Analysis II

Benjamin Dropmann

March 20, 2025

1 Metrische Räume

Skalarproduct
Seien zwei vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ dann ist der skalaproduktwie Folgt definiert:

$$x \cdot y =< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Eufklidische Norm
Sei $x \in \mathbb{R}^n$ dann ist die Euklidische norm des Vektors

$$||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Euklidischer Abstand

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Dreiecksungleichung
$\forall x, y, zin\mathbb{R}^n \rightarrow ||x - z|| \leq ||x - y|| + ||y - z||$

Metrische Räume
Ein metrische (M.R) (X, d) ist eine nicht-leere menge X zusammen mit einer funktion $d : X \times X \rightarrow [0; \infty[$ Welche die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. Positiv definiert $\forall x, y \in X \qquad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. Symmetrie $\forall x, y \in X \qquad d(x, y) = d(y, x)$
3. Dreiecksungleichung $\forall x, y, z \in X \qquad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Folgen
Sei X eine Menge dann ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge $\mathbb{N}_0 \rightarrow X$ mit dem bild $a_n = a(n)$.

Konvergenz einer Folge in X
$(dim(x \geq 1)$ Sei (X, d) ein M.R. und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge. Dann konvergiert die folge auf eine zahl $A \in X$ falls.

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N > 0 : \qquad d(a_n, A) < \epsilon$$

Falls es kein A gibt dann divergiert die Folge.

Teilfolgen
Sei ein M.R. (X, d) und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine folge, dann existier eine teilfolge $(x_{n_k})_{n \in \mathbb{N}_0}$ wobei $(n_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge von reellen Zahlen ist.

Häufungspunkt
Sei (X, d) ein M.R. und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge. $A \in X$ ist ein Häufungspunkt der Folge falls es eine Teilfolge die auf A Konvergiert.

Satz
$y \subset X$ Teilmenge eines M.R. (X, d) $x \in X$ ist Häufungspunkt von y falls eine Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ existiert welche gegen x konvergiert.

Lemma
Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge im Metrischen Raum (X,d) mit $x \in X$ Dann konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ genau dann wenn jede Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Teilfolge $(x_{n_{m_k}})_{k\in\mathbb{N}_0}$ die gegen x konvergiert.

Lemma
Eine Folfe in $(\mathbb{R}^n, d(x,y) = ||x-y||)$ Konvergiert genau dann wenn sie koordinaten weise konvergiert.

1.1 Cauchy Folge

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in einem Metrischen Raum (X,d) heisst cauchy foglge falls:

$$\forall\varepsilon > 0 \qquad \exists N > 0 \text{ So dass } \forall m,n > N : \qquad d(a_n, a_m) < \varepsilon$$

Lemma
Analog zur Folgen in $\mathbb{R}$ gilt:

- Jede Cauchy-Folge ist beschränkt,$\Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R}$ so dass $d(a_n, a_0 \leq K \forall n \in \mathbb{N}_0$
- Jede Konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.
- Eine Cauchy Folge konvergiert genau dann wenn sie eine konvergente Teilfolge besitzt

Vollstandigkeit
Eine Metrischer Raum heisst vollständig falls jede Cauchy-Folge in X Konvergiert.

Theorem
Für alle $n \geq 1$ ist $\mathbb{R}^n$ mit der Standard metrik ist Vollständig.
Beweis Analog zur tatsache, das in $\mathbb{R}^n$ konvergenz im Metrischen Raum äquivalent ist zur Koordinaten-weise konvergenz: Eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}^n$ zu sein ist äquivalent zur Tatsache dass jede Koordinate eine Cauchy-Folge liefert (in den Reelen zahlen). In den Reellen Zahlen konvergieren alle Cauchy-Folgen, Daher muss die Behauptung stimmen. Q.E.D.

1.2 Topologie Metrischer Raume

Es sei (X,d) ein Metrischer Raum, $x \in X$ und $r > 0$ eine reelle Zahl. Der offene Ball um den Punkt x mit radius r ist die Menge:

$$B_r(x) = B(x, r := [y \in X| \qquad d(x,y) < r]$$

1.3 Innere/Abschulss-mengen und Ränder

Sei (X,d) ein Metrischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge

- das innere der Menge A ist gegebe durch
  $$A^o = int(A) := \bigcup [E \subset A| \qquad E \text{ ist offen}]$$
  Und ist die grösste offene Menge, welche in A enthalten ist.
- Der Abschluss von A:
  $$\overline{A} := \bigcap [A \subset U | U \text{ ist abgeschlossen}]$$
  und ist die kleinste abgeschlossene Menge welche A enthält.
- Dr Tipologische Rabd von A ist $\overline{A}/A^o$

Beispiel, in $\mathbb{R}$ mit $A =]0,1[\to A^o =]0,1[$ und $\overline{A} = [0,1]$ dann ist der Rand: $\{0\} \cup \{1\}$.

Proposition
Es sei (X,d) ein Metrischer Raum:

- Eine Teilmenge $A \subset X$ ist genau dann offen, alls für jede konvegente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit grenzwert $x \in A$ gilt:
  $$\exists N \in, \forall n > N \qquad x : n \in A$$
- Eine Teilmenge $A \subset X$ ist genau dann abgeschlossen falls fur jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset A$ mit grenzwert $x \in A$ ist $x \in A$

Der beweis läuft wie folgt ab:
Beweis Fall der Offene Menge: "$\Rightarrow$" Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Konvergente Folge mit grenzwert $x \in A$. Gemäss vorassetzung wissen wir, dass die Teilmenge A offen ist Da A offen ist, und $x \in A$ gibt es ein Offenen Ball $B(x,\varepsilon) \subset A$. Für dieses $\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}_0$ (wegen der Konvergenz der betrachteten Folge) $d(x,x_n) < \varepsilon$ (Konvergente folgen sind in X Cauchy-Folgen) dies Bedeutet das FOlgeglieder mit index $n > N$ in $B(x,\varepsilon)$
"$\Leftarrow$" Wir nehmen jetzt an das $A \subset X$ nicht offen ist. Dies bedeutet dass $\exists x \in A \varepsilon > 0 \qquad B(x,\varepsilon)/A \neq \emptyset$ Insbesonde konnen wir $\varepsilon = 2^{-1}$ betrachten und eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konstruiren mit $x_n \in B(x, 2^{2-n})/A$ Es gilt für diese Folge aber auch dass Folgende $x_n \to x \in A$
Der Fall der Geschlossene Menge:
"$\Rightarrow$" Wir nehmen an dass A abgeschlossen ist. Wir betrachten dann eine beliebige Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to x \in X$ Da $V := X/A = A^c$ offen ist, kann der Grenzwert x nicht in dieser offennen Menge liegen, da sonst die Folgenglieder ab einen bestimmten Index ebenfalls in dieser Offenene Menge liegen müssen, damit muss gelten dass:$x \in A$
"$\Leftarrow$" Wir nehmen an dass A nicht abgeschlossen ist, dann ist A^c nicht offen Dies bedeutet dass: $\exists y \in A^c \forall \varepsilon > 0 \qquad B(y,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ Damit kann man eine Folge konstruiren $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d(y,x_n) < \varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad x \to y \in A^c$ Dann ist de beweis fertig Dann ist de beweis fertig.

Proposition
Es sei (X,d) ein Metrischer Raum. Eine folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert genau dann gegen x wenn alle offene Mengen U gilt:

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \qquad x_n \in U$$

Beweis "$\Rightarrow$" Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen x konvergierende Folge, es sei ausserdem U offen mit $x \in U$. Da U offen ist: $\exists \varepsilon > 0 B(x,\varepsilon)$ Dann gilt auch

$$\forall \varepsilon \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \qquad d(x,x_n) < \varepsilon$$

"$\Leftarrow$" $\forall \epsilon \qquad B(x,\epsilon)$ ist offen. Und es gilt $\exists N \in \mathbb{N} : x_n \in \forall n > N B(x,\varepsilon)$ Dies bedeutet gemäss definition dass $\underset{n\to\infty}{lim} x_n = x$.

Korollar
Es sei X eine Menge und d_1, d_2 zwei verschieden Metriken. Dann haben $(X,d_1),(X,d_2)$ genau dann die selben konvergente Folgen wenn die Topologien von d_1 und d_2 ubereinstimmen.

1.4 Banachscher Fixpunkttheorem

Sei (X,d) Ein Vollständiger Metrischer raum mit eine Abbildung $f : X \to X$ die Lipschitz stetig ist mit $L < 1$

$$\forall x, x' \in X \qquad d(f(x), f(x')) \leq L d(x,x')$$

Dann gibt es ein wert $z \in X$ wofür $f(z) = z$

Beweis der Existenz des Fixpunkts
Wir nehmen $x \in x_0$ beliebig, dann konstruiren wir iterativ eine Folge in X und zwar wie folgt: $x_{n+1} := f(x_n)$ Dies ergibt tatsächlich eine Folge $(x_n)n \in \mathbb{N}_0$ Als nächstes wollen wir Zeigen dass diese Folge eine Cauchy-Folge ist.

- $d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) = d(f^n(x_0), f^n(x_0)) \leq L^n d(x_1, x_0)$
- $d(x_m, x_n) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_{k+1}' x_k) \leq \sum_{k=n} a^{m-1} L^k d(x_1,x_0) = d(x_1,x_0) \sum_{k=n}^{m-1} l^k$ Und diese Reihe ist für $L < 1$ $\forall n, m \in \mathbb{N}_0$ und sogar $m \to \infty$ konvergent. Und wir finden:

  $$\forall m, n \in \mathbb{N}_0, d(x_n, x_m) \leq d(x_1, x_0) \qquad \underbrace{\frac{L^n}{1-L}}_{\text{für } n\to\infty, \qquad \to 0}$$

  Und damit ist unsere Folge eine Cauchy-Folge

Es bleibt noch zu zeigen dass $\overline{x}$ ein Fixpunkt ist:

$$f(\overline{x}) = \lim$$

1.5 Kompaktheit

Ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist kompakt genau dann wenn I beschränkt und abgeschlossen ist. Die beschränktheit geht aber nicht trivial in den Metrischen Raum über.

Definition
Sei (X, d) ein Metrischer Raum, und K Eine Teilmenge.

- K heisst Folgenkompakt falls jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset K$ eine in K konvergente Teilfolge.
- K heisst Topologisch Kompakt falls jede Familie von Offenen Mengen $\mathbb{U} := \{\mathbb{U}_i\}_i \in I$, welche K uberdeckt, also dass:
$$K \subset \bigcup \mathbb{U} = \bigcup_{i\in I} U_i$$
eine Endliche Teilüberdeckung besitzt, (eine endliche familie welche K immer noch überdeckt.)

Definition
Sei (X, d) ein metrischer und $K \subset X$ eine Teilmenge. K heisst totalbeschränkt, falls $\forall r > 0 \quad \exists x_1, ..., x_n \in K$ so dass $\bigcup B_i$ (wobei $B_i = B(x_i, r)$) K überdeckt.

Beispiele
Das intervall $I = [0, 1[$ ist beschränkt aber nicht abgeschlossen (im sinne von Analysis I). WIr bemerken auch dass es nicht Topologisch kompakt ist da
$$\{\mathbb{U}_i\}_{i\in\mathbb{N}} \quad \mathbb{U}_i = [0, 1 - 2^{-i}[$$
Keine endliche Teilüberdeckung von I besitzt.

Bemerkung
Es sei (X, d) ein Metrischer Raum. Falls (X, d) totalbeschränkt ist so ist es auch beschränkt d.h. $\exists d$ so dass $\lim\sup d(x, y) < \infty$

Bemerkung
Ein beschränkter Metrischer Raum muss nicht totalbeschrankt sein. Hier ein Gegenbeispiel
$$X = \mathbb{N} \quad d(n, m) = arctan(|n - m|) \Rightarrow r = \frac{\pi}{8} \text{ Dann ist der Raum nicht mit endlichen bällen überdeckbar}$$

Theorem
Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $K \subset X$ eine Teillmenge, dann sind folgende aussagen äquivalent:

- K ist Folgenkompakt
- K ist Topologish kompakt
- K ist vollstänfig und totallbeschränkt

Wir nennen hier die Teilmenge einfach Kompakt.

Lemma
Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist $K \subset X$ genau dann topologisch kompakt falls für alle Familien $\mathbb{A} := \{A_i\}_{i \in I}$ abgeschlossener Teilmengen, jede Schnittmenge endlicher vieler Mengen aus $\mathbb{A}$ einen nicht leeren Schnitt mit K besitzt, ist auch $K \cup \bigcup_{i \in I} A_i$ nicht leer.

Lemma Diagonalfolge
Es seien $\mathbb{N}0 \supset N_0 \supset N_1 \supset ...$ eine unendliche Familie einander verschachteter Mengen. Des Weitern besitze jede Mengen N_k unendlich viele Elemente. Dann existiert eine streng monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit der Eigenschaft $f(k) \in N_k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$.
Beweis Die Funktion f wird iterativ konstruirt, Als erstes wählen wir $f(0)$ beliebig aus N_0 und dann für jedes nachfolgende $f(k) := \min\{m \in \mathbb{N}_0 \cup N_k\}$

Korollar
Es sei (X, d) ein metrischer Raum $A \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge und $K \subset X$ eine kompakte Teilmenge. Dann ist $A \cap K$ kompakt.

Theorem Heine Borel
Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.
Beweis
Hinrichtung "$\Rightarrow$" Es sei K Kompakt, Dann ist K insbesondere totalbeschränkt. Die Abgeschlossenheit von K folgt aus dem vorherigen Korollar.
Rückrichtung "$\Leftarrow$" Für die Rückrichtung müssen wir nur nachweisen dass K vollständig und totalbeschränkt ist.

> Vollständigkeit: Aus der Tatsache dass $\mathbb{R}$ vollständig (vollständig=Cauchy$\Rightarrow$Konvergent) ist, muss $\mathbb{R}^n$ vollständig sein und daher auch $K \subset \mathbb{R}^n$
>
> Totalbeschränkteit: K ist beschränkt, d.h. $\exists N \in \mathbb{N}_0$ so dass $K \subset [-2^N, 2^N]$ Nun sei $r > 0$ vorgegeben, dann wählen wir M so dass $2^-M < \frac{r}{\sqrt{n}}$. Dann betrachten wir de bälle dessen Mittelpunkte auf den folgenden Gitter:
>
> $$y = (y_1, ...y_n) \in \mathbb{Z} \text{ mit } -2^{N+M} \leq y_i \leq 2^{N+M}$$
>
> $\to z_i = 2^{-M} y_i$ Die bälle sind $B_i = B(r, z_i)$ und hier brauchen wir nur endlich viele bälle und überdeckt die gnaze Teilmenge.

Theorem
Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) zwei metrische Räume, $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und $K \subset X$ eine Kompakte Teilmenge von X Dann ist $f(K)$ eine kompakte teilmenge von Y
Beweis Hier geben wir nur die Struktur des Beweises an:
Wir benutzen einerseits die Beschreibung der stetigkeit als Folgenstetigkeit und andererseits die Beschreibung der Kompaktheit als Folgenkompaktheit
Zu zeigen jede Folge im Bild von K unter $f, f(K)$ hat eine konvergente Teilfolge.

Proposition
Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) zwei metrische Räume, $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Falls X kompakt ist, ist f gleichmässig stetig
Beweis Wenn X kompakt ist, dann ist auch $f(X) \subseteq Y$ kompakt und daher auch Beschränkt. Wir setzen also $inf(f(X)) = m$ und $M = sup(f(X))$ also ist

$$\forall x, y \in X \qquad \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq \frac{M - m}{|f^{-1}(M) - f^{-1}(m)|}$$

Also kann man hiermit δ definieren $\forall \varepsilon$

Korollar 9.49
Es seien (X, d_X) und $(Y = \mathbb{R}, d_Y = |\cdot|)$ Metrische Räum, $f : X \to Y$ eine Stetige Abbildung und $K \subset X$ eine kompakte teilmenge von X Dann nimmt f ihr Maximum und ihr Minimum an:

$$f(\underline{x} \leq f(x)) \leq f(\overline{x}) \qquad \forall x \in K$$