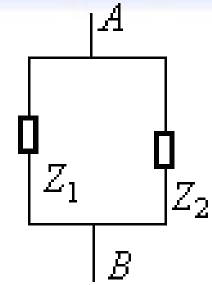
五、阻抗变换电路的谐振频率计算



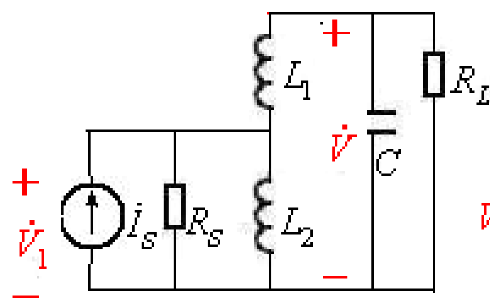
对于一般形式的并联回路，若：$\begin{cases} Z_1 = R_1 + jX_1 \\ Z_2 = R_2 + jX_2 \end{cases}$

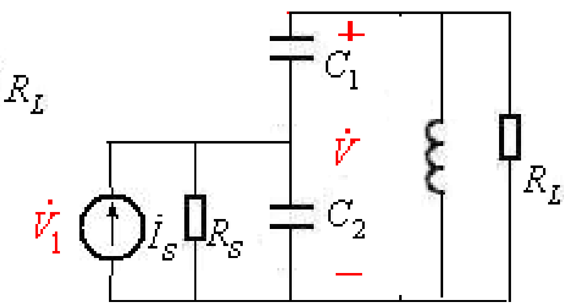
由于通常情况下，电子线路中均满足 $X \gg R$的条件，因此回路并联谐振时，有如下关系成立 $X_1 + X_2 = 0$

例如：右图所示电路的谐振频率计算公式分别为

$$\omega_0 L_2 + (\omega_0 L_1 - \frac{1}{\omega_0 C}) = 0$$

$$-\frac{1}{\omega_0 C_2} + (\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C_1}) = 0$$





结论是：当有多个电抗元件构成的回路处于谐振状态时，沿回路一圈的电抗和等于零。

又 $\omega_0 L_2 + (\omega_0 L_1 - \frac{1}{\omega_0 C}) = 0$ 可以改写为

$$\left.\begin{aligned} \omega_0 (L_1 + L_2) &= \frac{1}{\omega_0 C} \\ \omega_0 L_1 &= \frac{1}{\omega_0 C} - \omega_0 L_2 \end{aligned}\right\}$$

$-\frac{1}{\omega_0 C_2} + (\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C_1}) = 0$ 可以改写为

$$\left.\begin{aligned} \omega_0 L &= \frac{1}{\omega_0 C_2} + \frac{1}{\omega_0 C_1} = \frac{1}{\omega_0 C} \\ (\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C_1}) &= \frac{1}{\omega_0 C_2} \end{aligned}\right\}$$

其中 $C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$

以上各式说明：当回路谐振时，由回路的任何两端点看去，回路都谐振于同一频率，且呈纯电阻性。其谐振频率为

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2)C}} = \frac{1}{\sqrt{L\,C}} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}} = \frac{1}{\sqrt{L\,C}}$$

例2.2.1 电路如图2.2.8所示。试求输出电压 $\upsilon_1(t)$ 的表达式及回路的带宽。忽略回路本身的固有损耗。

解：设回路满足高 Q 的条件，

由图知，回路电容为

$$C=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}=\frac{2000\times 2000}{2000+2000}=1000\text{pF}$$

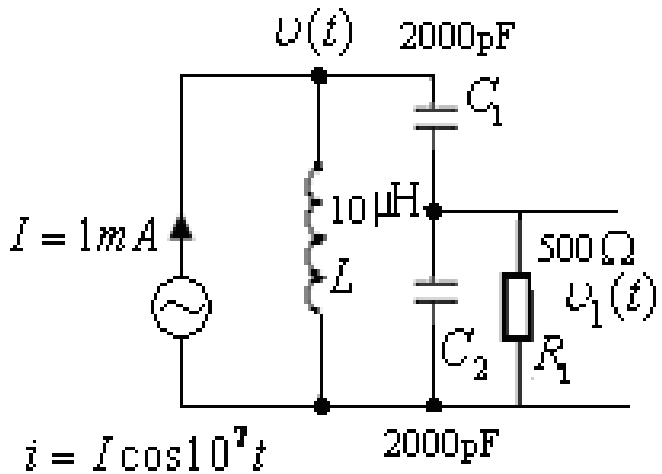


图2.2.8 例2.2.1电路图

回路固有角频率为：

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}=10^7\,(\text{rad/s})$$

显然与信号频率相等，即 $\omega_0=\omega$

回路处于谐振状态。

电阻R1的接入系数:

$$n=\frac{C_1}{C_1+C_2}=\frac{2000}{2000+2000}=\frac{1}{2}$$

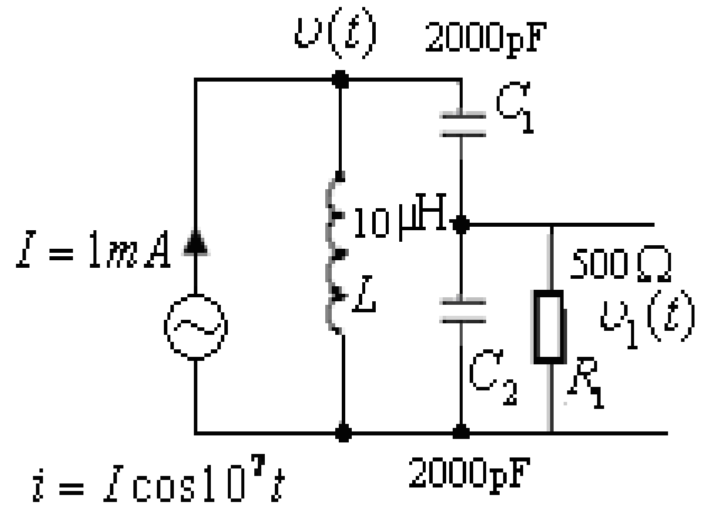


图2.2.6　例2.2.1电路图

等效到回路两端的电阻为

$$R=\frac{1}{n^2}R_1=\frac{500}{1/4}=2000(\Omega)$$

回路谐振时，两端的电压$\upsilon(t)$与$i(t)$同相，电压振幅为

$$V=IR=10^{-3}\times 2000=2(\mathrm{V})$$

所以回路两端的电压

$$\upsilon(t)=iR=1\mathrm{mA}\cos 10^7 t\times 2\mathrm{k}\Omega=2\cos 10^7 t(\mathrm{V})$$

信息科学与工程学院

山东大学

输出电压

$$\upsilon_1(t) = n\upsilon(t) = \frac{1}{2} \times 2\cos 10^7 t = \cos 10^7 t(\text{V})$$

回路品质因数

$$Q_0 = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{2000}{10^7 \times 10^{-5}} = \frac{2000}{100} = 20$$

回路带宽

$$BW_{0.7} = \frac{f_0}{Q_0} = \frac{10^7}{2\pi \times 20} \approx 79.58 \times 10^3 (\text{Hz})$$

根据上面例题的讨论，问题转化为

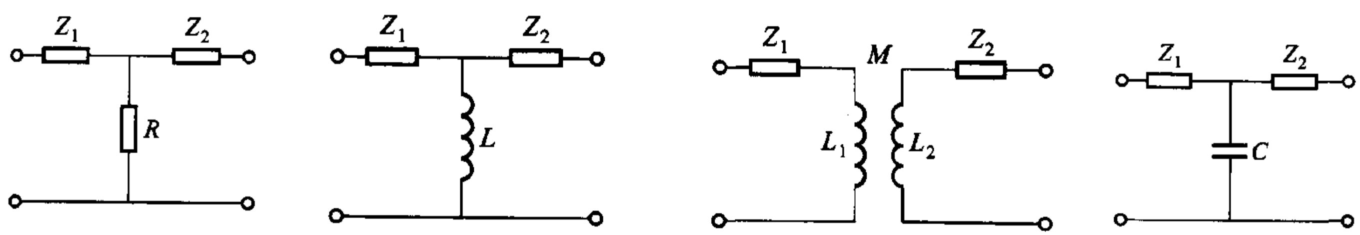
1、当信号源频率 f_s =?时，回路两端的输出电压最大。

2、能够通过回路的信号频率 f_s 的范围是多少？

2.3 耦合回路

耦合回路（coupling circuit）是由两个或两个以上的电路形成的一个网络，两个电路之间必须有公共阻抗存在，才能完成耦合作用。

公共阻抗如果是纯电阻或纯电抗，则称为纯耦合。



（a）电阻耦合　（b）电感耦合　（c） 互感耦合　（d）电容耦合

图2.3.1 纯耦合电路

如果公共阻抗由两种或两种以上的电路元件组成，则称为复耦合。

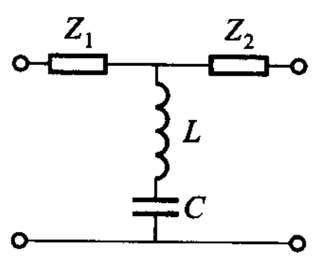


图2.3.2 复耦合电路

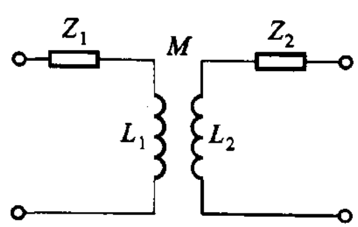
耦合系数k：耦合回路的特性和功能与两个回路的耦合程度有关。耦合回路的公共电抗（或电阻）绝对值与初、次级回路中同性质的电抗（或电阻）的几何中项之比。

式中，X_{12}为耦合元件电抗；

$$k=\frac{|X_{12}|}{\sqrt{X_{11}X_{22}}}$$

X_{11}与X_{22}分别为初级和次级回路中与X_{12}同性质的总电抗。

互感耦合串联型回路的耦合系数：

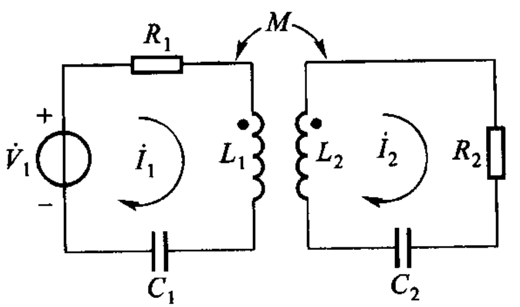


$$k=\frac{M}{\sqrt{L_1L_2}}$$

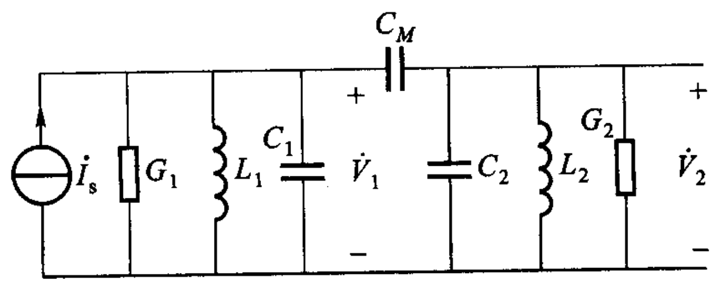
耦合系数是没有量纲的正实数，其值小于1，最大等于1。

2.3.1 耦合回路的阻抗特性

在通信电子线路中，常采用的两种耦合回路



（a）互感耦合串联型回路



（b）电容耦合并联型回路

以互感耦合电路为例：

回路的自阻抗

耦合元件电抗

回路电压方程

$$\dot{V}_1 = \dot{I}_1(R_1 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1}) - \dot{I}_2 j\omega M = \dot{I}_1 Z_{11} - j\omega M\dot{I}_2$$

$$0 = \dot{I}_2(R_2 + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}) - \dot{I}_1 j\omega M = \dot{I}_2 Z_{22} - j\omega M\dot{I}_1$$

解该方程组，可以得到：

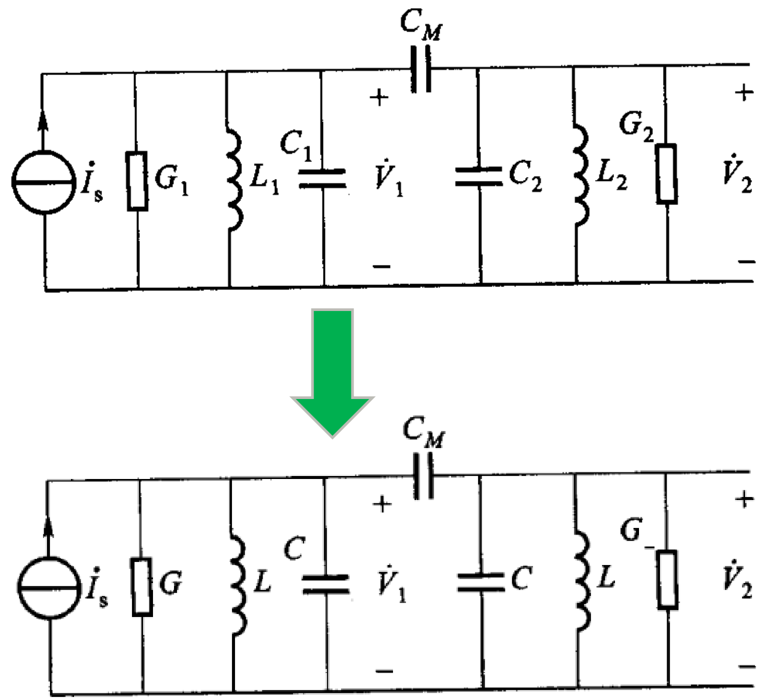
$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{V}_1}{Z_{11} + \dfrac{(\omega M)^2}{Z_{22}}} = \frac{\dot{V}_1}{Z_{11} + Z_{f1}}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{j\omega M \dot{I}_1}{Z_{22}} == \frac{j\omega M \dfrac{\dot{V}_1}{Z_{11}}}{Z_{22} + \dfrac{(\omega M)^2}{Z_{11}}} = \frac{j\omega M \dfrac{\dot{V}_1}{Z_{11}}}{Z_{22} + Z_{f2}}$$

式中 $Z_{f1} = \dfrac{(\omega M)^2}{Z_{22}}$ $Z_{f2} = \dfrac{(\omega M)^2}{Z_{11}}$ 称为反射阻抗或耦合阻抗。

物理意义是：次（初）级电流 $\dot{I}_2$ ($\dot{I}_1$)通过互感*M*的作用，在初（次）级回路中产生的感应电动势 $\pm j\omega M\dot{I}_2$（$\pm j\omega M\dot{I}_1$）对初（次）级回路电流的 $\dot{I}_1$（$\dot{I}_2$）影响。

2.3.2　耦合回路的频率特性



电容耦合回路：实用中初次级回路参数相同，因此：

$$\omega_{01}=\omega_{02}=\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q_1=Q_2=Q \qquad \xi_1=\xi_2=\xi$$

列出的回路方程为：

$$\dot{I}_s=\dot{V}_1[G+\frac{1}{\mathrm{j}\omega L}+\mathrm{j}\omega(C+C_M)]-\dot{V}_2\mathrm{j}\omega C_M$$

$$0=\dot{V}_2[G+\frac{1}{\mathrm{j}\omega L}+\mathrm{j}\omega(C+C_M)]-\dot{V}_1\mathrm{j}\omega C_M$$

引入广义失谐：$\xi=Q(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})$

上两式可以改写为

$$\dot{I}_s = \dot{V}_1 G(1+\mathrm{j}\xi) - \mathrm{j}\omega C_M \dot{V}_2$$

$$0 = \dot{V}_2 G(1+\mathrm{j}\xi) - \mathrm{j}\omega C_M \dot{V}_1$$

求解该回路方程，得到：

$$\dot{V}_2 = \frac{\mathrm{j}\omega C_M \dot{I}_s}{G^2(1+\mathrm{j}\xi)^2 + (\omega C_M)^2} = \frac{\mathrm{j}\omega C_M \dot{I}_s}{G^2\left(1-\xi^2+\dfrac{\omega^2 C_M{}^2}{G^2}+\mathrm{j}2\xi\right)}$$

其幅值为

$$V_2 = \frac{\omega C_M I_s}{G^2\sqrt{\left(1-\xi^2+\dfrac{\omega^2 C_M{}^2}{G^2}\right)^2+4\xi^2}} = \frac{\eta I_s}{G\sqrt{(1-\xi^2+\eta^2)^2+4\xi^2}}$$

式中 $\eta = \dfrac{\omega C_M}{G}$ 称为回路的耦合因数。

可以证明，当 $\eta=1$ 且 $\xi=0$ 时，回路电压 V_2达到

最大值，该最大值为 $V_{2\max}=\dfrac{I_s}{2G}$

于是得到归一化的频率特性方程为

$$N=\frac{V_2}{V_{2\max}}=\frac{2\eta}{\sqrt{(1-\xi^2+\eta^2)^2+4\xi^2}}$$

耦合因数： $\eta=\dfrac{\omega C_M}{G}=\dfrac{\omega C}{G}\dfrac{C_M}{C}\approx Qk$

临界耦合情况下 $\eta=1$

式中***k***为临界耦合系数，$k\approx\dfrac{C_M}{\sqrt{C_1C_2}}=\dfrac{C_M}{C}$

结论：归一化的频率特性

$$N=\frac{V_2}{V_{2\max}}=\frac{2\eta}{\sqrt{(1+\eta^2)^2+2(1-\eta^2)\xi^2+\xi^4}}$$

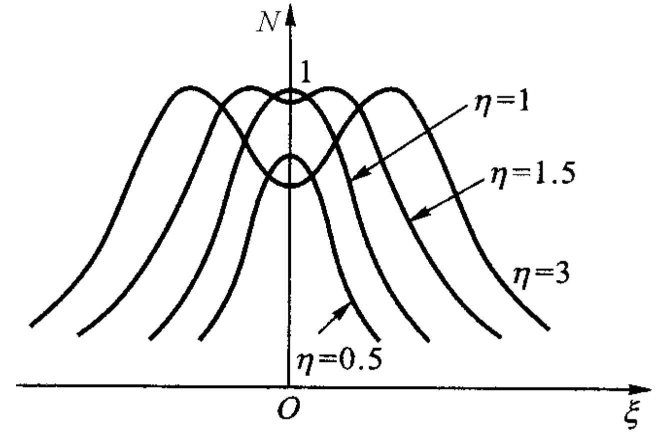


图2.3.3 次级回路的归一化谐振特性曲线

可以证明：通频带宽度

临界耦合的情况下 $BW_{0.7}=\sqrt{2}\frac{f_0}{Q}$

临界耦合系数为 $k\approx\frac{1}{Q}=\frac{C_M}{C}$

强耦合的情况下 $\eta=2.41$ $BW_{0.7}=3.1\frac{f_0}{Q}$

2.4 石英晶体滤波器

一、石英晶体的物理特性

1、石英晶体的结构

石英片是从石英晶体柱中切割下来的，是一种弹性体，有一固有振动频率，其值与石英片的形状、尺寸和切型有关，而且十分稳定。

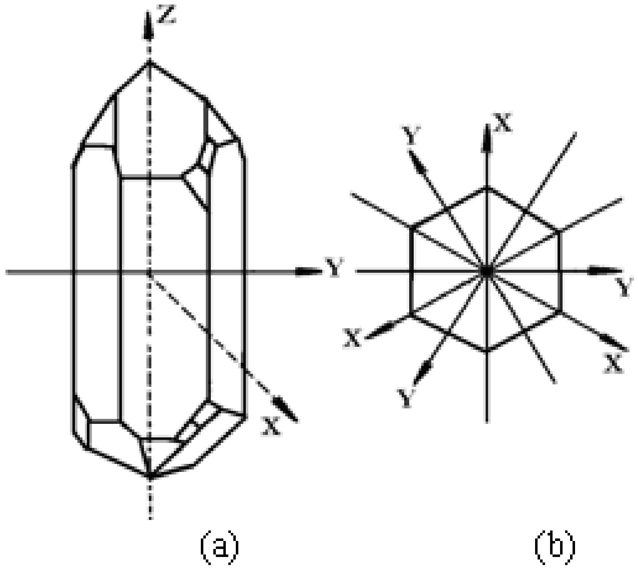


图2.4.1 石英晶体的形状及横断面图

X轴： 电轴

Y轴： 机械轴

Z轴： 光轴

2、石英晶体的切割

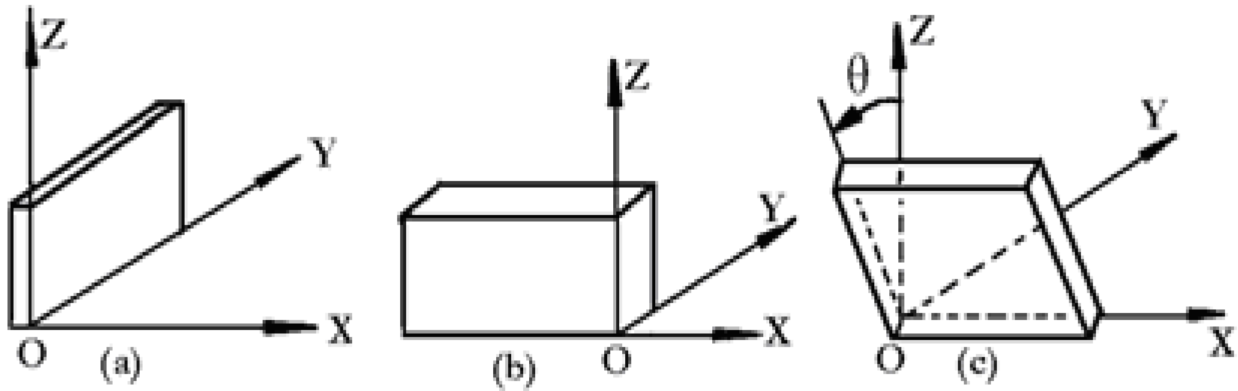


图2.4.2　　石英晶体的各种切割方式
（a）X切割　（b）Y切割　（c）AT切割

石英晶体谐振器是由石英晶体切片而成。各种晶片按与各轴不同角度切割而成。图2.4.2就是石英晶体几种常用的切片方式。 晶片经制作金属电极，按放于支架并封装即成为晶体谐振器元件。

3、石英晶体的电特性

- 石英晶体特有的正、反两种压电效应

正压电效应：沿电轴或机械轴加张力或压力，则在垂直于电轴的两个面上产生正、负电荷。

负压电效应：在垂直于电轴的两个面上加交变电压时，沿电轴或机械轴产生弹性变形（伸张或压缩），称为机械振动。

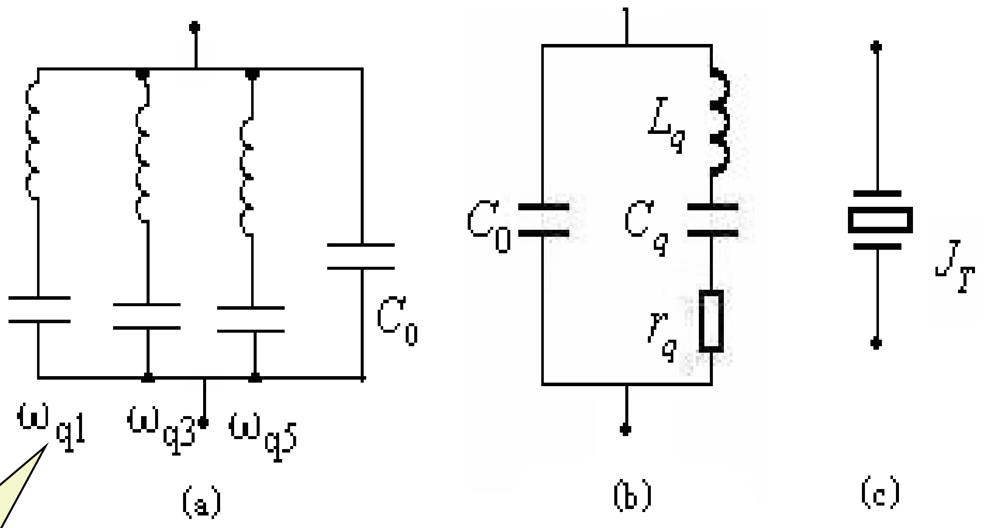
- 石英晶体具有谐振回路的特性。
- 具有较小的频率温度特性。

信息科学与工程学院

山东大学

二、石英谐振器的等效电路及阻抗特性

1、等效电路



图（a）是考虑基频及各次泛音的等效电路。

晶体作为电介质的静态电容

$$C_0 = \frac{\varepsilon S}{d}$$

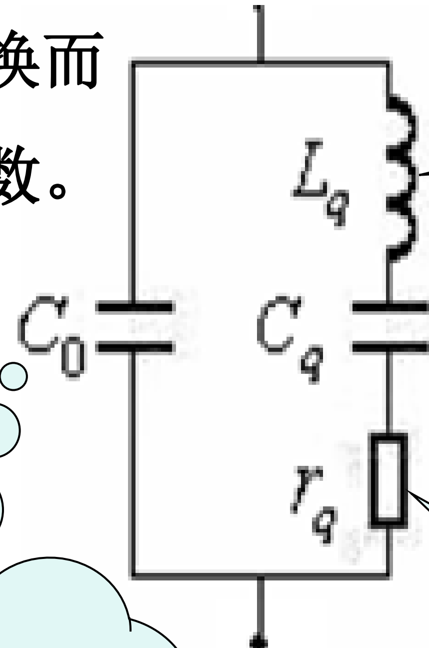
图2.4.3　晶体谐振器的等效电路

（a）包括泛音在内的等效电路

（b）谐振频率附近的等效电路

（c）电路符号

L_q, C_q, r_q对应于机械共振经过压电转换而呈现出的动态参数。



机械振动的质量，值很大，为（几十m～几十）H；

晶片的弹性模数，值较小，为（0.01～0.1）pF；

晶体作为介质的静态电容。其数值一般为（几～几十)pF，较大。 与石英片厚度、介电常数、极板面积有关。

机械摩擦和空气阻尼引起的损耗，值很小，为（几～几十Ω）

2、谐振频率

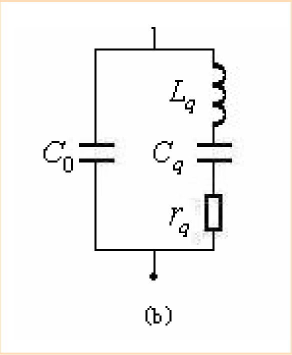
串联谐振频率：$f_q = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{L_q C_q}}$

并联谐振频率：$f_p = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \approx f_q\left[1+\dfrac{C_q}{2C_0}\right]$

式中 $C = \dfrac{C_q C_0}{C_q + C_0}$

两频率之间的间隔为 $\Delta f = f_p - f_q = \dfrac{1}{2} f_q \dfrac{C_q}{C_0}$

晶体的主要特点是它的等效电感 L_q 特别大，而等效电容 C_q 特别小。晶体谐振器的品质因数为



$$Q_0 \approx \frac{\omega_q L_q}{r_q}$$ 很大，为（几万~几百万）

3、晶体的等效阻抗

图1.3.3（b）所示等效电路的阻抗一般表示式为

$$Z = \frac{-j\frac{1}{\omega C_0}\left[r_q + j\left(\omega L_q - \frac{1}{\omega C_q}\right)\right]}{r_q + j\left(\omega L_q - \frac{1}{\omega C_q}\right) - j\frac{1}{\omega C_0}}$$

$$Z \approx -j\frac{1}{\omega C_0}\frac{1-\omega_q^2/\omega^2}{1-\omega_p^2/\omega^2} = jX_e$$

若忽略 r_q 则晶体两端呈现纯电抗，故

$$Z \approx -j\frac{1}{\omega C_0}\frac{1-\omega_q^2/\omega^2}{1-\omega_p^2/\omega^2} = jX_e$$

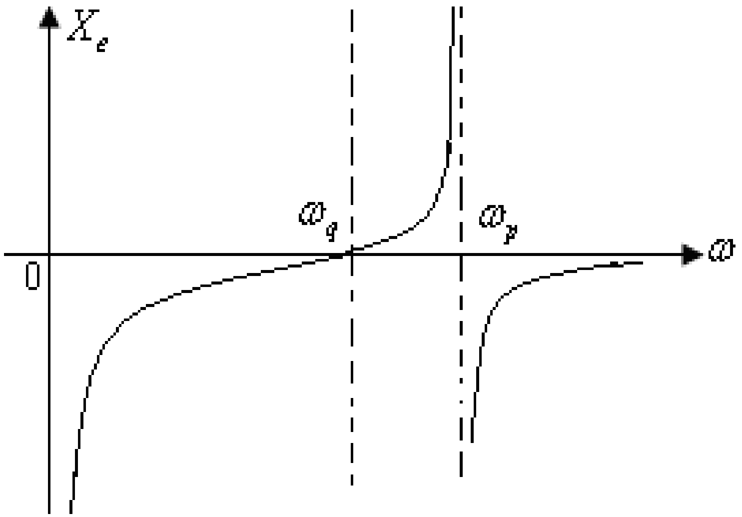


图2.4.4 晶体谐振器的电抗曲线

当$\omega>\omega_p$或$\omega<\omega_q$时，石英晶体呈现容性。

当$\omega_q< \omega<\omega_p$时，石英晶体呈现感性。

4、石英晶体的特点

晶体谐振器与一般振荡回路比较，有以下几个明显的特点：

- ① 晶体的谐振频率 f_p和 f_q非常稳定。这是因为 L_q、C_q、r_q 由晶体尺寸决定，由于晶体的物理特性它们受外界因素（如温度、震动等）的影响小。
- ② 有非常高的品质因数。而普通LC振荡回路的 Q 值只能到几百。
- ③ 晶体在工作频率附近阻抗变化率大，具有很高的并联谐振阻抗。

作业:

P.40　2.16　2.17

预习：3.1　3.2