第四章

4.1

1. $1-\mathrm{e}^{-\alpha t} \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+\alpha}=\dfrac{\alpha}{s(s+\alpha)}$.
2. $t\mathrm{e}^{-2t} \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \dfrac{1}{(s+2)^2}$.
3. $[1-\cos(\alpha t)]\mathrm{e}^{-\beta t} \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \dfrac{1}{s+\beta}-\dfrac{s+\beta}{(s+\beta)^2+\alpha^2}$.
4. $2\delta(t)-3\mathrm{e}^{-7t} \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} 2-\dfrac{3}{s+7}$.
5. $\mathrm{e}^{-\alpha t}\sinh(\beta t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \dfrac{\beta}{(s+\alpha)^2-\beta^2}$.
6. $\dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha t}-\mathrm{e}^{-\beta t}}{\beta-\alpha} \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \dfrac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$.
7. $\mathrm{e}^{-(t+a)}\cos(\omega t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \dfrac{(s+1)\mathrm{e}^{-a}}{(s+1)^2+\omega^2}$.
8. 为了利用时移性质，先将函数拆开：

   $$t\mathrm{e}^{-(t-2)}u(t-1)=\left((t-1)\mathrm{e}^{-(t-1)}+\mathrm{e}^{-(t-1)}\right)\mathrm{e}\cdot u(t-1) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{s+2}{(s+1)^2}\mathrm{e}^{-(s-1)}.$$
9. $\mathrm{e}^{-at}f\left(\dfrac{t}{a}\right) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} aF(as+a^2)$.
10. 注：频域卷积难以求解，可利用频域微分性质.

    $$t^2\cos(2t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} (-1)^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\frac{s}{s^2+4}=\frac{2s^3-24s}{(s^2+4)^3}.$$
11. 法一：频域积分

    $$\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha t}}{t} \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \int_s^{+\infty}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\alpha}\right)\mathrm{d}s=\ln\frac{s}{s+\alpha}\bigg|_s^{+\infty}=\ln\left(1+\frac{a}{s}\right).$$

    法二：幂级数展开

    $$\begin{aligned}\frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha t}}{t}&=\alpha-\frac{\alpha^2 t}{2}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{\alpha^n t^{n-1}}{n!}\\&\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}\frac{\alpha}{s}-\frac{\alpha^2}{2s^2}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{\alpha^n}{ns^n}\\&=\ln\left(1+\frac{a}{s}\right).\end{aligned}$$

    备注：使用幂级数展开法时，需要验证展开系数是否满足条件.
12. 与第 11 题相同，

    $$\frac{\mathrm{e}^{-3t}-\mathrm{e}^{-5t}}{t} \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \int_s^{+\infty}\left(\frac{1}{s+3}-\frac{1}{s+5}\right)\mathrm{d}s=\ln\frac{s+5}{s+3}.$$
13. $\dfrac{4}{2s+3} \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} 2\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t}$.
14. $\dfrac{4}{s(2s+3)}=\dfrac{4}{3s}-\dfrac{4}{3}\dfrac{1}{s+\frac{3}{2}} \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \dfrac{4}{3}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t}\right)$.
15. $\dfrac{1}{s(s^2+5)}=\dfrac{1}{5s}-\dfrac{1}{5}\dfrac{s}{s^2+5} \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \dfrac{1-\cos\left(\sqrt{5}t\right)}{5}$.

16. $\dfrac{3s}{(s+4)(s+2)}=\dfrac{6}{s+4}-\dfrac{3}{s+2}\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}6\mathrm{e}^{-4t}-3\mathrm{e}^{-2t}$.
17. $\dfrac{1}{s^2+1}+1\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}\sin t+\delta(t)$.
18. $\dfrac{1-RCs}{s(1+RCs)}=\dfrac{1}{s}-\dfrac{2}{s+\dfrac{1}{RC}}\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}1-2\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$.
19. $\dfrac{4s+5}{s^2+5s+6}=\dfrac{7}{s+3}-\dfrac{3}{s+2}\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}7\mathrm{e}^{-3t}-3\mathrm{e}^{-2t}$.
20. 思路一：频域微分性质

由 $\cos\left(\sqrt{3}t\right)u(t)\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}\dfrac{s}{s^2+3}$，有 $t\cos\left(\sqrt{3}t\right)u(t)\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}\dfrac{s^2-3}{(s^2+3)^2}$，于是

$$\begin{aligned}\frac{1}{(s^2+3)^2}&=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{s^2+3}-\frac{s^2-3}{(s^2+3)^2}\right)\\&\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}\frac{\sin\left(\sqrt{3}t\right)}{6\sqrt{3}}-\frac{t\cos\left(\sqrt{3}t\right)}{6}.\end{aligned}$$

思路二：时域卷积性质

$$\begin{aligned}\frac{1}{(s^2+3)^2}&\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}\frac{1}{3}\sin\left(\sqrt{3}t\right)u(t)*\sin\left(\sqrt{3}t\right)u(t)\\&=\frac{\sin\left(\sqrt{3}t\right)-\sqrt{3}t\cos\left(\sqrt{3}t\right)}{6\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

21. 利用极限法与特值代入法，计算量不大：

$$\begin{aligned}&\frac{s}{(s+a)\left[(s+\alpha)^2+\beta^2\right]}\\=&\frac{-a}{(a-\alpha)^2+\beta^2}\left(\frac{1}{s+a}-\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}-\frac{\alpha^2+\beta^2-a\alpha}{a\beta}\frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}\right)\\\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}&\frac{-a}{(a-\alpha)^2+\beta^2}\left(\mathrm{e}^{-at}-\left(\cos(\beta t)+\frac{\alpha^2+\beta^2-a\alpha}{a\beta}\sin(\beta t)\right)\mathrm{e}^{-\alpha t}\right).\end{aligned}$$

22. $\ln\dfrac{s}{s+9}\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}\dfrac{\mathrm{e}^{-9t}-1}{t}$.

备注

- 具体思路参考拉普拉斯变换的性质、拉普拉斯逆变换的求解的笔记.
- 更严谨而完整的，应该给出拉氏变换的收敛域. 注意有些结果看似不同，但在收敛域交定义域内确是相同的. 本题没有这样的例子.
- 第 9 题应说明 $a>0$.
- 第 11 题不能对两项分别求拉普拉斯变换，因为拉氏变换并不存在. 实际上，有

$$\frac{u(t)}{(t+a)^n}\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}\begin{cases}s^{n-1}\mathrm{e}^{as}\displaystyle\int_{-\infty}^{-as}\frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{(-x)^n}, & a>0,n\in\mathbb{R},\\ s^{n-1}\mathrm{e}^{as}\Gamma(1-n,as), & a\in\mathbb{R},n<1,\\ \text{不存在}, & a\leq 0,n\geq 1.\end{cases}$$

  其中上式不能用幂级数展开法求解，因为不满足条件.（11 题则满足条件）

  右式的积分为柯西主值积分. 由上，特殊的，有

  - 当 $n\in\mathbb{N}$ 时，有 $t^nu(t)\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}\dfrac{n!}{s^{n+1}}$.
  - 当 $a>0$ 时，有 $\dfrac{u(t)}{t+a}\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}-\mathrm{e}^{as}\,\mathrm{Ei}(-as)$.

- 诸如第 20 题的结论，可直接参考笔记. 了解思路后，使用时查表即可. 这里也直接列出吧：

象函数 $F(s)$	原函数 $f(t)$	说明
$\dfrac{1}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\dfrac{\sin(\omega t)-\omega t\cos(\omega t)}{2\omega^3}$	$\omega\in\mathbb{C}$.
$\dfrac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\dfrac{t\sin(\omega t)}{2\omega}$	$\omega\in\mathbb{C}$.
$\dfrac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\dfrac{\sin(\omega t)+\omega t\cos(\omega t)}{2\omega}$	$\omega\in\mathbb{C}$.
$\dfrac{s^3}{(s^2+\omega^2)^2}$	$\cos(\omega t)-\dfrac{\omega t}{2}\sin(\omega t)$	$\omega\in\mathbb{C}$.
$\dfrac{1}{(s^2+\omega^2)^3}$	$\dfrac{\left(3-t^2\omega^2\right)\sin(t\omega)-3t\omega\cos(t\omega)}{8\omega^5}$	$\omega\in\mathbb{C}$.
$\dfrac{s}{(s^2+\omega^2)^3}$	$\dfrac{t(\sin(t\omega)-t\omega\cos(t\omega))}{8\omega^3}$	$\omega\in\mathbb{C}$.

- 第 20 题中利用到的卷积的结论，也罗列如下：
  - 角频率不同

$$
\begin{aligned}
\sin(at)u(t)*\sin(bt)u(t)&=\frac{a\sin(bt)-b\sin(at)}{a^2-b^2}u(t),\\
\sin(at)u(t)*\cos(bt)u(t)&=\frac{a\cos(bt)-a\cos(at)}{a^2-b^2}u(t),\\
\cos(at)u(t)*\cos(bt)u(t)&=\frac{a\sin(at)-b\sin(bt)}{a^2-b^2}u(t).
\end{aligned}
$$

- 角频率相同

$$
\begin{aligned}
\sin(\omega t)u(t)*\sin(\omega t)u(t)&=\frac{\sin(\omega t)-\omega t\cos(\omega t)}{2\omega}u(t),\\
\sin(\omega t)u(t)*\cos(\omega t)u(t)&=\frac{t\sin(\omega t)}{2}u(t),\\
\cos(\omega t)u(t)*\cos(\omega t)u(t)&=\frac{\sin(\omega t)+\omega t\cos(\omega t)}{2\omega}u(t).
\end{aligned}
$$

- 第 21 题的答案中，右中括号的位置错了.
- 第 22 题，一般的，有 $\dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha t}-\mathrm{e}^{-\beta t}}{t}\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}\ln\dfrac{s+\beta}{s+\alpha}$，其中 $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$.

4.2

1. $\mathrm{e}^{-t}u(t-2)=\mathrm{e}^{-2}\cdot\mathrm{e}^{-(t-2)}u(t-2)\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}\dfrac{\mathrm{e}^{-2(s+1)}}{s+1}$.
2. $\mathrm{e}^{-(t-2)}u(t-2)\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}\dfrac{\mathrm{e}^{-2s}}{s+1}$.
3. $\mathrm{e}^{-(t-2)}u(t)=\mathrm{e}^{2}\cdot\mathrm{e}^{-t}u(t)\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}\dfrac{\mathrm{e}^{2}}{s+1}$.
4. 先考虑

$$
\begin{aligned}
\sin(2t+2)&=\sin2t\cos2+\cos2t\sin2\\
&\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}\frac{2\cos2+s\sin2}{s^2+4},
\end{aligned}
$$

于是 $\sin(2t)u(t-1)\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}\dfrac{2\cos2+s\sin2}{s^2+4}\mathrm{e}^{-s}$.

5. 拆分后求解：

$$
\begin{aligned}
&(t-1)\left[u(t-1)-u(t-2)\right]\\
=&(t-1)u(t-1)-(t-2)u(t-2)-u(t-2)\\
\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}&\frac{\mathrm{e}^{-s}-(s+1)\mathrm{e}^{-2s}}{s^2}.
\end{aligned}
$$

4.3

1. 拆分后求解：

$$
\begin{aligned}
tu(2t-1)&=\left(t-\frac{1}{2}\right)u(2t-1)+\frac{u(2t-1)}{2}\\
&\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}\frac{s+2}{2s^2}\mathrm{e}^{-\frac{s}{2}}.
\end{aligned}
$$

2. $u\left(\dfrac{t}{2}-1\right)=u(t-2)\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}\dfrac{\mathrm{e}^{-2s}}{s}$.
3. 直接利用定义（也可以使用性质）

$$
\begin{aligned}
&\sin(\pi t)\left[u(t)-u(t-1)\right]\\
\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}&\int_0^1\sin(\pi t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\\
=&\left.\frac{-s\sin(\pi t)-\pi\cos(\pi t)}{s^2+\pi^2}\mathrm{e}^{-st}\right|_0^1\\
=&\frac{(1+\mathrm{e}^{-s})\pi}{\pi^2+s^2}.
\end{aligned}
$$

4. 拆开：

$$
\begin{aligned}
\sin\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)u(t)&=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2t)u(t)-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2t)u(t)\\
&\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{2-s}{s^2+4}.
\end{aligned}
$$

5. 法一：由 $\mathrm{e}^{-t}\sin(t)u(t)\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}\dfrac{1}{(s+1)^2+1}$ 和时域微分性质，

$$
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\mathrm{e}^{-t}\sin(t)u(t)\right)\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}\frac{s^2}{(s+1)^2+1}.
$$

法二：直接求导，没法一快，但计算量也不大.

6. 先求 $\mathcal{L}\left[\mathrm{Sa}(t)\right]$.

法一：频域积分

$$
\mathrm{Sa}(t)\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}\int_s^{+\infty}\frac{\mathrm{d}s}{s^2+1}=\frac{\pi}{2}-\arctan(s).
$$

法二：幂级数展开

$$\begin{aligned}\mathrm{Sa}(t) &= 1 - \frac{t^2}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!} \\ &\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{1}{s} - \frac{1}{3s^3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)s^{2n+1}} \\ &= \arctan\left(\frac{1}{s}\right) = \operatorname{arccot}(s)\end{aligned}$$

法三：利用 $\mathrm{Sa}(t)u(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{\pi}{2} - \mathrm{j}\,\mathrm{arth}(\omega)$，于是 $\mathrm{Sa}(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{\pi}{2} - \arctan(s)$.

之后由尺度性质即有 $\frac{\sin(at)}{t} = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{s}{a}\right)$.

7. 由 4.1 题第 22 问的备注中的结论，$\frac{\mathrm{e}^{-3t} - \mathrm{e}^{-5t}}{t} \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \ln\frac{s+5}{s+3}$.

备注　第六问中用三种方法得到的结果看似不同，但在收敛域与定义域的交集内是相同的.

4.4

1. $f(0_+) = \lim_{s\to\infty} sF(s) = 1, f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s) = 0$.
2. $f(0_+) = 1, f(\infty) = 0$.
3. $f(0_+) = 0, f(\infty) = \frac{1}{2}$.
4. $f(0_+) = 0, f(\infty) = 0$.
5. $f(0_+) = 2, f(\infty)$ 不存在.
6. $f(0_+) = 0, f(\infty)$ 不存在.

备注

- 终值定理要求极点在左半平面，因此第五题不能使用终值定理.（或者是否可以用某种方式为所有发散的级数定义极限？似乎是一个在理论上有趣、在数学上有意义、在应用中有价值的问题）
- 对于初值定理，如果非真分式，则应化为真分式后再使用定理.
- 注意 $\delta(0_-) = \delta(0_+) = 0$.

4.5

1. 法一（直接卷积）

$$\begin{aligned}y_{\mathrm{zs}}(t) &= tu(t) - (t-2)u(t-2) - \frac{1-\mathrm{e}^{-2t}}{2}u(t) + \frac{1-\mathrm{e}^{-2(t-2)}}{2}u(t-2) \\ &= \left(t + \frac{\mathrm{e}^{-2t}-1}{2}\right)u(t) + \left(\frac{5-\mathrm{e}^{-2(t-2)}}{2} - t\right)u(t-2)\end{aligned}$$

   法二（拉普拉斯变换）

   - $H(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}$.
   - $F(s) = \frac{1-\mathrm{e}^{-2s}}{s}$.
   - $Y_{\mathrm{zs}}(s) = \frac{2(1-\mathrm{e}^{-2s})}{s^2(s+2)}$.

   从而部分分式展开求得逆变换.

2. $Y_{\mathrm{zs}}(s) = \frac{2}{s^3}$,
   $F(s) = \frac{s+2}{s^2}$.
   $f(t) = (1+2t)u(t)$.

备注

- 第一问答案有误，已由计算机验证：

```
Convolve[
    (1 - E^(-2 t)) UnitStep[t],
    UnitStep[t] - UnitStep[t - 2],
    t, x
] // TrigToExp
```

4.6

1. $F(s) = \frac{1}{s+1}$.
2. $Y_{\mathrm{zs}}(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s+2} + \frac{3}{s+3}$.
3. $H(s) = 2 + \frac{2}{s+2} - \frac{6}{s+3}$.
4. 后续思路一：

   1. $h(t) = 2\delta(t) + \left(2\mathrm{e}^{-2t} - 6\mathrm{e}^{-3t}\right)u(t)$.
   2. $g(t) = h^{(-1)}(t) = (1 - \mathrm{e}^{-2t} + 2\mathrm{e}^{-3t})u(t)$.
5. 后续思路二:
   1. $U(s) = \dfrac{1}{s}$.
   2. $G(s) = \dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s+2} + \dfrac{2}{s+3}$.
   3. $g(t) = (1 - \mathrm{e}^{-2t} + 2\mathrm{e}^{-3t})u(t)$.

4.7

1. $sY(s) - 1 + 2Y(s) = F(s) = \dfrac{1}{s}$.
2. $Y(s) = \dfrac{s+1}{s(s+2)} = \dfrac{1}{2s} + \dfrac{1}{2(s+2)}$.
3. $y(t) = \dfrac{1+\mathrm{e}^{-2t}}{2}u(t)$.

4.8

0. $H(s) = \dfrac{2s+2}{(s+2)(s+1)} = \dfrac{2}{s+2}$.
   $h(t) = 2\mathrm{e}^{-2t}u(t)$.
1. $Y_{\mathrm{zs}}(s) = \left(\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s+2}\right)\mathrm{e}^{-2s}$.
   $y_{\mathrm{zs}}(t) = \left(1 - \mathrm{e}^{-2(t-2)}\right)u(t-2)$.
2. $Y_{\mathrm{zs}}(s) = \dfrac{2}{s+1} - \dfrac{2}{s+2}$.
   $y_{\mathrm{zs}}(t) = 2(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t})u(t)$.
3. $Y_{\mathrm{zs}}(s) = \dfrac{2}{s^2(s+2)} = \dfrac{1}{2(s+2)} + \dfrac{1}{s^2} - \dfrac{1}{2s}$.
   $y_{\mathrm{zs}}(t) = \left[t + \dfrac{\mathrm{e}^{-2t} - 1}{2}\right]u(t)$.

备注　以上三题直接卷积其实来的更快. 因为这里每题单独算的话，二者计算量差不多. 但是单位冲激响应只需要计算一次，而用拉氏变换的话需要为每个信号计算拉氏变换. 对于 $f(t) = t^n u(t)$，使用卷积的计算量也更小，因为可以直接使用不完全伽马函数的结论.（需要注意大部分情况下是恰好相反的）

4.9

1. $h(t) = 2\mathrm{e}^{-2t}$.
2. $H(s) = \dfrac{2}{s+2}$.
3. $R(s) = \dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s+2} - \dfrac{1}{(s+2)^2}$.
4. $E(s) = \dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{2(s+2)}$.
5. $e(t) = \left(1 - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right)u(t)$.

4.10

1. $I(s) = \dfrac{E}{s}\left(R + sL \,/\!/\, \dfrac{1}{sC}\right)^{-1} = \dfrac{E}{s}\dfrac{s^2LC+1}{RLCs^2 + Ls + R}$.
2. $i(t) = E\left(\dfrac{L\left(\exp\left(t\left(-\frac{\sqrt{-L(4CR^2-L)}}{2CLR} - \frac{1}{2CR}\right)\right) - \exp\left(t\left(\frac{\sqrt{-L(4CR^2-L)}}{2CLR} - \frac{1}{2CR}\right)\right)\right)}{R\sqrt{-L\left(4CR^2 - L\right)}} + \dfrac{1}{R}\right)$.

备注　不给出数值写着怪麻烦的，因此本题由 mathematica 求解.

4.11

1. 如下:

$$H(s) = \frac{\left(\frac{1}{R_0} + sC + \frac{1}{sL}\right)^{-1}}{R + \left(\frac{1}{R_0} + sC + \frac{1}{sL}\right)^{-1}} = \frac{1}{RC}\frac{s}{s^2 + \frac{R+R_0}{RR_0C}s + \frac{1}{LC}},$$

$$h(t) = \frac{\left(\cosh\left(\frac{t(R+R_0)}{2CRR_0}\right) - \sinh\left(\frac{t(R+R_0)}{2CRR_0}\right)\right)\left(\sqrt{L\left(L(R+R_0)^2 - 4CR^2{R_0}^2\right)}\cosh\left(\frac{t\sqrt{L\left(L(R+R_0)^2-4CR^2{R_0}^2\right)}}{2CLRR_0}\right) - L(R+R_0)\sinh\left(\frac{t\sqrt{L(L(\cdots}}{\cdots}\right.\right.}{CR\sqrt{L\left(L(R+R_0)^2 - 4CR^2{R_0}^2\right)}}$$

2. 如下:

```
H = Apart[((
    Subscript[R, 1] + Subscript[R, 2] + 1/(s Subscript[C, 2]))/(
    Subscript[R, 1] Subscript[R, 2] s Subscript[C, 1]) + 1/(
    Subscript[R, 2] Subscript[C, 2] s) + 1)^-1, s
]
H // TeXForm

h = InverseLaplaceTransform[H, s, t]
h // TeXForm
```

4.12

1. $u_C(0_-) = \dfrac{E}{2}$.
2. $I(s) = \dfrac{E}{2L} \dfrac{1}{s^2 + \dfrac{1}{LC}}$.
3. $i(t) = \dfrac{E}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L}} \sin\left(\dfrac{t}{\sqrt{LC}}\right) u(t)$.

4.13

1. $e(t) = E(1 - \dfrac{t}{T})u(t) + \dfrac{Et}{T}u(t-T)$.
2. $E(s) = \dfrac{E}{s} - \dfrac{E}{Ts^2} + \dfrac{s+1}{s^2}E\mathrm{e}^{-sT}$.
3. $H(s) = \dfrac{s}{2(s+20)}$.
4. $v_2(t) = \dfrac{E}{2}\left(e^{-20(t-T)}u(t-T) + \left(\dfrac{1}{20} - \dfrac{1}{20}e^{-20(t-T)}\right)u(t-T) - \dfrac{\frac{1}{20} - \frac{e^{-20t}}{20}}{T} + e^{-20t}\right)$.

4.14

1. 由 $(V_1 - (s+1)V_2 - sV_2)\dfrac{1}{s} = (s+1)V_2$，得 $H(s) = \dfrac{k}{s^2 + (3-k)s + 1}$.
2. $h(t) = \dfrac{4}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \sin \dfrac{\sqrt{3}}{2}tu(t)$.

备注　相比于前几题，这题是真的善良（各种意义上）.

4.15

1. $F_\mathrm{a}(s) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-\frac{T}{2}s}}{s\left(1 - \mathrm{e}^{-sT}\right)} = \dfrac{1}{s\left(1 + \mathrm{e}^{-\frac{sT}{2}}\right)}$.
2. $F_\mathrm{b}(s) = \dfrac{\omega}{s^2 + \omega^2} \dfrac{1 + \mathrm{e}^{-\frac{sT}{2}}}{1 - \mathrm{e}^{-\frac{sT}{2}}}, \omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

备注　周期函数可直接使用结论；周期函数与其他函数相乘，可以从定义与性质出发.

4.16

1. 思路一

$$f(t)\delta_{T_\mathrm{s}}(t) = f(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t - nT_\mathrm{s}) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{F(s)}{2\pi\mathrm{j}} * \sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-s \cdot nT_\mathrm{s}}.$$

   思路二

$$f(t)\delta_{T_\mathrm{s}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_\mathrm{s})\delta(t - nT_\mathrm{s}) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_\mathrm{s})\mathrm{e}^{-s \cdot nT_\mathrm{s}}.$$

   思路三

$$f(t)\delta_{T_\mathrm{s}}(t) = f(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_\mathrm{s}t}}{T_\mathrm{s}} \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{F(s)}{2\pi\mathrm{j} \cdot T_\mathrm{s}} * \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{s + \mathrm{j}n\omega_\mathrm{s}}.$$

   思路四

$$f(t)\delta_{T_\mathrm{s}}(t) \overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} \frac{F(s)}{2\pi\mathrm{j}} * \mathcal{L}\left[\delta_{T_\mathrm{s}}(t)\right] = \frac{F(s)}{2\pi\mathrm{j}} * \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-st}}.$$

   以上四种形式是等价的.

2. $F_\mathrm{s}(s) = \dfrac{1}{1 - \mathrm{e}^{-(s+a)T}}$.

4.17

1. $H_3(s) = \dfrac{1}{s}$.

   $H(s) = \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s+1} - \dfrac{1}{s+2}$.

   $h(t) = \left(1 + \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}\right)u(t)$.

2. 法一（直接卷积）：$y_{\text{zs}}(t) = \left(t + \dfrac{1}{2} - \mathrm{e}^{-t} + \dfrac{\mathrm{e}^{-2t}}{2}\right)u(t)$.

   法二（拉氏变换）：

   $Y_{\text{zs}}(s) = \dfrac{1}{s^2} + \dfrac{1}{2s} - \dfrac{1}{s+1} + \dfrac{1}{2(s+2)}$.

   $y_{\text{zs}}(t) = \left(t + \dfrac{1}{2} - \mathrm{e}^{-t} + \dfrac{\mathrm{e}^{-2t}}{t}\right)u(t)$.

4.18

1. $H(s) = (1 + H_1(s))H_2(s) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-2s}}{s}$。

   $h(t) = u(t) - u(t-2)$.

2. 法一（直接卷积）：$y_{\text{zs}}(t) = \dfrac{t^2}{2}u(t) - \dfrac{(t-2)^2}{2}u(t-2)$.

   法二（拉氏变换）：

   $Y_{\text{zs}}(t) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-2s}}{s^3}$.

   $y_{\text{zs}}(t) = \dfrac{t^2}{2}u(t) - \dfrac{(t-2)^2}{2}u(t-2)$.

4.19

$$
\begin{aligned}
(1)\quad H(s) &= \frac{C_1}{C_1+C_2}\frac{s+\dfrac{1}{RC_1}}{s+\dfrac{1}{R(C_1+C_2)}},\\
h(t) &= \frac{C_1}{C_1+C_2}\left[\delta(t) + \frac{C_2}{RC_1(C_1+C_2)}\mathrm{e}^{-\frac{t}{R(C_1+C_2)}}u(t)\right].\\
(2)\quad H(s) &= \frac{L_2}{L_1+L_2}\frac{s}{s+\dfrac{R}{L_1+L_2}},\\
h(t) &= \frac{L_2}{L_1+L_2}\left[\delta(t) - \frac{R}{L_1+L_2}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L_1+L_2}}u(t)\right].\\
(3)\quad H(s) &= \frac{s}{10s^2+s+10},\\
h(t) &= \frac{e^{-t/20}\left(\sqrt{399}\cos\left(\frac{\sqrt{399}t}{20}\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{399}t}{20}\right)\right)}{10\sqrt{399}}.\\
(4)\quad H(s) &= \frac{0.1s}{s+1},\\
h(t) &= 0.1\left[\delta(t) - \mathrm{e}^{-t}u(t)\right].
\end{aligned}
$$

备注　第四问很重要 ⭐，应当认为<u>右侧为开路电压</u>，这是合理且默认的条件，否则缺少条件而无法计算. 具体有如下思路：

1. 直接从耦合电感的公式出发.
2. 采用并联电感的互感消去法.
3. 使用空心变压器的等效公式.（T 形电路）.

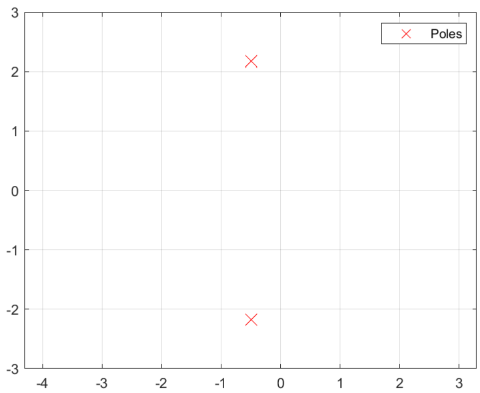
附　MATLAB 绘制图像的函数编写如下，上述问题给出特值后调用即可.

```matlab
function plotpzd(a, b, showCircle)
% Plot the zeros-poles distribution map
% Variable a is a denominator coefficient vector,
% and b is a nominator coefficient vector.

ps = roots(a);          % roots of denominator polynomial
zs = roots(b);          % roots of nominator polynomial
legStr = [];            % legend string

if (~isempty(zs))
    plot(real(zs), imag(zs), 'o');  hold on;
    legStr = [legStr; 'Zeros'];
end
if (~isempty(ps))
    plot(real(ps), imag(ps), 'rx', 'markersize', 12);
    legStr = [legStr; 'Poles'];
end
if(~exist('showCircle','var'))
    showCircle = false;
```

```
end
if (showCircle)
    rectangle('position', [-1, -1, 2, 2], 'curvature', [1,1], 'LineStyle', ':')
end

xmin = floor(min([real(ps); real(zs)]));    xmin = min(xmin, -1);
xmax = ceil(max([real(ps); real(zs)]));     xmax = max(xmax, 1);
ymin = floor(min([imag(ps); imag(zs)]));    ymin = min(ymin, -1);
ymax = ceil(max([imag(ps); imag(zs)]));     ymax = max(ymax, 1);
axis([xmin xmax ymin ymax]), axis equal;
legend(legStr), grid on;

% set(gca,'YAxisLocation','origin');
% set(gca,'XAxisLocation','origin');

end
```

4.20

1. $H(s) = \dfrac{5}{s^2 + s + 5}$.
2.



3. $h(t) = \dfrac{10e^{-t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{19}t}{2}\right)}{\sqrt{19}}$.

$$g(t) = 1 - \frac{e^{-t/2}\left(\sin\left(\frac{\sqrt{19}t}{2}\right) + \sqrt{19}\cos\left(\frac{\sqrt{19}t}{2}\right)\right)}{\sqrt{19}}.$$

4.21