# 5 时变电磁场

#### 5.1 麦克斯韦方程组

- 5.1.1 麦克斯韦第一方程
- 5.1.2 麦克斯韦第二方程
- 5.1.3 麦克斯韦第三方程
- 5.1.4 麦克斯韦第四方程
- 5.1.5 麦克斯韦方程组
- 5.1.6 媒质的本构方程
- 5.2 时变电磁场的边界条件
- - 5.2.1 法向场的边界条件
  - 5.2.2 切向场的边界条件
  - 5.2.3 边界条件公式总结

#### 5.3 坡应廷定理

- 5.3.1 能量密度与损耗功率
- 5.3.2 坡应廷定理物理含义
- 5.3.3 坡应廷矢量的瞬时值

#### 5.4 时谐电磁场与复数形式

- 5.4.1 时谐电磁场的复数形式
- 5.4.2 麦克斯方程组复数形式
- 5.4.3 能量密度的复数表示法
- 5.4.4 坡应廷定理的复数形式
- 5.4.5 复坡应廷矢量物理含义
- 5.4.6 各种形式的记号的总结

#### 5.5 波动方程

- 5.5.1 非齐次波动方程
- 5.5.2 齐次波动方程
- 5.5.3 齐次亥姆霍兹方程
- 5.6 时变场的标量位与矢量位
  - 5.6.1 标量位与矢量位及其多值性
  - 5.6.2 洛伦兹规范与达朗贝尔方程
  - 5.6.3 达朗贝尔方程解的形式
  - 5.6.4 达朗贝尔方程复数形式

# 5.1 麦克斯韦方程组

### 5.1.1 麦克斯韦第一方程

- 电荷守恒定律(电流连续性方程)
  - 。 积分形式:  $\oint_{S} \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d} \boldsymbol{S} = -\frac{\mathrm{d} Q}{\mathrm{d} t}$ .
  - 。 微分形式:  $oldsymbol{
    abla} \cdot oldsymbol{J} = -rac{\partial 
    ho}{\partial t}.$
  - 。 媒质分界:  $oldsymbol{
    abla}_t \cdot oldsymbol{J}_S + (oldsymbol{J}_{1\mathrm{n}} oldsymbol{J}_{2\mathrm{n}}) = -rac{\partial 
    ho_\mathrm{s}}{\partial t}.$
- 广义安培环路定理 (麦克斯韦第一方程)
  - 。 微分形式:  $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ .

。 积分形式: 
$$\oint_l m{H} \cdot \mathrm{d}m{l} = \int_S \left( m{J} + rac{\partial m{D}}{\partial t} 
ight) \cdot \mathrm{d}m{S}.$$

• 全电流密度  $m{J} + m{J}_{
m d}$ .

$$\circ \ \boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_{\mathrm{i}} + \boldsymbol{J}_{\mathrm{c}} + \boldsymbol{J}_{\mathrm{v}}.$$

- 外加电流密度  $J_{i}$ .
- 传导电流密度  $J_c = \sigma E$ .
- $lacksymbol{\bullet}$  运流电流密度  $oldsymbol{J}_{ ext{v}}=
  hooldsymbol{v}.$
- $\circ$  位移电流密度  $oldsymbol{J}_{ ext{d}}=rac{\partial oldsymbol{D}}{\partial t}.$

$$lacksquare D = arepsilon_0 m{E} + m{P}$$
.

- 即由变化的电场和电偶极矩组成.
- 。 传导电流和位移电流的比较
  - 频率越高,位移电流密度  $J_{\mathrm{d}}$  越大,而传导电流不受影响.
  - 因此水下无法用高频通信,海军使用长波通信.(微波怕水)

### 5.1.2 麦克斯韦第二方程

- 总电场  $m{E} = m{E}_{\mathrm{C}} + m{E}_{\mathrm{in}}.$ 
  - 库仑电场 **E**<sub>C</sub>.
  - 。 感应电场  $m{E}_{\mathrm{in}}$ .
- 法拉第电磁感应定律

$$ullet \ \mathscr{E}_{\mathrm{in}} = -rac{\partial \Phi}{\partial t} = -rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S oldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}oldsymbol{S}.$$

$$\circ \mathscr{E}_{\mathrm{in}} = \oint_{l} \boldsymbol{E}_{\mathrm{in}} \cdot \mathrm{d} \boldsymbol{l}.$$

• 若导体与回路均变化

$$oldsymbol{\circ} \ \mathscr{E}_{ ext{in}} = -\int_{S} rac{\partial oldsymbol{B}}{\partial t} oldsymbol{\cdot} \, \mathrm{d}oldsymbol{S} + \oint_{l} (oldsymbol{v} imes oldsymbol{B}) oldsymbol{\cdot} \, \mathrm{d}oldsymbol{l}.$$

$$oldsymbol{\circ} \; oldsymbol{
abla} imes oldsymbol{E}_{ ext{in}} = -rac{\partial oldsymbol{B}}{\partial t} + oldsymbol{
abla} imes (oldsymbol{v} imes oldsymbol{B}).$$

• 麦克斯韦第二方程

。 积分形式: 
$$\oint_l oldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}oldsymbol{l} = - \int_S rac{\partial oldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}oldsymbol{S}.$$

。 微分形式: 
$$oldsymbol{
abla} imesoldsymbol{E}=-rac{\partial oldsymbol{B}}{\partial t}.$$

。 时变电场有旋, 非保守场.

### 5.1.3 麦克斯韦第三方程

• 积分形式:  $\oint_S m{D} \cdot \mathrm{d} m{S} = Q.$ 

• 微分形式:  $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$ .

# 5.1.4 麦克斯韦第四方程

• 积分形式:  $\oint_S m{B} \cdot \mathrm{d} m{S} = 0.$ 

• 微分形式:  $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ .

### 5.1.5 麦克斯韦方程组

$$\begin{cases} \oint_{l} \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_{S} \left( \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \right) \cdot d\boldsymbol{S}, \\ \oint_{l} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{S} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S}, \\ \oint_{S} \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} = Q, \\ \oint_{S} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} = 0, \end{cases} \begin{cases} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \\ \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D} = \rho, \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0. \end{cases}$$

• 麦克斯韦方程组的说明

• 时变电场有旋有散 (电场线可以闭合也可以不闭合) , 时变磁场有旋无散 (磁感线闭合) .

○ 电流和时变电场产生磁场; 电荷和时变磁场产生电场.

• 此外还有

。 电流连续性方程积分形式:  $\oint_S m{J} \cdot \mathrm{d} m{S} = -rac{\partial Q}{\partial t}.$ 

。 电流连续性方程微分形式:  $oldsymbol{
abla} \cdot oldsymbol{J} = -rac{\partial 
ho}{\partial t}.$ 

 $\circ \oint_{S} \left( \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \right) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{V} \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H}) \, dV = 0.$ 

• 后两个散度方程,可以由前两个旋度方程和电流连续性方程推出.

# 5.1.6 媒质的本构方程

$$egin{cases} oldsymbol{D} = arepsilon_0 oldsymbol{E} + oldsymbol{P} = arepsilon oldsymbol{E}, \ oldsymbol{B} = \mu_0 (oldsymbol{H} + oldsymbol{M}) = \mu oldsymbol{H}, \ oldsymbol{J} = \sigma oldsymbol{E}. \end{cases}$$

3

• 三个基本的媒质参数(本构参数)

• 介电常数:  $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_{\mathrm{r}}$ .

 $\circ$  磁导率:  $\mu = \mu_0 \mu_r$ .

电导率: σ.

• 媒质的三种分类

- o 若媒质参数与空间位置无关,则称为**均匀媒质**.
- o 若媒质参数与<u>场强大小</u>无关,则称为 **线性媒质**.
- 。 若媒质参数与<u>场强方向</u>无关,则称为 **各向同性媒质**.

# 5.2 时变电磁场的边界条件

### 5.2.1 法向场的边界条件

- 电位移矢量
  - $ullet \ oldsymbol{e}_{\mathrm{n}} oldsymbol{\cdot} (oldsymbol{D}_{1} oldsymbol{D}_{2}) = 
    ho_{\mathrm{s}}.$
  - $Oolean D_{1n} D_{2n} = \rho_{s}.$
  - $\circ$  若面电荷密度  $\rho_{\rm s}$  非零,则不连续.
- 电场强度
  - $\circ \ \varepsilon_1 E_{1\mathrm{n}} \varepsilon_2 E_{2\mathrm{n}} = \rho_{\mathrm{s}}.$
  - $\circ$  即使面电荷密度  $\rho_s$  非零,仍然不连续.
- 磁感应强度
  - $\bullet \ \boldsymbol{e}_{\mathrm{n}} \boldsymbol{\cdot} (\boldsymbol{B}_{1} \boldsymbol{B}_{2}) = 0.$
  - $\circ \ B_{1n} = B_{2n}.$
  - 。 磁感应强度的法向分量连续.
- 磁场强度
  - $\bullet \ \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}.$
  - 。 磁场强度的法向分量不连续.

### 5.2.2 切向场的边界条件

- 电场强度
  - $\bullet \ \boldsymbol{e}_{\mathrm{n}} \times (\boldsymbol{E}_{1} \boldsymbol{E}_{2}) = \boldsymbol{0}.$
  - $\circ$   $E_{1t}=E_{2t}$ .
  - 。 电场强度的切向分量连续.
- 电位移矢量
  - $\circ \ \frac{D_{1\mathrm{t}}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2\mathrm{t}}}{\varepsilon_2}.$
  - 。 电位移矢量的切向分量不连续.
- 磁场强度
  - $ullet \ oldsymbol{e}_{
    m n} imes (oldsymbol{H}_1-oldsymbol{H}_2)=oldsymbol{J}_{
    m s}.$
  - $\circ \ \ H_{1\mathrm{t}}-H_{2\mathrm{t}}=J_{\mathrm{s}}.$
  - 。 若媒质分界面没有自由电流, 则磁场强度切向分量连续.
- 磁感应强度

$$\circ \ \frac{B_{1\mathrm{t}}}{\mu_1} - \frac{B_{2\mathrm{t}}}{\mu_2} = J_{\mathrm{s}}.$$

#### 5.2.3 边界条件公式总结

一般媒质边界	无自由电荷与电流 的理想媒质分界面	理想导体表面
$egin{cases} m{e}_{ m n}  imes (m{E}_1 - m{E}_2) = m{0}, \ m{e}_{ m n}  imes (m{H}_1 - m{H}_2) = m{J}_{ m s}, \ m{e}_{ m n} m{\cdot} (m{D}_1 - m{D}_2) =  ho_{ m s}, \ m{e}_{ m n} m{\cdot} (m{B}_1 - m{B}_2) = 0. \end{cases}$	$egin{cases} m{e}_{ m n} imes(m{E}_1-m{E}_2)=m{0},\ m{e}_{ m n} imes(m{H}_1-m{H}_2)=m{0},\ m{e}_{ m n}m{\cdot}(m{D}_1-m{D}_2)=0,\ m{e}_{ m n}m{\cdot}(m{B}_1-m{B}_2)=0. \end{cases}$	$egin{cases} oldsymbol{e}_{ m n} imesoldsymbol{E}_1=oldsymbol{0},\ oldsymbol{e}_{ m n} imesoldsymbol{H}_1=oldsymbol{J}_{ m s},\ oldsymbol{e}_{ m n}oldsymbol{\cdot}oldsymbol{H}_1= ho_{ m s},\ oldsymbol{e}_{ m n}oldsymbol{\cdot}oldsymbol{B}_1=0. \end{cases}$

**备注** 理想介质  $\sigma = 0$ , 理想导体  $\sigma = \infty$ .

### 5.3 坡应廷定理

#### 5.3.1 能量密度与损耗功率

• 能量密度

・ 电场: 
$$w_{\rm e}=\frac{1}{2}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{2}\varepsilon E^2(\boldsymbol{r},t).$$
・ 磁场:  $w_{\rm m}=\frac{1}{2}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{2}\mu H^2(\boldsymbol{r},t).$ 
・ 电磁场:  $w=w_{\rm e}+w_{\rm m}=\frac{1}{2}\varepsilon E^2(\boldsymbol{r},t)+\frac{1}{2}\mu H^2(\boldsymbol{r},t).$ 

• 损耗功率密度:  $p = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \sigma E^2(\boldsymbol{r},t)$ .

### 5.3.2 坡应廷定理物理含义

• 损耗功率

$$P = \int_{V} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \, dV = \int_{V} \left[ (\mathbf{\nabla} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} \right] dV$$

$$= \int_{V} \left[ (\mathbf{\nabla} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H} - \mathbf{\nabla} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} \right] dV$$

$$= -\int_{V} \left[ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{H} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{\nabla} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \right] dV$$

$$= -\int_{V} \left[ \frac{\mu}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}) + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) + \mathbf{\nabla} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \right] dV$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} \int_{V} \left( \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2} + \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{2} \right) dV - \oint_{S'} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}'.$$

• 坡应廷定理

$$rac{\partial}{\partial t} \int_V \left( rac{m{B} \cdot m{H}}{2} + rac{m{D} \cdot m{H}}{2} 
ight) \mathrm{d}V + \int_V m{J} \cdot m{E} \, \mathrm{d}V + \oint_{S'} (m{E} imes m{H}) \cdot \mathrm{d}m{S}' = 0.$$

 $\circ$  第一项表示体积 V 内单位时间内存储的总电磁能量 (电磁功率).

- $\circ$  第二项表示传导电流 J 引起的损耗功率.
- $\circ$  第三项表示通过闭曲面 S' 离开体积 V 的总功率.

#### 5.3.3 坡应廷矢量的瞬时值

- 坡印廷矢量的瞬时值  $S = E \times H$ .
  - 。 表示闭曲面上通过单位面积的功率.
  - $\circ$  方向是能量流动的方向,单位是 $W/m^2$ .
  - 坡印廷矢量又称为能量流密度或功率密度
- 特例
  - 。 在静电场和恒定磁场中, 没有电磁能量流动.
  - $\circ$  在恒定电场和恒定磁场中,-S 表示 V 内的损耗功率.
  - $\circ$  在时变电场中,S 表示瞬时功率密度.

### 5.4 时谐电磁场与复数形式

### 5.4.1 时谐电磁场的复数形式

任意时变场可分解为正弦时间函数表示的时谐场.

• 时谐电磁场

$$egin{aligned} m{E}(m{r},t) &= m{E}_{\mathrm{m}}(m{r})\cos\left[\omega t + \phi(m{r})
ight] & m{E}(m{r},t) &= \sqrt{2}m{E}(m{r})\cos\left[\omega t + \phi(m{r})
ight] \ &= \mathrm{Re}\left[m{E}_{\mathrm{m}}(m{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}[\omega t + \phi(m{r})]}
ight] &= \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}m{E}(m{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}[\omega t + \phi(m{r})]}
ight] \ &= \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}m{\dot{E}}(m{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}
ight]. \end{aligned}$$

- o 概念
  - 空间相位  $\phi(\mathbf{r})$ .
  - 时间因子  $e^{j\omega t}$ .
- 。 时域
  - 振幅值矢量  $\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}) = \sqrt{2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ .
  - 有效值矢量  $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}).$
- 。 频域
  - 复振幅矢量  $\dot{m{E}}_{\mathrm{m}}(m{r}) = m{E}_{\mathrm{m}}(m{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi(m{r})}.$
  - 复有效矢量  $\dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}) \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi(\boldsymbol{r})}.$
- 电场矢量的瞬时值形式与复数形式的转换

$$egin{aligned} rac{\partial}{\partial t} m{E}(x,y,z,t) &= -m{E}_{
m m}(x,y,z) \omega \sin\left[\omega t + \phi(x,y,z)
ight] \ &= \mathrm{Re}\left[\mathrm{j}\omega m{E}_{
m m}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}
ight]. \end{aligned}$$

6

 $\circ$   $\boldsymbol{E}(x,y,z,t)\leftrightarrow\dot{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{m}}(x,y,z).$ 

$$\circ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(x,y,z,t) \leftrightarrow \mathrm{j} \omega \dot{\mathbf{E}}_{\mathrm{m}}(x,y,z).$$

$$\circ \int_{-\infty}^t m{E}(x,y,z,t) \, \mathrm{d}t \leftrightarrow rac{\dot{m{E}}_{\mathrm{m}}(x,y,z)}{\mathrm{j}\omega}.$$

### 5.4.2 麦克斯方程组复数形式

• 麦克斯韦方程组为

$$egin{aligned} \oint_{l} \dot{m{H}}_{\mathrm{m}} \cdot \mathrm{d} \dot{m{l}}_{\mathrm{m}} &= \int_{S} \dot{m{J}}_{\mathrm{m}} \cdot \mathrm{d} \dot{m{S}}_{\mathrm{m}} + \mathrm{j} \omega \int_{S} \dot{m{D}}_{\mathrm{m}} \cdot \mathrm{d} \dot{m{S}}_{\mathrm{m}}, \ \oint_{L} \dot{m{E}}_{\mathrm{m}} \cdot \mathrm{d} \dot{m{S}}_{\mathrm{m}} &= -\mathrm{j} \omega \int_{S} \dot{m{B}}_{\mathrm{m}} \cdot \mathrm{d} \dot{m{S}}_{\mathrm{m}}, \ \oint_{S} \dot{m{D}}_{\mathrm{m}} \cdot \mathrm{d} \dot{m{S}}_{\mathrm{m}} &= \int_{V} \dot{
ho}_{\mathrm{m}} \, \mathrm{d} V, \ \oint_{S} \dot{m{B}}_{\mathrm{m}} \cdot \mathrm{d} \dot{m{S}}_{\mathrm{m}} &= 0. \end{aligned}$$
 $egin{align*} m{
abla}_{\mathrm{m}} \cdot \mathrm{d} \dot{m{S}}_{\mathrm{m}} &= -\mathrm{j} \omega \dot{m{B}}_{\mathrm{m}}, \ m{
abla}_{\mathrm{m}}, \ m{
abla}_{\mathrm{m}} &= \dot{m{\rho}}_{\mathrm{m}}, \ m{
abla}_{\mathrm{m}} &= 0. \end{aligned}$ 

电流连续性方程为

$$egin{aligned} \oint_{S} \dot{m{J}}_{
m m} \cdot \mathrm{d} \dot{m{S}}_{
m m} + \mathrm{j} \omega \dot{Q}_{
m m} &= 0, \ m{
abla} \cdot \dot{m{J}}_{
m m} + \mathrm{j} \omega \dot{
ho}_{
m m} &= 0. \end{aligned}$$

#### 备注

- 有的教材习惯上将  $\dot{E}_{
  m m}$  简写为 E , 诸如此类. 这里为了清晰起见,不采用该记号.
- 由于幅值与有效值满足  $\dot{m E}_{
  m m}(m r)=\sqrt{2}\dot{m E}(m r)$ ,也可以将上式改成有效值的形式.

# 5.4.3 能量密度的复数表示法

• 瞬时值

$$\circ \ \ w_{
m e}(m{r},t) = rac{1}{2}arepsilon E^2(m{r},t).$$

$$\circ \ \ w_{
m m}(oldsymbol{r},t)=rac{1}{2}\mu H^2(oldsymbol{r},t).$$

$$\circ \ \ w(\boldsymbol{r},t) = w_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r},t) + w_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r},t).$$

$$\circ p(\mathbf{r},t) = \sigma E^2(\mathbf{r},t).$$

• 极大值

$$egin{aligned} & \circ \ w_{
m e\,max}(m{r}) = rac{1}{2}arepsilon E_{
m m}^2(m{r}) = rac{arepsilon}{2}\dot{m{E}}_{
m m}(m{r})m{\cdot}\dot{m{E}}_{
m m}^*(m{r}). \end{aligned}$$

$$oldsymbol{\circ} \ \ w_{ ext{m max}}(oldsymbol{r}) = rac{1}{2} \mu H_{ ext{m}}^2(oldsymbol{r}) = rac{\mu}{2} \dot{oldsymbol{H}}_{ ext{m}}(oldsymbol{r}) \cdot \dot{oldsymbol{H}}_{ ext{m}}^*(oldsymbol{r}).$$

$$\circ ~w_{ ext{max}}(oldsymbol{r}) = w_{ ext{e}\, ext{max}}(oldsymbol{r}) + w_{ ext{m}\, ext{max}}(oldsymbol{r}),$$

$$ullet p_{
m max}(oldsymbol{r}) = \sigma E_{
m m}^2(oldsymbol{r}) = \sigma \dot{oldsymbol{E}}_{
m m}(oldsymbol{r}) oldsymbol{\cdot} \dot{oldsymbol{E}}_{
m m}(oldsymbol{r}).$$

平均值

$$egin{aligned} & \circ \ w_{
m e\,avg}(m{r}) = rac{arepsilon}{4} \dot{m{E}}_{
m m}(m{r}) m{\cdot} \dot{m{E}}_{
m m}^*(m{r}) = rac{arepsilon}{2} \dot{m{E}}(m{r}) m{\cdot} \dot{m{E}}^*(m{r}). \end{aligned}$$

$$ullet w_{ ext{mavg}}(oldsymbol{r}) = rac{\mu}{4} \dot{oldsymbol{H}}_{ ext{m}}(oldsymbol{r}) ullet \dot{oldsymbol{H}}_{ ext{m}}^*(oldsymbol{r}) = rac{\mu}{2} \dot{oldsymbol{H}}(oldsymbol{r}) ullet \dot{oldsymbol{H}}^*(oldsymbol{r}).$$

$$egin{aligned} &\circ \ w_{ ext{avg}}(m{r}) = w_{ ext{eavg}}(m{r}) + w_{ ext{mavg}}(m{r}). \ &\circ \ p_{ ext{avg}}(m{r}) = rac{\sigma}{2} \dot{m{E}}_{ ext{m}}(m{r}) \cdot \dot{m{E}}_{ ext{m}}^*(m{r}) = \dot{m{J}}^*(m{r}) \cdot \dot{m{E}}(m{r}). \end{aligned}$$

### 5.4.4 坡应廷定理的复数形式

• 损耗功率的平均值

$$P = \int_{V} \dot{\boldsymbol{J}}^{*} \cdot \dot{\boldsymbol{E}} \, dV = \int_{V} \left[ (\boldsymbol{\nabla} \times \dot{\boldsymbol{H}}^{*}) \cdot \dot{\boldsymbol{E}} + j\omega \dot{\boldsymbol{D}}^{*} \cdot \dot{\boldsymbol{E}} \right] dV$$

$$= \int_{V} \left[ (\boldsymbol{\nabla} \times \dot{\boldsymbol{E}}) \cdot \dot{\boldsymbol{H}}^{*} - \boldsymbol{\nabla} \cdot \left( \dot{\boldsymbol{E}} \times \dot{\boldsymbol{H}}^{*} \right) + j\omega \dot{\boldsymbol{D}}^{*} \cdot \dot{\boldsymbol{E}} \right] dV$$

$$= -\int_{V} \left[ j\omega \dot{\boldsymbol{B}} \cdot \dot{\boldsymbol{H}}^{*} - j\omega \dot{\boldsymbol{E}} \cdot \dot{\boldsymbol{D}}^{*} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \left( \dot{\boldsymbol{E}} \times \dot{\boldsymbol{H}}^{*} \right) \right] dV$$

$$= -j\omega \int_{V} \left( \mu \dot{\boldsymbol{H}} \cdot \dot{\boldsymbol{H}}^{*} - \varepsilon \dot{\boldsymbol{E}} \cdot \dot{\boldsymbol{E}}^{*} \right) dV - \oint_{S} \left( \dot{\boldsymbol{E}} \times \dot{\boldsymbol{H}}^{*} \right) \cdot dS.$$

• 坡应廷定理

$$-\oint_{S}\left(\dot{m{E}} imes\dot{m{H}}^{*}
ight)\cdot\mathrm{d}m{S}=\int_{V}\sigma\dot{m{E}}\cdot\dot{m{E}}^{*}\,\mathrm{d}V+\mathrm{j}\omega\int_{V}\left(\mu\dot{m{H}}\cdot\dot{m{H}}^{*}-arepsilon\dot{m{E}}\cdot\dot{m{E}}^{*}
ight)\mathrm{d}V.$$

- 。 右式
  - 第一项表示损耗功率的平均值(有功功率)
  - 第二项表示交换的电磁场功率 (无功功率)
  - 第二项的积分表示电磁场能量(不是功率)
- 。 左式
  - 左式的实部表示流入的有功功率 (用于补偿损耗功率)
  - 左式的虚部表示流入的无功功率 (与电磁场功率交换)

#### 5.4.5 复坡应廷矢量物理含义

• 平均能流密度矢量

$$egin{aligned} & oldsymbol{S}(oldsymbol{r},t) = oldsymbol{E}(oldsymbol{r},t) imes oldsymbol{H}(oldsymbol{r},t) = \operatorname{Re}\left(\dot{oldsymbol{E}} imes\dot{oldsymbol{H}}^*
ight) + \operatorname{Re}\left(\dot{oldsymbol{E}} imes\dot{oldsymbol{H}}^*
ight). \end{aligned}$$

• 复坡应廷矢量 (复数能流密度矢量)

$$\circ \ \ \widetilde{m{S}}(m{r}) = \dot{m{E}}(m{r}) imes \dot{m{H}}^*(m{r}) = rac{1}{2} \dot{m{E}}_{\mathrm{m}}(m{r}) imes \dot{m{H}}^*_{\mathrm{m}}(m{r}).$$

 $\circ$  其角频率为 $\dot{E}$ 的两倍,因此不能由瞬时值方程取复数得到.

。 有功功率密度: 
$$\operatorname{Re}\left[\widetilde{m{S}}(m{r})
ight] = m{S}_{\operatorname{avg}}(m{r}).$$

。 无功功率密度:  $\operatorname{Im}\left[\widetilde{m{S}}(m{r})
ight]$ .

#### 5.4.6 各种形式的记号的总结

$$egin{aligned} oldsymbol{E}(oldsymbol{r},t) &= E_x(oldsymbol{r},t)oldsymbol{a}_x + E_y(oldsymbol{r},t)oldsymbol{a}_y + E_z(oldsymbol{r},t)oldsymbol{a}_z, \ E(oldsymbol{r},t) &= \sqrt{E_x(oldsymbol{r},t)^2 + E_y(oldsymbol{r},t)^2 + E_z(oldsymbol{r},t)^2}, \ oldsymbol{E}_x(oldsymbol{r},t) &= E_{xm}(oldsymbol{r})\cos(\omega t + \phi(oldsymbol{r})), \ oldsymbol{E}(oldsymbol{r},t) &= oldsymbol{E}_m(oldsymbol{r})\cos(\omega t + \phi(oldsymbol{r})), \ oldsymbol{E}(oldsymbol{r},t) &= E_{xm}(oldsymbol{r})\cos(\omega t + \phi(oldsymbol{r})), \ oldsymbol{E}_m(oldsymbol{r}) &= E_{xm}(oldsymbol{r})oldsymbol{a}_x + E_{ym}(oldsymbol{r})oldsymbol{a}_y + E_{zm}(oldsymbol{r})oldsymbol{a}_z, \ oldsymbol{E}(oldsymbol{r}) &= \frac{\sqrt{2}}{2}oldsymbol{E}_m(oldsymbol{r}), \end{aligned}$$

- 有坐标有时间
  - 粗体 E(r,t) 和  $E_x(r,t)$  表示瞬时值向量.
  - 斜体  $E(\mathbf{r},t)$  和  $E_x(\mathbf{r},t)$  表示瞬时值模长.
- 有坐标无时间
  - $\circ$   $\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}), E_{x\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{E}_{x\mathrm{m}}(\boldsymbol{r})$  表示振幅值.
  - $\circ$   $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}), E_x(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{E}_x(\boldsymbol{r})$  表示有效值 (非平均值)
  - $w_{\text{max}}(\mathbf{r}), w_{\text{avg}}(\mathbf{r})$  分别表示极大值与平均值.
- 无坐标无时间
  - o 如向量  $E, E_x$ , 或标量  $E, E_x$  等.
  - 。 一般是瞬时值的简写 (而非振幅值或有效值)
  - 。 不一定表示与坐标与时间无关, 只是为了方便.
- 频域 (相量)
  - 。  $\dot{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}), \dot{E}_{x\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}), \dot{\boldsymbol{E}}_{x\mathrm{m}}(\boldsymbol{r})$  表示复振幅.
  - $\circ$   $\dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}), \dot{E}_x(\boldsymbol{r}), \dot{E}_x(\boldsymbol{r})$  表示复有效值.
  - $\circ$   $\widetilde{S}(r)$  表示另一个频率的复数.
- 注意:
  - 。 时域与频域的转换方式有两种
    - 1. 以余弦为基准,复数取实部得到瞬时值.
    - 2. 以正弦为基准,复数取虚部得到瞬时值.
    - 二者不可混用, 若取实部则虚部无实际含义.
    - 一般以余弦为基准,如果用正弦请事先说明.
  - 区分  $0, \mathbf{0}, \dot{\mathbf{0}}, \dot{\mathbf{0}}$ , 不过它们常简写为 0 或  $\mathbf{0}$ .
  - 有时候无坐标无时间的量可能表示其它含义,可能只是某个函数的记号,以具体情况中的说明 为准.

# 5.5 波动方程

#### 5.5.1 非齐次波动方程

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{\nabla}^{2}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}) - \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}) & \boldsymbol{\nabla}^{2}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{H}) - \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H}) \\ = \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{D}}{\varepsilon}\right) + \boldsymbol{\nabla}\times\left(\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right) & = \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}}{\mu}\right) - \boldsymbol{\nabla}\times\left(\boldsymbol{J} + \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right) \\ = \frac{\boldsymbol{\nabla}\rho}{\varepsilon} + \mu\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H} & = -\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{J} - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla}\times(\varepsilon\boldsymbol{E}) \\ = \frac{\boldsymbol{\nabla}\rho}{\varepsilon} + \mu\frac{\partial\boldsymbol{J}}{\partial t} + \mu\frac{\partial^{2}\boldsymbol{D}}{\partial t^{2}} & = -\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{J} + \varepsilon\frac{\partial^{2}\boldsymbol{B}}{\partial t^{2}} \\ = \frac{\boldsymbol{\nabla}\rho}{\varepsilon} + \mu\frac{\partial\boldsymbol{J}}{\partial t} + \mu\varepsilon\frac{\partial^{2}\boldsymbol{E}}{\partial t^{2}} & = -\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{J} + \mu\varepsilon\frac{\partial^{2}\boldsymbol{H}}{\partial t^{2}} \end{array}$$

10

• 非齐次波动方程

- 波动方程的说明
  - $\circ$   $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}' + \sigma \boldsymbol{E}$ , $\boldsymbol{J}'$  为非电性外加源等效电流
  - 。 总电流满足电流连续性方程:  $oldsymbol{
    abla} \cdot oldsymbol{J} = -rac{\partial 
    ho}{\partial t}.$
- 波动方程的标准形式

$$oldsymbol{\circ} oldsymbol{
abla}^2 u(oldsymbol{r},t) - rac{1}{v^2} rac{\partial^2 u(oldsymbol{r},t)}{\partial t^2} = -f(oldsymbol{r},t).$$

 $\circ$  u 为待求场量, v 为波速, f 为自由项.

### 5.5.2 齐次波动方程

对于无源理想介质, $oldsymbol{J}=oldsymbol{J}'=oldsymbol{0}, \sigma=0, arepsilon, \mu\in\mathbb{R}$  ,

• 
$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0}.$$

• 
$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \mathbf{0}.$$

# 5.5.3 齐次亥姆霍兹方程

对于无源理想介质中的时谐场,有

• 齐次亥姆霍兹方程

• 符号说明

$$\circ \ k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon = \left(\frac{\omega}{v}\right)^2.$$

$$\circ$$
 波速:  $v = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}$ .

# 5.6 时变场的标量位与矢量位

### 5.6.1 标量位与矢量位及其多值性

- 矢量磁位
  - $\bullet$  由于 $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ .
  - 。 定义  $oldsymbol{B} \equiv oldsymbol{
    abla} imes oldsymbol{A}$ .
  - 单位为 Wb/m.
- 标量磁位

。 由于 
$$oldsymbol{
abla} imesoldsymbol{(E+rac{\partial oldsymbol{A}}{\partial t})}=oldsymbol{0}$$
 ,

- $\circ$  定义  $-\nabla \phi = E + \frac{\partial A}{\partial t}$ .
- 单位为 V.
- 多值性: 对于 ∀f, 有

$$\circ \ \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla} f) = \boldsymbol{0}.$$

$$ullet - oldsymbol{
abla} \left( \phi - rac{\partial f}{\partial t} 
ight) = oldsymbol{E} + rac{\partial}{\partial t} (oldsymbol{A} + oldsymbol{
abla} f).$$

### 5.6.2 洛伦兹规范与达朗贝尔方程

$$egin{aligned} oldsymbol{
abla}^2 \phi &= -oldsymbol{
abla} \cdot (oldsymbol{E}) - oldsymbol{
abla} \cdot rac{\partial oldsymbol{A}}{\partial t} \ &= -rac{
ho}{arepsilon} + \mu arepsilon rac{\partial \phi}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\nabla^{2}\phi = -\nabla \cdot (\mathbf{E}) - \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$= -\frac{\rho}{\varepsilon} + \mu \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$$= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \mu \mathbf{J} - \mu \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$= \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) - \mu \mathbf{J} + \frac{\partial^{2} \mathbf{A}}{\partial t^{2}}$$

$$= -\mu \mathbf{J} + \frac{\partial^{2} \mathbf{A}}{\partial t^{2}}$$

 $\mathbf{
abla}^2 \mathbf{A} = \mathbf{
abla}(\mathbf{
abla} \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{
abla} imes (\mathbf{
abla} imes \mathbf{A})$ 

- 洛伦兹规范:  $\nabla \cdot A = -\mu \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial t}$ .
- 达朗贝尔方程

$$\circ \nabla^2 \mathbf{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}.$$

# 5.6.3 达朗贝尔方程解的形式

- 标量磁位达朗贝尔方程的特例
  - 。 当  $\phi$  与时间无关时,成为泊松方程: $oldsymbol{
    abla}^2\phi=-rac{
    ho}{arepsilon}$  .

。 当场点在源点 ho 外时,为齐次波动方程:  $oldsymbol{
abla}^2\phi-\muarepsilonrac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=0.$ 

• 解的形式

$$\circ \;\; \phi(m{r},t) = rac{1}{4\piarepsilon} \int_{V'} rac{
ho\left(m{r}',t-rac{R}{v}
ight)}{R} \, \mathrm{d}V'.$$

$$ullet egin{aligned} ullet oldsymbol{A}(oldsymbol{r},t) &= rac{\mu}{4\pi} \int_{V'} rac{oldsymbol{J}\left(oldsymbol{r}',t-rac{R}{v}
ight)}{R} \, \mathrm{d}V'. \end{aligned}$$

### 5.6.4 达朗贝尔方程复数形式

在时谐场中,

- 洛伦兹规范:  $\nabla \cdot \dot{A} = -\mathrm{j}\omega\mu\varepsilon\dot{\phi}$ .
- 达朗贝尔方程

$$\circ \nabla^2 \dot{A} + k^2 \dot{A} = -\mu \dot{J}.$$

$$ullet oldsymbol{
abla}^2 \dot{\phi} + k^2 \dot{\phi} = -rac{\dot{
ho}}{arepsilon}.$$

$$\circ \ \ k^2 = \omega^2 \mu arepsilon, v = rac{1}{\sqrt{\mu arepsilon}}.$$

• 解的形式

$$egin{aligned} \circ \; \dot{\phi}(m{r}) = rac{1}{4\piarepsilon} \int_{V'} rac{\dot{
ho}(m{r}') \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R} \, \mathrm{d}V'. \end{aligned}$$

$$oldsymbol{\dot{A}}(oldsymbol{r},t) = rac{\mu}{4\pi} \int_{V'} rac{\dot{oldsymbol{J}}(oldsymbol{r}') \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R} \, \mathrm{d}V'.$$

$$\circ R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|.$$

- 求解方法
  - $\circ$  若已知 A, 则可求解  $\phi$ , 反之亦然.

$$\circ \ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}.$$

$$\circ \ \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}.$$

$$\circ \ m{S} = m{E} imes m{H}.$$