

Analysis II Einsiedler Version

Benjamin Dropmann

April 4, 2025

1 Wiederholung

Definition Taylor-Polynom

Sei eine funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$ um einen punkt $x_0 \in (a, b)$ die n -mal differenzierbar ist. Dann ist der Polynom

$$p_{x_0, n}^f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Satz Taylor Approximation

sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$ eine $n + 1$ mal stetig differenzierbare funktion und $x_0, x \in (a, b)$ dann gilt

$$f(x) = P_{x_0, n}^f(x) + R_{x_0, n}^f(x)$$

Wobei diese $R_{x_0, n}^f(x)$ der restglied ist und ich den mit

$$R_{x_0, n}^f(x) = \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

Für $M_{n+1} = \max\{|f^{(n+1)}(t)| \mid t \in (x, x_0)\}$ gilt $|R_{x_0, n}^f(x)| \leq \frac{M_{n+1}|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$

Definition

Eine Funktion $f(a, b) \rightarrow \mathbb{C}$ heisst analytisch falls es zu jedem $x_0 \in (a, b) \exists R > 0$ so dass

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad \forall x : |x - x_0| < R$$

8.6 Numerische Integration

Satz

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und $h = \frac{b-a}{n}$, $x_l = a + lh$ für $l \in \{0, 1, \dots, n\}$ Falls f stetig differenzierbar ist dann gilt

$$\int_a^b f(t) dt = h \cdot (f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})) + F_1$$

Wobei F_1 unser fehler ist: $F_1 \leq \frac{M_1(b-a)^2}{2n}$ mit $M_1 = \max\{|f'(x)| : x \in [a, b]\}$ Falls die Funktion 2-mal stetig differenzierbar ist dann gilt:

$$\int_a^b f(t) dt = \frac{h}{2} (f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1})) + f(x_n) + F_2 \quad F_2 = \frac{M_2(b-a)^3}{6n^2}$$

Man kann auch für f vier mal differenzierbar und n gerade eine solche abschätzung machen, dies ist die Simpson Regel:

$$\int_a^b f(t) dt = \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)) + F_4 \quad F_4 \leq \frac{M_4(b-a)^5}{45n^4}$$

9. Metrische Räume

9.1 Konvergenz in Metrische Räume

Definition Metrischer Raum

Ein Metrischer Raum ist eine Menge X mit eine Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ Mit folgende Eigenschaften

- i. **Definitheit** $\forall x, y \in X$ gilt $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- ii. **Symmetrie** $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$
- iii. **Dreiecksungleichung** $\forall x, y, z \in X$ gilt $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Das d hier ist einfach eine Abstandsfunction, die einen Abstand zwischen zwei elemente der Menge anteilt. Diese Abbildung ist die Metrik. X kann \mathbb{R} , \mathbb{C} oder sogar \mathbb{R}^n sein, die Metrik d kann irgendeine Funktion sein:

- $d(x, y) = |x - y|$ bei $X = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C}
- $d_2(x, y) = \|x - y\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^d (x_j - y_j)^2}$
- $d_1(x, y) = \|x, y\|_1 = \sum_{j=1}^d |x_j - y_j|$
- $d_\infty = \|x - y\|_\infty = \max_i |x_i - y_i|$

Definition Norm

Ein Normierter, Reeller Vektorraum ist ein Vektorraum V über \mathbb{R} gemeinsam mit eine Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit folgende Eigenschaften

- **Definitheit** $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
- **Homogeneität** $\|tv\| = |t| \cdot \|v\|$
- **Dreiecksungleichung** $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Diese Abbildung $\|\cdot\|$ wird norm genannt wenn diese Axiome $\forall v, u \in V$ gelten

Lemma

Eine Norm auf V definiert eine Metrik $d(v, w) = \|v - w\|$

Beweis Die Axiome der Norm passen mit dieser Definition mit den Axiomen der Metrik.

Beispiele Paris/SNCF-Metrik

Diese Metrik ist auf $X = \mathbb{C}$ definiert, Die Metrik bekommt ihr namen vom Fakt dass es in Frankreich mit der bahn, sehr leicht ist von irgendwo nach Paris hinzukommen, und von Paris aus irgendwo anders zu gehen. Die Metrik ist also

$$d(z, w) = \begin{cases} |z| + |w| & \text{Wenn } \nexists \lambda \quad w = \lambda z \\ |z - w| & \text{Wenn } \exists \lambda \quad w = \lambda z \end{cases}$$

Diese Metrik ist sehr Komisch aber respektiert immer doch die Axiome. Die Konvergenz, die bald definiert wird, hat Komische Konvergenz da sogar wenn punkte optisch sehr nah miteinander aussehen, sind die wegen der Metrik doch nicht. Deswegen, nehmen wir öftestens Normen auf Teilmengen als Metriken.

Definition Konvergenz in einem Metrischen Raum

Sei X ein Metrischer Raum, und x_n eine Folge in X und $z \in X$ Wir sagen dass x_n gegen z konvergiert und schreiben $\lim_n x_n = z$ falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \quad \forall n > N : \quad d(x_n, z) < \varepsilon$$

Definition Offene Ball

Sei X ein Metrischer Raum. Der Offene Ball um $x_0 \in X$ mit radius $r > 0$ ist durch

$$B_r(x_0) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$$

definiert. Eine Menge $U \subset X$ heisst umgebung von x_0 falls es ein $\exists r > 0$ so dass $B_r(x_0) \subseteq U$. Mann kann auch dieser Bälle benutzen um die Konvergenz zu definieren.