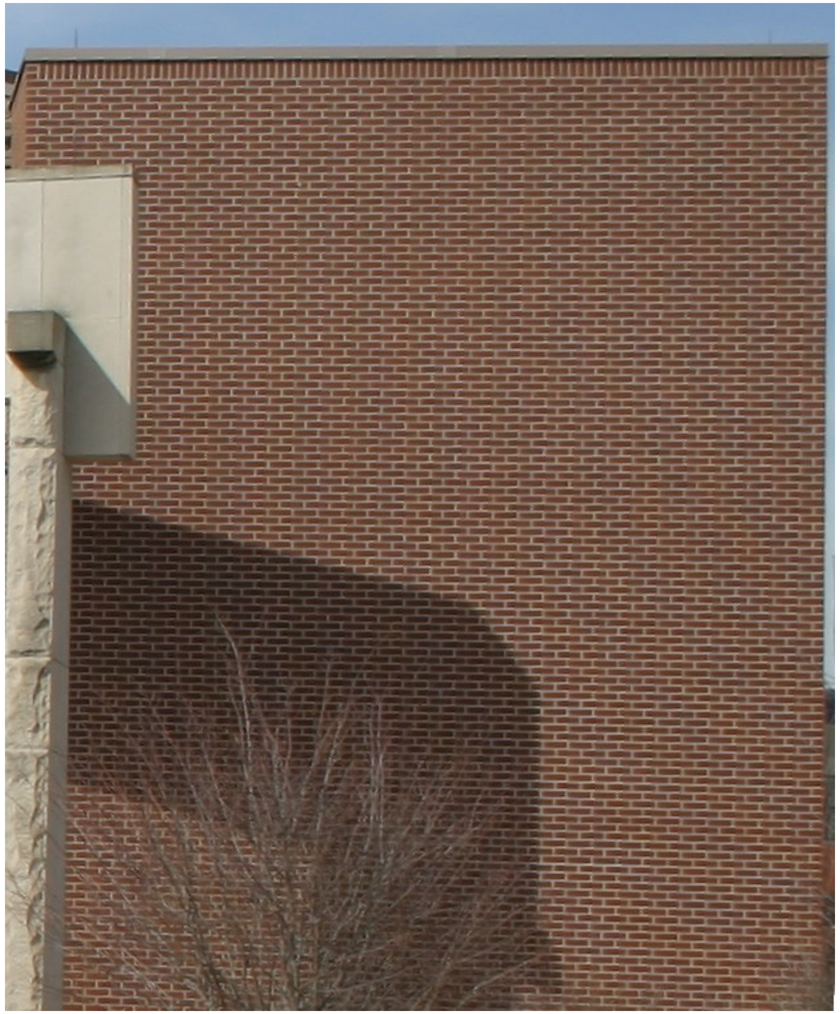
混叠

Distortion/artifact ***that results when the signal reconstructed from samples is different from the original continuous signal due to improper sampling.***



2. 样本信号的频谱

混叠



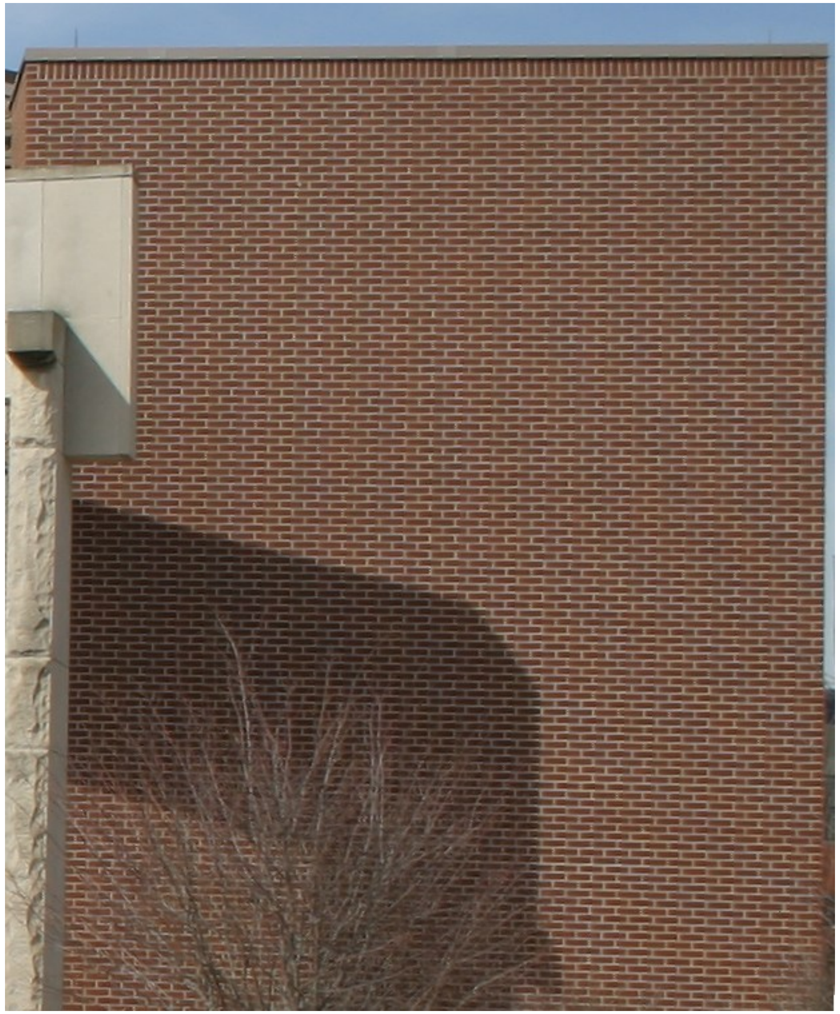
Down-Sample

Why does it happen

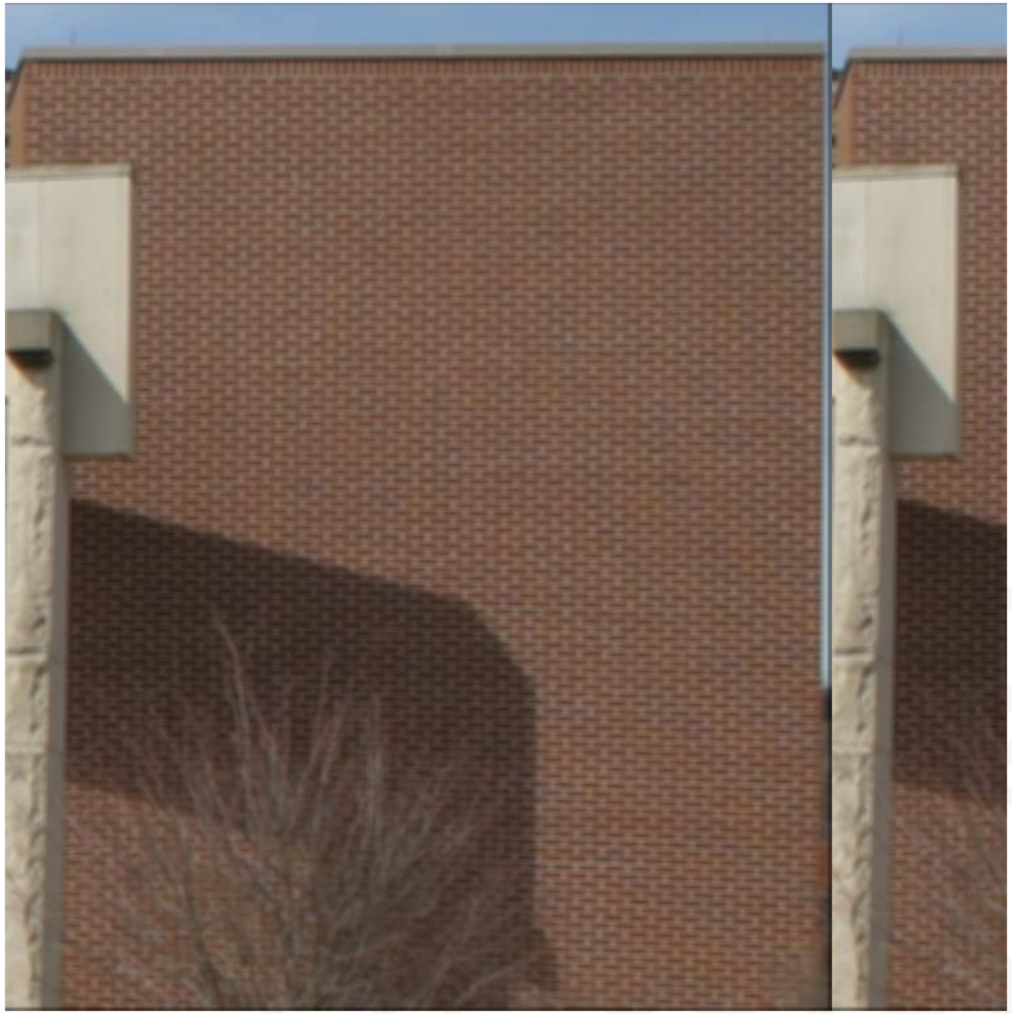
How to reduce

2. 样本信号的频谱

混叠



Low pass filtering →



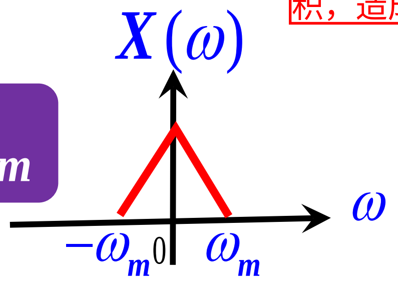
3. 样本信号的重建

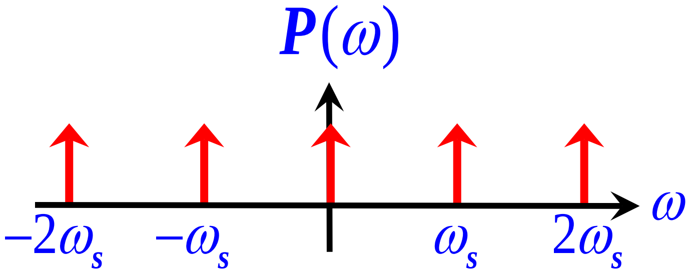
2

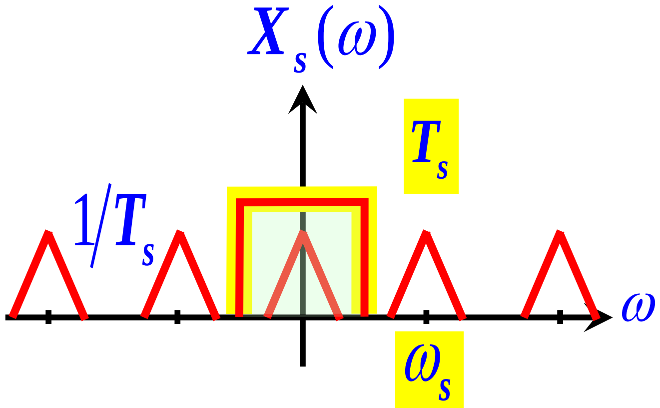
如何由 $x(n)$ 无失真地恢复 $x(t)$？需要什么条件？

这里有一个Ts的增益是因为在用δ（t）进行取样的时候，其频域为ws · δ（w），然后与X（w）卷积，造成了一个ws即1/Ts的衰减

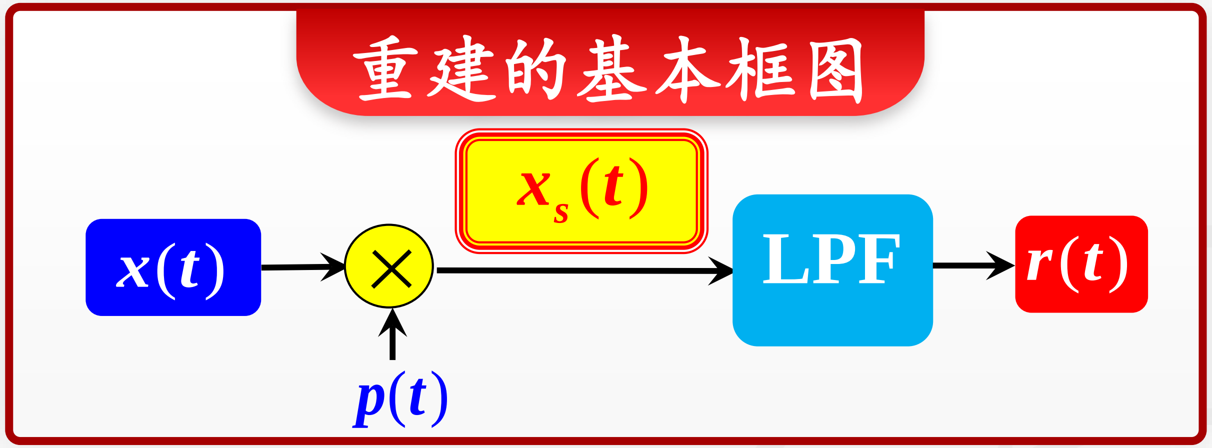
$\omega_s \geq 2\omega_m$







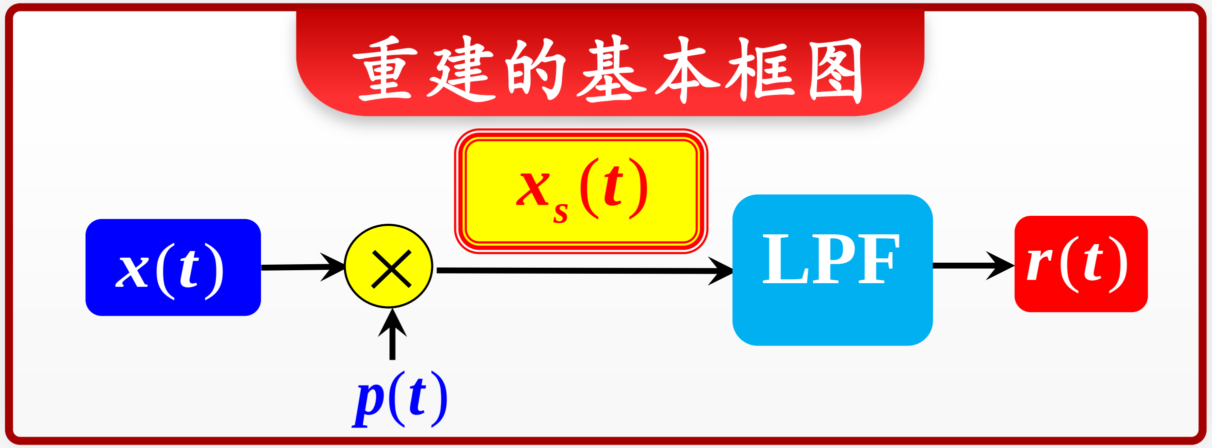
将 $x_s(t)$ 通过一个增益为 T_s，截止频率 $\omega_m < \omega_c < \omega_s - \omega_m$ 的理想低通滤波器，输出 $r(t)$ 就是 $x(t)$。



$$H(\omega) = \begin{cases} T_s, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}, \quad \omega_m < \omega_c < \omega_s - \omega_m$$

3. 样本信号的重建

时域内插



分析时域的情况，

$$r(t)=x_p(t)*h(t)$$

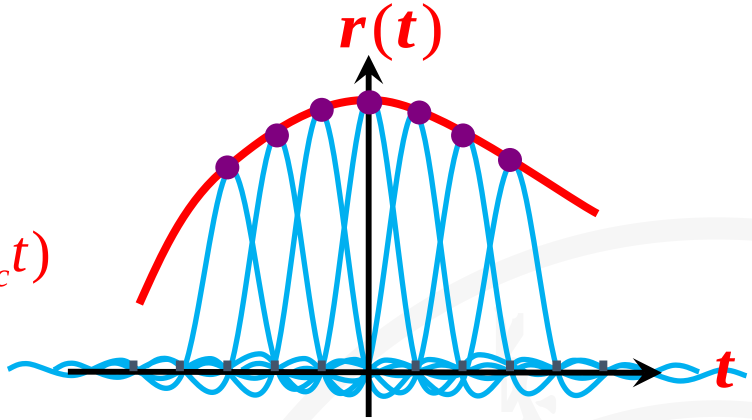
$$=\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)\delta(t-nT_s)\right]*h(t)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)h(t-nT_s)$$

$$h(t)=\frac{\omega_c T}{\pi}\mathrm{sinc}(\omega_c t)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)\mathrm{sinc}\left[\omega_c(t-nT_s)\right]$$

内插公式



完全重建！

奈奎斯特采样定理

设 $x(t)$为带限信号，即在$|\omega| > \omega_m$时，$X(\omega) = 0$ ，若以频率 ω_s 或时间间隔 T_s 对该信号进行采样，并且满足$\omega_s \geq 2\omega_m$ 或 $T_s \leq 1/(2f_m)$ ，则 $x(t)$ 可以惟一地由其样本确定。

将样本信号$x_s(t)$串通过一截止频率 $\omega_m < \omega_c < \omega_s - \omega_m$ 的理想低通滤波器，则可恢复原信号 $x(t)$ 。

Harry Nyquist
1889-1976
美国物理学家

奈奎斯特采样频率
Nyquist Sampling Rate

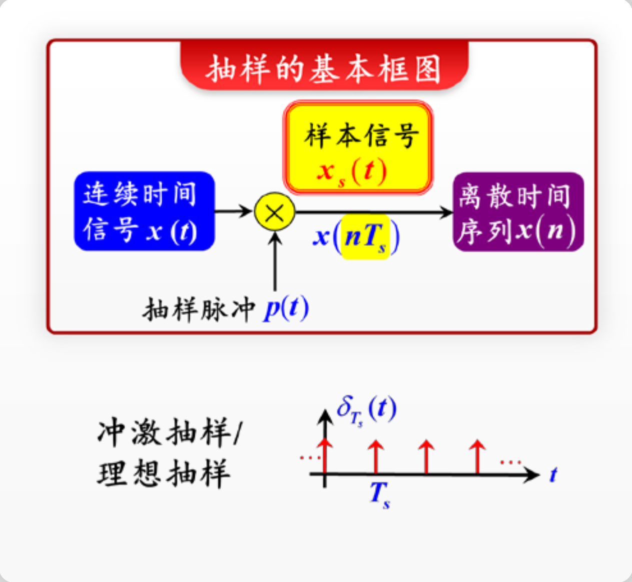
$$f_s = 2f_m$$

奈奎斯特采样间隔
Nyquist Sampling Interval

$$T_s = \frac{1}{2f_m}$$

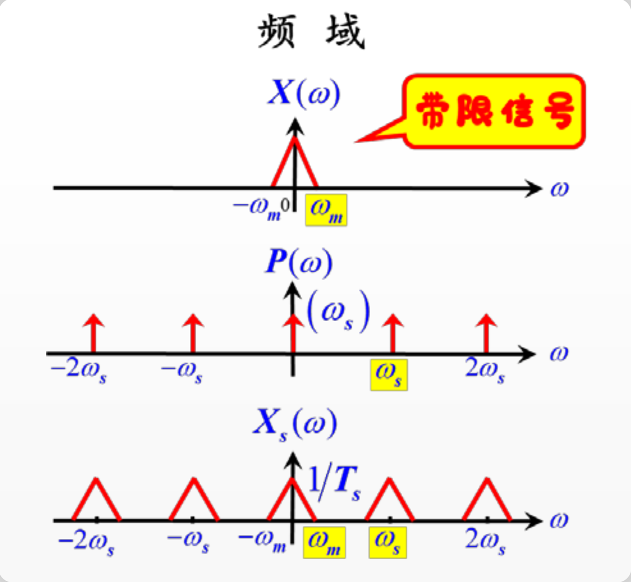
内容回顾

信号的抽样



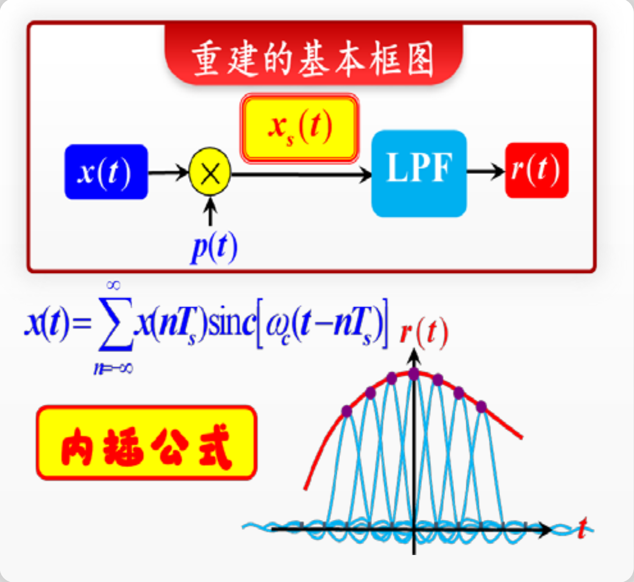
时域 ⟷ 频域

样本信号的频谱



连续信号频谱的周期性延拓！

样本信号的重建



$\omega_s \ge 2\omega_m$ 时，完全重建！

信号的抽样与重建——课后作业

自然采样

采样脉冲是周期矩形脉冲时，

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} G_{\tau}(t-nT_s)$$

称为自然采样。

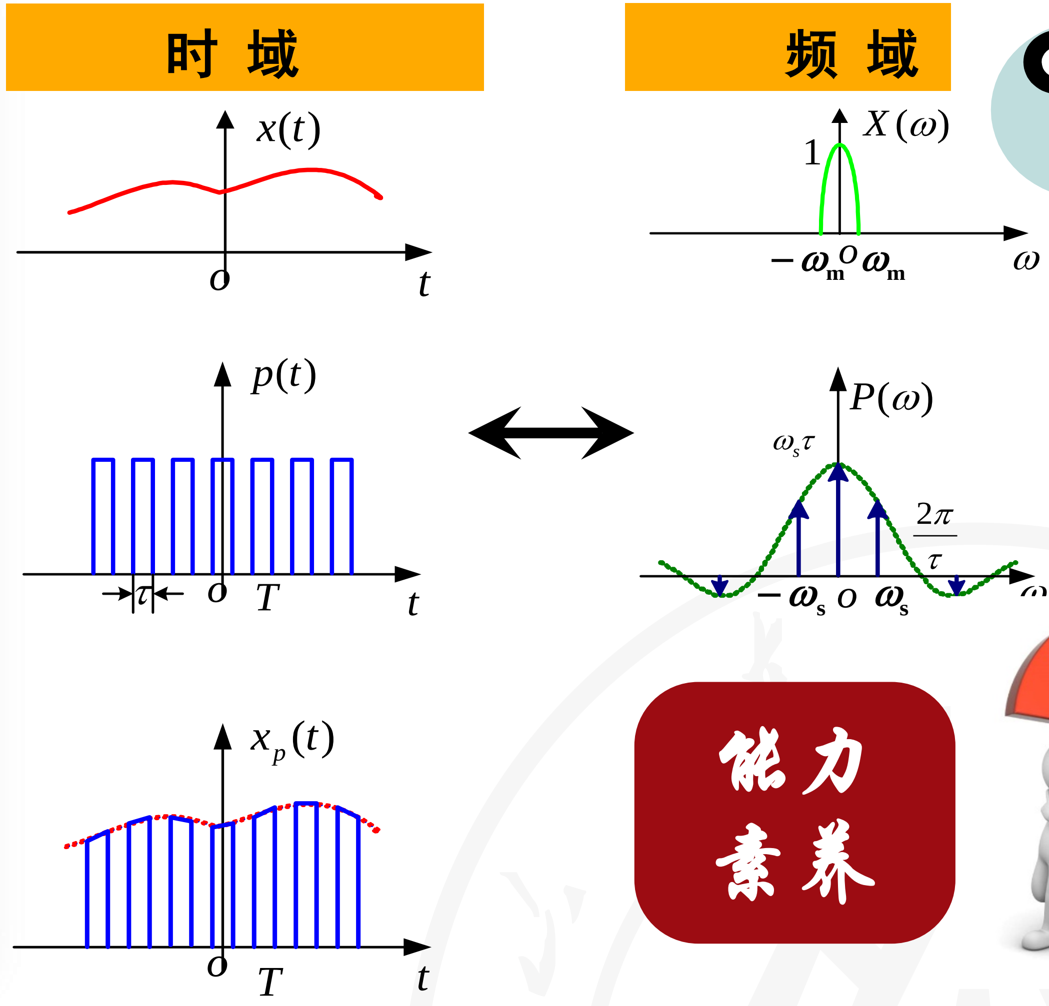
试分析自然采样情况下：

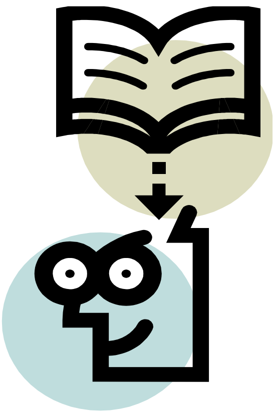
(1) 样本信号的频谱；

(2) 能否完全重建？

完全重建的条件？

如何完全重建？





能力素养

3-39

3-42

自然采样

周期矩形脉冲信号的频谱为：

$$P(\omega)=\omega_s\tau\sum_{n=-\infty}^{\infty}Sa\left(\frac{k\omega_s\tau}{2}\right)\delta(\omega-k\omega_s)$$

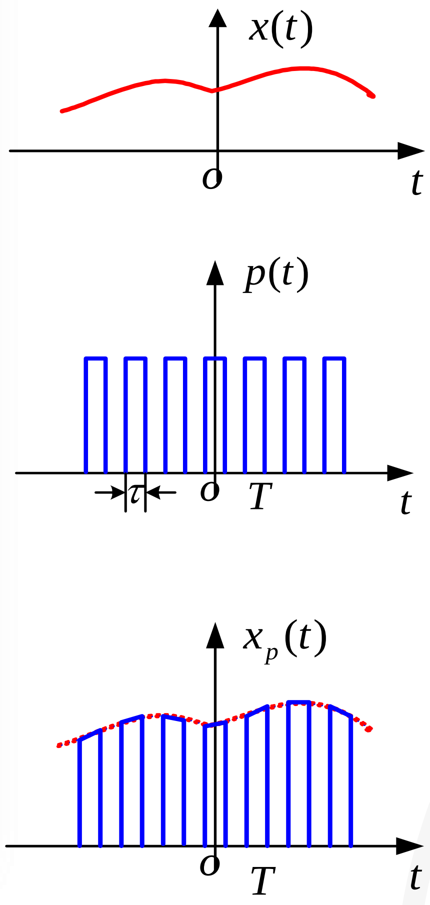
样本信号的频谱为：

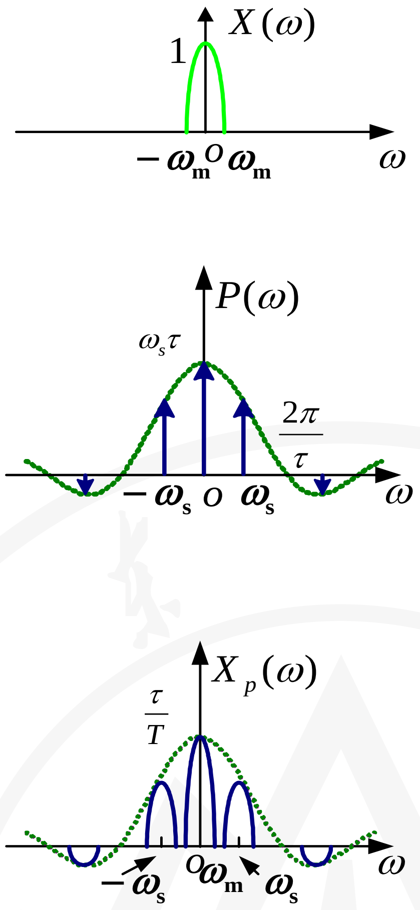
$$X_s(\omega)=\frac{1}{2\pi}[X(\omega)*P(\omega)]$$

$$=\frac{\tau}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}Sa\left(\frac{k\omega_s\tau}{2}\right)X(\omega-k\omega_s)$$

时 域

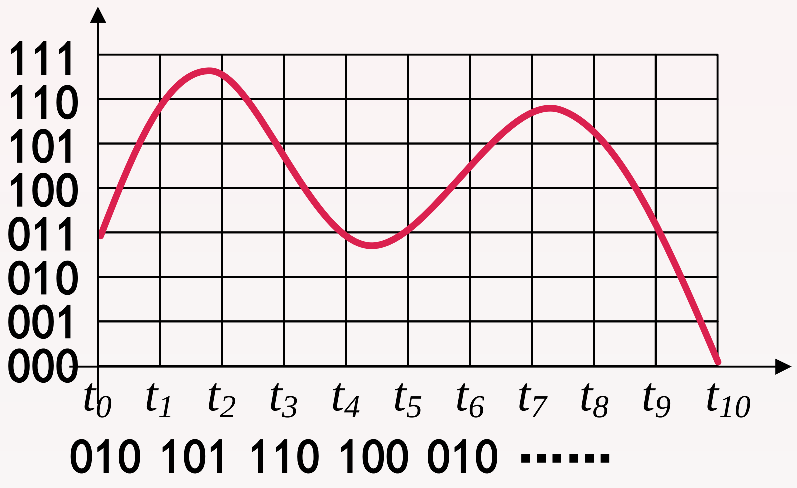
频 域





信号的抽样与重建——延伸阅读

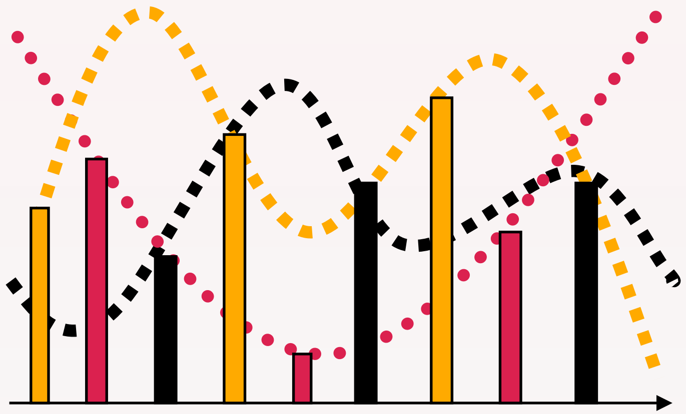
- 实现连续信号离散化，为信号的数字处理奠定基础。



脉冲编码调制 (PCM)

Pulse Code Modulation

- 实现信号的时分复用，为多路信号传输提供理论基础。



时分多路通信 (TDM)

Time Division Multiplexing