

Lineare Algebra II

Benjamin Dropmann

March 28, 2025

Polynome

Polynomdivision

Seien f und $g \neq 0$ zwei polynome in $K[x]$ dann $\exists q(r), r(r) \in K[x]$ mit $\deg(r) = 0$ oder $\deg(r) < \deg(g)$ und $f = qg + r$.

Korollar 9.0.4

Sei $f(x) \in K[x], f(x) \neq 0$ sei $\lambda \in K$ so dass $f(\lambda) = 0$. Dann $\exists q(x) \in K[x]$ so dass $f(x) = (x - \lambda)q(x)$

Beweis $\exists q(x), r(x) \in K[x] \quad \deg(r) < \deg(x - \lambda) = 1$ so dass $f(x) = (x - \lambda)(q(x) + r(x))$, $\rightarrow r \in K \Rightarrow f(\lambda) = 0$

Korollar 9.0.6

Sei $f(x) \in K[x], \deg(f) = n > 0$ Dann hat $f(x)$ höchstens n Nullstellen. (Fundamentalsatz der Algebra sehr ähnlich).

Beispiele 9.0.7

Es sei $f(x) = x + 1(x^2 + 1)$, als poly in $\mathbb{R}[x]$ hat es nur eine nullstelle $x = -1$. Als polynom in $\mathbb{C}[x]$ gilt $f(x) = (x + 1)(x + i)(x - i)$

Theorem 9.0.8 Fundamentaler Satz der Algebra

Es sei $f(x) \in \mathbb{C}[x], \deg(f) = n > 0$ dann hat $f(x)$ in $\mathbb{C}[x]$ genau n nullstellen. Das heisst es existieren $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$ nicht unbedingt verschieden, so dass $f(x) = (x - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (x - \lambda_n)$ Wir sagen \mathbb{C} ist algebraisch abgeschlossen.

Lemma 9.0.11

sei $f(x) \in K[x], \lambda \in K$ so dass $f(\lambda) = 0$ Die Ordnung der Nullstelle (Vielfachheit) λ ist die ganze Zahl $n \geq 1$ so dass $\exists q(x) \in K[x]$ so dass

$$f(x) = (x - \lambda)^n q(x)$$

Beispiele 9.0.12

1. $f(x) = x + 1(x^2 + 1)$ Einfache nullstelle $\lambda = -1$ daher ist die ordnung 1
2. $p > 2 \quad g(x) = x^p \in \mathbb{F}_p[x]$

$\mathbb{F}_p = [a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 | n \geq 0, a_i \in \mathbb{F}_p]$ Und $g(x) = x^p - 1 = (x - 1)^p$ (leicht ausrechnen) bemerkung 9.0.13 Analogien $\mathbb{Z} \leftrightarrow K[X]$

\mathbb{Z}	$K[x]$
± 1	$K \setminus 0$
Primzahlen	Unzerlegbare Polynome $\deg < 0$
$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$	$f(x)$ ist unzerlegbar: $K[x]/f(x)$ Körper

Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition 10.1.1

V/K Vektorraum, $T: V \rightarrow V$ Endomorphismus.

1. $\lambda \in K$ ist ein Eigenwert von T wenn $\exists v \in V, v \neq 0_v$ so dass $T(v) = \lambda v$
2. Ein solches v heisst Eigenvektor mit Eigenwert λ

Bemerkung 10.1.12

Wenn v Eigenvektor von T ist, $T(v) = \lambda v$ dann ist auch αv Eigenvektor von T mit Eigenwert $\lambda, \forall \alpha \in K, \alpha \neq 0$

Beispiele 10.1.3

Rechnung von eigenwerte und Eigenvektoren

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ Eigenwerte $\lambda = 3$ und $\lambda = -1$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ b \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ b \end{pmatrix}$$

Wir kommen dann auf

$$\begin{pmatrix} 1x & 2y \\ 2x & 1y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ b \end{pmatrix}$$

und also

$$2x + y = \lambda x$$

$$x + 2y = \lambda y$$

Wir bekommen also

$$y((1 - \lambda)^2 - 4) = 0$$

$y \neq 0, x \neq 0$ Da die nullvektoren keine Eigenvektoren sind $\Rightarrow (1 - \lambda)^2 = 4 \Rightarrow \lambda = [-1, 3]$ Warum spezifisch zwei?

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ Wir Suchen ein λ sodass $b(v) = \lambda \cdot v$ für $v \in \mathbb{R}^2, v \neq 0$

$$\left(B - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also für welche λ ist $B - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ nicht invertierbar (wann ist der kern nicht trivial) \Leftrightarrow Für welche $\lambda \in K$ ist

$$\det \left(B - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0?$$

$$\det \left(\begin{pmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 1 & 4 - \lambda \end{pmatrix} \right) = (1 - \lambda)(4 - \lambda) \Rightarrow \lambda = [2, 3]$$

Und jetzt für die Eigenvektoren: für $\lambda = 2$

$$b(v) = 2v \Rightarrow v = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha \neq 0$$

Satz 10.1.4

$T : V \rightarrow V$ linear. Dann gilt: $\lambda \in K$ eigenwert von $T \Leftrightarrow \ker(T - \lambda 1_v) = 0$

Eigenwerttheorie

Fibonacci sei V der V-R der Fibonacci Folgen. wir haben $S : V \rightarrow V$ ist die Verschiebungsabbildung, (die ist definiert in satz 1.1.15) Die Basis war $B = \{\mathbb{F}_{0,1}, \mathbb{F}_{1,0} <\}$ Und die matrix ist $[S]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\det(S) = \lambda^2 - \lambda - 1$

eigenwerte sind also ϕ und φ und die Eigenfolgen sind $\{\mathbb{F}_{\phi,1}, \mathbb{F}_{\varphi,0} <\}$ also die diagonal matrix ist dann $[S]_C^C = \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \varphi \end{pmatrix}$

Definition Das charakteristische polynom

Sei $A \in M_{m \times n}(K)$ Dann ist $X_A(x) = \det(A - xI_n)$ das charakteristische polynom von A

Beispiele 10.2.2

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dann ist $X_a(x) =$ ich haben nicht abgeschrieben aber der konstante term des charakteristischen polynom ist die Determinante. $\det(A - xI_n)$ Insbesondere $X_{1_2}(x) = x^3 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

Definition 10.2.3

$T : V \rightarrow V$ linear dann sei $X_T(x) = \det([T]_B^B - xI_n)$ dies ist unabhängig von der wahl der Basis B . 10.2.4: $X_T(x)$ ist wohldefiniert

Beweis $[T]_C^C = [D]_C^B [T]_B^B [D^{-1}]_B^C$ dann ist

$$\begin{aligned} \det([T]_C^C - 1_n x) &= \det([D]_C^B [T]_B^B [D^{-1}]_B^C - 1_n x) = \det(D [T]_B^B D^{-1} - x D D^{-1}) \\ &= \det(D ([T]_B^B - x I) D^{-1}) = \det(D) \det([T]_B^B - x) \det(D^{-1}) = \det(D) \det([T]_B^B - x) \end{aligned}$$

Theorem 10.2.5

Es sei $T : V \rightarrow V$ linear. Dann gilt dann die Eigenwerte von $T = \{\lambda \in K \mid X_T(\lambda) = 0\}$

Lemma 10.2.6

Sei $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(K)$ eine obere Dreiecksmatrix dann gilt

$$X_A(x) = \prod_{i=1}^n (a_{ii} - x)$$

Sei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & cd \end{pmatrix} \Rightarrow X_A = x^2 - (a+d)x + ad - bc$ Trace (noch nachzu sehen) $Tr : M_{n \times n}(K) \rightarrow A = (a_{ij}) \rightarrow \sum a_{ii} 1$

Definition 10.2.7

Sei $T : V \rightarrow V$ linear dann ist die Spur von T

$$Tr(T) = Tr([T]_B^B)$$

Korollar 10.2.8

$Tr(T)$ ist wohldefiniert

Beweis Zu zeigen wann C eine Andere Basis und $D = id]_B^C$ dann gilt

$$Tr([T]_B^B) = Tr(D^{-1}[T]_C^C D)$$

Es reicht aus zu zeigen dass wenn $M_1, M_2 \in M_{n \times n}(K)$ dann gilt $Tr(M_1 M_2) = Tr(M_2 M_1)$ (mit explizite rechnung beweisen) Daher gilt auch 10.2.8 **Satz 10.2.9** es sei $T : v \rightarrow V$ linear dann gilt

$$X_T = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} x^{n-1} Tr(T) + \dots + det(T)$$

Beweis es sei $A = [T]_B^B$ Mit induktion kann man beweisen dass wenn es für eine $M_{n-1 \times n-1}$ geht dann geht es für $M_{n \times n}$ als übung zu machen. Der Zweite beweis geht wie folgt ab:

Sei $B \in M_{n \times n}$ und $b = (b_{ij})$ dann gilt die formel

$$\sum_{\sigma \in S_n} b_{\sigma(1,1)} \dots b_{\sigma(n,n)}$$

Sei $B = A - x 1_n$ und $\sigma \in S_n$ Für welche σ hat

$$b_{\sigma(1,1)} b_{\sigma(2,2)} \dots b_{\sigma(n,n)}$$

ein polynom von grad $> n-1$? Der beweis ist todlich, nacheher schauen ich tippe jetzt was ich nicht verstehe...

$T : V \rightarrow V$ linear, dann ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert wenn $\exists v \in V, v \neq 0_v$ so dass $Tv = \lambda v$. Hier merken wir dass der skalar eines Eigenvektors, auch ein eigenvektor ist, und dass die addition von zwei vektoren mit dem selben eigenwert, auch ein Eigenvektor ist, also hat dies die Struktur eines unterraums... Wir sind auf dem Folgenden Satz gekommen. Sei $T : V \rightarrow V$ linear, dann gilt $\lambda \in K$ ist genau dann Eigenwert von T wenn $ker(T - \lambda I_n) \neq \{\emptyset\}$

Beweis $\lambda \in K$ Eigenwert $\Leftrightarrow \exists v \in V, v \neq 0_v$ so dass $Tv = \lambda v \Leftrightarrow (T - \lambda I_n)v = 0_v$ Und daher ist $v \in ker(T - \lambda I_n)$ Das ist Praktisch da wenn $(T - \lambda I_n)$ nicht injektiv ist dann ist $ker(T - \lambda I_n) \neq \emptyset$ und wenn die Determinante nicht null ist dann ist $T - \lambda I_n$ kein endomorphismus.

Bemerkung

0 ist ein Eigenwert wenn T kein isomorphismus ist

Korollar

Folgende aussagen sind äquivalent:

- λ ist ein Eigenwert von T
- $ker(T - \lambda I_n) \neq \{0_v\}$
- $T - \lambda I_n$ ist kein Isomorphismus
- $det(T - \lambda I_n) = 0$

Der Beweis ist eine zusammenfassung von vorherigen beweisen Mit dieses wissen kann man Finden dass es höchstens n Unterschiedliche eigenwerte gibt, da die mit einem grad n polynom definiert sind.

Das charakteristische polynom

Definition 10.2.1

Sei $A \in M_{n \times n}(K)$. dann ist $X_A(x) = \det(A - x1_n)$ das charakteristische polyom von A Für eine 2×2 Matrix ist dann

$$X_A(X) = x^2 - \underbrace{(a-d)}_{Tr(A)}x + \underbrace{ad-bc}_{det(A)}$$

Kleine errinerung, die Trace ist die Summe der Diagonale elemente. Diese bemerkung gilt auch für 3×3 . Wir rechnen jetzt für $n \times n$. Der Konstante term von $\det(A - xI_n)$ ist $\det(A)$ (da es der Fall bei $x = 0$ ist)

Insbesondere:

$$X_1(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

Definition 10.2.3

$T: V \rightarrow V$ linear dann ist $X_T(x) = \det([T]_B^b - xI_n)$ Für eine Basis B von V .

Lemma 10.2.4

$X_T(x)$ ist wohldefiniert.

Beweis

$$[T]_C^C = [D]_C^B [T]_B^B [D^{-1}]_B^C$$

Multiplikativität von \det :

$$\det([T]_C^C - xI_n) = \det([D]_C^B [T]_B^B [D^{-1}]_B^C - xI_n) = \det([D]_C^B [T]_B^B [D^{-1}]_B^C - xD^{-1}D) = \det(D) \det([T]_B^B - xI_n) \det(D^{-1})$$

Was unsere aussage zustimmt. Da das Charakteristische Polynom unabhängig von der Wahl der Basis, ist sie Eindeutig und daher Wohldefiniert.

Theorem 10.2.5

Es sei $T: V \rightarrow V$ linear, dann gilt dass

$$\{\text{Eigenwerte von } T\} = \{\lambda \in K | X_T(\lambda) = 0\}$$

Lemma 10.2.6

Sei $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(K)$ Eine Obere Dreiecksmatrix. Dann ist das Charakteristische Polynom

$$X_A(x) = \prod_{i=1}^n (a_{ii} - x)$$

$Tr: M_{n \times n}(K) \rightarrow K$ $A = (a_{ij}) \rightarrow \sum a_{ii}$ Ist wohldefiniert.

Definition 10.2.7

Sei $T: V \rightarrow V$ linear dann ist $Tr(T) = Tr([T]_B^B)$ Wobei B eine Basis, Wohldefiniert (**Satz 10.2.8**).

Beweis Zu Zeigen, wenn C eine andere Basis ist, und $D = [id_v]_C^B$ eine Basiswechselmatrix ist, dann gilt:

$$Tr([T]_B^B) = Tr(D^{-1}[T]_C^C D)$$

Hier Bleibt nichts übrig ausser es auszurechnen, aber es funktioniert, es reicht aus zu zeigen, Wenn $M_1, M_2 \in M_{n \times n}(K)$ dann gilt $Tr(M_1 \cdot M_2) = Tr(M_2 \cdot M_1)$ Da wenn dass gilt dann kürzt sich der D, D^{-1} . Dass ist eine Explizite berechnung.

Satz 10.2.9

Sei $T: V \rightarrow V$ linear, dann gilt

$$X_T(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} Tr(T) x^{n-1} + \dots + \det(T)$$

Beweis Es sei $A = [T]_B^B$

Satz 10.2.8

$Tr(T)$ ist wohldefiniert.

Beweis Wenn C eine andere basis ist und $D = [id_v]_C^B$ dann gilt: $Tr[T]_B^B = Tr(D^{-1}[T]_C^C D)$ Hier bleibt in theorie nichts anderes als von hand zu zeigen dass $M_1, M_1 \in M_{n \times n}(K)$ dann gilt: $Tr(M_1 M_2) = Tr(M_2 M_1)$. Aber es ist immer noch nicht sehr schön.

Satz 10.2.9

Es sei $T : V \rightarrow V$ linear dann ist

$$X_T(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} \text{Tr}(T) x^{n-1} + \dots + \det(T)$$

Über den rest kann man nicht viel sagen

Beweis Es sei $A = [T]_B^B$ dann ist $X_A(x) = \det(A)$ Aber die A matrix ist sehr gross, dann muss man den beweis per induktion machen (Gute exams aufgabe). Hier ist die zweite idee die wir machen Wir wissen dass $B \in M_{n \times n}(K)$ dann gilt

$$\det(B) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) b_{\sigma(1),1} \cdots b_{\sigma(n),n}$$

Sei $B = A - xI_n$ und $\sigma \in S_n$, für welche σ ist $b_{\sigma(1),1} \cdot b_{\sigma(2),2} \cdots b_{\sigma(n),n} = (*)$ ein Polynom vom Grad $\geq n-1$? wenn $\sigma = id$ dann ist

$$(*) = (a_{1,1} - x) \cdots (a_{nn} - x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} \underbrace{(a_{1,1} + a_{2,2} + \dots + a_{n,n})}_{=\text{Tr}(B)} x^{n-1} + \text{Restterm von grad } \leq n-1$$

Alle andere möglichkeiten für σ müssen also vom grad $< n-1$ sein (da nur auf der Diagonale $a_{j,j} - x$ steht, überall sonst gibt es kein x und wenn wir nur ein element vertauschen, sind es zwei, und daher ist grad $< n-1$), und daher ist dass zweite vorkfaktor vom polynom Welches dann beweist dass der zweite Restterm $\text{Tr}(A)$ ist und also dass unsere gleichung stimmt (der konstante faktor muss ja $= \det(A)$ sein)

Korollar 10.2.11

$T : V \rightarrow V$ mit V n -dim hat höchstens n Eigenwerte (da der Charakteristische polynom grad n ist.)

0.1 Diagonalisierung

Frage: es sei $T : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Gibt es eine Basis in welche die abbildungsmatrix von T diagonal ist?

Satz 10.3.2

Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ verschieden eigenwerte von T und $\forall i$ sei v_i ein Eigenvektor mit eigenwert λ_i dann sind v_1, \dots, v_n linear unabhängig.

Beweis Es sei zwei Eigenvektoren, v_a, v_b mit eigenwerte λ_a, λ_b dabei ist dann $Tv_a = \lambda_a v_a$ und $Tv_b = \lambda_b v_b$ wenn aber $v_a = cv_b$ (sie sind nicht linear unabhängig) dann gilt $Tcv_b = \lambda_a cv_b$ und damit ist $\lambda_a \cdot c = \lambda_b \cdot c$ und also sind diese Eigenvektore nicht unterschiedlich, da sie beide den selben Eigenwert haben.

Korollar 10.3.4

Wenn Wir für $T : V \rightarrow V$ linear mit V n -dim, wenn T Genau n verschiedene Eigenwerte hat, dann hat V eine Basis die aus $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ besteht.

Definition 10.3.5

$T : V \rightarrow V$ ist diagonalisierbar wenn \exists Basis von Eigenvektoren existiert. In diesem Fall ist die Abbildungsmatrix von T bezüglich dieser Basis diagonal, mit den Eigenwerte als einträge in der Matrix.

Bemerkung 10.3.6

Eine $A \in M_{n \times n}$ Matrix ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow \exists B \in GL_n(K)$ so dass $B^{-1}AB$ diagonal ist (basiswechselmatrix).

Lemma 10.3.7

Wenn A Diagonalisierbar mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ist, dann ist $X_A = \prod (\lambda_i - x)$

Charakteristische Polynom ist: $X_A = \det(A - xI_n)$ und seine lösungen sind die Eigenwerte der Matrix. Eine n -dim Matrix ist diagonalisierbar falls es n unterschiedliche Eigenwerte gibt, daher wenn es eine Basis von Eigenvektoren gibt. Wir wissen auch dass

$$A = [T]_B^B \Leftrightarrow \exists P \in GL_n(K) \text{ so dass } P^{-1}AP \text{ Diagonal ist}$$

Frage, für welche A gibt es so ein P ?

- Wenn A diagonal ist dann ist P die identität.
- Wenn $X_A(x)$ n verschiedene Nullstellen hat, beachte, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ aber $X(x) = (1-x)^2$ also diese bedingung ist nicht ausschliesslich.

Gibt es matizen die Nicht diagonalisierbar sind?

Beispiele 10.3.8

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X_A(x) = x^2 \Rightarrow A$ hat nur einen Eigenwert, $\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Eigenvektoren sind $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
Daraus kann man aber keine Basis machen, dies ist nicht diagonalisierbar.
- Es kann auch am Körper liegen dass wir nicht diagonalisieren können: $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \Rightarrow X_M(x) = x^2 + 1$
dass können wir nicht in \mathbb{R} faktorisieren, aber in \mathbb{C} geht es mit Eigenwerte $\pm i$, Wir werden immer den Körper vergrößern so dass dieser Fall nicht aufkommt

Beispiele 10.3.9:

der Erste Fall in der Liste lässt sich verallgemeinern, Sei $n \geq 1, \lambda \in K$ Wir definieren die **Jordansche Blockmatrix**

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Und wir merken also dass $X_{J_n}(x) = (\lambda - x)^n$ Wobei der einzige Eigenwert $x = \lambda$ und die Dazugehörigen Eigenvektoren

sind dann $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ was natürlich für $n > 1$ keine Basis.

Folgerungen Dass Charakterische allein entscheidet nicht ob eine Matrix diagonalisierbar ist. Und dass Problem ist eine Mögliche Diskrepanz zwischen der Ordnung der Nullstelle und die Dimension des aufgespannten Unterraums der Eigenvektoren.

Eigenräume

Definition 10.4.1

Sei $T : V \rightarrow V$ linear und λ ein Eigenvektor von T . Der Eigenraum, ist der Aufgespannte unterraum vom λ -Eigenvektor, seine Definition ist wie Folgt $E_\lambda = \ker(T - \lambda \text{id}_V) = \langle \lambda \text{Eigenvektoren} \rangle$

Lemma 10.4.2

$E_\lambda \subset V$ Beweis trivial. **10.4.3**

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Dann ist $X_A(x) = -x^3 + 3x + 2$ und dann sind die Eigenwerte $X_A(2) = 0$ und dann können wir

Faktorisieren und es kommt $X_A(x) = -(x-2)(x+1)^2$ und die Dimensionen der Dazugehörigen Eigenräume sind:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow E_{\lambda=2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\text{Und mit } E_{\lambda=-1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Aber mit eine Riesen matrix ist es schwierig zu sagen ob wenn wir alle Eigenräume zusammenstellen, wir eine Basis von V haben, oder nicht.

Definition 10.4.4

Sei V ein V-R, wir betrachten $U_1, \dots, U_k \subset V$ Sei $W = U_1 + \dots + U_k$ Dann ist W die Direkte summe von U_1, \dots, U_k , wenn

$$\forall w \in W \quad \exists! u_1 \in U_1, \dots, u_k \in U_k \text{ so dass } w = u_1 + \dots + u_k$$

Man schreibt $W = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ Ich glaube dies ist äquivalent zu $\bigcap U_i = \{0_v\}$ Der beweis ist schwierig.

Lemma 10.4.6

Es gilt $W = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ genau wenn die Gleichung $u_1 + \dots + u_k = 0_v$ mit $u_i \in U_i \quad \forall i$ nur die Lösung $u_i = 0_v \quad \forall i$ hat. Der beweis ist als übung zum Leser überlassen

Beispiele 10.4.7

- $\mathbb{R}^3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ Dies wäre äquivalent zu sagen dass diese drei elemente eine Basis von \mathbb{R}^3 sind also ja
- $\mathbb{R}^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ aber Keine Direkte summe da die zweite lineare Hülle unnötige elemente enthält

Bemerkung 10.4.8

Wenn W die Direkte Summe von U_1, \dots, U_k ist dann gilt dass $\dim(W) = \dim(U_1) + \dots + \dim(U_k)$

Beweis Sei B_i Basis von U_i dann behaupten wir dass $B_1 \cup \dots \cup B_k$ Basis von W ist. Dieser Teil des Beweis ist als Übung überlassen

Satz 10.4.9

Es sei $T : V \rightarrow V$ linear und $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ Eigenwerte von T mit $\lambda_i \neq \lambda_j \forall i \neq j$. Sei $W = E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_k}$ Dann gilt $W = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k}$.

Beweis Nehmen wir an dass $\exists u_1, \dots, u_k \quad u_i \in E_{\lambda_i}$ und dann da u_i jeweils in unterschiedliche Eigenräume sind, sind die alle von einander linear unabhängig, kann die summe den Nullvektor ergeben:

$$\exists u_1, \dots, u_k \in E_{\lambda_i} \text{ so dass } u_1 + \dots + u_k = 0_v$$

Doch u_1, \dots, u_k sind linear unabhängig und wenn $u_i \neq 0_v \quad \forall i$ dann kriegen wir ein widerspruch.

Korollar 10.4.10

Sei $T : V \rightarrow V$ linear mit Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ dann ist T genau dann Diagonalisierbar, wenn die summe der dimensionen der dazugehörigen Eigenräume, die dimension von V ist:

$$T \text{ ist Diagonalisierbar} \Leftrightarrow \dim(V) = \sum_{i=1}^k \dim(E_{\lambda_i})$$

Algebraische und Geometrische vielfachheit

Bemerkung 10.5.1

Es sei $n = \dim_K(V)$ mit $T : V \rightarrow V$ Dann hat $X_T(x)$ grad n und wenn $X_T(x) = (\lambda_1 - x)^{a_1} \cdot \dots \cdot (\lambda_k - x)^{a_k}$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j \forall i \neq j$ dann ist $n = \sum a_i$

Definition 10.5.2

sei λ Eigenwert von T dann ist

- Die Geometrische Vielfachheit; $g_\lambda = \dim(E_\lambda)$
- Algebraische Vielfachheit a_λ ist die Ordnung der Nullstelle vom Faktor λ in $X_T(x)$

Beispiele 10.5.3

Im beispiel 10.4.3 hatten wir

- $\lambda_1 = -1$ und $g_{\lambda_1} = a_{\lambda_1} = -2$
- $J_n(\lambda) \quad g_\lambda = 1 \quad a_\lambda = n$
- $\lambda I_n \quad g_\lambda = a_\lambda = n$

Man merkt dass:

Satz 10.5.4

$T : V \rightarrow V$ mir Eigenwert λ Dann gilt $g_\lambda \leq a_\lambda$

Beweis Sei v_1, \dots, v_k eine Basis von E_λ , v_k eine Basis von E_λ und wir erweitern sie zu einer Basis

$$B = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$$

von V . Dann ist

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} \lambda I_k & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

Dann ist $\det([T]_B^B - xI_n) = (\lambda - x)^k \cdot \det(D - xI_{n-k})$ das bedeutet dass $k \leq a_\lambda$ da im $\det(D - xI_{n-k})$ auch eine Nullstelle vorkommen kann.

Korollar 10.5.5

Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ unterschiedliche Eigenwerte von T , dann gilt:

$$T \text{ ist diagonalisierbar} \Leftrightarrow g_{\lambda_i} = a_{\lambda_i} \quad \forall i$$

Beweis Korollar 10.4.10 sagt dass

$$T \text{ ist Diagonalisierbar} \Leftrightarrow V = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k} \Leftrightarrow \dim(V) = \sum \dim(E_{\lambda_i}) = \sum g_{\lambda_i} \leq \sum a_{\lambda_i} = n = \dim(V)$$

da beide seiten $\dim(V)$ haben, dann ist $\sum g_{\lambda_i} = \sum a_{\lambda_i}$ und da $a_{\lambda_i} \geq g_{\lambda_i}$ ist $a_{\lambda_i} = g_{\lambda_i} \quad \forall i$

Theorem 10.5.6

Sei $\dim(V) = n$ mit $T : V \rightarrow V$ dann sind folgende aussagen äquivalent:

- T ist Diagonalisierbar
- $\forall \lambda$ gilt $a_\lambda = g_\lambda$
- Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ Eigenwerte, dann gilt $X_T(x) = \prod (\lambda_i - x)^{g_{\lambda_i}}$
- $V = \bigoplus_{i=1}^k E_{\lambda_i}$

Die Beweise sind schon alle vorgeführt gewesen. Was machen wir mit den Matrizen die man nicht diagonalisieren kann?

Das minimale Polynom

Definition und Erste Eigenschaften

Definition 11.1.1

Sei $T : V \rightarrow V$ linear, dann ist $T^k = \underbrace{T \circ \dots \circ T}_{k \text{ mal}}$ und $T^0 = id_V$. Die definition ist für Matrizen analog.

Definition 11.1.2

Sei $g(x) = a_d x^d + \dots + a_1 x + a_0 \in K$ ein Polynom, dann definieren wir $g(T) = a_d T^d + \dots + a_1 T^1 + a_0 T^0 \in End_k(V)$. Es geht auch mit matrizen.

Beispiele e 11.1.4

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad f(x) = x^2 - x + 3 \Rightarrow f(A) = A$
- $g(x) = x^n$ dann ist $g(J_n(0)) = 0_{n \times n}$ im Jordanblock, verschiebt sich die diagonale nach oben rechts.

Satz 11.1.5

Sei $T \in End_K(V)$ dann $\exists g(x) \in K[x]$ so dass $g(T) = 0_v$

Beweis $\dim(End_k(V)) = n^2 \Leftrightarrow \dim(V) = n$ dass heisst dass T^0, T^1, \dots, T^{n^2} sind alle linear unabhängig, und daher:

$$\exists a_0, \dots, a_{n^2} \in K \neq 0 \text{ so dass } a_0 T^0 + \dots + a_{n^2} T^{n^2} = 0_v$$

Aber kann man dieses Polynom finden, und hat es einen zusammenhang mit den Charakteristischen Polynom

Bemerkung 11.1.6

Wenn $g(T) = 0_V$ dann gilt auch $(\alpha g)(T) = 0_V \quad \forall \alpha \in K$

Beispiele e 11.1.7

- Sei $n \geq 1$, $A = Id_n$ und $g(x) = x - 1$ dann gilt $g(A) = 0_{n \times n}$
- Sei $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{pmatrix}$ dann haben wir $\forall g \quad g(A) = \begin{pmatrix} g(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g(\lambda_k) \end{pmatrix}$ Hier können wir also $X_A(A) = 0_{n \times n}$ nehmen

Gilt dies also für jede Matrix?

Gilt also dass $g(x) = X_A(x)$ für jede Matrix A ?

Behauptung

Sei $A \in M_{n \times n}(K)$ dann ist $X_A(A) = 0_{n \times n}$ Hier kommen wir später zurück

Definition 11.1.8

Sei $T : V \rightarrow V$ linear. Das minimale Polynom ist das monische ($\neq 0$) Polynom kleinsten Grades $m_T(x) \in K[x]$ so dass $m_T(T) = 0_V$

Lemma 11.1.9:

Seien $m(x)$ und $m'(x)$ beide Monisch, vom kleinsten Grad $d \geq 1$ so dass $m(T) = m'(T) = 0_V$. Dann gilt $m(x) = m'(x)$.

Beweis Nimm an dass $m(x) \neq m'(x)$ Dann sei

$$g(x) = m(x) - m'(x) \neq 0 \Rightarrow \deg(g) < d \text{ und } g(T) = 0_V$$

Was ein Widerspruch bringt.

Satz 11.1.10

Sei $T : V \rightarrow V$ Linear und $g(x) \in K[x]$ monisch so dass $g(T) = 0_V$ Dann gilt dass $m_T(x) | g(x)$ ($m_T(x)$ teilt $g(x)$)

Beweis Polynom division: $\exists q(x), r(x) \in K[x]$ mit $\deg(r) < \deg(m)$ so dass $g(x) = m(x)q(x) + r(x)$ und da $g(T) = 0_V = q(T) \underbrace{m(T)}_{=0} + r(T)$ also $r(T) = 0_V \Rightarrow r(x) = 0$

Beispiele 11.1.11

- $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \Rightarrow X_A(x) = (x - \lambda)(x - \mu)$ wir wissen dass $X_A(A) = 0_{2 \times 2}$ und wir wissen dass der minimale polynom der Charakteristische Polynom teilt. Wenn also $\mu \neq \lambda \Rightarrow m_A(x) = X_A(x)$ aber wenn $\lambda = \mu \Rightarrow m_A(x) = x - \lambda$
- Sei $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \quad X_A(x) = (\lambda - x)^2(\mu - x) \Rightarrow m_A(x) = (\lambda - x)(\mu - x) \quad \lambda \neq \mu$ Wenn $\mu = \lambda \quad m_A(x) = x - \lambda$
- $A = J_n(\lambda) \Rightarrow X_A(x) = (\lambda - x)^n \Rightarrow m_A(x) = X_A(x)$
- $A = \lambda id_n \Rightarrow X_A(x) = (\lambda - x)^n$ und $m_A(x) = x - \lambda$

Cayley Hamilton $A \in M_{n \times n} \Rightarrow X_A(A) = 0_{n \times n}$

Beweis

$$(A - x id_n) adj(A - x id_n) = X_A(x) id_n \quad (*)$$

Hier schreibe man $adj(A - x I_n) = (p_{ij}(x))$ wobei $p_{ij}(x) \in K[x]$ mit $\deg(p_{ij}) \leq n - 1$

Bemerkung 11.3.2

$$adj(A - x id_n) = B_{n-1}x^{n-1} + \dots + B_1x + B_0 \quad B_i \in M_{n \times n}(K)$$

$$X_A(x) id_n = (-1)^n (x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0)$$

Wir setzen diese letzte Gleichung in (*) ein und bekommen

$$AB_0 = (-1)^n a_0 id_n$$

$$-B_0 + AB_1 = (-1)^n a_1 id_n$$

und so weiter bis:

$$-B_{n-1} = (-1)^n id_n$$

Und zu zeigen ist

$$X_A(A) = 0_{n \times n} \Leftrightarrow (-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0 id_n = 0_{n \times n}$$

Wir können jede Gleichung vom System mit A^i multiplizieren (wo $i = \deg$ der Linie) und summieren dass alles zusammen.

Wir finden dass die Summe = 0 und dass $X_A(A) = 0_{n \times n}$

Jordansche Normalform

Definition Theorem

Sei $\lambda \in K$ und $n \geq 1$ der Jordanblock der Länge n und Eigenwert λ ist folgende Matrix:

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

Lemma 12.1.1

$X_{J_n}(x) = (\lambda - x)^n$ und λ ist der Einzige eigenwert, $g_\lambda = 1$ und $a_\lambda = n$ mit $m_{J_n}(x) = (-1)^n X_{J_n}(x)$

Theorem 12.1.2

Jordansche Normalenfor, Sei $T : V \rightarrow V$ Dann $\exists B$ eine Basis von V so dass

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} J_{n_1}(x_1) & & & 0 \\ & J_{n_2}(x_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{n_k}(x_k) \end{pmatrix}$$

Dies darstellung ist eindeutig bis auf die Vertauschung der Blöcke.

Theorem 12.1.3

Sei $A \in M_{n \times n}(K)$ dann $\exists B \in GL_n(K)$ so dass $B^{-1}AB$ die Jordansche Normalenform hat.

Lemma 12.2.2

Sei $C \in M_{n \times n}(K)$ wobei $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ und $A, B \in M_{(n-2) \times (n-2)}(K)$ Definiert jetzt $U = \langle e_1, \dots, e_i \rangle, W = \langle e_i, \dots, e_n \rangle$

Sei $v = u + w \in V \neq 0_v, u \in U, w \in W$ Dann ist v genau dann ein Eigenvektor von T_C mit Eigenwert λ wenn $T_A(u) = \lambda u \cap T_B(w) = \lambda w$ $E_\lambda(T_C) = E_\lambda(T_A) \oplus E_\lambda(T_B) \Rightarrow g_\lambda(T_C) = g_\lambda(T_A) + g_\lambda(T_B)$

Satz 12.2.3

Sei $T : V \rightarrow V$ linear und Nimm an $\exists B$ Basis von V So dass $[T]_B^B$ die Diagonal Jordansche normalenform annimmt und sei λ Eigenwert von T Dann gilt $g_\lambda = \#\{i | 1 \leq i \leq k, \alpha_i = \lambda\}$ $a_\lambda = \sum_{\alpha_i = \lambda} \lambda_i$ = Die länge des gsten Jordanblock mit eigenwert $\lambda = s(\lambda) = \max\{n_j | 1 \leq j \leq k, \alpha_j = \lambda\}$

Beweis $B = \{b_1^{(1)}, \dots, b_{n,1}^{(1)}, \dots, b_{1n}^{(k)}, \dots, b_{kn}^{(k)}\}$ Sei $W_i = \langle b_1^{(i)}, \dots, b_n^{(i)} \rangle \Rightarrow V = \bigoplus W_i$ und T Sei $T_V \rightarrow V$ linear und λ ein Eigenwert von T Dann ist

$$\tilde{E}_\lambda = \bigcup_{k \geq 1} \ker(T - \lambda id_v)^k$$

Der Verallgemeinerte Eigenraum von λ , wo alle Vektoren die sich durch eine Potenz von T auf einen Skalar von sich selber SChicken lassen. Wenn T Diagonalisierbar ist, dann ist V Die direkte summe der E_λ 's

Behauptung

$$V = \bigoplus_{\lambda = \text{Eigenwert}} \tilde{E}_\lambda$$

Lemma 12.3.3

Sei $n = \dim(V)$ dann gilt $\tilde{E}_\lambda = \ker(T - \lambda id_v)^n$

Beweis Sei $v \in \tilde{E}_\lambda$ und sei k minimal so dass $(T - \lambda id_v)^k v = 0_v$ und $(T - \lambda id_v)^{k-1} v \neq 0$ So ein k muss es per definition Geben. Wir wenden jetzt Lemma 12.2.2 an, dann sind $v, sv, \dots, s^{k-1}v$ linear unabhängig, und daraus folgt $k \leq n$

Definition 12.3.4

Sei $v \in \tilde{E}_\lambda$ mit $v \neq 0$ und $k \geq 1$ minimal so dass $(T - \lambda id_v)^k v = 0_v$ Dann ist $\{v, (T - \lambda id_v)v, \dots, (T - \lambda id_v)^{k-1}v\}$ die Jordankette von v der länge k

Bemerkung 12.3.5

$(T - \lambda id_v)^{k-1}v = w$ ist ein Eigenvektor von T mit Eigenwert λ

Beweis $Tw = \lambda w \Leftrightarrow (T - \lambda id_v)w = 0_v \Leftrightarrow (T - \lambda id_v)^k v = 0_v$

Bemerkung 12.3.6

Jeder eigenvektor von T bildet/ist eine Jordankette von länge 1.

Beispiele 12.3.7

- Sei $A = J_n(\lambda) \tilde{T}_A : K^n \rightarrow K^n$ und $S = T_A - \lambda id_{K^n}$ Dann ist die längste Jordankette von länge n .
- Seien $\lambda \neq \mu \in K$ mit

$$A = \begin{pmatrix} J_2(\lambda) & & & 0 \\ & J_3(\lambda) & & \\ & & \lambda & \\ 0 & & & J_2(\mu) \\ & & & & \mu \end{pmatrix}$$

Eine 9×9 Matrix, gibt es Folgende Jordanketten von A :

$$\begin{aligned} e_5 &\rightarrow e_4 \rightarrow e_3 \\ e_6 \\ e_2 &\rightarrow e_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_8 &\rightarrow e_7 \\ e_9 \end{aligned}$$

- Wir haben jetzt: $J_2(\lambda) - \lambda id_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = S$ Dann ist $\ker S^2 = K^2$ und doch $\ker(S) = \langle e_1 \rangle$ dass heisst wir haben eine Jordankette $e_2 \rightarrow e_1 \rightarrow 0$

Lemma 12.3.8

\tilde{E}_λ ist ein T invarianter Unterraum von V . (T invariant heisst: $T(\tilde{E}_\lambda) \subset \tilde{E}_\lambda$)

Beweis Sei $v \in \tilde{E}_\lambda \Leftrightarrow (T - \lambda id_v)^n v = 0_v$. Zu zeigen ist $Tv \in \tilde{E}_\lambda$ Dies ist klar. Wir nehmen dann $(T - \lambda id_v)^n Tv = T(T - \lambda id_v)^n v = T0_v = 0_v$ Da T kommutiert

Satz 12.3.9

λ ist der Einzige Eigenwert von $T|_{\tilde{E}_\lambda}$

Beweis Sei $v \in \tilde{E}_\lambda$ mit Eigenwert μ d.h. $Tv = \mu v$. Sei $k \geq 1$ minimal so dass $(T - \lambda id_v)^k v = 0$. Sei $w = (T - \lambda id_v)^{k-1} v$ da die $k-1$ Potenz der Einzige eigenvektor der Jordankette ist. Dann gilt $(T - \lambda id_v)w = 0 \Leftrightarrow Tw = \lambda w$ aber $(T - \mu id_v)w = (T - \mu id_v)(T - \lambda id_v)^{k-1} v = (T - \lambda id_v)^{k-1} (T - \mu id_v)v = 0_v$ Also gibt es hier einen Widerspruch da ein vektor nicht zwei unterschiedliche Eigenwerte haben kann, d.h. $\lambda = \mu$

Sei $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ Dann ist λ der Eigenwert von A mit $X_A(x) = (\lambda - x)^4$. $\ker(A - \lambda id) = \langle e_1 \rangle = E_\lambda$ Was passiert

wenn wir jetzt \tilde{E}_λ suchen:

$$\tilde{E}_\lambda = \underbrace{\ker(A - \lambda id)}_{=E_\lambda} \cup \underbrace{\ker(A - \lambda id)^2}_{=\langle e_1, e_2 \rangle} \cup \underbrace{\ker(A - \lambda id)^3}_{=\langle e_1, e_2, e_3 \rangle} \cup \underbrace{\ker(A - \lambda id)^4}_{N^4=0_{4 \times 4} \Rightarrow \ker=K}$$

Also ist $\tilde{E}_\lambda = K$

Korollar 12.3.10

Sei $T' = T|_{\tilde{E}_\lambda}$ Dann gilt dass $X_{T'}(x) = (\lambda - x)^{k\lambda}$ mit $k\lambda \leq a_\lambda(T)$

Beweis Dies ist klar da hier hat T' λ als einziges eigenwert, und der $X_{T'}(x)$ muss ja $X_T(x)$ teilen.

Lemma 12.3.11

Seien μ, λ verschieden Eigenwerte von T dann gilt $\tilde{E}_\lambda \cap \tilde{E}_\mu = \{0_v\}$ und daher gilt $\tilde{E}_\lambda + \tilde{E}_\mu = \tilde{E}_\lambda \oplus \tilde{E}_\mu$

Lemma 12.3.12

Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ verschiedene Eigenwerte von T Dann gilt $\sum_{i=1}^k \tilde{E}_{\lambda_i} = \bigoplus_{i=1}^k \tilde{E}_{\lambda_i}$

Behauptung

V ist die Direkte summe seiner Verallgemeinerten Eigenräume.

Beweis Die idee ist dass wir ein T -invarianten Unterraum $U \subset V$ finden so dass $V = (\bigoplus \tilde{E}_{\lambda_i}) \oplus U \ker(T - \lambda - id_v)^n \oplus U = V$ Hier kann man $U = \text{im}(T - \lambda id_v)$ nehmen, da $\ker \oplus \text{im} = K$

Lemma 12.3.14

Sei $T : V \rightarrow V$ mit $\dim(V) = n$ Linear, λ ein Eigenwert und $g(x) = (x - \lambda)^n$ dann ist $\text{im}(g(T))$ eom T -invarianter Unterraum von V und es gilt das $V = \tilde{E}_\lambda \oplus \text{im}(g(T))$

Beweis Zu beweisen: $w \in \text{im}(g(T))$ Dass ist einfach, $Tw \neq 0 \Leftrightarrow w = g(T)v$ für $v \in V$ $g(T)Tv = Tg(T)v = Tw \Rightarrow Tw \in \text{im}(g(T))$ Mit dem Theorem 4.2.9 ($\dim(V) = \dim(\ker(V)) + \text{im}(V)$) ist jetzt nur zu zeigen ist das $\ker(g(T)) \cap \text{im}(g(T)) = \{0_v\}$ Sei $w \in \text{im}(g(T))$ also $w = g(T)v$ und wenn $w \in \tilde{E}_\lambda$ dann gilt $g(T)w = 0_v$ das ist aber dass gleiche als $(T - \lambda id_v)^{2n} v = 0_v \Rightarrow (T - \lambda id_v)^n v = 0_v$

Lemma 12.3.14

Sei $\mu \neq \lambda$ Eigenwerte. Dann gilt $\tilde{E}_\mu \in \text{im}(g(T))$ und $\text{im}((T - \lambda id_v)^n)$ ist T invariant

Theorem 12.3.15

Sei $T : V \rightarrow V$ linear dann gilt

$$V = \bigoplus_{\lambda: \text{Eigenwert}} \tilde{E}_\lambda$$

Beweis Induktion über die $n = \dim V$ Es sei λ ein Eigenwert dann gilt vom lemma 12.3.14 dass $V = \tilde{E}_\lambda \oplus \text{im}(T - \lambda id_v)^n$. Sei $U = (T - \lambda id_v)^n$ Dann ist U T -invariant und es gilt dass $\dim(U) < n$, daraus folgt dass

$$U = \bigoplus_{\mu \text{ Ew von } T|_U} \tilde{E}_\mu \Rightarrow V = \tilde{E}_\lambda \oplus \bigoplus_{\mu} \tilde{E}_\mu$$

Dank dieses Resultat, können wir dann annehmen dass $V = \tilde{E}_\lambda$, daher um Theorem 12.1.2 zu zeigen, reicht es zu zeigen dass jeder \tilde{E}_λ eine Jordanbasis besitzt

Beweis der Jordanschen Normalenform

Wir Fangen mit dem Spezialfall $S : V \rightarrow V$ nilpotent

Theorem 12.4.1

Sei V n -dimensional und $S : V \rightarrow V$ nilpotent dann $\exists k \geq 1, n_1, \dots, n_k \leq 1$ so dass $n_1 + \dots + n_k = n$ und eine Basis B von V die aus Jordanketten der länge n_i besteht.

$$B = \{S^{n_1-1}u_1, \dots, Su_1, u_1, S^{n_2-1}u_2, \dots, Su_2, u_2, \dots, S^{n_k-1}u_k, \dots, Su_k, u_k\} \quad \forall S^{n_i}u_i \neq 0$$

Die n_i sind hier auch eindeutig bestimmt. Diese Basis der solchen Form, heisst Jordanbasis.

Bemerkung 12.4.3

Die abbildungsmatrix $[S]$ in der Jordanbasis B nimmt folgende form an:

$$[S]_B^B = \begin{pmatrix} J_{n_1}(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{n_k}(0) \end{pmatrix}$$

Was die Jordan'sche normalenform annimmt

Beweis Dass beweist man mit Induktion über $n = \dim V$. $n = 1$ ist klar. Dann nehmen wir an es klappt für $\dim V < n$. Beachte dass $S(V) \subsetneq V$ weil $\ker(S) \supsetneq 0_v$. Also im Fall $\ker(S) = V$ dann ist S die nullabbildung und das Theorem hält. Also ist $\ker(S) \neq \{0_v\}$.

Induktionshypothese: $\exists v_1, \dots, v_l \in S(V)$ und $b_1, \dots, b_l \geq 1$ so dass $\sum b_i = \dim S(V)$ und

$$B' = \{v_1, \dots, S^{b_1-1}v_1, v_2, \dots, S^{b_2-1}v_2, \dots, v_l, \dots, S^{b_l-1}v_l\}$$

eine Basis von $S(V)$ ist. Nach unsere Annahme ist $v_i \in \text{im}(S) \forall i$ daher $\exists u_i \in V$ so dass $Su_i = v_i$ (uhrbild) und damit kann man immer die Jordankette immer ein stück länger machen:

$$B'' = \{u_1, \underbrace{Su_1}_{=v_1}, \dots, \underbrace{S^{b_1}u_1}_{=S^{b_1-1}v_1}, \dots, u_l, \underbrace{Su_l}_{=v_l}, \dots, \underbrace{S^{b_l}u_l}_{=S^{b_l-1}v_l}\}$$

Zur übung steht jetzt zu zeigen dass B'' linear unabhängig ist. Hier fehlt noch der teil der in $\ker(S)$ ist, $\forall i$ ist doch $S^{b_i}u_i \in \ker(S)$. Wir erweitern also die menge $\{S^{b_1}u_1, \dots, S^{b_l}u_l\}$ zu einer Basis von $\ker(S)$

$$\{u_1, S^{b_1}u_1, \dots, S^{b_l}u_l, \underbrace{w_1, w_2, \dots, w_m}_{\notin \text{Jordanketten}}\}$$

Jetzt Behaupten wir dass diese Erweiterung eine Basis von V in der gewünschten Form ist. Die Länge der Jordanketten ist also von der unteren Basis ablesbar

$$\{\underbrace{u_1, Su_1, \dots, S^{b_1}u_1}_{b_1+1}, \underbrace{\dots, u_l, Su_l, \dots, S^{b_l}u_l}_{b_l+1}, \underbrace{w_1}_1, \underbrace{w_2}_1, \dots, \underbrace{w_m}_1\}$$

Es bleibt doch noch zu zeigen dass dies eine Basis von S ist:

- Linear unabhängig ist eine übung da der Beweis nicht sehr schwierig ist
- Zeigen dass diese Basis ein Erzeugendensystem von V ist, merken wir dass $\dim(\ker(S)) = l + m$ und $\dim(\text{im}(\sum b_i)) \Rightarrow l + m + \sum b_i$ und unsere basis hat $m + \sum b_i + 1$ elemente und da es l mal den b_i gibt gilt $\dim(S) = \dim(B'') = m + l + \sum b_i$ und unsere Basis ist ein Erzeugenden System

Der beweis ist komplex, den Beweis mit einen konkreten beispiel auszuführen ist wichtig da diese Sache im Examen seien wird.

Korollar 12.4.4

Es sei $T : V \rightarrow V$ linear, λ ein Eigenwert und $U = \tilde{E}_\lambda$ dann existiert eine Basis B von U so dass $[T|_U]_B^B$ in der Jordan normal form ist (JNF).

Beweis Es sei $S : (T - \lambda id_V)|_U$ Dann ist S per definition der nilpotenz, nilpotent. Dass heisst das wir per Theorem 12.4.1 diese in JNF stellen können. Und dann ist $T|_U = S + \lambda id_V$ und daher ist T in derselben Basis auch in JNF.

Bemerkung 12.4.5

Seien $A, B \in M_{m \times n}(K)$ dann gilt A und B sind ähnlich wenn sie die gleiche JNF haben abgesehen von einer Vertauschung der Blöcke. Die Jordanbasen Jedoch sind nicht eindeutig.

12.5 Berechnung der Jordan normalenform

Beispiele 12.5.1

Was ist die JNF der Folgenden Matrix?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 4}(\mathbb{C})$$

$X_A(x)$, Eigenwerte und vielfachheiten finden. In diesem Fall $X_A(x) = (1-x)^3(2-x) \Rightarrow \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2$ Da $1 = g_{\lambda_1} \neq a_{\lambda_1} = 3$ und $a_{\lambda_2} = g_{\lambda_2} = 1$ Dann wissen wir dass Die anzahl jordanblöcke von einen Eigenwert λ die geometrische vielfacheit g_λ ist, Um zu wissen wie gross die Dazugehörigen JB sind schaut man sich die Dazugehörige Jordanketten an, bzw wir schauen $\forall i \in E_\lambda$ ob $\exists v \in K$ so dass $(D - \lambda id_V)v = i$ wenn nein dann ist die Kette von länge 1 und wenn ja dann mindestens von länge 2, die Länge des Kurzestens Jordanblock ist auch die Potenz des minimalen Polynoms.

$$\Rightarrow [A]_B^B = \begin{pmatrix} J_{a_{\lambda_1}}(\lambda_1) & 0 \\ 0 & J_{a_{\lambda_2}}(\lambda_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Wir können jetzt dank der JNF eine Jordankette für \tilde{E}_{λ_1} . Daher wollen wir $v \in \mathbb{C}^4$ finden so dass

$$v, (A - \lambda_1 id_V)v, \dots, (A - \lambda_1 id_V)^2$$

Eine Basis von \tilde{E}_{λ_1} ist (wir gehen bis 2 da die länge des blocks 3 ist) Die Jordanbasis zu finden ist dasselbe als alle Jordanketten zu finden.

13 Euklidische und Hermitesche Räume

13.1 Normierte Räume

Definition 13.1.1

Es sei $K = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} und V ein K vektorraum. Eine Norm auf V ist ein Funktion $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+$. Eine Norm hat folgende Axiome:

- i. **Dreiecksungleichung** $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$
- ii. **Linearität** $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$
- iii. **Wohldefinitheit** $\|v\| = 0 \Rightarrow v = 0_V$

Beispiele 13.1.2

- $\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\|v\| = |a| + |b|$$

$$\|v\| = \sqrt[p]{|a|^p + |b|^p}$$

$$\|v\| = \max(|a|, |b|)$$

Bemerkung 13.1.4

Sei $p \geq 1$ und $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ Dann definiert $\|v\|_p = (|x_1| + \dots + |x_n|)^{\frac{1}{p}}$ eine Norm auf \mathbb{R}^n

Beispiele 13.1.5

V ist ein Vektorraum der Stetige funktionen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ Dann definieren wir $\|f\|_{\max} = \max\{|f(x)|, x \in [0, 1]\}$

Definition 13.1.6

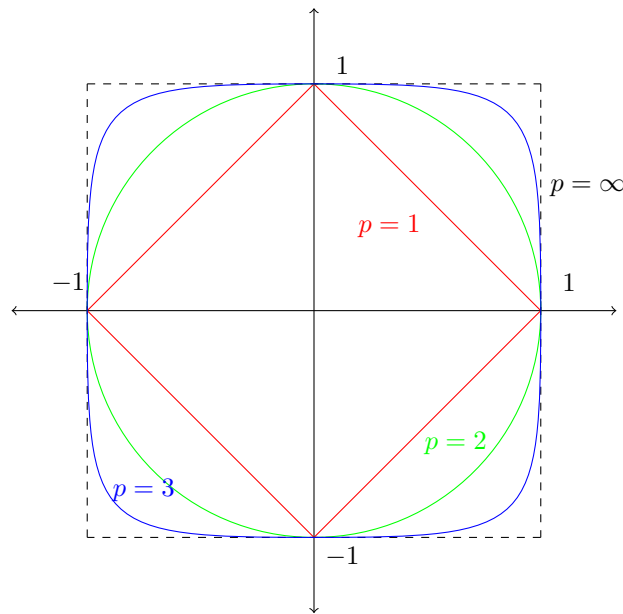
Sei $v \in V$ ein Einheitsvektor, dann gilt $\|v\| = 1$ und die Distanz zwischen zwei vektoren $u, v \in V$ ist $\|u - v\| = d(u, v)$

Bemerkung 13.1.7

Es sei $v \in V, v \neq 0$ Dann ist $\frac{v}{\|v\|}$ ein Einheitsvektor, nämlich die normalisierung von v .

Bemerkung 13.1.8

Die Menge der Einheitsvektoren kann von der Norm viel variieren. Wir schauen uns zum Beispiel die Menge von Einheitsvektoren in \mathbb{R}^2 an:



Die Menge der Einheitsvektoren unterschiedlicher p -Normen

Für $p = \infty$ kann man auch die Maximumsnorm von vorher nehmen.

13.2 Innere Produkte**Definition 13.2.1**

Sei V ein \mathbb{R} Vektorraum. Dann ist ein Inneres Produkt auf V ist eine Funktion $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ so dass :

- Symmetrie: $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle \quad \forall u, v \in V$
- Bilinearität: $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$ und $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ Und natürlich das gleiche in der zweiten Variable
- Positiv definitheit: $\langle v, v \rangle > 0 \quad \forall v \neq 0_v$

Wenn wir $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ nehmen dann ist das ein Euklidischer Raum.

Beispiele 13.2.2

Der Standard innere Produkt ist $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wobei $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$

Beispiele 13.2.3

Sei $V = \mathbb{R}^2$ und sei $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ dann ist $\langle u, v \rangle = 2x_1x_2 - x_1y_2 - y_1x_2 + y_1y_2$ dies ist ein inneres Produkt da es symmetrisch ist (klar), bilinear da nur lineare Terme vorkommen und positiv da es immer positiv ist wenn wir den selben Vektor zweimal nehmen.

Bemerkung 13.2.4

Eine wichtige bemerkung ist dass dieses inneres Produkt auch als matrix multiplication dargestellt werden kann. Zum beispiel kann man der vorherige Beispiel wie folgt definieren: $\langle u, v \rangle = u^t \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} v$. Für dass Standard innere Produkt ist $\langle u, v \rangle = u^t v$.

Beispiele 13.2.5

Seien $a \leq b$ und $C[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}\}$ wobei f stetig ist. Wir definieren also $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$ als inneres Produkt. Die Symmetrie und linearität sind offensichtlich und sei $f \in C[a, b]$ $f \neq 0$ Dann $\exists y \in [a, b], \delta > 0$ so dass $[y-\delta, y+\delta]$ und $f(x) \neq 0 \forall x \in [y-\delta, y+\delta]$ dann gilt $\langle f, f \rangle = \int_a^b f(x)^2 dx \geq \int_{y-\delta}^{y+\delta} f(x)^2 dx \geq 2\delta \min_{[y-\delta, y+\delta]} f(x) > 0$

Definition 13.2.6

Sei V ein \mathbb{C} vektorraum, ein Inneres Produkt ist $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ Dies ist der Hermitesche Produkt und es ist:

- Linearität der ersten Variable: $\langle v_1 + v_2, w \rangle = \langle v_1, w \rangle + \langle v_2, w \rangle$ und $\langle \alpha v, w \rangle = \alpha \langle v, w \rangle$
- Sesquilinearität in der Zweiten Variable: $\langle v, w_1 + w_2 \rangle = \langle v, w_1 \rangle + \langle v, w_2 \rangle$ und $\langle v, \alpha w \rangle = \bar{\alpha} \langle v, w \rangle$
- Hermitesche eigenschaft: $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle} \Rightarrow \langle v, v \rangle \in \mathbb{R}$
- Positivität: $\langle v, v \rangle \geq 0 \forall v \neq 0$

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist eine Hermitescher oder unitärer raum. Das standard innere Produkt auf \mathbb{C}^n ist $\langle u, w \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$

Lemma 13.2.9

Sei V ein Euklidischer oder Hermitescher VR dann gilt:

- $\langle 0_v, v \rangle = \langle v, 0_v \rangle = 0$
- $\langle v, w \rangle = 0$ dann gilt $v = 0$ oder $w = 0$
- Wenn $\langle v, w_1 \rangle = \langle v, w_2 \rangle \quad \forall v \in V$ dann ist $w_1 = w_2$

Satz 13.2.10

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ eine Euklidischer oder Hermitescher raum dann definieren wir $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ dann ist $\|\cdot\|$. Hier ist der problem die Dreiecksungleichung

Lemma 13.2.11 Cauchy-Schwarz ungleichung

besagt dass $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\| \quad \forall u, v \in V$ mit gleichheit wenn $u \in \langle v \rangle$ also wenn u und v linear abhängig sind.

Beweis Wenn u oder v der nullvektor ist dann ist es Klar. Wir nehmen an dass $u \neq 0_v$ Wir definieren jetzt $\lambda = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|^2}$ und $w = v - \lambda u$ dieser Vektor ist was übrig bleibt nach der Projektion von v auf u . Wir merken dass $\langle w, u \rangle = \langle v, u \rangle - \lambda \langle u, u \rangle = 0$ Nun gilt

$$0 \leq \|w\|^2 = \langle v - \lambda u, v - \lambda u \rangle = \|v\|^2 - \lambda \bar{\lambda} \|u\|^2 - \bar{\lambda} \lambda \|u\|^2 + \lambda \bar{\lambda} \|u\|^2 = \|v\|^2 - \frac{|\langle u, v \rangle|^2}{\|u\|^2} \Rightarrow |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

Beweis von Satz 13.2.10 Für Hermitesche VR da für euklidische VR analog gelten. Seien $u, v \in V$ dann gilt $\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle = \|u\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle u, v \rangle) + \|v\|^2$ Beachte $\forall z \in \mathbb{C}$ gilt $\operatorname{Re}(z) \leq |z|$ Dass bedeutet dass $\operatorname{Re}(\langle u, v \rangle) \leq |\operatorname{Re}(\langle u, v \rangle)| \leq |\langle u, v \rangle|$ und also $\|u+v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2|\langle u, v \rangle| + \|v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2$

Lemma 13.2.12

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidischer Raum dann gilt $\langle u, v \rangle = \frac{1}{2}(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)$ wobei $\|\cdot\|$ die induzierte Norm ist. Der Beweis ist durch Expansion gemacht, und mit diesem Lemma kann man zeigen dass nicht alle Normen aus einen Inneren Produkt stammen.

Konstruktion von innere Produkte

Beispiele 13.3.1

Sei $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ Wir definieren $(\cdot, \cdot)_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(u, v)_A = u^t A v$. Diese Paarung ist bilinear aber nicht unbedingt für alle Matrizen A symmetrisch: z.B $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ geht es nicht. Wir Brauchen eine Invariante matrix unter der transposition

Definition 13.3.2

Eine Matrix $A \in M_{n \times n}(K)$ ist symmetrisch wenn $A = A^t$

Lemma 13.3.3

Es sei $A \in M_{n \times n}(K)$ symmetrisch dann gilt dass $(u, v)_A = (v, u)_A$

Definition 13.3.4

Eine Matrix $A \in M_{n \times n}(K)$ ist Positiv definit wenn sie Symmetrisch ist und alle ihre Eigenvektoren Positiv sind, analog kann man sagen dass wenn $\forall x \neq 0 \in V \ x^t A x > 0$ gilt.

Satz 13.3.7

Sei $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ dann ist $(\cdot, \cdot)_A$ genau dann ein Inneres Produkt wenn A Positiv definit ist

Definition 13.3.9

Es sei $B \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ dann definieren wir $(\cdot, \cdot) : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ mit $(u, v)_B = u^t B \bar{v}$

Definition 13.3.10

Schreibe $\bar{B} = (\bar{b}_{ij})$ die adjungierte Matrix von B ist die matrix $B^* = \bar{B}^t$ wir sagen dass B Hermitesch ist wenn $B = B^*$

Beispiele 13.3.11

- $A = \begin{pmatrix} -1 & 1+i & 2i \\ 1-i & 0 & 1-2i \\ -2i & 1+2i & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Hermitesch
- $B = \begin{pmatrix} -i & 1+1 & 2i \\ 1-i & 0 & 1-2i \\ -2i & 1+2i & i \end{pmatrix} \Rightarrow$ Nicht Hermitesch da auf der Diagonale i ist

Sei $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist Hermitesch wenn $a, d \in \mathbb{R}$ und $c = \bar{b}$

Bemerkung 13.3.12

Wenn B hermitesch ist dann erfüllt $(\cdot, \cdot)_B$ alle kriterium des Komplexen inneren Produktes

Und Sei B Hermitesch und $v \in \mathbb{C}^n$ Dann gilt $(v, v)_B \in \mathbb{R}$ um dies zu beweisen Schaut man sich $\overline{(v, v)_B}$ an.

Definition 13.3.13

Eine Hermitesche Matrix $B \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ Wenn $v^t B \bar{v} > 0 \ \forall v \neq 0$

Satz 13.3.15

Sei $B \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ dann ist $(\cdot, \cdot)_B$ ein Inneres Produkt wen B Hermitesch und Positiv definit ist

Beweis " \Leftarrow " ist offensichtlich.

" \Rightarrow " Wir nehmen An (\cdot, \cdot) ein Inneres Produkt ist, dann ist B Hermitesch da: $b_{ij} = \overline{b_{ji}} \ \forall i, j$ Da $b_{ij} = (e_i, e_j)_B = \overline{(e_j, e_i)} = \overline{b_{ji}}$ Und Positiv definitheit zu zeigen:

$$(v, v)_B > 0 \ \forall v \in \mathbb{C}^n, v \neq 0 \Leftrightarrow B \text{ ist positiv definit}$$

13.4 Orthogonalität

Definition 13.4.1

Sei V ein Inneres Produkt raum. Orthogonalität ist wie folgt definiert

- $v, w \in V$ sind Orthogonal wenn $\langle v, w \rangle = 0$ man Schreibt $u \perp v$
- $S \subset V$ ist ein Orthogonales system wenn $u \perp v \ \forall u, v \in V$ mit $u \neq v$
- Ein Orthogonales system S ist Orthonormal wenn $\|v\| = 1 \ \forall v \in S$

Beispiele 13.4.2

- Die elemente der Standardbasis e_1, \dots, e_n in \mathbb{R}^n sind alle orthogonal aufeinander.
- Jeder Vektor ist orthogonal zu 0_v

Satz 13.4.3 Satz des pythagoras

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein inneren Produkt raum und seien $u, v \in V$ mit $u \perp v$ dann gilt

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Beweis Expandieren

Definition 13.4.4

Es sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein IP raum und $v \neq 0 \in V$ dann definieren wir die projektion $proj_v : V \rightarrow V$ und mit $u \rightarrow \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \cdot v$

Bemerkung 13.4.5

$u \in V$ ist orthogonal zu $v \Leftrightarrow proj_v(u) = 0$