Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Новосибирский государственный технический университет

Уравнения математической физики
Курсовая работа
Тема: Решение двумерной гармонической задачи при помощи четрырёхслойной неявной схемы. Базисные функции билинейные

Факультет:	ФПМИ
Группа:	ПМ-63
Студент:	Кожекин М.В.
Вариант:	70

Новосибирск
2019

1. Цель работы

Разработать программу решения двумерной гармонической задачи методом конечных элементов. Сравнить прямой и итерационные методы решения получаемой в результате конечноэлементной аппроксимации СЛАУ.

2. Задание

1. Выполнить конечноэлементную аппроксимацию исходного уравнения в соответствии с заданием. Получить формулы для вычисления компонент матрицы **A** и вектора правой части **b**.

2. Реализовать программу решения гармонической задачи с учетом следующих требований:

- язык программирования C++ или Фортран;
- предусмотреть возможность задания неравномерной сетки по пространству, разрывность параметров уравнения по подобластям, учет краевых условий;
- матрицу хранить в разреженном строчно-столбцовом формате с возможностью перегенерации ее в профильный формат;
- реализовать (или воспользоваться реализованными в курсе «Численные методы») методы решения СЛАУ: итерационный – локально-оптимальную схему или метод сопряженных градиентов для несимметричных матриц с предобусловливанием и прямой – LU-разложение или его модификации [2, с. 871; 3].

3. Протестировать разработанную программу на полиномах первой степени.

4. Исследовать реализованные методы для сеток с небольшим количеством узлов 500 – 1000 и большим количеством узлов – примерно 20 000 – 50 000 для различных значений параметров $10^{-4} \leq \omega \leq 10^{9}$, $10^{2} \leq \lambda \leq 8 \cdot 10^{5}$, $0 \leq \sigma \leq 10^{8}$, $8.81 \cdot 10^{-12} \leq \chi \leq 10^{-10}$. Для всех решенных задач сравнить вычислительные затраты, требуемые для решения СЛАУ итерационным и прямым методом.

Вариант 70: Решить одномерную гармоническую задачу в декартовых координатах, базисные функции - линейные.

3. Анализ

3.1. Постановка задачи

Дано гиперболическое уравнение в декартовой системе координат:

$$div(\lambda gradu) + \gamma u + \sigma\frac{du}{dt} + \chi\frac{d^2u}{dt^2} = f$$

3.2. Дискретизация по времени

3.3. Вариационная подстановка

3.4. Конечноэлементная дискретизация

Представим искомое решение u на интервале (t_{j-3}, t_j) :
$u(x,y,t) = u^{j-3}\eta_3^j(t) + u^{j-2}\eta_2^j(t) + u^{j-1}\eta_1^j(t) + u^{j-0}\eta_0^j(t)$

где функции $\eta_\nu^j(t)$ являются базисными кубическими полиномами Лагранжа и имеют следующий вид

$$\eta_3^j(t) = \frac{(t-t_{j-2})(t-t_{j-1})(t-t_j)}{(t_{j-3}-t_{j-2})(t_{j-3}-t_{j-1})(t_{j-3}-t_j)}$$

$$\eta_2^j(t) = \frac{(t-t_{j-3})(t-t_{j-1})(t-t_j)}{(t_{j-2}-t_{j-3})(t_{j-2}-t_{j-1})(t_{j-2}-t_j)}$$

$$\eta_1^j(t) = \frac{(t-t_{j-2})(t-t_{j-2})(t-t_j)}{(t_{j-1}-t_{j-3})(t_{j-1}-t_{j-2})(t_{j-1}-t_j)}$$

$$\eta_0^j(t) = \frac{(t-t_{j-3})(t-t_{j-2})(t-t_{j-1})}{(t_j-t_{j-3})(t_j-t_{j-2})(t_j-t_{j-1})}$$

Возьмём первые и вторые производные от полиномов Лагранжа в точке $t = t_j$ (т.к. схема неявная)

	полином Лагранжа	1ая производная	2ая производная
$\eta_3^j(t)$	$\frac{t_{02}t_{01}t_{00}}{t_{23}t_{13}t_{03}}$	$-\frac{t_{01}t_{02}}{t_{23}t_{13}t_{03}}$	$-2\cdot\frac{t_{01}+t_{02}}{t_{23}t_{13}t_{03}}$
$\eta_2^j(t)$	$\frac{t_{03}t_{01}t_{00}}{t_{23}t_{12}t_{02}}$	$\frac{t_{01}t_{03}}{t_{23}t_{12}t_{02}}$	$2\cdot\frac{t_{01}+t_{03}}{t_{23}t_{12}t_{02}}$
$\eta_1^j(t)$	$\frac{t_{03}t_{02}t_{00}}{t_{13}t_{12}t_{01}}$	$-\frac{t_{02}t_{03}}{t_{13}t_{12}t_{01}}$	$-2\cdot\frac{t_{02}+t_{03}}{t_{13}t_{12}t_{01}}$
$\eta_0^j(t)$	$\frac{t_{03}t_{02}t_{01}}{t_{03}t_{02}t_{01}}$	$\frac{t_{01}t_{02}+t_{01}t_{03}+t_{02}t_{03}}{t_{03}t_{02}t_{01}}$	$2\cdot\frac{t_{01}+t_{02}+t_{03}}{t_{03}t_{02}t_{01}}$

где:

$t_{01} = t_0 - t_1, t_0 = t_j, t_1 = t_{j-1},$

$t_{02} = t_0 - t_2, t_0 = t_j, t_2 = t_{j-2},$
...

Подставим их в исходное уравнение, а затем выведем из него 4-х слойную неявную схему:

$$\left(\left[2\chi\frac{t_{01}+t_{02}+t_{03}}{t_{03}t_{02}t_{01}} + \sigma\frac{t_{01}t_{02}+t_{01}t_{03}+t_{02}t_{03}}{t_{03}t_{02}t_{01}} + \gamma\right]M + G\right)q^j = b^j$$
$$+\left[2\chi\frac{t_{01}+t_{02}}{t_{03}t_{13}t_{23}} + \sigma\frac{t_{01}t_{02}}{t_{03}t_{13}t_{23}}\right]Mq^{j-3}$$
$$-\left[2\chi\frac{t_{01}+t_{t03}}{t_{02}t_{12}t_{23}} + \sigma\frac{t_{01}t_{t03}}{t_{02}t_{12}t_{23}}\right]Mq^{j-2}$$
$$+\left[2\chi\frac{t_{02}+t_{03}}{t_{01}t_{12}t_{13}} + \sigma\frac{t_{02}+t_{03}}{t_{01}t_{12}t_{13}}\right]Mq^{j-1}$$

3.5. Локальные матрицы и вектора

Аналитические выражения для вычисления элементов локальных матриц:

$$G_{ij} = \int_{x_p}^{x_{p+1}} \int\limits_{y_s}^{y_{s+1}} \lambda \left(\frac{\psi_i}{x}\frac{\psi_j}{x} + \frac{\psi_i}{y}\frac{\psi_j}{y} \right) dxdy$$

$$M_{ij}^{\gamma} = \int\limits_{x_p}^{x_{p+1}} \int_{y_s}^{y_{s+1}} \gamma \psi_i \psi_j dxdy$$

$$b_i = \int_{x_p}^{x_{p+1}} \int_{y_s}^{y_{s+1}} f \psi_i xdy$$

$$G = \frac{\lambda}{6}\frac{h_y}{h_x} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{6}\frac{h_x}{h_y} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M = \frac{h_x h_y}{36} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$b = \frac{h_x h_y}{36} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix}$$

3.6. Решатели

Для решения полученных СЛАУ использовались следующие методы:

- LU-разложение
- локально-оптимальная схема
- метод бисопряжённых градиентов

4. Исследования

Проверим сходимость метода на разных функциях
Равномерная сетка по пространству
Равномерная сетка по времени

$time(t)$ \ $space(x,y)$	1	t	t^2	t^3	t^4	t^5	$sin(t)$	e^t
1	1.44e-16	2.13e-13	9.85e-13	1.39e-13	1.19e-03	3.34e-03	2.59e-05	8.82e-05
$x+y$	7.32e-13	2.93e-13	6.65e-13	5.71e-13	1.19e-03	3.34e-03	2.59e-05	8.82e-05
x^2+y^2	1.01e-12	3.74e-13	1.68e-13	1.69e-13	1.19e-03	3.34e-03	2.59e-05	8.82e-05
x^3+y^3	2.51e-13	1.56e-13	1.42e-13	2.25e-13	1.19e-03	3.34e-03	2.59e-05	8.82e-05
x^4+y^4	2.10e-04	2.10e-04	2.10e-04	2.10e-04	9.76e-04	3.13e-03	1.84e-04	1.22e-04
x^5+y^5	5.27e-04	5.27e-04	5.27e-04	5.27e-04	6.63e-04	2.82e-03	5.01e-04	4.39e-04
$sin(x)+sin(y)$	4.11e-06	4.11e-06	4.11e-06	4.11e-06	1.18e-03	3.34e-03	2.19e-05	8.41e-05
e^x+e^y	1.48e-05	1.48e-05	1.48e-05	1.48e-05	1.17e-03	3.33e-03	1.12e-05	7.35e-05

Равномерная сетка по пространству
Неравномерная сетка по времени

$space(x,y)$ \ $time(t)$	1	t	t^2	t^3	t^4	t^5	$sin(t)$	e^t
1	4.08e-16	7.57e-13	1.57e-13	3.06e-13	2.10e-03	6.28e-03	4.85e-05	1.62e-04
$x+y$	7.37e-13	2.23e-13	4.24e-13	5.25e-13	2.10e-03	6.28e-03	4.85e-05	1.62e-04
x^2+y^2	1.02e-12	3.91e-13	3.04e-13	1.46e-13	2.10e-03	6.28e-03	4.85e-05	1.62e-04
x^3+y^3	2.46e-13	1.84e-13	1.09e-13	1.29e-13	2.10e-03	6.28e-03	4.85e-05	1.62e-04
x^4+y^4	2.14e-04	2.14e-04	2.14e-04	2.14e-04	1.88e-03	6.07e-03	1.66e-04	5.52e-05
x^5+y^5	5.37e-04	5.37e-04	5.37e-04	5.37e-04	1.56e-03	5.75e-03	4.89e-04	3.77e-04
$sin(x)+sin(y)$	4.19e-06	4.19e-06	4.19e-06	4.19e-06	2.09e-03	6.28e-03	4.43e-05	1.58e-04
e^x+e^y	1.51e-05	1.51e-05	1.51e-05	1.51e-05	2.08e-03	6.27e-03	3.35e-05	1.47e-04

Неравномерная сетка по пространству
Равномерная сетка по времени

$space(x,y)$ \ $time(t)$	1	t	t^2	t^3	t^4	t^5	$sin(t)$	e^t
1	2.48e-16	1.86e-13	8.64e-13	1.25e-13	1.03e-03	2.93e-03	2.27e-05	7.70e-05
$x+y$	1.13e-12	1.87e-13	2.48e-13	4.90e-13	1.03e-03	2.93e-03	2.27e-05	7.70e-05
x^2+y^2	2.99e-13	7.30e-14	2.06e-13	1.93e-13	1.03e-03	2.93e-03	2.27e-05	7.70e-05
x^3+y^3	1.49e-13	8.45e-14	2.30e-13	2.13e-13	1.03e-03	2.93e-03	2.27e-05	7.70e-05
x^4+y^4	3.08e-04	3.08e-04	3.08e-04	3.08e-04	7.25e-04	2.62e-03	2.85e-04	2.32e-04
x^5+y^5	9.57e-04	9.57e-04	9.57e-04	9.57e-04	1.98e-04	2.00e-03	9.35e-04	8.81e-04
$sin(x)+sin(y)$	7.32e-06	7.32e-06	7.32e-06	7.32e-06	1.02e-03	2.92e-03	1.56e-05	6.98e-05
e^x+e^y	2.43e-05	2.43e-05	2.43e-05	2.43e-05	1.01e-03	2.90e-03	4.48e-06	5.32e-05

Неравномерная сетка по пространству
Неравномерная сетка по времени

$space(x,y)$ \ $time(t)$	1	t	t^2	t^3	t^4	t^5	$sin(t)$	e^t
1	4.61e-16	6.48e-13	1.41e-13	2.72e-13	1.84e-03	5.56e-03	4.28e-05	1.43e-04
$x+y$	1.15e-12	1.25e-13	2.30e-13	1.64e-13	1.84e-03	5.56e-03	4.28e-05	1.43e-04
x^2+y^2	3.03e-13	2.17e-13	1.38e-13	1.00e-13	1.84e-03	5.56e-03	4.28e-05	1.43e-04
x^3+y^3	1.32e-13	1.18e-13	1.67e-13	2.19e-13	1.84e-03	5.56e-03	4.28e-05	1.43e-04
x^4+y^4	3.15e-04	3.15e-04	3.15e-04	3.15e-04	1.53e-03	5.24e-03	2.73e-04	1.76e-04
x^5+y^5	9.82e-04	9.82e-04	9.82e-04	9.82e-04	8.94e-04	4.60e-03	9.40e-04	8.43e-04
$sin(x)+sin(y)$	7.52e-06	7.52e-06	7.52e-06	7.52e-06	1.84e-03	5.55e-03	3.55e-05	1.35e-04
e^x+e^y	2.50e-05	2.50e-05	2.50e-05	2.50e-05	1.82e-03	5.53e-03	1.89e-05	1.18e-04

4.1. Вывод

Если порядок полинома по пространству не превышает порядка используемых базисных функций, а порядок полинома по времени не соответсвует порядку точности используемой временной схемы, то получаемое численное решение должно полностью совпадать с точным решением задачи.

5. Исходный код программы