

Lineare Algebra II

Benjamin Dropmann

March 15, 2025

Polynome

Polynomdivision

Seien f und $g \neq 0$ zwei polynome in $K[x]$ dann $\exists q(r), r(r) \in K[x]$ mit $\deg(r) = 0$ oder $\deg(r) < \deg(g)$ und $f = qg + r$.

Korollar 9.0.4

Sei $f(x) \in K[x], f(x) \neq 0$ sei $\lambda \in K$ so dass $f(\lambda) = 0$. Dann $\exists q(x) \in K[x]$ so dass $f(x) = (x - \lambda)q(x)$

Beweis $\exists q(x), r(x) \in K[x] \quad \deg(r) < \deg(x - \lambda) = 1$ so dass $f(x) = (x - \lambda)(q(x) + r(x)), \rightarrow r \in K \Rightarrow f(\lambda) = 0$

Korollar 9.0.6

Sei $f(x) \in K[x], \deg(f) = n > 0$ Dann hat $f(x)$ höchstens n Nullstellen. (Fundamentalsatz der Algebra sehr ähnlich).

Beispiele 9.0.7

Es sei $f(x) = x + 1(x^2 + 1)$, als poly in $\mathbb{R}[x]$ hat es nur eine nullstelle $x = -1$. Als polynom in $\mathbb{C}[x]$ gilt $f(x) = (x + 1)(x + i)(x - i)$

Theorem 9.0.8 Fundamentalsatz der Algebra

Es sei $f(x) \in \mathbb{C}[x], \deg(f) = n > 0$ dann hat $f(x)$ in $\mathbb{C}[x]$ genau n nullstellen. Das heisst es existieren $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$ nicht unbedingt verschieden, so dass $f(x) = (x - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (x - \lambda_n)$ Wir sagen \mathbb{C} ist algebraisch abgeschlossen.

Lemma 9.0.11

sei $f(x) \in K[x], \lambda \in K$ so dass $f(\lambda) = 0$ Die Ordnung der Nullstelle (Vielfachheit) λ ist die ganze Zahl $n \geq 1$ so dass $\exists q(x) \in K[x]$ so dass

$$f(x) = (x - \lambda)^n q(x)$$

Beispiele 9.0.12

1. $f(x) = x + 1(x^2 + 1)$ Einfache nullstelle $\lambda = -1$ daher ist die ordnung 1

2. $p > 2 \quad g(x) = x^p \in \mathbb{F}_p[x]$

$\mathbb{F}_p = [a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 | n \geq 0, a_i \in \mathbb{F}_p]$ Und $g(x) = x^p - 1 = (x - 1)^p$ (leicht ausrechnen)

Bemerkung 9.0.13

Analogien $\mathbb{Z} \leftrightarrow K[X]$

\mathbb{Z}	$K[x]$
± 1	$K \setminus 0$
Primzahlen	Unzerlegbare Polynome $\deg < 0$
$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$	$f(x)$ ist unzerlegbar: $K[x]/_{f(x)}$ Körper

Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition 10.1.1

V/K Vektorraum, $T: V \rightarrow V$ Endomorphismus.

1. $\lambda \in K$ ist ein Eigenwert von T wenn $\exists v \in V, v \neq 0_v$ so dass $T(v) = \lambda v$

2. Ein solches v heisst Eigenvektor mit Eigenwert λ

Bemerkung 10.1.12

Wenn v Eigenvektor von T ist, $T(v) = \lambda v$ dann ist auch αv Eigenvektor von T mit Eigenwert $\lambda, \forall \alpha \in K, \alpha \neq 0$

Beispiele 10.1.3

Rechnung von eigenwerte und Eigenvektoren

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ Eigenwerte $\lambda = 3$ und $\lambda = -1$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Wir kommen dann auf

$$\begin{pmatrix} 1x & 2y \\ 2x & 1y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

und also

$$2x + y = \lambda x$$

$$x + 2y = \lambda y$$

Wir bekommen also

$$y((1 - \lambda)^2 - 4) = 0$$

$y \neq 0, x \neq 0$ Da die nullvektoren keine Eigenvektoren sind $\Rightarrow (1 - \lambda)^2 = 4 \Rightarrow \lambda = [-1, 3]$ Warum spezifisch zwei?

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ Wir Suchen ein λ sodass $b(v) = \lambda \cdot v$ für $v \in \mathbb{R}^2, v \neq 0$

$$\left(B - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also für welche λ ist $B - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ nicht invertierbar (wann ist der kern nicht trivial) \Leftrightarrow Für welche $\lambda \in K$ ist

$$\det \left(B - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0?$$

$$\det \left(\begin{pmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 1 & 4 - \lambda \end{pmatrix} \right) = (1 - \lambda)(4 - \lambda) \Rightarrow \lambda = [2, 3]$$

Und jetzt für die Eigenvektoren: für $\lambda = 2$

$$b(v) = 2v \Rightarrow v = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha \neq 0$$

Satz 10.1.4

$T : V \rightarrow V$ linear. Dann gilt: $\lambda \in K$ eigenwert von $T \Leftrightarrow \ker(T - \lambda 1_v) \neq 0$

Eigenwerttheorie

Fibonacci sei V der V-R der Fibonacci Folgen. wir haben $S : V \rightarrow V$ ist die Verschiebungsabbildung, (die ist definiert in satz 1.1.15) Die Basis war $B = \{\mathbb{F}_{0,1}, \mathbb{F}_{1,0} <\}$ Und die matrix ist $[S]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\det(S) = \lambda^2 - \lambda - 1$

eigenwerte sind also ϕ und φ und die Eigenfolgen sind $\{\mathbb{F}_{\phi,1}, \mathbb{F}_{\varphi,0} <\}$ also die diagonal matrix ist dann $[S]_C^C = \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \varphi \end{pmatrix}$

Definition Das charakteristische polynom

Sei $A \in M_{m \times n}(K)$ Dann ist $X_A(x) = \det(A - xI_n)$ das charakteristische polynom von A

Beispiele 10.2.2

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dann ist $X_A(x) = \det(A - xI_2)$ aber der konstante term des charakteristischen polynom ist die Determinante. $\det(A - xI_2)$ Insbesondere $X_{1_2}(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

Definition 10.2.3

$T : V \rightarrow V$ linear dann sei $X_T(x) = \det([T]_B^B - xI_n)$ dies ist unabhängig von der wahl der Basis B . 10.2.4: $X_T(x)$ ist wohldefiniert

Beweis $[T]_C^C = [D]_C^B [T]_B^B [D^{-1}]_B^C$ dann ist

$$\begin{aligned} \det([T]_C^C - xI_n) &= \det([D]_C^B [T]_B^B [D^{-1}]_B^C - xI_n) = \det(D[T]_B^B D^{-1} - xDD^{-1}) \\ &= \det(D([T]_B^B - xI)D^{-1}) = \det(D)\det([T]_B^B - xI)\det(D^{-1}) = \det(D)\det([T]_B^B - xI) \end{aligned}$$

Theorem 10.2.5

Es sei $T : V \rightarrow V$ linear. Dann gilt dann die Eigenwerte von $T = \{\lambda \in K \mid X_T(\lambda) = 0\}$

Lemma 10.2.6

Sei $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(K)$ eine obere Dreiecksmatrix dann gilt

$$X_A(x) = \prod_{i=1}^n (a_{ii} - x)$$

Sei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow X_A = x^2 - (a+d)x + ad - bc$ Trace (noch nachzu sehen) $Tr : M_{n \times n}(K) \rightarrow A = (a_{ij}) \rightarrow \sum a_{ii} 1$

Definition 10.2.7

Sei $T : V \rightarrow V$ linear dann ist die Spur von T

$$Tr(T) = Tr([T]_B^B)$$

Korollar 10.2.8

$Tr(T)$ ist wohldefiniert

Beweis Zu zeigen wann C eine Andere Basis und $D = id]_B^C$ dann gilt

$$Tr([T]_B^B) = Tr(D^{-1}[T]_C^C D)$$

Es reicht aus zu zeigen dass wenn $M_1, M_2 \in M_{n \times n}(K)$ dann gilt $Tr(M_1 M_2) = Tr(M_2 M_1)$ (mit explizite rechnung beweisen) Daher gilt auch 10.2.8 **Satz 10.2.9** es sei $T : V \rightarrow V$ linear dann gilt

$$X_T = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} x^{n-1} Tr(T) + \dots + det(T)$$

Beweis es sei $A = [T]_B^B$ Mit induktion kann man beweisen dass wenn es für eine $M_{n-1 \times n-1}$ geht dann geht es für $M_{n \times n}$ als übung zu machen. Der Zweite beweis geht wie folgt ab:

Sei $B \in M_{n \times n}$ und $b = (b_{ij})$ dann gilt die formel

$$\sum_{\sigma \in S_n} b_{\sigma(1,1)} \dots b_{\sigma(n,n)}$$

Sei $B = A - x 1_n$ und $\sigma \in S_n$ Für welche σ hat

$$b_{\sigma(1,1)} b_{\sigma(2,2)} \dots b_{\sigma(n,n)}$$

ein polynom von grad $> n-1$? Der beweis ist todlich, nacheher schauen ich tippe jetzt was ich nicht verstehe...

$T : V \rightarrow V$ linear, dann ist $\lambda \in K$ ein Eigenwert wenn $\exists v \in V, v \neq 0_v$ so dass $Tv = \lambda v$. Hier merken wir dass der skalar eines Eigenvektors, auch ein Eigenvektor ist, und dass die addition von zwei vektoren mit dem selben eigenwert, auch ein Eigenvektor ist, also hat dies die Struktur eines unterraums... Wir sind auf dem Folgenden Satz gekommen. Sei $T : V \rightarrow V$ linear, dann gilt $\lambda \in K$ ist genau dann Eigenwert von T wenn $ker(T - \lambda I_n) \neq \{\emptyset\}$

Beweis $\lambda \in K$ Eigenwert $\Leftrightarrow \exists v \in V, v \neq 0_v$ so dass $Tv = \lambda v \Leftrightarrow (T - \lambda I_n)v = 0_v$ Und daher ist $v \in ker(T - \lambda I_n)$ Das ist Praktisch da wenn $(T - \lambda I_n)$ nicht injektiv ist dann ist $ker(T - \lambda I_n) \neq \emptyset$ und wenn die Determinante nicht null ist dann ist $T - \lambda I_n$ kein endomorphismus.

Bemerkung

0 ist ein Eigenwert wenn T kein isomorphismus ist

Korollar

Folgende aussagen sind äquivalent:

- λ ist ein Eigenwert von T
- $ker(T - \lambda I_n) \neq \{0_v\}$
- $T - \lambda I_n$ ist kein Isomorphismus
- $det(T - \lambda I_n) = 0$

Der Beweis ist eine zusammenfassung von vorherigen beweisen Mit dieses wissen kann man Finden dass es höchstens n Unterschiedliche eigenwerte gibt, da die mit einem grad n polynom definiert sind.

Das charakteristische polynom

Definition 10.2.1

Sei $A \in M_{n \times n}(K)$. dann ist $X_A(x) = \det(A - x1_n)$ das charakteristische polyom von A Für eine 2×2 Matrix ist dann

$$X_A(X) = x^2 - \underbrace{(a-d)}_{Tr(A)}x + \underbrace{ad-bc}_{det(A)}$$

Kleine errinerung, die Trace ist die Summe der Diagonale elemente. Diese bemerkung gilt auch für 3×3 . Wir rechnen jetzt für $n \times n$. Der Konstante term von $\det(A - xI_n)$ ist $\det(A)$ (da es der Fall bei $x = 0$ ist)

Insbesondere:

$$X_1(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

Definition 10.2.3

$T : V \rightarrow V$ linear dann ist $X_T(x) = \det([T]_B^b - xI_n)$ Für eine Basis B von V .

Lemma 10.2.4

$X_T(x)$ ist wohldefiniert.

Beweis

$$[T]_C^C = [D]_C^B [T]_B^B [D^{-1}]_B^C$$

Multiplikativität von \det :

$$\det([T]_C^C - xI_n) = \det([D]_C^B [T]_B^B [D^{-1}]_B^C - xI_n) = \det([D]_C^B [T]_B^B [D^{-1}]_B^C - xD^{-1}D) = \det(D) \det([T]_B^B - xI_n) \det(D^{-1})$$

Was unsere aussage zustimmt. Da das Charakteristische Polynom unabhängig von der Wahl der Basis, ist sie Eindeutig und daher Wohldefiniert.

Theorem 10.2.5

Es sei $T : V \rightarrow V$ linear, dann gilt dass

$$\{\text{Eigenwerte von } T\} = \{\lambda \in K | X_T(\lambda) = 0\}$$

Lemma 10.2.6

Sei $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(K)$ Eine Obere Dreiecksmatrix. Dann ist das Charakteristische Polynom

$$X_A(x) = \prod_{i=1}^n (a_{ii} - x)$$

$Tr : M_{n \times n}(K) \rightarrow K$ $A = (a_{ij}) \rightarrow \sum a_{ii}$ Ist wohldefiniert.

Definition 10.2.7

Sei $T : V \rightarrow V$ linear dann ist $Tr(T) = Tr([T]_B^B)$ Wobei B eine Basis, Wohldefiniert (**Satz 10.2.8**).

Beweis Zu Zeigen, wenn C eine andere Basis ist, und $D = [id_v]_C^B$ eine Basiswechselmatrix ist, dann gilt:

$$Tr([T]_B^B) = Tr(D^{-1}[T]_C^C D)$$

Hier Bleibt nichts übrig ausser es auszurechnen, aber es funktioniert, es reicht aus zu zeigen, Wenn $M_1, M_2 \in M_{n \times n}(K)$ dann gilt $Tr(M_1 \cdot M_2) = Tr(M_2 \cdot M_1)$ Da wenn dass gilt dann kürzt sich der D, D^{-1} . Dass ist eine Explizite berechnung.

Satz 10.2.9

Sei $T : V \rightarrow V$ linear, dann gilt

$$X_T(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} Tr(T) x^{n-1} + \dots + \det(T)$$

Beweis Es sei $A = [T]_B^B$

Satz 10.2.8

$Tr(T)$ ist wohldefiniert.

Beweis Wenn C eine andere basis ist und $D = [id_v]_C^B$ dann gilt: $Tr[T]_B^B = Tr(D^{-1}[T]_C^C D)$ Hier bleibt in theorie nichts anderes als von hand zu zeigen dass $M_1, M_1 \in M_{n \times n}(K)$ dann gilt: $Tr(M_1 M_2) = Tr(M_2 M_1)$. Aber es ist immer noch nicht sehr schön.

Satz 10.2.9

Es sei $T : V \rightarrow V$ linear dann ist

$$X_T(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} \text{Tr}(T) x^{n-1} + \dots + \det(T)$$

Über den Rest kann man nicht viel sagen

Beweis Es sei $A = [T]_B^B$ dann ist $X_A(x) = \det(A)$. Aber die A Matrix ist sehr gross, dann muss man den Beweis per Induktion machen (Gute Exams Aufgabe). Hier ist die zweite Idee die wir machen. Wir wissen dass $B \in M_{n \times n}(K)$ dann gilt

$$\det(B) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) b_{\sigma(1),1} \cdots b_{\sigma(n),n}$$

Sei $B = A - xI_n$ und $\sigma \in S_n$, für welche σ ist $b_{\sigma(1),1} \cdot b_{\sigma(2),2} \cdots b_{\sigma(n),n} = (*)$ ein Polynom vom Grad $\geq n-1$? wenn $\sigma = id$ dann ist

$$(*) = (a_{1,1} - x) \cdots (a_{nn} - x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} \underbrace{(a_{1,1} + a_{2,2} + \dots + a_{n,n})}_{=\text{Tr}(B)} x^{n-1} + \text{Restterm von Grad } \leq n-1$$

Alle andere Möglichkeiten für σ müssen also vom Grad $< n-1$ sein (da nur auf der Diagonale $a_{j,j} - x$ steht, überall sonst gibt es kein x und wenn wir nur ein Element vertauschen, sind es zwei, und daher ist Grad $< n-1$), und daher ist dass zweite Vorfaktor vom Polynom. Welches dann beweist dass der zweite Restterm $\text{Tr}(A)$ ist und also dass unsere Gleichung stimmt (der konstante Faktor muss ja $= \det(A)$ sein)

Korollar 10.2.11

$T : V \rightarrow V$ mit V n -dim hat höchstens n Eigenwerte (da der Charakteristische Polynom Grad n ist.)

0.1 Diagonalisierung

Frage: es sei $T : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Gibt es eine Basis in welche die Abbildungsmatrix von T diagonal ist?

Satz 10.3.2

Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ verschiedene Eigenwerte von T und $\forall i$ sei v_i ein Eigenvektor mit Eigenwert λ_i dann sind v_1, \dots, v_n linear unabhängig.

Beweis Es sei zwei Eigenvektoren, v_a, v_b mit Eigenwerten λ_a, λ_b dabei ist dann $Tv_a = \lambda_a v_a$ und $Tv_b = \lambda_b v_b$ wenn aber $v_a = cv_b$ (sie sind nicht linear unabhängig) dann gilt $Tcv_b = \lambda_a cv_b$ und damit ist $\lambda_a \cdot c = \lambda_b \cdot c$ und also sind diese Eigenvektoren nicht unterschiedlich, da sie beide den selben Eigenwert haben.

Korollar 10.3.4

Wenn wir für $T : V \rightarrow V$ linear mit V n -dim, wenn T genau n verschiedene Eigenwerte hat, dann hat V eine Basis die aus $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ besteht.

Definition 10.3.5

$T : V \rightarrow V$ ist diagonalisierbar wenn \exists Basis von Eigenvektoren existiert. In diesem Fall ist die Abbildungsmatrix von T bezüglich dieser Basis diagonal, mit den Eigenwerten als Einträge in der Matrix.

Bemerkung 10.3.6

Eine $A \in M_{n \times n}$ Matrix ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow \exists B \in GL_n(K)$ so dass $B^{-1}AB$ diagonal ist (Basiswechselmatrix).

Lemma 10.3.7

Wenn A diagonalisierbar mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ist, dann ist $X_A = \prod (\lambda_i - x)$

Charakteristisches Polynom ist: $X_A = \det(A - xI_n)$ und seine Lösungen sind die Eigenwerte der Matrix. Eine n -dim Matrix ist diagonalisierbar falls es n unterschiedliche Eigenwerte gibt, daher wenn es eine Basis von Eigenvektoren gibt. Wir wissen auch dass

$$A = [T]_B^B \Leftrightarrow \exists P \in GL_n(K) \text{ so dass } P^{-1}AP \text{ Diagonal ist}$$

Frage, für welche A gibt es so ein P ?

- Wenn A diagonal ist dann ist P die Identität.
- Wenn $X_A(x)$ n verschiedene Nullstellen hat, beachte, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ aber $X(x) = (1-x)^2$ also diese Bedingung ist nicht ausschliesslich.

Gibt es Matrizen die nicht diagonalisierbar sind?

Beispiele 10.3.8

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X_A(x) = x^2 \Rightarrow A$ hat nur einen Eigenwert, $\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Eigenvektoren sind $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
Daraus kann man aber keine Basis machen, dies ist nicht diagonalisierbar.
- Es kann auch am Körper liegen dass wir nicht diagonalisieren können: $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \Rightarrow X_M(x) = x^2 + 1$
dass können wir nicht in \mathbb{R} faktorisieren, aber in \mathbb{C} geht es mit Eigenwerte $\pm i$, Wir werden immer den Körper vergrößern so dass dieser Fall nicht aufkommt

Beispiele 10.3.9:

der Erste Fall in der Liste lässt sich verallgemeinern, Sei $n \geq 1, \lambda \in K$ Wir definieren die **Jordansche Blockmatrix**

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Und wir merken also dass $X_{J_n}(x) = (\lambda - x)^n$ Wobei der einzige Eigenwert $x = \lambda$ und die Dazugehörigen Eigenvektoren

sind dann $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ was natürlich für $n > 1$ keine Basis.

Folgerungen Dass Charakterische allein entscheidet nicht ob eine Matrix diagonalisierbar ist. Und dass Problem ist eine Mögliche Diskrepanz zwischen der Ordnung der Nullstelle und die Dimension des aufgespannten Unterraums der Eigenvektoren.

Eigenräume

Definition 10.4.1

Sei $T : V \rightarrow V$ linear und λ ein Eigenwert von T . Der Eigenraum, ist der Aufgespannte Unterraum vom λ -Eigenvektor, seine Definition ist wie Folgt $E_\lambda = \ker(T - \lambda \text{id}_V) = \langle \lambda \text{ Eigenvektoren} \rangle$

Lemma 10.4.2

$E_\lambda \subset V$ Beweis trivial. **10.4.3**

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Dann ist $X_A(x) = -x^3 + 3x + 2$ und dann sind die Eigenwerte $X_A(2) = 0$ und dann können wir

Faktorisieren und es kommt $X_A(x) = -(x-2)(x+1)^2$ und die Dimensionen der Dazugehörigen Eigenräume sind:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow E_{\lambda=2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\text{Und mit } E_{\lambda=-1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Aber mit eine Riesen matrix ist es schwierig zu sagen ob wenn wir alle Eigenräume zusammenstellen, wir eine Basis von V haben, oder nicht.

Definition 10.4.4

Sei V ein V-R, wir betrachten $U_1, \dots, U_k \subset V$ Sei $W = U_1 + \dots + U_k$ Dann ist W die Direkte summe von U_1, \dots, U_k , wenn

$$\forall w \in W \quad \exists! u_1 \in U_1, \dots, u_k \in U_k \text{ so dass } w = u_1 + \dots + u_k$$

Man schreibt $W = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ Ich glaube dies ist äquivalent zu $\bigcap U_i = \{0_v\}$ Der beweis ist schwierig.

Lemma 10.4.6

Es gilt $W = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$ genau wenn die Gleichung $u_1 + \dots + u_k = 0_v$ mit $u_i \in U_i \quad \forall i$ nur die Lösung $u_i = 0_v \quad \forall i$ hat. Der beweis ist als übung zum Leser überlassen

Beispiele 10.4.7

- $\mathbb{R}^3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ Dies wäre äquivalent zu sagen dass diese drei elemente eine Basis von \mathbb{R}^3 sind also ja
- $\mathbb{R}^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ aber Keine Direkte summe da die zweite lineare Hülle unnötige elemente enthält

Bemerkung 10.4.8

Wenn W die Direkte Summe von $U_1 \dots U_k$ ist dann gilt dass $\dim(W) = \dim(U_1) + \dots \dim(U_k)$

Beweis Sei B_i Basis von U_i dann behaupten wir dass $B_1 \cup \dots \cup B_k$ Basis von W ist. Dieser Teil des Beweis ist als Übung überlassen

Satz 10.4.9

Es sei $T : V \rightarrow V$ linear und $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ Eigenwerte von T mit $\lambda_i \neq \lambda_j \forall i \neq j$. Sei $W = E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_k}$ Dann gilt $W = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k}$.

Beweis Nehmen wir an dass $\exists u_1, \dots, u_k \quad u_i \in E_{\lambda_i}$ und dann da u_i jeweils in unterschiedliche Eigenräume sind, sind die alle von einander linear unabhängig, kann die summe den Nullvektor ergeben:

$$\exists u_1, \dots, u_k \in E_{\lambda_i} \text{ so dass } u_1 + \dots + u_k = 0_v$$

Doch u_1, \dots, u_k sind linear unabhängig und wenn $u_i \neq 0_v \quad \forall i$ dann kriegen wir ein widerspruch.

Korollar 10.4.10

Sei $T : V \rightarrow V$ linear mit Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ dann ist T genau dann Diagonalisierbar, wenn die summe der dimensionen der dazugehörigen Eigenräume, die dimension von V ist:

$$T \text{ ist Diagonalisierbar} \Leftrightarrow \dim(V) = \sum_{i=1}^k \dim(E_{\lambda_i})$$

Algebraische und Geometrische vielfachheit

Bemerkung 10.5.1

Es sei $n = \dim_K(V)$ mit $T : V \rightarrow V$ Dann hat $X_T(x)$ grad n und wenn $X_T(x) = (\lambda_1 - x)^{a_1} \dots (\lambda_k - x)^{a_k}$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j \forall i \neq j$ dann ist $n = \sum a_i$

Definition 10.5.2

sei λ Eigenwert von T dann ist

- Die Geometrische Vielfachheit; $g_\lambda = \dim(E_\lambda)$
- Algebraische Vielfachheit a_λ ist die Ordnung der Nullstelle vom Faktor λ in $X_T(x)$

Beispiele 10.5.3

Im beispiel 10.4.3 hatten wir

- $\lambda_1 = -1$ und $g_{\lambda_1} = a_{\lambda_1} = -2$
- $J_n(\lambda) \quad g_\lambda = 1 \quad a_\lambda = n$
- $\lambda I_n \quad g_\lambda = a_\lambda = n$

Man merkt dass:

Satz 10.5.4

$T : V \rightarrow V$ mit Eigenwert λ Dann gilt $g_\lambda \leq a_\lambda$

Beweis Sei v_1, \dots, v_k eine Basis von E_λ , v_k eine Basis von E_λ und wir erweitern sie zu einer Basis $B = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ von V . Dann ist $[T]_B^B = \begin{pmatrix} \lambda I_k & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ Dann ist $\det([T]_B^B - xI_n) = (\lambda - x)^k \cdot \det(D - xI_{n-k})$ das bedeutet dass $k \leq a_\lambda$ da im $\det(D - xI_{n-k})$ auch eine Nullstelle vorkommen kann.

Korollar 10.5.5

Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ unterschiedliche Eigenwerte von T , dann gilt:

$$T \text{ ist diagonalisierbar} \Leftrightarrow g_{\lambda_i} = a_{\lambda_i} \quad \forall i$$

Beweis Korollar 10.4.10 sagt dass

$$T \text{ ist Diagonalisierbar} \Leftrightarrow V = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k} \Leftrightarrow \dim(V) = \sum \dim(E_{\lambda_i}) = \sum g_{\lambda_i} \leq \sum a_{\lambda_i} = n = \dim(V)$$

da beide seiten $\dim(V)$ haben, dann ist $\sum g_{\lambda_i} = \sum a_{\lambda_i}$ und da $a_{\lambda_i} \geq g_{\lambda_i}$ ist $a_{\lambda_i} = g_{\lambda_i} \quad \forall i$

Theorem 10.5.6

Sei $\dim(V) = n$ mit $T : V \rightarrow V$ dann sind folgende aussagen äquivalent:

- T ist Diagonalisierbar
- $\forall \lambda$ gilt $a_\lambda = g_\lambda$
- Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ Eigenwerte, dann gilt $X_T(x) = \prod (\lambda_i - x)^{g_{\lambda_i}}$
- $V = \bigoplus_{i=1}^k E_{\lambda_i}$

Die Beweise sind schon alle vorgeführt gewesen. Was machen wir mit den Matrizen die man nicht diagonalisieren kann?

Das minimale Polynom

Definition und Erste Eigenschaften

Definition 11.1.1

Sei $T : V \rightarrow V$ linear, dann ist $T^k = \underbrace{T \circ \dots \circ T}_{k \text{ mal}}$ und $T^0 = id_V$. Die definition ist für Matrizen analog.

Definition 11.1.2

Sei $g(x) = a_d x^d + \dots + a_1 x + a_0 \in K$ ein Polynom, dann definieren wir $g(T) = a_d T^d + \dots + a_1 T^1 + a_0 T^0 \in \text{End}_K(V)$. Es geht auch mit matrizen.

Beispiele e 11.1.4

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad f(x) = x^2 - x + 3 \Rightarrow f(A) = A$
- $g(x) = x^n$ dann ist $g(J_n(0)) = 0_{n \times n}$ im Jordanblock, verschiebt sich die diagonale nach oben rechts.

Satz 11.1.5

Sei $T \in \text{End}_K(V)$ dann $\exists g(x) \in K[x]$ so dass $g(T) = 0_v$

Beweis $\dim(\text{End}_K(V)) = n^2 \Leftrightarrow \dim(V) = n$ dass heisst dass T^0, T^1, \dots, T^{n^2} sind alle linear unabhängig, und daher:

$$\exists a_0, \dots, a_{n^2} \in K \neq 0 \text{ so dass } a_0 T^0 + \dots + a_{n^2} T^{n^2} = 0_v$$

Aber kann man dieses Polynom finden, und hat es einen zusammenhang mit den Charakteristischen Polynom

Bemerkung 11.1.6

Wenn $g(T) = 0_V$ dann gilt auch $(\alpha g)(T) = 0_V \quad \forall \alpha \in K$

Beispiele e 11.1.7

- Sei $n \geq 1$, $A = Id_n$ und $g(x) = x - 1$ dann gilt $g(A) = 0_{n \times n}$
- Sei $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{pmatrix}$ dann haben wir $\forall g \quad g(A) = \begin{pmatrix} g(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g(\lambda_k) \end{pmatrix}$ Hier können wir also $X_A(A) = 0_{n \times n}$ nehmen

Gilt dies also für jede Matrix?

Gilt also dass $g(x) = X_A(x)$ für jede Matrix A ?

Vermutung: Sei $A \in M_{n \times n}(K)$ dann ist $X_A(A) = 0_{n \times n}$ Hier kommen wir später zurück

Definition 11.1.8

Sei $T : V \rightarrow V$ linear. Das minimale Polynom ist das monische ($\neq 0$) Polynom kleinsten Grades $m_T(x) \in K[x]$ so dass $m_T(T) = 0_V$

Lemma 11.1.9:

Seien $m(x)$ und $m'(x)$ beide Monisch, vom kleinsten Grad $d \geq 1$ so dass $m(T) = m'(T) = 0_V$. Dann gilt $m(x) = m'(x)$.

Beweis Nimm an dass $m(x) \neq m'(x)$ Dann sei

$$g(x) = m(x) - m'(x) \neq 0 \Rightarrow \deg(g) < d \text{ und } g(T) = 0_V$$

Was ein Widerspruch bringt.

Satz 11.1.10

Sei $T : V \rightarrow V$ Linear und $g(x) \in K[x]$ monisch so dass $g(T) = 0_V$ Dann gilt dass $m_T(x) | g(x)$ ($m_T(x)$ teilt $g(x)$)

Beweis Polynom division: $\exists q(x), r(x) \in K[x]$ mit $\deg(r) < \deg(m)$ so dass $g(x) = m(x)q(x) + r(x)$ und da $g(T) = 0_V = q(T) \underbrace{m(T)}_{m(T)=0} + r(T)$ also $r(T) = 0_V \Rightarrow r(x) = 0$

Beispiele 11.1.11

- $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \Rightarrow X_A(x) = (x - \lambda)(x - \mu)$ wir wissen dass $X_A(A) = 0_{2 \times 2}$ und wir wissen dass der minimale polynom der Charakteristische Polynom teilt. Wenn also $\mu \neq \lambda \Rightarrow m_A(x) = X_A(x)$ aber wenn $\lambda = \mu \Rightarrow m_A(x) = x - \lambda$
- Sei $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \quad X_A(x) = (\lambda - x)^2(\mu - x) \Rightarrow m_A(x) = (\lambda - x)(\mu - x) \quad \lambda \neq \mu$ Wenn $\mu = \lambda \quad m_A(x) = x - \lambda$
- $A = J_n(\lambda) \Rightarrow X_A(x) = (\lambda - x)^n \Rightarrow m_A(x) = X_A(x)$
- $A = \lambda id_n \Rightarrow X_A(x) = (\lambda - x)^n$ und $m_A(x) = x - \lambda$

Cayley Hamilton $A \in M_{n \times n} \Rightarrow X_A(A) = 0_{n \times n}$

Beweis

$$(A - x id_n) adj(A - x id_n) = X_A(x) id_n \quad (*)$$

Hier schreibe man $adj(A - x I_n) = (p_{ij}(x))$ wobei $p_{ij}(x) \in K[x]$ mit $\deg(p_{ij}) \leq n - 1$

Bemerkung 11.3.2

$$adj(A - x id_n) = B_{n-1}x^{n-1} + \dots + B_1x + B_0 \quad B_i \in M_{n \times n}(K)$$

$$X_A(x) id_n = (-1)^n (x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0)$$

Wir setzen diese letzte Gleichung in (*) ein und bekommen

$$AB_0 = (-1)^n a_0 id_n$$

$$-B_0 + AB_1 = (-1)^n a_1 id_n$$

und so weiter bis:

$$-B_{n-1} = (-1)^n id_n$$

Und zu zeigen ist

$$X_A(A) = 0_{n \times n} \Leftrightarrow (-1)^n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0 id_n = 0_{n \times n}$$

Wir können jede Gleichung vom System mit A^i multiplizieren (wo $i = \deg$ der Linie) und summieren dass alles zusammen. Wir finden dass die Summe = 0 und dass $X_A(A) = 0_{n \times n}$

Jordansche Normalform**Definition Theorem**

sei $\lambda \in K$ und $n \geq 1$ der Jordanblock der Länge n und Eigenwert λ ist folgende Matrix:

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \lambda & \end{pmatrix}$$

Lemma 12.1.1

$X_{J_n}(x) = (\lambda - x)^n$ und λ ist der Einzige eigenwert, $g_\lambda = 1$ und $a_\lambda = n$ mit $m_{J_n}(x) = (-1)^n X_{J_n}(x)$

Theorem 12.1.2

Jordansche Normalenfor, Sei $T : V \rightarrow V$ Dann $\exists B$ eine Basis von V so dass

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} J_{n_1}(x_1) & & & 0 \\ & J_{n_2}(x_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{n_k}(x_k) \end{pmatrix}$$

Dies darstellung ist eindeutig bis auf die Vertauschung der Blöcke.

Theorem 12.1.3

Sei $A \in M_{n \times n}(K)$ dann $\exists B \in GL_n(K)$ so dass $B^{-1}AB$ die Jordansche Normalenform hat.

Lemma 12.2.2

Sei $C \in M_{n \times n}(K)$ wobei $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ und $A, B \in M_{(n-2) \times (n-2)}(K)$ Definiert jetzt $U = \langle e_1, \dots, e_i \rangle, W = \langle e_i, \dots, e_n \rangle$

Sei $v = u + w \in V \neq 0_v, u \in U, w \in W$ Dann ist v genau dann ein Eigenvektor von T_C mit Eigenwert λ wenn $T_A(u) = \lambda_u \cap T_B(w) = \lambda w$ $E_\lambda(T_C) = E_\lambda(T_A) \oplus E_\lambda(T_B) \Rightarrow g_\lambda(T_C) = g_\lambda(T_A) + g_\lambda(T_B)$

Satz 12.2.3

Sei $T : V \rightarrow V$ linear und Nimm an $\exists B$ Basis von V So dass $[T]_B^B$ die Diagonal Jordansche normalenform annimmt und sei λ Eigenwert von T Dann gilt $g_\lambda = \#\{i | 1 \leq i \leq k, \alpha_i = \lambda\}$ $a_\lambda = \sum_{\alpha_i = \lambda} \lambda_i$ = Die länge des gsten Jordanblock mit eigenwert $\lambda = s(\lambda) = \max\{n_j | 1 \leq j \leq k, \alpha_j = \lambda\}$

Beweis $B = \{b_1^{(1)}, \dots, b_{n_1}^{(1)}, \dots, b_{n_k}^{(k)}\}$ Sei $W_i = \langle b_1^{(i)}, \dots, b_{n_i}^{(i)} \rangle \Rightarrow V = \bigoplus W_i$ und T Sei $T_V \rightarrow V$ linear und λ ein Eigenwert von T Dann ist

$$\tilde{E}_\lambda = \bigcup_{k \geq 1} \ker(T - \lambda id_v)^k$$

Der Verallgemeinerte Eigenraum von λ , wo alle Vektoren die sich durch eine Potenz von T auf einen Skalar von sich selber Schicken lassen. Wenn T Diagonalisierbar ist, dann ist V Die direkte summe der E_λ 's **Vermutung**

$$V = \bigoplus_{\lambda = \text{Eigenwert}} \tilde{E}_\lambda$$

Lemma 12.3.3

Sei $n = \dim(V)$ dann gilt $\tilde{E}_\lambda = \ker(T - \lambda id_v)^n$

Beweis Sei $v \in \tilde{E}_\lambda$ und sei k minimal so dass $(T - \lambda id_v)^k v = 0_v$ und $(T - \lambda id_v)^{k-1} v \neq 0$ So ein k muss es per definition Geben. Wir wenden jetzt Lemma 12.2.2 an, dann sind $v, sv, \dots, s^{k-1}v$ linear unabhängig, und daraus folgt $k \leq n$

Definition 12.3.4

Sei $v \in \tilde{E}_\lambda$ mit $v \neq 0$ und $k \geq 1$ minimal so dass $(T - \lambda id_v)^k v = 0_v$ Dann ist $\{v, (T - \lambda id_v)v, \dots, (T - \lambda id_v)^{k-1}v\}$ die Jordankette von v der länge k **Bemerkung 12.3.5** $(T - \lambda id_v)^{k-1}v = w$ ist ein Eigenvektor von T mit Eigenwert λ

Beweis $Tw = \lambda w \Leftrightarrow (T - \lambda id_v)w = 0_v \Leftrightarrow (T - \lambda id_v)^k v = 0_v$

Bemerkung 12.3.6

Jeder eigenvektor von T bildet/ist eine Jordankette von länge 1.

Beispiele 12.3.7

- Sei $A = J_n(\lambda) \tilde{T}_A : K^n \rightarrow K^n$ und $S = T_A - \lambda id_{K^n}$ Dann ist die längste Jordankette von länge n .
- Seien $\lambda \neq \mu \in K$ mit

$$A = \begin{pmatrix} J_2(\lambda) & & & 0 \\ & J_3(\lambda) & & \\ & & \lambda & \\ 0 & & & J_2(\mu) \\ & & & & \mu \end{pmatrix}$$

Eine 9×9 Matrix, gibt es Folgende Jordanketten von A :

$$e_5 \rightarrow e_4 \rightarrow e_3$$

$$e_6$$

$$e_2 \rightarrow e_1$$

$$e_8 \rightarrow e_7$$

$$e_9$$

- Dies ist ein Placeholder