5 时变电磁场

5.1 麦克斯韦方程组

5.1.1 麦克斯韦第一方程

- 电荷守恒定律（电流连续性方程）
  - 积分形式：$\oint_S \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$.
  - 微分形式：$\boldsymbol{\nabla}\cdot \boldsymbol{J} = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$.
  - 媒质分界：$\boldsymbol{\nabla}_t\cdot \boldsymbol{J}_S + (\boldsymbol{J}_{1\mathrm{n}} - \boldsymbol{J}_{2\mathrm{n}}) = -\dfrac{\partial \rho_\mathrm{s}}{\partial t}$.
- 广义安培环路定理（麦克斯韦第一方程）
  - 微分形式：$\boldsymbol{\nabla}\times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$.

- 积分形式：$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \left(\boldsymbol{J}+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$.

- 全电流密度 $\boldsymbol{J}+\boldsymbol{J}_{\mathrm{d}}$.
  - $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_{\mathrm{i}}+\boldsymbol{J}_{\mathrm{c}}+\boldsymbol{J}_{\mathrm{v}}$.
    - 外加电流密度 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{i}}$.
    - 传导电流密度 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{c}}=\sigma \boldsymbol{E}$.
    - 运流电流密度 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{v}}=\rho \boldsymbol{v}$.
  - 位移电流密度 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{d}}=\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$.
    - $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$.
    - $\boldsymbol{J}_{\mathrm{d}}=\varepsilon_0\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}+\dfrac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}$.
    - 即由变化的电场和电偶极矩组成.
  - 传导电流和位移电流的比较
    - 频率越高，位移电流密度 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{d}}$ 越大，而传导电流不受影响.
    - 因此水下无法用高频通信，海军使用长波通信.（微波怕水）

5.1.2 麦克斯韦第二方程

- 总电场 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_{\mathrm{C}}+\boldsymbol{E}_{\mathrm{in}}$.
  - 库仑电场 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{C}}$.
  - 感应电场 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{in}}$.
- 法拉第电磁感应定律
  - $\mathscr{E}_{\mathrm{in}}=-\dfrac{\partial \Phi}{\partial t}=-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\int_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$.
  - $\mathscr{E}_{\mathrm{in}}=\displaystyle\oint_l \boldsymbol{E}_{\mathrm{in}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$.
- 若导体与回路均变化
  - $\mathscr{E}_{\mathrm{in}}=-\displaystyle\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}+\oint_l (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$.
  - $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{in}}=-\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$.
- 麦克斯韦第二方程
  - 积分形式：$\displaystyle\oint_l \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$.
  - 微分形式：$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$.
  - 时变电场有旋，非保守场.

5.1.3 麦克斯韦第三方程

- 积分形式：$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q.$
- 微分形式：$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D} = \rho.$

5.1.4 麦克斯韦第四方程

- 积分形式：$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0.$
- 微分形式：$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0.$

5.1.5 麦克斯韦方程组

$$
\begin{cases}
\oint_l \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \left(\boldsymbol{J} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}, \\
\oint_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\dfrac{\partial}{\partial t} \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}, \\
\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q, \\
\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0,
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \\
\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \\
\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D} = \rho, \\
\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0.
\end{cases}
$$

- 麦克斯韦方程组的说明
  - 时变电场有旋有散（电场线可以闭合也可以不闭合），时变磁场有旋无散（磁感线闭合）.
  - 电流和时变电场产生磁场；电荷和时变磁场产生电场.
- 此外还有
  - 电流连续性方程积分形式：$\oint_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\dfrac{\partial Q}{\partial t}.$
  - 电流连续性方程微分形式：$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{J} = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}.$
  - $\oint_S \left(\boldsymbol{J} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H})\, \mathrm{d}V = 0.$
- 后两个散度方程，可以由前两个旋度方程和电流连续性方程推出.

5.1.6 媒质的本构方程

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \\
\boldsymbol{B} = \mu_0 (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) = \mu \boldsymbol{H}, \\
\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}.
\end{cases}
$$

- 三个基本的媒质参数 (本构参数)
  - 介电常数：$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_{\mathrm{r}}.$
  - 磁导率：$\mu = \mu_0 \mu_{\mathrm{r}}.$
  - 电导率：$\sigma.$
- 媒质的三种分类

- 若媒质参数与空间位置无关, 则称为 **均匀媒质**.
- 若媒质参数与场强大小无关, 则称为 **线性媒质**.
- 若媒质参数与场强方向无关, 则称为 **各向同性媒质**.

5.2 时变电磁场的边界条件

5.2.1 法向场的边界条件

- **电位移矢量**
  - $\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}} \cdot (\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) = \rho_{\mathrm{s}}$.
  - $D_{1\mathrm{n}} - D_{2\mathrm{n}} = \rho_{\mathrm{s}}$.
  - 若面电荷密度 ρ_{s} 非零，则不连续.
- 电场强度
  - $\varepsilon_1 E_{1\mathrm{n}} - \varepsilon_2 E_{2\mathrm{n}} = \rho_{\mathrm{s}}$.
  - 即使面电荷密度 ρ_{s} 非零，仍然不连续.
- **磁感应强度**
  - $\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}} \cdot (\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2) = 0$.
  - $B_{1\mathrm{n}} = B_{2\mathrm{n}}$.
  - 磁感应强度的法向分量连续.
- 磁场强度
  - $\mu_1 H_{1\mathrm{n}} = \mu_2 H_{2\mathrm{n}}$.
  - 磁场强度的法向分量不连续.

5.2.2 切向场的边界条件

- **电场强度**
  - $\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}} \times (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) = \mathbf{0}$.
  - $E_{1\mathrm{t}} = E_{2\mathrm{t}}$.
  - 电场强度的切向分量连续.
- 电位移矢量
  - $\dfrac{D_{1\mathrm{t}}}{\varepsilon_1} = \dfrac{D_{2\mathrm{t}}}{\varepsilon_2}$.
  - 电位移矢量的切向分量不连续.
- **磁场强度**
  - $\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}} \times (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) = \boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}$.
  - $H_{1\mathrm{t}} - H_{2\mathrm{t}} = J_{\mathrm{s}}$.
  - 若媒质分界面没有自由电流, 则磁场强度切向分量连续.
- 磁感应强度
  - $\dfrac{B_{1\mathrm{t}}}{\mu_1} - \dfrac{B_{2\mathrm{t}}}{\mu_2} = J_{\mathrm{s}}$.

- 即使分界面没有自由电流, 磁感应强度的切向分量也不连续.

5.2.3 边界条件公式总结

一般媒质边界	无自由电荷与电流 的理想媒质分界面	理想导体表面
$\begin{cases}\boldsymbol{e}_\mathrm{n}\times(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2)=\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{e}_\mathrm{n}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)=\boldsymbol{J}_\mathrm{s},\\ \boldsymbol{e}_\mathrm{n}\cdot(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)=\rho_\mathrm{s},\\ \boldsymbol{e}_\mathrm{n}\cdot(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2)=0.\end{cases}$	$\begin{cases}\boldsymbol{e}_\mathrm{n}\times(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2)=\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{e}_\mathrm{n}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)=\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{e}_\mathrm{n}\cdot(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)=0,\\ \boldsymbol{e}_\mathrm{n}\cdot(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2)=0.\end{cases}$	$\begin{cases}\boldsymbol{e}_\mathrm{n}\times\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{e}_\mathrm{n}\times\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{J}_\mathrm{s},\\ \boldsymbol{e}_\mathrm{n}\cdot\boldsymbol{H}_1=\rho_\mathrm{s},\\ \boldsymbol{e}_\mathrm{n}\cdot\boldsymbol{B}_1=0.\end{cases}$

备注 理想介质 $\sigma=0$，理想导体 $\sigma=\infty$.

5.3 坡应廷定理

5.3.1 能量密度与损耗功率

- 能量密度
  - 电场：$w_\mathrm{e}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\dfrac{1}{2}\varepsilon E^2(\boldsymbol{r},t)$.
  - 磁场：$w_\mathrm{m}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\dfrac{1}{2}\mu H^2(\boldsymbol{r},t)$.
  - 电磁场：$w=w_\mathrm{e}+w_\mathrm{m}=\dfrac{1}{2}\varepsilon E^2(\boldsymbol{r},t)+\dfrac{1}{2}\mu H^2(\boldsymbol{r},t)$.
- 损耗功率密度：$p=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\sigma E^2(\boldsymbol{r},t)$.

5.3.2 坡应廷定理物理含义

- 损耗功率

$$
\begin{aligned}
P=\int_V\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}V&=\int_V\left[(\nabla\times\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{E}-\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{E}\right]\mathrm{d}V\\
&=\int_V\left[(\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{H}-\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})-\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{E}\right]\mathrm{d}V\\
&=-\int_V\left[\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{H}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{E}+\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\right]\mathrm{d}V\\
&=-\int_V\left[\frac{\mu}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H})+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E})+\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\right]\mathrm{d}V\\
&=-\frac{\partial}{\partial t}\int_V\left(\frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}}{2}+\frac{\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}}{2}\right)\mathrm{d}V-\oint_{S'}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'.
\end{aligned}
$$

- 坡应廷定理

$$
\frac{\partial}{\partial t}\int_V\left(\frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}}{2}+\frac{\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{H}}{2}\right)\mathrm{d}V+\int_V\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}V+\oint_{S'}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'=0.
$$

  - 第一项表示体积 V 内单位时间内存储的总电磁能量 (电磁功率).

    - 第二项表示传导电流 $\boldsymbol{J}$ 引起的损耗功率.
    - 第三项表示通过闭曲面 $\boldsymbol{S}'$ 离开体积 V 的总功率.

5.3.3 坡应廷矢量的瞬时值

- 坡印廷矢量的瞬时值 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$.
    - 表示闭曲面上通过单位面积的功率.
    - 方向是能量流动的方向，单位是 $\mathrm{W/m^2}$.
    - 坡印廷矢量又称为能量流密度或功率密度.
- 特例
    - 在静电场和恒定磁场中，没有电磁能量流动.
    - 在恒定电场和恒定磁场中，$-\boldsymbol{S}$ 表示 V 内的损耗功率.
    - 在时变电场中，$\boldsymbol{S}$ 表示瞬时功率密度.

5.4 时谐电磁场与复数形式

5.4.1 时谐电磁场的复数形式

任意时变场可分解为正弦时间函数表示的时谐场.

- 时谐电磁场

$$
\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)&=\boldsymbol{E}_\mathrm{m}(\boldsymbol{r})\cos\left[\omega t+\phi(\boldsymbol{r})\right]\\
&=\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{E}_\mathrm{m}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}[\omega t+\phi(\boldsymbol{r})]}\right]\\
&=\mathrm{Re}\left[\dot{\boldsymbol{E}}_\mathrm{m}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right].
\end{aligned}\right|
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)&=\sqrt{2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cos\left[\omega t+\phi(\boldsymbol{r})\right]\\
&=\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}[\omega t+\phi(\boldsymbol{r})]}\right]\\
&=\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}\dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right].
\end{aligned}
$$

    - 概念
        - 空间相位 $\phi(\boldsymbol{r})$.
        - 时间因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$.
    - 时域
        - 振幅值矢量 $\boldsymbol{E}_\mathrm{m}(\boldsymbol{r})=\sqrt{2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$.
        - 有效值矢量 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{E}_\mathrm{m}(\boldsymbol{r})$.
    - 频域
        - 复振幅矢量 $\dot{\boldsymbol{E}}_\mathrm{m}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}_\mathrm{m}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi(\boldsymbol{r})}$.
        - 复有效矢量 $\dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{E}_\mathrm{m}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi(\boldsymbol{r})}$.
- 电场矢量的瞬时值形式与复数形式的转换

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}(x,y,z,t)&=-\boldsymbol{E}_\mathrm{m}(x,y,z)\omega\sin\left[\omega t+\phi(x,y,z)\right]\\
&=\mathrm{Re}\left[\mathrm{j}\omega\boldsymbol{E}_\mathrm{m}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right].
\end{aligned}
$$

    - $\boldsymbol{E}(x,y,z,t)\leftrightarrow\dot{\boldsymbol{E}}_\mathrm{m}(x,y,z)$.

- $\dfrac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}(x,y,z,t) \leftrightarrow \mathrm{j}\omega\dot{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{m}}(x,y,z)$.
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{t}\boldsymbol{E}(x,y,z,t)\,\mathrm{d}t \leftrightarrow \frac{\dot{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{m}}(x,y,z)}{\mathrm{j}\omega}$.

5.4.2 麦克斯方程组复数形式

- 麦克斯韦方程组为

$$
\begin{cases}
\displaystyle\oint_l \dot{\boldsymbol{H}}_{\mathrm{m}}\cdot\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{l}}_{\mathrm{m}} = \int_S \dot{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{m}}\cdot\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{S}}_{\mathrm{m}} + \mathrm{j}\omega\int_S \dot{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{m}}\cdot\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{S}}_{\mathrm{m}},\\
\displaystyle\oint_l \dot{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{m}}\cdot\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{l}}_{\mathrm{m}} = -\mathrm{j}\omega\int_S \dot{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{m}}\cdot\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{S}}_{\mathrm{m}},\\
\displaystyle\oint_S \dot{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{m}}\cdot\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{S}}_{\mathrm{m}} = \int_V \dot{\rho}_{\mathrm{m}}\,\mathrm{d}V,\\
\displaystyle\oint_S \dot{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{m}}\cdot\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{S}}_{\mathrm{m}} = 0.
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\boldsymbol{\nabla}\times\dot{\boldsymbol{H}}_{\mathrm{m}} = \dot{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{m}} + \mathrm{j}\omega\dot{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{m}},\\
\boldsymbol{\nabla}\times\dot{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{m}} = -\mathrm{j}\omega\dot{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{m}},\\
\boldsymbol{\nabla}\cdot\dot{\boldsymbol{D}}_{\mathrm{m}} = \dot{\rho}_{\mathrm{m}},\\
\boldsymbol{\nabla}\cdot\dot{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{m}} = 0.
\end{cases}
$$

电流连续性方程为

$$
\oint_S \dot{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{m}}\cdot\mathrm{d}\dot{\boldsymbol{S}}_{\mathrm{m}} + \mathrm{j}\omega\dot{Q}_{\mathrm{m}} = 0,
$$
$$
\boldsymbol{\nabla}\cdot\dot{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{m}} + \mathrm{j}\omega\dot{\rho}_{\mathrm{m}} = 0.
$$

备注

- 有的教材习惯上将 $\dot{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{m}}$ 简写为 $\boldsymbol{E}$，诸如此类. 这里为了清晰起见，不采用该记号.
- 由于幅值与有效值满足 $\dot{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}) = \sqrt{2}\dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})$，也可以将上式改成有效值的形式.

5.4.3 能量密度的复数表示法

- 瞬时值
  - $w_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r},t) = \dfrac{1}{2}\varepsilon E^2(\boldsymbol{r},t)$.
  - $w_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r},t) = \dfrac{1}{2}\mu H^2(\boldsymbol{r},t)$.
  - $w(\boldsymbol{r},t) = w_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r},t) + w_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r},t)$.
  - $p(\boldsymbol{r},t) = \sigma E^2(\boldsymbol{r},t)$.
- 极大值
  - $w_{\mathrm{e\,max}}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{1}{2}\varepsilon E_{\mathrm{m}}^2(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\varepsilon}{2}\dot{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r})\cdot\dot{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{m}}^*(\boldsymbol{r})$.
  - $w_{\mathrm{m\,max}}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{1}{2}\mu H_{\mathrm{m}}^2(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\mu}{2}\dot{\boldsymbol{H}}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r})\cdot\dot{\boldsymbol{H}}_{\mathrm{m}}^*(\boldsymbol{r})$.
  - $w_{\mathrm{max}}(\boldsymbol{r}) = w_{\mathrm{e\,max}}(\boldsymbol{r}) + w_{\mathrm{m\,max}}(\boldsymbol{r})$.
  - $p_{\mathrm{max}}(\boldsymbol{r}) = \sigma E_{\mathrm{m}}^2(\boldsymbol{r}) = \sigma\dot{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r})\cdot\dot{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r})$.
- 平均值
  - $w_{\mathrm{e\,avg}}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\varepsilon}{4}\dot{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r})\cdot\dot{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{m}}^*(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\varepsilon}{2}\dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})\cdot\dot{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r})$.
  - $w_{\mathrm{m\,avg}}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\mu}{4}\dot{\boldsymbol{H}}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r})\cdot\dot{\boldsymbol{H}}_{\mathrm{m}}^*(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\mu}{2}\dot{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r})\cdot\dot{\boldsymbol{H}}^*(\boldsymbol{r})$.

- $w_{\mathrm{avg}}(\boldsymbol{r}) = w_{\mathrm{e\,avg}}(\boldsymbol{r}) + w_{\mathrm{m\,avg}}(\boldsymbol{r})$.
- $p_{\mathrm{avg}}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\sigma}{2}\dot{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}) \cdot \dot{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{m}}^*(\boldsymbol{r}) = \dot{\boldsymbol{J}}^*(\boldsymbol{r}) \cdot \dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})$.

5.4.4 坡应廷定理的复数形式

- 损耗功率的平均值

$$\begin{aligned} P &= \int_V \dot{\boldsymbol{J}}^* \cdot \dot{\boldsymbol{E}}\,\mathrm{d}V = \int_V \left[(\boldsymbol{\nabla} \times \dot{\boldsymbol{H}}^*) \cdot \dot{\boldsymbol{E}} + \mathrm{j}\omega \dot{\boldsymbol{D}}^* \cdot \dot{\boldsymbol{E}}\right] \mathrm{d}V \\ &= \int_V \left[(\boldsymbol{\nabla} \times \dot{\boldsymbol{E}}) \cdot \dot{\boldsymbol{H}}^* - \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\dot{\boldsymbol{E}} \times \dot{\boldsymbol{H}}^*\right) + \mathrm{j}\omega \dot{\boldsymbol{D}}^* \cdot \dot{\boldsymbol{E}}\right] \mathrm{d}V \\ &= -\int_V \left[\mathrm{j}\omega \dot{\boldsymbol{B}} \cdot \dot{\boldsymbol{H}}^* - \mathrm{j}\omega \dot{\boldsymbol{E}} \cdot \dot{\boldsymbol{D}}^* + \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\dot{\boldsymbol{E}} \times \dot{\boldsymbol{H}}^*\right)\right] \mathrm{d}V \\ &= -\mathrm{j}\omega \int_V \left(\mu \dot{\boldsymbol{H}} \cdot \dot{\boldsymbol{H}}^* - \varepsilon \dot{\boldsymbol{E}} \cdot \dot{\boldsymbol{E}}^*\right) \mathrm{d}V - \oint_S \left(\dot{\boldsymbol{E}} \times \dot{\boldsymbol{H}}^*\right) \cdot \mathrm{d}S. \end{aligned}$$

- 坡应廷定理

$$-\oint_S \left(\dot{\boldsymbol{E}} \times \dot{\boldsymbol{H}}^*\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \sigma \dot{\boldsymbol{E}} \cdot \dot{\boldsymbol{E}}^*\,\mathrm{d}V + \mathrm{j}\omega \int_V \left(\mu \dot{\boldsymbol{H}} \cdot \dot{\boldsymbol{H}}^* - \varepsilon \dot{\boldsymbol{E}} \cdot \dot{\boldsymbol{E}}^*\right) \mathrm{d}V.$$

  - 右式
    - 第一项表示损耗功率的平均值（有功功率）
    - 第二项表示交换的电磁场功率（无功功率）
    - 第二项的积分表示电磁场能量（不是功率）
  - 左式
    - 左式的实部表示流入的有功功率（用于补偿损耗功率）
    - 左式的虚部表示流入的无功功率（与电磁场功率交换）

5.4.5 复坡应廷矢量物理含义

- 平均能流密度矢量
  - $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) = \mathrm{Re}\left(\dot{\boldsymbol{E}} \times \dot{\boldsymbol{H}}^*\right) + \mathrm{Re}\left(\dot{\boldsymbol{E}} \times \dot{\boldsymbol{H}}\mathrm{e}^{2\mathrm{j}\omega t}\right)$.
  - $\boldsymbol{S}_{\mathrm{avg}}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}, t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{Re}\left(\dot{\boldsymbol{E}} \times \dot{\boldsymbol{H}}^*\right)$.
- 复坡应廷矢量（复数能流密度矢量）
  - $\widetilde{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{r}) = \dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) \times \dot{\boldsymbol{H}}^*(\boldsymbol{r}) = \dfrac{1}{2}\dot{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}) \times \dot{\boldsymbol{H}}_{\mathrm{m}}^*(\boldsymbol{r})$.
  - 其角频率为 $\dot{\boldsymbol{E}}$ 的两倍，因此不能由瞬时值方程取复数得到.
  - 有功功率密度：$\mathrm{Re}\left[\widetilde{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{r})\right] = \boldsymbol{S}_{\mathrm{avg}}(\boldsymbol{r})$.
  - 无功功率密度：$\mathrm{Im}\left[\widetilde{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{r})\right]$.

5.4.6 各种形式的记号的总结

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) &= E_x(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{a}_x + E_y(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{a}_y + E_z(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{a}_z,\\
E(\boldsymbol{r},t) &= \sqrt{E_x(\boldsymbol{r},t)^2 + E_y(\boldsymbol{r},t)^2 + E_z(\boldsymbol{r},t)^2},\\
\boldsymbol{E}_x(\boldsymbol{r},t) &= E_{x\mathrm{m}}(\boldsymbol{r})\cos(\omega t+\phi(\boldsymbol{r}))\boldsymbol{a}_x,\\
E_x(\boldsymbol{r},t) &= E_{x\mathrm{m}}(\boldsymbol{r})\cos(\omega t+\phi(\boldsymbol{r})),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) &= \boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r})\cos(\omega t+\phi(\boldsymbol{r})),\\
\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}) &= E_{x\mathrm{m}}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{a}_x + E_{y\mathrm{m}}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{a}_y + E_{z\mathrm{m}}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{a}_z,\\
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}),
\end{aligned}
$$

- 有坐标有时间
  - 粗体 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ 和 $\boldsymbol{E}_x(\boldsymbol{r},t)$ 表示瞬时值向量.
  - 斜体 $E(\boldsymbol{r},t)$ 和 $E_x(\boldsymbol{r},t)$ 表示瞬时值模长.
- 有坐标无时间
  - $\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}), E_{x\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{E}_{x\mathrm{m}}(\boldsymbol{r})$ 表示振幅值.
  - $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}), E_x(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{E}_x(\boldsymbol{r})$ 表示有效值（非平均值）
  - $w_{\mathrm{max}}(\boldsymbol{r}), w_{\mathrm{avg}}(\boldsymbol{r})$ 分别表示极大值与平均值.
- 无坐标无时间
  - 如向量 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}_x$，或标量 E, E_x 等.
  - 一般是瞬时值的简写（而非振幅值或有效值）
  - 不一定表示与坐标与时间无关，只是为了方便.
- 频域（相量）
  - $\dot{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}), \dot{E}_{x\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}), \dot{\boldsymbol{E}}_{x\mathrm{m}}(\boldsymbol{r})$ 表示复振幅.
  - $\dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}), \dot{E}_x(\boldsymbol{r}), \dot{\boldsymbol{E}}_x(\boldsymbol{r})$ 表示复有效值.
  - $\widetilde{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{r})$ 表示另一个频率的复数.
- 注意：
  - 时域与频域的转换方式有两种
    1. 以余弦为基准，复数取实部得到瞬时值.
    2. 以正弦为基准，复数取虚部得到瞬时值.

    二者不可混用，若取实部则虚部无实际含义.

    一般以余弦为基准，如果用正弦请事先说明.
  - 区分 $0, \mathbf{0}, \dot{0}, \dot{\mathbf{0}}$，不过它们常简写为 0 或 $\mathbf{0}$.
  - 有时候无坐标无时间的量可能表示其它含义，可能只是某个函数的记号，以具体情况中的说明为准.

5.5 波动方程

5.5.1 非齐次波动方程

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \boldsymbol{E} &= \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E}) - \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E}) \\
&= \nabla\left(\frac{\nabla\cdot\boldsymbol{D}}{\varepsilon}\right) + \nabla\times\left(\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right) \\
&= \frac{\nabla\rho}{\varepsilon} + \mu\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\boldsymbol{H} \\
&= \frac{\nabla\rho}{\varepsilon} + \mu\frac{\partial\boldsymbol{J}}{\partial t} + \mu\frac{\partial^2\boldsymbol{D}}{\partial t^2} \\
&= \frac{\nabla\rho}{\varepsilon} + \mu\frac{\partial\boldsymbol{J}}{\partial t} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}
\end{aligned}
\quad\Bigg|\quad
\begin{aligned}
\nabla^2 \boldsymbol{H} &= \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{H}) - \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{H}) \\
&= \nabla\left(\frac{\nabla\cdot\boldsymbol{B}}{\mu}\right) - \nabla\times\left(\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right) \\
&= -\nabla\times\boldsymbol{J} - \frac{\partial}{\partial t}\nabla\times(\varepsilon\boldsymbol{E}) \\
&= -\nabla\times\boldsymbol{J} + \varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2} \\
&= -\nabla\times\boldsymbol{J} + \mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}
\end{aligned}$$

- 非齐次波动方程
  - $\nabla^2\boldsymbol{E} - \mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \mu\dfrac{\partial\boldsymbol{J}}{\partial t} + \dfrac{\nabla\rho}{\varepsilon}.$
  - $\nabla^2\boldsymbol{H} - \mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2} = -\nabla\times\boldsymbol{J}.$
- 波动方程的说明
  - $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}' + \sigma\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{J}'$ 为非电性外加源等效电流.
  - 总电流满足电流连续性方程：$\nabla\cdot\boldsymbol{J} = -\dfrac{\partial\rho}{\partial t}.$
- 波动方程的标准形式
  - $\nabla^2 u(\boldsymbol{r},t) - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 u(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2} = -f(\boldsymbol{r},t).$
  - u 为待求场量，v 为波速，f 为自由项.

5.5.2 齐次波动方程

对于无源理想介质，$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}' = \mathbf{0}, \sigma = 0, \varepsilon, \mu \in \mathbb{R}$，

- $\nabla^2\boldsymbol{E} - \mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0}.$
- $\nabla^2\boldsymbol{H} - \mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2} = \mathbf{0}.$

5.5.3 齐次亥姆霍兹方程

对于无源理想介质中的时谐场，有

- 齐次亥姆霍兹方程
  - $\nabla^2\dot{\boldsymbol{E}} + k^2\dot{\boldsymbol{E}} = \dot{\mathbf{0}}.$
  - $\nabla^2\dot{\boldsymbol{H}} + k^2\dot{\boldsymbol{H}} = \dot{\mathbf{0}}.$
- 符号说明
  - $k^2 = \omega^2\mu\varepsilon = \left(\dfrac{\omega}{v}\right)^2.$

- 波速：$v=\dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$.

5.6 时变场的标量位与矢量位

5.6.1 标量位与矢量位及其多值性

- 矢量磁位
  - 由于 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}=0$,
  - 定义 $\boldsymbol{B}\equiv\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$.
  - 单位为 $\mathrm{Wb/m}$.
- 标量磁位
  - 由于 $\boldsymbol{\nabla}\times\left(\boldsymbol{E}+\dfrac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)=\boldsymbol{0}$,
  - 定义 $-\boldsymbol{\nabla}\phi=\boldsymbol{E}+\dfrac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$.
  - 单位为 V.
- 多值性：对于 $\forall f$，有
  - $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\nabla}f)=\boldsymbol{0}$.
  - $-\boldsymbol{\nabla}\left(\phi-\dfrac{\partial f}{\partial t}\right)=\boldsymbol{E}+\dfrac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\nabla}f)$.

5.6.2 洛伦兹规范与达朗贝尔方程

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}^2\phi&=-\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{E})-\boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\\&=-\frac{\rho}{\varepsilon}+\mu\varepsilon\frac{\partial\phi}{\partial t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{A}&=\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})-\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})\\&=\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})-\mu\boldsymbol{J}-\mu\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\\&=\boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}+\mu\varepsilon\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)-\mu\boldsymbol{J}+\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}\\&=-\mu\boldsymbol{J}+\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}\end{aligned}$$

- 洛伦兹规范：$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}=-\mu\varepsilon\dfrac{\partial\phi}{\partial t}$.
- 达朗贝尔方程
  - $\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{A}-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\mu\boldsymbol{J}$.
  - $\boldsymbol{\nabla}^2\phi-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=-\dfrac{\rho}{\varepsilon}$.

5.6.3 达朗贝尔方程解的形式

- 标量磁位达朗贝尔方程的特例
  - 当 ϕ 与时间无关时，成为泊松方程：$\boldsymbol{\nabla}^2\phi=-\dfrac{\rho}{\varepsilon}$.

    - 当场点在源点 ρ 外时，为齐次波动方程：$\boldsymbol{\nabla}^2\phi-\mu\varepsilon\dfrac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=0$.
- 解的形式
    - $\phi(\boldsymbol{r},t)=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\displaystyle\int_{V'}\dfrac{\rho\left(\boldsymbol{r}',t-\dfrac{R}{v}\right)}{R}\,\mathrm{d}V'$.
    - $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\dfrac{\mu}{4\pi}\displaystyle\int_{V'}\dfrac{\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}',t-\dfrac{R}{v}\right)}{R}\,\mathrm{d}V'$.

5.6.4 达朗贝尔方程复数形式

在时谐场中，

- 洛伦兹规范：$\boldsymbol{\nabla}\cdot\dot{\boldsymbol{A}}=-\mathrm{j}\omega\mu\varepsilon\dot{\phi}$.
- 达朗贝尔方程
    - $\boldsymbol{\nabla}^2\dot{\boldsymbol{A}}+k^2\dot{\boldsymbol{A}}=-\mu\dot{\boldsymbol{J}}$.
    - $\boldsymbol{\nabla}^2\dot{\phi}+k^2\dot{\phi}=-\dfrac{\dot{\rho}}{\varepsilon}$.
    - $k^2=\omega^2\mu\varepsilon,v=\dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$.
- 解的形式
    - $\dot{\phi}(\boldsymbol{r})=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\displaystyle\int_{V'}\dfrac{\dot{\rho}(\boldsymbol{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\,\mathrm{d}V'$.
    - $\dot{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r},t)=\dfrac{\mu}{4\pi}\displaystyle\int_{V'}\dfrac{\dot{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\,\mathrm{d}V'$.
    - $R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$.
- 求解方法
    - 若已知 $\boldsymbol{A}$，则可求解 ϕ，反之亦然.
    - $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$.
    - $\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{\nabla}\phi-\dfrac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$.
    - $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$.