Lineare Algebra II

Benjamin Dropmann

February 21, 2025

1 Polynome

1.1 polynomdivision

Seien f und $g \neq 0$ zwei polynome in $K[x]$ dann $\exists q(r), r(r) \in K[x]$ mit $deg(r) = 0$ oder $deg((r) < deg(g)$ und $f = qg + r$.
Korollar 9.0.4: Sei $f(x) \in K[x], f(x) = 0$ sei $\lambda \in K$ so dass $f(\lambda) = 0$. Dann $\exists q(x) \in K[x]$ so dass $f(x) = (x - \lambda)q(x)$
Beweis $\exists q(x), r(x) \in K[x] \quad deg(r) < deg(x - \lambda) = 1$ so dass $f(x) = (x - \lambda)(q(x) + r(x), \rightarrow r \in K \Rightarrow f(\lambda) = 0$
Korollar 9.0.6 Sei $f(x) \in K[x], deg(f) = n > 0$ Dann hat $f(x)$ höchstens n Nullstellen. (Fundamentaler satz der Algebra sehr ähnlich).
Beispiel 9.0.7 Es sei $f(x) = x + 1(x^2 + 1)$, als poly in $\mathbb{R}[x]$ hat es nur eine nullstelle $x = -1$.
Als polynom in $\mathbb{C}[x]$ gilt $f(x) = (x + 1)(x + i)(x - i)$
Theorem 9.0.8 Fundamentaler Satz der Algebra Es sei $f(x) \in \mathbb{C}[x], deg(f) = n > 0$ dann hat $f(x)$ in $\mathbb{C}[x]$ genau n nullstellen. Dass heisst es existieren $\exists \lambda_1, ..., \lambda_n$ nicht unbedingt verschieden, so dass $f(x) = (x - \lambda_1) \cdot \;\cdots\; \cdot (x - \lambda_n)$ Wir sagen $\mathbb{C}$ is Algebraisch abgeschlossen.
9.0.11: sei $f(x) \in K[x], \lambda \in K$ so dass $f(\lambda = 0$ Die Ordnung der Nullstelle (Vielfachheit) λ is die Ganze zahl $n \geq 1$ so dass $\exists q(x) \in K[x]$ so dass

$$f(x) = x - \lambda)^n q(x)$$

beispiele 9.0.12

1. $f(x) = x + 1(x^2 + 1)$ Einfache nullstelle $\lambda = -1$ daher ist die ordnung 1
2. $p > 2 \quad g(x) = x^p \in \mathbb{F}_p[x]$

$\mathbb{F}_p = [a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 | n \geq 0, a_i \in \mathbb{F}_p]$ Und $g(x) = x^p - 1 = (x - 1)^p$ (leicht ausrechnen)
Bemerkung 9.0.13 Analogien $\mathbb{Z} \leftrightarrow K[X]$

$\mathbb{Z}$	$K[x]$
± 1	$K \backslash 0$
Primzahlen	Unzerlegbare Polynome grad<0
$\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}} = \mathbb{F}_{\text{l}}$	$f(x)$ ist unzerlegbar: $K[x]/_{f(x)}$ Körper

2 Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition 10.1.1 V/K Vektorraum, $T : V \rightarrow V$ Endomorphismus.

1. $\lambda \in K$ ist ein Eigenwert von T wenn $\exists v \in V, v \neq 0_v$ so dass $T(v) = \lambda v)$
2. Ein solches V heisst Eigenvektor mit Eigenwert λ

Bemerkung 10.1.12 Wenn v Eigenveltor von T ist, $T(v) = \lambda v$ dann ist auch αv Eigenvektor von T mit Eigenwer $\lambda, \forall \alpha \in K, \alpha \neq 0$
Beispiele 10.1.3 Rechnung von eigenwerte und Eigenvektoren

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ Eigenwerte $\lambda = 3$ und $\lambda = -1$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ b \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ b \end{pmatrix}$$

Wir kommen dann auf

$$\begin{pmatrix} 1x & 2y \\ 2x & 1y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ b \end{pmatrix}$$

und also

$$2x + y = \lambda x$$
$$x + 2y = \lambda y$$

Wir bekommen also

$$y((1-\lambda)^2 - 4) = 0$$

$y \neq 0, x \neq 0$ Da die nullvektoren keine Eigenvektoren sind $\Rightarrow (1-\lambda)^2 = 4 \Rightarrow \lambda = [-1, 3]$ Warum spezifisch zwei?

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ Wir Suchen ein λ sodass $b(v) = \lambda \cdot v$ für $v \in \mathbb{R}^2, v \neq 0$

$$\left(B - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alsow für welche λ ist $B - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ nicht invertierbar (wann ist der kern nicht trivial) $\Leftrightarrow$ Für welche $\lambda \in K$ ist $det\left(B - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0?$

$$det\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix}\right) = (1-\lambda)(4-\lambda) \Rightarrow \lambda = [2, 3]$$

Und jetzt fur die Eigenvektoren: für $\lambda = 2$

$$b(v) = 2v \Rightarrow v = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha \neq 0$$

Satz 10.1.4 $T : V \to V$ linear. Dann gilt: $\lambda \in K$ eigenwert von $T \Leftrightarrow ker(T - \lambda_v) = 0$ Bis hier habe ich was verpasst...

Fibonaccifolgen sei V der V-R der Fibonnacci Folgen. wir haben $S : V \to V$ ist die Verschiebungsabbiildung, (die ist definiert in satz 1.1.15)

Die Basis war $B = \{\mathbb{F}_{0,1}, \mathbb{F}_{1,0} <\}$ Und die matrix ist $[S]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $det(S) = \lambda^2 - \lambda - 1$ eigenwerte sind also $\phi und \varphi$ und die Eigenfolgen sind $\{\mathbb{F}_{\phi,1}, \mathbb{F}_{\varphi,0} <\}$ also die diagonal matrix ist dann $[S]_C^C = \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \varphi \end{pmatrix}$ **Das charakteristische polynom** Sei $A \in M_{m \times n}(K)$ Dann ist $X_A(x) = det(A - x\eth_n)$ das charakteristische polynom von A

10.2.2 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dann ist $X_a(x) = ichhabenichtabgeschrieben$ aber der konstante term des carachteristischen polynom ist die Determinante.

$det(A - x1_n)$ Insbesondere $X_{1_2}(x) = x^3 - 2x + 1 = (x-1)^2$

Definition 10.2.3 $T : V \to V$ linear dann sei $X_T(x) = det([T]_B^B - x1_n)$ dies ist unabhängig von der wahl der Basis B.

10.2.4: $X_T(x)$ ist wohldefiniert

Beweis $[T]_c^C = [D]_C^B [T]_B^B [D^{-1}]_B^C$ danns ist

$$det([T]_C^C - 1_n x) = det([D]_C^B [T]_B^B [D^{-1}]_B^C - 1_n x) = det(D[T]_B^B D^{-1} - xDD^{-1})$$
$$= det(D([T]_B^B - xT)D^{-1}) = det(D)det([T]_B^B - x)det(d^-1 =) = \det(D)det([T]_B^B - x)$$

2.1 Theorem 10.2.5:

Es sei $T : V \to V$ linear. Dann gilt dans die Eigenverte von $T = \{\lambda \in K | X_T(\lambda) = 0\}$

Lemma 10.2.6 Sei $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(K)$ eine obere Dreiecksmatrix fann gilt

$$X_A(x) = \Pi_{n=1}^n (a_{ii} - x)$$

Sei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & cd \end{pmatrix} \Rightarrow X_A = x^2 - (a+d)x + ad - bc$

Trace (noch nachzu sehen) $Tr : M_{n \times n}(K) \to A = (a_{ij}) \to \sum a_{ii} 1$ **Def 10.2.7** Sei $T : V \to V$ linear dann ist die Spur von T

$$Tr(T) = Tr([T]_B^B)$$

10.2.8 $Tr(T)$ ist wohldefiniert

Beweis Zu zeigen wann C eine Andere Basis un $D = id]_B^C$ dann gilt

$$Tr([T]_B^B) = Tr(D^{-1}[T]_C^C D)$$

Es reicht aus zu zeigen dass wenn $M_1, M-2_{n\times n}(K)$ dann gilt $Tr(M_1M_2) = Tr(M-2M_1)$ (mit explizite rechnung beweisen)
Daher gilt auch 10.2.8
Satz10.2.9 es sei $T: v \to V$ linear dann gilt

$$X_T = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1}x^{n-1}Tr(T) + ... + det(T)$$

Beweis es sei $A = [^B_B]$ Mit induktion kann man beweisen dass wenn es für eine M_{n-1-1} geht dann geht es für $M_{n\times n}$ als übung zu machen. Der Zweite beweis geht wie folgt ab:
Sei $B \in M_{n\times n}$ und $b = (b_{ij})$ dann gitl die formel

$$\sum_{\sigma\in S_n} b_{\sigma(1,1)}....b_{\sigma(n,n)}$$

Sei $B = A - x1_n$ und $\sigma \in S_n$ Fur welche σ hat

$$b_{\sigma(1,1)}b_{\sigma(2,2)}....b_{\sigma(n,n)}$$

ein polynom von grad >n-1? Der beweis ist todlich, nacheher schauen ich tippe jetzt was ich nicht verstehe...