Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Новосибирский государственный технический университет

Уравнения математической физики
Лабораторная работа №2

Факультет: ФПМИ
Группа: ПМ-63
Студент: Кожекин М.В.
Вариант: 5

Новосибирск
2019

1. Цель работы

Разработать программу решения нелинейной одномерной краевой задачи методом конечных элементов. Сравнить метод простой итерации и метод Ньютона для решения данной задачи.

2. Задание

1. Выполнить конечноэлементную аппроксимацию исходного уравнения в соответствии с заданием. Получить формулы для вычисления компонент матрицы и вектора правой части для метода простой итерации.

2. Реализовать программу решения нелинейной задачи методом простой итерации с учетом следующих требований:

- язык программирования C++ или Фортран;
- предусмотреть возможность задания неравномерных сеток по пространству и по времени, разрывность параметров уравнения по подобластям, учет краевых условий;
- матрицу хранить в ленточном формате, для решения СЛАУ использовать метод -разложения;
- предусмотреть возможность использования параметра релаксации.

3. Выполнить линеаризацию нелинейной системы алгебраических уравнений с использованием метода Ньютона. Получить формулы для вычисления компонент линеаризованных матрицы и вектора правой части

4. Реализовать программу решения нелинейной задачи методом Ньютона.

5. Протестировать разработанные программы.

6. Исследовать реализованные методы на различных зависимостях коэффициента от решения (или производной решения) в соответствии с заданием. На одних и тех же задачах сравнить по количеству итераций метод простой итерации и метод Ньютона. Исследовать скорость сходимости от параметра релаксации.

Вариант 5: Базисные функции линейные.

$$-div(\lambda(u)grad(u) + \sigma\frac{du}{dt} = f$$

3. Анализ

Произведя временную аппрокимацию по двуслойной неявной схеме исходное уравнение примет вид:

$$-div(\lambda(u)grad(u) + \frac{\sigma}{\Delta t_s}u_s = f + \frac{\sigma}{\Delta t_s}u_{s-1}$$

В ходе конечноэлементной аппроксимации нелинейной начально-краевой задачи получается система нелинейных уравнений

$$\mathbf{A}(\mathbf{q_s})\mathbf{q_s} = \mathbf{b}(\mathbf{q_s})$$

у которой

$$G_{i,j} = \int_{\Omega} \lambda(\frac{du}{dx})grad\psi_i grad\psi_j d\Omega =$$

$$G_{0,0} = \sum_{k=0}^{1} \int_\Omega \lambda(\frac{q_1 - q_0}{h})\psi_k grad\psi_0 grad\psi_0 d\Omega =$$
$$= \sum_{k=0}^{1} \int_\Omega \lambda(\frac{q_1 - q_0}{h})\psi_k grad\psi_0 grad\psi_0 d\Omega =$$
$$= \frac{\lambda_0(\frac{q_1-q_0}{h}) + \lambda_1(\frac{q_1-q_0}{h})}{2h} = G_{1,1}$$
$$G_{0,1} = \sum_{k=0}^{1} \int_\Omega \lambda(\frac{q_1 - q_0}{h})\psi_k grad\psi_0 grad\psi_1 d\Omega =$$
$$= \sum_{k=0}^{1} \int_\Omega \lambda(\frac{q_1 - q_0}{h})\psi_k grad\psi_0 grad\psi_1 d\Omega =$$
$$= -\frac{\lambda_0(\frac{q_1-q_0}{h}) + \lambda_1(\frac{q_1-q_0}{h})}{2h} = G_{1,0}$$
$$G = \frac{\lambda_0(\frac{q_1-q_0}{h}) + \lambda_1(\frac{q_1-q_0}{h})}{2h} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{i,j} = \frac{\sigma}{\Delta t_s} \int_\Omega \psi_i \psi_j d\Omega$$
$$M_{0,0} = \frac{\sigma}{\Delta t_s} \int_\Omega \psi_0 \psi_0 d\Omega = \frac{\sigma h}{\Delta t_s} \int_0^1 \xi^2 d\xi = \frac{\sigma h}{\Delta t_s} \frac{\xi^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{\sigma h}{3\Delta t_s} = M_{1,1}$$
$$M_{0,1} = \frac{\sigma}{\Delta t_s} \int_\Omega \psi_0 \psi_1 d\Omega = \frac{\sigma h}{\Delta t_s} \int_0^1 \xi(1-\xi) d\xi = \frac{\sigma h}{\Delta t_s} (\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3})\Big|_0^1 = \frac{\sigma h}{6\Delta t_s} = M_{1,0}$$
$$M = \frac{\sigma h}{6\Delta t_s} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b_i = \int_\Omega f_s \psi_i d\Omega + \frac{1}{\Delta t_s} \int_\Omega \sigma u_{q-1}^h \psi_i d\Omega \,\Bigg|\, u_{q-1}h = \sum_{k=0}^{1} q_{k,s-1}\psi_k \Bigg|$$
$$b_0 = fh \int_0^1 \xi d\xi + \frac{\sigma}{\Delta t_s} \sum_{k=0}^{1} \int_\Omega q_{k,q-1} \psi_k \psi_0 d\Omega$$
$$= fh \frac{\xi^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{\sigma}{\Delta t_s}\Big[q_{0,s-1} \int_\Omega \psi_0\psi_0 d\Omega + q_{1,s-1} \int_\Omega \psi_1 \psi_0 d\Omega\Big]$$
$$= \frac{fh}{2} + \frac{\sigma}{\Delta t_s}\Big[q_{0,s-1} \int_\Omega \xi^2 d\xi + q_{1,s-1} \int_\Omega \xi(1-\xi) d\xi\Big]$$
$$= \frac{fh}{2} + \frac{\sigma}{\Delta t_s}\Big[q_{0,s-1} \frac{\xi^3}{3}\Big|_0^1 + q_{1,s-1}(\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3})\Big|_0^1\Big]$$
$$= \frac{fh}{2} + \frac{\sigma}{\Delta t_s}\Big[\frac{1}{3} q_{0,s-1} + \frac{1}{6} q_{1,s-1}\Big] = \frac{fh}{2} + \frac{\sigma}{6\Delta t_s}\Big[2q_{0,s-1} + q_{1,s-1}\Big]$$
$$b_1 = fh \int_0^1 (1-\xi) d\xi + \frac{\sigma}{\Delta t_s} \sum_{k=0}^{1} \int_\Omega q_{k,q-1} \psi_0 \psi_1 d\Omega$$
$$= fh \frac{\xi^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{\sigma}{\Delta t_s}\Big[q_{0,s-1} \int_\Omega \psi_0\psi_1 d\Omega + q_{1,s-1} \int_\Omega \psi_1 \psi_1 d\Omega\Big]$$

$$= \frac{fh}{2} + \frac{\sigma}{\Delta t_s}\Big[q_{0,s-1}\int_\Omega \xi(1-\xi)d\xi + q_{1,s-1}\int_\Omega (1-\xi)^2 d\xi\Big]$$
$$= \frac{fh}{2} + \frac{\sigma}{\Delta t_s}\Big[q_{0,s-1}(\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3})\Big|_0^1 + q_{1,s-1}(1-\xi)^3\Big|_0^1\Big]$$
$$= \frac{fh}{2} + \frac{\sigma}{\Delta t_s}\Big[\frac{1}{6}q_{0,s-1} + \frac{1}{3}q_{1,s-1}\Big] = \frac{fh}{2} + \frac{\sigma}{6\Delta t_s}\Big[q_{0,s-1} + 2q_{1,s-1}\Big]$$
$$b = \begin{pmatrix} \frac{fh}{2} + \frac{\sigma}{6\Delta t_s}\Big[2q_{0,s-1} + q_{1,s-1}\Big] \\ \frac{fh}{2} + \frac{\sigma}{6\Delta t_s}\Big[q_{0,s-1} + 2q_{1,s-1}\Big] \end{pmatrix}$$

---

4. Исследования

$u(x,t) = t \cdot x$

coef	число узлов	число итераций	норма вектора
0	11	1,890	20.54
1	21	1,903	20.54
2	41	1,907	20.54
3	81	1,908	20.54
4	161	1,909	20.54
5	321	1,909	20.54
6	641	1,909	20.54
7	1,281	1,909	20.54

$u(x,t) = t \cdot 10 \cdot x$

coef	число узлов	число итераций	норма вектора
0	11	1,890	205.39
1	21	1,903	205.39
2	41	1,907	205.39
3	81	1,908	205.39
4	161	1,909	205.39
5	321	1,909	205.39
6	641	1,909	205.39
7	1,281	1,909	205.39

$u(x,t) = t \cdot x^2$

coef	число узлов	число итераций	норма вектора
0	11	1,868	165.9
1	21	1,883	165.9
2	41	1,887	165.9
3	81	1,889	165.9
4	161	1,890	165.9
5	321	1,890	165.9
6	641	1,890	165.9
7	1,281	1,891	165.9

$u(x,t) = t \cdot x^3$

coef	число узлов	число итераций	норма вектора
0	11	1,847	1,460.2
1	21	1,862	1,460.2
2	41	1,868	1,460.2
3	81	1,870	1,460.2
4	161	1,871	1,460.2
5	321	1,871	1,460.2
6	641	1,872	1,460.2
7	1,281	1,872	1,460.2

$u(x,t) = t \cdot sin(x)$

coef	число узлов	число итераций	норма вектора
0	11	1,639	2.49
1	21	1,629	2.38
2	41	1,626	2.35
3	81	1,625	2.35
4	161	1,625	2.35
5	321	1,625	2.35
6	641	1,626	2.35
7	1,281	1,626	2.35

$u(x,t) = t \cdot eps(x)$

coef	число узлов	число итераций	норма вектора
0	11	1,788	24,668.34
1	21	1,787	24,238.96
2	41	1,789	24,140.8
3	81	1,792	24,116.91
4	161	1,794	24,110.98
5	321	1,795	24,109.5
6	641	1,796	24,109.13
7	1,281	1,796	24,109.04

5. Выводы