Analysis II Einsiedler Version

Benjamin Dropmann

April 9, 2025

1 Wiederholung

Definition Taylor-Polynom
Sei eine funktion $f:(a,b)\to\mathbb{C}$ um einen punkt $x_0\in(a,b)$ die n-mal differenzierbar ist. Dann ist der Polynom

$$p^f_{x_0,n}(x)=\sin^n_{k=0}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)$$

Satz Taylor Approximation
sei $f:(a,b)\to\mathbb{C}$ eine $n+1$ mal stetig differenzierbare funktion und $x_0,x\in(a,b)$ dann gilt

$$f(x)=P^f_{x_0,n}(x)+R^f_{x_0,n}(x)$$

Wobei diese $R^f_{x_0,n}(x)$ der restglied ist und ich den mit

$$R^f_{x_0,n}(x)=\int_{x_0}^{x}f^{(x+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\ \mathrm{dt}$$

Für $M_{n+1}=\max\{|f^{(n+1)}(t)|$ mit $t\in(x,x_0)$ gilt $|R^f_{x_0,n}(x)|\leq\frac{M_{n+1}|x-x_0|}{(n+1)!}$

Definition
Eine Funktion $f(a,b)\to\mathbb{C}$ heisst analytisch falls es zu jedem $x_0\in(a,b)$ $\exists R>0$ so dass

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_=)!\quad\forall x:|x-x_0|<R$$

8.6 Numerische Integration

Satz
Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$,ot $n\in\mathbb{N}$ und $h=\frac{b-a}{h}$, $x_e=a+lh$ für $l\in\{0,1,\cdots,n\}$ Falls f stetig differenzierbar ist dann gilt

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{dt}=h\cdot(f(x_0)+f(x_1)+\cdots+f(x_{n-1}))+F_1$$

Wobei F_1 unser fehler ist: $F_1\leq\frac{M_1(b-1)^2}{2n}$ mit $M_1=\max\{|f'(x)|:x\in[a,b]\}$ Falls die Funktion 2-mal stetig differenzierbar ist dann gilt:

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{dt}=\frac{h}{2}\left(f(x_0)+2f(x_1)+\cdots+2f(x_{n-1}))+f(x_n)\right)+F_2\qquad F_2=\frac{M_2(b-a)^3}{6n^2}$$

Man kann auch für f vier mal differenzierbar und n gerade eine solche abschätzung machen, dies ist die Simpson Regel:

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{dt}=\frac{h}{3}\left(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\cdots+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right)+F_4\qquad F_4\leq\frac{M_4(b-1)^5}{45n^4}$$

9. Metrische Räume

9.1 Konvergenz in Metrische Räume

Definition Metrischer Raum
Ein Metrischer Raum ist eine Menge X mit eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ Mit folgende Eigenschaften

i. **Definitheit** $\forall x, y \in X$ gilt $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x_y$

ii. **Symmetrie** $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x, y \in X$

iii. **Dreiecksungleichung** $\forall x, y, z \in X$ gilt $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Das d hier ist einfach eine Abstandsfunktion, die einen Abstand zwischen zwei elemente der Menge anteilt. Diese Abbildung ist die Metrik. X kann $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder sogar $\mathbb{R}^n$ sein, die Metrik d kann irgendeine Funktion sein:

- $d(x,y) = |x - y|$ bei $X = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$
- $d_2(x,y) = ||x - y||_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{d} (x_j - y_j)^2}$
- $d_1(x,y) = ||x, y||_1 = \sum_{j=1}^{d} |x_j - y_j|$
- $d_\infty = ||x - y||_\infty = max_i |x_i - y_i|$

Definition Norm
Ein Normierter, Reeller Vektorraum ist ein Vektorraum V uber $\mathbb{R}$ gemeinsam mit eine Abbildung $|| \cdot || : V \to R_{\geq 0}$ mit fonlgende Eigenschaften

- **Definitheit** $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
- **Homogeneitat** $||tv|| = |t| \cdot ||v||$
- **Dreiecksungleichung** $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$

Diese Abbildung $|| \cdot ||$ wird norm genannt wenn diese Axiome $\forall v, u \in V$ gelten

Lemma
Eine Norm auf V definiert eine Metrik $d(v,w) = ||v - w||$
Beweis Die Axiome der Norm passen mit dieser Definition mit den Axiomen der Metrik.

Beispiele Paris/SNCF-Metrik
Diese Metrik ist auf $X = \mathbb{C}$ definiert, Die Metrik bekommt ihr namen vom Fakt dass es in Frankreich mit der bahn, sehr leicht ist von irgendwo nach Paris hinzukommen, und von Paris aus irgendwo anders zu gehen. Die Metrik ist also

$$d(z,w) = \begin{cases} |z| + |w| & \text{Wenn } \nexists \lambda \quad w = \lambda z \\ |z - w| & \text{Wenn} \exists \lambda \quad w = \lambda z \end{cases}$$

Diese Metrik ist sehr Komisch aber respektiert immer doch die Axiome. Die Konvergenz, die bald definiert wird, hat Komische Konvergenz da sogar wenn punkte optisch sehr nah miteinander aussehen, sind die wegen der Metrik doch nicht. Deswegen, nehmen wir öftestens Normen auf Teilmengen als Metriken.

Definition Konvergenz in einem Metrischen Raum
Sei X ein Metrischer Raum, und x_n eine Folge in X und $z \in X$ Wir sagen dass x_n gegen z konvergiert und schreiben $\lim_n \to \infty x_n = z$ falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \quad \forall n > N : \quad d(x_n, z) < \varepsilon$$

Definition Offene Ball
Sei X ein Metrischer Raum. Der Offene Ball um $x_0 \in X$ mit radius $r > 0$ ist durch

$$B_r(x_0) = \{ x \in X | \, d(x, x_0) < r \}$$

definiert. Eine Menge $U \subset X$ heisst umgebung von x_0 falls es ein $\exists r > 0$ so dass $B_r(x_0) = \subseteq U$. Mann kann auch dieser Bälle benutzen um die Konvergenz zu definieren.

Beispiele Der Raum der Stetigen Funktionen
Sei $a < b \in \mathbb{R}$ Wir definieren $V = C([a,b])$ ein Vektorraum. Wir definieren dann die Norm $||f||_\infty = max_{x\in[a,b]}|f(x)|$ Für eine Stetige funktion $f \in V$ Dann ist V ein Reeller Vektorraum, $||\cdot||$ ist eine Norm und die Konvergenz von $f_n \in V$ gegen $f \in V$ ist gleichbedeutend zur gleichmässige Konvergenz
Beweis Angenommen $f_n \in V$ Konvergiert für $n \to \infty$ gegen $f \in V$. Diese aussage ist analog zu:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ so dass } \forall n > N \quad d(f_n, f) = ||f_n - f||_\infty < \varepsilon$$

Die unendlich norm hier ist definiert wie $\max_{[a,b]}(f_n - f)$ Also gilt $\forall x \in [a,b]$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq ||f_n - f||_\infty < \varepsilon$$

Doch den N haben wir vor den x gewählt, daher ist dies auch gliechmässig konvergent.

$$\forall \varepsilon < 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n < N \quad \forall x \in [a,b] \text{ gilt } |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Bemerkung
$||\cdot||_\infty$ ist eine Norm:

i $||f||_\infty = 0 \iff f = 0$

ii $||\lambda f||_\infty = max_{[a,b]}|s \cdot f(x)| = |s| \cdot max_{[a,b]}|f(x)| = |s| \cdot ||f||_\infty$

iii $f_1, f_2 \in V$ dann ist $||f_1 + f_2||_\infty = max_{[a,b]}\underbrace{|f_1(x) + f_2(x)|}_{=|f_1(x)|+|f_2(x)|} \leq ||f_1||_\infty + ||f_2||_\infty$ (dies ist nicht klar aber es beweist die Dreiecksungleichung)

Wichtige Normen und Metriken

- Euklidische Norm: Die Vom Standard Inneres Produkt

$$||v|| =< v, v >= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$$

- Manhatten Norm: Grid city-norm: Sei $v = (v_1, v_2)$ dann ist die Manhatten norm durch: $||(v_1, v_2)|| = |v_1| + v_2|$ definiert

- Supremum norm: $||f||_\infty = max_{x\in[a,b]}|f(x)$

Analog zu jeder Norm, gibt es auch die dazugehörige Metrik.

1.1 Topologische grundbegriffe

Definition
Sei (X, d) ein Metrischer Raum. Eine Teilmenge $o \subset X$ heisst offen falls gilt:

$$\forall x_0 \in o \quad \exists \varepsilon > 0 \text{ so dass } B_\varepsilon \subset o$$

Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heisst abgeschlossen falls $X \backslash A$ offen ist.

Beispiele
Der Offene Ball ist wirklich offen:Sei ein Offenes Ball $B_r(x_0) \subseteq X$ dann gilt $\forall x \in B_r(x_0)$ $d(x, x_0) < r \longrightarrow \varepsilon = r - d(x, x_0)$ und dann ist $B_\varepsilon(x) \subseteq B_r(x_0)$ wass die vorherigfe definition anpasst.

Beispiele
$\{x_0\} \subseteq X$ ist eine Abgeschlossene Menge: Wir mussen also zeigen dass $O = X \backslash \{x_0\}$ offen ist. Sei $x \in O$ und $\varepsilon = d(x, x_0) > 0$ dann gilt $B_\varepsilon(x) \subseteq O$

Lemma
Sei X eine Metrischer Ruam.

- Jeder Endliche Schnitt von offenen Mengen ist offen.
- Jede Beliebige vereinigung von Offenen Mengen ist Offen und
- Jede Endliche Vereinigung von abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.
- Jeder Belibieger Durchnitt von abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.

Lemma
Sei X ein Metrischer Raum. Eine Teilmenge $O \in X$ ist Offen genau dann wenn fur jede Konvergente Folge $(x_n) \in X$ mit grenzwert $\lim_n \to \infty x_n \in O$ auch gilt dass fur alle bis auf endlich viele n wir $x_n \in O$ haben.
Beweis Angenommen wir haben $O \subseteq X$ eine Offene Teilmenge und x_n in X mit $\lim_{n\to\infty} x_n = z \in O$ Dann $\exists \varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(z) \subseteq O$. Wegen $lim_{n\to\infty} x_n = z$ gibt es ein N mit $x_n \in V_\varepsilon(z) \subseteq O \; \forall n > N$.
Angenommen, $O \subseteq X$ ist nicht offen, daher gilt

$$\exists z \in O \text{ so dass } \forall \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(z) \nsubseteq O$$

Wir setzen $\varepsilon = \frac{1}{n}$ und finden ein x_n mit $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(z) \backslash O$ es gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = z \in O$ doch $x_n \notin O \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

Lemma
Eine Teilmenge $A \subseteq X$ ist abgeschlossen genau dann wenn fur jede Folge x_n in A mit $\lim_{n\to\infty} x_n \in X$ auch $\lim_{n\to\infty} n \in A$ gilt.
Beweis Wir nehmen an dass A abgeschlossen ist. mit $x_n \in A$ fur $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n \in X$ Falls der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} x_n \in X \backslash A$ dann würde aus dem ersten Teil folgen dass $x_n \in X \backslash A$ fur die aller meisten n. Doch wie in den ersten Teil des beweises davor, kann dies nicht gelten, also

$$\implies \lim_{n\to\infty} x_n \in A$$

Falls aber A nicht abgeschlossen ist so ist $O = X \backslash A$ nicht offen und wir können eine Folge $x_n \in A$ finden mit $\lim_{n\to\infty} x_n = z \in X \backslash A$. Der beweis ist mir nicht klar... $\approx$ 1h 23.02

Bemerkung
Sei X ein Metrischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann ist auch Y ein Metrischer Raum. Wir können die metrik $d : X \times X \to \mathbb{R}$ auf $d : Y \times Y \to \mathbb{R}$ einschränken, dann kann man von diesen Y offene und abgeschlossen Mengen definieren.

Beispiele
Sei $X = \mathbb{R} \supseteq Y = [-1, 1]$ Wir können dann offene Bälle in Y betrachten: $B_1^Y(1) = (0, 1] \subset Y$ offen

Lemma
Sei $X \supseteq Y$ wie vorhin, dann ist eine Teilmenge $O_Y \subseteq Y$ genau dann offen genau dann wenn es eine offene Teilmenge $O_X \subseteq X$ gibt mit $O_Y = O_X \cap Y$. Die gleiche Aussage gilt analog für abgeschlossene Mengen.
Beweis Angenommen $O_X \subseteq X$ ist offen. Wir definieren dann $O_Y = Y \cap O_X$ und zeigen dass O_Y offen in Y ist. Sei $y \in O_Y$ dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon^X(y) \subseteq O_X$ und es gilt also

$$\implies B_\varepsilon^Y(y) = B_\varepsilon^X(y) \cap Y \subseteq O_X \cap Y = O_Y$$

Der Zweite Teil ist dass wir die Offene Menge in X bilden müssen. $O_Y \subseteq Y$ offen. $\forall Y \in O_Y \; \exists \varepsilon_y$ mit $B_{\varepsilon_y}^Y(y) \subseteq O_Y$ da O_Y von annahme offen in Y ist. Wir definieren jetzt

$$O_X = \bigcup_{y \in O_Y} B_{\varepsilon_y}^X(y)$$

Dies ist Offen in X. Behauptung, $O_Y = Y \cap O_X$ dann muss ich die Zwei richtungen dieser gleichung zeigen.

i. Sei $y \in O_Y$ dann gilt dass $y \in B_{\varepsilon_y}^Y(y) \subseteq O_X$ (klar da y der Zentrum vom Ball $B_{\varepsilon_y}^X(y)$ ist) was die richtung $\subseteq$ beweist

ii. Sei umgekehrt $z \in Y \cap O_X$ also existiert ein $y \in O_Y$ mit $z \in B_{\varepsilon_y}^X(y)$ da so mein O_X definiert ist. Aber mein z ist ja auch in Y und ich kann auch $z \in B_{varepsilon_y}^Y(y) \subseteq O_Y$ was dann die richtung $\supseteq$ beweist.

Wenn dieses Lemma gilt sagt man das es Relativ offen ist.

Lemma S
eien $A, O \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben beschränkt.

- Falls A abgeschlossen dann gilt $sup(A) \in A$
- Falls O offen ist dann gilt $sup(O) \notin O$