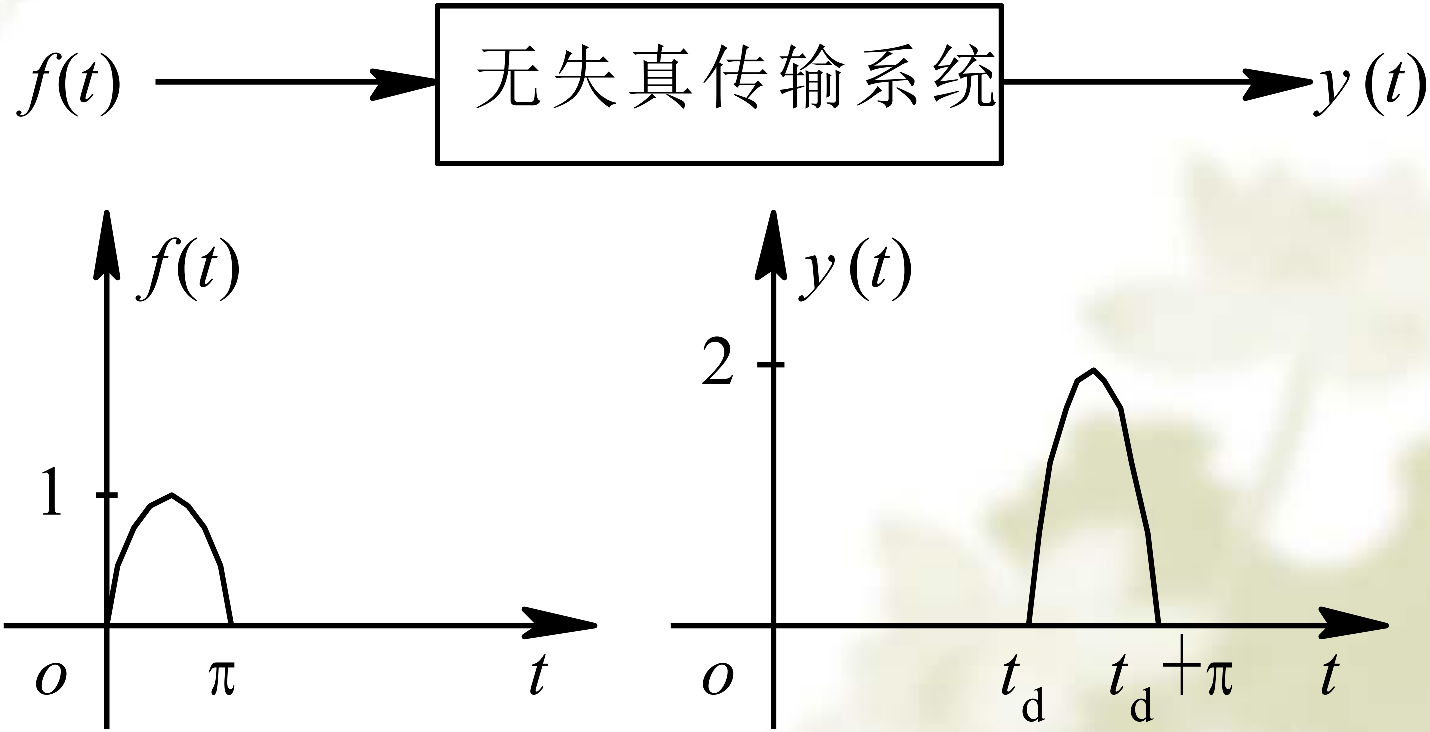
3.4 无失真传输与理想滤波器

系统的作用：传输
滤波

学习p2~7，回答以下问题
1、什么是线性失真和非线性失真？
2、什么是无失真传输？
3、无失真传输满足的什么条件？

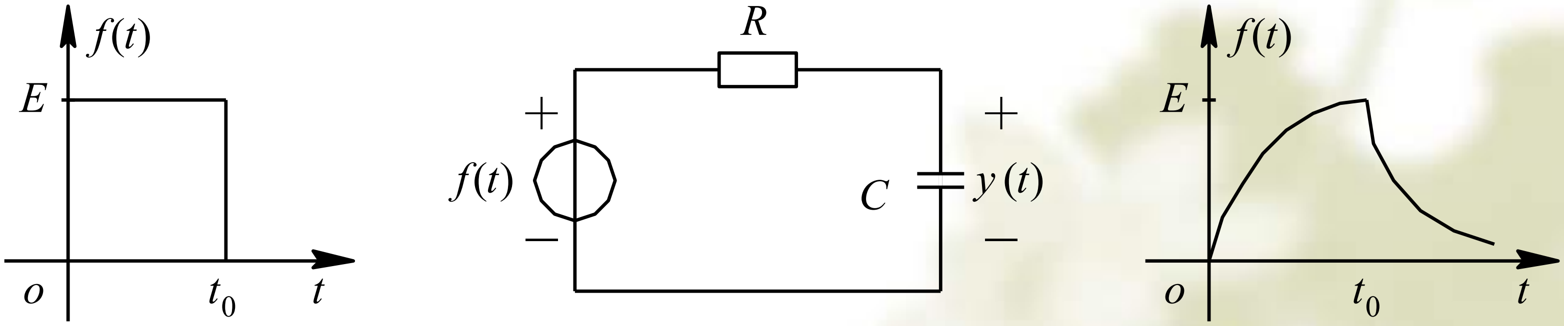
3.4.1 无失真传输



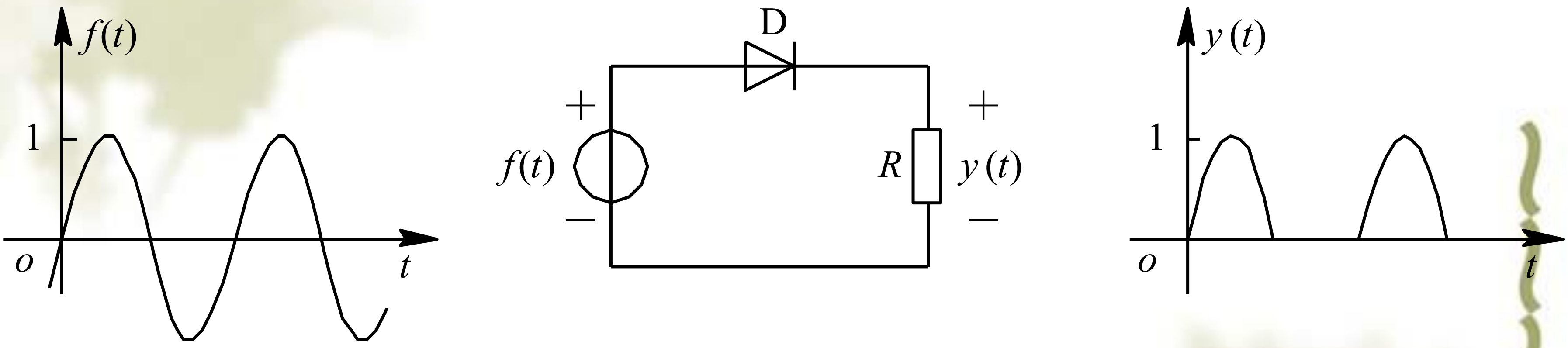
系统的无失真传输：只允许大小变换，或延时

通常把失真分为两大类：一类为线性失真，另一类为非线性失真。信号通过线性系统所产生的失真称线性失真。其特点是在响应$y(t)$中不会产生新频率。也就是说，组成响应$y(t)$的各频率分量在激励信号$f(t)$中都含有，只不过各频率分量的幅度、相位不同而已。（非线性失真是输出信号中产生新的频率成分）

如图所示的失真就是线性失真，对$y(t)$与$f(t)$求傅里叶变换可知，$y(t)$中决不会有$f(t)$中不含有的频率分量。



线性失真

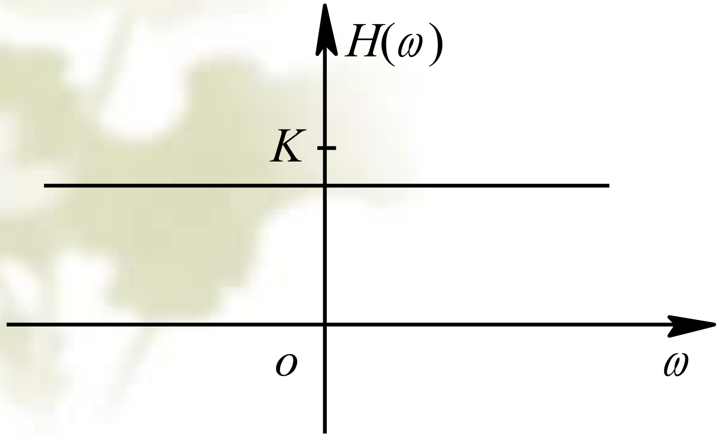


非线性失真

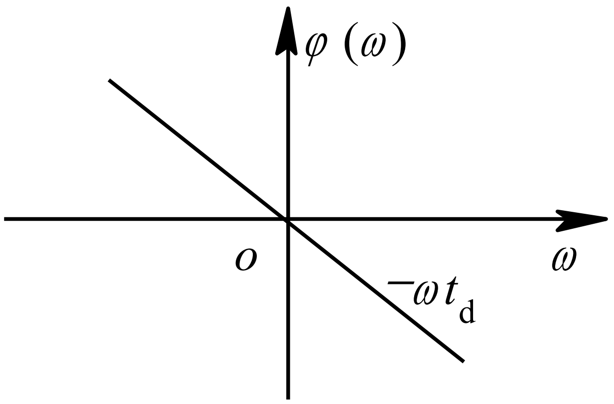
2. 无失真传输条件

$$y(t) = Kf(t - t_d)$$

$$Y(j\omega) = KF(j\omega)e^{-j\omega t_d}$$



(a)



(b)

系统不失真传输的幅频、相频条件
(*a*) 幅频条件；(*b*) 相频条件

严格满足无失真传输条件的系统：
1、纯电阻系统；2、匹配的高频传输线

实际中：信号是有限带宽的，在信号的频带范围内，系统的幅度、相位特性满足以上条件，就能获得较满意的传输质量。

关于相位无失真条件的理解。设：

$$f(t) = E_1 \sin \omega_1 t + E_2 \sin \omega_2 t$$

$$y(t) = kf(t - t_0) = kE_1 \sin[\omega_1 (t - t_0)] + kE_2 \sin[\omega_2 (t - t_0)]$$

$$= kE_1 \sin(\omega_1 t - \omega_1 t_0) + kE_2 \sin(\omega_2 t - \omega_2 t_0)$$

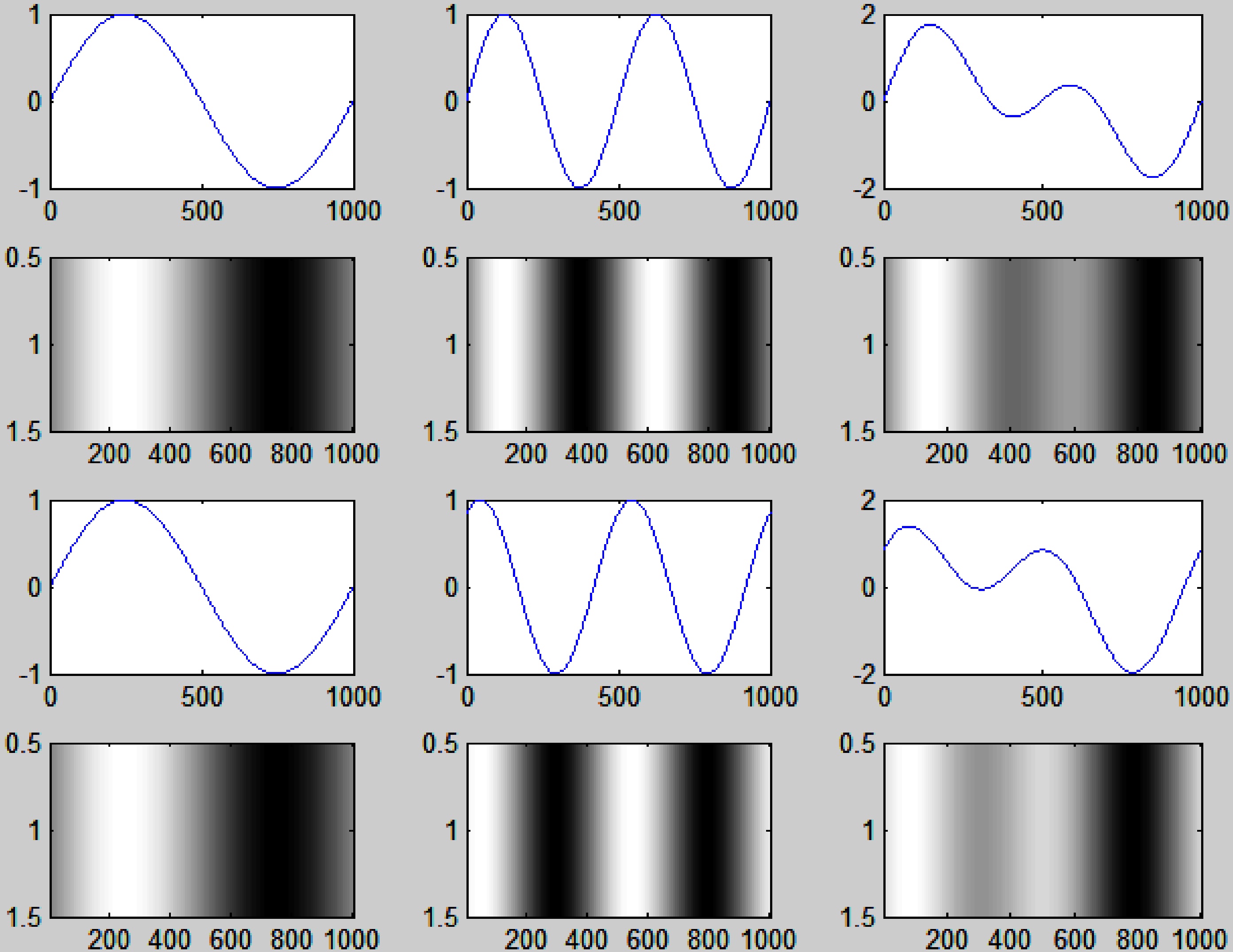
$$\varphi_1 = -\omega_1 t_0 \qquad \varphi_2 = -\omega_2 t_0$$

结果表明，经过无失真传输后相位的移动并不相同，而所有频率分量延迟相同的时间，这个时间又称为群延时。

无失真传输的冲击响应为： $h(t) = k\delta(t - t_0)$

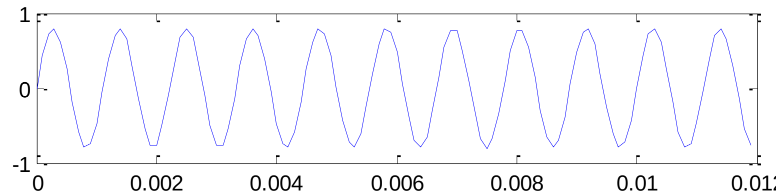
经过系统后仅产生幅度的变化和时间的延时。

相位失真对视觉的影响

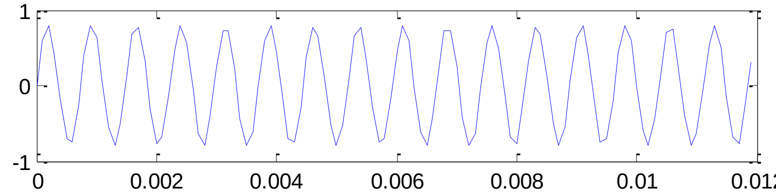


相位失真对听觉的影响

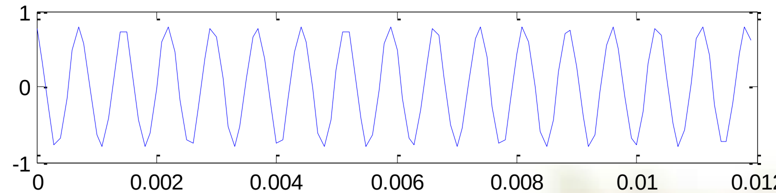
s1



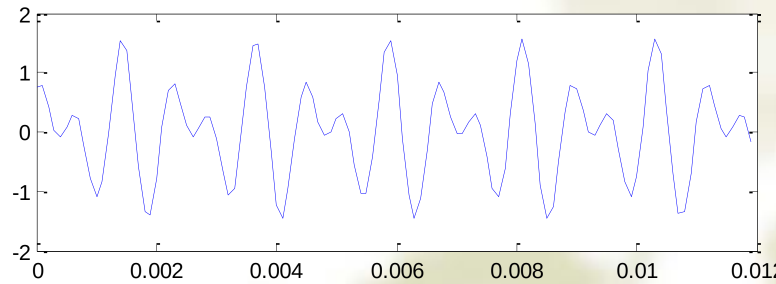
s2



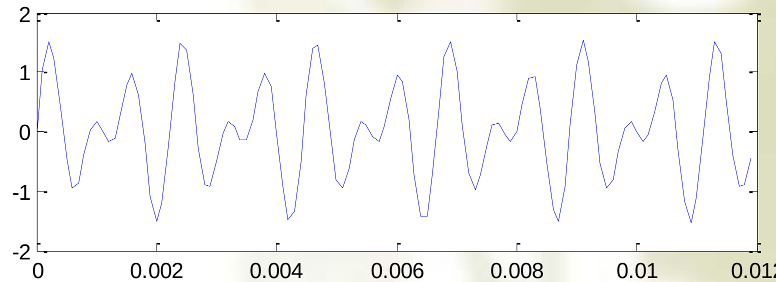
s3



s1+s2



s1+s3



3.4.2 理想滤波器

学习p10~13，回答以下问题
1、什么是滤波、滤波器、理想滤波器？
2、理想低通滤波器的频域和时域表达式分别是什么？如何推导？
3、理想低通滤波器是否是物理可实现的？

凡是改变频谱从而改变信号的操作，均为**滤波**。

实现滤波的系统称为**滤波器**

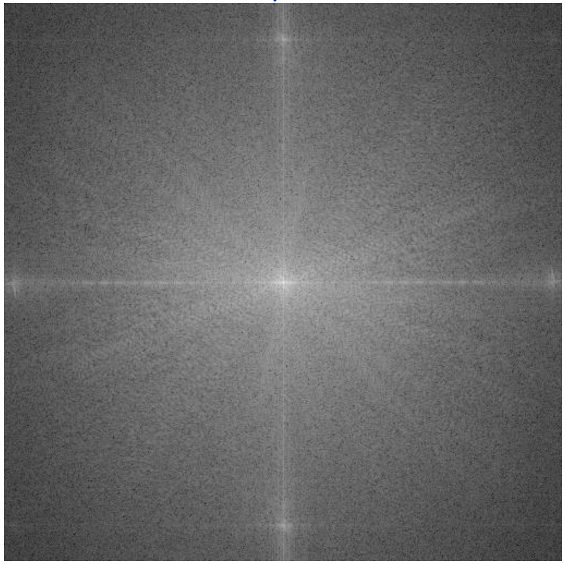
用途：频分通信系统，去噪声等。

二维滤波

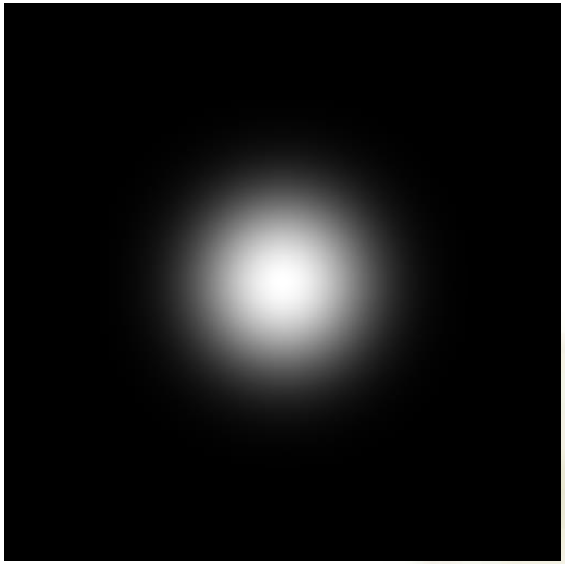
FFT

Filter

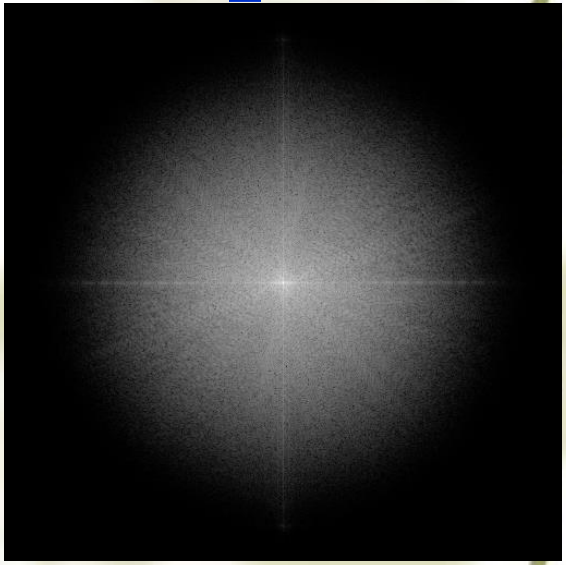
IFFT



*



=

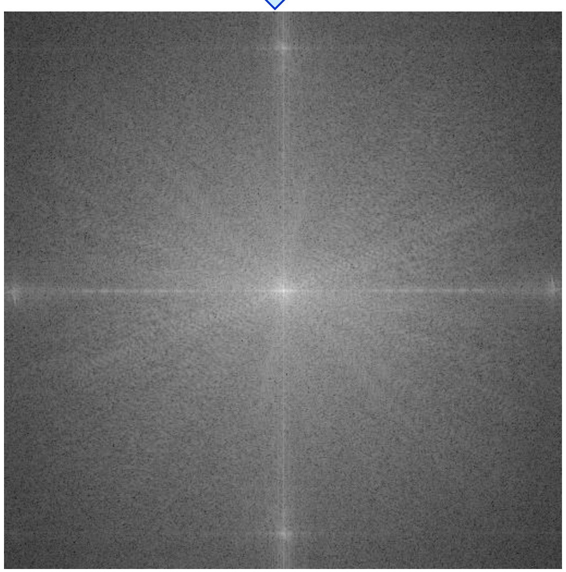


二维滤波

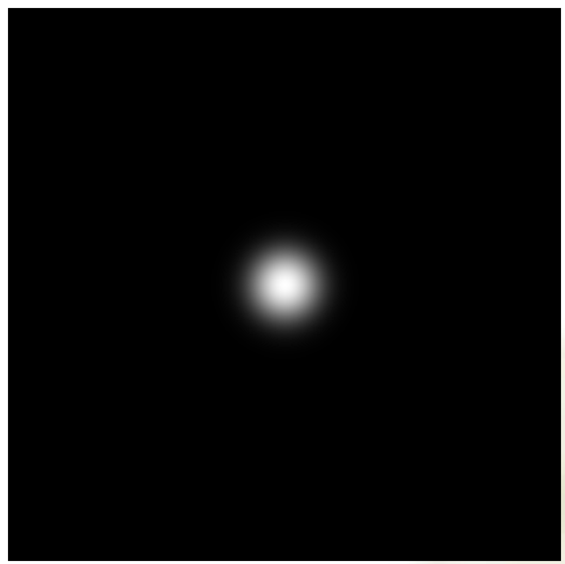
FFT

Filter

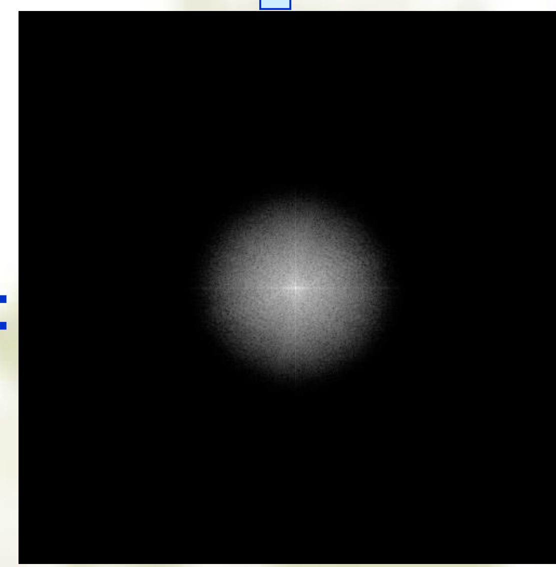
IFFT



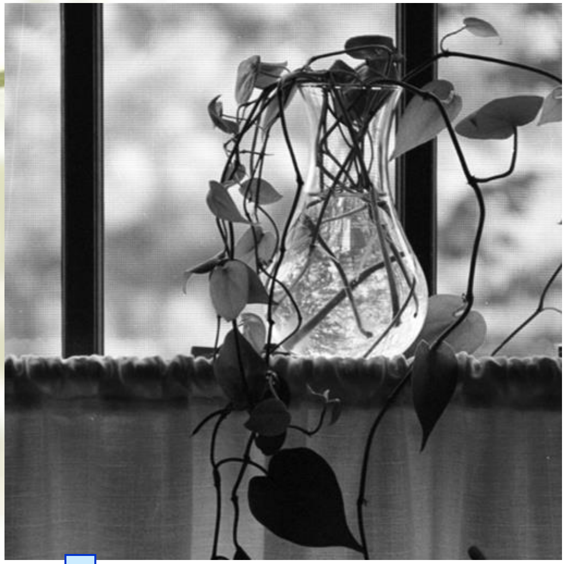
*



=



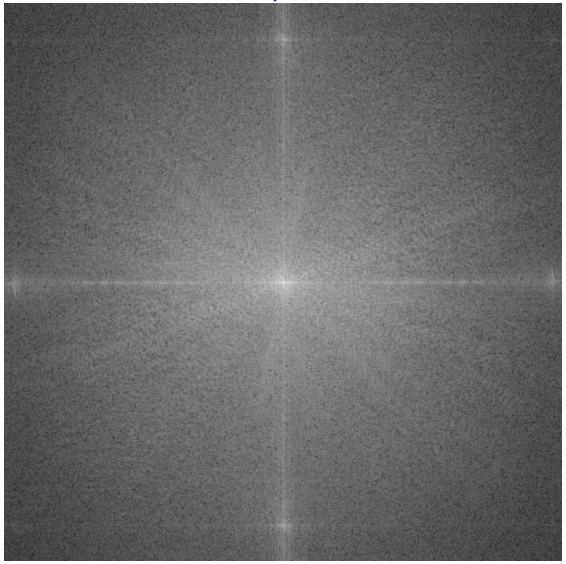
二维滤波



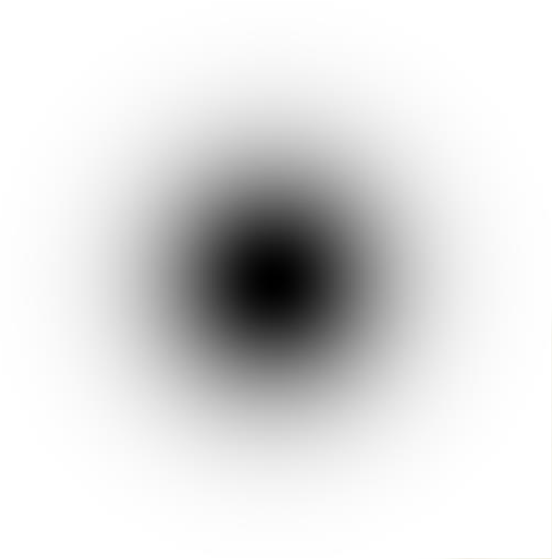
FFT

Filter

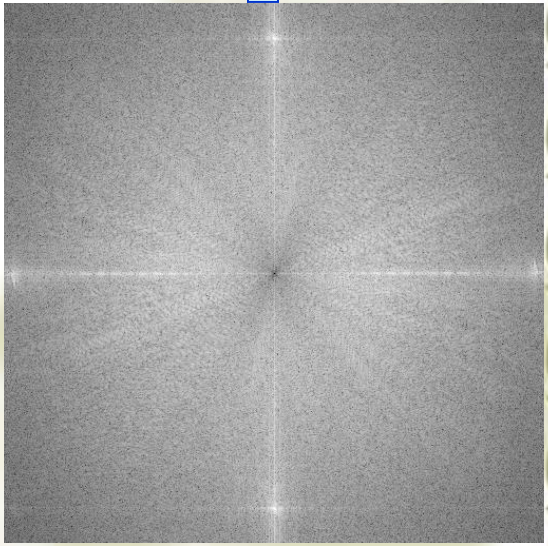
IFFT



*

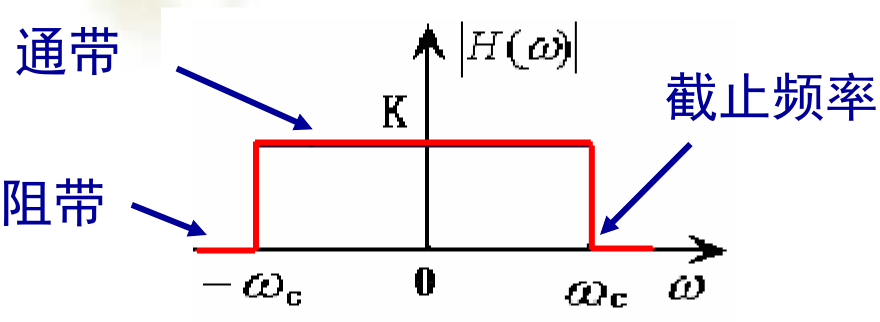


=

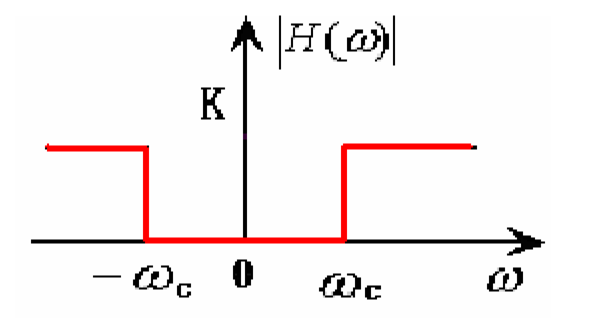


所谓理想滤波器，是指不允许通过的频率成分，一点也不让它通过，百分之百地被抑制掉；而允许通过的频率成分，让其顺利通过，百分之百地让其通过。

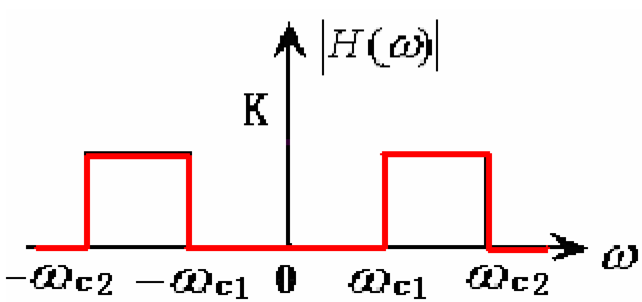
理想滤波：有选择性地实现无失真传输。



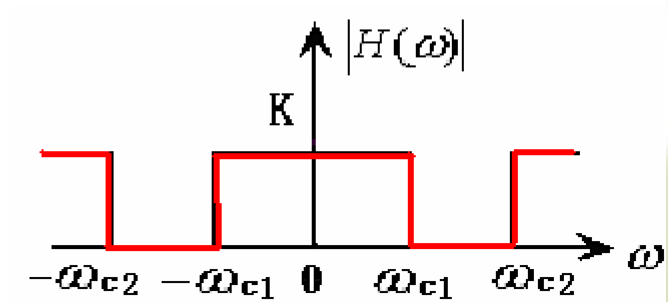
理想低通滤波(Lowpass)



理想高通滤波(Highpass)

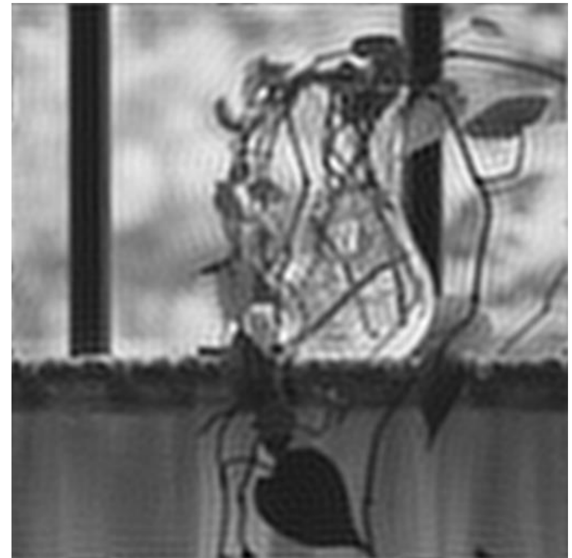


理想带通特性(Bandpass)



理想带阻特性(Bandstop)

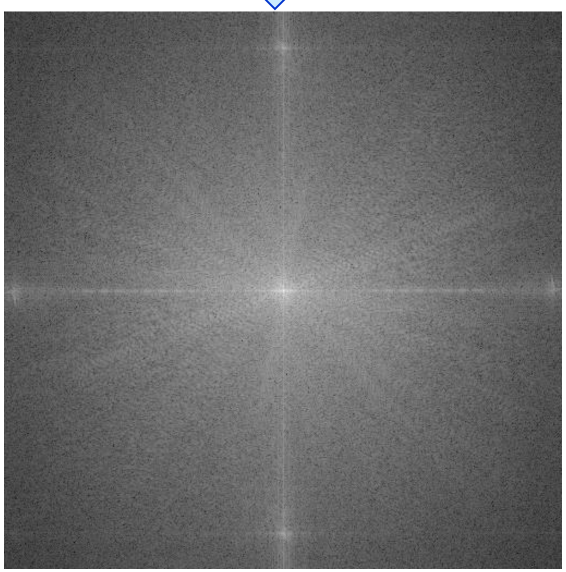
二维滤波



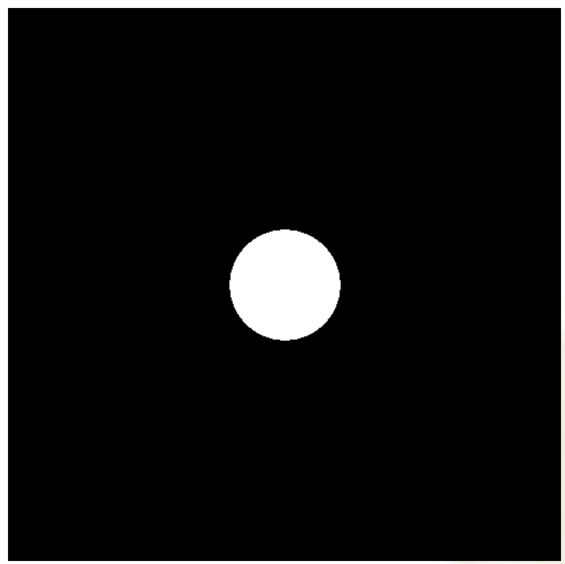
FFT

Filter

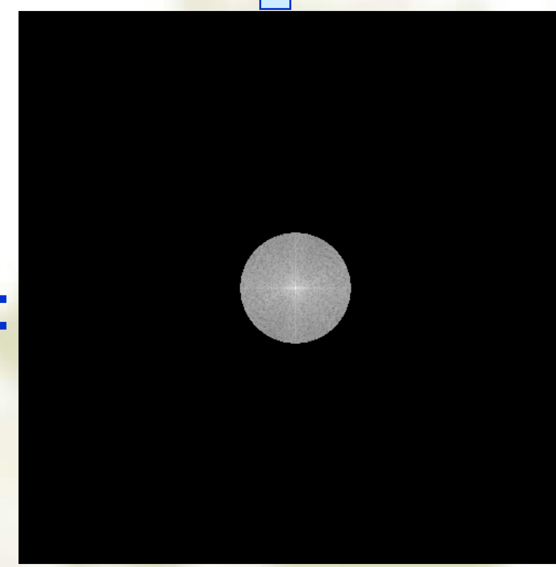
IFFT



*

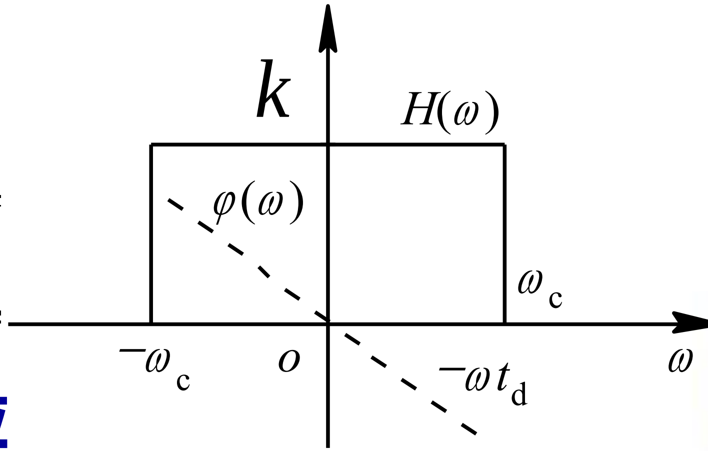


=



1. 理想低通滤波器的系统函数

$$H(j\omega)=\begin{cases} k\cdot e^{-j\omega t_d} & |\omega|<\omega_c \\ 0 & |\omega|>\omega_c \end{cases}$$

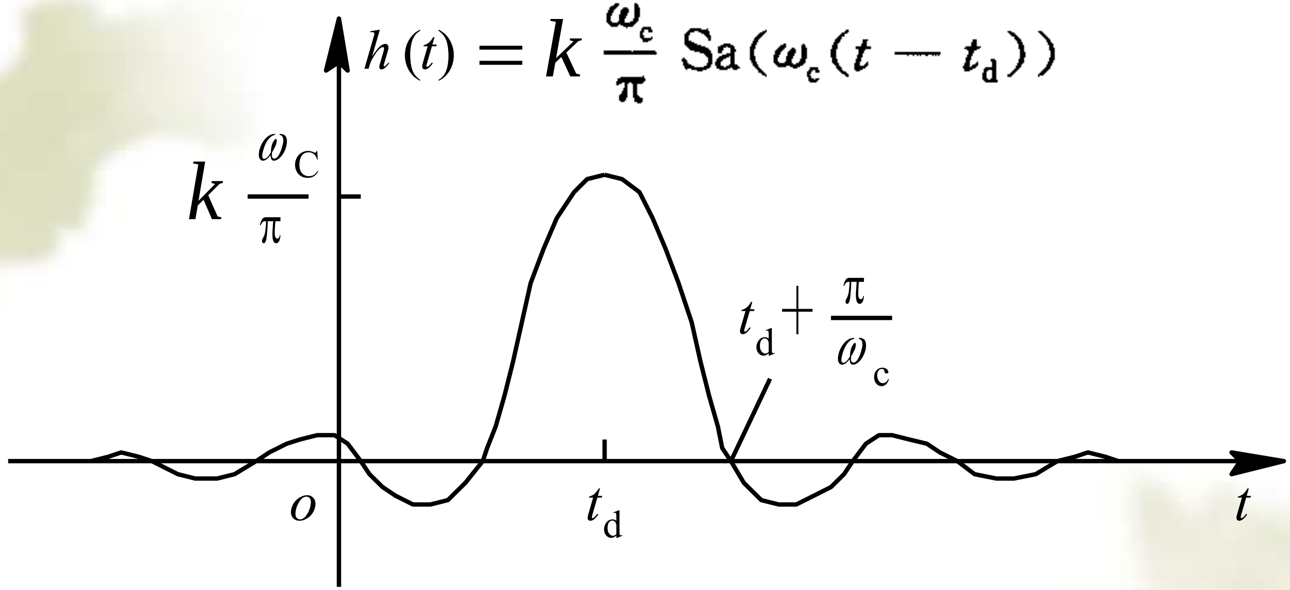


理想低通滤波器的系统函数

2. 理想低通滤波器的单位冲激响应

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathscr{F}^{-1}[H(j\omega)] \\ &= \frac{k}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega \\ &= \frac{k}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} 1\cdot e^{-j\omega t_d}e^{j\omega t}\,d\omega \\ &= \frac{k}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega(t-t_d)}\,d\omega \\ &= k\frac{\omega_c}{\pi}\mathrm{Sa}(\omega_c(t-t_d)) \end{aligned}$$

理想低通滤波器的冲激响应



在时域，要求系统的冲激响应*h*(*t*)满足因果条件，即

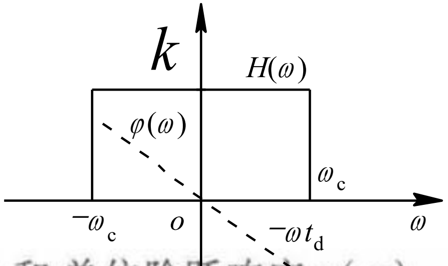
$$t<0\text{时}, h(t)=0$$

而理想低通滤波器冲激响应$h(t)$在 $t<0$时已经有值，故它是物理不可实现系统，是非因果系统。

问题与讨论

1） 有无失真？ ——**严重失真**

当 $\delta(t)$ 经过理想低通时，ω_c 以上的频率成分都衰减为0，所以失真。



2） 当 $\varphi(\omega)=0$ 时，求h(0)和g(∞)

问题 2：假设理想低通滤波器的 $\varphi(\omega)=0$，求其单位冲激响应 $h(0)$ 和单位阶跃响应 $g(\infty)$。

如理想低通滤波器的 $\varphi(\omega)=0$，则其冲激响应为 $h(t)=k\dfrac{\omega_c}{\pi}\mathrm{Sa}(\omega_c t)$，所以有

$$h(0)=k\frac{\omega_c}{\pi}$$

另外，由傅里叶反变换定义式有

$$h(0)=h(t)\Big|_{t=0}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)e^{j\omega t}d\omega\Big|_{t=0}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)d\omega \qquad (3-146)$$

由图 3-56 所示理想低通滤波器的频谱可知，$H(\omega)$ 与横轴所包围的面积为 $2\omega_c k$，代入式(3-146)可以推出 $h(0)=k\dfrac{\omega_c}{\pi}$。

单位阶跃响应在无穷远处值

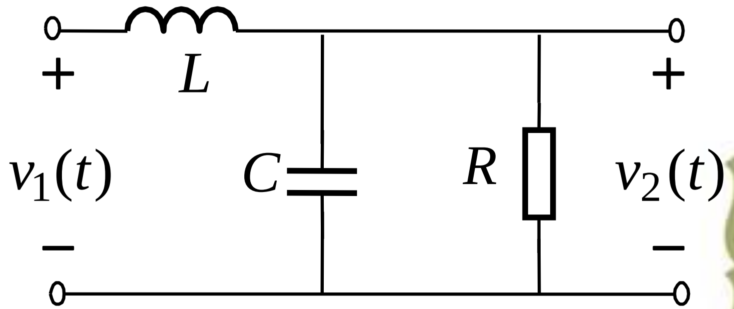
$$g(\infty)=g(t)\Big|_{t=\infty}=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau\Big|_{t=\infty}=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)dt=H(0)=k$$

例：3–26

1、无源低通滤波器的构架

2、求图示电路的$H(\omega)$,$h(t)$，

并画出$H(\omega)$的频谱图。



$$H(\omega)=\frac{V_2(\omega)}{V_1(\omega)}=\frac{\dfrac{1}{\dfrac{1}{R}+\mathrm{i}\omega C}}{\mathrm{i}\omega L+\dfrac{1}{\dfrac{1}{R}+\mathrm{i}\omega C}}=\frac{1}{1-\omega^2 LC+\mathrm{i}\omega\dfrac{L}{R}}$$

$$\text{设}R=\sqrt{\frac{L}{C}},\ \omega_0=1\Big/\sqrt{LC}$$

$$H(\omega)=\frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2+i\frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$H(\omega)=\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2-\omega^2+i\omega\omega_0+\frac{\omega_0^2}{4}-\frac{\omega_0^2}{4}}=\frac{2\ \omega_0}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0}{\left(\frac{\omega_0}{2}+\mathrm{i}\omega\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0\right)^2}$$

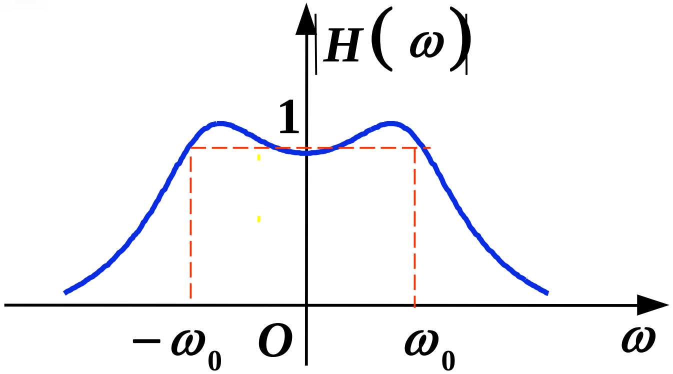
由傅里叶反变换知: $h(t)=\frac{2\omega_0}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\frac{\omega_0 t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right)u(t)$

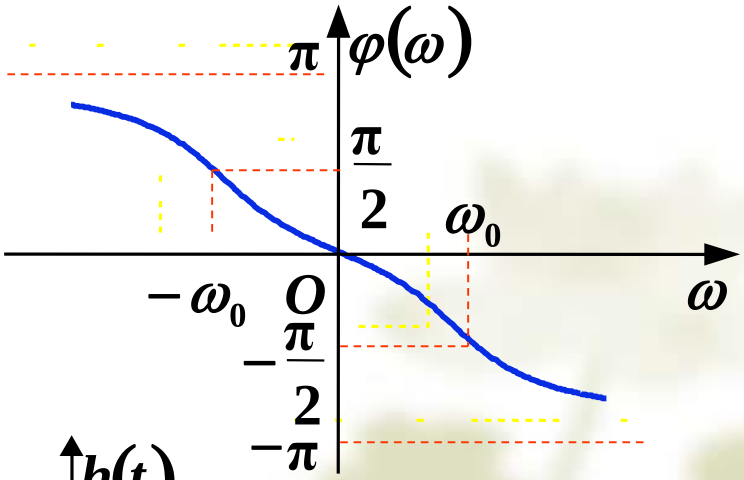
由第四章拉普拉斯变换易知

频谱图与时域波形图

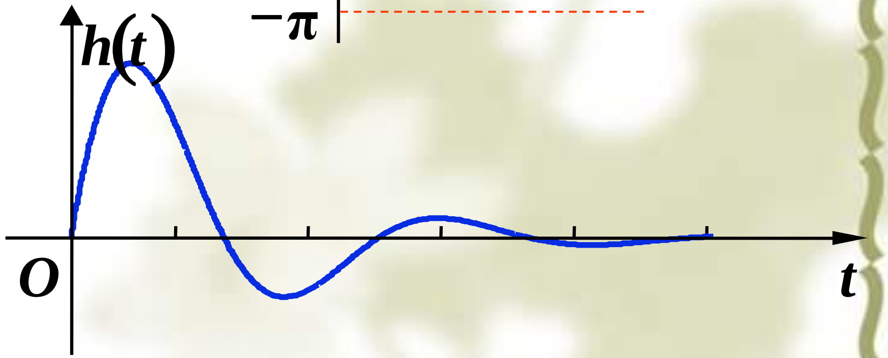
$$|H(\omega)|=\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$\varphi(\omega)=-\arctan\left[\frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right]$$

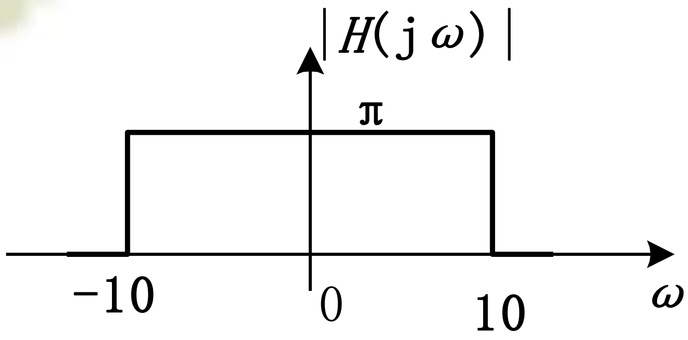




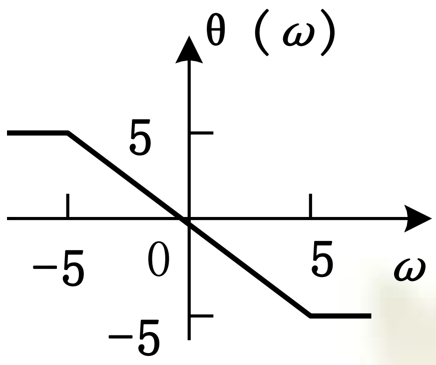
$$h(t)=\frac{2\omega_0}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\omega_0 t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0 t\right)u(t)$$



思考：系统的幅频特性|H(jω)|和相频特性如图(a)(b)所示，则下列信号通过该系统时，不产生失真的是[　　]



(a)



(b)

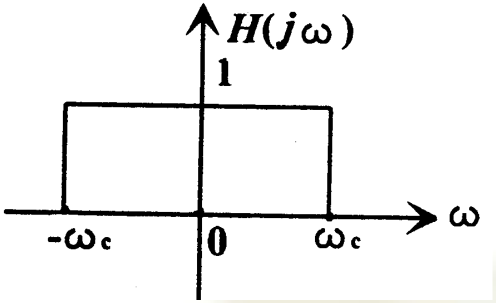
(A) f(t) = cos(t) + cos(8t)

(B) f(t) = sin(2t) + sin(4t)

(C) f(t) = sin(2t) sin(4t)

(D) f(t) = cos2(4t)

思考：已知一个线性时不变系统的频响函数为H(jω)(其相位频谱 $\varphi(\omega)=0$)。试证明此系统对以下两个信号 $f_1(t)=\dfrac{\pi}{\omega_c}\delta(t)$ 和 $f_2(t)=\dfrac{\sin\omega_c t}{\omega_c t}$ 的零状态响应是相同的。



证明：

$$f_1(t)=\frac{\pi}{\omega_c}\delta(t)\leftrightarrow F_1(j\omega)=\frac{\pi}{\omega_c}$$

$$f_2(t)=\frac{\sin\omega_c t}{\omega_c t}\leftrightarrow F_2(j\omega)=\frac{\pi}{\omega_c}G_{2\omega_c}(\omega)$$

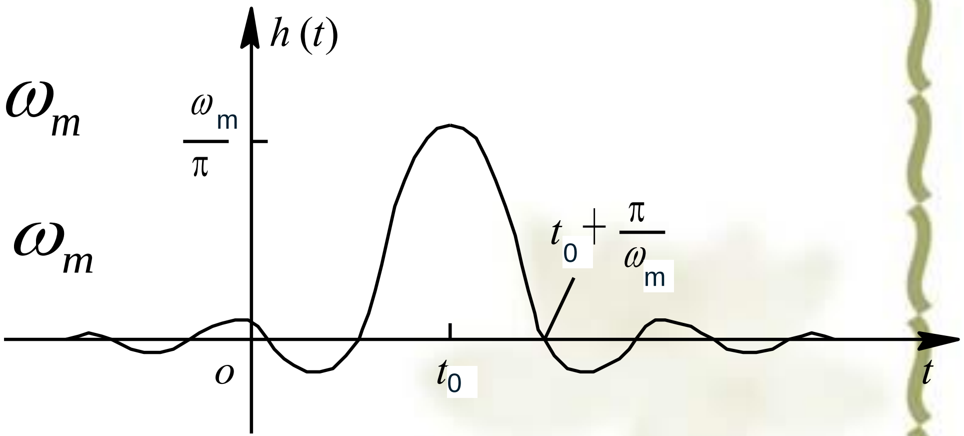
$$F_1(j\omega)H(j\omega)=F_2(j\omega)H(j\omega)=y_f(j\omega)$$

3. 理想低通滤波器的单位阶跃响应

目的：找到阶跃信号通过理想低通滤波器后的响应的上升时间与滤波器宽度之间的关系。

理想低通滤波器系统函数：

$$H(\omega)=\begin{cases} e^{-j\omega t_0}, & |\omega|<\omega_m \\ 0, & |\omega|>\omega_m \end{cases}$$



$$h(t)=\frac{\omega_m}{\pi}Sa\left[\omega_m(t-t_0)\right]$$

$$f(t)=u(t)$$

$$y(t)=f(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{t}\frac{\omega_m}{\pi}Sa\left[\omega_m(\tau-t_0)\right]d\tau$$

$$y(t)=f(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{t}\frac{\omega_m}{\pi}Sa\left[\omega_m(\tau-t_0)\right]d\tau$$

令 $\lambda=\omega_m(\tau-t_0)$ 上限 $t\to\omega_m(t-t_0)$ 下限 $-\infty\to-\infty$

$$d\tau=\frac{1}{\omega_m}d\lambda$$

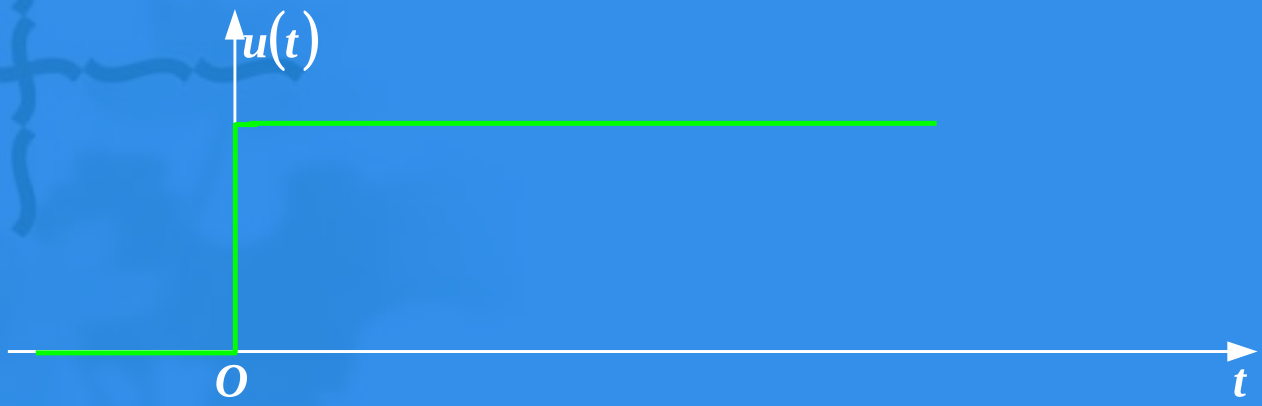
$$y(t)=\int_{-\infty}^{\omega_m(t-t_0)}\frac{1}{\pi}Sa(\lambda)d\lambda$$

$$=\frac{1}{\pi}[\int_0^{\infty}Sa(\lambda)d\lambda+\int_0^{\omega_m(t-t_0)}Sa(\lambda)d\lambda]$$

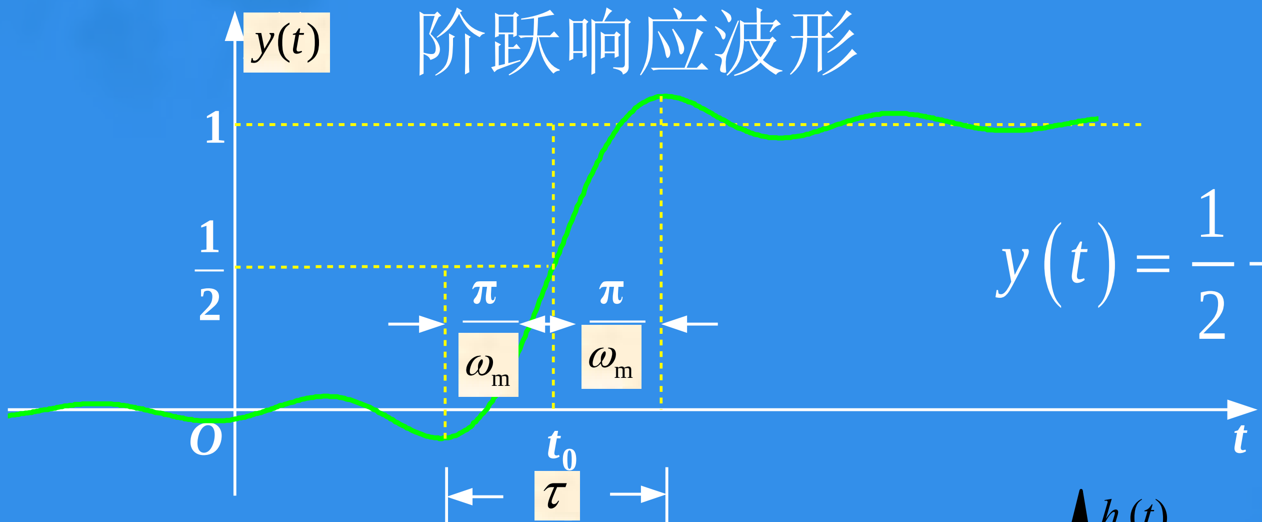
令 $\int_0^{y}\frac{\sin x}{x}dx=\mathrm{Si}(y)$ $\because \mathrm{Si}(\infty)\to\frac{\pi}{2}$

称为正弦积分函数，可查表得到结果

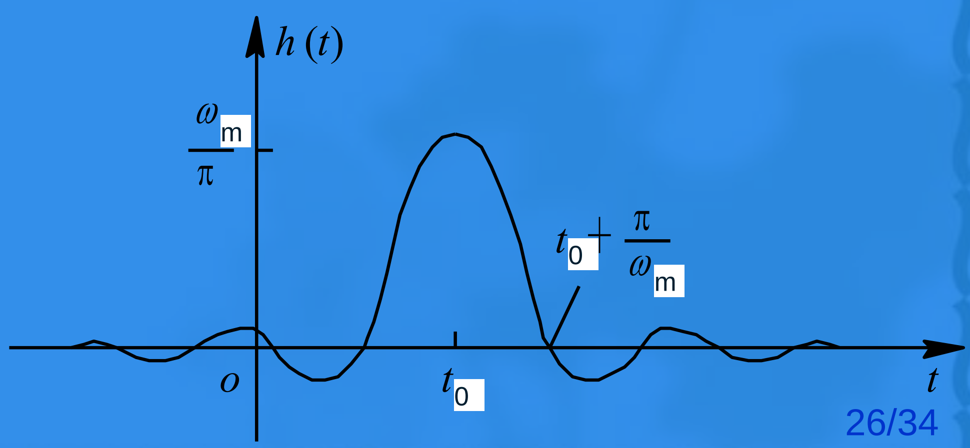
$$y(t)=\frac{1}{\pi}[Si(\infty)+Si(\omega_m(t-t_0))]=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}Si(\omega_m(t-t_0))$$

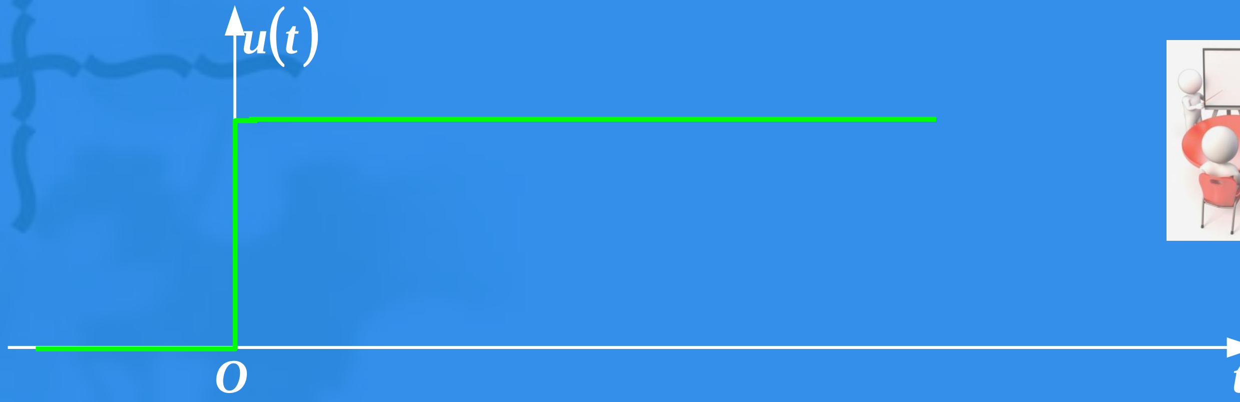


阶跃响应波形



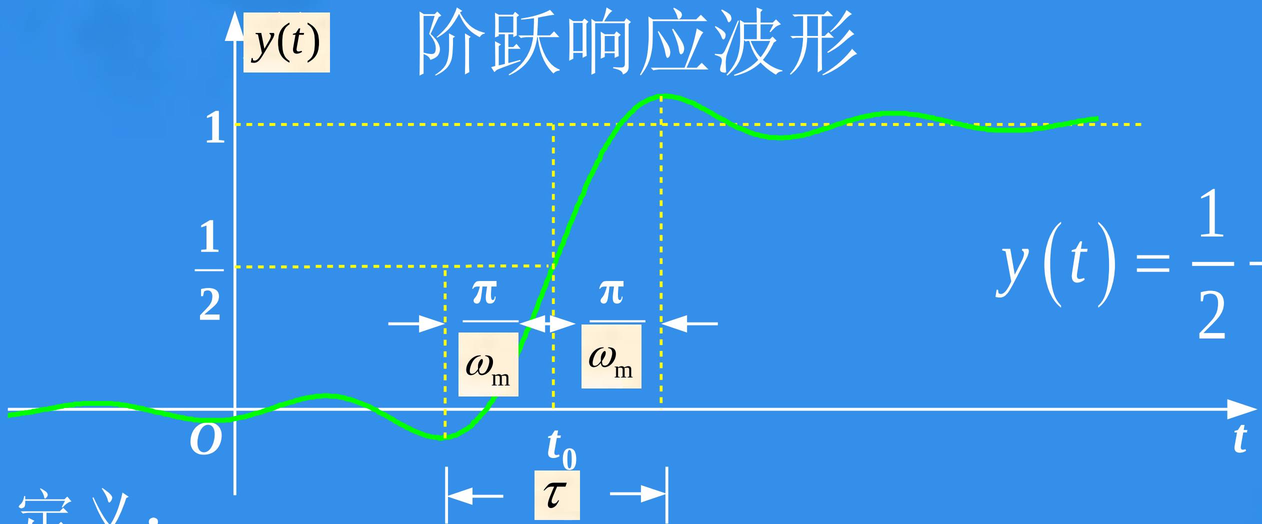
$$y(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\mathrm{Si}\left[\omega_{\mathrm{m}}\left(t-t_{0}\right)\right]$$





讨论：输出与输入的信号为什么有差别？

阶跃响应波形



$$y(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\mathrm{Si}\left[\omega_{\mathrm{m}}\left(t-t_{0}\right)\right]$$

定义：

上升时间：从最小值到最大值需要的时间 $\tau=\dfrac{2\pi}{\omega_m}=\dfrac{1}{f_m}$

ω_m是理想滤波器带宽　结论：阶跃响应的上升时间与带宽成反比

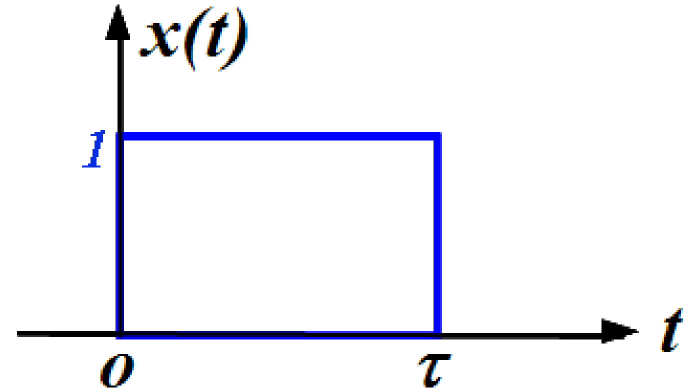
输出与输入延时：上升的1/2时为输出信号出现，此时to输出比输入的延时，正是理想滤波器相频特性的斜率。

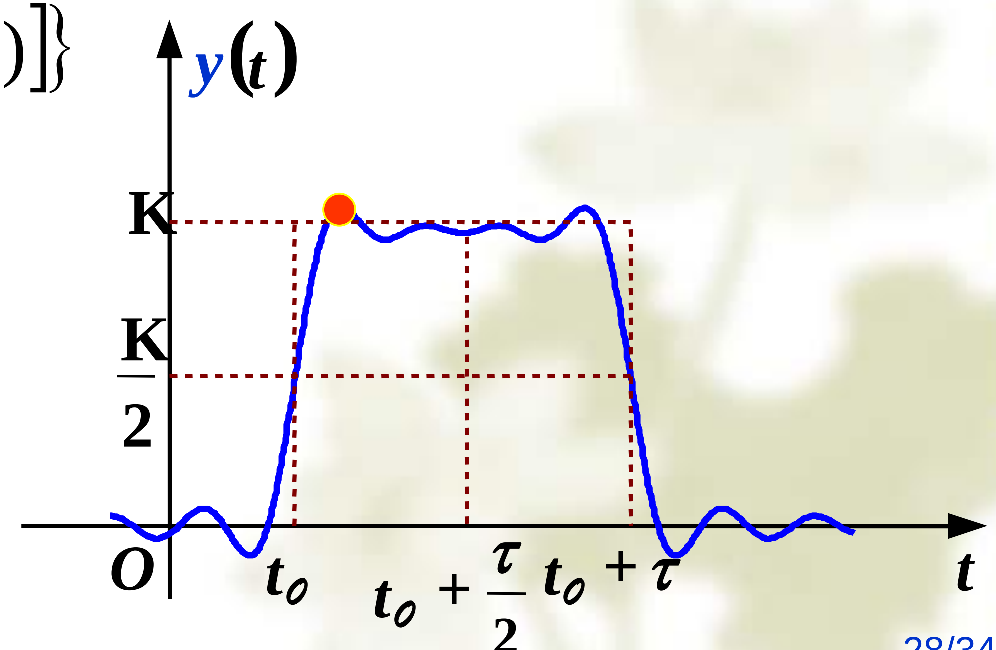
举例：1. 理想低通滤波器对矩形脉冲的响应

设：$x(t)=u(t)-u(t-\tau)$

$$y(t)=g(t)-g(t-\tau)$$

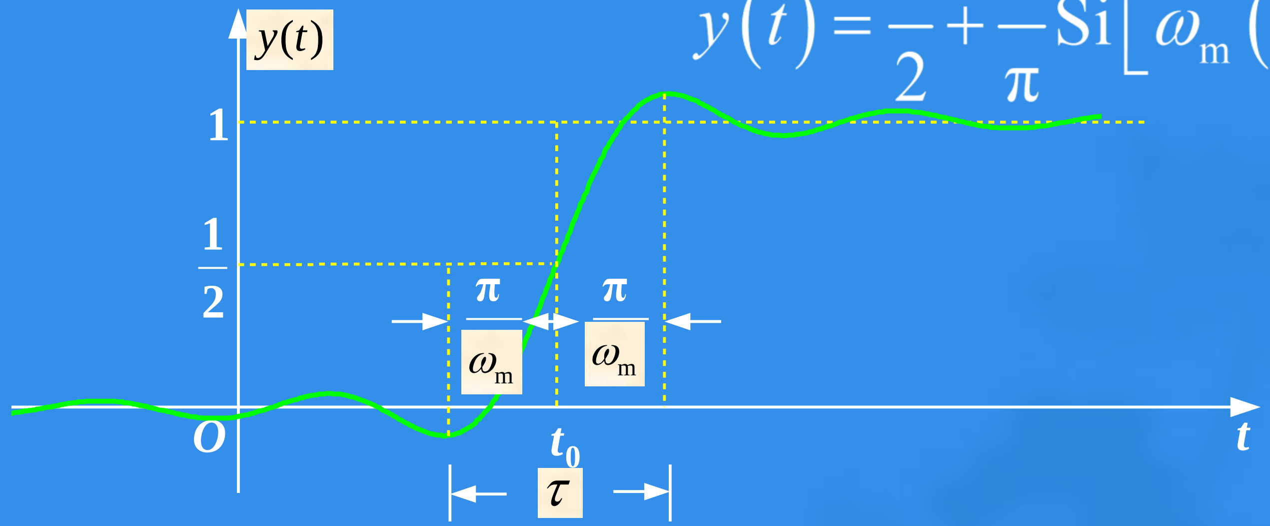
$$=\frac{K}{\pi}\left\{\mathrm{Si}\left[\omega_c(t-t_0)\right]-\mathrm{Si}\left[\omega_c(t-t_0-\tau)\right]\right\}$$





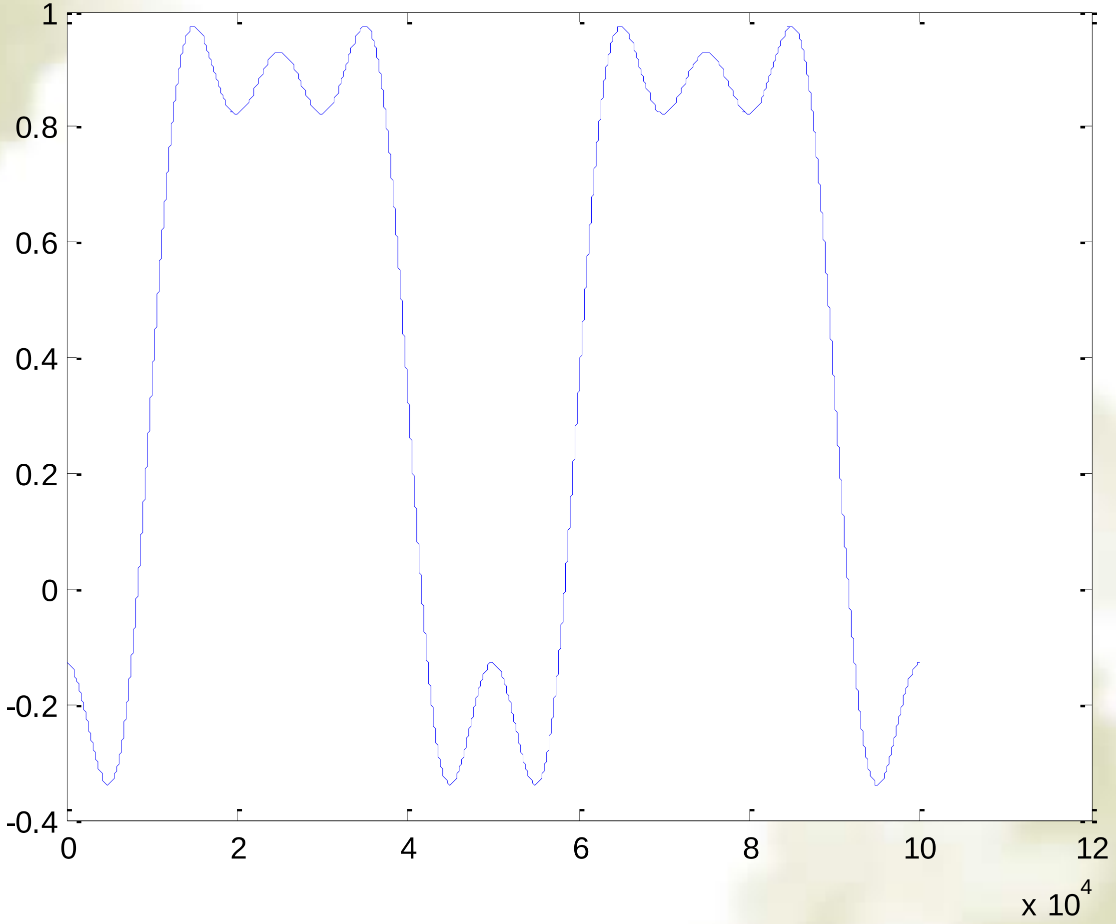
吉布斯现象Gibbs phenomenon（又叫吉布斯效应）： 将具有不连续点的周期函数（如矩形脉冲)进行傅立叶级数展开后，选取有限项进行合成。当选取的项数越多，在所合成的波形中出现的峰起越靠近原信号的不连续点。当选取的项数很大时，该峰起值趋于一个常数，大约等于总跳变值的9%。这种现象称为吉布斯现象。

$$y(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\mathrm{Si}\left[\omega_{\mathrm{m}}\left(t-t_0\right)\right]$$

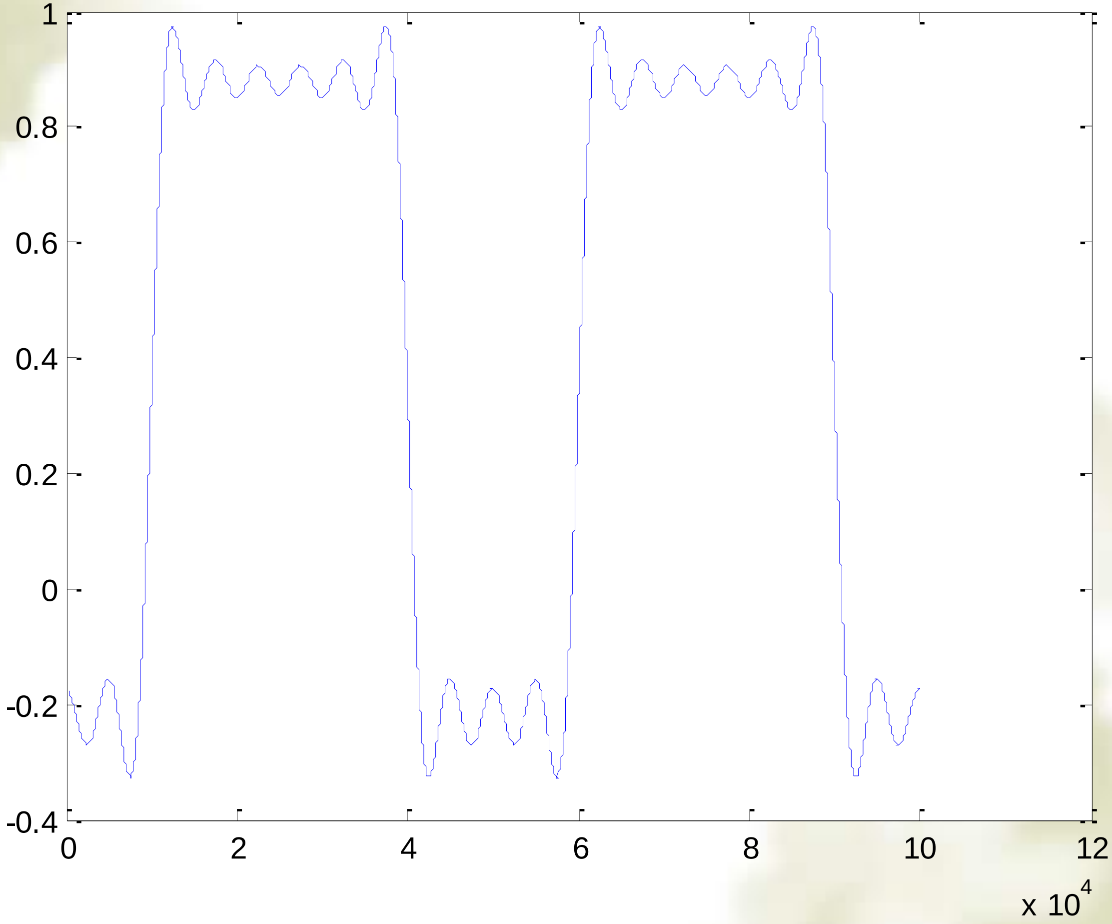


因为第一个极大值在$t'=t_0+\dfrac{\pi}{\omega_{\mathrm{m}}}$处

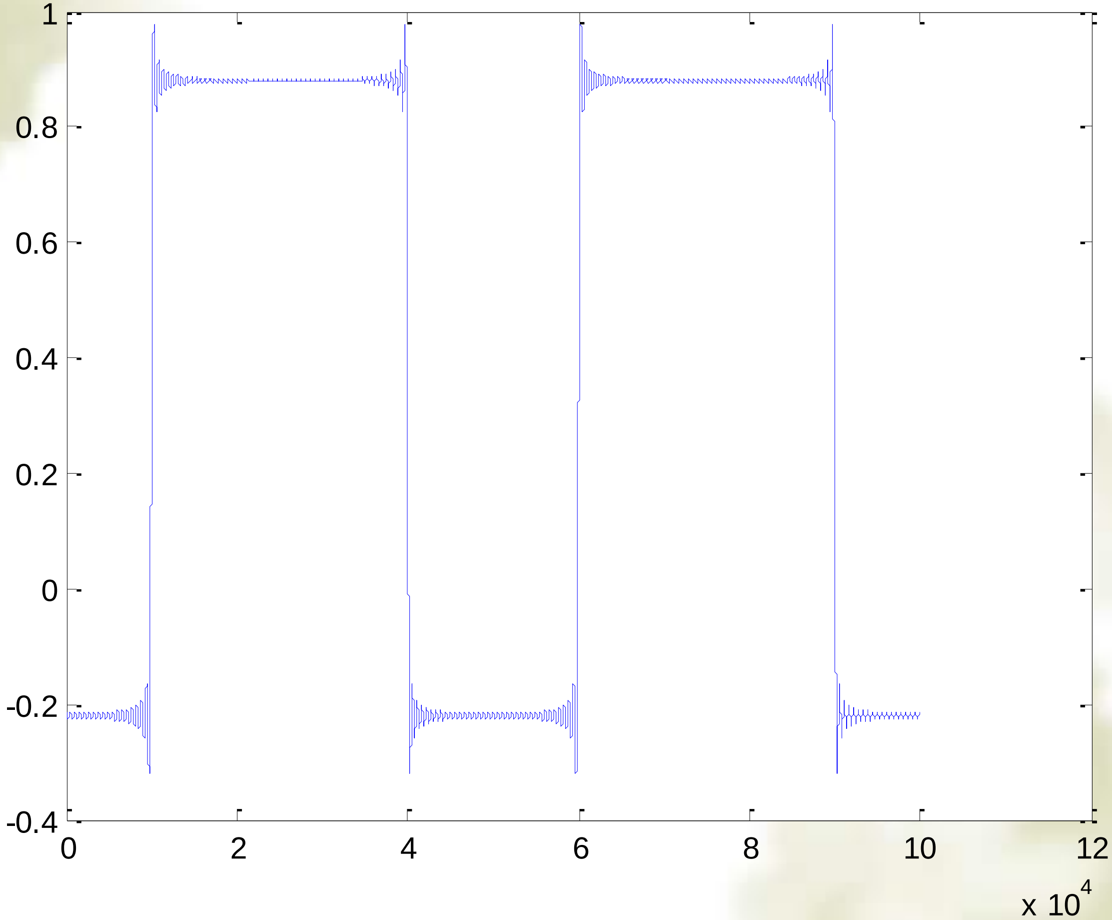
$$y_{\max}(t')=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}Si\left[\omega_{\mathrm{m}}\left(t_0+\frac{\pi}{\omega_{\mathrm{m}}}-t_0\right)\right]=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}Si(\pi)=1.0895$$



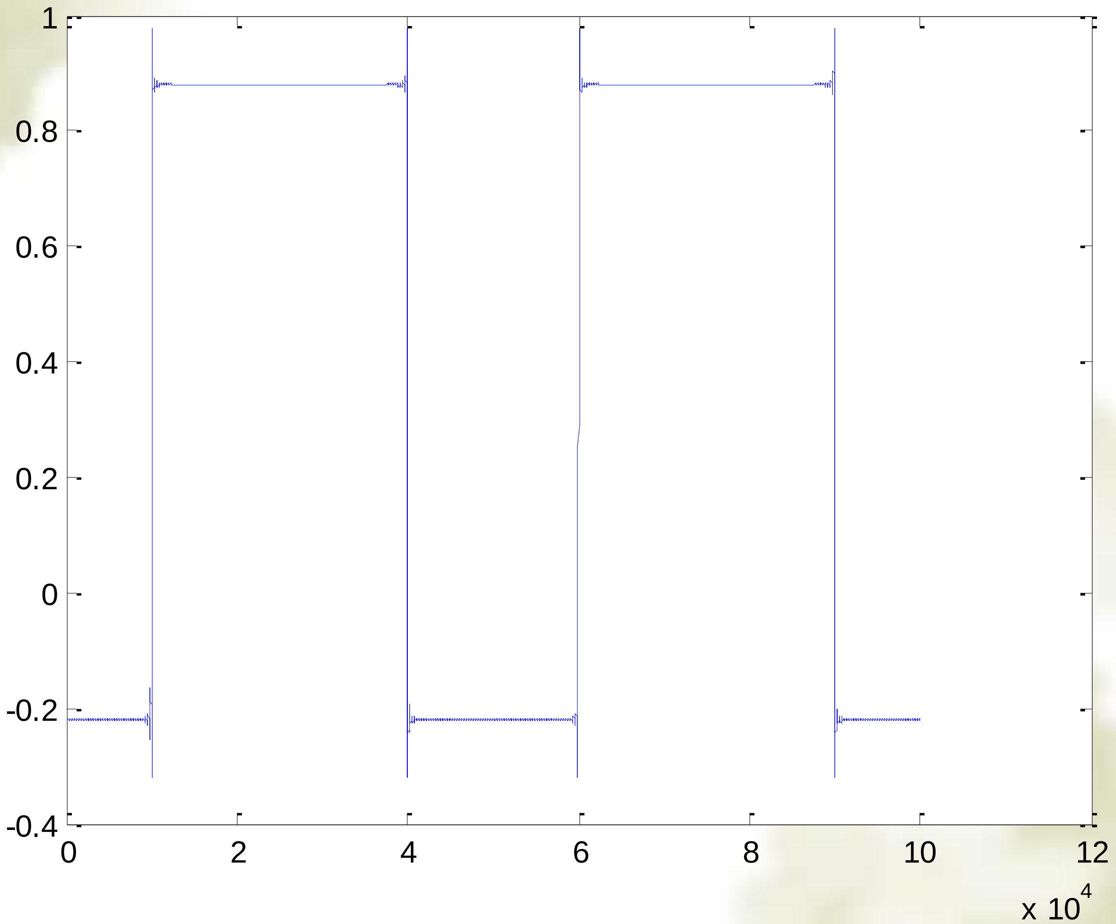
N=5



N=9



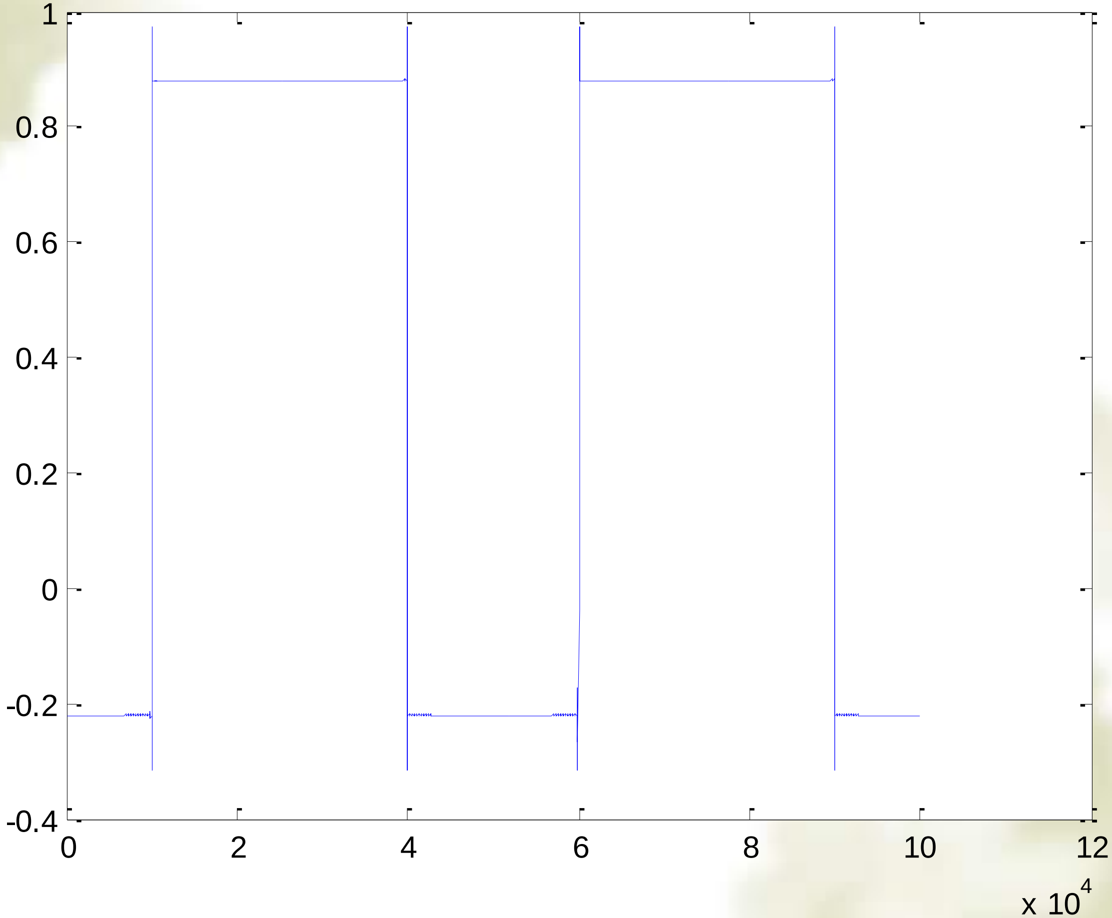
N=90



N=900

当用傅氏级数的有限项和来近似表示信号时，在信号的断点处存在 吉布斯现象

N=9000



判断：用有限项傅里叶级数表示周期信号,吉布斯现象是不可避免的. ）