Министерство науки и высшего образования Российской Федерации Новосибирский государственный технический университет

${f y}$ равнения математической физики Курсовая работа

Тема: Решение двумерной гармонической задачи при помощи четрырёхслойной неявной схемы. Базисные функции билинейные

Факультет: ФПМИ Группа: ПМ-63

Студент: Кожекин М.В.

Вариант: 70

1. Цель работы

Разработать программу решения двумерной гармонической задачи методом конечных элементов. Сравнить прямой и итерационные методы решения получаемой в результате конечноэлементной аппроксимации СЛАУ.

2. Задание

- 1. Выполнить конечноэлементную аппроксимацию исходного уравнения в соответствии с заданием. Получить формулы для вычисления компонент матрицы ${\bf A}$ и вектора правой части ${\bf b}$.
- 2. Реализовать программу решения гармонической задачи с учетом следующих требований:
 - язык программирования С++ или Фортран;
 - предусмотреть возможность задания неравномерной сетки по пространству, разрывность параметров уравнения по подобластям, учет краевых условий;
 - матрицу хранить в разреженном строчно-столбцовом формате с возможностью перегенерации ее в профильный формат;
 - реализовать (или воспользоваться реализованными в курсе «Численные методы») методы решения СЛАУ: итерационный локально-оптимальную схему или метод сопряженных градиентов для несимметричных матриц с предобусловливанием и прямой LU-разложение или его модификации [2, с. 871; 3].
 - 3. Протестировать разработанную программу на полиномах первой степени.
- 4. Исследовать реализованные методы для сеток с небольшим количеством узлов 500 1000 и большим количеством узлов примерно 20 000 50 000 для различных значений параметров $10^{-4} \le \omega \le 10^9, \ 10^2 \le \lambda \le 8 \cdot 10^5, \ 0 \le \sigma \le 10^8, \ 8.81 \cdot 10^{-12} \le \chi \le 10^{-10}$. Для всех решенных задач сравнить вычислительные затраты, требуемые для решения СЛАУ итерационным и прямым методом.

Вариант 70: Решить одномерную гармоническую задачу в декартовых координатах, базисные функции - линейные.

3. Анализ

3.1. Постановка задачи

Дано гиперболическое уравнение в декартовой системе координат:

$$div(\lambda gradu) + \gamma u + \sigma \frac{du}{dt} + \chi \frac{d^2u}{dt^2} = f$$

3.2. Дискретизация по времени

3.3. Вариационная подстановка

3.4. Конечноэлементная дискретизация

Представим искомое решение и на интервале (\mathbf{t}_{j-3},t_j) :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{t}) = \mathbf{u}^{j-3}\eta_3^j(t) + u^{j-2}\eta_2^j(t) + u^{j-1}\eta_1^j(t) + u^{j-0}\eta_0^j(t)$$

где функции $\eta^j_{\nu}(t)$ являются базисными кубическими полиномами Лагранжа и имеют следующий вид

$$\eta_3^j(t) = \frac{(t - t_{j-2})(t - t_{j-1})(t - t_j)}{(t_{j-3} - t_{j-2})(t_{j-3} - t_{j-1})(t_{j-3} - t_j)}
\eta_2^j(t) = \frac{(t - t_{j-3})(t - t_{j-1})(t - t_j)}{(t_{j-2} - t_{j-3})(t_{j-2} - t_{j-1})(t_{j-2} - t_j)}
\eta_1^j(t) = \frac{(t - t_{j-2})(t - t_{j-2})(t - t_j)}{(t_{j-1} - t_{j-3})(t_{j-1} - t_{j-2})(t_{j-1} - t_j)}
\eta_0^j(t) = \frac{(t - t_{j-3})(t - t_{j-2})(t - t_{j-1})}{(t_j - t_{j-3})(t_j - t_{j-2})(t_j - t_{j-1})}$$

Возьмём первые и вторые производные от полиномов Лагранжа в точке $t=t_j$ (т.к. схема неявная)

| | полином Лагранжа | 1ая производная | 2ая производная |
|---------------------------|---------------------------------|--|--|
| $\eta_3^j(t)$ | $t_{02}t_{01}t_{00}$ | $-\frac{t_{01}t_{02}}{}$ | $-2 \cdot \frac{t_{01} + t_{02}}{}$ |
| 7/3(6) | $t_{23}t_{13}t_{03}$ | $t_{23}t_{13}t_{03}$ | $t_{23}t_{13}t_{03}$ |
| $\eta_2^j(t)$ | $t_{03}t_{01}t_{00}$ | $t_{01}t_{03}$ | $\frac{t_{01}+t_{03}}{2}$ |
| $\eta_2(c)$ | $\overline{t_{23}t_{12}t_{02}}$ | $\overline{t_{23}t_{12}t_{02}}$ | $t_{23}t_{12}t_{02}$ |
| $\eta_1^j(t)$ | $t_{03}t_{02}t_{00}$ | $t_{02}t_{03}$ | $-2 \cdot \frac{t_{02} + t_{03}}{}$ |
| $\eta_1(\iota)$ | $\overline{t_{13}t_{12}t_{01}}$ | $-\frac{1}{t_{13}t_{12}t_{01}}$ | $-2 \cdot {t_{13}t_{12}t_{01}}$ |
| $\eta_0^j(t)$ | $t_{03}t_{02}t_{01}$ | $t_{01}t_{02} + t_{01}t_{03} + t_{02}t_{03}$ | $2 \cdot \frac{t_{01} + t_{02} + t_{03}}{2}$ |
| $\mid \eta_0(\iota) \mid$ | $\overline{t_{03}t_{02}t_{01}}$ | $t_{03}t_{02}t_{01}$ | $t_{03}t_{02}t_{01}$ |

где:

$$t_{01} = t_0 - t_1, t_0 = t_j, t_1 = t_{j-1},$$

 $t_{02} = t_0 - t_2, t_0 = t_j, t_2 = t_{j-2},$
...

Подставим их в исходное уравнение, а затем выведем из него 4-х слойную неявную схему:

$$\left(\left[2\chi \frac{t_{01} + t_{02} + t_{03}}{t_{03}t_{02}t_{01}} + \sigma \frac{t_{01}t_{02} + t_{01}t_{03} + t_{02}t_{03}}{t_{03}t_{02}t_{01}} + \gamma \right] M + G \right) q^{j} = b^{j}
+ \left[2\chi \frac{t_{01} + t_{02}}{t_{03}t_{13}t_{23}} + \sigma \frac{t_{01}t_{02}}{t_{03}t_{13}t_{23}} \right] Mq^{j-3}
- \left[2\chi \frac{t_{01} + t_{t03}}{t_{02}t_{12}t_{23}} + \sigma \frac{t_{01}t_{t03}}{t_{02}t_{12}t_{23}} \right] Mq^{j-2}
+ \left[2\chi \frac{t_{02} + t_{03}}{t_{01}t_{12}t_{13}} + \sigma \frac{t_{02} + t_{03}}{t_{01}t_{12}t_{13}} \right] Mq^{j-1}$$

3.5. Локальные матрицы и вектора

Аналитические выражения для вычисления элементов локальных матриц:

$$G_{ij} = \int_{x_p}^{x_{p+1}} \int_{y_s}^{y_{s+1}} \lambda \left(\frac{\psi_i}{x} \frac{\psi_j}{x} + \frac{\psi_i}{y} \frac{\psi_j}{y} \right) dxdy$$

$$M_{ij}^{\gamma} = \int_{x_p}^{x_{p+1}} \int_{y_s}^{y_{s+1}} \gamma \psi_i \psi_j dxdy$$

$$b_i = \int_{x_p}^{x_{p+1}} \int_{y_s}^{y_{s+1}} f \psi_i x dy$$

$$G = \frac{\lambda}{6} \frac{h_y}{h_x} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{6} \frac{h_x}{h_y} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M = \frac{h_x h_y}{36} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$b = \frac{h_x h_y}{36} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_1 \end{pmatrix}$$

3.6. Решатели

Для решения полученных СЛАУ использовались следующие методы:

- LU-разложение
- локально-оптимальная схема
- метод бисопряжённых градиентов

4. Исследования

Проверим сходимость метода на разных функциях Равномерная сетка по пространству

Равномерная сетка по времени

| space(x,y) time(t) | 1 | t | t^2 | t^3 | t^4 | t^5 | sin(t) | e^t |
|--------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | 1.44e-16 | 2.13e-13 | 9.85e-13 | 1.39e-13 | 1.19e-03 | 3.34e-03 | 2.59e-05 | 8.82e-05 |
| x+y | 7.32e-13 | 2.93e-13 | 6.65e-13 | 5.71e-13 | 1.19e-03 | 3.34e-03 | 2.59e-05 | 8.82e-05 |
| $x^2 + y^2$ | 1.01e-12 | 3.74e-13 | 1.68e-13 | 1.69e-13 | 1.19e-03 | 3.34e-03 | 2.59e-05 | 8.82e-05 |
| $x^3 + y^3$ | 2.51e-13 | 1.56e-13 | 1.42e-13 | 2.25e-13 | 1.19e-03 | 3.34e-03 | 2.59e-05 | 8.82e-05 |
| $x^4 + y^4$ | 2.10e-04 | 2.10e-04 | 2.10e-04 | 2.10e-04 | 9.76e-04 | 3.13e-03 | 1.84e-04 | 1.22e-04 |
| $x^5 + y^5$ | 5.27e-04 | 5.27e-04 | 5.27e-04 | 5.27e-04 | 6.63e-04 | 2.82e-03 | 5.01e-04 | 4.39e-04 |
| sin(x) + sin(y) | 4.11e-06 | 4.11e-06 | 4.11e-06 | 4.11e-06 | 1.18e-03 | 3.34e-03 | 2.19e-05 | 8.41e-05 |
| $e^x + e^y$ | 1.48e-05 | 1.48e-05 | 1.48e-05 | 1.48e-05 | 1.17e-03 | 3.33e-03 | 1.12e-05 | 7.35e-05 |

Равномерная сетка по пространству Неравномерная сетка по времени

| space(x,y) time(t) | 1 | t | t^2 | t^3 | t^4 | t^5 | sin(t) | e^t |
|--------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | 4.08e-16 | 7.57e-13 | 1.57e-13 | 3.06e-13 | 2.10e-03 | 6.28e-03 | 4.85e-05 | 1.62e-04 |
| x + y | 7.37e-13 | 2.23e-13 | 4.24e-13 | 5.25e-13 | 2.10e-03 | 6.28e-03 | 4.85e-05 | 1.62e-04 |
| $x^2 + y^2$ | 1.02e-12 | 3.91e-13 | 3.04e-13 | 1.46e-13 | 2.10e-03 | 6.28e-03 | 4.85e-05 | 1.62e-04 |
| $x^{3} + y^{3}$ | 2.46e-13 | 1.84e-13 | 1.09e-13 | 1.29e-13 | 2.10e-03 | 6.28e-03 | 4.85e-05 | 1.62e-04 |
| $x^4 + y^4$ | 2.14e-04 | 2.14e-04 | 2.14e-04 | 2.14e-04 | 1.88e-03 | 6.07e-03 | 1.66e-04 | 5.52e-05 |
| $x^5 + y^5$ | 5.37e-04 | 5.37e-04 | 5.37e-04 | 5.37e-04 | 1.56e-03 | 5.75e-03 | 4.89e-04 | 3.77e-04 |
| sin(x) + sin(y) | 4.19e-06 | 4.19e-06 | 4.19e-06 | 4.19e-06 | 2.09e-03 | 6.28e-03 | 4.43e-05 | 1.58e-04 |
| $e^x + e^y$ | 1.51e-05 | 1.51e-05 | 1.51e-05 | 1.51e-05 | 2.08e-03 | 6.27e-03 | 3.35e-05 | 1.47e-04 |

Неравномерная сетка по пространству Равномерная сетка по времени

| space(x,y) time(t) | 1 | t | t^2 | t^3 | t^4 | t^5 | sin(t) | e^t |
|--------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | 2.48e-16 | 1.86e-13 | 8.64e-13 | 1.25e-13 | 1.03e-03 | 2.93e-03 | 2.27e-05 | 7.70e-05 |
| x + y | 1.13e-12 | 1.87e-13 | 2.48e-13 | 4.90e-13 | 1.03e-03 | 2.93e-03 | 2.27e-05 | 7.70e-05 |
| $x^2 + y^2$ | 2.99e-13 | 7.30e-14 | 2.06e-13 | 1.93e-13 | 1.03e-03 | 2.93e-03 | 2.27e-05 | 7.70e-05 |
| $x^3 + y^3$ | 1.49e-13 | 8.45e-14 | 2.30e-13 | 2.13e-13 | 1.03e-03 | 2.93e-03 | 2.27e-05 | 7.70e-05 |
| $x^4 + y^4$ | 3.08e-04 | 3.08e-04 | 3.08e-04 | 3.08e-04 | 7.25e-04 | 2.62e-03 | 2.85e-04 | 2.32e-04 |
| $x^5 + y^5$ | 9.57e-04 | 9.57e-04 | 9.57e-04 | 9.57e-04 | 1.98e-04 | 2.00e-03 | 9.35e-04 | 8.81e-04 |
| sin(x) + sin(y) | 7.32e-06 | 7.32e-06 | 7.32e-06 | 7.32e-06 | 1.02e-03 | 2.92e-03 | 1.56e-05 | 6.98e-05 |
| $e^x + e^y$ | 2.43e-05 | 2.43e-05 | 2.43e-05 | 2.43e-05 | 1.01e-03 | 2.90e-03 | 4.48e-06 | 5.32e-05 |

Неравномерная сетка по пространству Неравномерная сетка по времени

| space(x,y) time(t) | 1 | t | t^2 | t^3 | t^4 | t^5 | sin(t) | e^t |
|--------------------|----------|----------|-----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | 4.61e-16 | 6.48e-13 | 1.41e-13 | 2.72e-13 | 1.84e-03 | 5.56e-03 | 4.28e-05 | 1.43e-04 |
| x+y | 1.15e-12 | 1.25e-13 | 2.30e-13 | 1.64e-13 | 1.84e-03 | 5.56e-03 | 4.28e-05 | 1.43e-04 |
| $x^2 + y^2$ | 3.03e-13 | 2.17e-13 | 1.38e-13 | 1.00e-13 | 1.84e-03 | 5.56e-03 | 4.28e-05 | 1.43e-04 |
| $x^3 + y^3$ | 1.32e-13 | 1.18e-13 | 1.67e-13 | 2.19e-13 | 1.84e-03 | 5.56e-03 | 4.28e-05 | 1.43e-04 |
| $x^4 + y^4$ | 3.15e-04 | 3.15e-04 | 3.15e-04 | 3.15e-04 | 1.53e-03 | 5.24e-03 | 2.73e-04 | 1.76e-04 |
| $x^5 + y^5$ | 9.82e-04 | 9.82e-04 | 9.82e-04 | 9.82e-04 | 8.94e-04 | 4.60e-03 | 9.40e-04 | 8.43e-04 |
| sin(x) + sin(y) | 7.52e-06 | 7.52e-06 | 7.52e-06 | 7.52e-06 | 1.84e-03 | 5.55e-03 | 3.55e-05 | 1.35e-04 |
| $e^x + e^y$ | 2.50e-05 | 2.50e-05 | 2.50 e-05 | 2.50e-05 | 1.82e-03 | 5.53e-03 | 1.89e-05 | 1.18e-04 |

4.1. Вывод

Если порядок полинома по пространству не превышает порядка используемых базисных функций, а порядок полинома по времени не соответсвует порядку точности используемой временной схемы, то получаемое численное решение должно полностью совпадать с точным решением задачи.

5. Исходный код программы