0.1. Warning

NOTE: этот документ предоставляется как есть и вы используете его на свой страх и риск.

1. Лабораторная работа №1

1.1. Задание

Численно решить ОДУ, построив таблицы с шагом h $\in \{0.1, 0.01, 0.001\}$:
$y' = 2ty, \quad y(0) = 1, \quad t \in [0, 1]$

1.2. Методы

Дано уравнение $\frac{\partial y}{\partial t} = f(t,\ y)$, где $y = y(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, t — свободная переменная. Тогда его можно решить численно с помощью следующих методов.

Примечание: эти методы справедлимы и для систем однородных дифференциальных уравнений. Тогда вместо y будет вектор размерности n, а функция должна иметь следующий вид: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Например, для данной системы, y и f будут равны:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial t} = x_1^2 + x_2^2 - 4tx_1x_2 \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial t} = 3(x_1 - t)(x_2 + t) \end{cases} \Rightarrow \quad y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ f(t,\ y) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 4tx_1x_2 \\ 3(x_1 - t)(x_2 + t) \end{pmatrix}$$

Обозначения:
t_0 — точка начала.
h — шаг.
$t_n = t_0 + hn$
$y_n \approx y(t_n)$

1.2.1. Метод Эйлера (явный)

$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n)$

1.2.2. Модифицированнй метод Эйлера

$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \cdot [f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_n + h \cdot f(t_n, y_n))]$

1.2.3. Метод Рунге-Кутты 4-го порядка

$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} \cdot [k_n^1 + 2k_n^2 + 2k_n^3 + k_n^4]$
$k_n^1 = f(t_n, y_n)$
$k_n^2 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_n^1)$
$k_n^3 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_n^2)$
$k_n^4 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + hk_n^3)$

2. Лабораторная работа №2

2.1. Задание

Проинтегрировать и построить графики координаты x, скорости и давления
с шагом h $\in \{0.1, 0.01, 0.001\}$:

2.2. Формулы

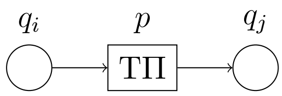
$v' = \frac{1}{m}[p_i S_i - p_j S_j - \nu \cdot |v| \cdot \operatorname{sign} v]$
$x' = v$
$p_i' = \frac{q_i - S_i v}{K^{\text{Упр.}}}, \qquad p_j' = \frac{S_j v - q_j}{K^{\text{Упр.}}}$

2.3. Данные и начальные условия

Насос постоянного расхода: $q_i = 1\,\frac{\text{м}}{\text{с}} = 10^{-3}\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$
$P_j = 10^5$ Па. (атм. давление)
$x(0) = 0$
$V(0) = 0$
$P(0) = 10^5$ Па.

3. Лабораторная работа №3

3.1. Схема работы трубопровода



Справа и слева есть расход воды q_i и q_j соответственно, давление внутри трубы p зависит от этих расходов по следующим формулам:

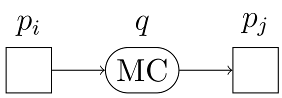
$$\frac{\partial p}{\partial t} = \Phi(q_i - q_j,\ p)$$

$$\Phi(q_{ij},\ p) = \begin{cases} \dfrac{p^{\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)} q_{ij}}{C_{cav}}, & \begin{array}{c} 0 < p \leqslant p_{\text{Атм.}} \\ \text{и } q_{ij} < 0 \end{array}, \\ \dfrac{-q_{ij}}{C}, & \text{иначе} \end{cases}$$

3.1.1. Константы

1. $E_s = \rho(\rho_{swd})^2 \approx 1260000$ — модуль жесткости воды.
2. $C = \frac{V}{E_s}$ — жесткость воды.
3. $C_{cav} = 10^{\frac{5}{\gamma}} \frac{V}{\gamma}$ — жесткость воды при кавитации.
4. $\gamma = 1.4$
5. $p_{\text{Атм.}} = 10^5$ — атмосферное давление.

3.2. Схема работы местного сопротивления



Справа и слева от местного сопротивления есть давление p_i и p_j соответственно, расход от местного сопротивления q вычисляется по следующим формулам:

$$q' = G(p_i - p_j - P_\alpha(q),\ q)$$

$$P_\alpha(q) = \begin{cases} rq, & Re^{mult} \cdot |q| < Re^{crt} \\ r_{æ}|q|^{æ} \operatorname{sign}(q), & \text{иначе} \end{cases}$$

$$G(dp,\ q) = B\sqrt{|dp|}\left(F\sqrt{\left|\frac{dp}{\xi}\right|}^{3} \operatorname{sign}(dp) - q\right)$$

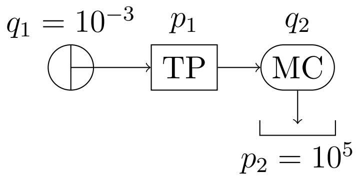
3.2.1. Константы

1. $\mathrm{Nu} = \begin{cases} 10^{-6}, & \text{вода} \\ 3.5 \cdot 10^{-5}, & \text{масло} \end{cases}$ - число Нуссельта
2. $\rho = \begin{cases} 997 \dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3}, & \text{вода} \\ 905 \dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3}, & \text{масло} \end{cases}$ - плотность жидкости
3. $æ = 1.75$
4. $Re^{crt} = 321$ - число Рейнольдса.
5. $Re^{mult} = \frac{dH}{\mathrm{Nu} \cdot S}$ - число Рейнольдса.
6. $r = \frac{12 g \nu l}{(dH)^2 S}$
7. $r_{æ} = \frac{0.1582 g \nu^{0.25} l}{(dH)^{1.35} S^{1.75}}$
8. $B = \frac{1}{l\sqrt{2\rho}}$
9. $F = S\sqrt{2\rho}$
10. $\xi = 0.5 \cdot 0.035 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{\mathrm{eps}(1)} - 1\right)^2 = 0.0192$
11. $\mathrm{eps}(x) = 0.57 + 0.043(1.1 - x)$
12. $d \approx 2\text{см}$
13. $dH = \frac{4S}{\pi d}$

3.3. Простейшая схема из трубопровода и местного сопротивления

Описание схемы: вода подается из насоса и сливается, проходя через трубопровод.

Рисунок:



Обозначения:

q_1 - расход насоса.
$p_1(t)$ - давление внутри трубы.
$q_2(t)$ - расход на местном сопротивлении.
p_2 - атмосферное давление слива.

Система ОДУ:

$$\begin{cases} p_1' = \Phi(q_1 - q_2,\ p_1) \\ q_2' = G(p_1 - p_2 - P_\alpha(q_2),\ q_2) \end{cases}$$

Начальные условия:

$$\begin{cases} p_1(0) = p_2 \\ q_2(0) = 0 \end{cases}$$

График давления в трубе p_1:
(смещено на -10^5 по вертикали)

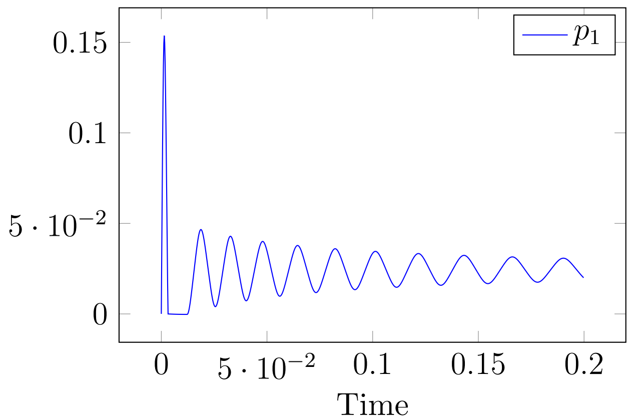
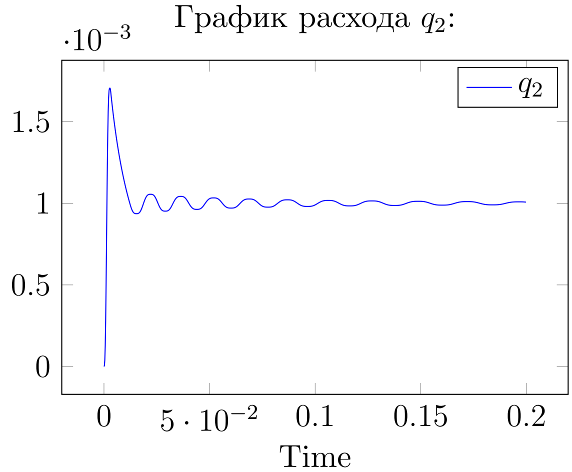


График расхода q_2:



3.4. Метод работы перегородки

$x(t)$
$x^k, x^{k+1}, x^{k+2}, \dots$
$x^k < x_{\text{окр.}} \land x^{k+1} > x_{\text{окр.}}$

1. Уменьшаем ${}^{ht}\!/_2$.
2. Мы могли попасть справа или слева $x_{\text{окр.}}$
3. Уменшаем пока x не окажется слева.
4. Остановиться, когда подходим на расстояние $\Delta\delta = 10^{-6}$м, тогда $x = x_{\text{окр.}}$, $v = 0$.