Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Новосибирский государственный технический университет

Уравнения математической физики
Курсовая работа
Тема: Решение двумерной гармонической задачи при помощи четрырёхслойной неявной схемы. Базисные функции билинейные

Факультет:	ФПМИ
Группа:	ПМ-63
Студент:	Кожекин М.В.
Вариант:	70

Новосибирск
2019

1. Цель работы

Разработать программу решения двумерной гармонической задачи методом конечных элементов. Сравнить прямой и итерационные методы решения получаемой в результате конечноэлементной аппроксимации СЛАУ.

2. Задание

1. Выполнить конечноэлементную аппроксимацию исходного уравнения в соответствии с заданием. Получить формулы для вычисления компонент матрицы $\mathbf{A}$ и вектора правой части $\mathbf{b}$.

2. Реализовать программу решения гармонической задачи с учетом следующих требований:

- язык программирования C++ или Фортран;
- предусмотреть возможность задания неравномерной сетки по пространству, разрывность параметров уравнения по подобластям, учет краевых условий;
- матрицу хранить в разреженном строчно-столбцовом формате с возможностью перегенерации ее в профильный формат;
- реализовать (или воспользоваться реализованными в курсе «Численные методы») методы решения СЛАУ: итерационный – локально-оптимальную схему или метод сопряженных градиентов для несимметричных матриц с предобусловливанием и прямой – LU-разложение или его модификации [2, с. 871; 3].

3. Протестировать разработанную программу на полиномах первой степени.

4. Исследовать реализованные методы для сеток с небольшим количеством узлов 500 – 1000 и большим количеством узлов – примерно 20 000 – 50 000 для различных значений параметров $10^{-4} \leq \omega \leq 10^{9}$, $10^{2} \leq \lambda \leq 8 \cdot 10^{5}$, $0 \leq \sigma \leq 10^{8}$, $8.81 \cdot 10^{-12} \leq \chi \leq 10^{-10}$. Для всех решенных задач сравнить вычислительные затраты, требуемые для решения СЛАУ итерационным и прямым методом.

Вариант 70: Решить одномерную гармоническую задачу в декартовых координатах, базисные функции - линейные.

3. Анализ

3.1. Постановка задачи

Дано гиперболическое уравнение в декартовой системе координат:

$$-div(\lambda gradu) + \gamma u + \sigma \frac{du}{dt} + \chi \frac{d^2u}{dt^2} = f$$

3.2. Дискретизация по времени

3.3. Вариационная подстановка

3.4. Конечноэлементная дискретизация

3.5. Локальные матрицы и вектора

Аналитические выражения для вычисления элементов локальных матриц:

$$G_{ij} = \int_{x_p}^{x_{p+1}} \int_{y_s}^{y_{s+1}} \lambda \frac{\psi_i}{x} \frac{\psi_j}{x} + \frac{\psi_i}{y} \frac{\psi_j}{y} dxdy$$

$$M_{ij}^{\gamma} = \int_{x_p}^{x_{p+1}} \int_{y_s}^{y_{s+1}} \gamma \psi_i \psi_j dxdy$$

$$b_i = \int_{x_p}^{x_{p+1}} \int_{y_s}^{y_{s+1}} f \psi_i xdy$$

$$G = \frac{\lambda}{6} \frac{h_y}{h_x} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{6} \frac{h_x}{h_y} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M = \frac{h_x h_y}{36} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$b = \frac{h_x h_y}{36} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix}$$

3.6. Решатели

Для решения полученных СЛАУ использовались следующие методы:

- LU-разложение
- локально-оптимальная схема
- метод бисопряжённых градиентов

4. Исходный код программы