

Lineare Algebra II

Benjamin Dropmann

March 1, 2025

1 Polynome

1.1 polynomdivision

Seien f und $g \neq 0$ zwei polynome in $K[x]$ dann $\exists q(r), r(r) \in K[x]$ mit $\deg(r) = 0$ oder $\deg(r) < \deg(g)$ und $f = qg + r$.

Korollar 9.0.4: Sei $f(x) \in K[x], f(x) = 0$ sei $\lambda \in K$ so dass $f(\lambda) = 0$. Dann $\exists q(x) \in K[x]$ so dass $f(x) = (x - \lambda)q(x)$

Beweis $\exists q(x), r(x) \in K[x] \quad \deg(r) < \deg(x - \lambda) = 1$ so dass $f(x) = (x - \lambda)(q(x) + r(x))$, $\rightarrow r \in K \Rightarrow f(\lambda) = 0$

Korollar 9.0.6 Sei $f(x) \in K[x], \deg(f) = n > 0$ Dann hat $f(x)$ höchstens n Nullstellen. (Fundamentaler Satz der Algebra sehr ähnlich).

Beispiel 9.0.7 Es sei $f(x) = x + 1(x^2 + 1)$, als poly in $\mathbb{R}[x]$ hat es nur eine nullstelle $x = -1$.

Als polynom in $\mathbb{C}[x]$ gilt $f(x) = (x + 1)(x + i)(x - i)$

Theorem 9.0.8 Fundamentaler Satz der Algebra Es sei $f(x) \in \mathbb{C}[x], \deg(f) = n > 0$ dann hat $f(x)$ in $\mathbb{C}[x]$ genau n nullstellen. Das heisst es existieren $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$ nicht unbedingt verschieden, so dass $f(x) = (x - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (x - \lambda_n)$ Wir sagen \mathbb{C} ist Algebraisch abgeschlossen.

9.0.11: sei $f(x) \in K[x], \lambda \in K$ so dass $f(\lambda) = 0$ Die Ordnung der Nullstelle (Vielfachheit) λ ist die Ganze Zahl $n \geq 1$ so dass $\exists q(x) \in K[x]$ so dass

$$f(x) = (x - \lambda)^n q(x)$$

beispiele 9.0.12

1. $f(x) = x + 1(x^2 + 1)$ Einfache nullstelle $\lambda = -1$ daher ist die ordnung 1
2. $p > 2 \quad g(x) = x^p \in \mathbb{F}_p[x]$

$\mathbb{F}_p = [a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 | n \geq 0, a_i \in \mathbb{F}_p]$ Und $g(x) = x^p - 1 = (x - 1)^p$ (leicht ausrechnen)

Bemerkung 9.0.13 Analogien $\mathbb{Z} \leftrightarrow K[X]$

\mathbb{Z}	$K[x]$
± 1	$K \setminus 0$
Primzahlen	Unzerlegbare Polynome $\deg < 0$
$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$	$f(x)$ ist unzerlegbar: $K[x]/_{f(x)}$ Körper

2 Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition 10.1.1 V/K Vektorraum, $T: V \rightarrow V$ Endomorphismus.

1. $\lambda \in K$ ist ein Eigenwert von T wenn $\exists v \in V, v \neq 0_v$ so dass $T(v) = \lambda v$
2. Ein solches v heisst Eigenvektor mit Eigenwert λ

Bemerkung 10.1.12 Wenn v Eigenvektor von T ist, $T(v) = \lambda v$ dann ist auch αv Eigenvektor von T mit Eigenwert $\lambda, \forall \alpha \in K, \alpha \neq 0$

Beispiele 10.1.3 Rechnung von eigenwerte und Eigenvektoren

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ Eigenwerte $\lambda = 3$ und $\lambda = -1$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ b \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ b \end{pmatrix}$$

Wir kommen dann auf

$$\begin{pmatrix} 1x & 2y \\ 2x & 1y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ b \end{pmatrix}$$

und also

$$2x + y = \lambda x$$

$$x + 2y = \lambda y$$

Wir bekommen also

$$y((1 - \lambda)^2 - 4) = 0$$

$y \neq 0, x \neq 0$ Da die nullvektoren keine Eigenvektoren sind $\Rightarrow (1 - \lambda)^2 = 4 \Rightarrow \lambda = [-1, 3]$ Warum spezifisch zwei?

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ Wir Suchen ein λ sodass $b(v) = \lambda \cdot v$ für $v \in \mathbb{R}^2, v \neq 0$

$$\left(B - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also für welche λ ist $B - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ nicht invertierbar (wann ist der kern nicht trivial) \Leftrightarrow Für welche $\lambda \in K$ ist

$$\det \left(B - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0?$$

$$\det \left(\begin{pmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 1 & 4 - \lambda \end{pmatrix} \right) = (1 - \lambda)(4 - \lambda) \Rightarrow \lambda = [2, 3]$$

Und jetzt für die Eigenvektoren: für $\lambda = 2$

$$b(v) = 2v \Rightarrow v = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha \neq 0$$

Satz 10.1.4 $T : V \rightarrow V$ linear. Dann gilt: $\lambda \in K$ eigenwert von $T \Leftrightarrow \ker(T - \lambda 1_v) \neq 0$ Bis hier habe ich was verpasst...

Fibonacci sei V der V-R der Fibonacci Folgen. wir haben $S : V \rightarrow V$ ist die Verschiebungsabbildung, (die ist definiert in satz 1.1.15)

Die Basis war $B = \{\mathbb{F}_{0,1}, \mathbb{F}_{1,0} <\}$ Und die matrix ist $[S]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\det(S) = \lambda^2 - \lambda - 1$ eigenwerte sind also

ϕ und φ und die Eigenfolgen sind $\{\mathbb{F}_{\phi,1}, \mathbb{F}_{\varphi,0} <\}$ also die diagonal matrix ist dann $[S]_C^C = \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \varphi \end{pmatrix}$ **Das charakteristische**

polynom Sei $A \in M_{m \times n}(K)$ Dann ist $X_A(x) = \det(A - x 1_n)$ das charakteristische polynom von A

10.2.2 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dann ist $X_A(x) =$ ich haben nicht abgeschrieben aber der konstante term des charakteristischen polynom ist die Determinante.

$\det(A - x 1_n)$ Insbesondere $X_{1_2}(x) = x^3 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

Definition 10.2.3 $T : V \rightarrow V$ linear dann sei $X_T(x) = \det([T]_B^B - x 1_n)$ dies ist unabhängig von der wahl der Basis B.

10.2.4: $X_T(x)$ ist wohldefiniert

Beweis $[T]_C^C = [D]_C^B [T]_B^B [D^{-1}]_B^C$ dann ist

$$\begin{aligned} \det([T]_C^C - 1_n x) &= \det([D]_C^B [T]_B^B [D^{-1}]_B^C - 1_n x) = \det(D [T]_B^B D^{-1} - x D D^{-1}) \\ &= \det(D ([T]_B^B - x T) D^{-1}) = \det(D) \det([T]_B^B - x) \det(D^{-1}) = \det(D) \det([T]_B^B - x) \end{aligned}$$

2.1 Theorem 10.2.5:

Es sei $T : V \rightarrow V$ linear. Dann gilt dann die Eigenwerte von $T = \{\lambda \in K | X_T(\lambda) = 0\}$

Lemma 10.2.6 Sei $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(K)$ eine obere Dreiecksmatrix dann gilt

$$X_A(x) = \prod_{i=1}^n (a_{ii} - x)$$

Sei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow X_A = x^2 - (a + d)x + ad - bc$

Trace (noch nachzu sehen) $Tr : M_{n \times n}(K) \rightarrow K, A = (a_{ij}) \mapsto \sum a_{ii}$ **Def 10.2.7** Sei $T : V \rightarrow V$ linear dann ist die Spur von T

$$Tr(T) = Tr([T]_B^B)$$

10.2.8 $Tr(T)$ ist wohldefiniert

Beweis Zu zeigen wann C eine Andere Basis und $D = id_B^C$ dann gilt

$$Tr([T]_B^B) = Tr(D^{-1} [T]_C^C D)$$

Es reicht aus zu zeigen dass wenn $M_1, M - 2 \in M_{n \times n}(K)$ dann gilt $Tr(M_1 M_2) = Tr(M - 2M_1)$ (mit explizite rechnung beweisen)

Daher gilt auch 10.2.8

Satz 10.2.9 es sei $T : v \rightarrow V$ linear dann gilt

$$X_T = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} x^{n-1} Tr(T) + \dots + det(T)$$

Beweis es sei $A = \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix}$ Mit induktion kann man beweisen dass wenn es für eine $M_{n-1 \times n-1}$ geht dann geht es für $M_{n \times n}$ als übung zu machen. Der Zweite beweis geht wie folgt ab:

Sei $B \in M_{n \times n}$ und $b = (b_{ij})$ dann gilt die formel

$$\sum_{\sigma \in S_n} b_{\sigma(1,1)} \dots b_{\sigma(n,n)}$$

Sei $B = A - x1_n$ und $\sigma \in S_n$ Für welche σ hat

$$b_{\sigma(1,1)} b_{\sigma(2,2)} \dots b_{\sigma(n,n)}$$

ein polynom von grad $> n-1$? Der beweis ist todlich, nacheher schauen ich tippe jetzt was ich nicht verstehe...

3 2. Viewing von der Vorlesung am 25.02

$T : V \rightarrow V$ linear, dann ist $\lambda \in K$ eine Eigenvalue wenn $\exists v \in V, v \neq 0_v$ so dass $Tv = \lambda v$. Hier merken wir dass der skalar eines Eigenvektors, auch ein eigenvektor ist, und dass die addition von zwei vektoren mir den selben eigenwert, auch ein Eigenvektor ist, also hat dies die Struktur eines unterraums...

Wir sind auf dem Folgenden Satz gekommen. Sei $T : V \rightarrow V$ linear, dann gilt $\lambda \in K$ ist genau dann Eigenwert von T wenn $ker(T - \lambda I_n) \neq \{0\}$

Beweis $\lambda \in K$ Eigenwert $\Leftrightarrow \exists v \in V, v \neq 0_v$ so dass $Tv = \lambda v \Leftrightarrow (T - \lambda I_n)v = 0_v$ Und daher ist $v \in ker(T - \lambda I_n)$

Das ist Praktisch da wenn $(T - \lambda I_n)$ nicht injektiv ist dann ist $ker(T - \lambda I_n) \neq \emptyset$ und wenn die Determinante nicht null ist dann ist $T - \lambda I_n$ kein endomorphismus.

Bemerkung 0 ist ein Eigenwert wenn T kein isomorphismus ist

Korollar Folgende aussagen sind äquivalent:

- λ ist ein Eigenwert von T
- $ker(T - \lambda I_n) \neq \{0_v\}$
- $T - \lambda I_n$ ist kein Isomorphismus
- $det(T - \lambda I_n) = 0$

Der Beweis ist eine zusammenfassung von vorherigen beweisen

Mit dieses wissen kann man Finden dass es höchstens n Unterschiedliche eigenwerte gibt, da die mit einen grad n polynom definiert sind.

3.1 Das charakteristische polynom

Definition 10.2.1 Sei $A \in M_{n \times n}(K)$. dann ist $X_A(x) = det(A - x1_n)$ das charakteristische polyom von A Für eine 2×2 Matrix ist dann

$$X_A(X) = x^2 - \underbrace{(a-d)}_{Tr(A)} x + \underbrace{ad-bc}_{det(A)}$$

Kleine errinerung, die Trace ist die Summe der Diagonale elemente. Diese bemerkung gilt auch für 3×3 . Wir rechnen jetzt für $n \times n$. Der Konstante term von $det(A - xI_n)$ ist $det(A)$ (da es der Fall bei $x = 0$ ist)

Insbesondere:

$$X_1(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

Definition 10.2.3 $T : V \rightarrow V$ linear dann ist $X_T(x) = det([T]_B^b - xI_n)$ Für eine Basis B von V .

10.2.4 $X_T(x)$ ist wohldefiniert.

Beweis

$$[T]_C^C = [D]_C^B [T]_B^B [D^{-1}]_B^C$$

Multiplikativität von \det :

$$\det([T]_C^C - xI_n) = \det([D]_C^B [T]_B^B [D^{-1}]_B^C - xI_n) = \det([D]_C^B [T]_B^B [D^{-1}]_B^C - xD^{-1}D) = \det(D) \det([T]_B^B - xI_n) \det(D^{-1})$$

Was unsere aussage zustimmt.

Da das Charakteristische Polynom unabhängig von der Wahl der Basis, ist sie Eindeutig und daher Wohldefiniert.

Theorem 10.2.5 Es sei $T : V \rightarrow V$ linear, dann gilt dass

$$\{\text{Eigenwerte von } T\} = \{\lambda \in K \mid X_T(\lambda) = 0\}$$

Lemma 10.2.6 Sei $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(K)$ Eine Obere Dreiecksmatrix. Dann ist das Charakteristische Polynom

$$X_A(x) = \prod_{i=1}^n (a_{ii} - x)$$

Satz 10.2.8 $\text{Tr}(T)$ ist wohldefiniert.

Beweis Wenn C eine andere basis ist und $D = [id_v]_C^B$ dann gilt: $\text{Tr}[T]_B^B = \text{Tr}(D^{-1}[T]_C^C D)$

Hier bleibt in theorie nichts anderes als von hand zu zeigen dass $M_1, M_2 \in M_{n \times n}(K)$ dann gilt: $\text{Tr}(M_1 M_2) = \text{Tr}(M_2 M_1)$. Aber es ist immer noch nicht sehr schön.

Satz 10.2.9 Es sei $T : V \rightarrow V$ linear dann ist

$$X_T(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} \text{Tr}(T) x^{n-1} + \dots + \det(T)$$

Über den rest kann man nicht viel sagen

Beweis Es sei $A = [T]_B^B$ dann ist $X_A(x) = \det(A)$ Aber die A matrix ist sehr gross, dann muss man den beweis per induktion machen (Gute exams aufgabe). Hier ist die zweite idee die wir machen Wir wissen dass $B \in M_{n \times n}(K)$ dann gilt

$$\det(B) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) b_{\sigma(1),1} \cdots b_{\sigma(n),n}$$

Sei $B = A - xI_n$ und $\sigma \in S_n$, für welche σ ist $b_{\sigma(1),1} \cdot b_{\sigma(2),2} \cdots b_{\sigma(n),n} = (*)$ ein Polynom vom Grad $\geq n-1$? wenn $\sigma = id$ dann ist

$$(*) = (a_{1,1} - x) \cdots (a_{nn} - x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} \underbrace{(a_{1,1} + a_{2,2} + \dots + a_{n,n})}_{= \text{Tr}(B)} x^{n-1} + \text{Restterm von grad } \leq n-1$$

Alle andere möglichkeiten für σ müssen also vom grad $< n-1$ sein (da nur auf der Diagonale $a_{j,j} - x$ steht, überall sonst gibt es kein x und wenn wir nur ein element vertauschen, sind es zwei, und daher ist grad $< n-1$), und daher ist dass zweite vorkfaktor vom polynom Welches dann beweist dass der zweite Restterm $\text{Tr}(A)$ ist und also dass unsere gleichung stimmt (der konstante faktor muss ja $= \det(A)$ sein) **Korollar 10.2.11** $T : V \rightarrow V$ mit V n -dim hat höchstens n Eigenwerte (da der Charakteristische polynom grad n ist.)

3.2 Diagonalisierung

Frage: es sei $T : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Gibt es eine Basis in welche die abbildungsmatrix von T diagonal ist?

Satz 10.3.2 Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ verschieden eigenwerte von T und $\forall i$ sei v_i ein Eigenvektor mit eigenwert λ_i dann sind v_1, \dots, v_m linear unabhängig.

Beweis Es sei zwei Eigenvektoren, v_a, v_b mit eigenwerte λ_a, λ_b dabei ist dann $Tv_a = \lambda_a v_a$ und $Tv_b = \lambda_b v_b$ wenn aber $v_a = cv_b$ (sie sind nicht linear unabhängig) dann gilt $Tcv_b = \lambda_a cv_b$ und damit ist $\lambda_a \cdot c = \lambda_b$ und also sind diese Eigenvektore nicht unterschiedlich, da sie beide den selben Eigenwert haben.

Korollar 10.3.4 Wenn Wir für $T : V \rightarrow V$ linear mit V n -dim, wenn T Genau n verschiedene Eigenwerte hat, dann hat V eine Basis die aus $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ besteht.

Definition 10.3.5 $T : V \rightarrow V$ ist diagonalisierbar wenn \exists Basis von Eigenvektoren existiert. In diesem Fall ist die Abbildungsmatrix von T bezüglich dieser Basis diagonal, mit den Eigenwerte als einträge in der Matrix.

Bemerkung 10.3.6 Eine $A \in M_{n \times n}$ Matrix ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow \exists B \in GL_n(K)$ so dass $B^{-1}AB$ diagonal ist (basisswechselmatrix).

Lemma 10.3.7 Wenn A Diagonalisierbar mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ist, dann ist $X_A = \prod (\lambda_i - x)$

Charakterische Polynom ist: $X_A = \det(A - xI_n)$ und seine losungen sind die Eigenwerte der Matrix.

Eine n -dim Matrix ist diagonalisierbar falls es n unterschiedliche Eigenwerte gibt, daher wenn es eine Basis von Eigenvektoren gibt. Wir wissen auch dass

$$A = [T]_B^B \Leftrightarrow \exists P \in GL_n(K) \text{ so dass } P^{-1}AP \text{ Diagonal ist}$$

Frage, für welche A gibt es so ein P ?