

# Analysis II Einsiedler Version

Benjamin Dropmann

April 9, 2025

## 1 Wiederholung

### Definition Taylor-Polynom

Sei eine funktion  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$  um einen punkt  $x_0 \in (a, b)$  die  $n$ -mal differenzierbar ist. Dann ist der Polynom

$$p_{x_0, n}^f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

### Satz Taylor Approximation

sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$  eine  $n + 1$  mal stetig differenzierbare funktion und  $x_0, x \in (a, b)$  dann gilt

$$f(x) = P_{x_0, n}^f(x) + R_{x_0, n}^f(x)$$

Wobei diese  $R_{x_0, n}^f(x)$  der restglied ist und ich den mit

$$R_{x_0, n}^f(x) = \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

Für  $M_{n+1} = \max\{|f^{(n+1)}(t)| \mid t \in (x, x_0)\}$  gilt  $|R_{x_0, n}^f(x)| \leq \frac{M_{n+1}|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$

### Definition

Eine Funktion  $f(a, b) \rightarrow \mathbb{C}$  heisst analytisch falls es zu jedem  $x_0 \in (a, b)$   $\exists R > 0$  so dass

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad \forall x : |x - x_0| < R$$

## 8.6 Numerische Integration

### Satz

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  und  $h = \frac{b-a}{n}$ ,  $x_l = a + lh$  für  $l \in \{0, 1, \dots, n\}$  Falls  $f$  stetig differenzierbar ist dann gilt

$$\int_a^b f(t) dt = h \cdot (f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})) + F_1$$

Wobei  $F_1$  unser fehler ist:  $F_1 \leq \frac{M_1(b-a)^2}{2n}$  mit  $M_1 = \max\{|f'(x)| : x \in [a, b]\}$  Falls die Funktion 2-mal stetig differenzierbar ist dann gilt:

$$\int_a^b f(t) dt = \frac{h}{2} (f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1})) + f(x_n) + F_2 \quad F_2 \leq \frac{M_2(b-a)^3}{6n^2}$$

Man kann auch für  $f$  vier mal differenzierbar und  $n$  gerade eine solche abschätzung machen, dies ist die Simpson Regel:

$$\int_a^b f(t) dt = \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)) + F_4 \quad F_4 \leq \frac{M_4(b-a)^5}{45n^4}$$

## 9. Metrische Räume

### 9.1 Konvergenz in Metrische Räume

#### Definition Metrischer Raum

Ein Metrischer Raum ist eine Menge  $X$  mit eine Abbildung  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  Mit folgende Eigenschaften

- i. **Definitheit**  $\forall x, y \in X$  gilt  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- ii. **Symmetrie**  $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$
- iii. **Dreiecksungleichung**  $\forall x, y, z \in X$  gilt  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Das  $d$  hier ist einfach eine Abstandsfunction, die einen Abstand zwischen zwei elemente der Menge anteilt. Diese Abbildung ist die Metrik.  $X$  kann  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  oder sogar  $\mathbb{R}^n$  sein, die Metrik  $d$  kann irgendeine Funktion sein:

- $d(x, y) = |x - y|$  bei  $X = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$
- $d_2(x, y) = \|x - y\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^d (x_j - y_j)^2}$
- $d_1(x, y) = \|x, y\|_1 = \sum_{j=1}^d |x_j - y_j|$
- $d_\infty = \|x - y\|_\infty = \max_i |x_i - y_i|$

#### Definition Norm

Ein Normierter, Reeller Vektorraum ist ein Vektorraum  $V$  über  $\mathbb{R}$  gemeinsam mit eine Abbildung  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit folgende Eigenschaften

- **Definitheit**  $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
- **Homogeneität**  $\|tv\| = |t| \cdot \|v\|$
- **Dreiecksungleichung**  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Diese Abbildung  $\|\cdot\|$  wird norm genannt wenn diese Axiome  $\forall v, u \in V$  gelten

#### Lemma

Eine Norm auf  $V$  definiert eine Metrik  $d(v, w) = \|v - w\|$

**Beweis** Die Axiome der Norm passen mit dieser Definition mit den Axiomen der Metrik.

#### Beispiele Paris/SNCF-Metrik

Diese Metrik ist auf  $X = \mathbb{C}$  definiert, Die Metrik bekommt ihr namen vom Fakt dass es in Frankreich mit der bahn, sehr leicht ist von irgendwo nach Paris hinzukommen, und von Paris aus irgendwo anders zu gehen. Die Metrik ist also

$$d(z, w) = \begin{cases} |z| + |w| & \text{Wenn } \nexists \lambda \quad w = \lambda z \\ |z - w| & \text{Wenn } \exists \lambda \quad w = \lambda z \end{cases}$$

Diese Metrik ist sehr Komisch aber respektiert immer doch die Axiome. Die Konvergenz, die bald definiert wird, hat Komische Konvergenz da sogar wenn punkte optisch sehr nah miteinander aussehen, sind die wegen der Metrik doch nicht. Deswegen, nehmen wir öftestens Normen auf Teilmengen als Metriken.

#### Definition Konvergenz in einem Metrischen Raum

Sei  $X$  ein Metrischer Raum, und  $x_n$  eine Folge in  $X$  und  $z \in X$  Wir sagen dass  $x_n$  gegen  $z$  konvergiert und schreiben  $\lim_n x_n = z$  falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \quad \forall n > N : \quad d(x_n, z) < \varepsilon$$

#### Definition Offene Ball

Sei  $X$  ein Metrischer Raum. Der Offene Ball um  $x_0 \in X$  mit radius  $r > 0$  ist durch

$$B_r(x_0) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$$

definiert. Eine Menge  $U \subset X$  heisst umgebung von  $x_0$  falls es ein  $\exists r > 0$  so dass  $B_r(x_0) \subseteq U$ . Mann kann auch dieser Bälle benutzen um die Konvergenz zu definieren.

## Beispiele Der Raum der Stetigen Funktionen

Sei  $a < b \in \mathbb{R}$  Wir definieren  $V = C([a, b])$  ein Vektorraum. Wir definieren dann die Norm  $\|f\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$  Für eine Stetige funktion  $f \in V$  Dann ist  $V$  ein Reeller Vektorraum,  $\|\cdot\|$  ist eine Norm und die Konvergenz von  $f_n \in V$  gegen  $f \in V$  ist gleichbedeutend zur gleichmässige Konvergenz

**Beweis** Angenommen  $f_n \in V$  Konvergiert für  $n \rightarrow \infty$  gegen  $f \in V$ . Diese aussage ist analog zu:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ so dass } \forall n > N \quad d(f_n, f) = \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$$

Die unendlich norm hier ist definiert wie  $\max_{[a, b]}(f_n - f)$  Also gilt  $\forall x \in [a, b]$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$$

Doch den  $N$  haben wir vor den  $x$  gewählt, daher ist dies auch gleichmässig konvergent.

$$\forall \varepsilon < 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n < N \quad \forall x \in [a, b] \text{ gilt } |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

## Bemerkung

$\|\cdot\|_\infty$  ist eine Norm:

- i  $\|f\|_\infty = 0 \iff f = 0$
- ii  $\|\lambda f\|_\infty = \max_{[a, b]} |\lambda \cdot f(x)| = |\lambda| \cdot \max_{[a, b]} |f(x)| = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$
- iii  $f_1, f_2 \in V$  dann ist  $\|f_1 + f_2\|_\infty = \max_{[a, b]} \underbrace{|f_1(x) + f_2(x)|}_{=|f_1(x)|+|f_2(x)|} \leq \|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty$  (dies ist nicht klar aber es beweist die Dreiecksungleichung)

## Wichtige Normen und Metriken

- Euklidische Norm: Die Vom Standard Inneres Produkt

$$\|v\| = \langle v, v \rangle = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$$

- Manhattan Norm: Grid city-norm: Sei  $v = (v_1, v_2)$  dann ist die Manhattan norm durch:  $\|(v_1, v_2)\| = |v_1| + |v_2|$  definiert
- Supremum norm:  $\|f\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$

Analog zu jeder Norm, gibt es auch die dazugehörige Metrik.

## 1.1 Topologische grundbegriffe

### Definition

Sei  $(X, d)$  ein Metrischer Raum. Eine Teilmenge  $o \subset X$  heisst offen falls gilt:

$$\forall x_0 \in o \quad \exists \varepsilon > 0 \text{ so dass } B_\varepsilon \subset o$$

Eine Teilmenge  $A \subseteq X$  heisst abgeschlossen falls  $X \setminus A$  offen ist.

### Beispiele

Der Offene Ball ist wirklich offen: Sei ein Offenes Ball  $B_r(x_0) \subseteq X$  dann gilt  $\forall x \in B_r(x_0) \quad d(x, x_0) < r \longrightarrow \varepsilon = r - d(x, x_0)$  und dann ist  $B_\varepsilon(x) \subseteq B_r(x_0)$  wass die vorherigfe definition anpasst.

### Beispiele

$\{x_0\} \subseteq X$  ist eine Abgeschlossene Menge: Wir müssen also zeigen dass  $O = X \setminus \{x_0\}$  offen ist. Sei  $x \in O$  und  $\varepsilon = d(x, x_0) > 0$  dann gilt  $B_\varepsilon(x) \subseteq O$

### Lemma

Sei  $X$  eine Metrischer Ruam.

- Jeder Endliche Schnitt von offenen Mengen ist offen.
- Jede Beliebige vereinigung von Offenen Mengen ist Offen und
- Jede Endliche Vereinigung von abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.
- Jeder Beliebiger Durchschnitt von abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.