Analysis II

Benjamin Dropmann

February 24, 2025

1 Metrische Räume

Skalarproduct Seien zwei vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ dann ist der skalaproduktwie Folgt definiert:

$$x \cdot y =< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Eufklidische Norm Sei $x \in \mathbb{R}^n$ dann ist die Euklidische norm des Vektors

$$||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Euklidischer Abstand

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Dreiecksungleichung $\forall x, y, zin\mathbb{R}^n \to ||x - z|| \leq ||x - y|| + ||y - z||$ **Metrische Räume** Ein metrische (M.R) (X, d) ist eine nicht-leere menge X zusammen mit einer funktion $d : X \times X \to [0; \infty[$ Welche die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. Positiv definiert $\forall x, y \in X \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. Symmetrie $\forall x, y \in X \quad d(x, y) = d(y, x)$
3. Dreiecksungleichung $\forall x, y, z \in X \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Folgen Sei X eine Menge dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge $\mathbb{N}_0 \to X$ mit dem bild $a_n = a(n)$.
Konvergenz einer Folge in X $(dim(x \geq 1)$ Sei (X, d) ein M.R. und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge. Dann konvergiert die folge auf eine zahl $A \in X$ falls.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 : \quad d(a_n, A) < \epsilon$$

Falls es kein A gibt dann divergiert die Folge.
Teilfolgen Sei ein M.R. (X, d) und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine folge, dann existier eine teilfolge $(x_{n_k})_{n\in\mathbb{N}_0}$ wobei $(n_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von reellen Zahlen ist.
Häufungspunkt Sei (X, d) ein M.R. und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge. $A \in X$ ist ein Häufungspunkt der Folge falls es eine Teilfolge die auf A Konvergiert.
Satz $y \subset X$ Teilmenge eines M.R. (X, d) $x \in X$ ist Häufungspunkt von y falls eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ existiert welche gegen x konvergiert.
Lemma Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge im Metrischen Raum (X, d) mit $x \in X$ Dann konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ genau dann wenn jede Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Teilfolge $(x_{n_{m_k}})_{k\in\mathbb{N}_0}$ die gegen x konvergiert.
LemmaEine Folfe in $(\mathbb{R}^n, d(x, y) = ||x - y||)$ Konvergiert genau dann wenn sie koordinaten weise konvergiert.

1.1 Cauchy Folge

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in einem Metrischen Raum (X, d) heisst cauchy foglge falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \text{ So dass } \forall m, n > N : \quad d(a_n, a_m) < \varepsilon$$

Lemma Analog zur Folgen in $\mathbb{R}$ gilt:

- Jede Cauchy-Folge ist beschränkt,$\Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R}$ so dass $d(a_n, a_0 \leq K \forall n \in \mathbb{N}_0$

- Jede Konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.
- Eine Cauchy Folge konvergiert genau dann wenn sie eine konvergente Teilfolge besitzt

Vollstandigkeit Eine Metrischer Raum heisst vollständig falls jede Cauchy-Folge in X Konvergiert.
Theorem Für alle $n \geq 1$ ist $\mathbb{R}^n$ mit der Standard metrik ist Vollständig.
Beweis Analog zur tatsache, das in $\mathbb{R}^n$ konvergenz im Metrischen Raum äquivalent ist zur Koordinaten-weise konvergenz: Eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}^n$ zu sein ist äquivalent zur Tatsache dass jede Koordinate eine Cauchy-Folge liefert (in den Reelen zahlen).
In den Reellen Zahlen konvergieren alle Cauchy-Folgen, Daher muss die Behauptung stimmen. Q.E.D.

1.2 Topologie Metrischer Raume

Es sei (X, d) ein Metrischer Raum, $x \in X$ und $r > 0$ eine reelle Zahl. Der offene Ball um den Punkt x mit radius r ist die Menge:

$$B_r(x) = B(x, r := [y \in X| \quad d(x, y) < r]$$

1.3 Innere/Abschulss-mengen und Ränder

Sei (X, d) ein Metrischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge

- das innere der Menge A ist gegebe durch

$$A^o = int(A) := \bigcup [E \subset A| \quad E \text{ ist offen}]$$

  Und ist die grösste offene Menge, welche in A enthalten ist.

- Der Abschluss von A:

$$\overline{A} := \bigcap [A \subset U | U \text{ ist abgeschlossen}]$$

  und ist die kleinste abgeschlossene Menge welche A enthält.

- Dr Tipologische Rabd von A ist $\overline{A}/A^o$

Beispiel, in $\mathbb{R}$ mit $A =]0, 1[\rightarrow A^o =]0, 1[$ und $\overline{A} = [0, 1]$ dann ist der Rand: $\{0\} \cup \{1\}$.
Proposition Es sei (X, d) ein Metrischer Raum:

- Eine Teilmenge $A \subset X$ ist genau dann offen, alls für jede konvegente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit grenzwert $x \in A$ gilt:

$$\exists N \in, \forall n > N \quad x : n \in A$$

- Eine Teilmenge $A \subset X$ ist genau dann abgeschlossen falls fur jede konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset A$ mit grenzwert $x \in A$ ist $x \in A$

Beweis Fall der Offene Menge:
"$\Rightarrow$" Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Konvergente Folge mit grenzwert $x \in A$. Gemäss vorassetzung wissen wir, dass die Teilmenge A offen ist Da A offen ist, und $x \in A$ gibt es ein Offenen Ball $B(x, \varepsilon) \subset A$. Für dieses $\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}_0$ (wegen der Konvergenz der betrachteten Folge) $d(x, x_n) < \varepsilon$ (Konvergente folgen sind in X Cauchy-Folgen) dies Bedeutet das FOlgeglieder mit index $n > N$ in $B(x, \varepsilon)$
"$\Leftarrow$" Wir nehmen jetzt an das $A \subset X$ nicht offen ist. Dies bedeutet dass $\exists x \in A \varepsilon > 0 \quad B(x, \varepsilon)/A \neq \emptyset$ Insbesonde konnen wir $\varepsilon = 2^{-1}$ betrachten und eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konstruiren mit $x_n \in B(x, 2^{2-n})/A$ Es gilt für diese Folge aber auch dass Folgende $x_n \rightarrow x \in A$
Der Fall der Geschlossene Menge:
"$\Rightarrow$" Wir nehmen an dass A abgeschlossen ist. Wir betrachten dann eine beliebige FOlge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \rightarrow x \in X$ Da $V := X/A = A^c$ offen ist, kann der Grenzwert x nicht in dieser offennen Menge liegen, da sonst die Folgenglieder ab einen bestimmten Index ebenfalls in dieser Offenene Menge liegen müssen, damit muss gelten dass:$x \in A$
"$\Leftarrow$" Wir nehmen an dass A nicht abgeschlossen ist, dann ist A^c nicht offen Dies bedeutet dass: $\exists y \in A^c \forall \varepsilon > 0 \quad B(y, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ Damit kann man eine Folge konstruiren $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $d(y, x_n) < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad x \rightarrow y \in A^c$ Dann ist de beweis fertig Dann ist de beweis fertig.
Proposition Es sei (X, d) ein Metrischer Raum. Eine folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert genau dann gegen x wenn alle offene Mengen U gilt:

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \quad x_n \in U$$

Beweis "$\Rightarrow$" Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen x konvergierende Folge, es sei ausserdem U offen mit $x \in U$. Da U offen ist: $\exists\varepsilon > 0 B(x,\varepsilon)$ Dann gilt auch

$$\forall\varepsilon\exists N \in \mathbb{N}\forall n > N \quad d(x, x_n) < \varepsilon$$

"$\Leftarrow$" $\forall\epsilon \quad B(x,\epsilon)$ ist offen. Und es gilt $\exists N \in \mathbb{N} : x_n \in \forall n > N B(x,\varepsilon)$ Dies bedeutet gemäss definition dass $\underset{n\to\infty}{lim} x_n = x$.

Korollar Es sei X eine Menge und d_1, d_2 zwei verschieden Metriken. Dann haben $(X, d_1), (X, d_2)$ genau dann die selben konvergente Folgen wenn die Topologien von d_1 und d_2 ubereinstimmen.