Analysis II Einsiedler Version

Benjamin Dropmann

March 31, 2025

1 Wiederholung

Definition Taylor-Polynom
Sei eine funktion $f : (a, b) \to \mathbb{C}$ um einen punkt $x_0 \in (a, b)$ die n-mal differenzierbar ist. Dann ist der Polynom

$$p^f_{x_0,n}(x) = \sin^n_{k=0} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)$$

Satz Taylor Approximation
sei $f : (a, b) \to \mathbb{C}$ eine $n + 1$ mal stetig differenzierbare funktion und $x_0, x \in (a, b)$ dann gilt

$$f(x) = P^f_{x_0,n}(x) + R^f_{x_0,n}(x)$$

Wobei diese $R^f_{x_0,n}(x)$ der restglied ist und ich den mit

$$R^f_{x_0,n}(x) = \int_{x_0}^{x} f^{(x+1)}(t)\frac{(x - t)^n}{n!} \ \text{dt}$$

Für $M_{n+1} = \max\{|f^{(n+1)}(t)|$ mit $t \in (x, x_0)$ gilt $|R^f_{x_0,n}(x)| \leq \frac{M_{n+1}|x-x_0|}{(n+1)!}$

Definition
Eine Funktion $f(a, b) \to \mathbb{C}$ heisst analytisch falls es zu jedem $x_0 \in (a, b)$ $\exists R > 0$ so dass

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_=)! \quad \forall x : |x - x_0| < R$$

8.6 Numerische Integration

Satz
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$,ot $n \in \mathbb{N}$ und $h = \frac{b-a}{h}$, $x_e = a + lh$ für $l \in \{0, 1, \cdots , n\}$ Falls f stetig differenzierbar ist dann gilt

$$\int_a^b f(t) \ \text{dt} = h \cdot (f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})) + F_1$$

Wobei F_1 unser fehler ist: $F_1 \leq \frac{M_1(b-1)^2}{2n}$ mit $M_1 = \max\{|f'(x)| : x \in [a, b]\}$ Falls die Funktion 2-mal stetig differenzierbar ist dann gilt:

$$\int_a^b f(t) \ \text{dt} = \frac{h}{2} (f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1})) + f(x_n)) + F_2 \qquad F_2 = \frac{M_2(b - a)^3}{6n^2}$$

Man kann auch für f vier mal differenzierbar und n gerade eine solche abschätzung machen, dies ist die Simpson Regel:

$$\int_a^b f(t) \ \text{dt} = \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)) + F_4 \qquad F_4 \leq \frac{M_4(b - 1)^5}{45n^4}$$

Beweis Sei $k \in \{0, \cdots , \frac{n}{2}\}$ und wir definieren $x_- = x_{2k}$, $\tilde{x} = x_{2k+1}$ und $x_+ = x_{2k+2}$