

## 2016-2017 学年第二学期高等数学试题 (A)

一、填空题 (共 5 小题, 每题 4 分, 共 20 分)

1. 幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} x^n$  的收敛半径  $R =$  \_\_\_\_\_。

2. 函数  $xe^{x+1}$  展开成  $x$  的幂级数, 其形式为 \_\_\_\_\_。

3. 四面体  $ABCD$  的顶点坐标为  $A(0,0,0), B(0,1,2), C(1,0,2), D(2,2,0)$ , 它的体积等于 \_\_\_\_\_。

4. 设  $z = \arctan \frac{y}{x}$ , 则  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$  \_\_\_\_\_。

5. 设  $\Sigma$  为中心在原点, 半径为  $a$  的上半球面, 则  $\iint_{\Sigma} z ds =$  \_\_\_\_\_。

二、选择题 (共 5 小题, 每题 4 分, 共 20 分)

6. 设  $u_n = (-1)^{n-1} \frac{2^n n!}{n^n}$ , 则级数 \_\_\_\_\_。

(A)  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  都收敛; (B)  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  都发散;

(C)  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 而  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  发散; (D)  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散, 而  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  收敛。

7. 函数  $f(x, y) = \sqrt{xy}$  在点  $(0,0)$  处 \_\_\_\_\_。

(A) 偏导数存在, 可微; (B) 偏导数不存在, 不可微;  
(C) 偏导数不存在, 可微; (D) 偏导数存在, 不可微。

8. 向量  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  长度相等, 且两两夹角相等, 若  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ ,  $\vec{b} = \vec{j} + \vec{k}$ ,

则向量  $\vec{c}$  的坐标可能是 \_\_\_\_\_。

(A)  $\{1,1,0\}$ ; (B)  $\{1,0,1\}$ ; (C)  $\{1,0,0\}$ ; (D)  $\{0,1,1\}$

9. 直线  $L$  过两点  $(-2,1,3)$  和  $(0,-1,2)$ , 则点  $(10,5,10)$  到  $L$  的距离为 \_\_\_\_\_。

(A) 20; (B)  $10\sqrt{3}$ ; (C)  $10\sqrt{2}$ ; (D) 10

10. 设  $I = \oint_L \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$ ,  $L$  为平面上任一不过原点沿逆时针方向的光滑封闭曲线,

且原点在曲线围成的区域内部, 则  $I = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

(A)  $-\pi$ ; (B)  $0$ ; (C)  $\pi$ ; (D)  $2\pi$

三、(共 7 小题, 共 60 分)

11. (8 分) 研究级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tan(\sqrt{n^2 + 2} - n)\pi$  的敛散性; 若收敛, 还要指出是条件收敛

还是绝对收敛, 并说明理由。

12. (8 分) 求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - \frac{1}{2}}{n + 1} x^{2n}$  的收敛域及和函数。。

13. (8 分) 求  $f(x, y) = x^2 - y^2 + 1$  在椭圆域  $D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}$  的最大值。

14. (8 分) 过直线  $\begin{cases} 10x + 2y - 2z = 27 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$  作曲面  $3x^2 + y^2 - z^2 = 27$  的切平面, 求其方程。

15. (8 分) 计算积分  $I = \iiint_{x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2} e^{|z|} dx dy dz$ , 其中  $R > 0$ 。

16. (10 分) 计算  $\int_L \frac{1 + y^2 e^{xy}}{y} dx + \frac{x(y^2 e^{xy} - 1)}{y^2} dy$ ,

其中  $L$  是沿曲线  $y = \sin \frac{\pi}{2} x$  由  $A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  到  $B(1, 1)$  的曲线段。

17. (10 分) 计算积分  $I = \iiint_{\Sigma} (1 - x^2) dy dz + 4xy dz dx - 2xz dx dy$ ,

其中  $\Sigma$  为曲线  $x = e^y, (0 \leq y \leq a)$  绕  $x$  轴旋转而成的旋转曲面的外侧。