1 Условия

1.1 Дано

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{1}{m}\left[p_i S_i - p_j S_j - \nu v\right] \\ \dfrac{\partial x}{\partial t} = v \\ \dfrac{\partial p_i}{\partial t} = \dfrac{q_i - S_i v}{k} \end{cases}$$

$$q_i = 10^{-3}, \quad p_j = 10^5$$

$$x(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad p_i(0) = 10^5$$

1.2 Упрощение

Проинтегрируем p_i по времени, избавимся от константы, используя начальные значения, и получим это:

$$p_i = \frac{q_i t - S_i x}{k} + 10^5$$

Тогда подставим это в первое уравнение и получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{1}{m}\left[\dfrac{q_i t - S_i x}{k} S_i + 10^5 S_i - p_j S_j - \nu v\right] \\ \dfrac{\partial x}{\partial t} = v \\ p_i = \dfrac{q_i t - S_i x}{k} + 10^5 \end{cases}$$

Последовательностью преобразований упростим дифференциальное уравнение со скоростью:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{m}\left[\frac{q_i t - S_i x}{k} S_i + 10^5 S_i - p_j S_j - \nu v\right]$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = t\underbrace{\frac{q_i S_i}{mk}}_{a} - x\underbrace{\frac{S_i^2}{mk}}_{b} - v\underbrace{\frac{\nu}{m}}_{c} - \underbrace{\frac{p_j S_j - 10^5 S_i}{m}}_{d}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = ta - xb - vc - d$$

Тогда изначальная система уравнений сводится к этому:

$$\begin{cases} a = \dfrac{q_i S_i}{mk}, \quad b = \dfrac{S_i^2}{mk}, \quad c = \dfrac{\nu}{m}, \quad d = \dfrac{p_j S_j - 10^5 S_i}{m} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = ta - xb - vc - d \\ \dfrac{\partial x}{\partial t} = v \\ p_i = \dfrac{q_i t - S_i x}{k} + 10^5 \end{cases}$$

2 Численное решение

2.1 Адаптация для численных методов

Так как для решения ОДУ используются предыдущие y_n и текущее значение y_{n+1}, то введем такие обозначения для упрощения формул:

$$\begin{aligned} &t = t_n, && t_1 = t_{n+1} = t + h \\ &y = y_n = y(t_n), && y_1 = y_{n+1} = y(t_{n+1}) \end{aligned}$$

В конкретно нашем случае обозначения будут такие:

$$\begin{aligned} &t = t_n, && t_1 = t_{n+1} \\ &v = v_n = v(t_n), && v_1 = v_{n+1} = v(t_{n+1}) \\ &x = x_n = x(t_n), && x_1 = x_{n+1} = x(t_{n+1}) \end{aligned}$$

Методы численного решения ОДУ у нас описаны для уравнений вида $y' = f(t, y)$, тогда приведем условия к этому виду:

$$\begin{aligned} &v' = f_v(t, v) \\ &f_v(t, v) = ta - x(t)b - vc - d \\ \\ &x' = f_x(t, x) \\ &f_x(t, x) = v(t) \end{aligned}$$

2.2 Явный метод Эйлера

Явный метод Эйлера реализуется таким образом:

$$\begin{gathered} \frac{\partial y}{\partial t} = f(t, y) \\ y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \end{gathered}$$

Тогда формулы для нахождения v_1 и x_1 согласно этому методу будут такие:

$$\begin{aligned} &v_1 = v + hf_v(t, v) = v + h\underbrace{(ta - xb - vc - d)}_{y} \\ &x_1 = x + hf_x(t, x) = x + hv \end{aligned}$$

Эти формулы могут быть легко использованы в программе для нахождения следующего значения:

$$\begin{cases} a = \dfrac{q_i S_i}{mk}, \quad b = \dfrac{S_i^2}{mk}, \quad c = \dfrac{\nu}{m}, \quad d = \dfrac{p_j S_j - 10^5 S_i}{m} \\ y = ta - xb - vc - d \\ v_1 = v + hy \\ x_1 = x + hv \\ p_1 = \dfrac{q_i t_1 - S_i x_1}{k} \end{cases}$$

2.3 Модифицированный метод Эйлера

Модифицированный метод Эйлера реализуется таким образом:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = f(t, y)$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_n + hf(t_n, y_n))\right]$$

Тогда формулы для нахождения v_1 и x_1 согласно этому методу будут такие:

$$v_1 = v + \frac{h}{2}\left[f_v(t, v) + f_v(t_1, v + hf_v(t, v))\right]$$
$$x_1 = x + \frac{h}{2}\left[f_x(t, x) + f_x(t_1, x + hf_x(t, x))\right]$$

Подставляем функцию f_v сначала в формулу для нахождения v_1:

$$v_1 = v + \frac{h}{2}\left[f_v(t, v) + f_v(t_1, v + hf_v(t, v))\right]$$
$$v_1 = v + \frac{h}{2}\left[\underbrace{(ta - xb - vc - d)}_{y} + f_v(t_1, v + h\underbrace{(ta - xb - vc - d)}_{y})\right]$$
$$v_1 = v + \frac{h}{2}\left[y + (t_1 a - x_1 b - (v + hy)c - d))\right]$$

Аналогично поступаем с x_1:

$$x_1 = x + \frac{h}{2}\left[f_x(t, x) + f_x(t_1, x + hf_x(t, x))\right]$$
$$x_1 = x + \frac{h}{2}\left[v + f_x(t_1, x + hv)\right]$$
$$x_1 = x + \frac{h}{2}\left[v + v_1\right]$$

В итоге получаются такие формулы:

$$\begin{cases} y = ta - xb - vc - d \\ v_1 = v + \frac{h}{2}\left[y + (t_1 a - x_1 b - (v + hy)c - d)\right] \\ x_1 = x + \frac{h}{2}\left[v + v_1\right] \end{cases}$$

Но их проблема заключается в том, что v_1 зависит от x_1, а он в свою очередь зависит от v_1. Получается надо решить систему уравнений относительно v_1 и x_1. Воспользуемся командой в программе wxMaxima:

```
solve([v1 = v + h/2 * (y + (t1*a - x1*b - (v + h*y)*c - d)),
       x1 = x + h/2 * (v + v1)], [v1, x1]);
```

Программа выдала такое решение:

$$\begin{cases} v_1 = -\dfrac{(2c\,h^2 - 2h)\,y + h\,(2bx + 2d) + (b\,h^2 + 2ch - 4)\,v - 2ah\,t_1}{b\,h^2 + 4}, \\ x_1 = -\dfrac{(c\,h^3 - h^2)\,y - 4x + (c\,h^2 - 4h)\,v - a\,h^2\,t_1 + d\,h^2}{b\,h^2 + 4} \end{cases}$$

После небольших преобразований итоговое решение для модифицированного метода Эйлера выглядит так:

$$
\begin{cases}
a = \dfrac{q_i S_i}{mk}, \quad b = \dfrac{S_i^2}{mk}, \quad c = \dfrac{\nu}{m}, \quad d = \dfrac{p_j S_j - 10^5 S_i}{m} \\
y = ta - xb - vc - d \\
v_1 = -\dfrac{2yh(ch-1) + 2h(bx+d) + v(bh^2 + 2ch - 4) - 2aht_1}{bh^2+4} \\
x_1 = x + \dfrac{h}{2}\left[v + v_1\right] \\
p_1 = \dfrac{q_i t_1 - S_i x_1}{k}
\end{cases}
$$