

Abstract

0.1 Bonusprogramm

12 serien* 5 punkte / serie → 60 punkte

- 0-19 Kein bonus
- 20-39 Lineare interpolation
- >40 maximaler bonus 39, 40 schon maximaler bonus

1 Wellen

1.1 Federwelle

Gutes model für eine Festkörper, Transversale Anregung, senkrecht zur länge, Longitudinale Anregung, entlang der länge des feder dings. (Elektromagnetik schwer da es in beide richtungen geht). Es gelten Folgende Bedingungen für die federwelle:

- Jede masse Schwingt um ihre ruhelage, (wie eine Pendel)
- Jede masse bleibt in ruhe bis die welle sie erreicht
- Ruckrehr zur ruhelage

1.1.1 Amplitude

der Welle $\xi(x, t)$ (x : Ort für die Seilwelle, t zeit)

1.1.2 Dispersion

: Form des wellenpakets der anregung bleibt unverändert $\xi(x, t = 0) = f(x)$ $f(x)$ ist die form des wellenpakets $x - a$ führt zu einer translation der Welle ohne änderung seiner form:

$$c \rightarrow x - a \rightarrow \xi(x - a, t = 0) \rightarrow (x + a)$$

$$a = vt \rightarrow f(x \pm vt)$$

$$\xi(x, t) = f(x \pm vt)$$

v ist hier die **Phasengeschwindigkeit** der Welle.

1.1.3 Harmonische Wellen

Vom Harmonischen Oszillator, Wellengleichung herleiten, allgemeine wellengleichung finden. Eine Harmonische Welle ist eine sinus (cosinus ist besser) kurve

$$\xi(x, t) = \xi_0 \cdot \sin(k(x \pm vt) = f(x \pm vt)$$

$$\text{Wellenzahl } k(x + \lambda) = kx + 2\pi \rightarrow k\lambda = 2\pi \rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

k ist die Wellenzahl (so dass was im sinus ist dimensionslos ist)

$$\lambda : \text{Wellenlänge}$$

In zwei dimensionen ist \vec{k} ist ein vektor und zeigt uns die wellen richtung aus (longitude, oder senkrecht)

Kreisfrequenz: $\omega = 2\pi\nu = 2\pi\frac{1}{T}$ Wo T die Periode ist.

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sim (k(x \pm vt)) = \sin(kx + kv t) = \xi_0 \sin(kx \pm \omega t)$$

1.1.4 Wellengleichung in einer Dimension

$$\xi(x, t) = \xi_0 e^{i(kx \pm \omega t)}$$

wir leiten nach der zeit ab:

$$\frac{\delta \xi}{\delta t} = \xi_0 (-kv) \cos(k(x - vt))$$

$$\frac{\delta^2 \xi}{\delta t^2} = \xi_0 (-kv)^2 \sin(k(x - vt))$$

nach dem ort ableiten

$$\frac{\delta \xi}{\delta x} = \xi_0 k \cos(k(x - vt))$$

$$\frac{\delta^2 \xi}{\delta^2 x} = \xi_0 k^2 \sin(k(x - vt))$$

Zusammestellen $\frac{\delta^2 \xi}{\delta^2 t} = v^2 \frac{\delta^2 \xi}{\delta^2 x}$

$$\frac{\delta^2 \xi}{\delta^2 t} - v^2 \frac{\delta^2 \xi}{\delta^2 x} = 0$$

Wie sieht dann die allgemeine lösung aus?

$$\xi(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

Ableitung nach der Zeit

$$\frac{\delta \xi}{\delta t} = \frac{\delta f(x - vt)}{\delta t} + \frac{\delta f(x + vt)}{\delta t} = \frac{\delta f(\alpha(x, t))}{\delta t} + \frac{\delta g(\beta(x, t))}{\delta t}$$

Weiter und weiter ableiten und herumschreiben:

$$\frac{\delta f}{\delta \alpha}(\alpha(-v)) + \frac{g(\beta)}{\delta \beta}(\beta(v))$$

Für die zweite ableitung gilt diese hergehensweise auch, und wir finden dass die gleichung oben erfüllt ist und dass folgende gleichung gilt:

$$\frac{\delta^2 \xi}{\delta^2 t} - v^2 \frac{\delta^2 \xi}{\delta^2 x} = 0$$

Gute frage: jede sinusfunktion erfüllt das; wir haben nur angenommen dass x und t einen anhang (f in diesen fall) haben

Experiment DNA dings, sehr wenig reibung zwischung elemente \rightarrow rucktreibende kraft sehr gering. Auch reflektion.

1.1.5 Transversale Wellen

$$\xi(z, t) = A f(z - vt)$$

Diesmal ist k aber ein Vektor

$$xi(z, t) = A \cos(kz\omega t)\hat{x}$$

Anhänge zur spannung(seilwelle) Seilwelle \rightarrow Wellengleichung Wir nehmen viele kleine massenelemente den seil entlang, Dann haben wir zwei kräfte, den seil hoch/entlang und die spannung des seils/nach unten. Wir haben jetzt für eine massen element zwei funktionen $xi(x)$ und $\xi(x + dx)$ Wir brauchen also der unterschied zwischen diese zwei kräfte, die nicht entgegengesetzt sind wegen der breite des massenelements.

$$\Delta S_y = S \sin(\alpha') - S \sin(\alpha)$$

Herumdingen

$$\Delta S_y = S \frac{\delta^2 \xi}{\delta x^2} dx$$

Ich habe verpasst Elastizität modul?

1.1.6 Räumliche verteilung von Wellen

$$\xi(x, y, z, t) = A f(kz - \omega t)$$

Transversale Welle: Polarisationsrichtung (in x oder y schwingen, transversal aber anders)

$$A = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} \quad \xi(t) = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} \cdot e^{ikz - \omega t}$$

Die wellenzahl wird jetzt zu einem Vektor der beschreibt in welcher richtung diese welle sich ausbreitet.

$$\xi(r, t) = A e^{i(kr - \omega t)}$$

wobei $k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_z \end{pmatrix}$

1.2 Wellengleichung in drei dimensionen

$$\frac{1}{v^2} \frac{\delta^2 \xi}{\delta t^2} - \frac{\delta^2 \xi}{\delta x^2} - \frac{\delta^2 \xi}{\delta y^2} - \frac{\delta^2 \xi}{\delta z^2} = 0$$

Laplace operator $\Delta = \nabla^2 = \left(\frac{\delta}{\delta x}, \frac{\delta}{\delta y}, \frac{\delta}{\delta z} \right) \begin{pmatrix} \delta/\delta x \\ \delta/\delta y \\ \delta/\delta z \end{pmatrix}$ Also es gilt

$$\frac{1}{v^2} \frac{\delta^2 \vec{\xi}}{\delta t^2}(x, y, z, t) - \Delta \vec{\xi} = 0$$

1.3 Kugelwellen

Beispiel punktförmige Lichtquelle. Hier ist k nicht mehr wohldefiniert, da die Welle sich in alle Richtungen ausbreitet.

$$\vec{\xi}_0 \cdot e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

$$\frac{\delta \vec{\xi}}{\delta x} = i k x e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

In alle Richtungen und zweimal ableiten, und wir finden:

$$\Delta \vec{\xi}(\vec{r}, t) = -k^2 \vec{\xi}(\vec{r}, t)$$

Und dann dasselbe mit der Zeit:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\delta^2 \vec{\xi}}{\delta t^2} - \Delta \vec{\xi} = \xi \left[-\frac{\omega^2}{v^2} + k^2 \right] \vec{\xi} \quad v = \frac{\omega}{k}$$

Mit der Kugelsymmetrie $\Delta = \frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2} + \frac{\delta^2}{\delta z^2}$ bekommen wir dann

$$\frac{\delta \phi}{\delta x} = \left(\frac{\delta r}{\delta x} \frac{\delta}{\delta r} + \frac{\delta \theta}{\delta x} \frac{\delta}{\delta \theta} + \frac{\delta \phi}{\delta x} \frac{\delta}{\delta \phi} \right) \phi$$

$$\frac{\delta r}{\delta x} = \sin(\theta) \cos(\phi)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta \theta}{\delta x} &= \frac{\delta}{\delta x} \left[\arccos\left(\frac{z}{r}\right) \right] = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{z^2}{r^2}}} \frac{\delta}{\delta x} \frac{z}{r} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{z^2}{r^2}}} \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{r^3} 2xz \right) \\ &= \frac{1}{r} \cos(\theta) \cos(\phi) \end{aligned}$$

Dasselbe geht jetzt mit $\frac{\delta \phi}{\delta x}$ (Schreibe ich nicht hin)

1.4 Kugelwellen, Wellengleichungen in 3d

$\vec{k} \cdot \vec{r} = |\vec{k}| \cdot |\vec{r}| = k \cdot r$ Da k und r immer parallel laufen (dank der Kugelsymmetrie)

$$\vec{\xi}(r, t) = \frac{\vec{A}_1}{r} f_1(kr - \omega t) + \frac{\vec{A}_2}{r} f_2(kr - \omega t)$$

Diese Lösung erfüllt die Differentialgleichung.

1.5 Energietransport

Die Geschwindigkeit eines Massenstücks $v = \frac{\delta \xi(\vec{r}, t)}{\delta t}$

Die kinetische Energie dieses Massenstückes $dT = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta \xi}{\delta t} \right)^2 dm$ Energiedichte $\frac{dT}{dV}$

Elastische Energie:

$$E_{el} = \int_0^{\Delta l} (\Delta l') d(\Delta l') = A \int_0^{\Delta l} E \frac{\Delta l'^2}{l} = \frac{1}{2} (A \cdot l) E \left(\frac{\Delta l}{l} \right)^2$$

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\delta \xi}{\delta x} \Rightarrow \frac{1}{2} E \left(\frac{\delta \xi}{\delta x} \right)^2$$

Energie dichte:

$$\frac{dT}{dV} = \frac{1}{2} \rho v^2 f'^2$$
$$\frac{dE_{el}}{dV} = \frac{1}{2} E f'^2$$

Pro volumen gerechnet ist die elastische und kinetische energie dieselbe. Die Gesamtenergie ist also $\frac{dW}{dV} = \rho v^2 f'^2$

1.6 Wellenfunction ξ

$$\xi(x, t) =$$

Die Form einer welle: $f(x) = \xi(x, t = 0)$ ist der initiale gefrorene status einer Welle. Für jetzt, ist die Form konstant (dämpfungen sind benachlässigt). Wegen der Form der Welle, ist ort und Zeit nicht unabhängig, da die Form der Welle nur den Ort definiert bei einer konstanter Zeit.

Nach eine Zeit hat sich die Welle bus zum punkt $x \pm vt$ ausbreitet, wobeir v die Wellengeschwindigkeit ist. Die Wellenfunction ist also

$$\xi(x, t) = f(x \pm vt)$$

1.7 Harmonische Welle

Eine harmonische Welle ist beschrieben durch ein sinus oder ein cosinus:

$$\xi(x, t) = A \cdot \sin(k(x \pm vt))$$

wobei k die Wellenzahl (später Wellenvektor) $\left[\frac{1}{m}\right]$, ist, A die Amplitude. Es gilt $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ wo λ die Wellenlänge ist. Also man kann die folgende vereinfachung machen:

$$k(x \pm vt) = kx + kvt = kx + \omega t$$

wobei ω die Kreisfrequenz ist.

1.8 Wellengleichung

Wir leiten nahc der Zeit ab

$$\frac{\delta \xi}{\delta t} = A(-\omega) \cos(kx - \omega t)$$
$$\frac{\delta^2 \xi}{\delta t^2} = a - \omega^2 A \sin(kx - \omega t)$$

Und jetzt nach dem Ort:

$$\frac{\delta \xi}{\delta x} = Ak \cos(kx - \omega t)$$
$$\frac{\delta^2 \xi}{\delta x^2} = -k^2 A \sin(kx - \omega t)$$

Wie setzen dies zusammen und Bekommen:

$$= \frac{\omega^2}{k^2} \frac{\delta^2 \xi}{\delta x} = v^2 \frac{\delta^2 \xi}{\delta x^2}$$
$$\frac{\delta^2 \xi}{\delta t^2} - v^2 \frac{\delta^2 \xi}{\delta x^2}$$

Die Allgemeine Lösung olgt folgender Form:

$$f(x - vt) - g(x + vt)$$

1.8.1 Arten von Wellenverbreitung

- Transversalwelle: Auslenkung senkrecht zur geschwindigkeit
- Longitudonalwell, die Auslenkung ist parallel zur ausbreitung der Welle

1.8.2 Energietransport einer Welle

Eine welle transportiert kinetische und elastische energie, die Beträge dieser beiden einergien ist im volumen (flachenelement oder distanz) immer gleich.

1.8.3 Tipps zur Serie 1

1.1_a Vollständige Wellenfunktion finden, (wichtige dinge oben sind hilfreich)

1.1_b Die orte einfach einsetzen und die trigonometrische vereinfachen mit den mathematischen hilfsmitteln der formelsammlung

1.2_a Uhr und Lineal, so dass man zeiten und abständen messen kann. Welche grössen sind gegeben, und welche sind messbar? damit vereinfachen. Die Wellenlänge kann man (theoretisch messen) also mit der Wellenlänge die distanz ausrechnen.

1.8.4 Stehende Welle

Die Stehende Welle ist einfach eine summe der Zwei wellen die sie aufführt.

1.8.5 Reflection und Transmission

Transmission ist in derselben richtung als einkommende Welle, Reflektierte welle dagegen

$$\xi_A = Ae^{i(k_1x - \omega t)}$$

$$\xi_R = Re^{i(-k_1x - \omega t + \delta_R)}$$

$$\xi_T = Te^{i(kx - \omega t + \delta_T)}$$

Wir können diese gleichungen mit zwei Parameter (zwei gleichungen) lösen.

Wir haben Zwei Bedingungen:

Steigheit

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (\xi_A + \xi_R) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \xi_T$$

Und Kräftegleichgewicht:

$$S_1 \frac{\delta \xi_A}{\delta x} \Big|_{x=0} + \frac{\delta \xi_R}{\delta x} \Big|_{x=0} = \frac{\delta \xi_T}{\delta x} \Big|_{x=0}$$

$$A + Re^{i\delta_R} = Te^{i\delta_T}$$

Imaginärteil: $T \sin(\delta_T) = R \sin(\delta_R)$

$$\text{Kraftgleichung} \quad AS_1k_1 = TS_2k_2e^{i\delta_T} + RS_1k_1e^{i\delta_R}$$

$$TS_2k_2 \sin(\delta_T) + RS_1k_1 \sin(\delta_R) = 0 = T \sin(\delta_T)(S_2k_2 + S_1k_1)$$

Und wir bekommen

$$k_i = \frac{\omega}{v_i}$$

$$\alpha = \frac{S_2\delta_2}{S_1\delta_1}$$

Materialparameter α Ist ein Index von den Geschwindigkeiten der Welle in den beiden Materien (für ein seil ist S die Spannung):

$$T \sin(\delta_T)(\alpha + 1) = 0 \Rightarrow \sin(\delta_T) = 0$$

$$\delta_T = 0 \quad \lim_{v_1 \rightarrow v_2} \xi_A = \xi_T$$

$$\delta_T = \pi \quad \lim_{v_1 \rightarrow v_2} \xi_A = -\xi_T$$

Es muss also $\delta_T = 0$ sein da der Zweite fall unphysikalisch ist.

1.8.6 Reflektierte Welle

Es gibt nochmal die Zwei möglichkeiten: $\delta_R = 0$ oder $\delta_R = \pi$

$$A = T \pm R \text{ oder } A = \alpha T \mp R$$

$$R = \pm \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} A \quad T = \frac{2A}{\alpha + 1}$$

Spezialfälle:

- $\alpha = 1 \Rightarrow S_1\delta_1 = S_2\delta_2 \quad R = 0, T = A$
- $\alpha > 1 \Rightarrow \delta_R = \pi$ bei $\alpha \rightarrow \infty$ wird alles reflektiert und nichts transmittiert
- $\alpha < 0 \Rightarrow R \geq 0$ und $\delta_R = 0 \Rightarrow R = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} A, \quad T = \frac{2A}{\alpha + 1}$

1.8.7 Stehende Wellen

Wir haben jetzt in dem Gedanksexperiment 2 laufende Wellen, und zwei Grenzflächen $\Rightarrow \xi = 2A \cos(kx - \frac{\delta_R}{2}) \cos(\omega t - \frac{\delta_R}{2})$
Reflexion am hartem Medium: $\alpha \gg 1, \delta_R = \pi$

$$\xi = 2A \sin(kx) \sin(\omega t)$$

1.8.8 Energieverteilung der Stehende Wellen

Kinetische Energiedichte

$$\frac{dT}{dV} = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\delta \xi}{\delta t} \right)^2 = 2\rho A^2 \omega^2 \sin^2(kx) \cos^2(\omega t)$$

Elastische Energiedichte:

$$\frac{1}{2} E \left(\frac{\delta \xi}{\delta x} \right)^2 = 2EA^2 k^2 \cos^2(kx) \sin^2(\omega t)$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \quad v^2 = \frac{E}{\rho}$$

1.8.9 Eigenschwingungen Einer Seite

$\frac{\delta \xi^2}{\delta t^2} = v^2 \frac{\delta^2 \xi}{\delta x^2}$ Und daher $v^2 = \frac{S}{\rho}$ rechnen rechnen rechnen und wir kommen auf:

$$u(x) = u_0 \cos(kx + \phi) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$$

Wo A und B ovm Randbedinugen kommen, (z.B feste Seite: $u(x=0) = u(x=l) = 0$)

1.9 Übungsstunde 2

1.9.1 Polarisation

Wir wissen dass die Ausbreitung einer transversalwelle Senkrecht zur ausbreitungsrichtung Steht. Wir nehmen an die Welle breitet sich in der z richtung aus, dann kann die Auslenkung überall auf der $x-y$ Ebene statt finden.

Eine Welle hesiit linear falls die Ganze AUlenkung nur in eine Ebene Stattfindet. Falls mehrere linear Polarisierte Wellen Überlagert werden, und es zwischen diese Wellen einen Phasenunterschid gibt, dann entsteht eine Elliptisch-Polarisierte Welle

1.9.2 Beispielaufgaben

Angenommen wir haben eune Überlagerung von:

$$y_1(x, t) = 5 \cos(kx - \omega t) \vec{e}_x$$

$$y_2(x, t) = 2 \cos(kx + \omega t) \vec{e}_y$$

Hier ist die resultierende Welle immer noch linear polarisiert. Ich habe viel verpasst, laufende Wellen, Stehende Wellen ist keine losung der Wellengleichung.

1.9.3 Random Facts

Sehr nahr zu einer Kugelwellenquelle ist dies keine ein dimensionale Welle, aber sehr weit, kann man es mit viele punk-tquellen un (eindimensionale quellen)

1.9.4 Kohärenz

Wie lange ist eine Welle peridodisch (in ort und zeit)? Eine glühbirne z.B hat in der langen distanz, hat keine Feste Phasenbeziehung zu bestimmte Zeiten und Orten. Bisher haben wir angenommen dass die Welle unendlich eine sinuswelle. Wir müssen interferenzen messen \rightarrow interferometer. Wir messen dieselbe lichtquelle mit unterschiedliche distanzen am selben punkt, wenn da keine phase ist, dann ist die lichtquelle nicht perfekt. Die Normale interferenz sollte entweder destruktiv oder konstruktiv sein, aber wenn die quelle nicht perfekt, dann ist das ganze nicht perfekt und der maximum ist kleiner als wenn $x_1 = x_2$

1.9.5 Zwei entgegengesetzte wellen

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\xi_1(r, t) = \frac{A}{\sqrt{|r - r_1|}} \cos(k|r - r_1 - \omega t|)$$

$$\xi_1(r, t) = \frac{A}{\sqrt{|r - r_2|}} \cos(k|r - r_2 - \omega t|)$$

Wenn $|r - r_1| - |r - r_2| = n\lambda$ dann ist der interferenz am maximum ($n \in \mathbb{N}$) Die maxima sind dann an den punkte

$$\sqrt{(x+a)^2 + y^2} = n\lambda + \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

Hyperbel schar

1.10 Reflexion+Transmission

Seilwelle mit eine dicke änderung in der mitte, da die welle von der Spannung abhängt und von der seildichte. Daher auch die ausbreitungsgeschwindigkeit. Einlaufende Welle $\xi_A = Ae^{i(kx_1 - \omega t)}$

Reflektierte welle: $\xi_A = Ae^{i(kx_1 - \omega t + \delta_R)}$

Transmittierte welle: $\xi_A = Ae^{i(kx_1 - \omega t + \delta_T)}$

Es müssen folgende sachen Gelten:

$$\lim_{x \rightarrow 0_-} (\xi_A + \xi_R) = \lim_{x \rightarrow 0_+} \xi_T$$

Die Vertikale kräfte links und rechts der Grenzfläche müssen gleich sein.

1.10.1 Wiederholung

Sei ein Seil mit eine Grenzfläche wo sich der Seil ändert, dann gibt es eine Einlaufende, Transmittierte und Reflektierte Welle. Man kann folgende gleichung aufstellen:

$$\alpha = \frac{k_2 \cdot S_2}{k_1 \cdot S_1} = \sqrt{\frac{S_2 \cdot \rho_2}{S_1 \cdot \rho_1}} \text{ Wobei } k \text{ der Wellenvektor ist und } S \text{ Die seilspannung ist.}$$

Wir können dann alles in unterschiedliche fälle einschachteln

- $\alpha > 1$ $\delta_R = \pi$, $R = \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \cdot A$, $T = \frac{2A}{\alpha+1}$ und dieser Fall entspricht einen Festen Ende, also es ist wie wenn wir eine Dunne schnur die zu eine sehr dicke schnur geht.
- $\alpha < 1$ $\delta_R = 0$, $R = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \cdot A$, $T = \frac{2A}{1+\alpha}$ Dieser Fall entspricht einem Losen Ende, also wenn die Dicke schnur zu eine Sehr dünne Schnur wird.
- $\alpha = 1$ Dann ist es als ob die schnur gleich geblieben wäre.

1.10.2 Stehende Wellen

Bei einer Stehende Welle gibt es Knoten und bäuche, die Bedingung einer Stehende Welle (im beispiel der Saite)ist $n \frac{\lambda}{2} = l$ für eine länge von l :

$$\lambda_n = \frac{2l}{n} \Rightarrow \omega_n = k_n v = \frac{n\pi}{l} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{S}{\rho}}}_{=v} = n\omega_1$$

1.10.3 Fourier Transformation

Sei eine Welle die als Summe von Sinus und Cosinus Wellen beschrieben werden Kann:

$$f(t) = c_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$$

Hier ist c_0 eine konstante die die Ganze Welle verschiebt:

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

und

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

Experiment Wir wollen eine Perfekte Rechteckwelle herstellen, wir nehmen also eine Grundwelle und legen dazu ihre ungerade harmonischen, mit jeweils kleinere Amplituden, so dass wir dann $\lim_{n \rightarrow \infty}$ eine Perfekte Rechteckwelle bekommen. Mit dieser methode kann man jede Welle herstellen.

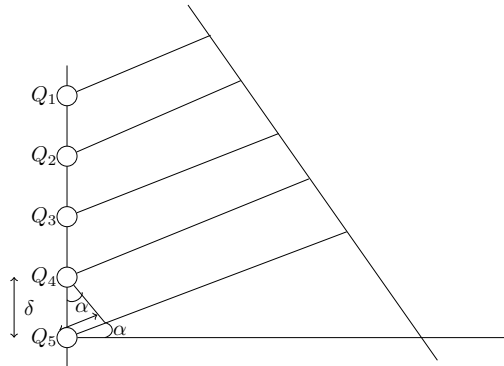
1.11 Beugung, Brechung und Dispersion

Für die Beugung ist das Video von Veritasium sehr gut.

1.11.1 Prinzip von Huygens

Jede Wellenfront ist eine Überlagerung von Kugelwellen. Dieses Prinzip kann erweitert werden:

Wenn z.B. licht in einen Medium eintrifft, dann werden die partikel aufgeregt in dem sie die Photone einnehmen, dann werden sie wieder ausgestrahlt und aus dieser vorstellung dieser Kugelwelle kann man die wellenfront sehr gut approximieren. Im skrip sind dazu sehr hübsche abbildungen (1.38).



Hier kann man also die Phasenverschiebung beschreiben. (N = Anzahl punktquellen und $N = 2M + 1$)

$$\Delta l = k \Delta S = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta S = k \delta \sin(\alpha)$$

UND hier ist aber $\delta \ll r$ wobei r der Abstand zum zuschauer ist. Wir schauen uns also die Überlagerung der Punktquellen am punkt P :

$$\begin{aligned} \xi(\alpha) &= \sum_{n=1}^N \frac{a}{r} e^{i(kr_n - \omega t)} \\ r_n &= r + (M + 1 - n) \Delta S \Rightarrow kr_n = kr + (M + 1) \Delta \varphi - n \Delta l \\ \xi(\alpha) &= \frac{a}{r} e^{i(M+1) \Delta \varphi} \left[\sum_{n=1}^{2M+1} e^{-in \Delta \varphi} \right] e^{i(kr - \omega t)} \\ &\quad \underbrace{\frac{e^{i \Delta \varphi (2M+2)} - e^{i \Delta \varphi}}{e^{-i \Delta \varphi} - 1}} \end{aligned}$$

Kann man das hier vereinfachen:

$$\xi(\alpha) = e^{\frac{i \Delta \varphi}{2}} \cdot e^{i \Delta \varphi (M+1)} \cdot \frac{e^{i \Delta \varphi} - e^{i \Delta \varphi M}}{e^{-\frac{i \Delta \varphi}{2}} - e^{\frac{i \Delta \varphi}{2}}}$$

Und hier alles was übrig bleibt ist

$$e^{i\Delta\varphi(M+1)} \cdot \frac{\sin(N\frac{\Delta\varphi}{2})}{\sin(\frac{\Delta\varphi}{2})}$$

Diese Rechnung ist exact im Limes $n \rightarrow \infty$. Die Amplitude der Welle

$$\xi(\alpha) = \frac{a}{r} \frac{\sin(N\Delta\varphi/2)}{\sin(\Delta\varphi/2)} \cdot e^{i(kr-\omega t)}$$

Und die Intensität gemittelt über ort und Zeit:

$$\langle I \rangle \approx \frac{a^2}{r^2} \cdot \frac{\sin^2(N\Delta\varphi/2)}{\sin^2(\Delta\varphi/2)}$$

1.11.2 Beugung

Wir setzen $N \rightarrow \infty$ und $\delta \rightarrow \infty$ und dazu sagen wir $N \cdot \delta = d = konst$ dann ist:

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow \infty}} \langle I \rangle \approx \lim a^2 \frac{\sin^2(\frac{1}{2}kN\delta \sin(\alpha))}{\sin^2(\frac{1}{2}k\frac{d}{N} \sin(\alpha))}$$

Wir kürzen Weiter mit der Approximation $\sin(x) = x$ für kleine Winkel:

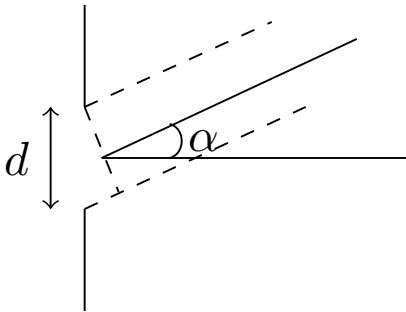
$$\approx \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow \infty}} \frac{\sin^2(\frac{1}{2}kd \sin(\alpha))}{\frac{1}{4N^2}k^2d^2 \sin^2(\alpha)} = \underbrace{(Na)^2}_{=A^2} \frac{\sin^2(\frac{1}{2}\Delta\varphi)}{(\frac{1}{2}\Delta\varphi)^2}$$

Dank dieses $\frac{\sin^2(x)}{x^2}$ haben wir also bei $\frac{1}{2}\Delta\varphi = n \cdot \pi$ nullstellen und je weiter weg man ist, je kleiner die Amplitude. Das alles ist sehr erklärlich mit dem double slit experiment aus der Vorlesung.

Experiment Spalt experiment: Wir haben folgende messungen und werte:

- Spaltbreite d
- Phasenverschiebung $\Delta\varphi = k \cdot d \cdot \sin(\alpha)$ (Hier ist $d \cdot \sin(\alpha)$ die projizierte spaltbreite.)

Wir können also die Beugung am einzelspalt ausrechnen



Und hier kann man die sehr wichtige Eigenschaft der Beugung am einzelspalt klarer sehen:

$$\langle I \rangle \approx A^2 \frac{\sin^2(\frac{1}{2}\Delta\varphi)}{(\frac{1}{2}\Delta\varphi)^2}$$

1.11.3 Reflexion und Brechung

(A la Huygens)

Reflexion: Warum ist die Reflexion nur unter dem selben ausgangswinkel? Es ist eine Frage der Konstruktiven interferenz, alle andere Ausgangswinkel interferieren destruktiv.

Brechung: Die Erklärung ist nicht sehr gut.. aber es gilt für die Brechung und konstante frequenz ν

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

Der Fermat Prinzip ist simpler und es sagt dass: *Licht sucht sich den Schnellsten Weg.*

1.11.4 Totalreflexion

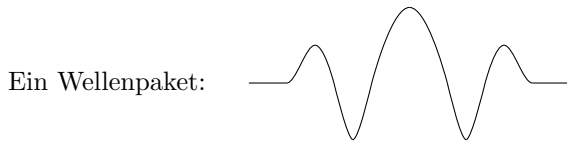
Wir haben unser Brechungsindex $nE \frac{c}{c_i} > 1$ wo c = Lichtgeschwindigkeit und c_i = Lichtgeschwindigkeit im Medium:

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} = \frac{v_1}{v_2} \Rightarrow \sin(\alpha_2) = \underbrace{\frac{c_2}{c_1}}_{>1} \underbrace{\sin(\alpha_1)}_{\leq 1} > 1$$

Und dies kann nie passieren, also es gibt keine Brechung und keine Reflexion, also was ist los? Es gibt keine Transmission aber es gibt ein bisschen Reflexion und das Licht geht auch die Grenzfläche entlang.

1.12 Dispersion und Gruppengeschwindigkeit

v_{ph} : Die Phasengeschwindigkeit ist die Geschwindigkeit mit welcher sich ein Punkt mit konstanter Phase bewegt. In anderen Worten, wenn wir überlagerte Wellen haben, ist die Phasengeschwindigkeit die Geschwindigkeit des Punktes den wir auf der Welle "Fest Machen". und die Gruppengeschwindigkeit, ist die Geschwindigkeit der Knoten, in deren die kleinere Wellen minimieren.



Links sieht man sehr gut wie ein Wellenpaket definiert ist, die Geschwindigkeit des Maximums ist die Gruppengeschwindigkeit, sie geht in der selben Richtung als die Phasengeschwindigkeit ist aber immer kleiner.

Man kann so eine Welle mit folgender Gleichung definieren

$$\xi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk$$

Wobei $A(k)$ die Amplitudenfunktion ist und $\omega(k)$ die sogenannte Dispersion ist.

Wir schauen uns den allgemeinen Fall an wo $k \neq 0$. Wir wählen x so dass $k_0 - x \leq k \leq k_0 + x$ wobei der k_0 bezüglich des "Schwerpunkts" (Maximum) des Wellenpakets. (ich finde λ zwischen zwei Maxima und finde damit k_0). Wir können also folgende Vereinfachung machen:

$$\xi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{k-x}^{k+x} A(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^x A(k_0 + x') e^{i(k(x')x - \omega(k)t)} dx'$$

Dass wird mit $\omega = \omega(k)$ um $k = k_0$ herum, also: $\omega(k) = \omega(k_0) + x' \frac{d\omega}{dk} \big|_{k=k_0}$ und also:

$$\xi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t)} \int_{-x}^x A(k_0 + x') e^{i(x' (x - \omega'(k_0)t))} dx'$$

Dass Integral ist auch seine eigene Funktion die von k und x abhängt, diese Funktion nennt man *envelope*. Man schreibt also:

$$\xi(x, t) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(kx - \omega(k_0)t)} \cdot G(x - v_g t)$$

wobei $v_g = \frac{d\omega}{dk} \big|_{k=k_0}$ die Gruppengeschwindigkeit ist und $v_{ph} = \frac{\omega}{k}$ die Phasengeschwindigkeit.

Wenn $\frac{d\omega}{dk} = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \omega = v \cdot k$ dann ist $v = v_g = v_{ph}$ und man nennt dass eine Lineare Dispersion, wenn die Frequenz linear vom Wellenvektor abhängt.

Wenn $\frac{dv_g}{dk} < 0$ $\frac{dv_p}{d\lambda} > 0$ ist es die Normale Dispersion.

Wenn $\frac{dv_g}{dk} > 0$ $\frac{dv_p}{d\lambda} < 0$ Heißt es Anormale Dispersion.

Wenn wir Lichtwellen in einem Medium haben dann gibt es ein Brechungsindex (der von der Wellenlänge abhängt) und daher $n = n(\lambda)$ und daher gibt es Dispersion.

1.13 Dopplereffekt

Was hier neu ist, ist dass die Quelle und der Beobachter können sich bewegen.

1.13.1 Beobachter ruht, Quelle bewegt sich

Sagen wir dass der Beobachter die Wellenberge zählt über einen Zeitraum Δt , dann ist die Anzahl Wellenberge $n_\lambda = \nu_Q \Delta t$ man kann auch sagen: $n_\lambda = \nu_Q \Delta t + \frac{v_B \Delta t}{\lambda}$ Also die Frequenz die der Beobachter misst ist:

$$\nu_b = \frac{n_\lambda}{\Delta t} = \nu_Q + \frac{v_Q}{\lambda}$$

1.13.2 Beobachter bewegt, Quelle ruht

Wenn der Beobachter sich bewegt, ist die Situation gleich, die relative Geschwindigkeit ist zu nehmen.