

0.1 Bonusprogramm

12 serien* 5 punkte / serie → 60 punkte

- 0-19 Kein bonus
- 20-39 Lineare interpolation
- >40 maximaler bonus 39, 40 schon maximler bonu

1 Wellen

1.1 Federwelle

Gutes model für eine Festkoper, Transversale Anregung, senkrecht zur länge, Longitudonale Anregung, entlang der länge des feder dings. (Elektromagnetik schwer da es in beide richtungen geht). Es gelten Folgende Bedingungen für die federwelle:

- Jede masse Schwingt um ihre ruhelage, (wie eine Pendel)
- Jede masse bleibt in ruhe bis die welle sie erreicht
- Ruckrehr zur ruhelage

1.1.1 Amplitude

der Welle $\xi(x, t)$ (x : Ort für die Seilwelle, t zeit)

1.1.2 Dispersion

: Form des wellenpakets der anregung bleibt unverändert $\xi(x, t = 0) = f(x)$ $f(x)$ ist die form des wellenpakets $x - a$ führt zu einer translation der Wele ohne ändergun seiner form:

$$c \rightarrow x - a \rightarrow \xi(x - a, t = 0) \rightarrow (x + a)$$

$$a = vt \rightarrow f(x \pm vt)$$

$$\xi(x, t) = f(x \pm vt)$$

v ist hier die **Phasengeschwindigkeit** der Welle.

1.1.3 Harmonische Wellen

Vom Harmonischen Oszillator, Wellengleichung herleiten, allgeimene wellengleichung finden. Eine Harmonische Welle ist eine sinus (cosinus ist besser) kurve

$$\xi(x, t) = \xi_0 \cdot \sin(k(x \pm vt) = f(x \pm vt)$$

$$\text{Wellenzahl } k(x + \lambda) = kx + 2\pi \rightarrow k\lambda = 2\pi \rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

k ist die Wellenzahl (so dass was im sinus ist dimensionslos ist)

$$\lambda : \text{Wellenlänge}$$

In zwei dimensionen ist \vec{k} ist ein vektor und zeigt uns die wellen direktion aus (longitude, oder senkrecht)

Kreisfrequenz: $\omega = 2\pi\nu = 2\pi\frac{1}{T}$ Wo T die Periode ist.

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sim (k(x \pm vt)) = \sin(kx + kv t) = \xi_0 \sin(kx \pm \omega t)$$

1.1.4 Wellenglaichung in einer Dimension

$$\xi(x, t) = \xi_0 e^{i(kx \pm \omega t)}$$

wir leiten nach der zeit ab:

$$\frac{\delta \xi}{\delta t} = \xi_0 (-kv) \cos(k(x - vt))$$

$$\frac{\delta^2 \xi}{\delta^2 t} = \xi_0 (-kv)^2 \sin(k(x - vt))$$

ncahc dem ort ableiten

$$\frac{\delta \xi}{\delta x} = \xi_0 k \cos(k(x - vt))$$

$$\frac{\delta^2 \xi}{\delta^2 x} = \xi_0 k^2 \sin(k(x - vt))$$

Zusammestellen $\frac{\delta^2 \xi}{\delta^2 t} = v^2 \frac{\delta^2 \xi}{\delta^2 x}$

$$\frac{\delta^2 \xi}{\delta^2 t} - v^2 \frac{\delta^2 \xi}{\delta^2 x} = 0$$

Wie sieht dann die allgemeine lösung aus?

$$\xi(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

Ableitung nach der Zeit

$$\frac{\delta \xi}{\delta t} = \frac{\delta f(x - vt)}{\delta t} + \frac{\delta f(x + vt)}{\delta t} = \frac{\delta f(\alpha(x, t))}{\delta t} + \frac{\delta g(\beta(x, t))}{\delta t}$$

Weiter und weiter ableiten und herumschreiben:

$$\frac{\delta f}{\delta \alpha}(\alpha(-v)) + \frac{g(\beta)}{\delta \beta}(\beta(v))$$

Für die zweite ableitung gilt diese hergehensweise auch, und wir finden dass die gleichung oben erfüllt ist und dass folgende gleichung gilt:

$$\frac{\delta^2 \xi}{\delta^2 t} - v^2 \frac{\delta^2 \xi}{\delta^2 x} = 0$$

Gute frage: jede sinusfunktion erfüllt das; wir haben nur angenommen dass x und t einen anhang (f in diesen fall) haben

Experiment DNA dings, sehr wenig reibung zwischung elemente \rightarrow rucktreibende kraft sehr gering. Auch reflektion.

1.1.5 Transversale Wellen

$$\xi(z, t) = Af(z - vt)$$

Diesmal ist k aber ein Vektor

$$xi(z, t) = A \cos(kz\omega t)\hat{x}$$

Anhänge zur spannung(seilwelle) Seilwelle \rightarrow Wellengleichung Wir nehmen viele kleine massenelemente den seil entlang, Dann haben wir zwei kräfte, den seil hoch/entlang und die spannung des seils/nach unten. Wir haben jetzt für eine massen element zwei funktionen $xi(x)$ und $\xi(x + dx)$ Wir brauchen also der unterschied zwischen diese zwei kräfte, die nicht entgegengesetzt sind wegen der breite des massenelements.

$$\Delta S_y = S \sin(\alpha') - S \sin(\alpha)$$

Herumdingen

$$\Delta S_y = S \frac{\delta^2 \xi}{\delta x^2} dx$$

Ich habe verpasst Elastizität modul?

1.1.6 Räumliche verteilung von Wellen

$$\xi(x, y, z, t) = Af(kz - \omega t)$$

Transversale Welle: Polarisationsrichtung (in x oder y schwingen, transversal aber anders)

$$A = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} \quad \xi(t) = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} \cdot e^{ikz - \omega t}$$

Die wellenzahl wird jetzt zu einem Vektor der beschreibt in welcher richtung diese welle sich ausbreitet.

$$\xi(r, t) = Ae^{i(kr - \omega t)}$$

wobei $k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_z \end{pmatrix}$

1.2 Wellengleichung in drei dimensionen

$$\frac{1}{v^2} \frac{\delta^2 \xi}{\delta t^2} - \frac{\delta^2 \xi}{\delta x^2} - \frac{\delta^2 \xi}{\delta y^2} - \frac{\delta^2 \xi}{\delta z^2} = 0$$

Laplace operator $\Delta = \nabla^2 = \left(\frac{\delta}{\delta x}, \frac{\delta}{\delta y}, \frac{\delta}{\delta z} \right) \begin{pmatrix} \delta/\delta x \\ \delta/\delta y \\ \delta/\delta z \end{pmatrix}$ Also es gilt

$$\frac{1}{v^2} \frac{\delta^2 \vec{\xi}}{\delta t^2}(x, y, z, t) - \Delta \vec{\xi} = 0$$

1.3 Kugelwellen

Beispiel punktförmige Lichtquelle. Hier ist k nicht mehr wohldefiniert, da die Welle sich in alle Richtungen ausbreitet.

$$\vec{\xi}_0 \cdot e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

$$\frac{\delta \vec{\xi}}{\delta x} = i k x e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

In alle Richtungen und zweimal ableiten, und wir finden:

$$\Delta \vec{\xi}(\vec{r}, t) = -k^2 \vec{\xi}(\vec{r}, t)$$

Und dann dasselbe mit der Zeit:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\delta^2 \vec{\xi}}{\delta t^2} - \Delta \vec{\xi} = \xi \left[-\frac{\omega^2}{v^2} + k^2 \right] \vec{\xi} \quad v = \frac{\omega}{k}$$

Mit der Kugelsymmetrie $\Delta = \frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2} + \frac{\delta^2}{\delta z^2}$ bekommen wir dann

$$\frac{\delta \phi}{\delta x} = \left(\frac{\delta r}{\delta x} \frac{\delta}{\delta r} + \frac{\delta \theta}{\delta x} \frac{\delta}{\delta \theta} + \frac{\delta \phi}{\delta x} \frac{\delta}{\delta \phi} \right) \phi$$

$$\frac{\delta r}{\delta x} = \sin(\theta) \cos(\phi)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta \theta}{\delta x} &= \frac{\delta}{\delta x} \left[\arccos\left(\frac{z}{r}\right) \right] = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{z^2}{r^2}}} \frac{\delta}{\delta x} \frac{z}{r} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{z^2}{r^2}}} \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{r^3} 2xz \right) \\ &= \frac{1}{r} \cos(\theta) \cos(\phi) \end{aligned}$$

Dasselbe geht jetzt mit $\frac{\delta \phi}{\delta x}$ (Schreibe ich nicht hin)

1.4 Kugelwellen, Wellengleichungen in 3d

$\vec{k} \cdot \vec{r} = |\vec{k}| \cdot |\vec{r}| = k \cdot r$ Da k und r immer parallel laufen (dank der Kugelsymmetrie)

$$\vec{\xi}(r, t) = \frac{\vec{A}_1}{r} f_1(kr - \omega t) + \frac{\vec{A}_2}{r} f_2(kr - \omega t)$$

Diese Lösung erfüllt die Differentialgleichung.

1.5 Energietransport

Die Geschwindigkeit eines Massenstücks $v = \frac{\delta \xi(\vec{r}, t)}{\delta t}$

Die kinetische Energie dieses Massenstückes $dT = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta \xi}{\delta t} \right)^2 dm$ Energiedichte $\frac{dT}{dV}$

Elastische Energie:

$$E_{el} = \int_0^{\Delta l} (\Delta l') d(\Delta l') = A \int_0^{\Delta l} E \frac{\Delta l'^2}{l} = \frac{1}{2} (A \cdot l) E \left(\frac{\Delta l}{l} \right)^2$$

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\delta \xi}{\delta x} \Rightarrow \frac{1}{2} E \left(\frac{\delta \xi}{\delta x} \right)^2$$

Energie dichte:

$$\frac{dT}{dV} = \frac{1}{2} \rho v^2 f'^2$$
$$\frac{dE_{el}}{dV} = \frac{1}{2} E f'^2$$

Pro volumen gerechnet ist die elastische und kinetische energie dieselbe. Die Gesamtenergie ist also $\frac{dW}{dV} = \rho v^2 f'^2$

1.6 Wellenfunktion ξ

$$\xi(x, t) =$$

Die Form einer welle: $f(x) = \xi(x, t = 0)$ ist der initiale gefrorene status einer Welle. Für jetzt, ist die Form konstant (dämpfungen sind benachlässigt). Wegen der Form der Welle, ist ort und Zeit nicht unabhängig, da die Form der Welle nur den Ort definiert bei einer konstanter Zeit.

Nach eine Zeit hat sich die Welle um zum punkt $x \pm vt$ ausbreitet, wobei v die Wellengeschwindigkeit ist. Die Wellenfunktion ist also

$$\xi(x, t) = f(x \pm vt)$$

1.7 Harmonische Welle

Eine harmonische Welle ist beschrieben durch ein sinus oder ein cosinus:

$$\xi(x, t) = A \cdot \sin(k(x \pm vt))$$

wobei k die Wellenzahl (später Wellenvektor) $\left[\frac{1}{m}\right]$, ist, A die Amplitude. Es gilt $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ wo λ die Wellenlänge ist. Also man kann die folgende vereinfachung machen:

$$k(x \pm vt) = kx + kvt = kx + \omega t$$

wobei ω die Kreisfrequenz ist.

1.8 Wellengleichung

Wir leiten nach der Zeit ab

$$\frac{\delta \xi}{\delta t} = A(-\omega) \cos(kx - \omega t)$$
$$\frac{\delta^2 \xi}{\delta t^2} = a - \omega^2 A \sin(kx - \omega t)$$

Und jetzt nach dem Ort:

$$\frac{\delta \xi}{\delta x} = Ak \cos(kx - \omega t)$$
$$\frac{\delta^2 \xi}{\delta x^2} = -k^2 A \sin(kx - \omega t)$$

Wie setzen dies zusammen und bekommen:

$$= \frac{\omega^2}{k^2} \frac{\delta^2 \xi}{\delta x^2} = v^2 \frac{\delta^2 \xi}{\delta x^2}$$
$$\frac{\delta^2 \xi}{\delta t^2} - v^2 \frac{\delta^2 \xi}{\delta x^2}$$

Die Allgemeine Lösung folgt folgender Form:

$$f(x - vt) - g(x + vt)$$

1.8.1 Arten von Wellenverbreitung

- Transversalwelle: Auslenkung senkrecht zur geschwindigkeit
- Longitudinalwell, die Auslenkung ist parallel zur ausbreitung der Welle

1.8.2 Energietransport einer Welle

Eine welle transportiert kinetische und elastische energie, die Beträge dieser beiden einergien ist im volumen (flächenelement oder distanz) immer gleich.

1.8.3 Tipps zur Serie 1

1.1_a Vollständige Wellenfunktion finden, (wichtige dinge oben sind hilfreich)

1.1_b Die orte einfach einsetzen und die trigonometrische vereinfachen mit den mathematischen hilfsmitteln der formelsammlung

1.2_a Uhr und Lineal, so dass man zeiten und abständen messen kann. Welche grössen sind gegeben, und welche sind messbar? damit vereinfachen. Die Wellenlänge kann man (theoretisch messen) also mit der Wellenlänge die distanz ausrechnen.

1.8.4 Stehende Welle

Die Stehende Welle ist einfach eine summe der Zwei wellen die sie aufführt.

1.8.5 Reflection und Transmission

Transmission ist in derselben richtung als einkommende Welle, Reflektierte welle dagegen

$$\xi_A = Ae^{i(k_1x - \omega t)}$$

$$\xi_R = Re^{i(-k_1x - \omega t + \delta_R)}$$

$$\xi_T = Te^{i(kx - \omega t + \delta_T)}$$

Wir können diese gleichungen mit zwei Parameter (zwei gleichungen) lösen.

Wir haben Zwei Bedingungen:

Steigheit

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (\xi_A + \xi_R) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \xi_T$$

Und Kraftgleichgewicht:

$$S_1 \frac{\delta \xi_A}{\delta x} \Big|_{x=0} + \frac{\delta \xi_R}{\delta x} \Big|_{x=0} = \frac{\delta \xi_T}{\delta x} \Big|_{x=0}$$

$$A + Re^{i\delta_R} = Te^{i\delta_T}$$

Imaginärteil: $T \sin(\delta_T) = R \sin(\delta_R)$

$$\text{Kraftgleichung} \quad AS_1k_1 = TS_2k_2e^{i\delta_T} + RS_1k_1e^{i\delta_R}$$

$$TS_2k_2 \sin(\delta_T) + RS_1k_1 \sin(\delta_R) = 0 = T \sin(\delta_T)(S_2k_2 + S_1k_1)$$

Und wir bekommen

$$k_i = \frac{\omega}{v_i}$$

$$\alpha = \frac{S_2\delta_2}{S_1\delta_1}$$

Materialparameter α Ist ein Index von den Geschwindigkeiten der Welle in den beiden Materien (für ein seil ist S die Spannung):

$$T \sin(\delta_T)(\alpha + 1) = 0 \Rightarrow \sin(\delta_T) = 0$$

$$\delta_T = 0 \quad \lim_{v_1 \rightarrow v_2} \xi_A = \xi_T$$

$$\delta_T = \pi \quad \lim_{v_1 \rightarrow v_2} \xi_A = -\xi_T$$

Es muss also $\delta_T = 0$ sein da der Zweite fall unphysikalisch ist.

1.8.6 Reflektierte Welle

Es gibt nochmal die Zwei mmöglichkeiten: $\delta_R = 0$ oder $\delta_R = \pi$

$$A = T \pm R \text{ oder } A = \alpha T \mp R$$

$$R = \pm \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} A \quad T = \frac{2A}{\alpha + 1}$$

Spezialfälle:

- $\alpha = 1 \Rightarrow S_1\delta_1 = S_2\delta_2 \quad R = 0, T = A$
- $\alpha > 1 \Rightarrow \delta_R = \pi$ bei $\alpha \rightarrow \infty$ wird alles reflektiert und nichts transmittiert
- $\alpha < 0 \Rightarrow R \geq 0$ und $\delta_R = 0 \Rightarrow R = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} A, \quad T = \frac{2A}{\alpha + 1}$

1.8.7 Stehende Wellen

Wir haben jetzt in dem Gedanksexperiment 2 laufende Wellen, und zwei Grenzflächen $\Rightarrow \xi = 2A \cos(kx - \frac{\delta_R}{2}) \cos(\omega t - \frac{\delta_R}{2})$
Reflexion am hartem Medium: $\alpha \gg 1, \delta_R = \pi$

$$\xi = 2A \sin(kx) \sin(\omega t)$$

1.8.8 Energieverteilung der Stehende Wellen

Kinetische Energiedichte

$$\frac{dT}{dV} = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\delta \xi}{\delta t} \right)^2 = 2\rho A^2 \omega^2 \sin^2(kx) \cos^2(\omega t)$$

Elastische Energiedichte:

$$\frac{1}{2} E \left(\frac{\delta \xi}{\delta x} \right)^2 = 2EA^2 k^2 \cos^2(kx) \sin^2(\omega t)$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \quad v^2 = \frac{E}{\rho^2}$$

1.8.9 Eigenschwingungen Einer Seite

$\frac{\delta \xi^2}{\delta t^2} = v^2 \frac{\delta^2 \xi}{\delta x^2}$ Und daher $v^2 = \frac{S}{\rho}$ rechnen rechnen rechnen und wir kommen auf:

$$u(x) = u_0 \cos(kx + \phi) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$$

Wo A und B ovm Randbedinugen kommen, (z.B feste Seite: $u(x=0) = u(x=l) = 0$)

1.9 Übungsstunde 2

1.9.1 Polarisation

Wir wissen dass die Ausbreitung einer transversalwelle Senkrecht zur ausbreitungsrichtung Steht. Wir nehmen an die Welle breitet sich in der z richtung aus, dann kann die Auslenkung überall auf der $x-y$ Ebene statt finden.

Eine Welle hesiit linear falls die Ganze AUlenkung nur in eine Ebene Stattfindet. Falls mehrere linear POLarisierte Wellen Überlagert werden, und es zwischen diese Wellen einen Phasenunterschid gibt, dann entsteht eine Elliptisch-Polarisierte Welle

1.9.2 Beispielaufgaben

Angenommen wir haben eune Überlagerung von:

$$y_1(x, t) = 5 \cos(kx - \omega t) \vec{e}_x$$

$$y_2(x, t) = 2 \cos(kx + \omega t) \vec{e}_y$$

Hier ist die resultierende Welle immer noch linear polarisiert. Ich habe viel verpasst, laufende Wellen, Stehende Wellen ist keine losung der Wellengleichung.

1.9.3 Random Facts

Sehr nahr zu einer Kugelwellenquelle ist dies keine ein dimensionale Welle, aber sehr weit, kann man es mit viele punk-tquellen un (eindimensionale quellen)

1.9.4 Kohärenz

Wie lange ist eine Welle peridodisch (in ort und zeit)? Eine glühbirne z.B hat in der langen distanz, hat keine Feste Phasenbeziehung zu bestimmte Zeiten und Orten. Bisher haben wir angenommen dass die Welle unendlich eine sinuswelle. Wir müssen interferenzen messen \rightarrow interferometer. Wir messen dieselbe lichtquelle mit unterschiedliche distanzen am selben punkt, wenn da keine phase ist, dann ist die lichtquelle nicht perfekt. Die Normale interferenz sollte entweder destruktiv oder konstruktiv sein, aber wenn die quelle nicht perfekt, dann ist das ganze nicht perfekt und der maximum ist kleiner als wenn $x_1 = x_2$

1.9.5 Zwei entgegengesetzte wellen

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\xi_1(r, t) = \frac{A}{\sqrt{|r - r_1|}} \cos(k|r - r_1 - \omega t|)$$

$$\xi_1(r, t) = \frac{A}{\sqrt{|r - r_2|}} \cos(k|r - r_2 - \omega t|)$$

Wenn $|r - r_1| - |r - r_2| = n\lambda$ dann ist der interferenz am maximum ($n \in \mathbb{N}$) Die maxima sind dann an den punkte

$$\sqrt{(x+a)^2 + y^2} = n\lambda + \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

Hyperbel schar

1.10 Reflexion+Transmission

Seilwelle mit eine dicke änderung in der mitte, da die welle von der Spannung abhängt und von der seildichte. Daher auch die ausbreitungsgeschwindigkeit. Einlaufende Welle $\xi_A = Ae^{i(kx_1 - \omega t)}$

Reflektierte welle: $\xi_A = Ae^{i(kx_1 - \omega t + \delta_R)}$

Transmittierte welle: $\xi_A = Ae^{i(kx_1 - \omega t + \delta_T)}$

Es müssen folgende sachen Gelten:

$$\lim_{x \rightarrow 0_-} (\xi_A + \xi_R) = \lim_{x \rightarrow x_+} \xi_T$$

Die Vertikale kräfte links und rechts der Grenzfläche müssen gleich sein.

1.10.1 Wiederholung

Sei ein Seil mit eine Grenzfläche wo sich der Seil ändert, dann gibt es eine Einlaufende, Transmittierte und Reflektierte Welle. Man kann folgende gleichung aufstellen:

$$\alpha = \frac{k_2 \cdot S_2}{k_1 \cdot S_1} = \sqrt{\frac{S_2 \cdot \rho_2}{S_1 \cdot \rho_1}} \text{ Wobei } k \text{ der Wellenvektor ist und } S \text{ Die seilspannung ist.}$$

Wir können dann alles in unterschiedliche fälle einschachteln

- $\alpha > 1$ $\delta_R = \pi$, $R = \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \cdot A$, $T = \frac{2A}{\alpha+1}$ und dieser Fall entspricht einen Festen Ende, also es ist wie wenn wir eine Dunne schnur die zu eine sehr dicke schnur geht.
- $\alpha < 1$ $\delta_R = 0$, $R = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \cdot A$, $T = \frac{2A}{1+\alpha}$ Dieser Fall entspricht einem Losen Ende, also wenn die Dicke schnur zu eine Sehr dünne Schnur wird.
- $\alpha = 1$ Dann ist es als ob die schnur gleich geblieben wäre.

1.10.2 Stehende Wellen

Bei einer Stehende Welle gibt es Knoten und bäuche, die Bedingung einer Stehende Welle (im beispiel der Saite)ist $n \frac{\lambda}{2} = l$ für eine länge von l :

$$\lambda_n = \frac{2l}{n} \Rightarrow \omega_n = k_n v = \frac{n\pi}{l} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{S}{\rho}}}_{=v} = n\omega_1$$

1.10.3 Fourier Transformation

Sei eine Welle die als Summe von Sinus und Cosinus Wellen beschrieben werden Kann:

$$f(t) = c_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$$

Hier ist c_0 eine konstante die die Ganze Welle verschiebt:

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

und

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

Experiment Wir wollen eine Perfekte Rechteckwelle herstellen, wir nehmen also eine Grundwelle und legen dazu ihre ungerade harmonischen, mit jeweils kleinere Amplituden, so dass wir dann $\lim_{n \rightarrow \infty}$ eine Perfekte Rechteckwelle bekommen. Mit dieser methode kann man jede Welle herstellen.

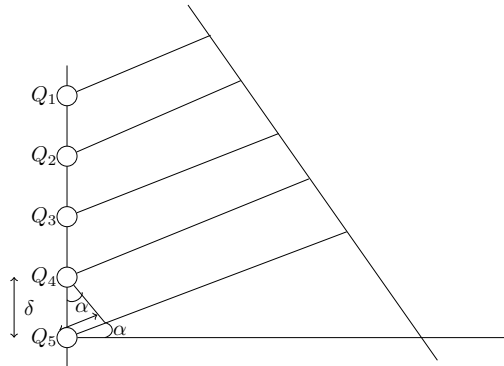
1.11 Beugung, Brechung und Dispersion

Für die Beugung ist das Video von Veritasium sehr gut.

1.11.1 Prinzip von Huygens

Jede Wellenfront ist eine Überlagerung von Kugelwellen. Dieses Prinzip kann erweitert werden:

Wenn z.B. licht in einen Medium eintrifft, dann werden die partikel aufgeregt in dem sie die Photone einnehmen, dann werden sie wieder ausgestrahlt und aus dieser vorstellung dieser Kugelwelle kann man die wellenfront sehr gut approximieren. Im skrip sind dazu sehr hübsche abbildungen (1.38).



Hier kann man also die Phasenverschiebung beschreiben. (N = Anzahl punktquellen und $N = 2M + 1$)

$$\Delta l = k \Delta S = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta S = k \delta \sin(\alpha)$$

UND hier ist aber $\delta \ll r$ wobei r der Abstand zum zuschauer ist. Wir schauen uns also die Überlagerung der Punktquellen am punkt P :

$$\begin{aligned} \xi(\alpha) &= \sum_{n=1}^N \frac{a}{r} e^{i(kr_n - \omega t)} \\ r_n &= r + (M + 1 - n) \Delta S \Rightarrow kr_n = kr + (M + 1) \Delta \varphi - n \Delta l \\ \xi(\alpha) &= \frac{a}{r} e^{i(M+1)\Delta\varphi} \left[\sum_{n=1}^{2M+1} e^{-in\Delta\varphi} \right] e^{i(kr - \omega t)} \\ &\quad \underbrace{\frac{e^{i\Delta\varphi(2M+2)} - e^{i\Delta\varphi}}{e^{-i\Delta\varphi} - 1}} \end{aligned}$$

Kann man das hier vereinfachen:

$$\xi(\alpha) = e^{\frac{i\Delta\varphi}{2}} \cdot e^{i\Delta\varphi(M+1)} \cdot \frac{e^{i\Delta\varphi} - e^{i\Delta\varphi M}}{e^{-\frac{i\Delta\varphi}{2}} - e^{\frac{i\Delta\varphi}{2}}}$$

Und hier alles was übrig bleibt ist

$$e^{i\Delta\varphi(M+1)} \cdot \frac{\sin(N\frac{\Delta\varphi}{2})}{\sin(\frac{\Delta\varphi}{2})}$$

Diese Rechnung ist exact im Limes $n \rightarrow \infty$. Die Amplitude der Welle

$$\xi(\alpha) = \frac{a}{r} \frac{\sin(N\Delta\varphi/2)}{\sin(\Delta\varphi/2)} \cdot e^{i(kr-\omega t)}$$

Und die Intensität gemittelt über ort und Zeit:

$$\langle I \rangle \approx \frac{a^2}{r^2} \cdot \frac{\sin^2(N\Delta\varphi/2)}{\sin^2(\Delta\varphi/2)}$$

1.11.2 Beugung

Wir setzen $N \rightarrow \infty$ und $\delta \rightarrow \infty$ und dazu sagen wir $N \cdot \delta = d = konst$ dann ist:

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow \infty}} \langle I \rangle \approx \lim a^2 \frac{\sin^2(\frac{1}{2}kN\delta \sin(\alpha))}{\sin^2(\frac{1}{2}k\frac{d}{N} \sin(\alpha))}$$

Wir kürzen Weiter mit der Approximation $\sin(x) = x$ für kleine Winkel:

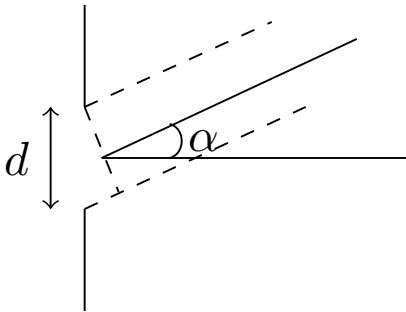
$$\approx \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow \infty}} \frac{\sin^2(\frac{1}{2}kd \sin(\alpha))}{\frac{1}{4N^2}k^2d^2 \sin^2(\alpha)} = \underbrace{(Na)^2}_{=A^2} \frac{\sin^2(\frac{1}{2}\Delta\varphi)}{(\frac{1}{2}\Delta\varphi)^2}$$

Dank dieses $\frac{\sin^2(x)}{x^2}$ haben wir also bei $\frac{1}{2}\Delta\varphi = n \cdot \pi$ nullstellen und je weiter weg man ist, je kleiner die Amplitude. Das alles ist sehr erklärlich mit dem double slit experiment aus der Vorlesung.

Experiment Spalt experiment: Wir haben folgende messungen und werte:

- Spaltbreite d
- Phasenverschiebung $\Delta\varphi = k \cdot d \cdot \sin(\alpha)$ (Hier ist $d \cdot \sin(\alpha)$ die projizierte spaltbreite.)

Wir können also die Beugung am einzelspalt ausrechnen



Und hier kann man die sehr wichtige Eigenschaft der Beugung am einzelspalt klarer sehen:

$$\langle I \rangle \approx A^2 \frac{\sin^2(\frac{1}{2}\Delta\varphi)}{(\frac{1}{2}\Delta\varphi)^2}$$

1.11.3 Reflexion und Brechung

(A la Huygens)

Reflexion: Warum ist die Reflexion nur unter dem selben ausgangswinkel? Es ist eine Frage der Konstruktiven interferenz, alle andere Ausgangswinkel interferieren destruktiv.

Brechung: Die Erklärung ist nicht sehr gut.. aber es gilt für die Brechung und konstante fräquenz ν

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

Der Fermat Prinzip ist simpler und es sagt dass: *Licht sucht sich den Schnellsten Weg.*

1.11.4 Totalreflexion

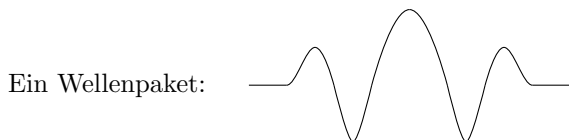
Wir haben unser Brechungsindex $nE \frac{c}{c_i} > 1$ wo c = Lichtgeschwindigkeit und c_i = Lichtgeschwindigkeit im Medium:

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} = \frac{v_1}{v_2} \Rightarrow \sin(\alpha_2) = \underbrace{\frac{c_2}{c_1}}_{>1} \underbrace{\sin(\alpha_1)}_{\leq 1} > 1$$

Und dies kann nie passieren, also es gibt keine Brechung und keine Reflexion, also was ist los? Es gibt keine Transmission aber es gibt ein bisschen Reflexion und das Licht geht auch die Grenzfläche entlang.

1.12 Dispersion und Gruppengeschwindigkeit

v_{ph} : Die Phasengeschwindigkeit ist die Geschwindigkeit mit welcher sich ein Punkt mit konstanter Phase bewegt. In anderen Worten, wenn wir überlagerte Wellen haben, ist die Phasengeschwindigkeit die Geschwindigkeit des Punktes den wir auf der Welle "Fest Machen". und die Gruppengeschwindigkeit, ist die Geschwindigkeit der Knoten, in deren die kleinere Wellen minimieren.



Links sieht man sehr gut wie ein Wellenpaket definiert ist, die Geschwindigkeit des Maximums ist die Gruppengeschwindigkeit, sie geht in der selben Richtung als die Phasengeschwindigkeit ist aber immer kleiner.

Man kann so eine Welle mit folgende Gleichung definieren

$$\xi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk$$

Wobei $A(k)$ die Amplitudenfunktion ist und $\omega(k)$ die sogenannte Dispersion ist.

Wir schauen uns den allgemeinen Fall an wo $k \neq 0$. Wir wählen \varkappa so dass $k_0 - \varkappa \leq k \leq k_0 + \varkappa$ wobei der k_0 bezüglich des "Schwerpunkts" (Maximum) des Wellenpakets. (ich finde λ zwischen zwei Maxima und finde damit k_0). Wir können also folgende Vereinfachung machen:

$$\xi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{k_0 - \varkappa}^{k_0 + \varkappa} A(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\varkappa}^{\varkappa} A(k_0 + \varkappa') e^{i(k_0 + \varkappa')x - \omega(k_0 + \varkappa')t)} d\varkappa'$$

Dass wird mit $\omega = \omega(k)$ um $k = k_0$ herum, also: $\omega(k) = \omega(k_0) + \varkappa' \frac{d\omega}{dk} \big|_{k=k_0}$ und also:

$$\xi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t)} \int_{-\varkappa}^{\varkappa} A(k_0 + \varkappa') e^{i(\varkappa'(x - v_g t))} d\varkappa'$$

Dass Integral ist auch seine eigene Funktion die von k und \varkappa abhängt, diese Funktion nennt man *enveloppe*. Man schreibt also:

$$\xi(x, t) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(kx - \omega(k_0)t)} \cdot G(x - v_g t)$$

wobei $v_g = \frac{d\omega}{dk} \big|_{k=k_0}$ die Gruppengeschwindigkeit ist und $v_{ph} = \frac{\omega}{k}$ die Phasengeschwindigkeit.

Wenn $\frac{d\omega}{dk} = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \omega = v \cdot k$ dann ist $v = v_g = v_{ph}$ und man nennt dass eine Lineare Dispersion, wenn die Frequenz linear vom Wellenvektor abhängt.

Wenn $\frac{dv_p}{dk} < 0$ $\frac{dv_p}{d\lambda} > 0$ ist es die Normale Dispersion.

Wenn $\frac{dv_p}{dk} > 0$ $\frac{dv_p}{d\lambda} < 0$ Heißt es Anormale Dispersion.

Wenn wir Lichtwellen in einem Medium haben dann gibt es ein Brechungsindex (der von der Wellenlänge abhängt) und daher $n = n(\lambda)$ und daher gibt es Dispersion.

1.13 Dopplereffekt

Was hier neu ist, ist dass die Quelle und der Beobachter können sich bewegen.

1.13.1 Beobachter ruht, Quelle bewegt sich

Sagen wir dass der Beobachter die Wellenberge zählt über einen Zeitraum Δt , dann ist die Anzahl Wellenberge $n_\lambda = \nu_Q \Delta t$ man kann auch sagen: $n_\lambda = \nu_Q \Delta t + \frac{v_B \Delta t}{\lambda}$ Also die Frequenz die der Beobachter misst ist:

$$\nu_b = \frac{n_\lambda}{\Delta t} = \nu_Q + \frac{v_Q}{\lambda}$$

1.13.2 Beobachter bewegt, Quelle ruht

Wenn der beobachter sich bewegt, ist die situation gleich, die relative geschwindigkeit ist zu nehmen.

2 Elektrostatik

Hier geht es um ruhende Ladungen.

2.0.1 Elektrische Ladung

- Eine Elektrische ladung ist ähnlich zu einer Masse aber für die Elektrostatik.
- Hier gibt es auch zwei typen von Ladungen; positiv und negativ.
- Es wird im Coulomb gemessen
- Es gilt die Ladungserhaltung für ein geschlossenes system.
- Wenn ein Positives und Negatives teilchen mit der selben Ladung, dann sieht es von aussen als ob es keine Ladung gäbe.
- Ladungen gibt es nur in Diskrete Einheiten $e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$
- Ladungen sind punktquellen

2.0.2 Coulombgesetz

Die Kraft zwischen zwei Ladungen ist wie folgt gegeben:

$$F_{2,1} = k \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{2,1}^2}$$

Wo q_1, q_2 die Ladungen der teilchen ist. Da es kein $-$ vorzeichen gibt, stossen sich zwei ähnlich geladene Teilchen ab. Haben wir viele Ladungen im system, dann ist die Kraft auf dem Teilchen j

$$\vec{F}_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{q_i \cdot q_j}{r_{i,j}^2}$$

2.0.3 Energie einer Ladungsverteilung

$$W = \int_{\infty}^{r_{2,1}} -F_{2,1}(r) d\vec{s}$$

und hier ist auch $d\vec{s} = r_{2,1} dr$ Wenn man also $F_{2,1}$ einsetzt bekommt man:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r} \Big|_{r_{2,1}}^{\infty} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{2,1}}$$

Dies kann man auch auf n Teilchen verallgemeinern in derselben art wie wir die Kraft auf n Teilchen verallgemeinert haben. Und daher auch die Gesamtenergie.

2.0.4 Coulomb konstante vom kristallgitter

Sei ein Kristallgitter, dann ist seine Coulomb Wechselwirkungskraft eine konstante zahl die die Summe der Coulomb kräfte zwischen ein teilchen und alle andere.

2.1 Das elektrische Feld

Das Elektrische Feld Ist gegeben durch die Kraft die eine probeladung spüren wurde am punkt:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}_0) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_i|^3} (\vec{r}_0 - \vec{r}_i) = \frac{\vec{F}_0}{q_0} \\ &= q \vec{E} \quad \vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q} \end{aligned}$$

2.1.1 Feldlinien

Der Elektrische Feld ist ein Vektorfeld, als sind die Feldlinien ähnlich zu der vom Vektorveld

2.1.2 Ladungsverteilungen

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \int_{R^3} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') d\vec{r}'$$

2.2 Das Gaussche Gesetz

Der Fluss $d\Phi = \vec{E} \cdot \vec{da}$ Daher ist der Gesamtfluss

$$\Phi = \int d\Phi = \int_{\partial V} \vec{E} da \Phi = \int d\Phi = \int_{\partial V} \vec{E} \vec{da}$$

Wobei \vec{da} ein infinitesimales flächenvektor. Der Fluss ist die Menge von Feld der durch eine Fläche geht. Feld der durch eine Fläche geht. Für eine Ladungsverteilung ist der fluss gegeben durch:

$$\Phi = \int_{\partial V} \vec{E} \vec{da} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_i = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') d\vec{r}'$$

Man merkt auch die Schreibweise $d\vec{r} = d^3r = dV = dx \cdot dy \cdot dz$

2.2.1 Ladungsverteilung auf einer Kugeloberfläche

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & r < R \\ \rho_0 & r = R \\ 0 & r > 0 \end{cases}$$

Und daher kann man auch

$$q = \int \rho(\vec{r}) d\vec{r} \Rightarrow (\vec{E})(\vec{r}) \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r} & r > R \end{cases}$$

Dasselbe kann man mit einen Zylinder und eine Unendliche fläche Machen. Beispiele Stehen im skript.

2.3 Die Energie Des Feldes

Fur eine Kugelaschale gilt:

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi R^2 d} & R < r < R + d \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Feld ausserhalb ist wie ein Feld von einer Punktquelle:

2.3.1 Druck

$$p = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}} = \frac{dqE(\vec{r})}{dA} = E_{Aus} \cdot \frac{q}{4\pi R^2 d} \int_0^d \frac{r}{d} dr = \varepsilon_0 \cdot E_{Aus}^2 \frac{1}{2}$$

Und dann die Energiedichte $u = p = \frac{dW}{dV}$ und $u = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2$ Daher

$$U = \int_V \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 dV$$

2.3.2 Das Elektrische Potential

Wir gehen wie mit der Gravitation, vom Punkt a zum punkt b und dann ist die Arbeit

$$W_{ba} = - \int_b^a q \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Und dann geht auch:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Also hier ist der Potentialdifferenz (was später mit Spannung zu tun hat)

$$\phi_{ba} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

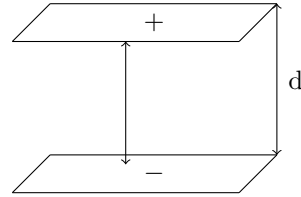
$$\text{grad}(\phi) \Rightarrow \vec{\nabla} d\vec{s} = d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Die Ladung und der Potential mehrere Teilchen, ist analog aber als summe über n Ladungen definiert.

2.3.3 Potentiale Einfacher Ladungsverteilung

Der Einfachste teil ist der Platten condensator

$\phi_{ba} = \int_a^b \vec{E} ds = E(z_b) - z_a = E\Delta z$
 Und dann ist die Energie $W_{ba} = q_0 E \Delta z$



2.3.4 Potential einer Punktladung

Wir haben eine Punktladung $\phi_{ba} = - \int_a^b \vec{E} ds$ wobei

$$\vec{E} d\vec{s} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \dots$$

Und dann ist der Potential unterschied

$$\phi_{ba} = \phi(b) - \phi(a) = \phi_r(r_0) - 0 = - \int_{\infty}^{r_0} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_{r_0}^{\infty} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

2.3.5 Potential einer Geladenen Scheibe

Wir Haben jetzt eine Scheibe, der Potential vom Feld dieser Geladenen SCheibe ist

2.4 Der Satz von gauss

Sei $F(\vec{r})$ ein Vektor feld, dann ist

$$\text{div} \vec{F}(\vec{r}) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_{\partial V} \vec{F} d\vec{a}$$

Und

$$\Phi = \int_{\partial} \vec{F} d\vec{a}$$

Dies heisst dass wenn wir zwei kleine Volumen, dann ist der fluss auf der Grenzseite von 1 nach 2 gleich - der Fluss von der Grenzfläche von 2 nach 1. Also wir konnen:

$$\Phi = \sum_i \int_{\partial V_i} \vec{F} d\vec{a} = \sum_i V_i \int_{\partial V_i} \frac{\vec{F} d\vec{a}}{V_i}$$

Und da $\int_{\partial V} \vec{F} d\vec{a} = \int_V \text{div}(\vec{F} dV)$ Gilt:

$$\Phi = \int_{\partial V} \vec{E} d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon} \int_V \rho dV = \int_V \text{div} \vec{E} dV$$

Und dann kommt die erste Maxwell gleichung:

$$\text{div}(\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0})$$

Physikalish heisst dies das ladungen siend die Quellen der Elektrischen Felder

2.5 Das Laplace Operator

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla} \Phi \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned} \right\} \Delta \Phi = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \Phi = \vec{\nabla} \cdot (-\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

2.6 Der Satz von Stokes

Sei $C = \int_{\partial A} \vec{F} d\vec{s}$ ein Linienintegral dann ist $c = \sum A_i \int_{\partial A} \frac{\vec{F} \cdot d\vec{s}}{\dots}$ Jai pas abschrieben (deux denieres minutes du vours)

3 Elektrische Leiter

Da der Unterschied zwischen die Leitfähigkeit vom Isolator und die vom Leiter, isit in der nähe von 10^{20} Daher schauen wir uns den Fall Leitfähigkeit für Leiter = ∞ / im isolator = 0

Im Leiter, ist der Elektrische Feld 0, die ladungen Arrangieren sich so dass ihr Feld, wenn summiert mit dem externen Feld null ist, und beim isolator gibt es keine Freie Ladungen.

Experiment Der elektrische Feld ist an einer Spitze sehr gekrümmt, deswegen bricht es zu einer Spitze viel einfacher

3.1 Leiter

Hier ist das Elektrische Potential konstant ϕ konstant innerhalb vom Leiter. Die Oberfläche ist eine äquipotential Fläche. Daher steht das Elektrische Feld Senkrecht zur Leiteroberfläche. Der Leiter hat also eine Oberflächenladungsdichte σ . Also je kleiner der Krümmungsradius, desto grösser σ .

3.1.1 Beispiel der Geladene Kugeln

Beide Kugeln haben die Felder

$$\phi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i}$$

Jetzt verbinden wir die zwei Kugeln so dass ihr Potential gleich wird:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2}$$

Und Alles kurzt sich auf:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

3.2 Das Allgemeine Elektrostatische Problem

Leiter Seien im Vakuum und haben keine Ladung $\Rightarrow \Delta\phi = 0$. Wir haben also folgende (Neumann) Randbedingungen:

- ϕ_k ist für alle Leiter definiert (Dirichlet Randbedingung)
- Q_k ist definiert (Neumann Randbedingung)
- Eine Mischung aus ϕ_k und Q_k ist bekannt

3.2.1 Influenz

Ladungen im Leiter verschieben sich im externen Elektrischen Feld, aber nur Ladungen auf der Oberfläche

$$\int \sigma_{\text{ind}} da = 0 = \text{Gesamtladung}$$

3.2.2 Der Eindeutigkeitssatz

Wir haben eine gegebene Menge von Randbedingungen, dann gibt es nur eine Lösung für $\phi(\vec{r})$ und für $\vec{E}(\vec{r})$.

3.2.3 Faraday'sche Käfige

Wir haben eine hohle Leiterstruktur, dann haben wir keine Ladung im Hohlraum, da es kein Feld im Leiter gibt, daher auch im Hohlraum auch nicht. Es können keine elektrischen Felder von draussen hereindringen. $\int \vec{E} d\vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{E} = 0$

3.2.4 Spiegelladungen

Was ist der elektrische Feld zweier Punktladungen

3.2.5 Dipole

Ein Dipol

$$\phi(r) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$
$$r_i^2 = \frac{l^2}{4} + r^2 -$$

mit der Näherung $l \ll r$ bekommt man $r_1 \approx r^2 + lr \cos(\theta)$

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{l}{r} \cos(\theta) - \left(1 + \frac{l}{2r} \cos(\theta) \right) \right] = -\frac{l}{r^2} \cos(\theta)$$

Und dann ist der Potential

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{ql}{r^2} \cos(\theta)$$

Und dann ist

$$q \cdot l = p \text{ Dipolmoment}$$

Dass elektrische Feld kann man mit $\vec{E} = -\text{grad}(\phi)$

$$= \frac{\partial\phi}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \vec{e}_\theta$$
$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2p}{r^3}$$
$$E_\theta = \frac{p \sin(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

3.2.6 Letifähige kugel im homogenen Elektrischen Feld

Die Ladungen in der Kugel werden sich in der Kugel so arrangieren so dass in der Kugel kein Feld ist. Wir können die Ladungen in dieser Kugel als viele Dipole vereinfachen. Wir können auch schreiben: $E_{ext} = E_0 \vec{e}_z$ Und dann lässt sich der Potential als Funktion schreiben $\phi(r, \theta, \varphi) = E_0 r \cos(\theta)$. Hiermit kann man also die vielen Ladungen als Dipole behandeln und damit der Gesamtfeld ausrechnen mit der Hilfe von wie es aussieht.

3.3 Kondensator

Wir haben ein Leiter mit Potential $\phi_1 \neq 0$ und dann ist seine Ladung $Q = C\phi$ wobei C die Kapazität ist.

3.3.1 Plattenkondensator

Wir haben zwei parallele Platten mit Abstand d und Fläche $A \gg d$. Der elektrische Feld $E = \frac{V}{d}$ und die Ladungsdichte pro Fläche ist $\delta = \epsilon_1 \cdot E = \epsilon \frac{V}{d}$. Also ist die Gesamtladung $Q = A\delta = \frac{A\epsilon}{d}V$ und wir bekommen $C = \frac{A\epsilon}{d}$.

3.3.2 Gespeicherte Energie

Sage wir bringen eine Ladung dQ auf dem Kondensator, die Energie die wir gebraucht haben um diese Ladung dort zu bringen ist

$$dW = \int \vec{F} d\vec{s} = \int dQ \cdot \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int dQ \frac{V}{d} \cdot ds = dQ \frac{V}{d} \int ds = V \cdot dQ$$
$$dW = \phi dQ = \frac{Q}{C} dQ$$

Eine große Ladung Q wird von einer Platte zum anderen transportiert.

$$W = \frac{1}{C} \int_0^Q Q' dQ = \frac{Q^2}{2C}$$

Was ist denn die Gebrauchte Energie für $Q = e$ (Wir nehmen $C = 1nF$ an) Dann kommt $W = 10^{-5} eV$ oder null, da diese Energie so klein.

Die Ionisierungsenergie vom Wasserstoff atom kann man mit dieser Kapazität Formel rechnen!

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{C}{2} V^2 = \frac{Q}{2} V$$

3.3.3 Parallel und Serien Schaltung von Kapazitäten

In parallel, müssen alle Obere Platten den selben Potenzial haben, gleichfalls für die untere Platten.

$$Q = (v_1 - v_2) \sum C_i = C(V_1 - V_2) \Rightarrow C = \sum C_i$$

Also die Kapazität ist einfach die Summe aller Kapazitäten

Jetzt Schalten wir alle unser Kondensatoren in Serie:

$$V_1 - V_{n+1} = (V_1 - V_2) + (V_2 - V_3) + \dots + (V_n - V_{n+1}) \Rightarrow Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n \Rightarrow C = \frac{1}{\sum \frac{1}{C_i}}$$

3.3.4 Allgemeine Kondensator-Systeme

Wir haben einen Rahmen der Potential $\phi = 0$ definiert. Wir haben im Rahmen eine Insel mit Ladung Q_1 und eine andere mit Q_2 und Q_3 usw. Ich lege das Potential ϕ_1 auf Insel eins. dann ist ihre Ladung: $Q_1 = C_{11}\phi_1$ Dann bekommen alle andere Inseln $Q_k = C_{k1}\phi_1$ Also im allgemeinen sagen wir:

$$Q_j = C_{ij}\phi_i \quad Q = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_k \end{pmatrix} \quad \phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_k \end{pmatrix}$$

Und die Kapazität ist eine Matrix $k \times k$

4 Elektrische ströme

Die idee ist, z.B. Wir haben einen Zylinder und innen fließen Ladungen. Wir definieren die Stromstärke:

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

die mittlere drift geschwindigkeit \bar{v} Die Elektronen werden auf einer seite beschleunigt und auf der andere werden sie abgebremst von Störungen im Kristallgitter, Gitterschwingungen. Das heisst die Elektronen geben energie ab und bekommen energie vom elektrischen Feld. Für die Stromstärke gilt ΔN die Zahl der Ladungsträger ist, A die Querschnittsfläche ist:

$$\frac{dQ}{dt} = q \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = nA\bar{v}q$$

4.0.1 Stromdichte

Die Stromdichte ist der Strom pro fläche:

$$\vec{J} = nq\vec{v}$$

Also ist der Strom $I_A = \vec{J} \cdot \vec{A} = J \cdot A \cos(\theta)$ Also ist die Stromdichte wie folgt definiert:

$$|\vec{J}| = \frac{I}{A \cos(\theta)}$$

Die Stromdichte ist eine Grösse mit einer Richtung und intensität, diese Grösse ist also relevanter als der Strom (meistens). Seien mehrere teilchen, dann ist die stromdichte:

$$\vec{J} = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i \Rightarrow I_A = \int \vec{J} d\vec{a} = \sum \lambda_i q_i \bar{v}_i \text{ alle parallel also kein vektorpfeil auf } v$$

4.0.2 Driftgeschwindigkeit

Die ladungsträgerdichte ist: $n = \frac{\rho_{NA}}{M} = 8 \cdot 10^{23} \text{ cm}^{-3}$ Dann ist also:

$$|\vec{v}| = \frac{1}{neA} = \frac{IM}{\rho N_A e A} \approx 6 \frac{m}{\text{tag}}$$

4.0.3 Driftmodell

Was ist denn mit der mittleren geschwindigkeit? Der modell von Drift ist wie folgt:

$$m\dot{v} = ma = -e|\vec{E}|$$

Wir haben aber eine Dämpfung im system (sonst explodiert die energie im system nach unsere differentialgleichung)

$$m\dot{v} + \frac{m}{\tau}v_D = -e|\vec{E}|$$

Wobei τ der Energieverlust ist. Der stationäre Zustand ist $\dot{v} = 0$

$$\vec{v}_D = \frac{-e}{m}\tau\vec{E}$$

Dieser τ ist in der grössenordnung von milisekunden, also geben ladungsträger ihre ladungen sehr schnell ab sobald sie beschleunigt werden. Dies ist der Grund für den Joule effekt

4.0.4 Ladungserhaltung

Wir haben hier eine fläche und wir rechnen den Strom durch diese fläche:

$$I_{\partial V} = - \int_V \frac{d\rho}{dt} dV$$

Denn kann man aber auch mit

$$I_{\partial V} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} dV$$

Also bekommen wir daraus die Kontinuitätsgleichung die wir auch aus der Maxwellgleichung herleiten können:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = - \frac{d\rho(\vec{r})}{dt}$$

Die divergenz von \vec{J} hat mit der Quellene des Vektorfelds zu tun, also ist es null ist die dichte linear und es gibt weder Quelle noch senkloch

4.0.5 Das Gesetz von Ohm

Wenn wir ein geschlossenes Leiter mit einer Spannungsquelle haben, dann können wir dank der Nicht-Konservativität der Spannungsquelle (z.B. Batterie Chemie \Rightarrow Spannung aber nicht andersherum) folgende Gleichung setzen

$$\oint \vec{E} d\vec{s} \neq 0$$

Von der Stromdichte kann man zurück zum elektrischen Feld zurück:

$$\vec{J}_i = \sigma \cdot \vec{E} \quad \sigma \text{ ist hier die Leitfähigkeit}$$

4.0.6 Widerstand eines Schaltelements

Die Gleichung vorher ist äquivalent zu:

$$R = \frac{V}{I}$$

Und wir können dann setzen dass:

$$I = JA \quad V = E \cdot l \quad R = \rho \frac{l}{A} = \frac{l}{A} \frac{1}{\sigma}$$

Der Unterschied zwischen Widerstand und Leitfähigkeit ist dass der Widerstand konstant ist wenn die Leitfähigkeit mikroskopisch ist und daher auch nicht konstant??

4.0.7 Schaltkreise mit diskreten Komponenten

Wenn wir viele Widerstände haben, die alle in Serie sind, dann gilt $v_i = R_i I_i$. Zusätzlich gilt es dass von jedem Knoten ausgehen ist die Summe aller Ströme null: $\sum I_i = 0$. Dies gilt da es sonst die Kontinuitätsgleichung nicht erfüllt weil wenn die Summe nicht null wäre, dann hätte der Knoten einen Ladungszufluss/-verlust. Zum Schluss, gilt auch dass wenn wir ein mal im Kreis gehen, dann ist die Summe aller Spannungen $= 0$ $\sum V_i = 0$

Nach dem Ohm'schen Gesetz ist auch klar dass die Gesamtspannung die Summe der einzigen Spannungen um jeden Widerstand ist, daher kann man einfach die Serienschaltung zweier Widerstände als die Summe der Widerstände rechnen. Analog kann man von der zweiten obigen Regel finden dass die Parallelschaltung zweier Widerstände einfach durch einen Widerstand der durch der inverse der Summe der Inversen definiert ist:

$$\begin{cases} \text{Serienschaltung:} & R_{tot} = \sum R_i \\ \text{Parallelschaltung:} & R_{tot} = \frac{1}{\sum \frac{1}{R_i}} \end{cases}$$

4.0.8 Energieumwandlung in Widerständen

Die Leistung ist $P = \frac{dW}{dt} = \dot{Q}V = IV$ und also ist die Leistung:

$$P = IV = I^2 R = \frac{V^2}{R}$$

4.0.9 Der Innenwiderstand

Wenn wir einfach eine Spannungsquelle auf einen Widerstand stellen, und dann den Widerstand R gegen 0 gehen lassen. Dann wäre theoretisch der Strom unendlich, anstatt hat die Spannungsquelle ein inneres Widerstand der immer grösser ist als die äussere Widerstände die angeschlossen sind, sonst liefert die Quelle ihre Spannung nicht mehr (sonst wäre $I \rightarrow \infty$)

4.1 Schaltkreise mit Kondensatoren

Wir nehmen zuerst einen Schaltkreis mit einer Kondensator, einem Widerstand und einem Kondensator, jetzt hängt der Strom von der Zeit ab.

RC Schaltkreis

Entlang des Kondensators gilt $\frac{dQ}{dt} = I(t)$ und die Kirchhoff Regel gilt für die Schleife: $IR + \frac{Q}{C} = 0$. Hieraus kann man die Differentialgleichung:

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

lösen und man findet die Ladung des Kondensators:

$$Q(t) = A e^{-\frac{t}{RC}}$$

Wobei wir die Zeitkonstante $\tau = RC$ definieren. Die umgewandelte Energie vom Widerstand ist

$$W = \frac{1}{2} C V_0^2$$

und der Ladestrom ist

$$I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

4.2 Recap Elektrische ströme

- Strom: $I = \frac{dQ}{dt}$, $[I] = A = \frac{C}{s}$
- Stromdichte: $J = \frac{nq\bar{v}}{A}$ und $I = \vec{j} \cdot \vec{A}$
- Kontinuitätsgleichung: $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{d\rho}{dt}$ Dies besagt dass alle ladungen die aus ein systemfliessen, verschwinden nicht einfach. Wenn die ladungsdichte konstant ist dann fliesst soviel aus wie rein.
- Für reale leiter gilt dass wenn wir strom durch ein Leiter senden dann verlieren wir energie, diese beziehung zwischen die material eigenschaft ist dass $\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$ Dieses Sigma ist die Leitfähigkeit. Der spezifische Widerstand ist $\rho = \frac{1}{\sigma}$
- Diese Leitfähigkeit kann macroscopish mit $U = RI$ definiert sein wobei R der Widerstand ist

5 Relativitätstheorie

Galilei hat sich überlegt dass Zeit und Raum isotrop sind, also dass Zeit und Raum sind absolut, dass es ein Zentrum von welchen man alles messen kann, irgendwo im universum gibt es eine Absolute uhr die die Zeit definiert. Mit diesen prinzipien kann man schon viel herausfinden und ausrechnen. Also bis Galilei gilt dass alle Intertialsysteme sind äquivalent, und dies ist sogar nach einstein geblieben.

5.1 Galilei Transformationen

Diese Galilei Transformation schreibe ich nicht im detail ab, ich schreibe Aber die konventionen ab.

5.2 Grundlagen der Speziellen Relativitätstheorie

Sei K und K' inertialsysteme, die begründung für ein Intertialsystem bleibt unverändert. Jetzt sagen wir dass alle Naturgesetze in alle Inertialsysteme stimmen überein, die Lichtgeschwindigkeit ist eine Konstante für alle Inertialsysteme eine konstante die wie Folgt definiert

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}} = 299'792'458[m \cdot s^{-1}]$$

5.3 Uhren und Massstäbe

Sei einen Sender und einen Spiegel, der sender Schickt ein lichtstrahl ab, der Spiegel reflektiert und der sender empfängt den. Was ist jetzt Δt zwisch absendezeit und empfangzeit in unterschiedliche Inertialsysteme. Im ruhenden System K' ist $\Delta t = \frac{l}{c} \cdot 2$. Jetzt stehen wir neben ein Wagen mit konstanter geschwindigkeit v und schauen auf demselben experiment der jetzt von uns ausgesehen nicht ruhen ist. Jetzt ist der neue $(c \cdot \Delta t)^2 = (v\Delta t)^2 \Rightarrow \Delta t = \frac{2l}{c\sqrt{1-\beta^2}}$ da der Wagen auch eine Distanz zurucklegt was die distanz vom licht länger macht. Wir finden also dass:

$$\frac{\Delta t}{\Delta t'} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} \quad (\beta = \frac{v}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \geq 1)$$

Also von aussen gesehen geht die Zeit schneller vorbei: $\Delta t = \gamma \Delta t'$

5.3.1 Lorenzkontraktion

Also jetzt machen wir denselben experiment, aber sodass dass licht in geschwidikeitrichtung strahlt, so dass wir die Distanz messen können, wir senden den Lichtstrahl aus un messen diesmal die zeit vom inertialsystem selber und von aussen. Auf dem Wagen gilt:

$$\Delta t' = \frac{2l'}{c}$$

und von aussen gesehen gilt:

$$\Delta t = \frac{l}{c-v} = \frac{2l}{c} \gamma^2 = 2l\gamma$$

Also von aussengesehen würde man sagen dass der Wagen kürzer: $l' = \gamma l$

5.4 Höhestrahlung

Es gibt mehrere Elementarteilchen: e^-, p, n, μ . Der letzte, der Muon, hat eine Lebensdauer von $2\mu s$. Wenn die mit der Lichtgeschwindigkeit gehen und die an der Atmosphäreoberfläche erzeugt werden. Dann brauchen sie c.a. 70 Lebensdauer um bis zur Erdoberfläche anzukommen. Die Muonen haben doch eine sehr schnelle Geschwindigkeit und daher auch ein grosses $\beta = 0.99998$ und daher $\gamma \approx 70$ daher ist im System des Muons als ob die Erde sich auf ihr mit fast Lichtgeschwindigkeit auf sich her bewegt, und daher ist die Distanz die der Muon hinterlegen muss, c.a. 70 mal kleiner. Aus unserer Sicht, bewegt sich der Muon sehr schnell also von unserem System aus gesehen ist ihre Zeit viel langsamer und es hat also eine Lebensdauer die 70 mal grösser scheint, daher kann man Muon auf der Erdoberfläche sehen und messen.

5.4.1 Spezielle Relativitätsprinzip

Wir suchen jetzt eine Grösse die unabhängig die Unabhängig von der Wahl des Inertialsystems ist. Sei eine punktförmige Lichtquelle, wenn diese sich bewegt, dann ist ihre hintergelassene Wellenform ausgezogen. Wir wissen jetzt aber dass diese punktförmige Lichtquelle unabhängig vom Inertialsystem ist.

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 = c^2 t^2$$

Wir hätten aber gern dass diese Punktförmige Form invariant ist und immer eine Punktförmige bleibt. Bei Galilei würde man dass wie folgt rechnen:

$$\left. \begin{aligned} ct &= ct' \\ x &= x' \\ y &= y' \\ z &= z' + \beta ct' \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + (z' + \beta ct')^2 = c^2 t'^2$$

$$\Rightarrow x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 - \left[2\beta z' ct' + \underbrace{\beta^2 c^2 t'^2}_{\neq 0} \right]$$

Also wenn die Kugelwelle schnell geht dann ist ihre Ausbreitung nicht mehr kugelförmig.

5.4.2 Lorentz-Transformation

Wir schauen uns jetzt die Transformation an die wie folgt definiert ist:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(t - \frac{v}{c^2}z) \\ x \\ y \\ \gamma(z - vt) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(t' - \frac{v}{c^2}z') \\ x' \\ y' \\ \gamma(z' + vt') \end{pmatrix}$$

Wir haben mit dieser Transformation alle nötigen Informationen um dieselbe Information wie vorher zu rechnen, $x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2$ ist also die Kugelwelle und unter der Transformation gilt:

$$x'^2 + y'^2 + \gamma^2(z' + vt')^2 = c^2 \gamma^2 \left(t' + \frac{v}{c^2} z' \right)^2 \Rightarrow x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 \gamma^2 \left(t'^2 + 2 \frac{v}{c^2} t' z' + \frac{v^2}{c^4} z'^2 \right) - \gamma^2 (z'^2 + 2 z' v t' + v^2 t'^2) + z'^2$$

Was äquivalent ist zu:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \underbrace{t'^2 (c^2 \gamma^2 - \gamma^2 v^2)}_{i.} + \underbrace{z' t' [c^2 \gamma^2 2 \frac{v}{c^2} - 2 \gamma^2 v]}_{ii.} + \underbrace{z'^2 [c^2 \gamma^2 \frac{v^2}{c^4} - \gamma^2 + 1]}_{iii.}$$

Wir untersuchen jetzt Teile i., ii. und iii.

$$(i. :) \quad \gamma^2 (c^2 - v^2) = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} (c^2 - v^2) = \frac{c^2 (c^2 - v^2)}{c^2 - v^2} = c^2$$

$$(ii. :) \quad c^2 \gamma^2 2 \frac{v}{c^2} - 2 \gamma^2 v = 2 \gamma^2 [v - v] = 0$$

$$(iii. :) \quad c^2 \gamma^2 \frac{v^2}{c^4} - \gamma^2 + 1 = 0$$

Also dann bleibt nur noch:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2$$

Und in beide Systeme ist diese Kugelwelle eine Kugelwelle.

5.5 Addition von Parallelen Geschwindigkeiten

Wir erwarten vom ergebnis dass, sei \vec{v} die Relativgeschwindigkeit der zwei systeme, dann sollte gelten dass die Addition von $(u \ll c) + (v \ll c) = u + v$, wie dass der Newton beschrieben hat. Aber wenn wir $(u \approx c) + (v \approx c) \approx c$

5.5.1 Lorentz transformation für Geschwindigkeiten

Wir wissen wie die Spezielle Relativität die Zeit und distanz ändert, wie sieht es für geschwindigkeiten aus.

$$z' = \gamma(z - vt) \Rightarrow dz' = \gamma(dz - vdt) \quad \text{und} \quad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}z\right) \Rightarrow dt' = \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dz\right)$$

Wir brauchen für die Geschwindigkeiten $\frac{dz}{dt} = u$ und $\frac{dz'}{dt'} = u'$:

$$\frac{dz'}{dt} = \frac{dz - vdt}{dt - \frac{v}{c^2}dz} = \frac{\frac{dz}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dz}{dt}}$$

Und wir bekommen also die additionsformel für relativistische geschwindigkeiten:

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{v}{c^2}u}$$

Diese Formel passt unsere Vorher da wenn $u \approx c$ dann ist $u' = \frac{c-v}{1-\frac{v}{c}} = c$

5.6 Gleichzeitigkeit

Sei einen Laser der auf einen Prisma strahlt und dann in zwei geteilt wird, nach link und nach rechts wo sich jeweils detektor finden so dass die distanz zwischen prisma und detector l ist. Dann würden sich die detektor beide gleichzeitig einschalten Wenn wir jetzt aber in einem konstant beschleunigten Inertialsystem K' sind der sich entlang l mit der Geschwindigkeit bewegt:

$$x_1^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_2^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ -l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Und in diesem Fall heisst gleichzeitigkeit $t_1 = t_2 = t$. Im bewegten koordinatensystem K' benutzt man die Lorentz transformation und findet:

$$ct'_1 = \gamma(ct - \beta x_1) = \gamma(ct - \beta l) \quad \text{und} \quad ct'_2 = \gamma(ct + \beta l)$$

Dann ist die Zeit differenz $\Delta t' = \frac{1}{c}(ct'_2 - ct'_1) = \frac{1}{c}\{\gamma(ct + \beta l) - \gamma(ct - \beta l)\} = \frac{1}{c}2\beta\gamma l \neq 0$ Und hier gibt es einen Zeit unterschied, die Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse ist Systemabhängig und der Zeitunterschied zwischen dieser Ereignisse hängt von der geschwindigkeit.

5.6.1 Invarianz des Raum zeit intervalls

Wir wissen ja schon dass bei Galilei, die Räumliche entfernung von Punkten durch $\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ definiert ist. Doch bei der Relativitätstheorie, haben wir dann einen Tensor mit eine Extra räumlich variable ct die die Zeit Charakterisiert:

$$x_1^\mu = \begin{pmatrix} ct'_1 \\ x'_1 \\ y'_1 \\ z'_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_2^\mu = \begin{pmatrix} ct'_2 \\ x'_2 \\ y'_2 \\ z'_2 \end{pmatrix}$$

Wir rechnen dann die Räumliche distanz:

$$\Delta z' = z'_1 - z'_2 = \gamma(z'_2 - \beta ct_2) - \gamma(z_1 - \beta ct_1) = \gamma(z_2 - z_1) - \beta\gamma(ct_2 - ct_1) = \gamma(\Delta z - \beta c\Delta t)$$

Also die Distanz zwischen zwei punkten ist keine Absolute Grösse, es hängt vom Δt ab, im 4er Vektor kann man es wie Folgt schreiben:

$$\begin{pmatrix} \Delta ct' \\ \Delta x' \\ \Delta y' \\ \Delta z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(c\Delta t - \beta\Delta z) \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \gamma(\Delta z - \beta c\Delta t) \end{pmatrix}$$

Also ist $\Delta t \neq \Delta t'$, $\Delta z \neq \Delta z'$ und $\Delta r \neq \Delta r'$ Wir können jedoch den Raumzeit intervall anschauen: $\Delta s^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta r^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$ hier kann man auch ähnlichkeiten zur Punktquelle der Welle die wir zuvor betrachtet haben, wo der Quadrat der Entfernung durch die Differenz de Quadraten vom Zeitunterschied und vom Räumlichen unterschied ist. Diese Grösse ist Lorentz invariant, wenn ich also zwei punkte im vierdimensionalen Raumzeit, dann ist dieses Raumzeitintervall Lorentz invariant.

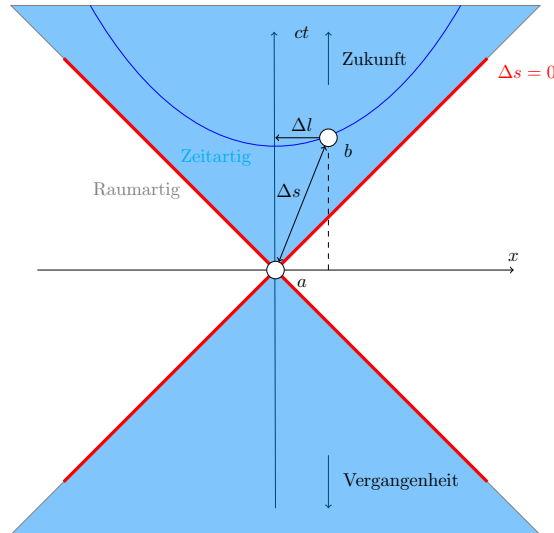
Eigenzeit und Minkowski Diagramme

$$\Delta s^2 = \Delta x^\mu \Delta x_\mu = \Delta x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu$$

Ist die Lorentz transformation. (Wenn wir zwei indizes vorkommen dann ist es die summe der elemente:

$$\Delta s^2 = (ct)^2 - \Delta x_1^2 - \Delta x_2^2 - \Delta x_3^2$$

Für die Eigenzeit Gucken wir uns zwei systeme die mit einer Geschwindigkeit $\vec{v} = v\vec{e}_x$ und wir untersuchen die Zeit von einem Teilchen von unterschiedliche Koordinatensysteme an:



Die Blaue Parabel ist eine Parabel wo alle Punkte dasselbe Δs besitzen, die wird sich bei kleineren Δs auf die diagonalen verbreiten. Wenn ich die Zeit und ort in unterschiedliche Koordinaten system anschau dann ist es diese Parabel für ein fixes Δs . Wir wissen dass $\Delta s^2 = (ct)^2 + x^2$ (wir setzen $y = z = 0$ für die simplizität aber es muss nicht der Fall sein) Wenn beim punkt a $x_a = 0$ und $ct_a = 0$ dann ist $\Delta s^2 = 0$, Wenn ich jetzt zum punkt b gehe, dann muss immer noch gelten dass $(ct_b)^2 = x_b^2$. Also der Photon kann auf dieser roten Diagonale sein. Wenn ein Teilchen oder punkt langsamer als die Lichtgeschwindigkeit geht, dann kann sie nur im Vorderen oder im Hinteren Kegel sein. Alle ereignisse passieren in diesem Kegel. Das blaue teil nennt man also Zeitartig und den Rest mit $\Delta s^2 < 0$ ist Raumartig. Die Raumartigen teilchen kann es geben, wir können aber nie mit denen Kommunizieren oder information austauschen. Es ist auch wichtig zu erläutern dass diese Zeit-Ort diagramm nur für dass Ereignis a gilt, jede Raumzeit hat ihre eigen Menge an Ereignisse mit der sie kommunizieren kann.

Zeitartigkeit

Wenn was Zeitartig ist, dann gilt:

$$\Delta s^2 > 0 \quad \Delta s^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = (c\Delta t)^2 - \Delta l^2$$

Wir schauen uns jetzt an wann dass Δt minimal wird, dies Passiert wenn $\Delta l = 0$ und dan ist der Δt die Eigenzeit. Diese zeit ist die Zeit im eigensystem von a

Raumartigkeit

Das ganze gilt natürlich auch bei Raumartigkeit:

$$\Delta s^2 < 0 \Rightarrow (c\Delta t)^2 - \Delta l^2 < 0 \Rightarrow \Delta l = \sqrt{(c\Delta t)^2 - \Delta s^2}$$

Und daher bei gleichzeitigkeit, $(c\Delta t)^2 = 0 \Rightarrow \Delta l = \sqrt{-\Delta s^2}$

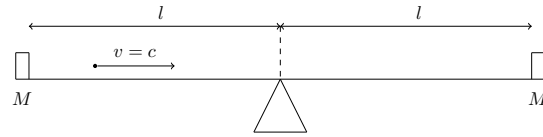
Lichtkegel

auf dem Lichtkegel gilt $\Delta s^2 = 0$ und dort gilt auch $(c\Delta t)^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$

Energie Impuls und Masse

Äquivalenz von Masse und Energie

Wir machen hier ein Gedankenexperiment, Sei wir haben einen Wagen, welches genau in der Mitte auf eine Spitze balanciert ist. Was hier links zu sehen ist



Dann Schicken wir aus der Linken seite einen Photon, daher gibt es einen Impuls mit eine Verschwindende Kleine Masse ($= 0$). Ist dann der Wagen immer noch im gleichgewicht? Wir finden dass $\Delta t = \frac{l}{c}$ die Laufzeit des Photons ist. Wir sagen jetzt $E = p \cdot c$ was die Energie-Impuls beziehung des Photons ist. Der Gesamtsystem muss impulserhaltung haben, daher, während der Laufzeit, muss sich der Wagen mit $2Mv = p$ wo $2M$ die masse des systems ist: $v = \frac{p}{2M} = \frac{E}{2Mc}$ Jetzt schauen wir uns an was dies für die hinterlegt strecke des Wagens während der Laufzeit des Photons bedeutet

$$s = v\Delta t = \frac{E}{2Mc} \cdot \frac{l}{c} = \frac{E}{2Mc^2}l$$

Der Rohr hat sich also um eine Distanz s verschoben aber ist nicht aus dem gleichgewicht gekommen da es keine Kräfte von aussen gibt, daher muss die massenverteilung anders sein. Was hier Passiert ist dass der Photon keine Masse hat, aber energie, also gibt den Photon seine Energie als mass ab. Hier ist also das Gleichgewicht nach der übertragung:

$$\left(\frac{l}{2} + s\right)(M - m) = \left(\frac{l}{2} - s\right)(M + m) \implies 2sM = lm$$

$$\implies \boxed{E = mc^2}$$

Vierergeschwindigkeit

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \left(\frac{d(ct)}{d\tau}, \frac{d\vec{r}}{d\tau}\right)$$

Wobei $dt = -\gamma d\tau$ und τ die Eigenzeit ist.

Geschwindigkeit im Bewegten system

$$\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{=\vec{v}} \cdot \underbrace{\frac{dt}{d\tau}}_{=\gamma} = c\gamma\vec{\beta} \quad \vec{\beta} = \frac{1}{c}\vec{v}$$

Energie und Impuls eines Massenpunktes

Wir nehmen den Impuls auch als Vierervektor:

$$p^\mu = \begin{pmatrix} m\gamma c \\ m\vec{\beta}\gamma c \end{pmatrix} = mu^\mu$$

wir setzen $\beta \rightarrow 0$ und $\gamma \rightarrow 1$:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} p^\mu = \begin{pmatrix} mc \\ m\vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0 \\ \vec{p} \end{pmatrix}$$

Am ende finden wir:

$$\vec{p} = m\vec{v}\gamma = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$E^2 - \vec{p}^2 \cdot c^2 = m^2 c^4$$