Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Новосибирский государственный технический университет

Уравнения математической физики
Лабораторная работа №3

Факультет:	ФПМИ
Группа:	ПМ-63
Студент:	Кожекин М.В.
Вариант:	1

Новосибирск
2019

1. Цель работы

Разработать программу решения гармонической задачи методом конечных элементов. Сравнить прямой и итерационные методы решения получаемой в результате конечноэлементной аппроксимации СЛАУ.

2. Задание

1. Выполнить конечноэлементную аппроксимацию исходного уравнения в соответствии с заданием. Получить формулы для вычисления компонент матрицы **A** и вектора правой части **b**.

2. Реализовать программу решения гармонической задачи с учетом следующих требований:

- язык программирования С++ или Фортран;
- предусмотреть возможность задания неравномерной сетки по пространству, разрывность параметров уравнения по подобластям, учет краевых условий;
- матрицу хранить в разреженном строчно-столбцовом формате с возможностью перегенерации ее в профильный формат;
- реализовать (или воспользоваться реализованными в курсе «Численные методы») методы решения СЛАУ: итерационный – локально-оптимальную схему или метод сопряженных градиентов для несимметричных матриц с предобусловливанием и прямой – LU-разложение или его модификации [2, с. 871; 3].

3. Протестировать разработанную программу на полиномах первой степени.

4. Исследовать реализованные методы для сеток с небольшим количеством узлов 500 – 1000 и большим количеством узлов – примерно 20 000 – 50 000 для различных значений параметров $10^{-4} \leq \omega \leq 10^{9}$, $10^{2} \leq \lambda \leq 8 \cdot 10^{5}$, $0 \leq \sigma \leq 10^{8}$, $8.81 \cdot 10^{-12} \leq \chi \leq 10^{-10}$. Для всех решенных задач сравнить вычислительные затраты, требуемые для решения СЛАУ итерационным и прямым методом.

Вариант 1: Решить одномерную гармоническую задачу в декартовых координатах, базисные функции - линейные.

3. Анализ

Рассмотрим задачу для уравнения:

$$\chi\frac{d^2u}{dt^2} + \sigma\frac{du}{dt} - div(\lambda grad(u)) = f$$

Решение данного уравния u и его правая часть f представимы в виде:

$$u(x, y, t) = u^s sin\omega t + u^c cos\omega t$$

$$f(x, y, t) = f^s sin\omega t + f^c cos\omega t$$

Значит исходное уравнение можно привести к системе уравнений

$$-div(\lambda grad(u^s)) - \omega\sigma u^c - \omega^2\chi u^s = f$$

$$-div(\lambda grad(u^c)) - \omega\sigma u^s - \omega^2\chi u^c = f$$

$$p_{ij}(q_s) = \int_\Omega \Big(\lambda grad\psi_i grad\psi_j - \omega^2 \chi \psi_i \psi_j\Big) d\Omega$$

$$c_{ij}(q_s) = \omega \int_\Omega \sigma \psi_i \psi_j d\Omega$$

Матрица конечноэлементной СЛАУ будет иметь следующую структуру:

$$\begin{pmatrix} p_{00} & -c_{00} & p_{01} & -c_{01} \\ c_{00} & p_{00} & c_{01} & p_{01} \\ p_{10} & -c_{10} & p_{11} & -c_{11} \\ c_{10} & p_{10} & c_{11} & p_{11} \end{pmatrix}$$

Выведем формулы для локальных матриц массы, жёсткости и вектора правой части.

$$\frac{du}{dx} = \frac{d\sum_{k=0}^{1} q_k \psi_k}{dx} = q_0 \frac{d\psi_0}{dx} + q_1 \frac{d\psi_1}{dx} = -\frac{1}{h} q_0 + \frac{1}{h} q_1 = \frac{q_1 - q_0}{h}$$

$$G_{i,j} = \int_\Omega \lambda(\frac{du}{dx}) grad\psi_i grad\psi_j d\Omega$$

$$G_{0,0} = \sum_{k=0}^{1} \int_\Omega \lambda(\frac{q_1 - q_0}{h}) \psi_k grad\psi_0 grad\psi_0 d\Omega =$$

$$= \frac{1}{h} \sum_{k=0}^{1} \int_\Omega \lambda(\frac{q_1 - q_0}{h}) \psi_k d\Omega =$$

$$= \frac{\lambda_0(\frac{q_1 - q_0}{h}) + \lambda_1(\frac{q_1 - q_0}{h})}{2h} = G_{1,1}$$

$$G_{0,1} = \sum_{k=0}^{1} \int_\Omega \lambda(\frac{q_1 - q_0}{h}) \psi_k grad\psi_0 grad\psi_1 d\Omega =$$

$$= -\frac{1}{h} \sum_{k=0}^{1} \int_\Omega \lambda(\frac{q_1 - q_0}{h}) \psi_k d\Omega =$$

$$= -\frac{\lambda_0(\frac{q_1 - q_0}{h}) + \lambda_1(\frac{q_1 - q_0}{h})}{2h} = G_{1,0}$$

$$G = \frac{\lambda_0(\frac{q_1 - q_0}{h}) + \lambda_1(\frac{q_1 - q_0}{h})}{2h} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{i,j} = \frac{\sigma}{\Delta t_s} \int_\Omega \psi_i \psi_j d\Omega$$

$$M_{0,0} = \frac{\sigma}{\Delta t_s} \int_\Omega \psi_0 \psi_0 d\Omega = \frac{\sigma h}{\Delta t_s} \int_0^1 \xi^2 d\xi = \frac{\sigma h}{\Delta t_s} \frac{\xi^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{\sigma h}{3\Delta t_s} = M_{1,1}$$

$$M_{0,1} = \frac{\sigma}{\Delta t_s} \int_\Omega \psi_0 \psi_1 d\Omega = \frac{\sigma h}{\Delta t_s} \int_0^1 \xi(1-\xi) d\xi = \frac{\sigma h}{\Delta t_s} (\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3})\Big|_0^1 = \frac{\sigma h}{6\Delta t_s} = M_{1,0}$$

$$M = \frac{\sigma h}{6\Delta t_s} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b_i = \int_\Omega f_s\psi_i d\Omega + \frac{1}{\Delta t_s}\int_\Omega \sigma u_{q-1}^h \psi_i d\Omega \bigg| u_{q-1}h = \sum_{k=0}^{1} q_{k,s-1}\psi_k \bigg|$$

$$b_0 = \sum_{k=0}^{1}\int_\Omega f_k\psi_k\psi_0 d\Omega + \frac{\sigma}{\Delta t_s}\sum_{k=0}^{1}\int_\Omega q_{k,q-1}\psi_k\psi_0 d\Omega$$

$$= \Big[f_0\int_\Omega \psi_0\psi_0 d\Omega + f_1\int_\Omega \psi_1\psi_0 d\Omega\Big] + \frac{\sigma}{\Delta t_s}\Big[q_{0,s-1}\int_\Omega \psi_0\psi_0 d\Omega + q_{1,s-1}\int_\Omega \psi_1\psi_0 d\Omega\Big]$$

$$= h\Big[f_0\int_0^1 \xi^2 d\xi + f_1\int_0^1 (1-\xi)\xi d\xi\Big] + \frac{\sigma}{\Delta t_s}\Big[q_{0,s-1}\int_0^1 \xi^2 d\xi + q_{1,s-1}\int_0^1 (1-\xi)\xi d\xi\Big]$$

$$= h\Big[f_0\frac{\xi^3}{3}\Big|_0^1 + f_1(\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3})\Big|_0^1\Big] + \frac{\sigma}{\Delta t_s}\Big[q_{0,s-1}\frac{\xi^3}{3}\Big|_0^1 + q_{1,s-1}(\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3})\Big|_0^1\Big]$$

$$= h\Big[f_0\frac{1}{3} + f_1\frac{1}{6}\Big] + \frac{\sigma}{\Delta t_s}\Big[\frac{1}{3}q_{0,s-1} + \frac{1}{6}q_{1,s-1}\Big]$$

$$= \frac{h}{6}\Big[2f_0 + f_1\Big] + \frac{\sigma}{6\Delta t_s}\Big[2q_{0,s-1} + q_{1,s-1}\Big]$$

$$b_1 = \sum_{k=0}^{1}\int_\Omega f_k\psi_k\psi_1 d\Omega + \frac{\sigma}{\Delta t_s}\sum_{k=0}^{1}\int_\Omega q_{k,q-1}\psi_0\psi_1 d\Omega =$$

$$= \Big[f_0\int_\Omega \psi_0\psi_1 d\Omega + f_1\int_\Omega \psi_1\psi_1 d\Omega\Big] + \frac{\sigma}{\Delta t_s}\Big[q_{0,s-1}\int_\Omega \psi_0\psi_1 d\Omega + q_{1,s-1}\int_\Omega \psi_1\psi_1 d\Omega\Big] =$$

$$= h\Big[f_0\int_0^1 \xi(1-\xi) d\xi + f_1\int_0^1 (1-\xi)^2 d\xi\Big] + \frac{\sigma}{\Delta t_s}\Big[q_{0,s-1}\int_0^1 \xi(1-\xi) d\xi + q_{1,s-1}\int_0^1 (1-\xi)^2 d\xi\Big] =$$

$$= h\Big[f_0(\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3})\Big|_0^1 + f_1(1-\xi)^3\Big|_0^1\Big] + \frac{\sigma}{\Delta t_s}\Big[q_{0,s-1}(\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3})\Big|_0^1 + q_{1,s-1}(1-\xi)^3\Big|_0^1\Big] =$$

$$= \frac{h}{6}\Big[f_0\frac{1}{6} + f_1\frac{1}{3}\Big] + \frac{\sigma}{\Delta t_s}\Big[\frac{1}{6}q_{0,s-1} + \frac{1}{3}q_{1,s-1}\Big]$$

$$= \frac{h}{6}\Big[f_0 + 2f_1\Big] + \frac{\sigma}{6\Delta t_s}\Big[q_{0,s-1} + 2q_{1,s-1}\Big]$$

$$b = \frac{hx}{6}\begin{pmatrix} 2f_0 + f_1 \\ f_0 + 2f_1 \end{pmatrix} + \frac{\sigma}{6\Delta t_s}\begin{pmatrix} 2q_{0,s-1} + q_{1,s-1} \\ q_{0,s-1} + 2q_{1,s-1} \end{pmatrix}$$

В итоге:

$$G = \frac{\lambda_0(\frac{q_1-q_0}{h}) + \lambda_1(\frac{q_1-q_0}{h})}{2h}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \frac{\sigma h}{6\Delta t_s}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b = \frac{hx}{6}\begin{pmatrix} 2f_0 + f_1 \\ f_0 + 2f_1 \end{pmatrix} + \frac{\sigma}{6\Delta t_s}\begin{pmatrix} 2q_{0,s-1} + q_{1,s-1} \\ q_{0,s-1} + 2q_{1,s-1} \end{pmatrix}$$

4. Точность для разных функций u и λ

В ходе следующего исследования использовались следующие параметры:
$\varepsilon = 1e-7$
$\sigma = 1$
$maxiter = 1000$
Область пространства $\Omega = [0, 1]$
Время задано на отрезке [0, 1]
Первоначальное число узлов 11, а конечных элементов 10
Для неравномерных сеток по времени и пространству коэффициент k=1.1

$u_s(x,t)$ \ $u_c(x,t)$	1	x	x^2	x^3	x^4	x^5	$sin(x)$	$\sin u$
1	8.98e-29	5.60e-28	8.67e-28	5.59e-27	2.92e-26	2.80e-25	4.05e-29	1.48e-26
x	1.22e-28	3.08e-28	5.15e-27	6.03e-27	5.78e-26	2.49e-26	1.26e-28	1.13e-26
x^2	3.49e-28	2.05e-27	1.48e-27	1.68e-27	2.70e-26	4.92e-26	1.42e-28	4.97e-27
x^3	5.05e-28	2.84e-27	1.79e-27	3.49e-27	4.77e-27	5.48e-26	5.66e-28	8.70e-27
x^4	9.65e-28	1.87e-27	4.40e-27	1.50e-26	3.22e-26	6.05e-26	1.13e-27	8.56e-27
x^5	2.75e-26	2.11e-26	2.61e-26	3.36e-26	1.48e-25	2.11e-26	2.81e-26	1.17e-25
$sin(x)$	1.07e-28	3.22e-28	1.71e-27	8.37e-27	2.94e-26	2.01e-25	6.06e-29	9.79e-27
e^x	2.84e-28	1.14e-27	2.27e-27	2.92e-27	2.60e-26	5.70e-26	1.27e-28	1.52e-26

4.1. Вывод

Как видно из таблицы метод начинает сходиться хуже при повышении степени полинома. Если же функция λ будет зависеть не от $\frac{du}{dx}$, а просто от u, то сходимость будет куда выше . Если функция λ гармоническая (в нашем случае sin(u)), то метод работает хуже, хотя вообще он не должен сходиться.

Также стоит отметить, что и скорость программы в варианте 7 заметно ниже варианта 5. Рещение сходится медленно.

5. Точность решения при дроблении сетки

В ходе следующего исследования использовались следующие параметры:
$\varepsilon = 1e-22$
$\sigma = 1$
$maxiter = 1000$, т.к. повышение этого числа не приводит к должному результату, а лишь занимает процессорное время
Область пространства $\Omega = [0, 1]$
Время задано на отрезке [0, 1]
Первоначальное число узлов 11, а конечных элементов 10
Для неравномерных сеток по времени и пространству коэффициент k=1.1

$u_s = x, u_c = -2 \cdot x$

время \ пространство	равномерное				не равномерное			
	i	nodes	iters	norm	i	nodes	iters	norm
равномерное	0	10	0	8.981e-29	0	11	0	5.702e-28
	1	19	0	8.140e-28	1	21	0	1.211e-25
	2	37	0	1.205e-25	2	41	0	7.297e-23
	3	73	0	8.994e-25	3	81	2	9.365e-49
	4	145	0	4.295e-24	4	161	2	7.218e-42
	i	nodes	iters	norm	i	nodes	iters	norm
не равномерное	0	10	0	8.981e-29	0	11	0	5.702e-28
	1	19	0	8.140e-28	1	21	0	1.211e-25
	2	37	0	1.205e-25	2	41	0	7.297e-23
	3	73	0	8.994e-25	3	81	2	9.365e-49
	4	145	0	4.295e-24	4	161	2	7.218e-42

$u_s = x, u_c = -2 \cdot x$

время \ пространство	равномерное				не равномерное			
	i	nodes	iters	norm	i	nodes	iters	norm
равномерное	0	10	0	3.077e-28	0	11	0	7.572e-28
	1	19	0	5.113e-27	1	21	0	2.522e-25
	2	37	0	1.120e-25	2	41	0	5.996e-23
	3	73	0	2.436e-24	3	81	1	1.703e-36
	4	145	0	3.699e-23	4	161	1	2.778e-32
	i	nodes	iters	norm	i	nodes	iters	norm
не равномерное	0	10	0	3.077e-28	0	11	0	7.572e-28
	1	19	0	5.113e-27	1	21	0	2.522e-25
	2	37	0	1.120e-25	2	41	0	5.996e-23
	3	73	0	2.436e-24	3	81	1	1.703e-36
	4	145	0	3.699e-23	4	161	1	2.778e-32

$u_s = x^2, u_c = -2 \cdot x^2$

время \ пространство	равномерное				не равномерное			
	i	nodes	iters	norm	i	nodes	iters	norm
равномерное	0	10	0	1.485e-27	0	11	0	2.948e-28
	1	19	0	1.057e-26	1	21	0	9.778e-26
	2	37	0	3.731e-25	2	41	1	2.140e-31
	3	73	0	2.816e-24	3	81	1	6.207e-37
	4	145	1	1.129e-26	4	161	1	2.665e-32
	i	nodes	iters	norm	i	nodes	iters	norm
не равномерное	0	10	0	1.485e-27	0	11	0	2.948e-28
	1	19	0	1.057e-26	1	21	0	9.778e-26
	2	37	0	3.731e-25	2	41	1	2.140e-31
	3	73	0	2.816e-24	3	81	1	6.207e-37
	4	145	1	1.129e-26	4	161	1	2.665e-32

$u_s = x^3, u_c = -2 \cdot x^3$

время \ пространство	равномерное				не равномерное			
	i	nodes	iters	norm	i	nodes	iters	norm
равномерное	0	10	0	3.490e-27	0	11	0	1.668e-28
	1	19	0	4.726e-26	1	21	0	1.929e-25
	2	37	0	9.980e-25	2	41	0	6.387e-23
	3	73	0	2.688e-23	3	81	1	3.745e-37
	4	145	1	5.618e-27	4	161	1	2.968e-32
	i	nodes	iters	norm	i	nodes	iters	norm
не равномерное	0	10	0	3.490e-27	0	11	0	1.668e-28
	1	19	0	4.726e-26	1	21	0	1.929e-25
	2	37	0	9.980e-25	2	41	0	6.387e-23
	3	73	0	2.688e-23	3	81	1	3.745e-37
	4	145	1	5.618e-27	4	161	1	2.968e-32

$u_s = x^4, u_c = -2 \cdot x^4$

время \ пространство	равномерное				не равномерное			
	i	nodes	iters	norm	i	nodes	iters	norm
равномерное	0	10	0	3.220e-26	0	11	0	4.958e-28
	1	19	0	3.915e-25	1	21	0	1.394e-25
	2	37	0	1.836e-24	2	41	0	6.353e-23
	3	73	1	2.383e-27	3	81	1	9.484e-38
	4	145	1	2.477e-25	4	161	1	3.011e-32
	i	nodes	iters	norm	i	nodes	iters	norm
не равномерное	0	10	0	3.220e-26	0	11	0	4.958e-28
	1	19	0	3.915e-25	1	21	0	1.394e-25
	2	37	0	1.836e-24	2	41	0	6.353e-23
	3	73	1	2.383e-27	3	81	1	9.484e-38
	4	145	1	2.477e-25	4	161	1	3.011e-32

$u_s = x^5, u_c = -2 \cdot x^5$

время \ пространство	равномерное				не равномерное			
	i	nodes	iters	norm	i	nodes	iters	norm
равномерное	0	10	0	2.115e-26	0	11	0	5.806e-28
	1	19	0	9.560e-25	1	21	0	2.007e-25
	2	37	0	4.183e-23	2	41	0	5.569e-23
	3	73	1	2.365e-26	3	81	1	5.654e-36
	4	145	1	4.071e-25	4	161	1	2.796e-32
	i	nodes	iters	norm	i	nodes	iters	norm
не равномерное	0	10	0	2.115e-26	0	11	0	5.806e-28
	1	19	0	9.560e-25	1	21	0	2.007e-25
	2	37	0	4.183e-23	2	41	0	5.569e-23
	3	73	1	2.365e-26	3	81	1	5.654e-36
	4	145	1	4.071e-25	4	161	1	2.796e-32

$u_s = sin(x), u_c = -2 \cdot sin(x)$

время \ пространство	равномерное				не равномерное			
	i	nodes	iters	norm	i	nodes	iters	norm
равномерное	0	10	0	6.059e-29	0	11	0	4.118e-28
	1	19	0	1.986e-27	1	21	0	1.132e-25
	2	37	0	2.282e-26	2	41	0	1.558e-23
	3	73	0	5.451e-25	3	81	1	1.993e-37
	4	145	0	5.159e-24	4	161	1	3.439e-32
	i	nodes	iters	norm	i	nodes	iters	norm
не равномерное	0	10	0	6.059e-29	0	11	0	4.118e-28
	1	19	0	1.986e-27	1	21	0	1.132e-25
	2	37	0	2.282e-26	2	41	0	1.558e-23
	3	73	0	5.451e-25	3	81	1	1.993e-37
	4	145	0	5.159e-24	4	161	1	3.439e-32

$u_s = e^x, u_c = -2 \cdot e^x$

время \ пространство	равномерное				не равномерное			
	i	nodes	iters	norm	i	nodes	iters	norm
равномерное	0	10	0	1.515e-26	0	11	0	2.357e-27
	1	19	0	1.293e-25	1	21	0	1.146e-24
	2	37	0	5.975e-25	2	41	1	6.564e-24
	3	73	0	2.419e-23	3	81	2	5.631e-49
	4	145	1	4.231e-25	4	161	2	4.778e-41
	i	nodes	iters	norm	i	nodes	iters	norm
не равномерное	0	10	0	1.515e-26	0	11	0	2.357e-27
	1	19	0	1.293e-25	1	21	0	1.146e-24
	2	37	0	5.975e-25	2	41	1	6.564e-24
	3	73	0	2.419e-23	3	81	2	5.631e-49
	4	145	1	4.231e-25	4	161	2	4.778e-41

5.1. Вывод

Т.к. **порядок сходимости** - это степень того, насколько сильно увеличивается точность при дроблении сетки. Он определяется из степени х.

Исходя из исследований можно заметить, что порядок сходимости $\frac{1}{3}$

6. Исходный код программы