



## Faculté de Mathématiques

Département d'Algèbre et Théorie des Nombres.

# Mémoire

En vue de l'obtention du Diplôme de MASTER  
Mathématiques Et Applications

## Thème

*Sur Le Théorème D'Arnold-Liouville En Mécanique Hamiltonienne*

Présenté par : OUNANE Mohamed El Farouk

BENKAHLA Ahmed

Soutenu le ..... Septembre 2021, devant le jury composé de :

Président : REZAOUI Mohamed Salem, USTHB

Rapporteur : ABBACI Brahim, USTHB

Examineur : BEHLOUL Djilali, USTHB

Code Mémoire : ..../MA/21

---

## Résumé

Nous nous intéressons aux systèmes hamiltoniens complètement intégrables. Le chapitre 1 est consacré à un bref rappel de certaines notions de géométrie différentielle. Au chapitre 2 on introduit les notions de base de la géométrie symplectique. Le chapitre 3 est dédié à la mécanique hamiltonienne, on y démontre le théorème d'Arnold-Liouville. Au chapitre 6 on applique les outils de la mécanique hamiltonienne précédemment introduite à l'étude des flots géodésiques sur les variétés riemanniennes.

# Remerciements

Avant tout, nous remercions Allah le tout puissant qui nous a donné la force, la volonté et la patience pour accomplir ce travail.

Nous remercions chaleureusement notre encadreur Dr. ABBACI Brahim pour ses conseils et ses enseignements.

Nous remercions enfin nos familles et nos amis ainsi que tout ceux qui nous ont soutenu lors de la rédaction de ce mémoire.

# Notations

$\delta_{i,j}$	Delta de Kronecker
$D_x f$	Différentielle de $f$ au point $x$
$\text{Vect}(e_1, e_2, \dots)$	Sous-espace vectoriel engendré par $e_1, e_2, \dots$
$\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$	Espace vectoriel des applications $\mathbb{R}$ -linéaires de $V$ vers $W$
$V^\perp$	Orthogonal de $V$
$V^\star$	Espace dual de $V$
$S_k$	Groupe symétrique d'ordre $k!$
$\mathfrak{S}(E)$	Groupe Symétrique de $E$
$\langle g_1, g_2, \dots \rangle$	Sous-groupe engendré par $g_1, g_2, \dots$
$\mathcal{O}_x$	Orbite de $x$
$\mathbf{St}_x$	Stabilisateur de $x$
$A \times B$	Produit cartésien de $A$ et $B$
$u \times v$	Produit vectoriel de $u$ et $v$
$\ u\ $	Norme euclidienne de $u$
$\cong$	Difféomorphe
$\text{Id}_M$	L'application identité sur $M$
$[\alpha]$	Classe d'équivalence de $\alpha$

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Préambule : Variétés Lisses</b>	<b>6</b>
1.1	Variétés Lisses . . . . .	6
1.2	Espaces Tangent Et Cotangent . . . . .	8
1.3	Sous-Variétés . . . . .	11
1.4	Formes Multi-Linéaires Alternées . . . . .	12
1.5	Fibrés Vectoriels . . . . .	14
1.6	Sections De Fibré Vectoriel . . . . .	16
1.6.1	Dérivée Extérieure . . . . .	17
1.6.2	Intégration Des Formes Différentielles . . . . .	18
1.7	Groupes De Lie . . . . .	20
1.8	Flot D'un Champ De Vecteurs . . . . .	22
1.9	Cohomologie De Rham et Homotopie . . . . .	25
<b>2</b>	<b>Variétés Symplectiques</b>	<b>27</b>
2.1	Espaces Vectoriels Symplectiques . . . . .	27
2.2	Variétés Symplectiques . . . . .	30
2.3	Volume Symplectique . . . . .	32
2.4	Symplectomorphismes . . . . .	33
2.5	Sous-variétés Lagrangiennes . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Mécanique Hamiltonienne</b>	<b>34</b>
3.1	Champs de Vecteurs Hamiltoniens . . . . .	34
3.2	Systèmes Intégrables . . . . .	37
3.3	Théorème d'Arnold-Liouville . . . . .	39

3.3.1	Construction Des Variables D'Actions . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Application Aux Flots Géodésiques</b>	<b>46</b>
4.1	Équations d'Euler-Lagrange . . . . .	46
4.2	Variétés Riemanniennes . . . . .	47
4.3	Équations Des Géodésiques . . . . .	48
4.4	Point de vue Hamiltonien . . . . .	50
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>52</b>

# Introduction

La mécanique hamiltonienne est née en 1833 de l'initiative prise par William Rowan Hamilton de reformuler la mécanique classique newtonienne. La géométrie symplectique, d'abord apparue comme un formalisme mathématique pour celle-ci, s'est développée d'une manière fulgurante durant ce dernier siècle et est aujourd'hui encore un actif domaine de recherche.

La mécanique hamiltonienne est l'étude des systèmes hamiltoniens. Un système hamiltonien est un système dynamique engendré par un champ de vecteurs hamiltonien. Ce dernier peut être vu comme un analogue symplectique du gradient d'une fonction lisse sur une variété riemannienne. Dans notre contexte cette fonction est appelée hamiltonien du système. Un système hamiltonien dont l'espace des phases est une variété symplectique de dimension  $2n$  est dit intégrable s'il possède  $n$  intégrales premières, autrement dit,  $n$  "invariants" le long de ses trajectoires satisfaisants certaines conditions. Le théorème d'Arnold-Liouville affirme que les trajectoires d'un tel système s'enroulent sur des tores et qu'il existe des coordonnées symplectiques dites d'actions-angles dans lesquelles le système est linéaire.

On se propose de démontrer ce théorème qui joue un rôle crucial dans la théorie des systèmes intégrables. Qui a elle-même de nombreux champs d'interactions avec d'autres domaines tels que la géométrie algébrique et la théorie algébrique des équations différentielles à titre d'exemple.

# Préambule : Variétés Lisses

Une variété est un espace topologique qui est localement homéomorphe à  $\mathbb{R}^n$ . On peut donc voir la notion de variété comme une généralisation de la notion d'espace affine. Plus particulièrement les variétés qu'on considérera sont des variétés dites lisses, il est possible d'y étendre les notions du calcul différentiel qui nous sont familières sur  $\mathbb{R}^n$ . Nous rappelons ici quelques résultats sur les variétés lisses en omettant (sauf si nécessaire) les démonstrations, renvoyant le lecteur à [7].

## 1.1 Variétés Lisses

**Définition 1.1.1.** Soit  $M$  un espace topologique séparé.

- On dit que  $M$  est une variété topologique de dimension  $n$  si pour tout  $x \in M$  il existe un ouvert  $U$  de  $M$  contenant  $x$  et homéomorphe à un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .
- Une carte sur  $M$  est un couple  $(U, \phi)$  formé d'un ouvert  $U$  de  $M$  et d'un homéomorphisme  $\phi : U \rightarrow V$  où  $V$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .
- Deux cartes  $(U_\alpha, \phi_\alpha)$  et  $(U_\beta, \phi_\beta)$  sur  $M$ , sont dites compatibles si  $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$  ou bien  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  et

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

est un difféomorphisme de classe  $C^\infty$ .

- Un atlas  $C^\infty$  sur  $M$  est une famille de cartes  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_\alpha$  deux à deux compatibles et telles que les ouverts  $U_\alpha$  forment un recouvrement de  $M$ .
- Un atlas  $C^\infty$  sur  $M$  est dit maximal si toute carte compatible avec toutes celles de l'atlas, appartient à l'atlas.
- Une variété de classe  $C^\infty$  (ou lisse) de dimension  $n$  est une variété topologique de dimension  $n$  munie d'un atlas maximal.

Cette définition présente un immense inconvénient. Étant donnée une variété topologique, fournir explicitement un atlas maximal sur celle-ci est impraticable. D'où l'intérêt du théorème suivant :



**Théorème 1.** Soit  $M$  une variété topologique et soit  $\mathcal{A}$  un atlas  $C^\infty$  sur  $M$ . Il existe un unique atlas maximal sur  $M$  contenant  $\mathcal{A}$ .

La donnée d'une *structure lisse* (i.e la donnée d'un atlas maximal) sur une variété topologique se ramène donc à la donnée d'un atlas  $C^\infty$  sur celle-ci.

**Exemple 1.1.1.** Naturellement on peut munir  $\mathbb{R}^n$  d'une structure de variété lisse en le munissant d'un atlas lisse formé d'une seule carte  $(\mathbb{R}^n, \text{Id}_{\mathbb{R}^n})$ .

**Exemple 1.1.2.** Le graphe d'une application lisse  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$  :

$$\text{Gr}_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid x \in \mathbb{R}^n\}$$

muni de la topologie induite et de l'atlas  $\mathcal{A} = \{(\text{Gr}_f, \pi)\}$ , avec :

$$\begin{aligned} \pi : \text{Gr}_f &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, f(x)) &\longmapsto x \end{aligned}$$

est une variété lisse, car bien évidemment  $\pi \circ \pi^{-1} = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$  est lisse.

**Exemple 1.1.3.** Le cercle  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  muni de la topologie induite et de l'atlas suivant est une variété lisse de dimension 1 :

$$\mathcal{A} = \left\{ \left( \{(x, y) \in S^1 \mid x < 0\}, \pi_2 \Big|_{x < 0} \right), \left( \{(x, y) \in S^1 \mid x > 0\}, \pi_2 \Big|_{x > 0} \right), \right. \\ \left. \left( \{(x, y) \in S^1 \mid y < 0\}, \pi_1 \Big|_{y < 0} \right), \left( \{(x, y) \in S^1 \mid y > 0\}, \pi_1 \Big|_{y > 0} \right) \right\}$$

$\pi_1$  et  $\pi_2$  étant respectivement la projection par rapport à la première composante et la projection par rapport à la deuxième composante. On peut construire de la même manière un atlas (à 6 cartes) sur  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ . Voir figure 1.1.

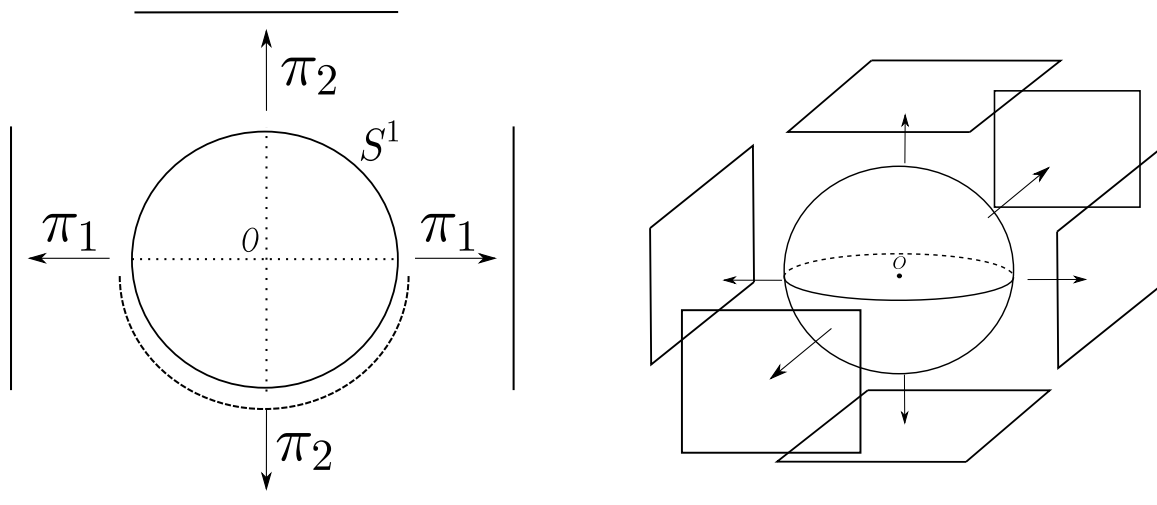
Naturellement le produit cartésien de deux variétés lisses (par exemple  $S^1 \times \mathbb{R}$ ) muni de la topologie produit a aussi une structure de variété lisse.

**Définition 1.1.2.** Une application continue  $f : M \longrightarrow N$  entre deux variétés lisses est dite lisse ou de classe  $C^\infty$  si pour toutes cartes  $(U, \phi)$  de l'atlas maximal de  $M$  et  $(V, \psi)$  de l'atlas maximal de  $N$ , telles que  $V \subset f(U)$ , l'application

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \longrightarrow \psi(V)$$

est lisse au sens usuel. Cette dernière est appelée lecture de  $f$  dans les cartes  $(U, \phi)$  et  $(V, \psi)$ .

**Exemple 1.1.4.** La restriction à  $S^1$  de toute application lisse  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^n$  est lisse. En effet la lecture de  $g = f|_{S^1}$  dans les cartes des atlas présentées ci-dessus est toujours une application lisse de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}^n$ .


 FIGURE 1.1 – Atlas Sur  $S^1$  À Gauche, Atlas Sur  $S^2$  À Droite

De même que l'identité sur une variété lisse quelconque est toujours lisse et la composition de deux applications lisses est elle aussi lisse. Ainsi les variétés lisses forment une catégorie  $\mathbf{man}^\infty$  dont les morphismes sont les applications lisses.

Les applications lisses qui vont d'une variété lisse  $M$  vers  $\mathbb{R}$  occupent une importance particulière. L'ensemble de ces applications est noté  $C^\infty(M)$ . Il n'est jamais vide du fait qu'il contient au moins les applications constantes. Il possède à la fois une structure de  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et une structure d'anneau commutatif. La question de l'existence d'applications lisses à valeurs réelles autres que les applications constantes, sur une variété lisse donnée, est compte à elle moins triviale.

## 1.2 Espaces Tangent Et Cotangent

**Définition 1.2.1.** Soient  $M$  une variété  $C^\infty$  de dimension  $n$ ,  $x \in M$  et  $(U, \phi)$  une carte telle que  $x \in U$ . On définit  $T_x M$  l'espace tangent à  $M$  en  $x$  comme l'espace quotient :

$$T_x M = \{ \gamma : ]-1, 1[ \longrightarrow M \text{ de classe } C^\infty \text{ et telle que } \gamma(0) = x \} / \sim$$

où  $\sim$  désigne la relation d'équivalence :

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \stackrel{\text{def}}{\iff} (\phi \circ \gamma_1)'(0) = (\phi \circ \gamma_2)'(0)$$

Il est tout d'abord important de noter que cette définition est indépendante du choix de la carte.

Soit  $\gamma$  un chemin lisse sur  $M$  (i.e une application  $C^\infty$  de  $] -1, 1[$  vers  $M$ ) tel que  $\gamma(0) = x$  on a pour toute paire de cartes  $(U_1, \phi_1)$  et  $(U_2, \phi_2)$  telles que  $x \in U_1 \cap U_2$  :

$$\begin{aligned} (\phi_1 \circ \gamma)'(0) &= (\phi_1 \circ \phi_2^{-1} \circ \phi_2 \circ \gamma)'(0) \\ &= D_{(\phi_1 \circ \gamma)(0)} [\phi_1 \circ \phi_2^{-1}] \cdot (\phi_2 \circ \gamma)'(0) \\ &= D_{\phi_1(x)} [\phi_1 \circ \phi_2^{-1}] \cdot (\phi_2 \circ \gamma)'(0) \end{aligned}$$

On voit que  $D_{\phi_1(x)} [\phi_1 \circ \phi_2^{-1}]$  ne dépend que de  $x$  et ne depend pas de  $\gamma$ . Cela implique que pour toute paire de chemins lisses sur  $M$ ,  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  tels que  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = x$ , on a :

$$(\phi_1 \circ \gamma_1)'(0) = (\phi_1 \circ \gamma_2)'(0) \implies (\phi_2 \circ \gamma_1)'(0) = (\phi_2 \circ \gamma_2)'(0)$$

Donc, en tout point  $x \in M$ , l'espace tangent  $T_x M$  est bien défini.

Pour alléger les notations, à toute carte  $(U, \phi)$  telle que  $x \in U$ , nous associerons une application :

$$\begin{aligned} \rho_{\phi,x} : T_x M &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ v &\longmapsto (\phi \circ \gamma)'(0) \quad \text{où } \gamma \text{ est un représentant de } v \end{aligned}$$

qui est une bijection de réciproque :

$$\begin{aligned} \rho_{\phi,x}^{-1} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow T_x M & \text{où : } \lambda_v : ] -1, 1[ &\longrightarrow M \\ v &\longmapsto [\lambda_v] & t &\longmapsto \phi^{-1}(\phi(x) + t v) \end{aligned}$$

On peut alors munir  $T_x M$  d'une structure de  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel héritée de  $\mathbb{R}^n$ , en définissant les opérations :

- $\forall u, v \in T_x M, \quad u + v = \rho_{\phi,x}^{-1} [\rho_{\phi,x}(u) + \rho_{\phi,x}(v)]$ .
- $\forall u \in T_x M, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \cdot u = \rho_{\phi,x}^{-1} [\alpha \cdot \rho_{\phi,x}(u)]$

Comme pour toutes cartes  $(U_1, \phi_1)$  et  $(U_2, \phi_2)$  de  $M$  telles que  $x \in U_1 \cap U_2$ , l'application

$$\rho_{\phi_1,x} \circ \rho_{\phi_2,x}^{-1} = D_{\phi_1(x)} [\phi_1 \circ \phi_2^{-1}]$$

est linéaire, les opérations définies ci-dessus ne dépendent pas de la carte choisie. La structure de  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel décrite est donc intrinsèque à  $T_x M$ .

Les éléments de  $T_x M$  sont appelés des *vecteurs tangents*. Son dual  $T_x^* M = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(T_x M, \mathbb{R})$  est appelé *espace cotangent* à  $M$  en  $x$  et ses éléments sont appelés *vecteurs cotangents* ou *co-vecteurs*.

Étant donnés une variété lisse  $M$  et  $x \in M$  et une carte  $(U, \phi)$  telle que  $x \in U$ , une base de  $T_x M$  est naturellement obtenue en prenant l'image par  $\rho_{\phi, x}^{-1}$  de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Si on note  $(p^1, p^2, \dots, p^n)$  les composantes de  $\phi$  dans  $\mathbb{R}^n$  (qu'on appellera désormais *coordonnées locales* sur  $U$ ), le  $i$ -ème élément de cette base est noté :

$$\frac{\partial}{\partial p_i} |_x = \rho_{\phi, x}^{-1}(\mathbf{e}_i) \quad \text{où } \mathbf{e}_i \text{ désigne le } i\text{-ème élément de la base canonique de } \mathbb{R}^n$$

Bien entendu la base décrite ci-dessus dépend de la carte choisie.

**Définition 1.2.2.** Soient  $f : M \longrightarrow N$  une application lisse entre deux variétés lisses et  $x \in M$ . On appelle *application linéaire tangente à  $f$  au point  $x$*  l'application :

$$\begin{aligned} T_x f : T_x M &\longrightarrow T_{f(x)} N \\ v &\longmapsto \left[ \rho_{\psi, f(x)}^{-1} \circ D_{\phi(x)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ \rho_{\phi, x} \right] (v) \end{aligned}$$

pour toutes cartes  $(U, \phi)$  et  $(V, \psi)$  telles que  $x \in U$  et  $f(U) \subset V$  (et indépendamment du choix de celles-ci).

Lorsque l'espace d'arrivée est  $\mathbb{R}$ , cette dernière est notée  $d_x f$  et est appelée *différentielle* de l'application  $f$  au point  $x$ . En particulier on a :  $d_x f \in T_x^* M$  et :

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad d_x p^i \left( \frac{\partial}{\partial p_j} |_x \right) = \left[ D_{\phi(x)}(p^i \circ \phi^{-1}) \circ \rho_{\phi, x} \right] \left( \frac{\partial}{\partial p_j} |_x \right) = D_{\phi(x)} \pi_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{i,j}$$

$\pi_i$  étant la  $i$ -ème projection de  $\mathbb{R}^n$  et  $\delta_{i,j}$  le delta de Kronecker. D'où l'on conclut que  $\{d_x p_i\}_{1 \leq i \leq n}$  est enfaite la base duale de  $\{\frac{\partial}{\partial p_i} |_x\}_{1 \leq i \leq n}$ .

On peut associer à tout  $v \in T_x M$  une application linéaire :

$$\begin{aligned} \delta_v : C^\infty(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto d_x f(v) \end{aligned}$$

Notamment l'application  $v \longmapsto \delta_v$  est un morphisme linéaire de  $T_x M$  vers  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(C^\infty(M), \mathbb{R})$ .

Pour tout  $f \in C^\infty(M)$  nous noterons  $v(f) = \delta_v(f) = d_x f(v)$  et en particulier

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad \frac{\partial f}{\partial p_i} |_x = \frac{\partial}{\partial p_i} |_x (f)$$

Ces conventions permettent de retrouver la formule classique :

$$d_x f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_i} |_x d_x p^i$$

Il est aussi clair que, pour des applications de  $\mathbb{R}^n$  vers  $\mathbb{R}^m$ , la notion d'application linéaire tangente définie ci-dessus se confond avec la différentielle usuelle.

**Proposition 2. (Formule De Leibniz)** Soient  $M$  une variété lisse et  $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$  et  $g : M \longrightarrow \mathbb{R}$  on a :

$$\forall x \in M, \quad d_x(fg) = f d_x g + g d_x f$$

**Proposition 3.** Soient  $f : L \longrightarrow M$  et  $g : M \longrightarrow N$  deux applications lisses entre variétés lisses et on a :

$$\forall x \in L, \quad T_x(g \circ f) = T_{f(x)}g \circ T_x f$$

### 1.3 Sous-Variétés

**Définition 1.3.1.** Soit  $f : M \longrightarrow N$  une application lisse entre deux variétés lisses. On dit que :

- $f$  est un difféomorphisme si elle est bijective et sa réciproque est lisse.
- $f$  est une immersion si  $\forall x \in M, T_x f$  est injective.
- $f$  est un plongement si c'est une immersion et qu'elle définit un homéomorphisme de  $M$  vers  $f(M)$ .
- $f$  est une submersion si  $\forall x \in M, T_x f$  est surjective.
- $c \in f(M)$  est une valeur régulière de  $f$  si  $\forall x \in f^{-1}(\{c\}), T_x f$  est surjective.

Soient  $f : M \longrightarrow N$  une application lisse entre deux variétés lisses et  $x \in M$ . En reprenant les notations de la définition 1.2.2, il est clair que  $T_x f$  est injective (resp. surjective) si et seulement si  $J_{\phi(x)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1})$  est injective (resp. surjective). Si elle est bijective alors  $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$  définit un difféomorphisme local au voisinage de  $\phi(x)$  et donc  $f$  définit elle aussi un difféomorphisme local au voisinage de  $x$ .

**Définition 1.3.2.** Soit  $M$  une variété lisse de dimension  $m$ . On dit d'une partie  $N$  de  $M$  que c'est une sous-variété lisse de  $M$  de dimension  $n$  si  $\forall x \in N$  il existe une carte  $(U_x, \phi_x)$  telle que  $x \in U$ ,  $\phi_x(x) = 0$  et :  $\phi_x(U_x \cap N) = \phi_x(U_x) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$  (Remarque : Cela signifie entre autre que  $N$  munie de la topologie induite et de l'atlas  $\{(U_x \cap N, \pi \circ \phi_x) \mid x \in N\}$ , est une variété lisse,  $\pi$  désignant ici la projection sur  $\mathbb{R}^n$ ).

**Théorème 4.** Soit  $f : M \longrightarrow N$  une application lisse entre deux variétés lisses de dimensions respectives  $m$  et  $n$ .

- Si  $f$  est un plongement alors  $S = f(M)$  est une sous-variété lisse de  $N$  de dimension  $m$ , et  $\forall x \in S, T_x S$  est isomorphe à  $T_{f^{-1}(x)}f(T_x M)$
- Si  $c \in f(M)$  est une valeur régulière de  $f$  (ou si  $f$  est une submersion) alors  $S = f^{-1}(\{c\})$  est une sous-variété lisse de  $M$  de dimension  $m - n$ , et  $\forall x \in S, T_x S$  est isomorphe à  $\ker T_x f$

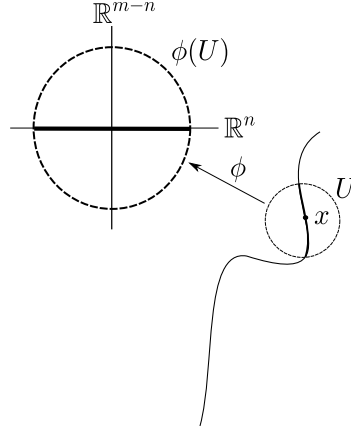


FIGURE 1.2 – Sous-Variété

**Exemple 1.3.1.**

- $S^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$  une sous-variété lisse de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $n - 1$  car l'application  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i^2$  est une submersion.
- $M = \{(\cos(t), \sin(t), t^3) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$  est une sous-variété lisse de  $\mathbb{R}^3$  de dimension 1 car l'application  $t \mapsto (\cos(t), \sin(t), t^3)$  est un plongement.

## 1.4 Formes Multi-Linéaires Alternées

Soit  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On note  $\wedge^k V^*$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de ses formes  $k$ -linéaires alternées. On rappelle qu'une forme  $k$ -linéaire alternée de  $V$  est une application  $Q : V^k \rightarrow \mathbb{R}$  linéaire par rapport à chacune de ses  $k$  variables et telle que :

$$\forall (v_1, v_2, \dots, v_k) \in V^k, \forall \sigma \in S_k, \quad Q(v_1, v_2, \dots, v_k) = \epsilon(\sigma) Q(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$$

où :

$$\epsilon(\sigma) = \begin{cases} -1 & \text{si } \sigma \text{ comporte un nombre impair d'inversions} \\ +1 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Exemple 1.4.1.** Dans le cas où  $V = \mathbb{R}^n$ . Il est bien connu que le déterminant est, à multiplication par un scalaire près, l'unique forme  $n$ -linéaire de  $V$ . En d'autres termes :  $\wedge^n V^* = \text{Vect}(\det_n)$ .

**Définition 1.4.1.** Soient  $Q \in \wedge^k V^*$  et  $R \in \wedge^l V^*$ , on définit leur produit extérieur  $Q \wedge R \in \wedge^{k+l} V^*$  :

$$(Q \wedge R)(v_1, v_2, \dots, v_{k+l}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(k,l)} \epsilon(\sigma) Q(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) R(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)})$$

où :

$$\mathfrak{S}(k,l) = \{\sigma \in S_{k+l} \mid \sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(k) \text{ et } \sigma(k+1) < \sigma(k+2) < \dots < \sigma(k+l)\}$$

**Proposition 5.** Soient  $Q \in \wedge^k V^*$ ,  $R \in \wedge^l V^*$ ,  $S \in \wedge^m V^*$  et  $c \in \mathbb{R}$ , on a :

1.  $Q \wedge R = (-1)^{kl} R \wedge Q$
2.  $(Q + cR) \wedge S = Q \wedge S + c(S \wedge R)$
3.  $(Q \wedge R) \wedge S = Q \wedge (R \wedge S)$

**Exemple 1.4.2.** Prenons  $V = \mathbb{R}^n$ . Soit  $p^1, p^2, \dots, p^k \in V^*$ , on a que :

$$(p^1 \wedge p^2 \wedge \dots \wedge p^k)(v_1, v_2, \dots, v_k) = \begin{vmatrix} p^1(v_1) & p^2(v_1) & \dots & p^k(v_1) \\ p^1(v_2) & p^2(v_2) & \dots & p^k(v_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p^1(v_k) & p^2(v_k) & \dots & p^k(v_k) \end{vmatrix}$$

**Proposition 6.** Soit  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . Si  $p^1, \dots, p^n \in V^*$  forment une base de  $V^*$  alors  $\{p^{i_1} \wedge p^{i_2} \wedge \dots \wedge p^{i_k} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n\}$  est une base de  $\wedge^k V^*$ .

Soient  $V$  et  $W$  deux  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels et  $Q \in \wedge^k V^*$ . Toute application linéaire  $f : W \rightarrow V$ , induit une forme  $k$ -linéaire alternée sur  $W$  notée  $f^*Q$  définie comme suit :

$$\forall v_1, v_2, \dots, v_k \in W, \quad (f^*Q)(v_1, v_2, \dots, v_k) = Q(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_k))$$

**Définition 1.4.2.** Une  $\mathbb{R}$ -algèbre est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $A$  muni d'un "produit bilinéaire"  $\cdot : A \times A \rightarrow A$  i.e :

- $\forall x, y, z \in A, \alpha \in \mathbb{R}, (x + \alpha y) \cdot z = x \cdot z + \alpha(y \cdot z).$
- $\forall x, y, z \in A, \alpha \in \mathbb{R}, x \cdot (y + \alpha z) = x \cdot y + \alpha(x \cdot z).$

**Définition 1.4.3.** Une graduation sur une  $\mathbb{R}$ -algèbre  $A$  est la donnée d'une famille  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  de sous-espaces vectoriels de  $A$  vérifiant :

- $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_i.$
- $\forall i, j \in \mathbb{N}, A_i A_j \subseteq A_{i+j}$  (i.e  $\forall (x, y) \in A_i \times A_j, x \cdot y \in A_{i+j}$ ).

Si  $x \in A_i - \{0\}$  on dit que  $x$  est un élément homogène de  $A$  de degré  $i$  et on note :  $\deg x = i$ .

**Définition 1.4.4.** Une algèbre de Lie est une  $\mathbb{R}$ -algèbre  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$  telle que :

1.  $\forall x, y \in \mathfrak{g}, [x, y] = -[y, x].$
2.  $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}, [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$  (**Identité de Jacobi**).

**Définition 1.4.5.** Un morphisme de  $\mathbb{R}$ -algèbres est une application  $\mathbb{R}$ -linéaire  $f : A \rightarrow B$  ( $A$  et  $B$  étant deux  $\mathbb{R}$ -algèbres) satisfaisant :

$$\forall x, y \in A, \quad f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$

Un anti-morphisme de  $\mathbb{R}$ -algèbres est une application  $\mathbb{R}$ -linéaire  $f : A \rightarrow B$  telle que :

$$\forall x, y \in A, \quad f(x \cdot y) = f(y) \cdot f(x)$$

**Exemple 1.4.3.** Voici quelques exemples de  $\mathbb{R}$ -algèbres :

- $\mathbb{R}$  muni de la multiplication usuelle.
- Pour toute variété lisse  $M$ , le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $C^\infty(M)$  muni de la multiplication usuelle.
- Pour tout  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $V$ , le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \bigwedge^k V^*$  est naturellement une  $\mathbb{R}$ -algèbre graduée une fois muni du produit extérieur. Si  $Q \in \bigwedge^k V^*$  alors  $Q$  est homogène de degré  $k$ .
- $\mathbb{R}^3$  muni du produit vectoriel est une algèbre de Lie.

On conclut cette section par l'introduction d'un concept qui nous sera utile ultérieurement qui est celui de *dérivations* et d'*anti-dérivations*.

**Définition 1.4.6.** Soient  $A$  une  $\mathbb{R}$ -algèbre et  $D : A \longrightarrow A$  une application linéaire, on dit que :

- $D$  est une *dérivation* si :

$$\forall x, y \in A, \quad D(x \cdot y) = D(x) \cdot y + x \cdot D(y)$$

Si on suppose qu'en plus  $A$  est graduée alors on dit que :

- $D$  est une *anti-dérivation* si  $\forall x, y \in A$  homogènes :

$$D(x \cdot y) = D(x) \cdot y + (-1)^{\deg(x)} x \cdot D(y)$$

## 1.5 Fibrés Vectoriels

Dans tout ce qui précède les notions abordées sont ponctuelles. Dans le but d'avoir un point de vue global, on a besoin d'introduire la notion de fibré vectoriel :

**Définition 1.5.1.** Un *fibré vectoriel lisse* est la donnée de deux variétés lisses  $M$  et  $E$  appelées respectivement *espace de base* et *espace total*, et d'une application  $\pi : E \longrightarrow M$  lisse et surjective appelée *projection*, satisfaisants les conditions suivantes :

1.  $\forall x \in M, \pi^{-1}(x)$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
2.  $\forall x \in M$  il existe un ouvert  $U$  (dit *trivialisant*) contenant  $x$  et un *difféomorphisme*  $t : U \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \pi^{-1}(U)$  (appelé *trivialisat*on locale), telles que  $\forall y \in U$  l'application  $t(y, \cdot)$  soit un isomorphisme.

Associions à toute variété lisse  $M$  de dimension  $n$ , un ensemble :

$$TM = \bigcup_{x \in M} \{x\} \times T_x M$$

muni de la projection :

$$\begin{aligned} \pi : TM &\longrightarrow M \\ (x, v) &\longmapsto x \end{aligned}$$



Notons  $\mathcal{A}$  l'atlas de  $M$  et associons à toute carte  $(U, \phi)$  de cet atlas une application :

$$\begin{aligned}\Phi_{(U, \phi)} : \pi^{-1}(U) &\longrightarrow \phi(U) \times \mathbb{R}^n \\ (p, v) &\longmapsto (\phi(x), d_x \phi(v))\end{aligned}$$

On peut alors munir  $TM$  de la topologie suivante :

$$\mathcal{T} = \{A \in TM \mid \Phi_{(U, \phi)}(A \cap \pi^{-1}(U)) \text{ est ouvert dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \forall (U, \phi) \in \mathcal{A}\}$$

Plus encore  $TM$  muni de l'atlas  $\{(\pi^{-1}(U), \Phi_{(U, \phi)}) \mid (U, \phi) \in \mathcal{A}\}$  est une variété lisse de dimension  $2n$ .

Le triplet  $(M, TM, \pi)$  est alors naturellement un fibré vectoriel lisse, en effet :

1.  $\forall p \in M, \pi^{-1}(p) = T_p M$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ .
2.  $\forall p \in M, \exists (U, \phi) \in \mathcal{A}, p \in U$  on peut alors définir un difféomorphisme :

$$\begin{aligned}t : U \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \pi^{-1}(U) \\ (x, \mathbf{v}) &\longmapsto (x, (d_x \phi)^{-1}(\mathbf{v}))\end{aligned}$$

$\forall x \in U$  l'application  $t(x, \cdot)$  est alors un isomorphisme.

Par abus on dira que  $TM$  lui même est un fibré vectoriel qu'on appelle *fibré tangent* de  $M$ .

**Exemple 1.5.1.** Voici deux exemples relativement triviaux :

- $T(\mathbb{R}^n)$  est difféomorphe à  $\mathbb{R}^{2n}$ . Cela traduit l'idée intuitive que pour spécifier un vecteur "s'enracinant" en un point donné nous avons besoin d'un deuxième vecteur pour spécifier la position de ce point. Voir 1.3.
- $T(S^1)$  est difféomorphe à un cylindre  $S^1 \times \mathbb{R}$ . Voir 1.4.

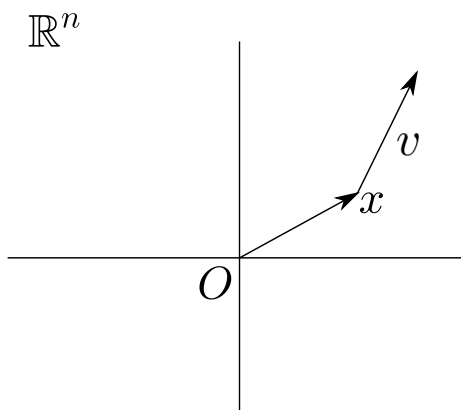


FIGURE 1.3 – Élément du fibré tangent de  $\mathbb{R}^n$

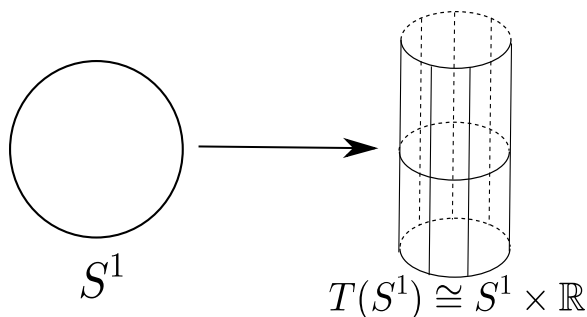


FIGURE 1.4 – Fibré tangent du cercle

Il faut noter qu'en général il n'est pas trivial d'expliciter le fibré tangent d'une variété lisse donnée comme on l'a fait dans les exemples ci-dessus.

De la même manière qu'on a introduit le fibré tangent, on introduit maintenant pour toute variété  $M$  le fibré vectoriel :

$$\bigwedge^k T^*M = \bigcup_{x \in M} \{x\} \times \bigwedge^k T_x^*M$$

Dans le cas particulier où  $k = 1$  celui-ci est appelé fibré cotangent de  $M$  et il est noté :  $T^*M$ .

## 1.6 Sections De Fibré Vectoriel

**Définition 1.6.1.** Une section lisse d'un fibré lisse  $(M, E, \pi)$  est une application lisse  $s : M \longrightarrow E$  telle que

$$\forall x \in M, \quad s(x) \in \pi^{-1}(x)$$

**Définition 1.6.2.** Soit  $M$  une variété lisse.

- Un champ de vecteurs lisse sur  $M$  est une section lisse de  $TM$ .
- Une  $k$ -forme différentielle sur  $M$  est une section lisse de  $\bigwedge^k T^*M$ .

Une  $p$ -forme différentielle  $\omega$  sur une variété  $M$  définit en chaque point  $p \in M$  une forme  $p$ -linéaire alternée  $\omega_x = \omega(x)$ . On conviendra qu'une 0-forme différentielle est une application lisse à valeurs réelles. L'ensemble des champs de vecteurs sur une variété  $M$  ainsi que l'ensemble des  $p$ -formes différentielles sur celle-ci ont donc tout deux des structures naturelles de  $C^\infty(M)$ -modules. Les opérations étant effectuées point par point sur la variété.

On notera désormais  $\mathfrak{X}(M)$  le  $C^\infty(M)$ -module des champs de vecteurs lisses sur une variété  $M$  et  $\Omega^k(M)$  celui des  $k$ -formes différentielles.

Étant donnés une  $k$ -forme différentielle  $\omega$ , une  $l$ -forme différentielle  $\eta$  et un champ de vecteur  $X$  sur une variété lisse  $M$ . On définit :

— le *produit extérieure* de  $\omega$  et  $\eta$  qui est une  $k + l$ -forme différentielle :

$$\begin{aligned}\omega \wedge \eta : M &\longrightarrow \bigwedge^{k+l} T^*M \\ x &\longmapsto \omega_x \wedge \eta_x\end{aligned}$$

— le *produit intérieur* de  $\omega$  par  $X$  qui est une  $(k - 1)$ -forme différentielle :

$$\begin{aligned}\iota_X \omega : M &\longrightarrow \bigwedge^{k-1} T^*M \\ x &\longmapsto \omega_x(X(x), \cdot)\end{aligned}$$

Notamment  $\Omega(M) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \Omega^k(M)$  est naturellement une  $\mathbb{R}$ -algèbre graduée une fois munie du produit extérieur ci-dessus. Si  $\omega \in \Omega^k(M)$  alors  $\omega$  est homogène de degré  $k$ .

On peut associer à toute application lisse  $f$  sur  $M$ , sa dérivée extérieure qui est une 1-forme :

$$\begin{aligned}df : M &\longrightarrow T^*M \\ x &\longmapsto d_x f\end{aligned}$$

Étant donné un champ de vecteurs lisse  $X$  sur une variété lisse  $M$  et  $f \in C^\infty(M)$ . On note par convention :

$$X \cdot f = \iota_X df$$

Autrement dit :

$$\forall x \in M, \quad (X \cdot f)(x) = d_x f(X) = X(x)(f)$$

Remarquons enfin que  $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$  l'application  $\delta_X : f \mapsto X \cdot f$  est une dérivation de  $C^\infty(M)$ .

**Théorème 7.** *L'application :*

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ X &\longmapsto \delta_X\end{aligned}$$

*est un isomorphisme de  $C^\infty(M)$ -modules.*

### 1.6.1 Dérivée Extérieure

Généralisons à présent la notion de dérivée extérieure aux  $k$ -formes différentielles pour un entier naturel  $k$  quelconque.

**Définition 1.6.3.** *Soit  $M$  une variété lisse de dimension  $n$  et  $(U, \phi)$  une carte dans l'atlas de  $M$ , et  $\phi = (p^1, \dots, p^n)$ , on a que :*

$$\{(dp^{i_1} \wedge dp^{i_2} \wedge \dots \wedge dp^{i_k} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n\}$$

*est une base de  $\Omega^k(U)$ .*

Soit  $\omega$  une  $k$ -forme différentielle sur une variété lisse  $M$ , on a localement sur l'ouvert de toute carte  $(U, \phi)$  de  $M$  :

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} a_{i_1, i_2, \dots, i_k} dp^{i_1} \wedge dp^{i_2} \wedge \dots \wedge dp^{i_k}$$

où les  $a_{i_1, i_2, \dots, i_k}$  sont des applications lisses sur  $M$ . On définit la dérivée extérieure de  $\omega$  comme suit :

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} da_{i_1, i_2, \dots, i_k} \wedge dp^{i_1} \wedge dp^{i_2} \wedge \dots \wedge dp^{i_k}$$

**Définition 1.6.4.** Une  $k$ -forme différentielle  $\omega$  est dite :

- fermée si  $d\omega = 0$
- exacte s'il existe une  $(k-1)$ -forme différentielle  $\alpha$  telle que :  $\omega = d\alpha$ .

**Proposition 8.** Soit  $M$  une variété lisse,  $\forall \omega \in \Omega^k(M)$  on a :  $d(d\omega) = 0$ .

Autrement dit toute forme différentielle exacte est fermée. La réciproque n'est en général pas vraie.

**Exemple 1.6.1.** Considérons la 1-forme  $\frac{x}{x^2+y^2}dy - \frac{y}{x^2+y^2}dx$  sur  $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ , ( $x$  et  $y$  désignant ici les coordonnées usuelles de  $\mathbb{R}^2$ ). Elle n'est pas exacte car :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2+y^2} \right) \neq \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-y}{x^2+y^2} \right)$$

Cependant elle est fermée :

$$d \left( \frac{x}{x^2+y^2}dy - \frac{y}{x^2+y^2}dx \right) = \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}dx \wedge dy - \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}dy \wedge dx = 0$$

Soit  $M$  une variété lisse. On définit le  $k$ -ème groupe de cohomologie de Rham de  $M$  pour  $k > 0$  comme suit :

$$H^k(M) = \{\omega \in \Omega^k(M) \mid d\omega = 0\} / \{\omega \in \Omega^k(M) \mid \exists \alpha \in \Omega^{k-1}(M), \omega = d\alpha\}$$

Toute forme fermée sur  $M$  est exacte si et seulement si les groupes de cohomologie ci-dessus (i.e pour  $k > 0$ ) sont tous triviaux.

## 1.6.2 Intégration Des Formes Différentielles

**Définition 1.6.5.** Soit  $M$  une variété lisse. Un  $k$ -cube singulier sur  $M$  est une application :

$$s : [0,1]^k \longrightarrow M$$

telle qu'il existe un ouvert  $U \supset [0,1]^k$  où  $s$  peut se prolonger en une application lisse.

**Exemple 1.6.2.** En particulier un 0-cube singulier sur une variété  $M$  est une application  $s : \{\emptyset\} \longrightarrow M$ , autrement dit il s'agit de la donnée d'un point de  $M$ .

Soit  $M$  une variété lisse. On définit le *pull-back* de  $\omega \in \Omega^k(M)$  par l'application lisse  $\phi : N \longrightarrow M$  :

$$\begin{aligned}\phi^*\omega : N &\longrightarrow \bigwedge^k T^*N \\ x &\longmapsto (T_x\phi)^*\omega_{\phi(x)}\end{aligned}$$

On conviendra que si  $k = 0$  alors  $\phi^*\omega = \omega \circ \phi$ .

On définit l'intégrale de  $\omega$  sur un  $k$ -cube singulier  $s$  sur  $M$  comme suit :

$$\int_s \omega = \int_0^1 \dots \int_0^1 f \, dp^1 dp^2 \dots dp_k$$

où  $f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$  est l'unique application lisse vérifiant  $s^*\omega = f \, dp^1 \wedge dp^2 \wedge \dots \wedge dp^k$  où  $p^1, p^2, \dots, p^k$  sont les coordonnées usuelles de  $\mathbb{R}^k$ .

**Définition 1.6.6.** Soit  $M$  une variété lisse. Une  $k$ -chaîne singulière est une combinaison linéaire formelle de  $k$ -cubes singuliers :

$$c = \sum_{i=1}^m \alpha_i s_i$$

où  $m \in \mathbb{N}^*$ , les  $s_i$  sont des  $k$ -cubes singuliers sur  $M$  et les  $\alpha_i$  des entiers.

Étant donnée une forme différentielle  $\omega$  sur une variété lisse  $M$ . On définit l'intégrale de  $\omega$  sur une  $k$ -chaîne singulière  $c = \sum_{i=1}^m \alpha_i s_i$  comme suit :

$$\int_c \omega = \sum_{i=1}^m \alpha_i \int_{s_i} \omega$$

On définit maintenant pour toute  $k$ -chaîne singulière sur une variété lisse  $M$ , son bord noté  $\partial c$  qui est une  $(k-1)$ -chaîne définie comme suit :

- Pour tout  $k$ -cube singulier sur  $M$ , avec  $k > 0$  on a :

$$\partial s = \sum_{i=1}^k \sum_{j=0,1} c_{i,j}$$

où les  $c_{i,j}$  désignent les  $(k-1)$ -cube singulier définies comme suit :

$$c_{i,j}(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}) = c(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, j, a_{i+1}, \dots, a_{k-1})$$

- Pour toute  $k$ -chaîne singulière  $c = \sum_{i=1}^m \alpha_i s_i$  on a :

$$\partial c = \sum_{i=1}^m \alpha_i \partial s_i$$

**Définition 1.6.7.** Une  $k$ -chaîne singulière  $c$  sur une variété lisse  $M$  est appelée  $k$ -cycle sur  $M$  si :  $\partial c = 0$ .

**Proposition 9.** Soit  $c$  une  $k$ -chaîne singulière sur une variété lisse  $M$ . On a  $\partial(\partial c) = 0$ .

Autrement dit tout bord est un cycle. La réciproque est en général fausse. Soit  $M$  une variété lisse, notons  $Z_k(M)$  l'espace-vectoriel des  $k$ -cycles sur  $M$  et notons  $B_k(M)$  celui des bords des  $(k + 1)$ -chaines singulières sur  $M$ . On définit le  $k$ -ème groupe d'homologie de  $M$  comme suit :

$$H_k(M) = Z_k(M) / B_k(M)$$

**Théorème 10. (Théorème de Stokes)** Soient  $M$  une variété lisse,  $\omega \in \Omega^k(M)$  et  $c$  une  $k$ -chaîne singulière sur  $M$ . On a :

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega$$

**Exemple 1.6.3.** Voici un cas particulier du théorème stokes.

- **(Théorème fondamental de l'analyse)** Soient  $M$  une variété lisse et un 1-cube singulier

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow M$$

(on se permet pour des raisons pratiques de prendre comme ensemble de départ  $[a, b]$  au lieu de  $[0, 1]$ ) et  $f$  une 0-forme sur  $M$ , on a :

$$\int_{\gamma} df = \int_{\gamma(b) - \gamma(a)} f = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Le résultat ne dépend donc que des "extrémités" et pas du chemin choisis. Dans le cas où  $M = \mathbb{R}$  on a  $df = f'dx$ , en prenant  $\gamma = \text{Id}_{\mathbb{R}}$ , on obtient :

$$\int_a^b f'dx = f(a) - f(b)$$

## 1.7 Groupes De Lie

On rappelle quelques définitions sur les groupes et les groupes topologiques :

**Définition 1.7.1.** Une action d'un groupe  $G$  sur un ensemble  $S$  est la donnée d'un morphisme de groupes  $\Phi : G \longrightarrow \mathfrak{S}(S)$  où  $\mathfrak{S}(S)$  désigne le groupe des bijections de  $S$  dans lui même.

On définit :

- l'orbite d'un élément  $x \in S$  :  $\mathcal{O}_x = \{\Phi(g)(x) \mid g \in G\}$ .
- le stabilisateur d'un élément  $x \in S$  :  $\mathbf{St}_x = \{g \in G \mid \Phi(g)(x) = x\}$ .
- l'ensemble des points fixes de  $S$  par un élément  $g \in G$  :  $\mathbf{Fix}_g = \{x \in S \mid \Phi(g)(x) = x\}$ .

l'action est dite :

- transitive si  $\forall x \in S, \mathcal{O}_x = S$ .
- libre si  $\forall x \in S, \mathbf{St}_x = \{e\}$  ( $e$  désignant l'élément neutre de  $G$ ).

Si on suppose que  $S$  est une variété lisse et que  $G$  est un groupe discret (i.e muni de la topologie discrète), on dira que l'action de  $G$  sur  $S$  est propre si pour tout compact  $K$  de  $S$  l'ensemble  $\{g \in G \mid gK \cap K \neq \emptyset\}$  est fini.

**Théorème 11.** Soient  $M$  une variété lisse connexe et un groupe discret  $\Gamma \subset \text{Diff}(S)$  agissant sur  $M$  de manière propre et libre. Il existe une unique structure lisse sur  $M/\Gamma$  rendant la projection canonique de  $M$  sur  $M/\Gamma$  une submersion.

**Exemple 1.7.1.** La bouteille de Klein  $K = \mathbb{R}^2 / \langle \tau, \sigma \rangle$  où  $\langle \tau, \sigma \rangle$  désigne le sous-groupe de  $\text{Diff}(M)$  engendré par  $\tau : (x, y) \mapsto (x + 1, y)$  et  $\sigma : (x, y) \mapsto (1 - x, y + 1)$ , muni de la topologie discrète. La bouteille de Klein admet une unique structure de variété lisse rendant la projection canonique de  $\mathbb{R}^2$  sur  $K$  une submersion.

**Définition 1.7.2.** Une variété lisse  $G$  est un groupe de Lie si elle possède une structure de groupe telle que l'application :

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (a, b) &\longmapsto a \cdot b \end{aligned}$$

est lisse.

**Théorème 12.** Soient  $G$  un groupe de Lie et  $H$  un sous-groupe distingué et discret de  $G$  (i.e la topologie induite par  $G$  sur  $H$  est la topologie discrète), il existe une unique structure lisse sur  $G/H$  faisant de la projection canonique de  $G$  sur  $G/H$  une submersion.

**Exemple 1.7.2.** Voici quelques exemples de groupes de Lie.

1.  $\mathbb{R}^n$  est un groupe de Lie.
2.  $S^1$  muni de la loi de composition interne  $\cdot : S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1$  définie comme suit :

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in S^1, \quad (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

3.  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$  est un groupe de Lie (on l'identifie à  $\mathbb{R}^{2n}$  pour le munir d'une structure de variété lisse).
4.  $\text{SL}(n, \mathbb{R})$  est un groupe de Lie. En effet Il s'agit d'une sous-variété de  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$  du fait que l'application  $A \mapsto \det(A)$  est une submersion.

**Proposition 13.** Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret non-trivial de  $\mathbb{R}^n$  (i.e  $\exists r > 0, \nexists e \in \Gamma - \{0\}, \|e\| < r$ ), Il existe  $k \in \{1, \dots, n\}$  et  $e_1, e_2, \dots, e_k \in \mathbb{R}^n$  tels que  $\Gamma = \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2 + \dots + \mathbb{Z}e_k$ .

**Théorème 14.** Soit  $G$  un groupe de Lie agissant de manière lisse et transitive sur une variété lisse  $M$  et soit  $x \in M$ . L'application  $g \mapsto g \cdot a$  passe au quotient en un difféomorphisme de  $G/\text{St}_x$  vers  $M$ .

**Exemple 1.7.3.** Voici quelques exemples.

1.  $S^1$  est difféomorphe à  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . Considérons le morphisme de groupe  $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$  définie par :

$$\Phi(t)(x, y) = (\cos(2\pi t)x - \sin(2\pi t)y, \sin(2\pi t)x + \cos(2\pi t)y), \quad \forall t \in \mathbb{R}, (x, y) \in S^1$$

Il définit une action lisse et transitive (il s'agit d'une rotation) de  $\mathbb{R}$  sur  $S^1$ , et le stabilisateur de tout point de  $S^1$  sous cette action est  $\mathbb{Z}$ .

2. Il s'en suit que  $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^k$  est difféomorphe à  $T^k \times \mathbb{R}^{n-k}$  où  $T^k = (S^1)^k$ .

## 1.8 Flot D'un Champ De Vecteurs

Soit  $M$  une variété lisse et soit  $\gamma : I \longrightarrow M$  un chemin lisse sur  $M$  ( $I$  étant un intervalle ouvert quelconque).  $\forall t_0 \in I$  on peut associer à  $\gamma$  un vecteur tangent :

$$\gamma'(t) = \frac{d\gamma}{dt}|_{t_0} = T_{t_0}\gamma \cdot 1$$

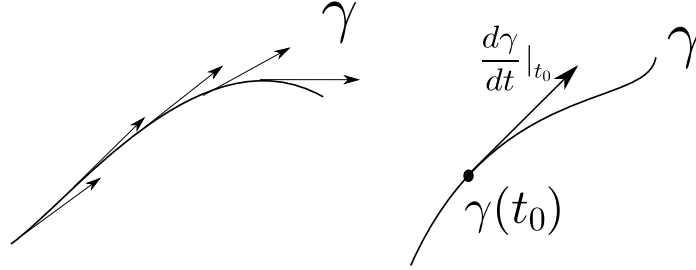


FIGURE 1.5 – vecteurs vitesses

**Définition 1.8.1.** Soit un champ de vecteurs lisse  $X$  sur une variété lisse  $M$ . Un chemin lisse  $\gamma : I \longrightarrow M$  est une courbe intégrale de  $X$  si  $\forall t_0 \in I$  :

$$\frac{d\gamma}{dt}|_{t_0} = X(\gamma(t_0))$$

**Exemple 1.8.1.** Prenons une équation différentielle du premier ordre par exemple :  $\frac{dy}{dt} = t^2 y$ .

Résoudre cette équation revient à trouver les courbes intégrales du champ de vecteurs :

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow T(\mathbb{R}^2) \\ x = (t, y) &\longmapsto (x, v_x) \end{aligned} \quad \text{où : } v_x = \begin{pmatrix} 1 \\ t^2 y \end{pmatrix}$$

Ainsi les courbes intégrales de  $X$  sont de la forme :

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t, Ce^{t^3/3}) \end{aligned} \quad C \in \mathbb{R}$$



**Proposition 15.** Soient  $M$  une variété lisse et  $X$  un champ de vecteurs lisse sur  $M$ .

- $\forall x \in M$ , il existe une unique courbe intégrale de  $X$ , qu'on désignera par  $\gamma_x : ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow M$ , telle que  $\gamma_x(0) = x$ .
- $\forall x_0 \in M$ , Il existe un voisinage ouvert  $U_0$ ,  $\epsilon_0 > 0$  et une unique application lisse :

$$\begin{aligned} \rho_0 : U \times ]-\epsilon_0, \epsilon_0[ &\longrightarrow M \\ (x, t) &\longmapsto \gamma_x(t) \end{aligned}$$

**Définition 1.8.2.** Soit  $M$  une variété lisse de dimension  $n$  et soit  $X$  un champ de vecteurs lisse sur  $M$ . Une application lisse  $\rho : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$  est dite *flot global* de  $X$  si  $\forall x \in M$ ,  $\rho(x, \cdot) = \gamma_x$ .

Une conséquence de la proposition 15 est qu'un champ de vecteurs lisse possède au plus un unique flot global.

**Définition 1.8.3.** Un champ de vecteurs lisse  $X$  est dit *complet* s'il possède un flot global.

**Théorème 16.** Soient  $M$  une variété lisse et  $X$  un champ de vecteurs complet sur  $M$ , de flot global  $\rho$ . L'ensemble :  $\{\rho^t = \rho(\cdot, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$  muni de la composition est un sous-groupe du groupe  $\text{Diff}(M)$  et l'application  $t \mapsto \rho^t$  est un morphisme de groupe additif.

*Démonstration.* Il suffit de montrer que  $G = \{\rho^t = \rho(\cdot, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$  est un groupe. Soient  $x \in M$  et  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ .

Posons  $\tilde{\gamma}_1 = \gamma_{\gamma_x(t_1)}$  et  $\tilde{\gamma}_2 = \gamma_x(\cdot + t_1)$ . Ainsi  $\tilde{\gamma}_1$  et  $\tilde{\gamma}_2$  sont deux courbes intégrales de  $X$  satisfaisants  $\tilde{\gamma}_1(0) = \tilde{\gamma}_2(0) = x$ . De ce on conclut que :  $\tilde{\gamma}_1 = \tilde{\gamma}_2$ .

Ce qui implique que :

$$\rho^{t_2+t_1}(x) = \gamma_x(t_2 + t_1) = \gamma_{\gamma_x(t_1)}(t_2) = (\rho^{t_2} \circ \rho^{t_1})(x)$$

Et ce quelque soit  $x$  dans  $M$  i.e :

$$\rho^{t+t_0} = \rho^t \circ \rho^{t_0}$$

On peut conclure :

1. La composition est une loi interne associative sur  $G$ .
2.  $(\forall x \in M, \rho^0(x) = \rho(x, 0) = \gamma_x(0) = x)$  et donc  $\rho^0 = \text{Id}_M$ .
3.  $\forall t \in \mathbb{R}, \rho^t \circ \rho^{-t} = \rho^0 = \text{Id}_M$ .

Donc  $G$  est un groupe abélien et un sous-groupe de  $\text{Diff}(M)$  et il a été montré que l'application  $t \mapsto \rho^t$  est un morphisme de groupe additif.  $\square$

Soit  $X$  un champ de vecteurs lisse complet sur une variété lisse  $M$ , de flot global  $\rho$ . Nous noterons désormais  $\exp tX$  le difféomorphisme  $\rho^t = \rho(\cdot, t)$ .

**Théorème 17.** *Tout champ de vecteur lisse sur une variété lisse compacte est complet.*

*Démonstration.* Soient  $M$  une variété lisse compacte de dimension  $n$  et  $X$  un champ de vecteurs lisses sur  $M$ . Pour tout point  $x$  il existe  $\epsilon_x > 0$  et un voisinage  $U_x$  de  $x$  où un flot locale de  $X$ ,  $\rho_x : U_x \times ]-\epsilon_x, \epsilon_x[ \rightarrow M$  est bien défini. Les  $U_x$  forment ainsi un recouvrement ouvert de  $M$ . Comme  $M$  est compacte on peut extraire de ce recouvrement un sous-recouvrement fini  $\{U_{x_i}\}_{i \in I}$  où  $I$  est un ensemble fini. Remarquons que :

- $\epsilon = \min_{i \in I} \epsilon_{x_i}$  est strictement positif.
- $\forall i, j \in I$ , si  $U_{x_i} \cap U_{x_j} \neq \emptyset$  alors  $\rho_{x_i}|_{U_{x_i} \cap U_{x_j}} = \rho_{x_j}|_{U_{x_i} \cap U_{x_j}}$

Cela nous permet de définir un flot  $\rho : M \times ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow M$  sur tout  $M$  coïncidant avec les flots locaux précédents sur les ouverts où ils sont définis. Nous pouvons étendre  $\rho$  en un flot global :

$$\begin{aligned} \bar{\rho} : M \times \mathbb{R} &\longrightarrow M & \text{où : } (n, r) &\text{est l'unique couple de } \mathbb{Z} \times [0, \epsilon/2] \\ (x, t) &\longmapsto \underbrace{(\rho^{\epsilon/2} \circ \rho^{\epsilon/2} \circ \dots \circ \rho^{\epsilon/2})}_n \circ \rho^r(x) & \text{satisfaisant : } t &= n\epsilon/2 + r \end{aligned}$$

□

Soit  $M$  une variété lisse et soit  $X$  et  $Y$  deux champs de vecteurs lisses et complets sur  $M$ . On peut aisément vérifier que l'application suivante est une dérivation sur  $C^\infty(M)$ .

$$\begin{aligned} C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ f &\longmapsto X \cdot (Y \cdot f) - Y \cdot (X \cdot f) \end{aligned}$$

Nous savons qu'à toute dérivation de  $C^\infty(M)$  correspond un unique champ de vecteurs. Nous noterons celui correspondant à la dérivation ci-dessus  $[X, Y]$  et nous l'appellerons *crochet de Lie* de  $X$  et  $Y$ . Autrement dit on a :

$$\forall f \in C^\infty(M), \quad [X, Y] \cdot f = X \cdot (Y \cdot f) - Y \cdot (X \cdot f)$$

et  $\mathfrak{X}(M)$  (vu comme un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel) muni du crochet de Lie est une algèbre de Lie.

**Définition 1.8.4.** *Soit  $X$  un champ de vecteurs lisse sur une variété lisse  $M$ . La dérivée de lie associée à  $X$  d'une  $k$ -forme différentielle  $\omega$  est une  $(k-1)$ -forme différentielle  $\mathcal{L}_X \omega$  définie comme suit :*

$$\mathcal{L}_X \omega = \frac{d}{dt} (\exp tX)^* \omega|_{t=0}$$

Ainsi sur une variété lisse  $M$ . La dérivée de lie associée à un champ de vecteurs lisse  $X$  d'une application  $f \in C^\infty(M)$  est simplement :

$$\mathcal{L}_X f = X \cdot f$$

**Théorème 18.** Soit  $M$  une variété lisse, on a pour tous  $\omega \in \Omega^k(M)$ ,  $\eta \in \Omega^l(M)$  et  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  :

1.  $d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^k \eta \wedge d\omega$  (i.e  $d$  est une anti-dérivation de  $\Omega(M)$ ).
2.  $\iota_X(\omega \wedge \eta) = (\iota_X\omega) \wedge \eta + (-1)^k \eta \wedge \iota_X\omega$  (i.e  $\iota_X$  est une anti-dérivation de  $\Omega(M)$ ).
3.  $\mathcal{L}_X\omega = \iota_X d\omega + d(\iota_X\omega)$  (**Formule de Cartan**).
4.  $\frac{d}{dt}(\exp tX)^*\omega = (\exp tX)^*\mathcal{L}_X\omega$ .
5.  $\iota_{[X,Y]}\omega = \mathcal{L}_X\iota_Y\omega - \iota_Y\mathcal{L}_X\omega$ .

**Théorème 19.** Soient  $M$  une variété lisse,  $X$  et  $Y$  deux champs de vecteurs lisses et complets sur  $M$ .

$$[X, Y] = 0 \iff \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}, (\exp t_1 X) \circ (\exp t_2 Y) = (\exp t_2 Y) \circ (\exp t_1 X)$$

## 1.9 Cohomologie De Rham et Homotopie

**Définition 1.9.1.** Soient  $M$  et  $N$  deux variétés lisses. On dit de deux applications lisses  $f : M \rightarrow N$  et  $g : M \rightarrow N$  qu'elles sont homotopes s'il existe une application continue  $F : [0, 1] \times M \rightarrow N$  telle que :

- $\forall t \in [0, 1], F(t, \cdot)$  est lisse.
- $F(0, \cdot) = f$  et  $F(1, \cdot) = g$ .

**Définition 1.9.2.** Soient  $M$  et  $N$  deux variétés lisses. On dit qu'elles ont même type d'homotopie s'il existe deux applications lisses  $f : M \rightarrow N$  et  $g : N \rightarrow M$  telle que :  $f \circ g$  est homotope à  $\text{Id}_M$ , et  $g \circ f$  homotope à  $\text{Id}_N$ . On dit des applications  $f$  et  $g$  qu'elles sont des équivalences d'homotopie.

On conclut ce chapitre avec le théorème suivant qui nous sera utile ultérieurement.

**Théorème 20.** Soient  $M$  et  $N$  deux variétés lisses et  $f : M \rightarrow N$  une application lisse. Si  $f$  est une équivalence d'homotopie alors  $\forall k > 0$  l'application :

$$\begin{aligned} h^k(f) : H^k(N) &\longrightarrow H^k(M) \\ [\alpha] &\longmapsto [f^*\alpha] \end{aligned}$$

est un isomorphisme de  $\mathbb{R}$ -espaces-vectoriels.

**Exemple 1.9.1.** Soient  $M$  une variété lisse et  $N$  une sous-variété lisse de  $M$  telle que  $M \cong N \times B(0, r)$ , où  $B(0, r)$  désigne la boule ouverte de rayon  $r$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Considérons une  $k$ -forme différentielle  $\omega$  fermée sur  $M$  et exacte sur  $N$ . Considérons les applications lisses suivantes (on va identifier  $M$  à  $N \times B(0, r)$  pour simplifier les calculs) :

$$\begin{aligned} f : M \cong N \times B(0, r) &\longrightarrow N & \text{et : } g : N &\longrightarrow M \cong N \times B(0, r) \\ (x, y) &\longmapsto x & x &\longmapsto (x, 0) \end{aligned}$$

Évidemment  $f \circ g$  est homotope  $\text{Id}_N$  puisqu'elle lui est égale. D'autre part il est facile de construire une homotopie de  $g \circ f$  vers  $\text{Id}_M$ . Prenons l'application suivante :

$$\begin{aligned} F : [0, 1] \times M &\longrightarrow M \\ (t, x, y) &\longmapsto (x, ty) \end{aligned}$$

On a bien  $F(0, \cdot) = g \circ f$  et  $F(1, \cdot) = \text{Id}_M$  en plus  $\forall t \in [0, 1], F(t, \cdot)$  est clairement lisse. On conclut que  $M$  et  $N$  ont même type d'homotopie, et entre autre que  $f$  est une équivalence d'homotopie. Il s'en suit que  $h^k(f)([\omega]) = [f^*\omega] = 0$ . D'où l'on conclut que  $[\omega] = 0$ . Autrement dit  $\omega$  est exacte sur  $M$ .

On remarquera que si dans l'exemple ci-dessus  $N$  était un point (i.e une sous-variété de dimension 0) alors on retrouverait une version faible du lemme de Poincaré qui est que dans une boule ouverte toute forme différentielle fermée est exacte. Il s'ensuit que dans une variété quelconque toute forme fermée est localement exacte, du fait que tout point de cette variété possède un voisinage difféomorphe à une boule ouverte.

# Variétés Symplectiques

Une variété symplectique est une variété lisse de dimension paire possédant une structure symplectique. Celle-ci n'est rien d'autre que la donnée d'une 2-forme différentielle fermée sur la variété, définissant en tout point de la variété une forme bilinéaire non-dégénérée. On dit d'une telle forme différentielle que c'est une forme symplectique. L'exemple le plus familier de variété symplectique est sûrement  $\mathbb{R}^2$  muni du déterminant. Le déterminant pouvant s'interpréter géométriquement comme l'aire orientée d'un parallélogramme, un symplectomorphisme linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans lui-même est un isomorphisme d'espaces-vectoriels préservant les dites aires orientées. Dans un cadre plus général, un symplectomorphisme est un difféomorphisme préservant la forme symplectique.

## 2.1 Espaces Vectoriels Symplectiques

Nous allons d'abord examiner l'exemple le plus trivial de variétés symplectiques qui sont les espaces vectoriels symplectiques.

**Définition 2.1.1.** *Un espace vectoriel symplectique est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension paire munie d'une forme bilinéaire  $\Omega$  antisymétrique et non-dégénérée i.e :*

$$\forall u \in V - \{0\}, \exists v \in V, \quad \Omega(u, v) \neq 0$$

**Exemple 2.1.1.**  $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega = \sum_{i=1}^n p^i \wedge q^i)$ , avec  $p^1, \dots, p^n, q^1, \dots, q^n$  les coordonnées usuelles de  $\mathbb{R}^{2n}$ , est un espace vectoriel symplectique.

En effet étant donné  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in V - \{0\}$  on a :

$$\forall v \in V, \quad \Omega(u, v) = \underbrace{\begin{pmatrix} -u_{n+1} & -u_{n+2} & \dots & -u_{2n} & u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{pmatrix}}_A \cdot v$$

La matrice  $A$  est de rang 1 et donc  $\ker(\Omega(u, \cdot))$  est de dimension  $2n - 1 < 2n$ . Ce qui prouve que  $\Omega(u, \cdot)$  n'est pas identiquement nulle.

**Définition 2.1.2.** Soit  $(V, \Omega)$  un espace vectoriel symplectique de dimension  $2n$  et soit  $W$  un sous-espace vectoriel de  $V$ . On appelle orthogonal symplectique de  $W$  dans  $V$ , le sous-espace vectoriel

$$W^\Omega = \{v \in V \mid \forall w \in W, \Omega(v, w) = 0\}$$

**Proposition 21.** Soit  $(V, \Omega)$  un espace vectoriel symplectique de dimension  $2n$  et  $W$  et  $U$  deux sous-espaces vectoriels de  $V$ . Les propositions suivantes sont vérifiées :

1.  $\dim W + \dim W^\Omega = \dim V$ .
2.  $W \subseteq U \implies U^\Omega \subseteq W^\Omega$  (et donc en particulier  $(W^\Omega)^\Omega = W$ ).
3.  $(W, \Omega)$  est symplectique si et seulement si :  $W \cap W^\Omega = \{0\}$ .

*Démonstration.* Remarquons que  $W^\Omega$  est en fait le noyau du morphisme :

$$\begin{aligned} f : V &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(W, \mathbb{R}) \\ u &\longmapsto \Omega(u, \cdot) \end{aligned}$$

1. Comme  $\Omega$  est non-dégénérée  $\ker f|_W = \{0\}$  et donc  $f|_W$  une application linéaire injective entre deux espaces vectoriels de même dimension, et donc un isomorphisme. Il s'ensuit que :

$$\dim W = \dim \text{Im} f|_W = \dim \text{Im} f$$

On a alors :

$$\dim W + \dim W^\Omega = \dim \text{Im} f + \dim \ker f = \dim V$$

2.

$$\begin{aligned} W \subseteq U &\implies \left( \forall u \in U^\Omega, \forall v \in W, \Omega(u, v) = 0 \right) \\ &\implies \left( \forall u \in U^\Omega, u \in W^\Omega \right) \\ &\implies U^\Omega \subseteq W^\Omega \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} (W, \Omega) \text{ est symplectique} &\iff (\forall u \in W - \{0\}, \exists v \in W, \Omega(u, v) \neq 0) \\ &\iff \ker f \cap W = \{0\} \\ &\iff W^\Omega \cap W = \{0\} \end{aligned}$$

Il découle de (1) et de (3) que :  $(W, \Omega)$  est symplectique  $\iff V = W \oplus W^\Omega$

□

**Définition 2.1.3.** Soit  $(V, \Omega)$  un espace vectoriel symplectique de dimension  $2n$  et soit  $W$  un sous-espace vectoriel de  $V$ .

1.  $W$  est dit isotrope si :  $W \subseteq W^\Omega$  (i.e la restriction de  $\Omega$  à  $W^2$  est identiquement nulle).
2.  $W$  est dit co-isotrope si :  $W^\Omega \subseteq W$ .
3.  $W$  est dit lagrangien s'il est isotrope et  $\dim W = \frac{1}{2} \dim V$ .

**Proposition 22.** Soit  $(V, \Omega)$  un espace vectoriel symplectique de dimension  $2n$  et soit  $W$  un sous-espace vectoriel de  $V$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :

1.  $W$  est lagrangien.
2.  $W^\Omega = W$  (i.e  $W$  est à la fois isotrope et co-isotrope).

*Démonstration.*

(1  $\implies$  2) Si  $W$  est lagrangien alors il est isotrope i.e  $W \subseteq W^\Omega$ , et d'autre part :

$$\dim W^\Omega = \dim V - \dim W = \frac{1}{2} \dim V = \dim W$$

ce qui implique que  $W = W^\Omega$ .

(2  $\implies$  1) Si  $W = W^\Omega$  alors  $W$  est isotrope et :  $\dim W = \dim W^\Omega = \frac{1}{2} \dim V$ . Donc  $W$  est lagrangien. □

**Proposition 23.** Soit  $(V, \Omega)$  un espace vectoriel symplectique de dimension  $2n$ . Il existe une base  $e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n$  de  $V$  telle que  $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$  :

$$\begin{aligned} \Omega(e_i, e_j) &= \delta_{i,j} \\ \Omega(e_i, e_j) &= \Omega(f_i, f_j) = 0 \end{aligned}$$

*Démonstration.* Par construction. Il s'agit variante du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

- On construit successivement  $n$  couples  $(e_i, f_i) \in V^2$ ,  $1 \leq i \leq n$ .
- Remarquons que si  $\omega(e_i, f_i) = 1$  alors  $W_i = \text{Vect}(e_i, f_i)$  est clairement symplectique et de même pour  $W_i^\Omega$ . Il est alors possible de prendre  $e_{i+1}, f_{i+1} \in W_i^\Omega$  tels que  $\omega(e_{i+1}, f_{i+1}) = 1$ . Ceci car la restriction de  $\Omega$  à  $W_i^\Omega \times W_i^\Omega$  est non-dégénérée.
- Il suffit donc de choisir dès le départ  $e_1$  et  $f_1$  tels que  $\omega(e_1, f_1) = 1$ . Pour pouvoir construire  $n$  sous-espaces vectoriels  $\{W_i = \text{Vect}(e_i, f_i)\}_{1 \leq i \leq n}$  satisfaisants :

$$W_1 \oplus W_1^\Omega = V \quad \text{et} \quad W_i \oplus W_i^\Omega = W_{i-1}, \quad \forall i \in \{2, 3, \dots, n\}$$

et donc

$$W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_n = V$$

et nous avons bien  $\Omega(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$  et  $\Omega(e_i, e_j) = \Omega(f_i, f_j) = 0, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$

□

On dit des vecteurs  $e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n$  qu'ils forment une base symplectique de  $(V, \Omega)$ . Dans cette base la matrice de la forme bilinéaire  $\Omega$  s'écrit :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

On peut aussi exprimer  $\Omega$  à l'aide de la base duale  $e_1^*, \dots, e_n^*, f_1^*, \dots, f_n^*$  comme suit :

$$\Omega = \sum_{i=1}^n e_i^* \wedge f_i^*$$

**Définition 2.1.4.** Un isomorphisme  $f : V_1 \longrightarrow V_2$  entre deux espaces-vectoriels symplectiques  $(V_1, \Omega_1)$  et  $(V_2, \Omega_2)$  est un symplectomorphisme linéaire si :

$$\forall x, y \in V, \quad \Omega_2(f(x), f(y)) = \Omega_1(x, y)$$

Les symplectomorphismes de  $\mathbb{R}^{2n}$  dans lui même forment un groupe. Si on représente les symplectomorphismes par des matrices ce groupe est :

$$\text{Sp}(2n, \mathbb{R}) = \{M \in \text{GL}(n, \mathbb{R}) \mid M^t J M = J\}$$

## 2.2 Variétés Symplectiques

**Définition 2.2.1.** Soit  $M$  une variété lisse, une 2-forme différentielle  $\omega$  est dite 2-forme symplectique sur  $M$  si elle est fermée et  $\forall x \in M, \omega_x$  est non-dégénérée.

**Définition 2.2.2.** Une variété symplectique est une variété lisse de dimension paire, munie d'une 2-forme symplectique.

Il s'ensuit que si  $(M, \omega)$  est une variété symplectique alors  $\forall x \in M, (T_x M, \omega_x)$  est un espace vectoriel symplectique.

**Exemple 2.2.1.**  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega = \sum_{i=1}^n dp^i \wedge dq^i)$  est une variété symplectique de dimension  $2n$ . En effet en plus d'être clairement non-dégénérée en tout point de la variété,  $\omega$  est aussi fermée car elle est exacte :

$$\omega = -d \left( \sum_{i=1}^n q^i dp^i \right)$$



**Exemple 2.2.2.** Prenons  $S^2$  muni d'une 2-forme  $\omega$  définie en tout point  $x \in S^2$  par :

$$u, v \in T_x M, \quad \omega_x(u, v) = x \cdot (u \times v)$$

Comme  $\omega$  est de degré maximal, elle est fermée. De plus elle est non-dégénérée en tout point  $x \in S^2$  car :

$$\forall u \neq 0_{\mathbb{R}^3}, \quad \omega_x(u, u \times x) = x \cdot (u \times (u \times x)) = x \cdot ((u \cdot x)u - \|u\|^2 x) = \|u\|^2 \neq 0$$

On conclut que  $(S^2, \omega)$  est une variété symplectique de dimension 2.

**Exemple 2.2.3.** Soit  $M$  une variété lisse de dimension  $n$  et  $(M, T^*M, \pi)$  son fibré cotangent. On définit la *forme de Liouville* sur  $T^*M$  :

$$\begin{aligned} \alpha : T^*M &\longrightarrow T^*(T^*M) \\ (x, y) &\longmapsto \alpha_{(x, y)} = y \circ T_{(x, y)} \pi \end{aligned}$$

Il s'agit d'une 1-forme différentielle sur  $T^*M$ . On peut alors construire une 2-forme différentielle  $\omega = -d\alpha$ , naturellement  $\omega$  est fermée car elle est exacte. Montrons qu'en tout point  $(x, y) \in T^*M$  la forme bilinéaire  $\omega_{(x, y)}$  est non-dégénérée.

Prenons une carte  $(U, \phi)$  de  $M$  avec  $\phi = (\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^n)$ . Considérons les applications  $q^i : T^*U \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  associées à tout couple  $(x, y) \in T^*U$  la  $i$ -ème composante de  $y$  dans la base  $\{d_x \phi^i\}_{0 \leq i \leq n}$  i.e :

$$\forall (x, y) \in T^*U, \quad y = \sum_{i=1}^n q^i(x, y) d_x \phi^i$$

On peut donc construire une carte  $(T^*U, p^1, \dots, p^n, q^1, \dots, q^n)$  de  $T^*M$  en prenant  $p^i = \phi^i \circ \pi$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ .

On a alors  $\forall (x, y) \in TU$  :

$$\alpha_{(x, y)} = \left( \sum_{i=1}^n q^i(x, y) d_x \phi^i \right) \circ T_{(x, y)} \pi = \sum_{i=1}^n q^i(x, y) d_{(x, y)} (\phi^i \circ \pi)$$

On retrouve :

$$\alpha = \sum_{i=1}^n q^i dp^i$$

et donc :

$$\omega = \sum_{i=1}^n dp^i \wedge dq^i$$

D'où l'on conclut que  $\omega$  est une forme symplectique sur  $T^*U$ , puis finalement que  $\omega$  est en fait une forme symplectique sur  $M$  tout entier. Autrement dit  $(T^*M, \omega)$  est une variété symplectique de dimension  $2n$ . On appelle  $\omega$  la forme symplectique canonique sur  $T^*M$

## 2.3 Volume Symplectique

**Définition 2.3.1.** Soit  $M$  une variété lisse de dimension  $n$ . Une forme volume sur  $M$  est une  $n$ -forme différentielle ne s'annulant nul part sur la variété.

- Une variété possédant une forme volume est dite orientable.
- Deux formes volumes sur  $M$  :  $\text{Vol}_1$  et  $\text{Vol}_2$  sont dites équivalentes s'il existe  $f \in C^\infty(M)$  strictement positive telle que  $\text{Vol}_1 = f \text{Vol}_2$ .
- Une orientation sur un variété lisse est la donnée d'une classe d'équivalence de formes volumes. On dit alors que la variété est orientée.
- On dit d'un difféomorphisme  $f : M \rightarrow N$  entre deux variétés orientées de formes volumes respectives  $\text{Vol}_M$  et  $\text{Vol}_N$  qu'il préserve l'orientation si  $f^* \text{Vol}_N = \text{Vol}_M$ .

**Proposition 24.** Soit  $(M, \omega)$  une variété symplectique de dimension  $2n$ . La  $2n$ -forme  $\omega^n = \underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_n$  est une forme volume (appelée volume symplectique de  $(M, \omega)$ ).

*Démonstration.* Soit  $x \in M$ , il suffit de montrer que  $(\omega^n)_x$  est non-nulle.

Il existe une base symplectique  $e^1, e^2, \dots, e^n, f^1, f^2, \dots, f^n$  de  $T_x M$  telle que :

$$\omega_x = \sum_{i=1}^n e_i^* \wedge f_i^*$$

Cela implique que :

$$(\omega^n)_x = \sum_{\sigma \in S_n} e_{\sigma(1)}^* \wedge f_{\sigma(1)}^* \wedge e_{\sigma(2)}^* \wedge f_{\sigma(2)}^* \wedge \dots \wedge e_{\sigma(n)}^* \wedge f_{\sigma(n)}^*$$

et donc :

$$(\omega^n)_x = n! e_1^* \wedge f_1^* \wedge e_2^* \wedge f_2^* \wedge \dots \wedge e_n^* \wedge f_n^*$$

Qui est bien sûr non-identiquement nulle du fait que les  $e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*, f_1^*, f_2^*, \dots, f_n^*$  sont linéairement indépendants.  $\square$

**Exemple 2.3.1.** La bouteille de Klein  $K = \mathbb{R}^2 / \langle \tau, \sigma \rangle$  traitée à l'exemple 1.7.1 est non-orientable car si on suppose l'existence d'une forme symplectique/volume  $\omega$  sur  $K$ , il s'ensuit que  $\tilde{\omega} = \pi^* \omega$  où  $\pi$  est la projection canonique de  $\mathbb{R}^2$  dans  $K$ , peut s'écrire sous la forme  $\tilde{\omega} = f dx \wedge dy$  où  $f$  est une application lisse de  $\mathbb{R}^2$  vers  $\mathbb{R}$  et  $x, y$  les coordonnées usuelles de  $\mathbb{R}^2$ . On doit donc avoir  $\sigma^* \tilde{\omega} = \tilde{\omega}$  autrement dit  $f$  doit vérifier  $f(1-x, y+1) = -f(x, y)$ . Ce qui implique que  $f$  doit s'annuler (car elle est continue sur  $\mathbb{R}^2$  et change de signe). On en conclut qu'il en est de même pour  $\omega$ , ce qui est absurde car contredit l'hypothèse que  $\omega$  est une forme symplectique/volume.

La bouteille de Klein est donc non-orientable et ne peut pas être munie d'une structure symplectique.

## 2.4 Symplectomorphismes

**Définition 2.4.1.** Soit  $(M, \omega)$  et  $(N, \eta)$  deux variétés symplectiques, un difféomorphisme  $f : M \rightarrow N$  est un symplectomorphisme si :

$$f^*\eta = \omega$$

**Exemple 2.4.1.** Soit  $M$  et  $N$  des variétés lisses. Prenons les variétés symplectiques  $T^*M$  et  $T^*N$  munies de leurs formes symplectiques canoniques respectives  $\omega_M$  et  $\omega_N$ . Désignons simplement par  $\alpha_M$  et  $\alpha_N$  leurs formes de Liouville respectives et par  $\pi_M : T^*M \rightarrow M$  et  $\pi_N : T^*N \rightarrow N$  les projections respectives des fibrés  $T^*M$  et  $T^*N$ .

- À tout difféomorphisme  $f : M \rightarrow N$  on peut correspondre un symplectomorphisme

$$\begin{aligned} f_\# : T^*M &\rightarrow T^*N \\ (x, y) &\mapsto (f(x), y \circ (T_x f)^{-1}) \end{aligned}$$

En effet il s'agit clairement d'un difféomorphisme et en plus de cela on a  $\forall (x, v) \in T^*M$  :

$$\begin{aligned} (T_{(x,y)} f_\#)^*(\alpha_N)_{f_\#(x,y)} &= y \circ (T_x f)^{-1} \circ T_{f_\#(x,y)} \pi_N \circ T_{(x,y)} f_\# \\ &= y \circ (T_x f)^{-1} \circ T_{(x,y)} (\pi_N \circ f_\#) \\ &= y \circ (T_x f)^{-1} \circ T_{(x,y)} (f \circ \pi_M) \\ &= y \circ (T_x f)^{-1} \circ T_x f \circ T_{(x,y)} \pi_M = y \circ T_x \pi_M = (\alpha_M)_{(x,y)} \end{aligned}$$

et donc :  $f_\#^* \alpha_N = \alpha_M \implies -f_\#^*(d\alpha_N) = -d\alpha_M \implies f_\#^* \omega_N = \omega_M$ . D'où l'on conclut que  $f_\#$  est bien un symplectomorphisme.

**Remarques.** Un symplectomorphisme préserve les volumes symplectiques et donc en particulier les orientations.

## 2.5 Sous-variétés Lagrangiennes

**Définition 2.5.1.** Une sous-variété lagrangienne d'une variété symplectique  $(M, \omega)$ , est une sous-variété lisse  $N$  de  $M$  de dimension  $\dim N = \frac{1}{2} \dim M$ , et telle que la restriction de  $\omega$  à  $N$  est identiquement nulle.

**Exemple 2.5.1.** Soit  $M$  une variété lisse de dimension  $n$ . Prenons une nouvelle fois  $T^*M$  muni de la forme symplectique canonique  $\omega = -d\alpha$ . Considérons la section nulle de  $T^*M$  i.e  $s : M \rightarrow T^*M$  telle que  $\forall x \in M, s(x) = (x, 0_{T_x^*M})$ . Comme  $\forall x \in M, T_x s$  est clairement injective et que  $s$  définit un homéomorphisme de  $M$  vers  $s(M)$ , on en déduit donc que  $s$  est un plongement. En notant  $S = s(M)$  on peut alors dire que  $S$  est une sous-variété de  $T^*M$  de dimension  $n$ , qui est lagrangienne car  $s^* \alpha = 0$  et donc :  $s^* \omega = -s^* d\alpha = -d(s^* \alpha) = 0$ .

# Mécanique Hamiltonienne

On définit un analogue symplectique du gradient d'une fonction en exploitant le fait qu'une forme symplectique est en tout point non-dégénérée. Ces gradients symplectiques sont appelés champs de vecteurs hamiltoniens. On étudie les flots des champs de vecteurs hamiltoniens complets. On démontre notamment que dans certains cas très particuliers les courbes intégrales d'un champ de vecteurs hamiltonien sont des droites sur des tores. Il s'agit du théorème d'Arnold-Liouville.

## 3.1 Champs de Vecteurs Hamiltoniens

**Théorème 25.** Soit  $(M, \omega)$  une variété symplectique et soit  $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$  une application lisse. Il existe un unique champ de vecteurs lisse  $X_H$  tel que  $\iota_{X_H}\omega = dH$ .

*Démonstration.* En tout point  $x \in M$  on peut définir une application linéaire :

$$\begin{aligned} I_x : T_x M &\longrightarrow T_x^* M \\ v &\longmapsto \omega_x(v, \cdot) \end{aligned}$$

Comme  $\omega_x$  est non-dégénérée  $\ker I_x = \{0\}$ ,  $I_x$  est donc une application linéaire injective entre deux espaces vectoriels de même dimension et donc un isomorphisme.

Il s'en suit qu'on puisse associer à toute 1-forme  $\eta$  sur  $M$ , un champ de vecteurs lisse :

$$\begin{aligned} X : M &\longrightarrow TM \\ x &\longmapsto I_x^{-1}(\eta_x) \end{aligned}$$

Il s'agit de l'unique champ de vecteurs tel que  $\forall x \in M, \eta_x = \omega_x(X(x), \cdot)$  autrement dit pour lequel on aie :  $\eta = \iota_X \omega$ .

On en conclut que pour toute application lisse  $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$  il existe un unique champ de vecteurs  $X_H$  tel que  $dH = \iota_{X_H} \omega$ .  $\square$

**Exemple 3.1.1.** Prenons  $(\mathbb{R}^2, \omega = dp \wedge dq)$  et prenons  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $H(x, y) = x^2 + y^2$  on a alors  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$  et  $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in T_{(x,y)}(\mathbb{R}^2)$  :

$$d_{(x,y)}H(u) = 2xu_2 + 2yu_2 = \det \begin{pmatrix} u_1 & -2y \\ u_2 & 2x \end{pmatrix}$$

On en déduit que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$  :

$$X_H(x, y) = \begin{pmatrix} -2y \\ 2x \end{pmatrix}$$

**Définition 3.1.1.** Un champ de vecteurs lisse et complet  $X$  sur une variété symplectique  $(M, \omega)$ , est dit :

- hamiltonien s'il existe une application lisse  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $X = X_H$ .
- symplectique si  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $\exp tX$  est un symplectomorphisme.

**Proposition 26.** Soit  $X$  un champ de vecteurs lisse et complet sur une variété symplectique  $(M, \omega)$ .

- (1)  $X$  est hamiltonien si et seulement si  $\iota_X \omega$  est exacte.
- (2)  $X$  est symplectique si et seulement si  $\iota_X \omega$  est fermée.

*Démonstration.*

- (1)  $X$  est hamiltonien  $\iff (\exists H \in C^\infty(M), X = X_H) \iff (\exists H \in C^\infty(M), \iota_X \omega = dH) \iff \iota_X \omega$  est exacte.

- (2) On sait que  $(\exp 0X)^* \omega = \omega$  et on a :

$$\frac{d}{dt}(\exp tX)^* \omega = (\exp tX)^* \mathcal{L}_X \omega = (\exp tX)^* (d(\iota_X \omega) + \underbrace{\iota_X d\omega}_{=0}) = (\exp tX)^* d(\iota_X \omega)$$

Il en découle que :

$$((\exp tX)^* \omega = \omega, \forall t \in \mathbb{R}) \iff d(\iota_X \omega) = 0$$

Autrement dit  $X$  est symplectique si et seulement si  $\iota_X \omega$  est fermée. □

**Remarques.**

- Tout champ de vecteurs hamiltonien est symplectique.
- Aussi, compte tenu du lemme de Poincaré, tout champ de vecteurs symplectique est localement hamiltonien.

Soit  $(M, \omega)$  une variété symplectique et  $f, g \in C^\infty(M)$ . On définit le crochet de Poisson de  $f$  et  $g$  :

$$\{f, g\} \stackrel{def}{=} \omega(X_f, X_g)$$

On a donc :

$$\{f, g\} = \iota_{X_g} \iota_{X_f} \omega = \iota_{X_g} df = df(X_g) = X_g \cdot f$$

**Proposition 27.** Soit  $(M, \omega)$  un variété symplectique,  $\forall f, g, h \in C^\infty(M)$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ , les propositions suivantes sont vérifiées :

1.  $\{f, g\} = -\{g, f\}$ .
2.  $\{f, \alpha g + h\} = \alpha \{f, g\} + \{f, h\}$ .
3.  $\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, g\}$ .
4.  $-[X_f, X_g] = X_{\{f, g\}}$ .
5.  $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ .

*Démonstration.* Soit  $f, g, h \in C^\infty(M)$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

1.

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g) = -\omega(X_g, X_f) = -\{g, f\}$$

2.

$$\begin{aligned} \{f, \alpha g + h\} &= -d(\alpha g + h) \circ X_f \\ &= -\alpha dg \circ X_f - dh \circ X_f \\ &= \alpha \{f, g\} + \{f, h\} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \{f, gh\} &= -d(gh) \circ X_f \\ &= -(h \cdot dg) \circ X_f - (g \cdot dh) \circ X_f \\ &= -h(dg \circ X_f) - g(dh \circ X_f) \\ &= \{f, g\}h + g\{f, h\} \end{aligned}$$

4.

$$\iota_{[X_f, X_g]} \omega = \mathcal{L}_{X_f}(\iota_{X_g} \omega) - \underbrace{\iota_{X_f}(\mathcal{L}_{X_g} \omega)}_{=0} = d(\iota_{X_f}(\iota_{X_g} \omega)) + \underbrace{\iota_{X_f} d(\iota_{X_g} \omega)}_{=0} = d(\omega(X_g, X_f)) = -d\{f, g\}$$

Ce qui implique que :  $X_{\{f, g\}} = -[X_f, X_g]$ .

5.

$$\begin{aligned} \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} &= X_f \cdot \{h, g\} - X_g \cdot \{h, f\} \\ &= X_f \cdot (X_g \cdot h) - X_g \cdot (X_f \cdot h) \\ &= [X_f, X_g] \cdot h \\ &= -X_{\{f, g\}} \cdot h \\ &= -\{\{f, g\}, h\} \end{aligned}$$

Ce qui implique que :  $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ .

□

**Remarques.**

- De (2) et (3) on conclut que  $\forall f \in C^\infty(M)$ , l'application  $\{f, \cdot\}$  est une dérivation sur  $C^\infty(M)$ .
- De (4) on conclut que le crochet de Lie de deux champs de vecteurs hamiltoniens est lui aussi un champ de vecteurs hamiltonien.
- On remarquera qu'il est aussi vrai que le crochet de Lie de deux champs de vecteurs symplectiques est un champ de vecteurs hamiltonien (et donc symplectique). La démonstration est la même que pour (4).
- En notant  $\mathfrak{X}^{symp}(M)$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des champs de vecteurs symplectiques sur  $M$ , et  $\mathfrak{X}^{ham}(M)$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des champs de vecteurs hamiltoniens sur  $M$ , il est clair que  $(\mathfrak{X}^{symp}(M), [\cdot, \cdot])$  est une sous-algèbre de Lie de  $(\mathfrak{X}^{ham}(M), [\cdot, \cdot])$  qui est elle-même une sous-algèbre de Lie de  $(\mathfrak{X}, [\cdot, \cdot])$ .
- De (1) et (5) on conclut que  $(C^\infty(M), \{\cdot, \cdot\})$  est aussi une algèbre de Lie et pour tout  $X \in \mathfrak{X}(M)$  l'application  $f \rightarrow X_f$  est un anti-morphisme de  $\mathbb{R}$ -algèbres.

**Exemple 3.1.2.** En prenant  $(M = \mathbb{R}^{2n}, \omega = \sum_{i=1}^n dp^i \wedge dq^i)$ . Le champ de vecteur hamiltonien associé à  $H \in C^\infty(M)$  prend la forme :

$$X_H = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \right)$$

En effet on a bien :

$$\iota_{X_H} \omega = \iota_{X_H} \left( \sum_{i=1}^n dp^i \wedge dq^i \right) = \sum_{i=1}^n \left( (\iota_{X_H} dp^i) \wedge dq^i - dp^i \wedge (\iota_{X_H} dq^i) \right) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} dq^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp^i \right) = dH$$

Les courbes intégrales d'un champ de vecteurs hamiltonien  $X_H$  sont alors les solutions du système :

$$\frac{dq^i}{dt}(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp^i}{dt}(t) = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Et le crochet de Poisson de  $f, g \in C^\infty(M)$  prend la forme :

$$\{f, g\} = \iota_{X_g} \iota_{X_f} \omega = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

## 3.2 Systèmes Intégrables

Un *système hamiltonien* est un triplet  $(M, \omega, H)$  tel que  $(M, \omega)$  est une variété symplectique (qu'on appelle *espace des phases* du système) et  $H \in C^\infty(M)$  (qu'on appelle *hamiltonien* du système) et qu'on supposera complet. On s'intéresse aux courbes intégrales de  $X_H$ .

**Définition 3.2.1.** Soit  $(M, \omega, H)$  un système hamiltonien. Une application  $f \in C^\infty(M)$  est une *intégrale première* de  $(M, \omega, H)$  si elle est constante le long des courbes intégrales de  $X_H$ .

**Proposition 28.** Une application  $f \in C^\infty(M)$  est une intégrale première de  $(M, \omega, H)$  ssi  $\{f, H\} = 0$ .

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f \circ \exp tX_H) &= (\exp tX_H)^* \mathcal{L}_{X_H} f \\ &= (\exp tX_H)^* df(X_H) \\ &= (\exp tX_H)^* \omega(X_f, X_H) = (\exp tX_H)^* \{f, H\} \end{aligned}$$

Donc  $\frac{d}{dt}(f \circ \exp tX_H) = 0$  si et seulement si  $\{f, H\} = 0$ .  $\square$

En particulier étant donné un système hamiltonien  $(M, \omega, H)$ . D'après la proposition ci-dessus  $H$  est une intégrale première de ce système. En effet on a :  $\{H, H\} = 0$  (*Remarque* : Comme en physique l'hamiltonien modélise l'énergie totale d'un système, cette assertion est en fait équivalente au principe de conservation de l'énergie).

**Définition 3.2.2.** Deux intégrales premières  $f$  et  $g$  d'un système hamiltonien  $(M, \omega, H)$ , sont dites en involution si  $\{f, g\} = 0$ .

**Définition 3.2.3.** Soit  $f_1, f_2, \dots, f_k$  des intégrales premières de  $(M, \omega, H)$ . On dit qu'elles sont indépendantes si pour tout point  $x$  de  $M$  les différentielles  $d_x f_1, d_x f_2, \dots, d_x f_k$  sont linéairement indépendantes.

**Définition 3.2.4.** Soit  $(M, \omega)$  une variété symplectique de dimension  $2n$ . Un système hamiltonien sur  $M$  est dit (complètement) intégrable s'il possède  $n$  intégrales premières indépendantes et deux-à-deux en involution.

**Exemple 3.2.1.** Voici deux exemples simples de systèmes intégrables :

- **L'oscillateur harmonique** : On prend  $(M = \mathbb{R}^2, \omega = dp^i \wedge dq^i)$  et  $H = p^2 + q^2$ .
- **Le pendule simple** : On prend  $M = T^*(S^1)$  muni de sa forme symplectique canonique  $\omega$ . En identifiant  $T^*(S^1)$  à  $S^1 \times \mathbb{R}$ , on définit l'hamiltonien  $H(\theta, v) = v^2 - \cos \theta$ .

Ces systèmes sont intégrables car chacun d'eux possède une intégrale première, son hamiltonien.

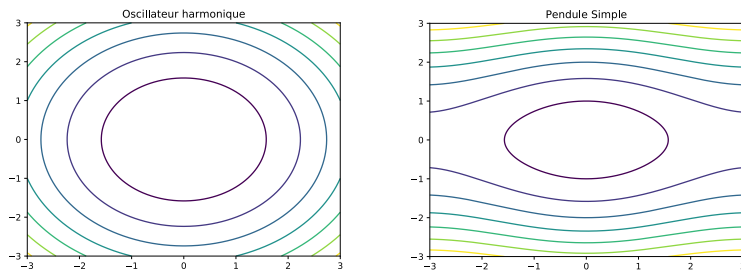


FIGURE 3.1 – Lignes de niveaux des hamiltoniens



### 3.3 Théorème d'Arnold-Liouville

On démontre maintenant le théorème d'Arnold-Liouville. Celui-ci peut être divisé en deux parties. La première partie affirme que sous certaines conditions les courbes intégrales d'un champ de vecteurs hamiltonien sur une variété symplectique  $M$ , décrivent des lignes droites sur des tores et que ces derniers sont des sous-variétés lagrangiennes de  $M$ . Elle fournit aussi des coordonnées dites "d'angles" adaptées à l'étude de ces courbes intégrales. On démontre cette partie du théorème en utilisant les résultats sur les groupes de Lie et les groupes topologiques, vues au chapitre 1. La deuxième partie compte à elle affirme qu'un voisinage d'un "tore lagrangien" est difféomorphe au produit cartésien de ce tore par une boule ouverte. Elle fournit également sur ce voisinage des coordonnées, complémentaires aux coordonnées d'angles, qu'on appelle des coordonnées "d'actions". Les coordonnées d'actions-angles forment ce qu'on appelle une carte de Darboux sur ce voisinage. Pour démontrer cette partie nous aurons besoin du lemme suivant qui est un résultat de topologie différentielle connu qu'on admettra sans démonstration (voir [6])

**Lemme 29. (Théorème d'Ehresmann)** Soit  $f : M \longrightarrow N$  une application lisse entre deux variétés lisses. Si  $f$  est une submersion propre et surjectif alors  $\forall c \in N$  il existe un voisinage  $U$  de  $c$  et un voisinage  $V$  de  $f^{-1}(\{c\})$  et un difféomorphisme :

$$\tau : V \longrightarrow U \times f^{-1}(\{c\})$$

tel que :  $\forall u \in U, \quad \tau^{-1}(\{u\} \times f^{-1}(\{c\})) = f^{-1}(\{u\}) \cap V$

**Théorème 30.** Soit  $(M, \omega, H)$  un système hamiltonien de dimensions  $2n$ , d'intégrales premières :  $f_1 = H, f_2, \dots, f_n$ . On suppose l'application  $f = (f_1, \dots, f_n)$  propre, et on se donne  $c \in \mathbb{R}^n$  une valeur régulière de  $f$  telle que  $M_c = f^{-1}(\{c\})$  soit connexe.

1. La sous-variété  $M_c$  est une sous-variété lagrangienne de  $M$ , difféomorphe à  $\mathbb{T}^n$ . Il existe sur  $M_c$  des coordonnées dite "d'angles" :  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  dans lesquels le flot de  $H$  est linéaire.
2. Il existe un voisinage  $V$  de  $M_c$  difféomorphe au produit cartésien de  $M_c$  par une boule ouverte de  $\mathbb{R}^n$ , et des coordonnées  $s_1, s_2, \dots, s_n$  sur  $V$  dites "d'actions", complémentaires aux coordonnées d'angles, et telles que :  $\omega = \sum_{i=1}^n ds_i \wedge d\alpha_i$ .

*Démonstration.*

(1) Remarquons d'abord que

- $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$  on a :

$$df(X_{f_i}) = \begin{pmatrix} df_1(X_{f_i}) & df_2(X_{f_i}) & \dots & df_n(X_{f_i}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{f_1, f_i\} & \{f_2, f_i\} & \dots & \{f_n, f_i\} \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^n}$$

- Du fait que les  $f_i$  sont indépendants,  $\forall x \in M_c$ , les vecteurs  $X_{f_1}(x), X_{f_2}(x), \dots, X_{f_n}(x)$  sont linéairement indépendants.

On en conclut que  $\forall x \in M_c$ , les vecteurs  $X_{f_1}(x), X_{f_2}(x), \dots, X_{f_n}(x)$  forment une base de  $\ker d_x f = T_x M_c$ , et comme  $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, \omega(X_{f_i}, X_{f_j}) = 0$ , il s'en suit que :

$$\forall x \in M_c, \forall v, u \in T_x M_c, \quad \omega(u, v) = 0$$

Autrement dit la restriction de  $\omega$  à  $M_c$  est identiquement nulle. Comme  $M_c$  est une sous-variété de dimensions  $n$ , cela signifie que c'est enfaite une sous-variété lagrangienne de  $M$ .

On va maintenant construire un difféomorphisme de  $\mathbb{T}^n$  vers  $M_c$  en utilisant le théorème 14.

Remarquons que, comme les  $f_i$  sont deux-à-deux en involution :

- Les champs de vecteurs  $X_{f_i}$  commutent (et donc leurs flots commutent). En effet :

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad [X_{f_i}, X_{f_j}] = -X_{\{f_i, f_j\}} = -X_0 = 0$$

- $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $f_i$  est une intégrale de première de  $X_{f_j}$  (et donc les flots préservent  $M_c$ ).

Cela nous permet de définir un morphisme de groupes :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \text{Diff}(M_c) \\ (t_1, t_2, \dots, t_n) &\longmapsto \exp t_1 X_{f_1} \circ \exp t_2 X_{f_2} \circ \dots \circ \exp t_n X_{f_n} \end{aligned}$$

qui définit une action lisse de  $\mathbb{R}^n$  sur  $M_c$

Associions à tout point  $x \in M_c$  une application :

$$\begin{aligned} \rho_x : \mathbb{R}^n &\longrightarrow M_c \\ (t_1, t_2, \dots, t_n) &\longmapsto \Phi(t_1, t_2, \dots, t_n)(x) \end{aligned}$$

On a :

$$T_{0_{\mathbb{R}^n}} \rho_x \cdot \mathbf{e}_i = X_{f_i}(x), \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

où  $\mathbf{e}_i$  désigne ici le  $i$ -ème vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Comme  $\forall x \in M_c$ , les  $X_{f_i}(x)$  sont linéairement indépendants,  $T_{0_{\mathbb{R}^n}} \rho_x$  est un isomorphisme. On en déduit que  $\forall x \in M_c$ ,  $\rho_x$  définit un difféomorphisme local sur un voisinage  $V_x$  de  $0_{\mathbb{R}^n}$ .

Remarquons que  $\forall x \in M_c$ ,  $\rho_x(V_x) \subset \mathcal{O}_x$  et que  $\{\rho_x(V_x) \mid x \in M_c\}$  est un recouvrement ouvert de  $M_c$ . Comme  $M_c = f^{-1}(\{c\})$  est compacte (du fait que  $f$  est propre), on peut en extraire un sous-recouvrement fini  $\{U_i\}_{1 \leq i \leq N}$ . Du fait que  $M_c$  est aussi connexe, on peut supposer que :

$$\forall i \in \{1, \dots, N-1\}, \quad U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$$

Cela implique qu'il n'existe enfaite qu'une seule orbite. Autrement dit l'action de  $\mathbb{R}^n$  sur  $M_c$  est transitive.

Prenons maintenant un point quelconque  $x_0 \in M_c$ . Le fait que l'application  $\rho_{x_0}$  soit un difféomorphisme local implique que  $\mathbf{St}_{x_0}$  est un sous-groupe discret de  $\mathbb{R}^n$ . Donc, d'après la proposition 13,  $\mathbf{St}_{x_0}$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}^k$  pour un certain  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

Il suffit maintenant d'appliquer le théorème 14, pour conclure que  $M_c$  est difféomorphe  $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^k$  qui est lui même difféomorphe à  $T^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ . Enfin comme  $M_c$  est compact on conclut immédiatement que  $k = n$  et que  $M_c$  est difféomorphe à  $\mathbb{T}^n$ .

Construisons maintenant des coordonnées d'angles sur  $M_c$ . On sait qu'il existe des vecteurs  $e_1, e_2, \dots, e_n$  formant une base de  $\mathbb{R}^n$  et tels que

$$\mathbf{St}_{x_0} = \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2 + \dots + \mathbb{Z}e_n$$

On peut définir les coordonnées d'angles  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  sur  $M_c$  comme suit :

$\forall x \in M_c$  il existe un unique  $a \in \mathbb{R}^n$  modulo  $\mathbf{St}_{x_0}$  tel que  $\Phi(a)(x_0) = x$ , celui-ci peut se décomposer sur la base  $e_1, e_2, \dots, e_n$  d'une manière unique :  $a = a_1e_1 + a_2e_2 + \dots + a_ne_n$ . On prend alors :

$$\alpha_i(x) = 2\pi a_i \mod 2\pi, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Il reste à montrer que dans ces coordonnées le flot de  $H = f_1$  est linéaire. Décomposons le premier vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  dans la base  $e_1, e_2, \dots, e_n$  :

$$\mathbf{e}_1 = v_1e_1 + v_2e_2 + \dots + v_ne_n$$

Alors il est clair que  $\forall x \in M_c$  :

$$(\alpha^i \circ \exp tX_H)(x) = \alpha^i(\Phi(t\mathbf{e}_1)(x)) = x + 2\pi tv_1 \mod 2\pi$$

Ce qui prouve l'assertion.

(2) Il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $c$  dans  $\mathbb{R}^n$  tel que la restriction de  $f$  à  $f^{-1}(U)$  soit une submersion. On peut sans perte de généralité supposer que  $U$  est une boule ouverte centrée en  $c$  et de rayon  $r$ . D'après le Théorème d'Ehresmann il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $M_c$  inclus dans  $f^{-1}(U)$ , et difféomorphe à  $U \times M_c$ . Cela nous permet de définir un système de coordonnées locales sur  $V$  qui n'est autre que  $f_1, f_2, \dots, f_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . On peut alors écrire :

$$\omega = \sum_{i,j} a_{i,j} df_i \wedge d\alpha_j + \sum_{i < j} b_{i,j} df_i \wedge df_j \quad (1)$$

où les  $a_{i,j}$  et les  $b_{i,j}$  sont des applications lisses sur  $V$ . Il n'y a pas de termes de la forme  $d\alpha_i \wedge d\alpha_j$  car  $M_c$  est lagrangienne, autrement dit on doit obligatoirement avoir  $\omega|_{M_c} = 0$ .

- D'une part on a  $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  :

$$a_{i,j} = \omega\left(\frac{\partial}{\partial f_i}, \frac{\partial}{\partial \alpha_j}\right) \quad (2)$$

On décompose  $\frac{\partial}{\partial \alpha_j}$  dans la base formée des champs de vecteurs  $X_{f_1}, X_{f_2}, \dots, X_{f_n}$  comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} = \sum_{k=1}^n \tilde{a}_{j,k} X_{f_k}$$

Ici les  $\tilde{a}_{j,k}$  ne dépendent que du "tore lagrangien" autrement dit que de  $f_1, f_2, \dots, f_n$ . On trouve en remplaçant dans (2) :

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^n \tilde{a}_{j,k} \omega\left(\frac{\partial}{\partial f_i}, X_{f_k}\right) = \sum_{k=1}^n \tilde{a}_{j,k} \frac{\partial f_k}{\partial f_i} = \tilde{a}_{j,i}$$

et donc les  $a_{i,j}$  aussi ne dépendent que de  $f_1, f_2, \dots, f_n$  et pas des variables d'angles.

- D'autre part, comme  $\omega$  est fermée, on a :

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i,j,k} \frac{\partial a_{i,j}}{\partial f_k} df_k \wedge df_i \wedge d\alpha_j + \sum_{i<j,k} \frac{\partial b_{i,j}}{\partial \alpha_k} d\alpha_k \wedge df_i \wedge df_j + \sum_{i<j,k} \frac{\partial b_{i,j}}{\partial f_k} df_k \wedge df_i \wedge df_j \\ &= \sum_{i<j,k} \left( \frac{\partial b_{i,j}}{\partial \alpha_k} + \frac{\partial a_{i,k}}{\partial f_j} - \frac{\partial a_{j,k}}{\partial f_i} \right) d\alpha_k \wedge df_i \wedge df_j + \sum_{i<j,k} \frac{\partial b_{i,j}}{\partial f_k} df_k \wedge df_i \wedge df_j = 0 \end{aligned}$$

On doit donc avoir  $\forall i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$  tels que  $i < j$  :

$$\frac{\partial b_{i,j}}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial a_{j,k}}{\partial f_i} - \frac{\partial a_{i,k}}{\partial f_j}$$

On voit donc que les  $\frac{\partial b_{i,j}}{\partial \alpha_k}$  ne dépendent pas de  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ . Or on sait que les  $b_{i,j}$  sont des fonctions  $2\pi$ -périodiques des  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ . Cela veut donc dire qu'enfaite les  $b_{i,j}$  ne dépendent pas des  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ .

On peut réécrire (1) sous la forme :

$$\omega = \sum_j \lambda_j \wedge d\alpha_j + \eta$$

$$\text{où : } \lambda_j = \left( \sum_i a_{i,j} df_i \right) \quad \text{et} \quad \eta = \sum_{i<j} b_{i,j} df_i \wedge df_j$$

Comme  $\omega$  est fermée, on a :

$$\sum_j d\lambda_j \wedge d\alpha_j = -d\eta$$

Or on a montré que  $\eta$  et les  $\lambda_j$  ne dépendaient pas des variables d'angles. Il s'en suit que  $d\eta = 0$  et  $d\lambda_j = 0, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , autrement dit  $\eta$  et les  $\lambda_j$  sont fermées sur  $V$ . Remarquons qu'elles sont aussi exactes sur  $M_c$ , et que  $M_c$  et  $V$  ont même type d'homotopie ( $V$  étant difféomorphe au produit cartésien d'une boule ouverte par  $M_c$ , on le rappelle). On en déduit, d'après le théorème 20, que  $\eta$  et les  $\lambda_j$  sont enfaite exactes sur  $V$ .

Il existe donc des applications lisses  $s_j : V \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $ds_j = \lambda_j$ . Il s'agit, comme on va le voir, des coordonnées d'actions voulus. Ecrivons d'abord  $\omega$  sous forme matriciel dans la base  $df_1, \dots, df_n, d\alpha_1, \dots, d\alpha_n$  :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & a_{i,j} \\ -a_{i,j} & b_{i,j} \end{pmatrix}$$

Comme  $\omega$  est en tout point non-dégénérée,  $\det(J)$  est en tout point non-nul.

Considérons aussi la matrice  $A$  dont les coefficients sont les  $a_{i,j}$ . On a :

$$\begin{pmatrix} ds_1 \\ ds_2 \\ \vdots \\ ds_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} df_1 \\ df_2 \\ \vdots \\ df_n \end{pmatrix}$$

Or on a  $(\det(A))^2 = \det(J)$  qui on le sait est toujours non nul, et donc les  $ds_j$  sont linéairement indépendants. Ceci prouve que les  $s_j$  sont indépendants et qu'on peut les prendre comme coordonnées. Autrement dit que l'application  $\phi = (s_1, s_2, \dots, s_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  est bien un difféomorphisme car, en tout point de  $V$ , son application linéaire tangente est de rang  $n$ .

Enfin pour conclure, exprimons  $\omega$  à l'aide des nouvelles coordonnées d'actions, on a :

$$\omega = \sum_i ds_i \wedge d\alpha_i + d\tilde{\zeta}$$

où  $\tilde{\zeta}$  est telle que  $d\tilde{\zeta} = \eta$ . Comme  $\eta$  ne dépendait que des  $f_i$ , il en est de même pour  $\tilde{\zeta}$ . On peut donc l'exprimer en utilisant uniquement les coordonnées d'actions :

$$\tilde{\zeta} = \sum_i g_i(s_1, s_2, \dots, s_n) ds_i$$

On a donc :

$$\omega = \sum_i ds_i \wedge d(\alpha_i - g_i(s_1, s_2, \dots, s_n))$$

En prenant les  $\alpha_i - g_i(s_1, s_2, \dots, s_n)$  comme nouvelles coordonnées d'angles, (ce qui signifie géométriquement faire une translation sur chaque tore lagrangien), on obtient :

$$\omega = \sum_i ds_i \wedge d\alpha_i$$

Qui est le résultat voulu.

□

### 3.3.1 Construction Des Variables D'Actions

Nous avons terminé de démontrer le théorème d'Arnold-Liouville. Montrons à présent comment on peut construire concrètement des variables d'actions sur  $(M = \mathbb{R}^{2n}, \omega = \sum_{i=1}^n dp^i \wedge dq^i)$  (ou plus généralement sur le fibré cotangent d'une variété). Considérons un hamiltonien  $H$  tel que le système  $(M, \omega, H)$  soit complètement intégrable et reprenons les notations introduites dans la démonstration du théorème d'Arnold-Liouville. Soit  $M_c$  un tore lagrangien du système  $(M, \omega, H)$ . Il existe, d'après le théorème d'Arnold-Liouville, un voisinage ouvert  $V$  de  $M_c$  muni d'un système de coordonnées d'actions-angles  $\alpha^1, \dots, \alpha^n, s^1, \dots, s^n$ . On a alors :

$$\omega = \sum_{i=1}^n dp^i \wedge dq^i = \sum_{i=1}^n ds^i \wedge d\alpha^i$$

Ce qui implique que :

$$d \left( \sum_{i=1}^n p^i dq^i - s^i d\alpha^i \right) = 0$$

Autrement dit la 1-forme  $\beta = \sum_{i=1}^n p^i dq^i - s^i d\alpha^i$  est fermée sur  $V$

Considérons les lacets  $\gamma_j : [0, 1] \longrightarrow M_c, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  définis comme suit :

$$\gamma_j(t) = \Phi(te_j)(x_0)$$

Comme les  $s^i$  sont constants sur  $M_c$ , on a :

$$s^j = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_j} s^i d\alpha^i$$

Nous allons montrer qu'on obtient à constante près le même résultat en intégrant la forme  $\sum_{i=1}^n p^i dq^i$  à la place de  $\sum_{i=1}^n s^i d\alpha^i$ . On a :

$$\sum_{i=1}^n \int_{\gamma_j} s^i d\alpha^i = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_j} p^i dq^i + \int_{\gamma_j} \beta$$

Il reste donc à montrer que  $\int_{\gamma_j} \beta$  donne le même résultat sur tout les tores lagrangiens dans  $V$ , autrement dit qu'il ne dépend pas des  $s^i$ . Pour le montrer il suffit de remarquer qu'en prenant deux tores lagrangiens  $\{u_1\} \times M_c$  et  $\{u_2\} \times M_c$  inclus dans  $V \cong U \times M_c$ , les chemins :

$$\begin{aligned} \gamma_{1,j} : [0, 1] &\longrightarrow V \cong U \times M_c & \text{et : } \gamma_{2,j} : [0, 1] &\longrightarrow V \cong U \times M_c \\ t &\longmapsto (u_1, \gamma_j(t)) & t &\longmapsto (u_2, \gamma_j(t)) \end{aligned}$$

sont homotopes. On peut construire cette homotopie :

$$F : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow V \cong U \times M_c$$

$$(\lambda, t) \longmapsto ((1 - \lambda)u_1 + \lambda u_2, \gamma_j(t))$$

On remarquera que  $F$  est enfaite un 2-cube singulier sur  $V$ , qui plus est, on a :  $\partial F = \gamma_{2,j} - \gamma_{1,j}$ . On a donc d'après le théorème de Stokes :

$$\int_{\gamma_{2,j}} \beta - \int_{\gamma_{1,j}} \beta = \int_{\partial F} \beta = \int_F \underbrace{d\beta}_{=0} = 0$$

On conclut qu'on peut donc prendre :

$$s^j = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_j} p^i dq^i$$

comme coordonnées d'actions.

**Exemple 3.3.1.** Dans le cas trivial de l'oscillateur harmonique (voir l'exemple 3.2.1) les tores lagrangien sont les cercles d'équation  $p^2 + q^2 = H_0$ , avec  $H_0 \in \mathbb{R}_+$ . La coordonnée d'action au voisinage du cercle est donnée par :

$$s = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} p dq$$

où  $\gamma$  est un lacet de période  $2\pi$  décrivant le cercle ( $s$  est donc l'aire du cercle divisée par  $2\pi$ ). On trouve :

$$s = \frac{1}{2} H$$

La coordonnée d'angle est bien sûre la coordonnée d'angle usuelle sur le cercle.

# Application Aux Flots Géodésiques

## 4.1 Équations d'Euler-Lagrange

Dans ce qui suit  $M$  désignera une variété lisse et  $F : TM \longrightarrow \mathbb{R}$  une application lisse.

On se propose de déterminer quels chemins lisses  $\gamma : ]a, b[ \longrightarrow M$  minimisent l'action :

$$\mathcal{A}_\gamma = \int_a^b (\tilde{\gamma}^* F)(t) dt \quad \text{où : } \tilde{\gamma} = (\gamma, \gamma')$$

**Théorème 31. (Équations d'Euler-Lagrange)** Si l'action d'un chemin  $\gamma : ]a, b[ \longrightarrow M$  est minimale alors  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$  on a :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial v_i}(\gamma, \gamma') = \frac{\partial F}{\partial x_i}(\gamma, \gamma')$$

*Démonstration.* Soit  $(TU, x^1, x^2, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n)$  une carte sur  $TM$  telle que  $U \cap \gamma(]a, b[) \neq \emptyset$ . On peut exprimer  $\gamma$  en coordonnées locales sur  $U$  comme  $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ . Considérons un chemin  $\gamma_\epsilon$  "voisin" de  $\gamma$  s'écrivant en coordonnées locales comme :  $(\gamma_1 + \epsilon c_1, \gamma_2 + \epsilon c_2, \dots, \gamma_n + \epsilon c_n)$  où les  $c_i$  sont des applications lisses de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$  telles que  $\forall i, c_i(a) = c_i(b) = 0$  et  $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ . L'action de ce nouveau chemin est :

$$A_\epsilon = \int_a^b F(\gamma_\epsilon(t), \gamma'_\epsilon(t)) dt$$

Si  $\gamma$  minimise l'action alors  $A_\epsilon$  atteint son maximum quand  $\epsilon = 0$ . Cela signifie donc que :

$$\begin{aligned} \frac{dA_\epsilon}{d\epsilon}(0) &= \int_a^b \sum_{i=1}^n \left[ c_i(t) \frac{\partial F}{\partial x_i}(\gamma_\epsilon(t), \gamma'_\epsilon(t)) + c'_i(t) \frac{\partial F}{\partial v_i}(\gamma_\epsilon(t), \gamma'_\epsilon(t)) \right] dt = 0 \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^n c_i(t) \frac{\partial F}{\partial x_i}(\gamma_\epsilon(t), \gamma'_\epsilon(t)) dt + \underbrace{\int_a^b \sum_{i=1}^n c'_i(t) \frac{\partial F}{\partial v_i}(\gamma_\epsilon(t), \gamma'_\epsilon(t)) dt}_{\text{Intégrons par partie}} = 0 \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^n \left[ c_i(t) \frac{\partial F}{\partial x_i}(\gamma_\epsilon(t), \gamma'_\epsilon(t)) - c_i(t) \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial v_i}(\gamma_\epsilon(t), \gamma'_\epsilon(t)) \right] dt = 0 \end{aligned}$$



Comme les  $c_i$  sont quelconques, on conclut qu'on doit avoir :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad \frac{\partial F}{\partial x_i}(\gamma_\epsilon(t), \gamma'_\epsilon(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial v_i}(\gamma_\epsilon(t), \gamma'_\epsilon(t)) = 0$$

Ce qui conclut la preuve. □

**Remarque :** On a démontré que pour un chemin  $\gamma : ]a, b[ \rightarrow M$  satisfaire les équations d'Euler-Lagrange était une condition nécessaire et non pas suffisante pour dire qu'il minimise l'action.

## 4.2 Variétés Riemanniennes

Soit  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel on note  $S^2V^*$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques de  $V$ . Pour toute variété lisse  $M$  on introduit le fibré vectoriel :  $S^2T^*M = \cup_{x \in M} \{x\} \times S^2T_x^*M$ .

**Définition 4.2.1.** Une variété riemannienne est un couple  $(M, g)$  formé d'une variété lisse  $M$  et d'une section lisse  $g$  du fibré  $S^2T^*M$ , définissant en tout point de la variété une forme bilinéaire symétrique définie positive (i.e un produit scalaire).

**Exemple 4.2.1.** Voici deux exemples de variété riemannienne :

1.  $\mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire usuel.
2. Toute sous-variété  $M$  de  $\mathbb{R}^n$  peut être muni d'une métrique riemannienne coïncidant avec le produit scalaire usuel sur  $\mathbb{R}^n$ .

Dans ce qui suit,  $(M, g)$  désignera une variété riemannienne de dimension  $n$ .

Étant donnés deux points  $x, y \in M$ , on notera  $\mathcal{P}_{(x,y)}$  l'ensemble des chemins lisses sur  $M$  joignant les deux points. Dans ce contexte on entend par chemin lisse joignant  $x$  et  $y$ , un 1-cube singulier  $\gamma$  sur  $M$  tel que  $\gamma(0) = x$  et  $\gamma(1) = y$ .

- On définit la longueur d'un chemin  $\gamma \in \mathcal{P}_{(x,y)}$  par :

$$\ell_\gamma = \int_0^1 |\gamma'(t)| dt \quad \text{où :} \quad |\gamma'(t)| = \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))}$$

- La distance riemannienne entre  $x$  et  $y$  comme :

$$d(x, y) = \inf_{\gamma \in \mathcal{P}_{(x,y)}} \ell_\gamma$$

- On définit de même l'action d'un chemin  $\gamma \in \mathcal{P}_{(x,y)}$  par :

$$\mathcal{A}_\gamma = \int_0^1 |\gamma'(t)|^2 dt$$

On voudra bien sûr construire les équations d'Euler-Lagrange correspondant à ce genre d'actions. Mais avant cela énonçons quelques propriétés des notions définies ci-dessus.

**Lemme 32.** Si un chemin  $\gamma \in \mathcal{P}_{(x,y)}$  minimise l'action sur  $\mathcal{P}_{(x,y)}$ , alors sa vitesse est constante i.e  $|\gamma'(t)|$  est la même  $\forall t \in ]0, 1[$ .

*Démonstration.* Soit  $\gamma \in \mathcal{P}_{(x,y)}$  un chemin lisse. En reparamétrant  $\gamma$  (i.e en le composant avec une application lisse  $\tau : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ), on peut construire un chemin  $\xi \in \mathcal{P}_{(x,y)}$  de vitesse constante  $v$ . On a alors :

$$\ell_\xi = \ell_\gamma = \int_0^1 |\gamma'(t)| dt = \int_0^1 v dt = v$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a :

$$\mathcal{A}_\xi = v^2 = \left( \int_0^1 |\gamma'(t)| dt \right)^2 \leq \left( \int_0^1 dt \right) \left( \int_0^1 |\gamma'(t)|^2 dt \right) = \mathcal{A}_\gamma$$

Ce qui prouve l'assertion. □

**Théorème 33.** Si un chemin lisse  $\gamma \in \mathcal{P}_{(x,y)}$  minimise l'action alors il est de longueur minimale

*Démonstration.*

(1) Soit  $\gamma \in \mathcal{P}_{(x,y)}$  un chemin dont l'action est minimale sur  $\mathcal{P}_{(x,y)}$ . On a pour tout chemin  $\xi \in \mathcal{P}_{(x,y)}$  :

$$\int_0^1 (|\gamma'(t)|^2 - |\xi'(t)|^2) dt = \mathcal{A}_\gamma - \mathcal{A}_\xi \leq 0$$

D'après le lemme ci-dessus  $|\gamma'(t)|$  est la même pour tout  $t \in ]a, b[$ . Cela implique donc que :

$$\forall t \in ]0, 1[, \quad |\gamma'(t)| \leq |\xi'(t)|$$

Et donc que :

$$\ell_\gamma = \int_0^1 |\gamma'(t)| dt \leq \int_0^1 |\xi'(t)| dt = \ell_\xi$$

□

**Remarque.** La réciproque du théorème ci-dessus n'est clairement pas vraie. Cependant elle est vraie à re-paramétrisation près. En d'autre terme parmi tous les chemins à vitesses constantes celui qui minimise la longueur est évidemment celui qui minimise l'action.

### 4.3 Équations Des Géodésiques

À nouveau, on désignera par  $(M, g)$  une variété riemannienne de dimension  $n$  et on se donne deux points  $x, y \in M$ .

Construisons les équations d'Euler-Lagrange correspondant à l'application :

$$F : TM \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, v) \longmapsto g_x(v, v)$$

Remarquons qu'on a bien :

$$F(\gamma, \gamma') = |\gamma'(t)|^2, \quad \forall \gamma \in \mathcal{P}_{(x,y)}$$

Soit  $\gamma \in \mathcal{P}_{(x,y)}$  un chemin d'action minimale. Prenons une carte  $(TU, x^1, x^2, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n)$  sur  $TM$  telle que  $U \cap \gamma([a, b]) \neq \emptyset$ .

On peut exprimer  $\gamma$  en coordonnées locales sur  $U$  comme  $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ . On peut aussi exprimer localement  $g$  par une matrice dont nous noterons les éléments  $g_{ij}$ . Comme  $g$  est définie positive cette matrice est inversible. Nous noterons  $g^{ij}$  les éléments de sa matrice inverse.

On a en coordonnées locales :

$$F = \sum_{i,j} g_{ij} v^i v^j$$

ou en adoptant la convention d'Einstein :

$$F = g_{ij} v^i v^j$$

(Les symboles de sommations sont rendus implicites)

- On a d'une part  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$  :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial v^i}(\gamma, \gamma') = \frac{d}{dt} (2g_{ik} v^k) = 2 \left( \frac{dg_{ik}}{dt} v^k + g_{ik} \frac{dv^k}{dt} \right) = 2 \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_l} \frac{d\gamma^l}{dt} \frac{d\gamma^k}{dt} + 2g_{ik} \frac{d^2 \gamma^k}{dt^2}$$

- et d'autre part  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$  :

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\gamma, \gamma') = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} \frac{d\gamma^j}{dt} \frac{d\gamma^k}{dt}$$

Les équations d'Euler-Lagrange sont donc :

$$2 \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_l} \frac{d\gamma^l}{dt} \frac{d\gamma^k}{dt} + 2g_{ik} \frac{d^2 \gamma^k}{dt^2} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} \frac{d\gamma^j}{dt} \frac{d\gamma^k}{dt}$$

en réarrangeant les termes et en utilisant la symétrie des  $g_{ik}$ , on trouve :

$$g_{ik} \frac{d^2 \gamma^k}{dt^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} \right) \frac{d\gamma^l}{dt} \frac{d\gamma^j}{dt} = 0$$

qu'on peut écrire encore plus simplement comme :

$$\frac{d^2 \gamma^k}{dt^2} + (\Gamma_{lj}^k \circ \gamma) \frac{d\gamma^l}{dt} \frac{d\gamma^j}{dt} = 0, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

en introduisant le symbole de Christoffel :

$$\Gamma_{lj}^k = \frac{1}{2} g^{ik} \left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} \right), \quad \forall l, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Ces dernières équations sont appelées équations des géodésiques (ou équations de Christoffel), et leurs solutions sont appelées courbes géodésiques sur  $M$ . Comme on l'a dit plus haut, ces solutions ne minimisent pas forcément l'action, et donc la longueur d'un arc de géodésique n'est pas forcément égale à la distance riemannienne entre ses extrémités. Cependant le chemin lisse de longueur minimale entre deux points de la variété est toujours un arc de géodésique.

## 4.4 Point de vue Hamiltonien

Comme dans les sections précédentes, on se donne une variété riemannienne  $(M, g)$  de dimension  $n$ . On compte étudier les solutions des équations des géodésiques sur cette variété en utilisant les outils de la mécanique hamiltonienne.

**Remarque.** Pour démontrer le théorème suivant on se servira du fait que :

$$\forall i, j, k \in \{1, \dots, n\}, \quad g_{ij}g^{ik} = g^{ij}g_{ik} = \delta_{j,k}$$

**Théorème 34.** *Un chemin  $\gamma$  est une géodésique si et seulement s'il s'agit de la projection sur  $M$  d'une courbe intégrale  $\gamma^*$  de l'hamiltonien*

$$H : T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$$

s'exprimant en coordonnées locales  $x^2, x^2, \dots, x^n, p_1, p_2, \dots, p_n$  comme suit :

$$H = \frac{1}{2}g^{ij}p^ip^j$$

*Démonstration.* Une courbe intégrales de  $H$  est une solution du système :

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_i}$$

(1) On a d'une part :

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x_i} \iff \frac{dx^i}{dt} = g^{ij}p_j$$

Ce qui est équivalent à avoir :

$$p_j = g_{ij} \frac{dx^i}{dt}, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

(2) et d'autre part :

$$\begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} &\iff \frac{dp_i}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g^{jk}}{\partial x_i} p_j p_k \\ &\iff \frac{d}{dt} \left( g_{ij} \frac{dx^j}{dt} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial g^{jk}}{\partial x_i} g_{ij} \frac{dx^j}{dt} g_{ik} \frac{dx^k}{dt} \\ &\iff \frac{d}{dt} \left( g_{ik} \frac{dx^k}{dt} \right) = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{(g^{jk} g_{ij} g_{ik})}_{=0,1} - 2 \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} \right] \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} \\ &\iff 2 \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_l} \frac{dx^l}{dt} \frac{dx^k}{dt} + 2g_{ik} \frac{d^2 x^k}{dt^2} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} \end{aligned}$$

Ce qui, on l'a vu à la section précédente, est équivalent à :

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} + \Gamma_{lj}^k \frac{dx^l}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

- Il s'ensuit qu'en projetant sur  $M$  une courbe intégrale de  $H$ , on obtient une courbe géodésique.
- Aussi si on dispose d'une courbe géodésique  $\gamma$  sur  $M$ , on peut lui associer une courbe intégrale de  $H : \gamma^*$  définie par  $\gamma^*(t) = (\gamma(t), g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \cdot))$  ( qui est égale  $g_{ij}(\gamma(t)) \frac{d\gamma^i}{dt}(t)$  en coordonnées locales et donc la condition (1) est satisfaite ).

Ce qui conclut la preuve.

□

On a alors un résultat immédiat :

- Comme le champ de vecteurs  $X_H$  admet un flot local au voisinage de tout point de  $M$ , on peut en conclure que pour toute paire  $(x, p) \in T^*M$  il existe une unique courbe intégrale passant par  $(x, p)$ . Du fait qu'on peut faire correspondre à tout co-vecteur un vecteur tangent par l'intermédiaire de  $g$  (étant donnée qu'elle est en tout point non-dégénérée), cela se traduit par l'existence d'une unique géodésique passant par un point donné de la variété, suivant un vecteur tangent donné.

Dans le cas où  $X_H$  est complet. On peut par l'intermédiaire de  $g$  faire correspondre au flot de  $X_H$  un flot sur  $TM$ . Ce flot est appelé flot géodésique de  $M$ . Celui-ci est dit complètement intégrable si le système hamiltonien  $(T^*M, \omega, H)$  est complètement intégrable.

Il est maintenant naturel de se demander quelles variétés riemanniennes ont des flots géodésiques complètement intégrables. Il s'avère que, par exemple, ceux des surfaces de révolutions et ceux des ellipsoïdes le sont. Voir [3, 2].

# Conclusion

Dans ce mémoire nous avons introduit les notions de géométrie différentielle et de géométrie symplectique nécessaires à la compréhension de la mécanique hamiltonienne. Nous avons ensuite montré comment une forme symplectique sur une variété lisse permet de construire un isomorphisme entre les 1-formes différentielles et les champs de vecteurs lisses sur cette variété. Cela nous a permis de définir une notion de gradient "symplectique". Les flots de ses gradients symplectiques, lorsqu'ils sont complets, se sont avérés avoir nombres de propriétés intéressantes. Notamment ils préservent le volume symplectique et donc les orientations. Nous avons enfin défini les systèmes hamiltoniens comme étant, implicitement, les systèmes dynamiques engendrés par les gradients symplectiques et avons montré que la dynamique de certains de ces systèmes, ceux dits intégrables, est particulièrement simple et est entièrement décrite par le théorème d'Arnold-Liouville qui est le théorème centrale de ce mémoire.

Ces notions de géométrie hamiltonienne qui sont très naturelles en elles mêmes, se sont montrées par la suite loin d'être inutiles, étant donné qu'on a pu les appliquer au problème des flots géodésiques des variétés riemanniennes. Nous avons ensuite soulevé la question de quels flots géodésiques étaient complètement intégrables et cité l'exemple de ceux des surfaces de révolutions. Il s'avère que les flots géodésique de certains groupes de Lie munis de "métriques invariantes à gauche" soient aussi complètement intégrables. La théorie de ces flots géodésiques, qui aurait été intéressant de traité, trouve des applications en physique : en mécanique et en hydrodynamiques. Nous avons aussi omis de traiter certains exemples de systèmes intégrables pourtant classiques tels que les pendules sphériques, les toupies de Lagrange, d'Euler et de Kovalevskaya. Plus important encore nous n'avons pas donné d'outils permettant de démontrer l'intégrabilité ou la non-intégrabilité d'un systèmes hamiltonien donné. Il s'avère qu'un théorème de Morales et Ramis (voir [8, 2]) donne un tel critère.

Ces points que nous avons omis de traiter, soit délibérément ou par manque de temps, pourraient faire l'objet d'une continuation du travail entrepris dans ce mémoire.

# Bibliographie

- [1] Arnold .V, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Graduate Texts in Mathematics 60, Springer-Verlag, New York Heidelberg-Berlin 1978.
- [2] Audin .M, *Les systèmes hamiltoniens et leur intégrabilité*, Société mathématique de France, 2001.
- [3] Bolsinov A.V, Fomenko A.T, *Integrable Hamiltonian Systems.*, Taylor & Francis, 2004.
- [4] Burns .K, Gidea, M *Differential Geometry and Topology : With a View to Dynamical Systems*, CRC Press, 2005.
- [5] Cannas da Silva .A, *Lectures on Symplectic Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 2001
- [6] Ehresmann. C, *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable* Colloque de topologie (espaces fibrés), Bruxelles, 1950, Georges Thone, Liège; Masson et Cie., Paris, pp. 29–55
- [7] Lafontaine .J, *Introduction aux variétés différentielles*, Presses universitaires de Grenoble, 1996.
- [8] Morales-Ruiz .J & Ramis J.P, *A note on the non-integrability of some Hamiltonian systems with a homogeneous potential*, Methods Appl. Anal. 8 (2001).