§4.3 拉普拉斯变换的基本性质

以下性质均适用于单边拉普拉斯变换

1. 线性性质

设：$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}) \leftrightarrow \boldsymbol{F}(\boldsymbol{s}) \quad \sigma > \sigma_0$

$$a f_1(t) \pm b f_2(t) \leftrightarrow a F_1(s) \pm b F_2(s)$$

$F_1(s)$和$F_2(s)$ROC的交集

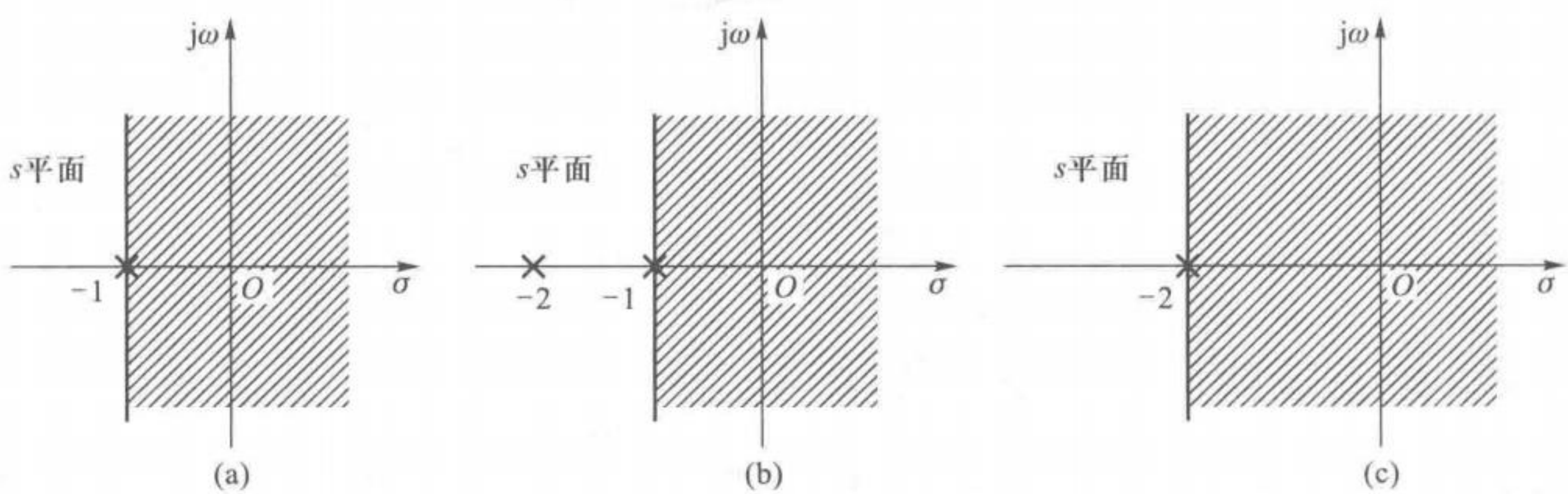
但是，若出现零极点抵 消现象，则其ROC可能扩大。

例4-2 推演见下一页

例 4-2 设 $x(t)=x_1(t)-x_2(t)$，其像函数为 $X_1(s)=\dfrac{1}{s+1}\ (\sigma>-1)$，$X_2(s)=\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\ (\sigma>-1)$，试求 $X(s)$，并确定其收敛域。

解：$X(s)=X_1(s)-X_2(s)=\dfrac{1}{s+1}-\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}=\dfrac{s+1}{(s+1)(s+2)}=\dfrac{1}{s+2}\ (\sigma>-2)$

在 $x_1(t)$ 与 $x_2(t)$ 的线性组合中，$s=-1$ 的极点被 $s=-1$ 的零点所抵消，从而 $X(s)$ 的收敛域大于 $X_1(s)$ 和 $X_2(s)$ 收敛域的交集，如图 4-5 所示。



2. 尺度变换

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \qquad (a>0)$$

证明: $\mathrm{L}[f(at)]=\int_0^\infty f(at)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \underline{\underline{\tau=at}} \frac{1}{a}\int_0^\infty f(\tau)e^{-\left(\frac{s}{a}\right)\tau}d\tau$

$$=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

其ROC为$\mathrm{Re}[\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{a}}]>\sigma_0$,即$\sigma>a\sigma_0$

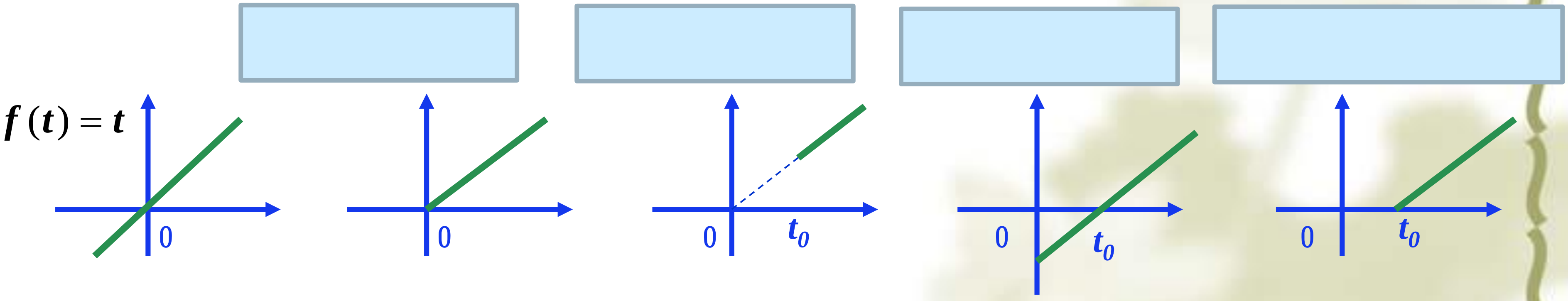
3. 时移性质

即 只适合右移信号

$$f(t-t_0)u(t-t_0) \leftrightarrow e^{-st_0}F(s) \qquad \sigma > \sigma_0, \quad t_0 > 0$$

证明： $\mathcal{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)] = \int_{t_0}^{\infty} f(t-t_0)e^{-st}dt$

$$\underline{\underline{\tau = t-t_0}}\int_{0}^{\infty} f(\tau)e^{-st_0}e^{-s\tau}d\tau = e^{-st_0}F(s)$$



补充例 已知 $f(t)\varepsilon(t) \leftrightarrow F(s),\ f_1(t) = f(at-b)\varepsilon(at-b),$
$a > 0, b > 0,$ 求$f_1(t)$的象函数。

解 因为

$$\mathscr{L}[f(t)\varepsilon(t)] = F(s) \qquad \mathrm{Re}[s] > \sigma_0$$

根据尺度变换性质，则

$$\mathscr{L}[f(at)\varepsilon(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \qquad \mathrm{Re}[s] > a\sigma_0$$

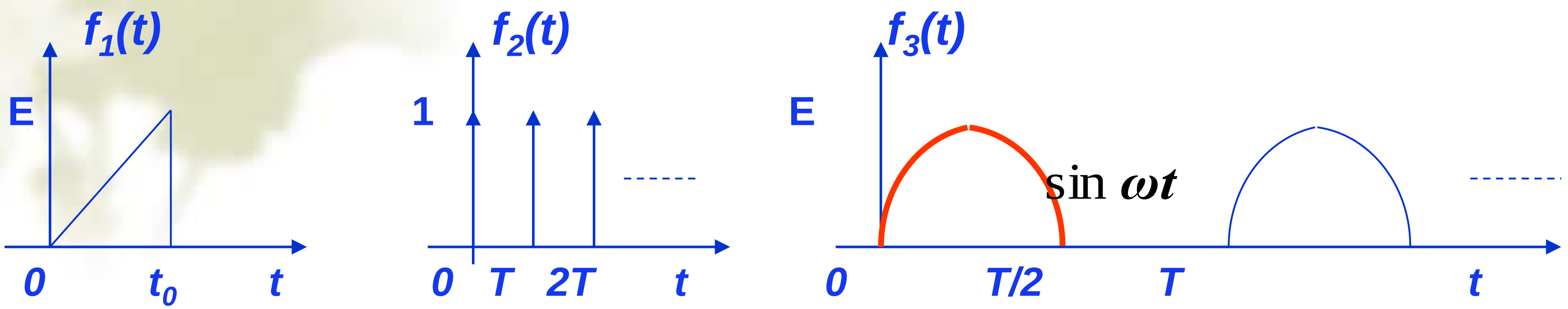
$f_1(t)$又可以表示为

$$f_1(t) = f\left[a\left(t-\frac{b}{a}\right)\right]\varepsilon\left[a\left(t-\frac{b}{a}\right)\right]$$

根据时移性质，则

$$F_1(s) = \mathscr{L}[f_1(t)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}s} \qquad \mathrm{Re}[s] > a\sigma_0$$

例 4 -3：求下列信号的 L T



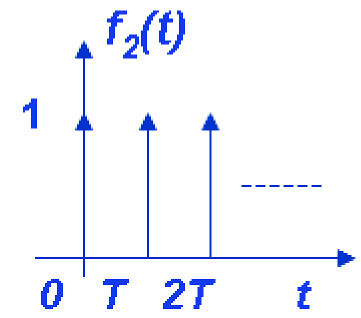
解: $f_1(t)=\dfrac{E}{t_0}t[u(t)-u(t-t_0)]=\dfrac{E}{t_0}[tu(t)-tu(t-t_0)]$

$$=\frac{E}{t_0}[tu(t)\qquad\qquad]$$

$$\boldsymbol{F_1(s)=\frac{E}{t_0}(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2}e^{-st_0}-t_0\frac{1}{s}e^{-st_0})}$$

$$t^n u(t)\leftrightarrow\frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$f_2(t)=\delta(t)+\delta(t-T)+\delta(t-2T)+\cdots$$



$$F_2(s)=1+e^{-sT}+e^{-2sT}+\cdots=\frac{1}{1-e^{-sT}}\qquad \sigma>0$$

(公比小于1)

求有始周期函数的LT方法：

有始周期函数：t>0时函数呈现周期性，且t<0范围内函数为零。

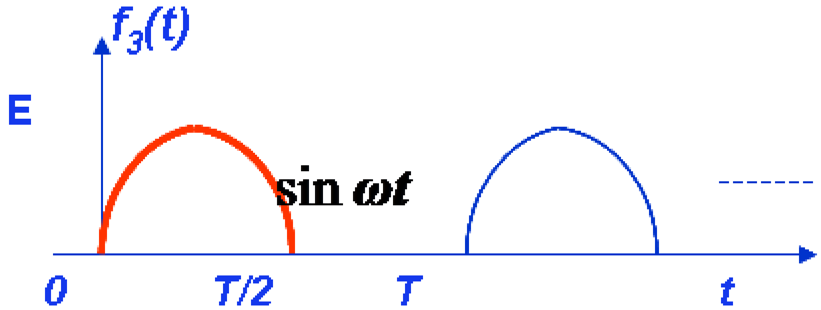
令一个周期内的函数为 $f_0(t)$,则

重要方法

$$f(t)=f_0(t)u(t)+f_0(t-T)u(t-T)+f_0(t-2T)u(t-2T)+\cdots$$

若$f_0(t)\leftrightarrow F_0(s)$,则$f(t)$的$LT$为：

$$F(s)=F_0(s)+F_0(s)e^{-sT}+F_0(s)e^{-2sT}+\cdots=\frac{F_0(s)}{1-e^{-sT}}\qquad \sigma>0$$



$$f_3(t) = f_{30}(t)u(t) + f_{30}(t-T)u(t-T) + \cdots$$

其中：$f_{30}(t) = \sin\omega t u(t) + \sin\omega(t-\frac{T}{2})u(t-\frac{T}{2})$

$$\leftrightarrow \frac{\omega}{s^2+\omega^2}(1+e^{-\frac{sT}{2}})$$

$$\therefore F_3(s) = F_{30}(s)\frac{1}{1-e^{-sT}} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\cdot\frac{1}{1-e^{-sT/2}} \qquad \sigma > 0$$

补充例 $f_1(t)=e^{-2(t-1)}\varepsilon(t-1)$，$f_2(t)=e^{-2(t-1)}\varepsilon(t)$，求 $f_1(t)+f_2(t)$的象函数。

解 因为

$$e^{-2t}\varepsilon(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+2} \qquad \mathrm{Re}[s]>-2$$

故根据时移性质，得

$$F_1(s)=\mathscr{L}[e^{-2(t-1)}\varepsilon(t-1)]=\frac{e^{-s}}{s+2} \qquad \mathrm{Re}[s]>-2$$

因为 $f_2(t)$又可以表示为

$$f_2(t)=e^{-2(t-1)}\varepsilon(t)=e^2e^{-2t}\varepsilon(t)$$

所以根据线性，得

$$F_2(s)=\frac{e^2}{s+2} \qquad \mathrm{Re}[s]>-2$$

$$\mathscr{L}[f_1(t)+f_2(t)]=F_1(s)+F_2(s)=\frac{e^2+e^{-s}}{s+2} \qquad \mathrm{Re}[s]>-2$$

4、复频移性质 $f(t)e^{s_b t} \leftrightarrow$

例 $f(t)=e^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t)\varepsilon(t)$, a为实数.求$f(t)$的象函数.

解 令 $s_0=-\alpha$，则 $f(t)$可以表示为

$$f(t) = e^{s_0 t}\cos(\omega_0 t)\varepsilon(t)$$

由于

$$\cos(\omega_0 t)\varepsilon(t) \longleftrightarrow \frac{s}{s^2+\omega_0^2} \qquad \mathrm{Re}[s]>0$$

根据复频移性质，得

$$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\frac{s-s_0}{(s-s_0)^2+\omega_0^2}=\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2} \qquad \mathrm{Re}[s]>-\alpha$$

5、时域微分性质

应用公式: $\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$

$$\text{如果} f(t) \leftrightarrow F(s), \mathrm{Re}[s] > \sigma_0$$

$$\text{则} \frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow sF(s) - f(0_-) \quad \mathrm{Re}[s] > \sigma_0$$

证明:

$$\mathrm{L}[\frac{df(t)}{dt}] = \int_{0_-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = f(t)e^{-st}\Big|_{0_-}^{\infty} + s\int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt = sF(s) - f(0_-)$$

$$\mathcal{L}[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}] = \mathcal{L}[\frac{df'(t)}{dt}] \leftrightarrow s\mathcal{L}[f'(t)] - f'(0_-)$$

$$= s^2 F(s) - sf(0_-) - f'(0_-)$$

$$f^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n F(s) - s^{n-1} f(0_-) - \cdots - f^{(n-1)}(0_-)$$

$$If, t < 0, f(t) = 0,$$

$$f'(t) \leftrightarrow sF(s), f^{(n)}(t) \leftrightarrow s^n F(s)$$

例 $f_1(t)=\frac{d}{dt}[e^{-2t}\varepsilon(t)],\ f_2(t)=\left(\frac{d}{dt}e^{-2t}\right)\varepsilon(t),$

求$f_1(t)$和$f_2(t)$的单边拉氏变换。

解 (1) 方法I：求$f_1(t)$的单边拉氏变换。由于

$$f_1(t)=\frac{d}{dt}[e^{-2t}\varepsilon(t)]=\delta(t)-2e^{-2t}\varepsilon(t)$$

故根据线性得

$$F_1(s)=L[f_1(t)]=1-\frac{2}{s+2}=\frac{s}{s+2}\qquad \mathrm{Re}(s)>-2$$

方法II：若应用时域微分性质求解，则有

$$F_1(s)=sL[e^{-2t}\varepsilon(t)]-e^{-2t}\varepsilon(t)\Big|_{t=0^-}=\frac{s}{s+2}\qquad \mathrm{Re}(s)>-2$$

(2) 求$f_2(t)$的单边拉氏变换。由于

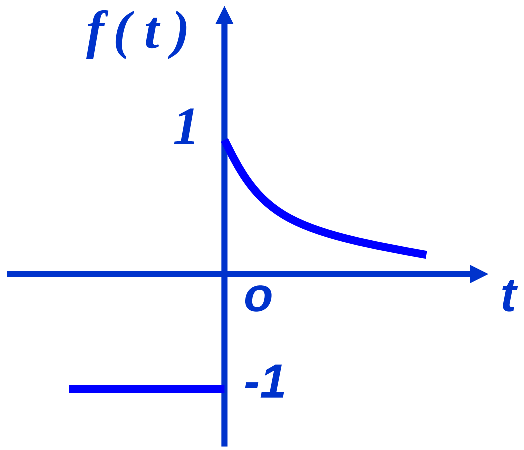
$$f_2(t)=\left(\frac{d}{dt}e^{-2t}\right)\varepsilon(t)=-2e^{-2t}\varepsilon(t)$$

因此得

$$F_2(s)=L[f_2(t)]=\frac{-2}{s+2}\qquad \mathrm{Re}(s)>-2$$

例4-4(部分):

已知:$f(t)=\begin{cases} e^{-at} & t>0 \\ -1 & t<0 \end{cases}$



试求$f'(t)$的单边LT。

解1:

$$f'(t)=2\delta(t)-ae^{-at}u(t)\leftrightarrow 2-\frac{a}{s+a}=\frac{2s+a}{s+a}$$

解2:

$$f'(t)\leftrightarrow sF(s)-f(0\_)=\frac{s}{s+a}+1=\frac{2s+a}{s+a}$$

$$\mathrm{Re}(s)>-a$$

时域微分后象函数乘以s有可能消去极点,因此收敛域可能扩大。

6、时域积分特性

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{f^{(-1)}(0_-)}{s}+\frac{F(s)}{s}$$

证明：

$$\mathcal{L}[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau] = \mathcal{L}[\int_{-\infty}^{0} f(\tau)d\tau + \int_{0}^{t} f(\tau)d\tau]$$

$$=\frac{f^{(-1)}(0_-)}{s}+\int_0^\infty \int_0^t f(\tau)d\tau e^{-st}dt = \frac{f^{(-1)}(0_-)}{s} - \frac{1}{s}\int_0^\infty \int_0^t f(\tau)d\tau de^{-st}$$

$$=\frac{f^{(-1)}(0_-)}{s} - \frac{1}{s}e^{-st}\int_0^t f(\tau)d\tau\Big|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$=\frac{f^{(-1)}(0_-)}{s}+\frac{F(s)}{s}$$

应用公式：$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$

对于因果函数：

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{F(s)}{s}$$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{t}\cdots\int_{-\infty}^{t}}_{n} f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{F(s)}{s^n}$$

7、复频域微分性质

$$-tf(t)\leftrightarrow\frac{dF(s)}{ds}$$

证明：

$$\frac{dF(s)}{ds}=\frac{d}{ds}\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}dt=\int_0^{\infty}f(t)(\frac{d}{ds}e^{-st})dt$$

$$=\int_0^{\infty}[-tf(t)]e^{-st}dt$$

多重微分情况 $(-t)^n f(t)\leftrightarrow\frac{d^nF(s)}{ds^n}$

例 求$f(t)=t^n\varepsilon(t)$的单边拉氏变换。

解 由于$\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{1}{s}$，Re［s］>0，根据复频域微分公式得

$$L[(-t)\varepsilon(t)]=\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right)=-\frac{1}{s^2}\qquad \text{Re}[s]>0$$

于是得

$$L[t\varepsilon(t)]=\frac{1}{s^2}\qquad \text{Re}[s]>0$$

由于$t^2\varepsilon(t)=(-t)[(-t)\varepsilon(t)]$，

$$L[t^2\varepsilon(t)]=\frac{d}{ds}\left(-\frac{1}{s^2}\right)=\frac{2}{s^3}\qquad \text{Re}[s]>0$$

重复应用以上方法可以得到 $L[t^n\varepsilon(t)]=\frac{n!}{s^{n+1}}$ Re［s］>0

8、卷积定理

时域：$f_1(t)*f_2(t) \leftrightarrow F_1(s)F_2(s)$

复频域：$f_1(t)f_2(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{j2\pi}F_1(s)*F_2(s)$

收敛域至少是两者的公共部分

证 根据信号卷积的定义，并且$f_1(t)$和$f_2(t)$是因果信号，则

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{0^-}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$f_1(t)*f_2(t)$仍为因果信号。根据单边拉普拉斯变换的定义，得

$$\mathscr{L}[f_1(t)*f_2(t)]=\int_{0-}^{\infty}\left[\int_{0^-}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

于是得

$$\mathscr{L}[f_1(t) * f_2(t)]$$

$$= \int_{0^-}^{\infty} f_1(\tau) F_2(s) e^{-s\tau} d\tau$$

$$= F_2(s) \int_{0^-}^{\infty} f_1(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

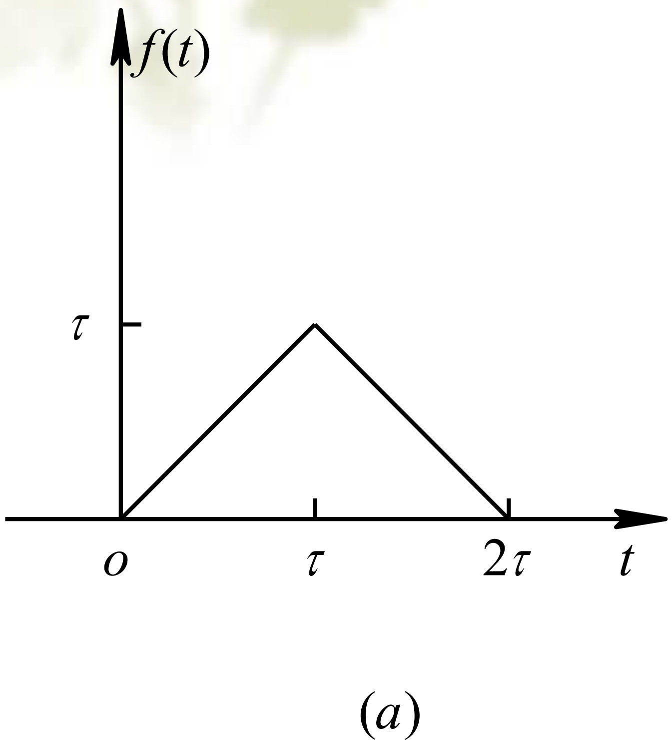
$$= F_1(s) F_2(s) \qquad \mathrm{Re}[s] > \sigma_0$$

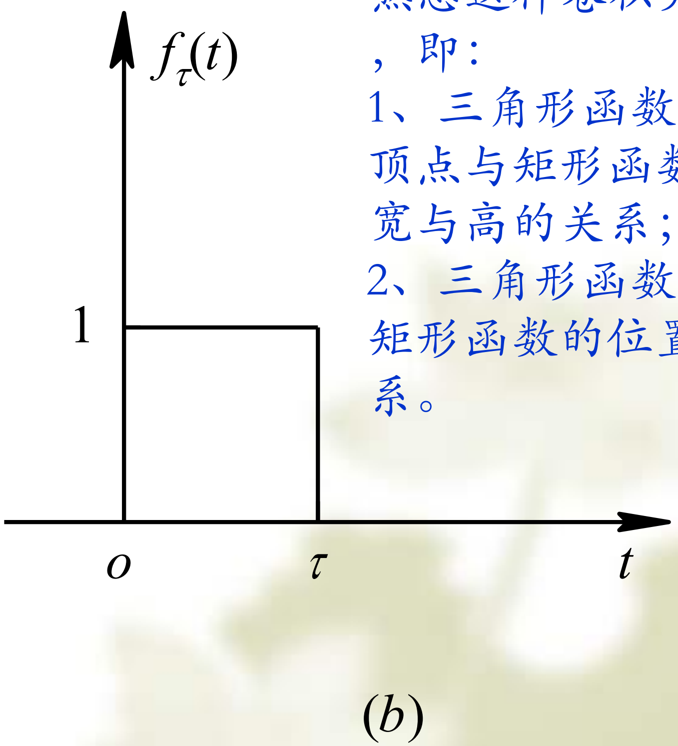
收敛域为两者的公共部分

$$f_1(t) f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{j2\pi} F_1(s) * F_2(s)$$

同理可证

例 已知图(*a*)所示信号$f(t)$与图(*b*)所示信号$f_\tau(t)$的关系为$f(t)=f_\tau(t)*f_\tau(t)$，求$f(t)$的单边拉氏变换。





熟悉这种卷积关系，即：
1、三角形函数的顶点与矩形函数的宽与高的关系；
2、三角形函数与矩形函数的位置关系。

(*a*) $f(t)$的波形；(*b*) $f_\tau(t)$的波形

解 $f_\tau(t)$可以表示为

$$f_\tau(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-\tau)$$

由时移性质和线性得

$$\mathscr{L}[f_\tau(t)] = \mathscr{L}[\varepsilon(t)] - \mathscr{L}[\varepsilon(t-\tau)] = \frac{1-e^{-s\tau}}{s} \qquad \mathrm{Re}[s] > -\infty$$

由于 $f_\tau(t)$是因果信号，因此，根据时域卷积性质得

$$F(s) = \mathscr{L}[f(t)] = \mathscr{L}[f_\tau(t)] \cdot \mathscr{L}[f_\tau(t)]$$

$$= \frac{(1-e^{-s\tau})^2}{s^2} \qquad \mathrm{Re}[s] > -\infty$$

9、初值定理

$$f(0_+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

证明： $f'(t) \leftrightarrow sF(s) - f(0_-)$

$$sF(s) - f(0_-) = \mathscr{L}[f'(t)] = \int_{0_-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt$$

$$= \int_{0_-}^{0_+} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt + \int_{0_+}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt$$

在区间（$0_-, 0_+$）中，$e^{-st} = 1$

$$= f(0_+) - f(0_-) + \int_{0_+}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt$$

注意：1、此处求$t=0_+$时的值；2、初值定理只用于真分式

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = f(0_+) + \lim_{s\to\infty} \int_{0_+}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt$$

先取极限，再积分

若$f(t)$在t=0处有冲激函数及其导函数，则

$$F(s) = c_0 + c_1 s + \cdots + F_{真}(s) \qquad f(0_+) = \lim_{s\to\infty} sF_{真}(s)$$

10、终值定理

设$f(t)\leftrightarrow F(s)$,且$\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$存在,则$f(t)$的终值

$$f(\infty)=\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s)$$

证明： 由初值定理：$sF(s)=f(0_+)+\int_{0_+}^{\infty}\frac{df(t)}{dt}e^{-st}dt$

$$\lim_{s\to 0} sF(s)=f(0_+)+\lim_{s\to 0}\int_{0_+}^{\infty}\frac{df(t)}{dt}e^{-st}dt$$

$$=f(0_+)+f(\infty)-f(0_+)$$

Re(s)=0必须在收敛域以内

存在条件：*F(s)*的所有极点位于左半S平面，或允许原点处的单阶极点。（初值、终值定理可用于验证拉氏变换的正确性）

例4-5

1、设$F(s)=\dfrac{2s}{s+1}\quad(\sigma>-1)$，　求$f(0_+)=?$

2、设$F(s)=\dfrac{1}{s+a}\quad(\sigma>-a)$，　求原函数$f(t)$的终值。

a为实常数

解:1、$F(s)=\dfrac{2s}{s+1}=2-\dfrac{2}{s+1}$

所以　$f(0_+)=\lim\limits_{s\to\infty}sF_{真}(s)=\lim\limits_{s\to\infty}-\dfrac{2}{s+1}\cdot s=-2$

验证：$F(s)=2-\dfrac{2}{s+1}\leftrightarrow 2\delta(t)-2e^{-t}u(t)=f(t)$

$f(0_+)=-2$

2、$f(\infty)=\lim\limits_{s\to 0}sF(s)=\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{s}{s+a}=\begin{cases}0 & a\neq 0\\ 1 & a=0\end{cases}$

验证：$F(s)=\dfrac{1}{s+a}\leftrightarrow e^{-at}u(t)=\begin{cases}u(t),a=0\\ e^{-\alpha t}u(t),a>0\\ e^{|\alpha|t}u(t),a<0\end{cases}$　$f(\infty)=\begin{cases}1,a=0\\ 0,a>0\\ \infty,a<0\end{cases}$

说明:

1.利用初值定理时，需要判断象函数$F(s)$是否为真分式。为真分式式时，可直接利用初值定理求初值$f(0^+)$；若为假分式，则首先将其化为真分式然后利用初值定理求出的初值即为$f(0^+)$.

2.利用终值定理前，先判断终值是否存在，只有当$F(s)$的所有极点均在左半平面或在原点只有一阶极点时，其终值才存在。才可以利用终值定理求终值$f(\infty)$.

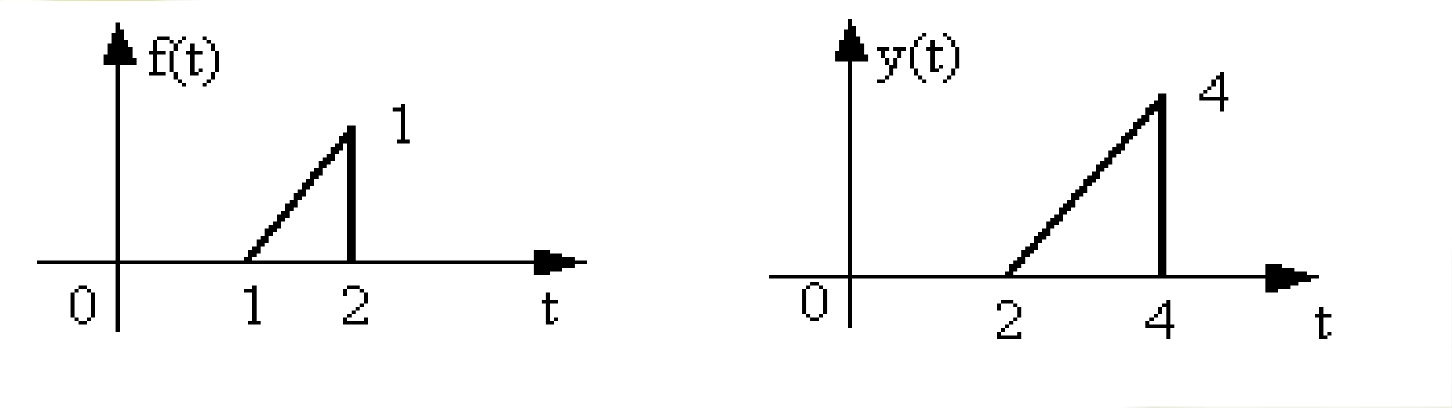
如$F(s)=L[u(t)]=\dfrac{1}{s}\quad f(\infty)=\lim\limits_{s\to 0} s\dfrac{1}{s}=1$

但$e^{at}u(t)[a>0],\sin\omega t u(t)$等却不能应用终值定理求终值。

从复频域上看，前者因为极点在右半平面；后者因为极点在虚轴上

从时域上看，前者的终值为无穷大，后者无确定终值。

思考：如图信号f(t)的拉氏变换 $F(s)=\dfrac{e^{-s}}{s^2}(1-e^{-s}-s\,e^{-s})$ ，观察y(t)与f(t)的关系，并求y(t)的拉氏变换Y(s)



解：y(t)= 4f(0.5t)

Y(s) = 4×2 F(2s)

$$Y(s)=\frac{8e^{-2s}}{(2s)^2}(1-e^{-2s}-2s\,e^{-2s})=\frac{2e^{-2s}}{s^2}(1-e^{-2s}-2s\,e^{-2s})$$

表 单边拉普拉斯变换的性质

序号	性质名称	信　号	拉普拉斯变换
0	定义	$f(t)=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\sigma-\mathrm{j}\infty}^{\sigma+\mathrm{j}\infty}F(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s,\ t\geqslant 0$	$F(s)=\int_{0_-}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t,\ \sigma>\sigma_0$
1	线性	$a_1f_1(t)+a_2f_2(t)$	$a_1F_1(s)+a_2F_2(s),\ \sigma>\max(\sigma_1,\sigma_2)$
2	尺度变换	$f(at),\ a>0$	$\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right),\ \sigma>a\sigma_0$
3	时移	$f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0),\ t_0>0$	$\mathrm{e}^{-st_0}F(s),\ \sigma>\sigma_0$
4	复频移	$\mathrm{e}^{s_a t}f(t)$	$F(s-s_a),\ \sigma>\sigma_a+\sigma_0$
5	时域微分	$f^{(1)}(t)=\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$	$sF(s)-f(0^-),\ \sigma>\sigma_0$
		$f^{(n)}(t)=\dfrac{\mathrm{d}^nf(t)}{\mathrm{d}t^n}$	$s^nF(s)-\sum_{m=0}^{n-1}s^{n-1-m}f^{(m)}(0^-)$
6	时域积分	$\left(\int_{0_-}^{t}\right)^n f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$\dfrac{1}{s^n}F(s),\ \sigma>\max(\sigma_0,\ 0)$
		$f^{(-1)}(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$\dfrac{1}{s}F(s)+\dfrac{1}{s}f^{(-1)}(0^-)$
		$f^{(-n)}(t)=\left(\int_{-\infty}^{t}\right)^n f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$\dfrac{1}{s^n}F(s)+\sum_{m=1}^{n}\dfrac{1}{s^{n-m+1}}f^{(-m)}(0^-)$
7	时域卷积	$f_1(t)*f_2(t)$ $f_1(t)$、$f_2(t)$为因果信号	$F_1(s)F_2(s),\ \sigma>\max(\sigma_1,\sigma_2)$
8	时域相乘	$f_1(t)f_2(t)$	$\dfrac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{c-\mathrm{j}\infty}^{c+\mathrm{j}\infty}F_1(\lambda)F_2(s-\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$ $\sigma>\sigma_1+\sigma_2,\ \sigma_1<c<\sigma-\sigma_2$
9	S 域微分	$(-t)^nf(t)$	$F^{(n)}(s),\ \sigma>\sigma_0$
10	S 域积分	$\dfrac{f(t)}{t}$	$\int_{s}^{\infty}F(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda,\ \sigma>\sigma_0$
11	初值定理	$f(0^+)=\lim_{s\to\infty}sF(s)$	
12	终值定理	$f(\infty)=\lim_{s\to 0}sF(s)$，$s=0$ 在收敛域内	

常用信号的单边拉普拉斯变换

序号	信　　号	拉普拉斯变换	收敛域
1	$\delta(t)$	1	$\sigma>-\infty$
2	$\delta^{(n)}(t)$	s^n	$\sigma>-\infty$
3	$\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s}$	$\sigma>0$
4	$e^{-\alpha t}\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\sigma>-\alpha$
5	$\sin(\omega_0 t)\varepsilon(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\sigma>0$
6	$\cos(\omega_0 t)\varepsilon(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\sigma>0$
7	$e^{-\alpha t}\sin(\omega_0 t)\varepsilon(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$	$\sigma>-\alpha$
8	$e^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t)\varepsilon(t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)+\omega_0^2}$	$\sigma>-\alpha$
9	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\sigma>0$
10	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-\alpha t}\varepsilon(t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\sigma>-\alpha$
11	$\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)$	$\frac{1}{1-e^{-sT}}$	$\sigma>0$