

Lineare Algebra II

Benjamin Dropmann

March 15, 2025

1 Polynome

1.1 polynomdivision

Satz 1.1.1 Seien f und $g \neq 0$ zwei polynome in $K[x]$ dann $\exists q(r), r(r) \in K[x]$ mit $\deg(r) = 0$ oder $\deg(r) < \deg(g)$ und $f = qg + r$.

Korollar 9.0.4: Sei $f(x) \in K[x], f(x) = 0$ sei $\lambda \in K$ so dass $f(\lambda) = 0$. Dann $\exists q(x) \in K[x]$ so dass $f(x) = (x - \lambda)q(x)$

Beweis $\exists q(x), r(x) \in K[x] \quad \deg(r) < \deg(x - \lambda) = 1$ so dass $f(x) = (x - \lambda)(q(x) + r(x))$, $\rightarrow r \in K \Rightarrow f(\lambda) = 0$

Korollar 9.0.6 Sei $f(x) \in K[x], \deg(f) = n > 0$ Dann hat $f(x)$ höchstens n Nullstellen. (Fundamentalsatz der Algebra sehr ähnlich).

Beispiel 9.0.7 Es sei $f(x) = x + 1(x^2 + 1)$, als poly in $\mathbb{R}[x]$ hat es nur eine nullstelle $x = -1$.

Als polynom in $\mathbb{C}[x]$ gilt $f(x) = (x + 1)(x + i)(x - i)$

Theorem 9.0.8 Fundamentalsatz der Algebra Es sei $f(x) \in \mathbb{C}[x], \deg(f) = n > 0$ dann hat $f(x)$ in $\mathbb{C}[x]$ genau n nullstellen. Das heisst es existieren $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$ nicht unbedingt verschieden, so dass $f(x) = (x - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (x - \lambda_n)$ Wir sagen \mathbb{C} ist Algebraisch abgeschlossen.

9.0.11: sei $f(x) \in K[x], \lambda \in K$ so dass $f(\lambda) = 0$ Die Ordnung der Nullstelle (Vielfachheit) λ ist die Ganzzahl $n \geq 1$ so dass $\exists q(x) \in K[x]$ so dass

$$f(x) = (x - \lambda)^n q(x)$$

beispiele 9.0.12

1. $f(x) = x + 1(x^2 + 1)$ Einfache nullstelle $\lambda = -1$ daher ist die ordnung 1

2. $p > 2 \quad g(x) = x^p \in \mathbb{F}_p[x]$

$\mathbb{F}_p = [a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 | n \geq 0, a_i \in \mathbb{F}_p]$ Und $g(x) = x^p - 1 = (x - 1)^p$ (leicht ausrechnen)

Bemerkung 9.0.13 Analogien $\mathbb{Z} \leftrightarrow K[X]$

\mathbb{Z}	$K[x]$
± 1	$K \setminus 0$
Primzahlen	Unzerlegbare Polynome $\deg < 0$
$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$	$f(x)$ ist unzerlegbar: $K[x]/_{f(x)}$ Körper

2 Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition 10.1.1 V/K Vektorraum, $T : V \rightarrow V$ Endomorphismus.

1. $\lambda \in K$ ist ein Eigenwert von T wenn $\exists v \in V, v \neq 0_v$ so dass $T(v) = \lambda v$

2. Ein solches v heisst Eigenvektor mit Eigenwert λ

Bemerkung 10.1.12 Wenn v Eigenvektor von T ist, $T(v) = \lambda v$ dann ist auch αv Eigenvektor von T mit Eigenwert $\lambda, \forall \alpha \in K, \alpha \neq 0$

Beispiele 10.1.3 Rechnung von eigenwerte und Eigenvektoren

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ Eigenwerte $\lambda = 3$ und $\lambda = -1$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ b \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ b \end{pmatrix}$$

Wir kommen dann auf

$$\begin{pmatrix} 1x & 2y \\ 2x & 1y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

und also

$$2x + y = \lambda x$$

$$x + 2y = \lambda y$$

Wir bekommen also

$$y((1 - \lambda)^2 - 4) = 0$$

$y \neq 0, x \neq 0$ Da die nullvektoren keine Eigenvektoren sind $\Rightarrow (1 - \lambda)^2 = 4 \Rightarrow \lambda = [-1, 3]$ Warum spezifisch zwei?

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ Wir Suchen ein λ sodass $b(v) = \lambda \cdot v$ für $v \in \mathbb{R}^2, v \neq 0$

$$\left(B - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also für welche λ ist $B - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ nicht invertierbar (wann ist der kern nicht trivial) \Leftrightarrow Für welche $\lambda \in K$ ist

$$\det \left(B - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0?$$

$$\det \left(\begin{pmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 1 & 4 - \lambda \end{pmatrix} \right) = (1 - \lambda)(4 - \lambda) \Rightarrow \lambda = [2, 3]$$

Und jetzt für die Eigenvektoren: für $\lambda = 2$

$$b(v) = 2v \Rightarrow v = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha \neq 0$$

Satz 10.1.4 $T : V \rightarrow V$ linear. Dann gilt: $\lambda \in K$ eigenwert von $T \Leftrightarrow \ker(T - \lambda 1_v) = 0$

iiiiii HEAD

3 Eigenwerttheorie

===== **Fibonacci**folgen sei V der V-R der Fibonacci Folgen. wir haben $S : V \rightarrow V$ ist die Verschiebungsabbildung, (die ist definiert in satz 1.1.15)

Die Basis war $B = \{\mathbb{F}_{0,1}, \mathbb{F}_{1,0} <\}$ Und die matrix ist $[S]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\det(S) = \lambda^2 - \lambda - 1$ eigenwerte sind also

ϕ und φ und die Eigenfolgen sind $\{\mathbb{F}_{\phi,1}, \mathbb{F}_{\varphi,0} <\}$ also die diagonal matrix ist dann $[S]_C^C = \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \varphi \end{pmatrix}$ **Das charakteristische**

polynom Sei $A \in M_{m \times n}(K)$ Dann ist $X_A(x) = \det(A - x \mathbb{I}_n)$ das charakteristische polynom von A

10.2.2 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dann ist $X_A(x) =$ ich haben nicht abgeschrieben aber der konstante term des charakteristischen polynom ist die Determinante.

$\det(A - x 1_n)$ Insbesondere $X_{1_2}(x) = x^3 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

Definition 10.2.3 $T : V \rightarrow V$ linear dann sei $X_T(x) = \det([T]_B^B - x 1_n)$ dies ist unabhängig von der wahl der Basis B.

10.2.4: $X_T(x)$ ist wohldefiniert

Beweis $[T]_C^C = [D]_C^B [T]_B^B [D^{-1}]_B^C$ dann ist

$$\begin{aligned} \det([T]_C^C - 1_n x) &= \det([D]_C^B [T]_B^B [D^{-1}]_B^C - 1_n x) = \det(D [T]_B^B D^{-1} - x D D^{-1}) \\ &= \det(D ([T]_B^B - x T) D^{-1}) = \det(D) \det([T]_B^B - x T) \det(D^{-1}) = \det(D) \det([T]_B^B - x) \end{aligned}$$

3.1 Theorem 10.2.5:

Es sei $T : V \rightarrow V$ linear. Dann gilt dann die Eigenwerte von $T = \{\lambda \in K | X_T(\lambda) = 0\}$

Lemma 10.2.6 Sei $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(K)$ eine obere Dreiecksmatrix dann gilt

$$X_A(x) = \prod_{i=1}^n (a_{ii} - x)$$

Sei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & cd \end{pmatrix} \Rightarrow X_A = x^2 - (a+d)x + ad - bc$

Trace (noch nachzu sehen) $Tr : M_{n \times n}(K) \rightarrow A = (a_{ij}) \rightarrow \sum a_{ii} 1$ **Def 10.2.7** Sei $T : V \rightarrow V$ linear dann ist die Spur von T

$$Tr(T) = Tr([T]_B^B)$$

10.2.8 $Tr(T)$ ist wohldefiniert

Beweis Zu zeigen wann C eine Andere Basis un $D = id|_B^C$ dann gilt

$$Tr([T]_B^B) = Tr(D^{-1}[T]_C^C D)$$

Es reicht aus zu zeigen dass wenn $M_1, M - 2 \in M_{n \times n}(K)$ dann gilt $Tr(M_1 M_2) = Tr(M - 2M_1)$ (mit explizite rechnung beweisen)

Daher gilt auch 10.2.8

Satz 10.2.9 es sei $T : v \rightarrow V$ linear dann gilt

$$X_T = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} x^{n-1} Tr(T) + \dots + det(T)$$

Beweis es sei $A = [B]$ Mit induktion kann man beweisen dass wenn es für eine $M_{n-1 \times n-1}$ geht dann geht es für $M_{n \times n}$ als übung zu machen. Der Zweite beweis geht wie folgt ab:

Sei $B \in M_{n \times n}$ und $b = (b_{ij})$ dann gitl die formel

$$\sum_{\sigma \in S_n} b_{\sigma(1,1)} \dots b_{\sigma(n,n)}$$

Sei $B = A - x1_n$ und $\sigma \in S_n$ Fur welche σ hat

$$b_{\sigma(1,1)} b_{\sigma(2,2)} \dots b_{\sigma(n,n)}$$

ein polynom von grad $> n-1$? Der beweis ist todlich, nacheher schauen ich tippe jetzt was ich nicht verstehe...

~~~~~ refs/remotes/origin/main  $T : V \rightarrow V$  linear, dann ist  $\lambda \in K$  eine Eigenvector wenn  $\exists v \in V, v \neq 0_v$  so dass  $Tv = \lambda v$ . Hier merken wir dass der skalar eines Eigenvektors, auch ein egeinvektor ist, und dass die addition von zwei vektoren mir den selben eigenwert, auch ein Eigenvektor ist, also hat dies die Struktur eines unterraums...

Wir sind auf dem Folgenden Satz gekommen. Sei  $T : V \rightarrow V$  linear, dann gilt  $\lambda \in K$  ist genau dann Eigenwert von  $T$  wenn  $ker(T - \lambda I_n) \neq \{\emptyset\}$

**Beweis**  $\lambda \in K$  Eigenwert  $\Leftrightarrow \exists v \in V, v \neq 0_v$  so dass  $Tv = \lambda v \Leftrightarrow (T - \lambda I_n)v = 0_v$  Und daher ist  $v \in ker(T - \lambda I_n)$

Das ist Praktisch da wenn  $(T - \lambda I_n)$  nicht injektiv ist dann ist  $ker(T - \lambda I_n) \neq \emptyset$  und wenn die Determinante nicht null ist dann ist  $T - \lambda I_n$  kein endomorphismus.

**Bemerkung** 0 ist ein Eigenwert wenn  $T$  kein isomorphismus ist

**Korollar** Folgende aussagen sind äquivalent:

- $\lambda$  ist ein Eigenwert von  $T$
- $ker(T - \lambda I_n) \neq \{0_v\}$
- $T - \lambda I_n$  ist kein Isomorphismus
- $det(T - \lambda I_n) = 0$

Der Beweis ist eine zusammenfassung von vorherigen beweisen

Mit dieses wissen kann man Finden dass es höchstens  $n$  Unterschiedliche eigenwerte gibt, da die mit einen grad  $n$  polynom definiert sind.

## 3.2 Das charakteristische polynom

**Definition 10.2.1** Sei  $A \in M_{n \times n}(K)$ . dann ist  $X_A(x) = det(A - x1_n)$  das charakteristische polyom von A Für eine  $2 \times 2$  Matrix ist dann

$$X_A(X) = x^2 - \underbrace{(a+d)}_{Tr(A)} x + \underbrace{ad - bc}_{det(A)}$$

Kleine errinerung, die Trace ist die Summe der Diagonale elemente. Diese bemerkung gilt auch für  $3 \times 3$ . Wir rechnen jetzt für  $n \times n$ . Der Konstante term von  $det(A - xI_n)$  ist  $det(A)$  (da es der Fall bei  $x = 0$  ist)

Insbesondere:

$$X_1(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

**Definition 10.2.3**  $T : V \rightarrow V$  linear dann ist  $X_T(x) = \det([T]_B^b - xI_n)$  Für eine Basis  $B$  von  $V$ .

**10.2.4**  $X_T(x)$  ist wohldefiniert.

**Beweis**

$$[T]_C^C = [D]_C^B [T]_B^B [D^{-1}]_B^C$$

Multiplikativität von  $\det$ :

$$\det([T]_C^C - xI_n) = \det([D]_C^B [T]_B^B [D^{-1}]_B^C - xI_n) = \det([D]_C^B [T]_B^B [D^{-1}]_B^C - xD^{-1}D) = \det(D) \det([T]_B^B - xI_n) \det(D^{-1})$$

Was unsere aussage zustimmt.

Da das Charakteristische Polynom unabhängig von der Wahl der Basis, ist sie Eindeutig und daher Wohldefiniert.

**Theorem 10.2.5** Es sei  $T : V \rightarrow V$  linear, dann gilt dass

$$\{\text{Eigenwerte von } T\} = \{\lambda \in K \mid X_T(\lambda) = 0\}$$

**Lemma 10.2.6** Sei  $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(K)$  Eine Obere Dreiecksmatrix. Dann ist das Charakteristische Polynom

$$X_A(x) = \prod_{i=1}^n (a_{ii} - x)$$

iiiiii HEAD

$Tr : M_{n \times n}(K) \rightarrow K$   $A = (a_{ij}) \rightarrow \sum a_{ii}$  Ist wohldefiniert.

**Definition 10.2.7** Sei  $T : V \rightarrow V$  linear dann ist  $Tr(T) = Tr([T]_B^B)$  Wobei  $B$  eine Basis, Wohldefiniert (**Satz 10.2.8**).

**Beweis** Zu Zeigen, wenn  $C$  eine andere Basis ist, und  $D = [id_V]_C^B$  eine Basiswechselmatrix ist, dann gilt:

$$Tr[T]_B^B = Tr(D^{-1}[T]_C^C D)$$

Hier Bleibt nichts übrig ausser es auszurechnen, aber es funktioniert, es reicht aus zu zeigen, Wenn  $M_1, M_2 \in M_{n \times n}(K)$  dann gilt  $Tr(M_1 \cdot M_2) = Tr(M_2 \cdot M_1)$  Da wenn dass gilt dann kürzt sich der  $D, D^{-1}$ . Dass ist eine Explizite berechnung.

**Satz 10.2.9** Sei  $T : V \rightarrow V$  linear, dann gilt

$$X_T(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} Tr(T) x^{n-1} + \dots + \det(T)$$

**Beweis** Es sei  $A = [T]_B^B$  ===== **Satz 10.2.8**  $Tr(T)$  ist wohldefiniert.

**Beweis** Wenn  $C$  eine andere basis ist und  $D = [id_V]_C^B$  dann gilt:  $Tr[T]_B^B = Tr(D^{-1}[T]_C^C D)$

Hier bleibt in theorie nichts anderes als von hand zu zeigen dass  $M_1, M_2 \in M_{n \times n}(K)$  dann gilt:  $Tr(M_1 M_2) = Tr(M_2 M_1)$ . Aber es ist immer noch nicht sehr schön.

**Satz 10.2.9** Es sei  $T : V \rightarrow V$  linear dann ist

$$X_T(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} Tr(T) x^{n-1} + \dots + \det(T)$$

Über den rest kann man nicht viel sagen

**Beweis** Es sei  $A = [T]_B^B$  dann ist  $X_A(x) = \det(A)$  Aber die  $A$  matrix ist sehr gross, dann muss man den beweis per induktion machen (Gute exams aufgabe). Hier ist die zweite idee die wir machen Wir wissen dass  $B \in M_{n \times n}(K)$  dann gilt

$$\det(B) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) b_{\sigma(1),1} \cdots b_{\sigma(n),n}$$

Sei  $B = A - xI_n$  und  $\sigma \in S_n$ , für welche  $\sigma$  ist  $b_{\sigma(1),1} \cdot b_{\sigma(2),2} \cdots b_{\sigma(n),n} = (*)$  ein Polynom vom Grad  $\geq n-1$ ? wenn  $\sigma = id$  dann ist

$$(*) = (a_{1,1} - x) \cdots (a_{n,n} - x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} \underbrace{(a_{1,1} + a_{2,2} + \dots + a_{n,n})}_{=Tr(B)} x^{n-1} + \text{Restterm von grad } \leq n-1$$

Alle andere möglichkeiten für  $\sigma$  müssen also vom grad  $< n-1$  sein (da nur auf der Diagonale  $a_{j,j} - x$  steht, überall sonst gibt es kein  $x$  und wenn wir nur ein element vertauschen, sind es zwei, und daher ist grad  $< n-1$ ), und daher ist dass zweite vorkfaktor vom polynom Welches dann beweist dass der zweite Restterm  $Tr(A)$  ist und also dass unsere gleichung stimmt (der konstante faktor muss ja  $= \det(A)$  sein)

**Korollar 10.2.11**  $T : V \rightarrow V$  mir  $V$  n-dim hat höchstens n Eigenwerte (da der Charakteristische polynom grad  $n$  ist.)

### 3.3 Diagonalisierung

Frage: es sei  $T : V \rightarrow V$  ein Endomorphismus. Gibt es eine Basis in welche die abbildungsmatrix von  $T$  diagonal ist?

**Satz 10.3.2** Es seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  verschieden eigenwerte von  $T$  und  $\forall i$  sei  $v_i$  ein Eigenvektor mit eigenwert  $\lambda_i$  dann sind  $v_1, \dots, v_n$  linear unabhängig.

**Beweis** Es sei zwei Eigenvektoren,  $v_a, v_b$  mit eigenwerte  $\lambda_a, \lambda_b$  dabei ist dann  $Tv_a = \lambda_a v_a$  und  $Tv_b = \lambda_b v_b$  wenn aber  $v_a = cv_b$  (sie sind nicht linear unabhängig) dann gilt  $Tcv_b = \lambda_a cv_b$  und damit ist  $\lambda_a \cdot c = \lambda_b$  und also sind diese Eigenvektoren nicht unterschiedlich, da sie beide den selben Eigenwert haben.

**Korollar 10.3.4** Wenn Wir für  $T : V \rightarrow V$  linear mit  $V$   $n$ -dim, wenn  $T$  Genau  $n$  verschiedene Eigenwerte hat, dann hat  $V$  eine Basis die aus  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  besteht.

**Definition 10.3.5**  $T : V \rightarrow V$  ist diagonalisierbar wenn  $\exists$  Basis von Eigenvektoren existiert. In diesem Fall ist die Abbildungsmatrix von  $T$  bezüglich dieser Basis diagonal, mit den Eigenwerte als einträge in der Matrix.

**Bemerkung 10.3.6** Eine  $A \in M_{n \times n}$  Matrix ist diagonalisierbar  $\Leftrightarrow \exists B \in GL_n(K)$  so dass  $B^{-1}AB$  diagonal ist (basiswechselmatrix).

**Lemma 10.3.7** Wenn  $A$  Diagonalisierbar mit Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ist, dann ist  $X_A = \prod (\lambda_i - x)$

Charakteristische Polynom ist:  $X_A = \det(A - xI_n)$  und seine losungen sind die Eigenwerte der Matrix.

Eine  $n$ -dim Matrix ist diagonalisierbar falls es  $n$  unterschiedliche Eigenwerte gibt, daher wenn es eine Basis von Eigenvektoren gibt. Wir wissen auch dass

$$A = [T]_B^B \Leftrightarrow \exists P \in GL_n(K) \text{ so dass } P^{-1}AP \text{ Diagonal ist}$$

Frage, für welche  $A$  gibt es so ein  $P$ ?

- Wenn  $A$  diagonal ist dann ist  $P$  die identität.
- Wenn  $X_A(x)$   $n$  verschiedene Nullstellen hat, beachte,  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  aber  $X(x) = (1-x)^2$  also diese bedingung ist nicht ausschliesslich.

Gibt es matizen die Nicht diagonalisierbar sind?

**Beispiele 10.3.8**

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X_A(x) = x^2 \Rightarrow A$  hat nur einen Eigenwert,  $\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$  Eigenvektoren sind  $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$   
Daraus kann man aber keine Basis machen, dies ist nicht diagonalisierbar.
- Es kann auch am Körper liegen dass wir nicht diagonalisieren können:  $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \Rightarrow X_M(x) = x^2 + 1$   
dass können wir nicht in  $\mathbb{R}$  faktorisieren, aber in  $\mathbb{C}$  geht es mit Eigenwerte  $\pm i$ , Wir werden immer den Körper vergrössern so dass dieser Fall nicht aufkommt

**Besipiel 10.3.9:** der Erste Fall in der Liste lässt sich verallgemeinern, Sei  $n \geq 1, \lambda \in K$  Wir definieren die **Jordansche Blockmatrix**

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Und wir merken also dass  $X_{J_n}(x) = (\lambda - x)^n$  Wobei der einzige Eigenwert  $x = \lambda$  und die Dazugehörigen Eigenvektoren

sind dann  $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  was natürlich für  $n > 1$  keine Basis.

**Folgerungen** Dass Charakterische allein entscheidet nicht ob eine Matrix diagonalisierbar ist. Und dass Problem ist eine Mögliche Diskrepanz zwischen der Ordnung der Nullstelle und die Dimension des aufgespannten Unterraums der Eigenvektoren.

### 3.4 Eigenräume

**Definition 10.4.1** Sei  $T : V \rightarrow V$  linear und  $\lambda$  ein Eigenvektor von  $T$ . Der Eigenraum, ist der Aufgespannte unterraum vom  $\lambda$ -Eigenvektor, seine Defintion ist wie Folgt  $E_\lambda = \ker(T - \lambda id_v) = \langle \lambda \text{Eigenvektoren} \rangle$

**Lemma 10.4.2**  $E_\lambda \subset V$  Beweis trivial.

### 10.4.3

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  Dann ist  $X_A(x) = -x^3 + 3x + 2$  und dann sind die Eigenwerte  $X_A(2) = 0$  und dann können wir Faktorisieren und es kommt  $X_A(x) = -(x-2)(x+1)^2$  und die Dimensionen der Dazugehörigen Eigenräume sind:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow E_{\lambda=2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\text{Und mit } E_{\lambda=-1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Aber mit eine Riesen matrix ist es schwierig zu sagen ob wenn wir alle Eigenräume zusammenstellen, wir eine Basis von  $V$  haben, oder nicht.

**Definition 10.4.4** Sei  $V$  ein V-R, wir betrachten  $U_1, \dots, U_k \subset V$  Sei  $W = U_1 + \dots + U_k$  Dann ist  $W$  die Direkte summe von  $U_1, \dots, U_k$ , wenn

$$\forall w \in W \quad \exists! u_1 \in U_1, \dots, u_k \in U_k \text{ so dass } w = u_1 + \dots + u_k$$

Man schreibt  $W = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$

Ich glaube dies ist äquivalent zu  $\bigcap U_i = \{0_v\}$  Der beweis ist schwierig.

**Lemma 10.4.6** Es gilt  $W = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$  genau wenn die Gleichung  $u_1 + \dots + u_k = 0_v$  mit  $u_i \in U_i \quad \forall i$  nur die Lösung  $u_i = 0_v \quad \forall i$  hat. Der beweis ist als übung zum Leser überlassen

### Beispiele 10.4.7

- $\mathbb{R}^3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$  Dies wäre äquivalent zu sagen dass diese drei elemente eine Basis von  $\mathbb{R}^3$  sind also ja
- $\mathbb{R}^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$  aber Keine Direkte summe da die zweite lineare Hülle unnötige elemente enthält

**Beachte 10.4.8** Wenn  $W$  die Direkte Summe von  $U_1, \dots, U_k$  ist dann gilt dass  $\dim(W) = \dim(U_1) + \dots + \dim(U_k)$

**Beweis** Sei  $B_i$  Basis von  $U_i$  dann behaupten wir dass  $B_1 \cup \dots \cup B_k$  Basis von  $W$  ist. Dieser Teil des Beweis ist als Übung überlassen

**Satz 10.4.9** Es sei  $T : V \rightarrow V$  linear und  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  Eigenwerte von  $T$  mit  $\lambda_i \neq \lambda_j \forall i \neq j$ . Sei  $W = E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_k}$  Dann gilt  $W = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k}$ .

**Beweis** Nehmen wir an dass  $\exists u_1, \dots, u_k \quad u_i \in E_{\lambda_i}$  und dann da  $u_i$  jeweils in unterschiedliche Eigenräume sind, sind die alle von einander linear unabhängig, kann die summe den Nullvektor ergeben:

$$\exists u_1, \dots, u_k \in E_{\lambda_i} \text{ so dass } u_1 + \dots + u_k = 0_v$$

Doch  $u_1, \dots, u_k$  sind linear unabhängig und wenn  $u_i \neq 0_v \quad \forall i$  dann kriegen wir ein widerspruch.

**Korollar 10.4.10** Sei  $T : V \rightarrow V$  linear mit Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  dann ist  $T$  genau dann Diagonalisierbar, wenn die summe der dimensionen der dazugehörigen Eigenräume, die dimension von  $V$  ist:

$$T \text{ ist Diagonalisierbar} \Leftrightarrow \dim(V) = \sum_{i=1}^k \dim(E_{\lambda_i})$$

## 3.5 Algebraische und Geometrische vielfachheit

**Bemerkung 10.5.1** Es sei  $n = \dim_K(V)$  mit  $T : V \rightarrow V$  Dann hat  $X_T(x)$  grad  $n$  und wenn  $X_T(x) = (\lambda_1 - x)^{a_1} \cdot \dots \cdot (\lambda_k - x)^{a_k}$  mit  $\lambda_i \neq \lambda_j \forall i \neq j$  dann ist  $n = \sum a_i$

**Definition 10.5.2** sei  $\lambda$  Eigenwert von  $T$  dann ist

- Die Geometrische Vielfachheit;  $g_\lambda = \dim(E_\lambda)$
- Algebraische Vielfachheit  $a_\lambda$  ist die Ordnung der Nullstelle vom Faktor  $\lambda$  in  $X_T(x)$

**Beispiele 10.5.3** Im beispiel 10.4.3 hatten wir

- $\lambda_1 = -1$  und  $g_{\lambda_1} = a_{\lambda_1} = -2$
- $J_n(\lambda) \quad g_\lambda = 1 \quad a_\lambda = n$
- $\lambda I_n \quad g_\lambda = a_\lambda = n$

Man merkt dass:

**Satz 10.5.4**  $T : V \rightarrow V$  mit Eigenwert  $\lambda$  Dann gilt  $g_\lambda \leq a_\lambda$

**Beweis** Sei  $v_1, \dots, v_k$  eine Basis von  $E_\lambda$ ,  $v_k$  eine Basis von  $E_\lambda$  und wir erweitern sie zu einer Basis  $B = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$  von  $V$ . Dann ist  $[T]_B^B = \begin{pmatrix} \lambda I_k & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$  Dann ist  $\det([T]_B^B - xI_n) = (\lambda - x)^k \cdot \det(D - xI_{n-k})$  das bedeutet dass  $k \leq a_\lambda$  da im  $\det(D - xI_{n-k})$  auch eine Nullstelle vorkommen kann.

**Korollar 10.5.5** Es seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  unterschiedliche Eigenwerte von  $T$ , dann gilt:

$$T \text{ ist diagonalisierbar} \Leftrightarrow g_{\lambda_i} = a_{\lambda_i} \quad \forall i$$

**Beweis** Korollar 10.4.10 sagt dass

$$T \text{ ist Diagonalisierbar} \Leftrightarrow V = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k} \Leftrightarrow \dim(V) = \sum \dim(E_{\lambda_i}) = \sum g_{\lambda_i} \leq \sum a_{\lambda_i} = n = \dim(V)$$

da beide seiten  $\dim(V)$  haben, dann ist  $\sum g_{\lambda_i} = \sum a_{\lambda_i}$  und da  $a_{\lambda_i} \geq g_{\lambda_i}$  ist  $a_{\lambda_i} = g_{\lambda_i} \quad \forall i$

**Theorem 10.5.6** Sei  $\dim(V) = n$  mit  $T : V \rightarrow V$  dann sind folgende aussagen äquivalent:

- $T$  ist Diagonalisierbar
- $\forall \lambda$  gilt  $a_\lambda = g_\lambda$
- Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  Eigenwerte, dann gilt  $X_T(x) = \prod (\lambda_i - x)^{g_{\lambda_i}}$
- $V = \bigoplus_{i=1}^k E_{\lambda_i}$

Die Beweise sind schon alle vorgeführt gewesen.

Was machen wir mit den Matrizen die man nicht diagonalisieren kann?

## 4 Das minimale Polynom

### 4.1 Definition und Erste Eigenschaften

**Definition 11.1.1** Sei  $T : V \rightarrow V$  linear, dann ist  $T^k = \underbrace{T \circ \dots \circ T}_{k \text{ mal}}$  und  $T^0 = id_V$ . Die definition ist für Matrizen analog.

**Definition 11.1.2** Sei  $g(x) = a_d x^d + \dots + a_1 x + a_0 \in K$  ein Polynom, dann definieren wir  $g(T) = a_d T^d + \dots + a_1 T^1 + a_0 T^0 \in \text{End}_K(V)$ . Es geht auch mit matrizen.

**Beispiele 11.1.4**

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad f(x) = x^2 - x + 3 \Rightarrow f(A) = A$
- $g(x) = x^n$  dann ist  $g(J_n(0)) = 0_{n \times n}$  im Jordanblock, verschiebt sich die diagonale nach oben rechts.

**Satz 11.1.5** Sei  $T \in \text{End}_K(V)$  dann  $\exists g(x) \in K[x]$  so dass  $g(T) = 0_V$

**Beweis**  $\dim(\text{End}_K(V)) = n^2 \Leftrightarrow \dim(V) = n$  dass heisst dass  $T^0, T^1, \dots, T^{n^2}$  sind alle linear unabhängig, und daher:

$$\exists a_0, \dots, a_{n^2} \in K \neq 0 \text{ so dass } a_0 T^0 + \dots + a_{n^2} T^{n^2} = 0_V$$

Aber kann man dieses Polynom finden, und hat es einen zusammenhang mit den Charakteristischen Polynom

**Bemerkung 11.1.6** Wenn  $g(T) = 0_V$  dann gilt auch  $(\alpha g)(T) = 0_V \quad \forall \alpha \in K$

**Beispiele 11.1.7**

- Sei  $n \geq 1$ ,  $A = Id_n$  und  $g(x) = x - 1$  dann gilt  $g(A) = 0_{n \times n}$

- Sei  $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{pmatrix}$  dann haben wir  $\forall g \quad g(A) = \begin{pmatrix} g(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g(\lambda_k) \end{pmatrix}$  Hier können wir also  $X_A(A) = 0_{n \times n}$  nehmen

Gilt dies also für jede Matrix?

Gilt also dass  $g(x) = X_A(x)$  für jede Matrix  $A$ ?

**Vermutung:** Sei  $A \in M_{n \times n}(K)$  dann ist  $X_A(A) = 0_{n \times n}$  Hier kommen wir später zurück

**Definition 11.1.8** Sei  $T : V \rightarrow V$  linear. Das minimale Polynom ist das monische ( $\neq 0$ ) Polynom kleinsten Grades  $m_T(x) \in K[x]$  so dass  $m_T(T) = 0_V$

**Lemma 11.1.9:** Seien  $m(x)$  und  $m'(x)$  beide Monisch, vom kleinsten Grad  $d \geq 1$  so dass  $m(T) = m'(T) = 0_V$ . Dann gilt  $m(x) = m'(x)$ .

**Beweis** Nimm an dass  $m(x) \neq m'(x)$  Dann sei

$$g(x) = m(x) - m'(x) \neq 0 \Rightarrow \deg(g) < d \text{ und } g(T) = 0_V$$

Was ein Widerspruch bringt.

**Sat 11.1.10** Sei  $T : V \rightarrow V$  Linear und  $g(x) \in K[x]$  monisch so dass  $g(T) = 0_V$  Dann gilt dass  $m_T(x) | g(x)$  ( $m_T(x)$  teilt  $g(x)$ )

**Beweis** Polynom division:  $\exists q(x), r(x) \in K[x]$  mit  $\deg(r) < \deg(m)$  so dass  $g(x) = m(x)q(x) + r(x)$  und da  $g(T) = 0_V$   $q(T) \underbrace{m(T)}_{m(T)=0} + r(T)$  also  $r(T) = 0_V \Rightarrow r(x) = 0$

**Beispiele 11.1.11**

- $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \Rightarrow X_A(x) = (x - \lambda)(x - \mu)$  wir wissen dass  $X_A(A) = 0_{2 \times 2}$  und wir wissen dass der minimale Polynom der Charakteristische Polynom teilt. Wenn also  $\mu \neq \lambda \Rightarrow m_A(x) = X_A(x)$  aber wenn  $\lambda = \mu \Rightarrow m_A(x) = x - \lambda$
- Sei  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \quad X_A(x) = (\lambda - x)^2(\mu - x) \Rightarrow m_A(x) = (\lambda - x)(\mu - x) \quad \lambda \neq \mu$  Wenn  $\mu = \lambda \quad m_A(x) = x - \lambda$
- $A = J_n(\lambda) \Rightarrow X_A(x) = (\lambda - x)^n \Rightarrow m_A(x) = X_A(x)$
- $A = \lambda id_n \Rightarrow X_A(x) = (\lambda - x)^n$  und  $m_A(x) = x - \lambda$

**Cayley Hamilton**  $A \in M_{n \times n} \Rightarrow X_A(A) = 0_{n \times n}$

**Beweis**

$$(A - x id_n) adj(A - x id_n) = X_A(x) id_n \quad (*)$$

Hier schreibe man  $adj(A - x I_n) = (p_{ij}(x))$  wobei  $p_{ij}(x) \in K[x]$  mit  $\deg(p_{ij}) \leq n - 1$

**Bemerkung 11.3.2**

$$adj(A - x id_n) = B_{n-1}x^{n-1} + \dots + B_1x + B_0 \quad B_i \in M_{n \times n}(K)$$

$$X_A(x) id_n = (-1)^n (x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0)$$

Wir setzen diese letzte Gleichung in (\*) ein und bekommen

$$AB_0 = (-1)^n a_0 id_n$$

$$-B_0 + AB_1 = (-1)^n a_1 id_n$$

und so weiter bis:

$$-B_{n-1} = (-1)^n id_n$$

Und zu zeigen ist

$$X_A(A) = 0_{n \times n} \Leftrightarrow (-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0 id_n = 0_{n \times n}$$

Wir können jede Gleichung vom System mit  $A^i$  multiplizieren (wo  $i = \deg$  der Linie) und summieren dass alles zusammen. Wir finden dass die Summe = 0 und dass  $X_A(A) = 0_{n \times n}$



## 4.2 Jordansche Normalform

**Definition Theorem** sei  $\lambda \in K$  und  $n \geq 1$  der Jordanblock der Länge  $n$  und Eigenwert  $\lambda$  ist folgende Matrix:

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

**Lemma 12.1.1:**  $X_{J_n}(x) = (\lambda - x)^n$  und  $\lambda$  ist der Einzige eigenwert,  $g_\lambda = 1$  und  $a_\lambda = n$  mit  $m_{J_n}(x) = (-1)^n X_{J_n}(x)$

**Theorem 12.1.2** Jordansche Normalenfor, Sei  $T : V \rightarrow V$  Dann  $\exists B$  eine Basis von  $V$  so dass

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} J_{n_1}(x_1) & & 0 \\ & J_{n_2}(x_2) & \\ & & \ddots \\ 0 & & & J_{n_k}(x_k) \end{pmatrix}$$

Dies darstellung ist eindeutig bis auf die Vertauschung der Blöcke.

**Theorem 12.1.3** Sei  $A \in M_{n \times n}(K)$  dann  $\exists B \in GL_n(K)$  so dass  $B^{-1}AB$  die Jordansche Normalenform hat. **Lemma**

**12.2.2** Sei  $C \in M_{n \times n}(K)$  wobei  $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$  und  $A, B \in M_{(n-2) \times (n-2)}(K)$  Definiert jetzt  $U = \langle e_1, \dots, e_i \rangle, W = \langle$

$e_i, \dots, e_n \rangle$  Sei  $v = u + w \in V \neq 0, u \in U, w \in W$  Dann ist  $v$  genau dann ein Eigenvektor von  $T_C$  mit Eigenwert  $\lambda$  wenn  $T_A(u) = \lambda u \cap T_B(w) = \lambda w$   $E_\lambda(T_C) = E_\lambda(T_A) \oplus E_\lambda(T_B) \Rightarrow g_\lambda(T_C) = g_\lambda(T_A) + g_\lambda(T_B)$

**Satz 12.2.3** Sei  $T : V \rightarrow V$  linear und Nimm an  $\exists B$  Basis von  $V$  So dass  $[T]_B^B$  die Diagonal Jordansche normalenform annimmt und sei  $\lambda$  Eigenwert von  $T$  Dann gilt  $g_\lambda = \#\{i | 1 \leq i \leq k, \alpha_i = \lambda\}$   $a_\lambda = \sum_{\alpha_i = \lambda} \lambda_i =$  Die Länge des  $g$ sten Jordanblock mit eigenwert  $\lambda = s(\lambda) = \max\{n_j | 1 \leq j \leq k, \alpha_j = \lambda\}$

**Beweis**  $B = \{b_1^{(1)}, \dots, b_{n_1}^{(1)}, \dots, b_{1n}^{(k)}, \dots, b_{kn}^{(k)}\}$  Sei  $W_i = \langle b_1^{(i)}, \dots, b_{n_i}^{(i)} \rangle \Rightarrow V = \bigoplus W_i$  und  $T$  Sei  $T_V \rightarrow V$  linear und  $\lambda$  ein Eigenwert von  $T$  Dann ist

$$\tilde{E}_\lambda = \bigcup_{k \geq 1} \ker(T - \lambda id_v)^k$$

Der Verallgemeinerte Eigenraum von  $\lambda$ , wo alle Vektoren die sich durch eine Potenz von  $T$  auf einen Skalar von sich selber Schicken lassen.

Wenn  $T$  Diagonalisierbar ist, dann ist  $V$  Die direkte summe der  $E_\lambda$ 's

**Vermutung**

$$V = \bigoplus_{\lambda = \text{Eigenwert}} \tilde{E}_\lambda$$

**Lemma 12.3.3** Sei  $n = \dim(V)$  dann gilt  $\tilde{E}_\lambda = \ker(T - \lambda id_v)^n$

**Beweis** Sei  $v \in \tilde{E}_\lambda$  und sei  $k$  minimal so dass  $(T - \lambda id_v)^k v = 0_v$  und  $(T - \lambda id_v)^{k-1} v \neq 0$  So ein  $k$  muss es per definition Geben. Wir wenden jetzt Lemma 12.2.2 an, dann sind  $v, sv, \dots, s^{k-1}v$  linear unabhängig, und daraus folgt  $k \leq n$

**Definition 12.3.4** Sei  $v \in \tilde{E}_\lambda$  mit  $v \neq 0$  und  $k \geq 1$  minimal so dass  $(T - \lambda id_v)^k v = 0_v$  Dann ist  $\{v, (T - \lambda id_v)v, \dots, (T - \lambda id_v)^{k-1}v\}$  die Jordankette von  $v$  der Länge  $k$

**Bemerkung 12.3.5**  $(T - \lambda id_v)^{k-1}v = w$  ist ein Eigenvektor von  $T$  mit Eigenwert  $\lambda$

**Beweis**  $Tw = \lambda w \Leftrightarrow (T - \lambda id_v)w = 0_v \Leftrightarrow (T - \lambda id_v)^k v = 0_v$