

Analysis II

Benjamin Dropmann

February 27, 2025

1 Metrische Räume

Skalarprodukt Seien zwei vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ dann ist der skalare Produkt wie folgt definiert:

$$x \cdot y = \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Euklidische Norm Sei $x \in \mathbb{R}^n$ dann ist die Euklidische Norm des Vektors

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Euklidischer Abstand

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Dreiecksungleichung $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n \rightarrow \|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|$ **Metrische Räume** Ein metrischer (M.R.) (X, d) ist eine nicht-leere Menge X zusammen mit einer Funktion $d: X \times X \rightarrow [0; \infty[$ welche die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. Positiv definiert $\forall x, y \in X \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. Symmetrie $\forall x, y \in X \quad d(x, y) = d(y, x)$
3. Dreiecksungleichung $\forall x, y, z \in X \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Folgen Sei X eine Menge dann ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge $\mathbb{N}_0 \rightarrow X$ mit dem Bild $a_n = a(n)$.

Konvergenz einer Folge in X ($\dim(X) \geq 1$) Sei (X, d) ein M.R. und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge. Dann konvergiert die Folge auf eine Zahl $A \in X$ falls.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 : \quad d(a_n, A) < \varepsilon$$

Falls es kein A gibt dann divergiert die Folge.

Teilfolgen Sei ein M.R. (X, d) und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge, dann existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}_0}$ wobei $(n_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge von reellen Zahlen ist.

Häufungspunkt Sei (X, d) ein M.R. und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge. $A \in X$ ist ein Häufungspunkt der Folge falls es eine Teilfolge die auf A konvergiert.

Satz $y \in X$ Teilmenge eines M.R. (X, d) $x \in X$ ist Häufungspunkt von y falls eine Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ existiert welche gegen x konvergiert.

Lemma Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge im metrischen Raum (X, d) mit $x \in X$. Dann konvergiert $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ genau dann wenn jede Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Teilfolge $(x_{n_{m_k}})_{k \in \mathbb{N}_0}$ die gegen x konvergiert.

Lemma Eine Folge in $(\mathbb{R}^n, d(x, y) = \|x - y\|)$ konvergiert genau dann wenn sie koordinatenweise konvergiert.

1.1 Cauchy Folge

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in einem metrischen Raum (X, d) heisst Cauchy Folge falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 \text{ so dass } \forall m, n > N : \quad d(a_n, a_m) < \varepsilon$$

Lemma Analog zur Folge in \mathbb{R} gilt:

- Jede Cauchy-Folge ist beschränkt, $\Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R}$ so dass $d(a_n, a_0) \leq K \forall n \in \mathbb{N}_0$

- Jede Konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.
- Eine Cauchy Folge konvergiert genau dann wenn sie eine konvergente Teilfolge besitzt

Vollständigkeit Eine Metrischer Raum heisst vollständig falls jede Cauchy-Folge in X Konvergiert.

Theorem Für alle $n \geq 1$ ist \mathbb{R}^n mit der Standard metrik ist Vollständig.

Beweis Analog zur tatsache, das in \mathbb{R}^n konvergenz im Metrischen Raum äquivalent ist zur Koordinaten-weise konvergenz: Eine Cauchy-Folge in \mathbb{R}^n zu sein ist äquivalent zur Tatsache dass jede Koordinate eine Cauchy-Folge liefert (in den Reellen zahlen).

In den Reellen Zahlen konvergieren alle Cauchy-Folgen, Daher muss die Behauptung stimmen. Q.E.D.

1.2 Topologie Metrischer Raume

Es sei (X, d) ein Metrischer Raum, $x \in X$ und $r > 0$ eine reelle Zahl. Der offene Ball um den Punkt x mit radius r ist die Menge:

$$B_r(x) = B(x, r := [y \in X \mid d(x, y) < r]$$

1.3 Innere/Abschluss-mengen und Ränder

Sei (X, d) ein Metrischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge

- das innere der Menge A ist gegeben durch

$$A^\circ = \text{int}(A) := \bigcup [E \subset A \mid E \text{ ist offen}]$$

Und ist die grösste offene Menge, welche in A enthalten ist.

- Der Abschluss von A :

$$\bar{A} := \bigcap [A \subset U \mid U \text{ ist abgeschlossen}]$$

und ist die kleinste abgeschlossene Menge welche A enthält.

- Der Topologische Rand von A ist \bar{A}/A°

Beispiel, in \mathbb{R} mit $A =]0, 1[\rightarrow A^\circ =]0, 1[$ und $\bar{A} = [0, 1]$ dann ist der Rand: $\{0\} \cup \{1\}$.

Proposition Es sei (X, d) ein Metrischer Raum:

- Eine Teilmenge $A \subset X$ ist genau dann offen, falls für jede konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit Grenzwert $x \in A$ gilt:

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N \quad x : n \in A$$

- Eine Teilmenge $A \subset X$ ist genau dann abgeschlossen falls für jede konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset A$ mit Grenzwert $x \in A$ ist $x \in A$

Beweis Fall der Offene Menge:

" \Rightarrow " Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $x \in A$. Gemäss Voraussetzung wissen wir, dass die Teilmenge A offen ist. Da A offen ist, und $x \in A$ gibt es einen offenen Ball $B(x, \varepsilon) \subset A$. Für dieses $\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}_0$ (wegen der Konvergenz der betrachteten Folge) $d(x, x_n) < \varepsilon$ (konvergente Folgen sind in X Cauchy-Folgen) dies bedeutet dass Folgeglieder mit Index $n > N$ in $B(x, \varepsilon)$

" \Leftarrow " Wir nehmen jetzt an dass $A \subset X$ nicht offen ist. Dies bedeutet dass $\exists x \in A, \varepsilon > 0 \quad B(x, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$. Insbesondere können wir $\varepsilon = 2^{-1}$ betrachten und eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konstruieren mit $x_n \in B(x, 2^{-n}) \cap A^c$. Es gilt für diese Folge aber auch dass $x_n \rightarrow x \in A$.

Der Fall der Geschlossene Menge:

" \Rightarrow " Wir nehmen an dass A abgeschlossen ist. Wir betrachten dann eine beliebige Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \rightarrow x \in X$. Da $V := X/A = A^c$ offen ist, kann der Grenzwert x nicht in dieser offenen Menge liegen, da sonst die Folgenglieder ab einem bestimmten Index ebenfalls in dieser offenen Menge liegen müssen, damit muss gelten dass: $x \in A$.

" \Leftarrow " Wir nehmen an dass A nicht abgeschlossen ist, dann ist A^c nicht offen. Dies bedeutet dass: $\exists y \in A^c, \forall \varepsilon > 0 \quad B(y, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Damit kann man eine Folge konstruieren $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $d(y, x_n) < \varepsilon \Rightarrow x_n \rightarrow y \in A^c$. Dann ist der Beweis fertig.

Proposition Es sei (X, d) ein Metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert genau dann gegen x wenn alle offene Mengen U gilt:

$$\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \quad x_n \in U$$

Beweis " \Rightarrow " Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegen x konvergierende Folge, es sei ausserdem U offen mit $x \in U$. Da U offen ist: $\exists \varepsilon > 0 B(x, \varepsilon)$ Dann gilt auch

$$\forall \varepsilon \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \quad d(x, x_n) < \varepsilon$$

" \Leftarrow " $\forall \varepsilon \quad B(x, \varepsilon)$ ist offen. Und es gilt $\exists N \in \mathbb{N} : x_n \in B(x, \varepsilon) \quad \forall n > N$ Dies bedeutet gemäss definition dass $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Korollar Es sei X eine Menge und d_1, d_2 zwei verschieden Metriken. Dann haben $(X, d_1), (X, d_2)$ genau dann die selben konvergente Folgen wenn die Topologien von d_1 und d_2 übereinstimmen.

1.4 Banachscher Fixpunkttheorem

Sei (X, d) Ein Vollständiger Metrischer raum mit eine Abbildung $f : X \rightarrow X$ die Lipschitz stetig ist mit $L < 1$

$$\forall x, x' \in X \quad d(f(x), f(x')) \leq Ld(x, x')$$

Dann gibt es ein wert $z \in X$ wofür $f(z) = z$

Beweis der Existenz des Fixpunkts Wir nehmen $x \in x_0$ beliebig, dann konstruieren wir iterativ eine Folge in X und zwar wie folgt: $x_{n+1} := f(x_n)$ Dies ergibt tatsächlich eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ Als nächstes wollen wir Zeigen dass diese Folge eine Cauchy-Folge ist.

- $d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) = d(f^n(x_0), f^{n-1}(x_0)) \leq L^n d(x_1, x_0)$
- $d(x_m, x_n) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_{k+1}, x_k) \leq \sum_{k=n}^{m-1} L^k d(x_1, x_0) = d(x_1, x_0) \sum_{k=n}^{m-1} L^k$ Und diese Reihe ist für $L < 1 \quad \forall n, m \in \mathbb{N}_0$ und sogar $m \rightarrow \infty$ konvergent. Und wir finden:

$$\forall m, n \in \mathbb{N}_0, d(x_n, x_m) \leq d(x_1, x_0) \underbrace{\frac{L^n}{1-L}}_{\text{für } n \rightarrow \infty, \rightarrow 0}$$

Und damit ist unsere Folge eine Cauchy-Folge

Es bleibt noch zu zeigen dass \bar{x} ein Fixpunkt ist:

$$f(\bar{x}) = \lim_{\text{irgendwairgendwass}}$$

1.5 Kompaktheit

Ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist kompakt genau dann wenn I beschränkt und abgeschlossen ist. Die beschränktheit geht aber nicht trivial in den Metrischen Raum über.

Definition Sei (X, d) ein Metrischer Raum, und K Eine Teilmenge.

- K heisst Folgenkompakt falls jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset K$ eine in K konvergente Teilfolge.
- K heisst Topologisch Kompakt falls jede Familie von Offenen Mengen $\mathbb{U} := \{U_i\}_i \in I$, welche K uberdeckt, also dass:

$$K \subset \bigcup \mathbb{U} = \bigcup_{i \in I} U_i$$

eine Endliche Teilüberdeckung besitzt, (eine endliche familie welche K immer noch überdeckt.)

Theorem