PARCIAL #1: SEÑALES Y SISTEMAS

DESARROLLO TEORICO

PRESENTADO POR:

Janer Estiven Leon Calderon

Jaleonca@unal.edu.co

PROFESOR

Andres Marino Alvarez Meza

Amalvarezme@unal.edu.co

Viernes 15 de Mayo

Universidad Nacional de Colombia

Sede Manizales

Facultad de ingeniería y arquitectura

Departamento de ingeniería eléctrica y electrónica

2025

① Desglosamos la solución en pasos.

1. Análisis de la señal:

Sea $x(t) = 20\sin(7t - \frac{\pi}{2}) - 3\cos(5t) + 2\cos(10t)$

- Frecuencias:

- $f_1 = \frac{7}{2\pi}$
- $f_3 = \frac{10}{2\pi}$
- $f_2 = \frac{5}{2\pi}$

$\Rightarrow \boxed{f = \frac{\omega}{2\pi}}$

$\Downarrow$

El periodo fundamental "T_0" es el M.C.M de los periodos individuales

2. Determinar el periodo de la señal:

Sea $M.C.D(5,7,10) = \underline{35}$

$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\frac{1}{2\pi}}{M.C.D(5,7,10)} = \frac{\frac{1}{2\pi}}{35} = \frac{35}{2\pi} \Rightarrow \boxed{T_0 = \frac{2\pi}{35}}$

Dos periodos:

$2T_0 = \frac{4\pi}{35} \approx 0.354\,s$

3. Muestreo de la señal: (Teorema de Nyquist).

- Frecuencia máxima en la señal: $f_{max} = \frac{10}{2\pi} \approx 1.59\,Hz$
- $f_s > 2f_{max} \Rightarrow \boxed{f_s > 3.18\,Hz}$

4. Acondicionamiento de la señal (escalado):

- Microprocesador: $-3.3V$ a $5V$
- Señal original: $X_{max} \approx 20+3+2 = 25$, $X_{min} \approx -20-3-2 = -25$

Proceso:

- Normalizamos la señal entre -1 y 1:

$X_{norm}(t) = \frac{x(t)}{25}$

- Escalamos al rango -3.3 a $5V$

Rango total: $R = 5-(-3.3) = 8.3$

- Mapeamos de $[-1,1]$ a $[-3.3, 5]$

$X_{cond}(t) = \frac{8.3}{2} X_{norm}(t) + \frac{5+(-3.3)}{2}$

$= \boxed{4.15 \cdot X_{norm}(t) + 0.85}$

5. Cuantización (5 bits)

- $2^5 = 32$ niveles
- Resolución (step size):

$$\Delta = \frac{5-(-3.3)}{32} = \frac{8.3}{32} \approx 0.2594\ V$$

6. Simulación en Python:

- Esto se encuentra en el cuaderno de Collab.

2) Nuevamente desglosamos la solución en pasos:

Sea $x(t) = 3\cos(1000\pi t) + 5\operatorname{sen}(2000\pi t) + 10\cos(11000\pi t)$

1. Identificamos las frecuencias:

- $f_1 = \frac{1000\pi}{2\pi} = 500\,Hz$
- $f_3 = \frac{11000\pi}{2\pi} = 5500\,Hz$
- $f_2 = \frac{2000\pi}{2\pi} = 1000\,Hz$

2. Comprobamos teorema de Nyquist: $f_s > 2f_{max}$

$$\left.\begin{array}{l} f_{max} = 5500\,Hz \\ f_s = 5000\,Hz \end{array}\right\} f_{max} > f_s \quad X \Rightarrow \text{Aliasing}$$

3. Para evitar aliasing:

- $f_s > 2 \cdot 5500 = 11000\,Hz$

$\Downarrow$

$f_s = 12\,KHz$ o más

4. Simulación en Python

- Ver el cuaderno

Nota: No se implementó cuantización puesto que no se pedía hacer esto de forma explícita.

3) Sean $x_1(t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$, $x_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le t < \frac{T}{4} \\ -1 & \text{si } \frac{T}{4} \le t < \frac{3T}{4} \\ 1 & \text{si } \frac{3T}{4} \le t < T \end{cases}$

y $d(x_1,x_2) = \frac{1}{T}\int_0^T |x_1(t) - x_2(t)|^2\,dt$

$$\Rightarrow \int_0^T |x_1(t)-x_2(t)|^2\,dt = \int_0^{T/4} (A\cos(w_0 t) - 1)^2\,dt + \int_{T/4}^{3T/4} (A\cos(w_0 t) + 1)^2\,dt + \int_{3T/4}^{T} (A\cos(w_0 t) - 1)^2\,dt$$

$$= \int_0^{T/4} \left(A^2\cos^2(w_0t) - 2A\cos(w_0t) + 1\right) dt + \int_{T/4}^{3T/4} \left(A^2\cos^2(w_0t) + 2A\cos(w_0t) + 1\right) dt + \int_{3T/4}^{T} \left(A^2\cos^2(w_0t) - 2A\cos(w_0t) + 1\right) dt$$

$$= \underbrace{\int_0^{T/4} A^2\left(\frac{1+\cos(2w_0t)}{2}\right) - 2A\cos(w_0t) + 1 \, dt}_{I_1} + \underbrace{\int_{T/4}^{3T/4} \left(A^2\left(\frac{1+\cos(2w_0t)}{2}\right) + 2A\cos(w_0t) + 1\right) dt}_{I_2} + \underbrace{\int_{3T/4}^{T} A^2\left(\frac{1+\cos(2w_0t)}{2}\right) - 2A\cos(w_0t) + 1 \, dt}_{I_3}$$

$$I_1 = \frac{1}{2}A^2 \int_0^{T/4} 1 + \cos(2w_0t)\, dt - 2A\int_0^{T/4} \cos(w_0t)\, dt + \int_0^{T/4} dt$$

$$= \frac{1}{2}A^2\left(t\Big|_0^{T/4} + \left[\frac{\text{sen}(2w_0t)}{2w_0}\right]_0^{T/4}\right) - 2A\left[\frac{\text{sen}(w_0t)}{w_0}\right]_0^{T/4} + t\Big|_0^{T/4}$$

$$= \frac{1}{2}A^2\left[\frac{T}{4} + \frac{\text{sen}(2w_0 \frac{T}{4})}{2w_0}\right] - 2A\left[\frac{\text{sen}(w_0\frac{T}{4})}{w_0}\right] + \frac{T}{4} \qquad w_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$= \frac{1}{2}A^2\left[\frac{T}{4} + \frac{\text{sen}(\frac{4\pi}{T}\cdot\frac{T}{4})}{2w_0}\right] - 2A\left[\frac{\text{sen}(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4})}{w_0}\right] + \frac{T}{4}$$

$$= \frac{1}{2}A^2\left[\frac{T}{4} + \frac{\text{sen}(\pi)}{2w_0}\right] - 2A\left[\frac{\text{sen}(\frac{\pi}{2})}{\frac{2\pi}{T}}\right] + \frac{T}{4}$$

$$= A^2\cdot\frac{T}{8} - 2A\cdot\frac{T}{2\pi} + \frac{T}{4}$$

$$= A^2\cdot\frac{T}{8} - \frac{AT}{\pi} + \frac{T}{4} \Rightarrow I_1$$

$$I_2 = \frac{1}{2}A^2\int_{T/4}^{3T/4} 1 + \cos(2w_0t) + 2A\int_{T/4}^{3T/4}\cos(w_0t) + \int_{T/4}^{3T/4} dt$$

$$= \frac{1}{2}A^2\left(t\Big|_{T/4}^{3T/4} + \left[\frac{\text{sen}(2w_0t)}{2w_0}\right]_{T/4}^{3T/4}\right) + 2A\left[\frac{\text{sen}(w_0t)}{w_0}\right]_{T/4}^{3T/4} + t\Big|_{T/4}^{3T/4}$$

$$= \frac{1}{2}A^2\left(\left[\frac{3T}{4} - \frac{T}{4}\right] + \frac{\text{sen}(\frac{4\pi}{T}\cdot\frac{3T}{4}) - \text{sen}(\frac{4\pi}{T}\cdot\frac{T}{4})}{\frac{4\pi}{T}}\right) + 2A\left[\frac{\text{sen}(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{3T}{4}) - \text{sen}(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{4})}{\frac{2\pi}{T}}\right] + \left[\frac{3T}{4} - \frac{T}{4}\right]$$

$$= \frac{1}{2}A^2\left(\frac{T}{2} + \frac{\text{sen}(3\pi) - \text{sen}\,\pi}{\frac{4\pi}{T}}\right) + 2A\left(\frac{\text{sen}(\frac{3\pi}{2}) - \text{sen}(\frac{\pi}{2})}{\frac{2\pi}{T}}\right) + \frac{T}{2}$$

$$= A^2\cdot\frac{T}{4} + 2A\left(\frac{-1-1}{\frac{2\pi}{T}}\right) + \frac{T}{2}$$

$$= A^2\cdot\frac{T}{4} - 2A\cdot\frac{T}{\pi} + \frac{T}{2} \Rightarrow I_2$$

$$I_3 = \frac{1}{2}A^2\int_{3T/4}^{T} 1 + \cos(2w_0t)\, dt - 2A\int_{3T/4}^{T}\cos(w_0t)\, dt + \int_{3T/4}^{T} dt$$

$$= \frac{1}{2}A^2\left(t\Big|_{3T/4}^{T} + \left[\frac{\text{sen}(2w_0t)}{2w_0}\right]_{3T/4}^{T}\right) - 2A\left[\frac{\text{sen}(w_0t)}{w_0}\right]_{3T/4}^{T} + t\Big|_{3T/4}^{T}$$

$$= \frac{1}{2}A^2\left(\left[T - \frac{3T}{4}\right] + \frac{\text{sen}(\frac{4\pi}{T}\cdot T) - \text{sen}(\frac{4\pi}{T}\cdot\frac{3T}{4})}{\frac{4\pi}{T}}\right) - 2A\left(\frac{\text{sen}(\frac{2\pi}{T}\cdot T) - \text{sen}(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{3T}{4})}{\frac{2\pi}{T}}\right) + \left[T - \frac{3T}{4}\right]$$

$$= \frac{1}{2}A^2\left(\frac{T}{4} + \frac{\text{sen}(4\pi) - \text{sen}(3\pi)}{\frac{4\pi}{T}}\right) - 2A\left(\frac{\text{sen}(2\pi) - \text{sen}(\frac{3\pi}{2})}{\frac{2\pi}{T}}\right) + \frac{T}{4}$$

$$= A^2\cdot\frac{T}{8} - 2A\left(\frac{1}{\frac{2\pi}{T}}\right) + \frac{T}{4}$$

$$= A^2\cdot\frac{T}{8} - A\cdot\frac{T}{\pi} + \frac{T}{4} \Rightarrow I_3$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$= A^2\cdot\frac{T}{8} - \frac{AT}{\pi} + \frac{T}{4} + A^2\cdot\frac{T}{4} - \frac{2AT}{\pi} + \frac{T}{2} + A^2\cdot\frac{T}{8} - \frac{AT}{\pi} + \frac{T}{4}$$

$$= \frac{A^2T}{2} - \frac{4AT}{\pi} + T$$

$$d(x_1,x_2) = \frac{1}{\cancel{T}}\left(\frac{A^2\cancel{T}}{2} - \frac{4A\cancel{T}}{\pi} + \cancel{T}\right)$$

$$d(x_1,x_2) = \frac{A^2}{2} - \frac{4A}{\pi} + 1$$

④ Desglosamos en pasos

1. Demostración del coeficiente c_n

Sea $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jnw_0t} \Rightarrow x''(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -n^2 w_0^2 c_n e^{jnw_0t} \Rightarrow [*\int e^{-jmw_0t}]$

$$\Rightarrow \int_{t_i}^{t_f} x''(t) e^{-jmw_0t} = \sum_n -n^2 w_0^2 c_n \int_{t_i}^{t_f} e^{j(n-m)w_0t} dt$$

$\Rightarrow$ Por ortogonalidad de series complejas:

$$\int_{t_i}^{t_f} e^{j(n-m)w_0t} dt = \begin{cases} (t_f - t_i), & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{t_i}^{t_f} x''(t) e^{-jmw_0t} dt = -m^2 w_0^2 c_m (t_f - t_i)$$

$$\Rightarrow c_m = \frac{1}{(t_f - t_i) m^2 w_0^2} \int_{t_i}^{t_f} x''(t) e^{-jmw_0t} dt$$

2. Relación con a_n, b_n

Sean: $c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$ para $n > 0$ y $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n)$

Entonces:

- $a_n = c_n + c_{-n}$
- $b_n = j(c_n - c_{-n})$

3. Espectro de Fourier

Sea $x(t) = \begin{cases} 0, & |t| \in (\frac{T}{2}, d_2) \\ -\frac{A}{d_2 - d_1}(|t| - d_2), & |t| \in (d_1, d_2) \\ -A, & |t| \leq d_1 \end{cases}$

$x''(t) = \begin{cases} 0, & |t| \in (\frac{T}{2}, d_2) \\ 0, & |t| \in (d_1, d_2) \\ 0, & |t| \leq d_1 \end{cases} \Rightarrow$ Solo contribuciones no-nulas donde la pendiente cambia abruptamente ($\pm d_1, \pm d_2$).

$x''(t)$ = Suma de deltas

- En los puntos de cambio en la pendiente hay un salto en la derivada
- Cada salto se representa como "δ" escalada

$$x''(t) = \sum_i \Delta x'(t_i) \cdot \delta(t - t_i)$$

$\Rightarrow$ Sea $c_n = \frac{1}{T n^2 w_0^2} \int_{-T/2}^{T/2} x''(t) e^{-jnw_0t} dt \Rightarrow$ Como $x''(t)$ está formada por deltas.

$$x''(t) = \sum_k \alpha_k \delta(t - t_k) \Rightarrow \int x''(t) e^{-jnw_0t} dt = \sum_k \alpha_k e^{-jnw_0t_k}$$

$$C_n = \frac{1}{T_n^2 w_0^2} \sum_k \alpha_k e^{-jnw_0 t_k}$$

Ahora hallemos los valores de α_k

Punto	Izq	Der	Cambio en $x'(t)$
$-d_2$	0	$\frac{A}{d_2-d_1}$	$\frac{A}{d_2-d_1}$
$-d_1$	$\frac{A}{d_2-d_1}$	0	$-\frac{A}{d_2-d_1}$
d_1	0	$-\frac{A}{d_2-d_1}$	$-\frac{A}{d_2-d_1}$
d_2	$-\frac{A}{d_2-d_1}$	0	$\frac{A}{d_2-d_1}$

$$\Rightarrow x''(t) = \frac{A}{d_2-d_1}[\delta(t+d_2) - \delta(t+d_1) - \delta(t-d_1) + \delta(t-d_2)]$$

Como $\int \delta(t-t_k) f(t)\, dt = f(t_k)$

$$C_n = \frac{1}{T_n^2 w_0^2} \sum_k \Delta x'(t_k) \cdot e^{-jnw_0 t_k}$$

$$C_n = \frac{1}{T_n^2 w_0^2} \cdot \frac{A}{d_2-d_1}[e^{-jnw_0(-d_2)} - e^{-jnw_0(-d_1)} - e^{-jnw_0 d_1} + e^{-jnw_0 d_2}]$$

$$= \frac{A}{T_n^2 w_0^2 (d_2-d_1)}[e^{jnw_0 d_2} - e^{jnw_0 d_1} - e^{-jnw_0 d_1} + e^{-jnw_0 d_2}]$$

y como $e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos\theta$

$$C_n = \frac{2A}{T_n^2 w_0^2 (d_2-d_1)}[\cos(nw_0 d_2) - \cos(nw_0 d_1)]$$

$Im\{C_n\} = 0$ $\quad$ $Re\{C_n\} = C_n$

4. Fase:

donde $\theta_n = \arctan\left(\frac{Im\{C_n\}}{Re\{C_n\}}\right)$

- Si $C_n > 0$:

  $\theta_n = \arctan(0)$

  0

- Si $C_n < 0$:

  $\theta_n = \pi$

- Si $C_n = 0$: Indefinido

$$\Rightarrow \theta_n = \begin{cases} 0 & , C_n > 0 \\ \pi & , C_n < 0 \\ \text{indefinido} & , C_n = 0 \end{cases}$$

5. Error relativo:

Con $A = 1$ $\quad$ $w_0 = 2\pi$ $\quad$ $d_2 = 0.5$

$T = 1$ $\quad$ $d_1 = 0.25$ $\quad$ $\Rightarrow$ Datos calculados observamos la gráfica

Error $r = \dfrac{\|x(t) - x_{rec}(t)\|_2}{\|x(t)\|_2}$

. Por ortogonalidad de las exponenciales de Fourier se tiene

$$\|x(t) - x_{rec}(t)\|_2^2 = \sum_{|n|>N} |c_n|^2 \cdot T$$

. Y la energía total de $x(t)$:

$$\|x(t)\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \cdot T$$

Error $r = \sqrt{\dfrac{\sum_{|n|>N} |c_n|^2}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2}}$ $\Rightarrow$. Parte usada $P_N = \sum_{n=1}^{5} |c_n|^2$. Parte omitida $R = \sum_{n=6}^{\infty} |c_n|^2$ $\Bigg\}\ \sqrt{\dfrac{R}{P_N + R}}$

Tenemos que:

$$c_n = \frac{1}{2\pi^2 n^2}\left[\cos(n\pi) - \cos(n\pi/2)\right]$$

. $|c_1|^2 \approx (0,0161)^2 = 2.54 \times 10^{-4}$. $|c_4|^2 = 0$

. $|c_2|^2 \approx (0.0253)^2 = 6.38 \times 10^{-4}$. $|c_5|^2 \approx (0.0006)^2 = 3.84 \times 10^{-7}$

. $|c_3|^2 \approx (0.0055)^2 = 3.13 \times 10^{-5}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{5} |c_n|^2 \approx 0.000928$$

Resto de la energía: Usamos que para $n \geq 6$, el cos oscila entre ± 1 y decrece como $\frac{1}{n^4}$:

$$|c_n| \leq \frac{2}{2\pi^2 n^2} = \frac{1}{\pi^2 n^2} \Rightarrow |c_n|^2 \leq \frac{1}{\pi^4 n^4} \Rightarrow \text{Cota superior del error}$$

$\rightarrow$ caso peor

Entonces:

$$\sum_{n=6}^{\infty} |c_n|^2 \leq \sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{\pi^4 n^4} = \frac{1}{\pi^4} \sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

Sabemos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \quad y \quad \sum_{n=1}^{5} \frac{1}{n^4} \approx 1.0803$$

$$\sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{n^4} \approx \frac{\pi^4}{90} - 1.0803 \approx 0.002 \Rightarrow \sum_{n=6}^{\infty} |c_n|^2 \leq \frac{0.002}{\pi^4} \approx 2.05 \times 10^{-5}$$

Finalmente:

$$\text{Error } r = \sqrt{\frac{2.05 \times 10^{-5}}{0.000928 + 2.05 \times 10^{-5}}} \approx 0.147$$

$\Rightarrow$ 14.7%