Analysis II Einsiedler Version

Benjamin Dropmann

April 5, 2025

1 Wiederholung

Definition Taylor-Polynom
Sei eine funktion $f:(a,b)\to\mathbb{C}$ um einen punkt $x_0\in(a,b)$ die n-mal differenzierbar ist. Dann ist der Polynom

$$p^f_{x_0,n}(x)=\sin^n_{k=0}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)$$

Satz Taylor Approximation
sei $f:(a,b)\to\mathbb{C}$ eine $n+1$ mal stetig differenzierbare funktion und $x_0,x\in(a,b)$ dann gilt

$$f(x)=P^f_{x_0,n}(x)+R^f_{x_0,n}(x)$$

Wobei diese $R^f_{x_0,n}(x)$ der restglied ist und ich den mit

$$R^f_{x_0,n}(x)=\int_{x_0}^x f^{(x+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\ \mathrm{dt}$$

Für $M_{n+1}=\max\{|f^{(n+1)}(t)|$ mit $t\in(x,x_0)$ gilt $|R^f_{x_0,n}(x)|\leq\frac{M_{n+1}|x-x_0|}{(n+1)!}$

Definition
Eine Funktion $f(a,b)\to\mathbb{C}$ heisst analytisch falls es zu jedem $x_0\in(a,b)$ $\exists R>0$ so dass

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_=)!\quad\forall x:|x-x_0|<R$$

8.6 Numerische Integration

Satz
Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$,ot $n\in\mathbb{N}$ und $h=\frac{b-a}{h}$, $x_e=a+lh$ für $l\in\{0,1,\cdots,n\}$ Falls f stetig differenzierbar ist dann gilt

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{dt}=h\cdot(f(x_0)+f(x_1)+\cdots+f(x_{n-1}))+F_1$$

Wobei F_1 unser fehler ist: $F_1\leq\frac{M_1(b-1)^2}{2n}$ mit $M_1=\max\{|f'(x)|:x\in[a,b]\}$ Falls die Funktion 2-mal stetig differenzierbar ist dann gilt:

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{dt}=\frac{h}{2}\left(f(x_0)+2f(x_1)+\cdots+2f(x_{n-1}))+f(x_n)\right)+F_2\qquad F_2=\frac{M_2(b-a)^3}{6n^2}$$

Man kann auch für f vier mal differenzierbar und n gerade eine solche abschätzung machen, dies ist die Simpson Regel:

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{dt}=\frac{h}{3}\left(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\cdots+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right)+F_4\qquad F_4\leq\frac{M_4(b-1)^5}{45n^4}$$

9. Metrische Räume

9.1 Konvergenz in Metrische Räume

Definition Metrischer Raum
Ein Metrischer Raum ist eine Menge X mit eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ Mit folgende Eigenschaften

i. **Definitheit** $\forall x, y \in X$ gilt $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x_y$

ii. **Symmetrie** $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$

iii. **Dreiecksungleichung** $\forall x, y, z \in X$ gilt $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Das d hier ist einfach eine Abstandsfunktion, die einen Abstand zwischen zwei elemente der Menge anteilt. Diese Abbildung ist die Metrik. X kann $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder sogar $\mathbb{R}^n$ sein, die Metrik d kann irgendeine Funktion sein:

- $d(x, y) = |x - y|$ bei $X = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$
- $d_2(x, y) = ||x - y||_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{d} (x_j - y_j)^2}$
- $d_1(x, y) = ||x, y||_1 = \sum_{j=1}^{d} |x_j - y_j|$
- $d_\infty = ||x - y||_\infty = max_i |x_i - y_i|$

Definition Norm
Ein Normierter, Reeller Vektorraum ist ein Vektorraum V uber $\mathbb{R}$ gemeinsam mit eine Abbildung $|| \cdot || : V \to R_{\geq 0}$ mit fonlgende Eigenschaften

- **Definitheit** $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
- **Homogeneitat** $||tv|| = |t| \cdot ||v||$
- **Dreiecksungleichung** $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$

Diese Abbildung $|| \cdot ||$ wird norm genannt wenn diese Axiome $\forall v, u \in V$ gelten

Lemma
Eine Norm auf V definiert eine Metrik $d(v, w) = ||v - w||$
Beweis Die Axiome der Norm passen mit dieser Definition mit den Axiomen der Metrik.

Beispiele Paris/SNCF-Metrik
Diese Metrik ist auf $X = \mathbb{C}$ definiert, Die Metrik bekommt ihr namen vom Fakt dass es in Frankreich mit der bahn, sehr leicht ist von irgendwo nach Paris hinzukommen, und von Paris aus irgendwo anders zu gehen. Die Metrik ist also

$$d(z, w) = \begin{cases} |z| + |w| & \text{Wenn } \nexists\lambda \quad w = \lambda z \\ |z - w| & \text{Wenn} \exists\lambda \quad w = \lambda z \end{cases}$$

Diese Metrik ist sehr Komisch aber respektiert immer doch die Axiome. Die Konvergenz, die bald definiert wird, hat Komische Konvergenz da sogar wenn punkte optisch sehr nah miteinander aussehen, sind die wegen der Metrik doch nicht. Deswegen, nehmen wir öftestens Normen auf Teilmengen als Metriken.

Definition Konvergenz in einem Metrischen Raum
Sei X ein Metrischer Raum, und x_n eine Folge in X und $z \in X$ Wir sagen dass x_n gegen z konvergiert und schreiben $\lim_n \to \infty x_n = z$ falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \quad \forall n > N : \quad d(x_n, z) < \varepsilon$$

Definition Offene Ball
Sei X ein Metrischer Raum. Der Offene Ball um $x_0 \in X$ mit radius $r > 0$ ist durch

$$B_r(x_0) = \{ x \in X | \, d(x, x_0) < r \}$$

definiert. Eine Menge $U \subset X$ heisst umgebung von x_0 falls es ein $\exists r > 0$ so dass $B_r(x_0) = \subseteq U$. Mann kann auch dieser Bälle benutzen um die Konvergenz zu definieren.

Beispiele Der Raum der Stetigen Funktionen
Sei $a < b \in \mathbb{R}$ Wir definieren $V = C([a,b])$ ein Vektorraum. Wir definieren dann die Norm $||f||_\infty = max_{x\in[a,b]}|f(x)|$ Für eine Stetige funktion $f \in V$ Dann ist V ein Reeller Vektorraum, $||\cdot||$ ist eine Norm und die Konvergenz von $f_n \in V$ gegen $f \in V$ ist gleichbedeutend zur gleichmässige Konvergenz
Beweis Angenommen $f_n \in V$ Konvergiert für $n \to \infty$ gegen $f \in V$. Diese aussage ist analog zu:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ so dass } \forall n > N \quad d(f_n, f) = ||f_n - f||_\infty < \varepsilon$$

Die unendlich norm hier ist definiert wie $\max_{[a,b]}(f_n - f)$ Also gilt $\forall x \in [a,b]$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq ||f_n - f||_\infty < \varepsilon$$

Doch den N haben wir vor den x gewählt, daher ist dies auch gliechmässig konvergent.

$$\forall \varepsilon < 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n < N \quad \forall x \in [a,b] \text{ gilt } |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Bemerkung
$||\cdot||_\infty$ ist eine Norm:

i $||f||_\infty = 0 \Longleftrightarrow f = 0$

ii $||\lambda f||_\infty = max_{[a,b]}|s \cdot f(x)| = |s| \cdot max_{[a,b]}|f(x)| = |s| \cdot ||f||_\infty$

iii $f_1, f_2 \in V$ dann ist $||f_1 + f_2||_\infty = max_{[a,b]}\underbrace{|f_1(x) + f_2(x)|}_{=|f_1(x)|+|f_2(x)|} \leq ||f_1||_\infty + ||f_2||_\infty$ (dies ist nicht klar aber es beweist die Dreiecksungleichung)