

数理统计

第4章 参数估计

- 4.1 基本概念与性质
 - 4.1.1 基本概念与常用统计图
 - 4.1.2 经验分布函数与格列文科定理
 - 4.1.3 常用统计量及其性质
 - 4.3.4 正态总体常用统计量
 - 4.2 点估计
 - 4.2.1 矩估计法
 - 4.2.2 极大似然估计法
 - 4.2.3 贝叶斯估计法
 - 4.3 点估计的优良性准则
 - 4.3.1 估计量的无偏性
 - 4.3.2 最小方差无偏估计
 - 1 均方误差
 - 2 最小方差无偏估计 (MVU 估计)
 - 3 克拉美 - 劳不等式
 - 4.3.3 估计量的相合性与渐进正态性
 - 1 相合性
 - 2 渐进正态性
 - 4.4 区间估计
 - 4.4.1 基本概念
 - 4.4.2 枢轴变量法
 - 4.4.3 大样本法
 - 4.4.4 置信界
 - 4.4.5 贝叶斯法
- 常用区间估计表

第5章 假设检验

- 5.1 问题提法和基本概念
 - 5.1.1 例子与问题提法
 - 5.1.2 功效函数
 - 5.1.3 两类错误与假设检验思路
 - 5.1.4 检验水平与一致最优检验
- 5.2 重要参数检验
 - 5.2.1 正态总体均值的检验
 - 1 方差已知
 - 2 方差未知
 - 5.2.2 两个正态总体均值差的检验
 - 1 方差已知
 - 2 方差未知
 - 5.2.3 正态分布方差的检验
 - 1 均值已知
 - 2 均值未知
 - 5.2.π 两个正态分布方差商的检验
 - 1 均值已知
 - 2 均值未知
 - 5.2.4 指数分布参数的检验
 - 1 普通检验
 - 2 截尾寿命检验

- 2.1 定数截尾法
 - 2.2 定时截尾法
- 5.2.5 二项分布参数的检验
- 5.2.6 泊松分布参数的检验
- 5.2.7 大样本检验
 - 贝伦斯—费歇尔问题
 - 二项分布参数检验
 - 一般分布参数检验
- 5.2.8 贝叶斯方法
 - 基本思路
 - 正态分布的区间检验
- 5.3 拟合优度检验
 - 5.3.1 理论分布完全已知且只取有限个值的情况
 - 5.3.2 理论分布只含有限个值但不完全已知的情况
 - 5.3.3 对列联表的应用
 - 5.3.4 总体分布为一般分布的情况

第 4 章 参数估计

4.1 基本概念与性质

4.1.1 基本概念与常用统计图

总体（母体）是概率分布族的一员.

总体分布 离散性（概率函数），连续型（概率密度函数）

单参数分布族

非参数总体

样本大小 (容量)

常用统计图

1. 频数分布表

组号	区间	频数 n_i	频率 f_i
1	(1, 2]	2	0.40
2	(2, 3]	3	0.60
合计		5	1.00

2. **频率直方图** 以 $\frac{f_i}{\Delta t_i}$ 为高. 所有小矩形的面积和为 1.

3. **条形图** 一般用于小样本离散性随机变量总体分布.

4.1.2 经验分布函数与格列文科定理

经验分布函数 (样本分布函数) $F_n(x) = \{X_1, X_2, \dots, X_n \text{ 中不大于 } x \text{ 的个数}\} / n$.

即将 X 的样本值 x_1, x_2, \dots, x_n 从小到大重排后, 定义经验分布函数如下.

$$\underbrace{x_{(1)}, \dots, x_{(1)}}_{n_1}, \underbrace{x_{(2)}, \dots, x_{(2)}}_{n_2}, \dots, \underbrace{x_{(m)}, \dots, x_{(m)}}_{n_m},$$
$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < x_{(1)}, \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i, & x_{(k)} \leq x < x_{(k+1)} \\ 1, & x \geq x_{(m)} \end{cases}$$

1. $0 \leq F_n(x) \leq 1$.
2. $F_n(x)$ 单调不减.
3. $F_n(-\infty) = 0, F_n(+\infty) = 1$.
4. $F_n(x)$ 右连续.

格列文科定理 对于任意实数 x , 经验分布函数 $F_n(x)$ 以概率 1 一致收敛于总体分布函数 $F(x)$, 即

$$P \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{-\infty < x < +\infty} |F_n(x) - F(x)| = 0 \right\} = 1.$$

- 经验分布函数不确定, 不唯一, 所以在极限外套一个 P.
-

4.1.3 常用统计量及其性质

统计量 只依赖于样本, 而不依赖于其未知参数.

- 样本的统计量为 $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$.
- 统计量的观测值为 $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

样本均值 $\bar{X} = a_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

- 其观测值记为 $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$.
- 对于一般分布 ★
 - $E(\bar{X}) = \mu$.
 - $E(\bar{X}^2) = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$.
 - $E(\bar{X}^3) = \frac{\mu_3}{n^2} + \frac{3}{n} \mu \sigma^2 + \mu^3$.
 - $E(\bar{X}^4) = \frac{\mu_4}{n^3} + \frac{4}{n^2} \mu_3 \mu + \frac{18}{n} \mu^2 \sigma^2 + 7\mu^4$.
 - $E(X_i^2 \bar{X}) = \frac{\mu_3}{n} + \frac{n-1}{n} (\sigma^2 + \mu^2) \mu$.
 - $E(X_i \bar{X}^{k-1}) = E(\bar{X}^k)$.
 - $D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$.
 - $\mu_k(\bar{X}) = E \left[\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k \right] = \frac{\mu_k}{n^{k-1}}$.

- ★ 设总体有 N 个数据 a_1, a_2, \dots, a_N , 均值为 $\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i$, 方差为

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (a_i - \mu)^2.$$

从总体中抽取 n 个值 X_1, X_2, \dots, X_n 作为样本, 则

- $E(\bar{X}) = \mu$.
- $D(\bar{X}) = \frac{N-n}{N-1} \frac{\sigma^2}{n}$.

当 $N \rightarrow +\infty$ 时, 即抽取的样本相互独立时, 有 $D(\bar{X}) \sim \frac{\sigma^2}{n}$.

样本离差平方和 $SS = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2$.

- 其观测值记为 $ss = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2$.

样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$.

- 其观测值记为 s^2 .
- 标准差又称均方差, 样本标准差的观测值记为 s .
- 对于一般分布, 有
 - $E(S^2) = \sigma^2$.
 - $D(S^2) = \frac{1}{n} \left(\mu_4 - \frac{n-3}{n-1} \sigma^4 \right)$. ★
 - $\text{Cov}(\bar{X}, S^2) = \frac{\mu_3}{n} - \frac{3\sigma^3 + \mu^2}{n-1} \mu$.
- 对于正态分布, 有 $D(S^2) = D\left(\frac{\sigma^2}{n-1} \chi_{n-1}^2\right) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$. ★

样本原点矩 $a_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$.

- 或使用 A_k 表示样本原点矩, 用 a_k 表示其观测值.

样本中心矩 $m_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k$.

- 或使用 B_k 表示样本中心矩, 用 b_k 表示其观测值.
- 矩称为理论矩, 样本矩称为经验矩, 即经验分布函数的矩.
- $m_2 = \frac{n-1}{n} S^2$.
- $E(m_3) = \left(1 - \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2}\right) \mu_3 + \frac{9-3n}{n} \mu \sigma^2 + \frac{3-n}{n} \mu^3$.

不知道叫什么的统计量 $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 = SS + n(\bar{X} - \mu)^2$.

样本协方差 $S_{XY} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$.

- 其观测值记为 s_{XY} .
- 样本协方差是总体协方差的无偏估计 (可以是有限总体的不放回抽取)

$$E(S_{XY}) = \text{Cov}(X, Y).$$

样本相关系数 $\rho_{XY} = \frac{S_{XY}}{S_X S_Y}.$

- 其中 S_X 和 S_Y 为样本均方差. 其观测值为 $\rho_{XY} = \frac{s_{XY}}{s_X s_Y}.$

样本的 **众数** 记为 M_0 .

次序统计量 $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}.$

样本中位数 $\hat{m} = M_e = \begin{cases} X_{((n+1)/2)}, & n \text{ 为奇数,} \\ (X_{(n/2)} + X_{(n/2+1)})/2, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$

偏态系数

- 计算公式
 - 简单偏态系数 $SK = \frac{m_3}{\sigma^3} = \frac{\sum (X - \bar{X})^3}{\sigma^3 \cdot N}.$
 - 加权偏态系数 $SK = \frac{\sum (X - \bar{X})^3 F}{\sigma^3 \sum F}.$
- 取值说明
 - $SK = 0$ 表示数据为完全的对称分布.
 - $SK > 0$ 表示数据为 **正偏态** (或 **右偏态**).
 - $SK < 0$ 表示数据为 **负偏态** (或 **左偏态**).

4.3.4 正态总体常用统计量

设 X_1, X_2, \dots, X_n 与 Y_1, Y_2, \dots, Y_n 分别是来自正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2) = N(\mu, \sigma^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的相互独立的两个样本, 则

- 样本均值
 - $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$
 - $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1).$
 - $\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi_n^2.$
- 样本方差
 - $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2.$
 - \bar{X} 与 S^2 相互独立.
 - $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}.$
- 两组样本
 - $\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right).$
 - $\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim f_{n_1-1, n_2-1}.$

◦ 当 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, 令 $S_\omega^2 = \frac{SS_1^2 + SS_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$, 则

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_\omega \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}.$$

★ 设有 m 个方差均为 σ^2 的分布, 其中有 k 个分布的期望未知. 从这些分布中任取 n 个相互独立的样本数据, 则样本方差的一个无偏估计是 $S^2 = \frac{SS}{n-k}$. 若这些分布都是正态分布, 则进一步有 $\frac{SS}{\sigma^2} \sim \chi_{n-k}^2$.

4.2 点估计

4.2.1 矩估计法

$$\alpha_m = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m f(x; \theta_1, \dots, \theta_k) dx \approx a_m = \sum_{i=1}^n X_i^m / n$$

取 $m = 1, 2, \dots, k$, 联立方程组即得 $\theta_i \approx \hat{\theta}_i(X_1, \dots, X_n)$.

- $\hat{\theta}_i(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 称为矩估计量.
- $\hat{\theta}_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 称为矩估计值. (其它估计相关名称类似)

变异系数 σ/μ .

🍌 对于任意均值 μ 与方差 σ^2 存在的总体, 有矩估计:

$$\begin{cases} \mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \\ \sigma^2 + \mu^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\mu} = \bar{X} \\ \hat{\sigma}^2 = \frac{SS}{n} \end{cases}$$

4.2.2 极大似然估计法

样本 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的总体分布函数 (样本似然函数) 为

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta_1, \dots, \theta_k) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$$
$$L(X_1, \dots, X_n; \theta_1^*, \dots, \theta_k^*) = \max_{\theta_1, \dots, \theta_k} L(X_1, \dots, X_n; \theta_1, \dots, \theta_k)$$

欲得到极大似然估计, 解如下似然方程组

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

4.2.3 贝叶斯估计法

先验分布, 先验概率. 允许使用主观概率.

设总体有概率密度 $f(X, \theta)$, 抽样本 X_1, X_2, \dots, X_n , 则 $(\theta, X_1, \dots, X_n)$ 的联合密度为

$$h(\theta) f(X_1, \theta) \cdots f(X_n, \theta)$$

由此算出 (X_1, X_2, \dots, X_n) 的边缘密度为

$$p(X_1, X_2, \dots, X_n) = \int h(\theta) f(X_1, \theta) \cdots f(X_n, \theta) d\theta$$

从而得出 θ 在给定 X_1, X_2, \dots, X_n 的条件密度为

$$h(\theta | X_1, \dots, X_n) = h(\theta) f(X_1, \theta) \cdots f(X_n, \theta) / p(X_1, \dots, X_n)$$

一般去上式的均值作为估计, 即

$$\tilde{\theta} = E(h(\theta | X_1, X_2, \dots, X_n)).$$

$h(\theta)$ 一般是概率函数, 即满足 $h(\theta) \geq 0$, $\int h(\theta) d\theta = 1$.

但对于积分域为无穷区间, 或一些特定的分布, 可以采用其它函数, 比如 $h(\theta) = 1$, 或直接取为先验密度等. 此时 $h(\theta)$ 称为 "广义先验密度".

根据 n 次独立试验中事件 A 发生的次数 X 去估计其发生的概率 p , 按照 "同等无知" 原则 (贝叶斯原则), 由上述方法积分得

$$\tilde{p} = \frac{X + 1}{n + 2}.$$

-
- 估计正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 中的 μ 时, 取 $h(\mu) = 1$;
 - 估计正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 中的 σ 时, 取 $h(\sigma) = \sigma^{-1}$;
 - 估计指数分布 $E(\lambda)$ 中的 λ 时, 取 $h(\lambda) = \lambda^{-1}$.
-

由先验分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 估计正态总体 $N(\theta, 1)$ 中的 θ 为 (取 $h(\theta)$ 为先验密度)

$$\tilde{\theta} = \frac{n}{n + \sigma^{-2}} \bar{X} + \frac{\sigma^{-2}}{n + \sigma^{-2}} \mu.$$

4.3 点估计的优良性准则

估计的整体性能

1. 无偏性

1. 没有系统性的偏差, 即误差的均值为零.
2. 各次估计的均值依概率收敛至被估计值.

2. 有效性 (数量指标)

1. 方差
2. 均方误差

3. 相合性 (一致性)

4.3.1 估计量的无偏性

即无 **系统误差** $E(\hat{\theta}) - \theta$. 故 **无偏估计量** \hat{g} 须满足

$$E_{\theta_1, \dots, \theta_k}[\hat{g}(X_1, \dots, X_n)] = g(\theta_1, \dots, \theta_k).$$

- $m = \bar{X}$ 是 $E(X)$ 的无偏估计.

- 如果总体均值未知, 则 $S^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$ 是 $\text{Var}(X)$ 的无偏估计.
- 如果总体均值已知, 则 $m_2 = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n}$ 是 $\text{Var}(X)$ 的无偏估计.
- 由 $\sigma^2 = E(S^2) = \text{Var}(S) + (ES)^2$ 知, S 总是 σ 系统性偏低的估计.

设 $\hat{g} = \hat{g}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是未知参数的函数 $g(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ 的一个估计量, 如果 $E(\hat{\theta})$ 存在, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{g}(X_1, X_2, \dots, X_n)) = g(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$$

则称 \hat{g} 为 g 的 **渐进无偏估计量**.

- $m_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 是 σ^2 的渐进无偏估计量, 但不是无偏估计量.

- ★ (看思路) 对于正态分布总体 $N(\mu, \sigma^2)$, 由 $(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi_{n-1}^2$ 算出

$$S/\sigma \sim g(s) = \begin{cases} \frac{(n-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{\frac{n-3}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}, & s > 0 \\ 0 & s \leq 0. \end{cases}$$

计算 $E(S) = \sigma \int_0^{+\infty} sg(s) ds$, 故 σ 的一个无偏估计是

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} S.$$

- **无偏估计不一定好**, 比如 $X \sim P(\lambda)$, 则 $g(\lambda) = e^{-2\lambda}$ 唯一的无偏估计为

$$\hat{g}(X) = \begin{cases} 1, & X \text{ 为偶数,} \\ -1, & X \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

4.3.2 最小方差无偏估计

1 均方误差

$$\begin{aligned} M_{\hat{\theta}}(\theta) &= E_{\theta} \left[\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) - \theta \right]^2 \\ &= \text{Var}_{\theta}(\hat{\theta}) + \left[E_{\theta}(\hat{\theta}) - \theta \right]^2 \end{aligned}$$

2 最小方差无偏估计 (MVU 估计)

注意是最小方差, 而不是最小均方误差. (Minimum Variance Unbiased)

3 克拉美 - 劳不等式

对于单参数情况 $f(x, \theta)$, 为估计 $g(\theta)$, 记 **费歇尔信息量** 为

$$\begin{aligned}
I(\theta) &= E \left[\left(\frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta} \right)^2 / f(x, \theta) \right] \\
&= \int \left[\left(\frac{\partial f(x, \theta)}{\partial \theta} \right)^2 / f(x, \theta) \right] dx \quad (\text{连续的总体分布}) \\
&= \sum_i \left(\frac{\partial f(a_i, \theta)}{\partial \theta} \right)^2 / f(a_i, \theta) \quad (\text{离散的总体分布})
\end{aligned}$$

则对任一无偏估计 $\hat{g} = \hat{g}(X_1, X_2, \dots, X_n)$, 有 **克拉美 - 劳不等式**:

$$\text{Var}_\theta(\hat{\theta}) \geq (g'(\theta))^2 / (nI(\theta)).$$

- **MVU 的均方误差不一定是最小的**, 如对于正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 其中 μ 已知, 则 m_2 是 MVU 估计, 但 $E(m_2 - \sigma^2)^2 = \frac{2\sigma^4}{n} > E\left(\frac{m_2}{n+1} - \sigma^2\right)^2 = \frac{2\sigma^4}{n+1}$.
- 若 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 都是 θ 的 MVU 估计, 则 $a\hat{\theta}_1 + b\hat{\theta}_2 + c$ 是 $(a+b)\theta + c$ 的 MVU 估计. ★ ★ (利用第三章定理 3.1, 2°)
- 若 $E(X) = \theta$, $\sum_{i=1}^n c_i = 1$, 则 $\sum_{i=1}^n c_i X_i$ 是 θ 的无偏估计, 并且当且仅当 $c_i = \frac{1}{n}$ 时, 其为 MVU 估计.

4.3.3 估计量的相合性与渐进正态性

1 相合性

如果当样本大小 n 无限增加时, 估计量 $T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 依概率收敛于被估计值, 则称该估计量是 **相合估计量**, 即

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} P_{\theta_1, \dots, \theta_k} (|\hat{g}(X_1, \dots, X_n) - g(\theta_1, \dots, \theta_n)| \geq \varepsilon) = 0.$$

具有相合性的例子: $m(n)$, $m_2(n)$, 绝大多数极大似然估计等等.

- 由[切比雪夫不等式](#)知:

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{g} - g| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(\hat{g})}{\varepsilon^2}.$$

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} D(\hat{g}) = 0$, 则其为相合估计量.

2 渐进正态性

- 大样本性质
 - 相合性
 - 渐进正态性
- 小样本性质
 - 无偏性

4.4 区间估计

4.4.1 基本概念

奈曼理论 的原则: 先保证可靠度, 再提升精度.

称区间估计 $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$ 的 **置信系数** 为 $1 - \alpha$, 如果

$$\exists \alpha > 0, \forall \theta : P_{\theta} \left(\hat{\theta}_1(X_1, \dots, X_n) \leq \theta \leq \hat{\theta}_2(X_1, \dots, X_n) \right) = 1 - \alpha.$$

称区间估计 $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$ 的 **置信水平 (置信度)** 为 $1 - \alpha$, 如果

$$\exists \alpha > 0, \forall \theta : P_{\theta} \left(\hat{\theta}_1(X_1, \dots, X_n) \leq \theta \leq \hat{\theta}_2(X_1, \dots, X_n) \right) \geq 1 - \alpha.$$

- 随机区间 $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$ 称为 **双侧置信区间**.
- $(-\infty, \hat{\theta}_2]$ 和 $[\hat{\theta}_1, +\infty)$ 称为 **单侧置信区间**.
- $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 分别称为置信下界和置信上界.
- α 一般取为 0.1, 0.05, 0.01, 0.001.

区间估计的研究对象:

1. 置信系数或置信水平.
2. 区间长度.
3. 区间右端点与左端点之比.

4.4.2 枢轴变量法

上 β 分位点: $F(v_{\beta}) = 1 - \beta$.

下 β 分位点: $F(w_{\beta}) = \beta$.

上 β 分位点就是下 $1 - \beta$ 分位点.

统计三大分布的上 β 分位点记为: $\chi_n^2(\beta)$, $t_n(\beta)$, $f_{n,m}(\beta)$.

利用上 β 分位点 w_{β} 寻找区间估计的 **枢轴变量法**:

1. 找一个与被估计参数 $g(\theta)$ 有关的统计量 T .
2. 找 **枢轴变量** $S(T, g(\theta))$, 使其分布 F 与 θ 无关.
3. $a \leq S(T, g(\theta)) \leq b \Leftrightarrow A \leq g(\theta) \leq B$.
4. $P(w_{1-\alpha/2} \leq S(T, g(\theta)) \leq w_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$.

一样本 t 区间估计, 为保证长度 $2St_{n-1}(\alpha/2)/\sqrt{n} \leq L$, 斯泰因提出了 **两阶段抽样** 的方法, 其中追加抽样的次数为

$$m = \begin{cases} 0, & n \leq [4t_{n-1}^2(\alpha/2)S^2/L^2] + 1, \\ n - 1 - [4t_{n-1}^2(\alpha/2)S^2/L^2], & n > [4t_{n-1}^2(\alpha/2)S^2/L^2] + 1. \end{cases}$$

记两次样本全体的均值为 \tilde{X} , 则区间估计 $[\tilde{X} - L/2, \tilde{X} + L/2]$ 有置信系数 $1 - \alpha$.

4.4.3 大样本法

大样本区间估计: 利用 [中心极限定理](#) 与枢轴变量法.

例如, 一般的, 设总体有均值 θ , 方差 σ^2 , 并且都位置, 从样本 X_1, X_2, \dots, X_n 做 θ 的区间估计. 由于样本均方差 S 是 σ 的祥和估计, 利用中心极限定理, 当 n 足够大时, 有

$$\sqrt{n}(\bar{X} - \theta)/S \sim N(0, 1).$$

以此为枢轴变量, 于是有区间估计

$$\left[\bar{X} - Su_{\alpha/2}/\sqrt{n}, \bar{X} + Su_{\alpha/2}/\sqrt{n} \right].$$

对于二项分布, 当 $\alpha = 0.05$, $n \geq 40$ 时, 有区间长度 $\theta_2 - \theta_1 \leq 0.3$.

4.4.4 置信界

置信系数 (水平) 为 α 的置信上界 $\bar{\theta}$ 和置信下界 $\underline{\theta}$:

$$\begin{aligned} \forall \theta : P_{\theta}(\bar{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n) \geq \theta) &= 1 - \alpha \\ \forall \theta : P_{\theta}(\underline{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq \theta) &= 1 - \alpha \end{aligned}$$

4.4.5 贝叶斯法

即寻找 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$, 使得

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\theta}_1}^{\hat{\theta}_2} h(\theta | X_1, \dots, X_n) d\theta &= 1 - \alpha && \text{(区间估计)} \\ \int_{-\infty}^{\hat{\theta}} h(\theta | X_1, \dots, X_n) d\theta &= 1 - \alpha && \text{(置信上界)} \\ \int_{\hat{\theta}}^{+\infty} h(\theta | X_1, \dots, X_n) d\theta &= 1 - \alpha && \text{(置信下界)} \end{aligned}$$

区间估计中确定 θ_1, θ_2 的方法 (原则):

1. 使 $\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1$ 最小.
2. 使 $\hat{\theta}_2/\hat{\theta}_1$ 最小.
3. 取置信水平为 $\alpha/2$ 的置信上下界.

常用区间估计表

表 7.1 正态总体均值、方差的置信区间(置信度为 $1-\alpha$)

	待估参数	其他参数	置信函数 G 的分布	双侧置信区间	单侧置信区间
单个正态总体	μ	σ^2 已知	$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$	$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}, \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$	$\left(-\infty, \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha}\right), \left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha}, +\infty\right)$
		σ^2 未知	$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1), \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$	$\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1), +\infty\right), \left(-\infty, \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)\right)$
	σ^2	μ 已知	$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n)$	$\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n)}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n)}\right)$	$\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{\alpha}^2(n)}, +\infty\right), \left(-\infty, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{1-\alpha}^2(n)}\right)$
		μ 未知	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)}\right)$	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha}^2(n-1)}, +\infty\right), \left(0, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha}^2(n-1)}\right)$
两个正态总体	$\mu_1 - \mu_2$	σ_1^2, σ_2^2 已知	$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$	$\left(\bar{X}-\bar{Y} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$	$\left(\bar{X}-\bar{Y} - z_{\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}, +\infty\right), \left(0, \bar{X}-\bar{Y} + z_{\alpha} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$
		$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 未知	$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2)$	$\left(\bar{X}-\bar{Y} \pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2) S_w \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$	$\left(\bar{X}-\bar{Y} - t_{\alpha}(n_1+n_2-2) S_w \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}, +\infty\right), \left(-\infty, \bar{X}-\bar{Y} + t_{\alpha}(n_1+n_2-2) S_w \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$
	$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	μ_1, μ_2 已知	$\frac{\frac{n_1 \sigma_1^2}{\sigma_2^2} + \sum_{i=1}^{n_1} (Y_i - \mu_2)^2}{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2} \sim F(n_2, n_1)$	$\left(\frac{\frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2}{\sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \mu_2)^2}}{F_{1-\alpha/2}(n_2, n_1)}, \frac{\frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2}{\sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \mu_2)^2}}{F_{\alpha/2}(n_2, n_1)}\right)$	$\left(\frac{\frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2}{\sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \mu_2)^2}}{F_{1-\alpha}(n_2, n_1)}, +\infty\right), \left(0, \frac{\frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2}{\sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \mu_2)^2}}{F_{\alpha}(n_2, n_1)}\right)$
			$\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$	$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}(n_2-1, n_1-1)}, \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}(n_2-1, n_1-1)}\right)$	$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha}(n_2-1, n_1-1)}, +\infty\right), \left(0, \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha}(n_2-1, n_1-1)}\right)$
		μ_1, μ_2 未知	$\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$	$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}(n_2-1, n_1-1)}, \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}(n_2-1, n_1-1)}\right)$	$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha}(n_2-1, n_1-1)}, +\infty\right), \left(0, \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha}(n_2-1, n_1-1)}\right)$
			$\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$	$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}(n_2-1, n_1-1)}, \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}(n_2-1, n_1-1)}\right)$	$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha}(n_2-1, n_1-1)}, +\infty\right), \left(0, \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha}(n_2-1, n_1-1)}\right)$

表 7.2 0-1 分布参数 p 的置信区间(置信度为 $1-\alpha$)

待估参数	其他参数	置信函数 G 的分布	近似的双侧置信区间
p	n 已知	$\frac{\left(\frac{\mu_n}{n}-p\right)}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1)$	$\left(\frac{\mu_n}{n} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\frac{\mu_n}{n} \left(1 - \frac{\mu_n}{n}\right)}{n}}, \frac{\mu_n}{n} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\frac{\mu_n}{n} \left(1 - \frac{\mu_n}{n}\right)}{n}}\right)$

第 5 章 假设检验

5.1 问题提法和基本概念

5.1.1 例子与问题提法

原假设 (零假设, 解消假设) 是 \mathbb{R}^n 的一个子集, 其中 n 是未知参数的数量.

对立假设 (备择假设) 是原假设补集的子集.

检验统计量, 接受域, 否定域 (临界域), 临界值.

简单假设, 复合假设. 赘余参数 (多余参数, 讨厌参数).

双边 (右边, 左边) 备择假设, 双边 (单边) 检验.

5.1.2 功效函数

设总体分布中包含未知参数 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$, H_0 为原假设, H_1 为对立假设, Φ 是基于样本 X_1, X_2, \dots, X_n 而对 H_0 做的一个检验, 则其 **功效函数** 是:

$$\beta_{\Phi}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = P_{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n}(\text{在检验 } \Phi \text{ 之下, } H_0 \text{ 被否定})$$

- 当 $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \in H_0$ 时, 上式越小越好.
- 当 $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \in H_1$ 时, 上式越大越好, 此时称为功效函数.

5.1.3 两类错误与假设检验思路

两类错误

1. 拒真: H_0 正确, 但被否定.
2. 取伪: H_0 错误, 但被接受.

$$\alpha_{1\Phi}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = \begin{cases} \beta_{\Phi}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k), & (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \in H_0, \\ 0 & (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \in H_1. \end{cases}$$

$$\alpha_{2\Phi}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = \begin{cases} 0, & (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \in H_0, \\ 1 - \beta_{\Phi}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k), & (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \in H_1. \end{cases}$$

奈曼-皮尔逊理论 的思路: 先保证第一类错误的概率不超过某个定值 α , 再使第二类错误的概率尽可能小.

5.1.4 检验水平与一致最优检验

H_0 的一个水平为 α 的检验 Φ :

$$\forall (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \in H_0 : \beta_{\Phi}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \leq \alpha.$$

并使 α 仅可能小. 即固定第一类错误概率的原则.

- 若 Φ 是 H_0 的一个水平为 α_0 的检验, 则它也是水平为 α ($\forall \alpha > \alpha_0$) 的检验.

假设检验问题 $H_0 : H_1$ 的一个水平为 α 的一致最优检验 Φ : 即对任何一个其它水平 α 的检验 g 有

$$\beta_{\Phi}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \geq \beta_g(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \quad (\text{对任何 } (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \in H_1).$$

- 在总体分布只依赖于一个参数 θ , 而原假设 H_0 是 $\theta \leq \theta_0$ 或 $\theta \geq \theta_0$ 时, 一致最优检验存在.

5.2 重要参数检验

5.2.1 正态总体均值的检验

设 X_1, X_2, \dots, X_n 是从正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 中抽出的样本.

原假设和对立假设分别为:

1. $H_0 : \mu \geq \mu_0, H_1 : \mu < \mu_0.$
2. $H'_0 : \mu \leq \mu_0, H'_1 : \mu > \mu_0.$
3. $H''_0 : \mu = \mu_0, H''_1 : \mu \neq \mu_0.$

1 方差已知

利用 $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1).$

- $H_0 : \mu \geq \mu_0, H_1 : \mu < \mu_0.$
 - Φ : 当 $\bar{X} \geq \mu_0 - \frac{\sigma u_{\alpha}}{\sqrt{n}}$ 时接受原假设 H_0 , 否则否定 H_0 .
 - 功效函数 $\beta_{\Phi}(\mu) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\mu_0 - \mu) - u_{\alpha}\right) \geq 1 - \beta.$

- 欲使第二类错误概率足够小: $n \geq \frac{\sigma^2(u_\alpha + u_\beta)^2}{(\mu_0 - \mu_1)^2}$.
- $H'_0: \mu \leq \mu_0, H'_1: \mu > \mu_0$.
 - Φ : 当 $\bar{X} \leq \mu_0 + \frac{\sigma u_\alpha}{\sqrt{n}}$ 时接受原假设 H'_0 , 否则否定 H'_0 .
 - 功效函数 $\beta'_\Phi(\mu) = 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\mu_0 - \mu) + u_\alpha\right) \geq 1 - \beta$.
 - 欲使第二类错误概率足够小: $n \geq \frac{\sigma^2(u_\alpha + u_\beta)^2}{(\mu_0 - \mu_1)^2}$.
- $H''_0: \mu = \mu_0, H''_1: \mu \neq \mu_0$.
 - Φ'' : 当 $|\bar{X} - \mu_0| \leq \frac{\sigma u_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}$ 时接受 H''_0 , 否则否定 H''_0 .
 - 功效函数 $\beta''_\Phi(\mu) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\mu_0 - \mu) - u_{\alpha/2}\right) \geq 1 - \beta$.
 - 欲使第二类错误概率足够小: $n \geq \frac{\sigma^2(u_{\frac{\alpha}{2}} + u_{\frac{1+\beta}{2}})^2}{(\mu_0 - \mu_1)^2}$.

注

- 若 $\mu_0 - \frac{\sigma u_\alpha}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq \mu_0 + \frac{\sigma u_\alpha}{\sqrt{n}}$, 则既接受 H_0 , 也接受 H'_0 .
- Φ 和 Φ' 都是一致最优检验.
- Φ'' 不是一致最优检验, 并且 H''_0 不存在一致最优检验.

2 方差未知

利用 $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$, 得到如下 **t 检验**:

- $H_0: \mu \geq \mu_0, H_1: \mu < \mu_0$.
 - Ψ : 当 $\bar{X} \geq \mu_0 - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{n-1}(\alpha)$ 时接受原假设 H_0 , 否则否定 H_0 .
 - 功效函数 $\beta_\Psi(\mu, \sigma) = P_{\mu, \sigma}\left(\frac{\sqrt{n}}{S}(\bar{X} - \mu_0) < -t_{n-1}(\alpha)\right)$ 只依赖于 $\delta = \frac{\mu - \mu_0}{\sigma}$.
- $H'_0: \mu \leq \mu_0, H'_1: \mu > \mu_0$.
 - Ψ' : 当 $\bar{X} \leq \mu_0 + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{n-1}(\alpha)$ 时接受原假设 H'_0 , 否则否定 H'_0 .
- $H''_0: \mu = \mu_0, H''_1: \mu \neq \mu_0$.
 - Ψ'' : 当 $|\bar{X} - \mu_0| \leq \frac{S}{\sqrt{n}}t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ 时接受原假设 H''_0 , 否则否定 H''_0 .

注: 除非检验水平 $\alpha \geq \frac{1}{2}$, 否则 Ψ 和 Ψ' 都不是一直最优检验.

5.2.2 两个正态总体均值差的检验

设 X_1, X_2, \dots, X_{n_1} 和 Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} 分别是来自正态总体 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma^2)$ 中抽取的相互独立的样本.

原假设和对立假设分别为

1. $H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq \mu_0, H_1: \mu_1 - \mu_2 < \mu_0$.
2. $H'_0: \mu_1 - \mu_2 \leq \mu_0, H'_1: \mu_1 - \mu_2 > \mu_0$.
3. $H''_0: \mu_1 - \mu_2 = \mu_0, H''_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0$.

1 方差已知

利用 $\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}\right)$, 记 $\mu_0 = \mu_1 - \mu_2$, $U = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \mu_0}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$, 则

- g : 当 $U \geq -u_\alpha$ 时接受 H_0 , 否则否定 H_0 .
- g' : 当 $U \leq u_\alpha$ 时接受 H'_0 , 否则否定 H'_0 .
- g'' : 当 $|U| \leq u_{\alpha/2}$ 时接受 H''_0 , 否则否定 H''_0 .

2 方差未知

利用 $T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \mu_0}{S_\omega \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$, $S_\omega = \frac{SS_1 + SS_2}{n_1 + n_2 - 2}$, 可得到如下两样本 t 检验:

- h : 当 $T \geq -t_{n_1+n_2-2}(\alpha)$ 时接受 H_0 , 否则否定 H_0 .
- h' : 当 $T \leq t_{n_1+n_2-2}(\alpha)$ 时接受 H'_0 , 否则否定 H'_0 .
- h'' : 当 $|T| \leq t_{n_1+n_2-2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ 时接受 H''_0 , 否则否定 H''_0 .

显著性检验 (希望原假设被否定的检验)

5.2.3 正态分布方差的检验

设 X_1, X_2, \dots, X_n 是从正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 中抽出的样本.

原假设和对立假设分别为:

1. $H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$, $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$.
2. $H'_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$, $H'_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$.
3. $H''_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$, $H''_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$.

注: 方差检验的误差较大.

1 均值已知

利用 $\sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2$,

- ϕ : 当 $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \geq \sigma_0^2 \chi_n^2(1 - \alpha)$ 时接受 H_0 , 否则否定 H_0 .
- ϕ' : 当 $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \leq \sigma_0^2 \chi_n^2(\alpha)$ 时接受 H'_0 , 否则否定 H'_0 .
- ϕ'' : 当 $\sigma_0^2 \chi_n^2\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \leq \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \leq \sigma_0^2 \chi_n^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ 时接受 H''_0 , 否则否定 H''_0 .

2 均值未知

利用 $SS \sim \sigma^2 \chi_{n-1}^2$,

- φ : 当 $SS \geq \sigma_0^2 \chi_{n-1}^2(1 - \alpha)$ 时接受 H_0 , 否则否定 H_0 .
- φ' : 当 $SS \leq \sigma_0^2 \chi_{n-1}^2(\alpha)$ 时接受 H'_0 , 否则否定 H'_0 .
- φ'' : 当 $\sigma_0^2 \chi_{n-1}^2\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \leq SS \leq \sigma_0^2 \chi_{n-1}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ 时接受 H''_0 , 否则否定 H''_0 .

5.2.π 两个正态分布方差商的检验

设 X_1, X_2, \dots, X_{n_1} 和 Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} 分别是来自正态总体 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma^2)$ 中抽取的相互独立的样本.

原假设和对立假设分别为

1. $H_0 : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 \geq \mu_0, H_1 : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 < \mu_0.$
2. $H'_0 : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 \leq \mu_0, H'_1 : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 > \mu_0.$
3. $H''_0 : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 = \mu_0, H''_1 : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 \neq \mu_0.$

1 均值已知

$$\text{记 } U = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2}{\sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \mu_2)^2}, \text{ 利用 } \frac{n_1 \sigma_1^2}{n_2 \sigma_2^2} \frac{1}{U} \sim F_{n_2, n_1}, \text{ 下略.}$$

2 均值未知

$$\text{利用 } \frac{S_1^2 / S_2^2}{\sigma_1^2 / \sigma_2^2} \sim F_{n_1-1, n_2-1},$$

- g : 当 $\frac{S_1^2}{S_2^2} \geq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} F_{n_1-1, n_2-1}(1-\alpha) = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} F_{n_2-1, n_1-1}^{-1}(\alpha)$ 时接受 H_0 , 否则否定 H_0 .
- g'' : 当 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} F_{n_1-1, n_2-1}^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leq \frac{S_1^2}{S_2^2} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} F_{n_1-1, n_2-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ 时接受 H''_0 , 否则否定 H''_0 .

5.2.4 指数分布参数的检验

1 普通检验

$$\text{利用 } 2n\lambda\bar{X} \sim \chi_{2n}^2.$$

2 截尾寿命检验

2.1 定数截尾法

取 n 个元件做试验, 取 $r \in \mathbb{N}, r < n$, 进行到 r 个元件失效时为止, 所有元件工作的时间为

$$T = Y_1 + \dots + Y_r + (n-r)Y_r \sim \chi_r^2.$$

2.2 定时截尾法

到时刻 T_0 为止, 所有元件工作的总时间为满足 $2\lambda T \sim \chi_{2u+1}^2$, 其中 u 是已经失效的元件个数.

5.2.5 二项分布参数的检验

普通检验

$$H_0 : p \leq p_0, H_1 : p > p_0.$$

φ : 当 $X < C$ 时接受 H_0 , 否则否定 H_0 .

$$\beta_\varphi(p) = P_p(X > C) = 1 - \sum_{i=0}^C \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}.$$

一般可查表, 对于较大的样本, 难以查表, 可以使用[大样本法](#).

随机化检验

检验 φ 的 **操作特征函数 (OC 函数)**

符号检验

非参数检验

5.2.6 泊松分布参数的检验

利用如下性质:

1. 泊松分布和的函数 (可加性)

$$X_1 \sim P(\lambda_1), X_2 \sim P(\lambda_2) \Rightarrow X_1 + X_2 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2).$$

$$2. P_\lambda(X \leq k) = \sum_{i=0}^k \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!} = \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{e^{-t} t^k}{k!} dt = K_{2k+2}(2\lambda). \text{ (卡方分布函数)}$$

3. 若有一批零件寿命服从指数分布, 固定一个时间 $T > 0$, 让一个元件从时刻 0 开始工作, 每当这个元件坏了的时候马上用一个新的替换, 则到 T 时替换的次数 $X \sim P(\lambda T)$, 即

$$P(X = n) = \frac{e^{-\lambda T} (\lambda T)^n}{n!}.$$

- 若有 n 个元件同时开始工作, 每个元件损坏即替换, 则 $X \sim P(n\lambda T)$.

5.2.7 大样本检验

贝伦斯—费歇问题

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}} \sim \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} \sim N(0, 1).$$

二项分布参数检验

$$\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0, 1).$$

一般分布参数检验

$$\frac{\sum X - nE(X)}{\sqrt{n \text{Var}(X)}} = \frac{\sum X - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \sim N(0, 1)$$

5.2.8 贝叶斯方法

基本思路

若原假设的条件概率大于对立假设的条件概率:

$$P(H_0 | X_1, X_2, \dots, X_n) > P(H_1 | X_1, X_2, \dots, X_n)$$

则接受原假设.

正态分布的区间检验

设 X_1, X_2, \dots, X_n 为抽自正态总体 $N(\theta, \sigma^2)$ 的样本, 其中 θ 和 σ^2 都未知, 考虑检验问题

$$H_0: a \leq \theta \leq b, \quad H_1: \theta < a \vee \theta > b \quad (a < b).$$

给 (θ, σ) 以广义先验密度 σ^{-1} , 则在得知样本 X_1, X_2, \dots, X_n 后 (θ, σ) 的后验密度为

$$h(\theta, \sigma) = C_n \sigma^{-(n+1)} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \theta)^2 \right], \quad (\theta \in \mathbb{R}, \sigma > 0)$$
$$C_n = \left(\int_0^{+\infty} d\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^{-(n+1)} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \theta)^2 \right] d\sigma \right)^{-1}$$

从而得到 θ 的边缘后验密度为

$$\begin{aligned} h_\theta(\theta) &= C_n \int_0^{+\infty} \sigma^{-(n+1)} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \theta)^2 \right] d\sigma \\ &= D_n \left[\sum_{i=1}^n (X_i - \theta)^2 \right]^{-\frac{n}{2}} = D_n \left[SS + n(\bar{X} - \theta)^2 \right]^{-\frac{n}{2}} \\ &= D_n SS^{-n} \left[1 + \frac{n(\bar{X} - \theta)^2}{SS} \right]^{-\frac{n}{2}} = E_n \left[1 + \frac{n(\bar{X} - \theta)^2}{(n-1)S^2} \right]^{-\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

令 $\theta^* = \frac{\sqrt{n}(\theta - \bar{X})}{S}$, 则比较 t 分布密度函数知 $\theta^* \sim t_{n-1}$, 即

$$f_{\theta^*} = F_n \left(1 + \frac{\theta^{*2}}{n-1} \right)^{-\frac{n}{2}} = \frac{\left(1 + \frac{\theta^{*2}}{n-1} \right)^{-\frac{n}{2}}}{B \left(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2} \right) \sqrt{n-1}}$$

由此可以得到 ★

$$\begin{aligned} P(H_0 | X_1, \dots, X_n) &= P(a \leq \theta \leq b | X_1, \dots, X_n) \\ &= P \left(\frac{\sqrt{n}(a - \bar{X})}{S} \leq \theta^* \leq \frac{\sqrt{n}(b - \bar{X})}{S} | X_1, \dots, X_n \right) \\ &= T_{n-1} \left(\frac{\sqrt{n}(b - \bar{X})}{S} \right) - T_{n-1} \left(\frac{\sqrt{n}(a - \bar{X})}{S} \right) \end{aligned}$$

信仰推断法: 信仰分布, 信仰概率.

5.3 拟合优度检验

5.3.1 理论分布完全已知且只取有限个值的情况

问题提法

1. H_0 : 总体 X 的分布律为 $F_0(x)$.
2. H_0 : 总体 X 的分布律为 $P(X = x_i) = p_i, i = 1, 2, \dots$.
3. H_0 : 总体 X 的概率密度函数为 $f_0(x)$.

对于原假设 $H_0: P(X = a_i) = p_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$), 设对 X 进行了足够多的 n 次实验, X_1, X_2, \dots, X_n 中等于 a_i 的个数记作 ν_i , 称为 a_i 这个"类"的 **经验值** 或 **观察值**, 其近似于 **理论值** np_i .

$$\text{皮尔逊统计量 } \chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(np_i - \nu_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^k \frac{\nu_i^2}{np_i} - n.$$

定理 3.1 ★ 若原假设 H_0 成立, 则 $\chi^2 \sim \chi_{k-1}^2$.

拟合优度 $p(Z_0) = P(Z \geq Z_0 | H_0) \approx 1 - K_{k-1}(Z_0)$.

- 统计上的显著性不等于实用上的重要性.

5.3.2 理论分布只含有限个值但不完全已知的情况

设总体 $X \sim P(X = a_i) = p_i(\theta_1, \dots, \theta_r)$ ($i = 1, 2, \dots, k; r \leq k - 2$), 并对 X 进行了足够多的 n 次观察, 记 X_1, X_2, \dots, X_n 中等于 a_i 的个数为 ν_i , 原假设为 H_0 : 总体分布对 $\theta_1^0, \theta_2^0, \dots, \theta_r^0$ 成立.

定理 3.2 ★ 在一定条件下, 若原假设 H_0 成立, 使用 **极大似然法** 估计出 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_r)$, 并由此算出 $p_i = p_i(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_r)$, 则 $\chi^2 \sim \chi_{k-1-r}^2$.

- 此时拟合优度约为 $p(Z_0) = 1 - K_{k-1-r}(Z_0)$.
- 一般取 $n \geq 50$, 且每一个理论值 np_i 的值都不小于 5.

5.3.3 对列联表的应用

$B \backslash A$	1	2	\dots	i	\dots	a	和
1	n_{11}	n_{12}	\dots	n_{i1}	\dots	n_{a1}	$n_{.1}$
2	n_{12}	n_{22}	\dots	n_{i2}	\dots	n_{a2}	$n_{.2}$
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots
j	n_{1j}	n_{2j}	\dots	n_{ij}	\dots	n_{aj}	$n_{.j}$
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots
b	n_{1b}	n_{2b}	\dots	n_{ib}	\dots	n_{ab}	$n_{.b}$
和	$n_{1.}$	$n_{2.}$	\dots	$n_{i.}$	\dots	$n_{a.}$	n

记 $P(A = i) = u_i$, $P(B = j) = v_j$, $P(A = i, B = j) = p_{ij}$.

H_0 : A 和 B 独立, 即 $p_{ij} = u_i v_j$.

$$L = \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b (u_i v_j)^{n_{ij}} = \prod_{i=1}^a u_i^{n_{i.}} \prod_{j=1}^b v_j^{n_{.j}}$$

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial \ln L}{\partial u_i} = \frac{n_{i.}}{u_i} - \frac{n_{a.}}{u_a} \\ 0 = \frac{\partial \ln L}{\partial v_j} = \frac{n_{.j}}{v_j} - \frac{n_{.a}}{v_b} \\ \sum_{i=1}^a n_{i.} = \sum_{j=1}^b n_{.j} = n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{u}_i = \frac{n_{i.}}{n} \\ \hat{v}_j = \frac{n_{.j}}{n} \\ \hat{p}_{ij} = \frac{n_{i.} n_{.j}}{n^2} \end{cases}$$

自由度为 $k - 1 - r = ab - 1 - (a + b - 2) = (a - 1)(b - 1)$.

$$Z = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \frac{nn_{ij} - n_{i.}n_{.j}}{nn_{i.}n_{.j}} \sim \chi_{(a-1)(b-1)}^2$$

当 $a = b = 2$ 时称为 **四格表**, 此时有

$$Z = \frac{n(n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21})^2}{n_{1.}n_{2.}n_{.1}n_{.2}} \sim \chi_1^2$$

列联表可用于 **独立性检验** 或 **齐一性检验** 等.

5.3.4 总体分布为一般分布的情况

一般分布: 离散型有限个取值, 离散型无限个取值, 连续型.

H_0 : 总体分布为 $F(x)$ (或 $F(x; \theta_1^0, \theta_2^0, \dots, \theta_r^0)$).

取划分 $-\infty = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{k-1} < a_k = +\infty$, 则区间 $I_i = (a_{i-1}, a_i]$ 的概率为 $p_i(\theta_1, \dots, \theta_r) = F(a_i; \theta_1, \dots, \theta_r) - F(a_{i-1}; \theta_1, \dots, \theta_r)$, ($i = 1, 2, \dots, k$).

记 H'_0 : 对某一组值 $(\theta_1^0, \theta_2^0, \dots, \theta_r^0)$, 总体在区间 I_i 内的概率为 $p_i(\theta_1^0, \theta_2^0, \dots, \theta_r^0)$.

记总体 X 的样本值 x_i 落在 I_i 内的个数为 n_i , 称为 **实际频数**, 其频率为 $f_i = \frac{n_i}{n}$, **理论频数** 为 np_i , 则检验方式同**有限取值的无参数或有参数**情况相同.

- 由于积分等使得表达式的计算较为困难, 实际中可不采取极大似然估计, 而使用矩估计近似替代.
- 如果初始数据就只给出了各区间的数量, 而无精确的数据, 可使用区间的中点近似计算矩估计, 如:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_i m_i \nu_i, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_i \nu_i (m_i - \hat{\mu})^2.$$

表 8.3 正态总体均值、方差的假设检验(显著性水平为 α)

	原假设和备择假设	检验统计量	原假设 H_0 的拒绝域
单个正态总体	$H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$ $H_0: \mu \leq \mu_0, H_1: \mu > \mu_0$ $H_0: \mu \geq \mu_0, H_1: \mu < \mu_0$ (σ^2 已知)	$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$	$ Z \geq z_{\alpha/2}$ $Z \geq z_{\alpha}$ $Z \leq -z_{\alpha}$
	$H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$ $H_0: \mu \leq \mu_0, H_1: \mu > \mu_0$ $H_0: \mu \geq \mu_0, H_1: \mu < \mu_0$ (σ^2 未知)	$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$	$ T \geq t_{\alpha/2}(n-1)$ $T \geq t_{\alpha}(n-1)$ $T \leq -t_{\alpha}(n-1)$
	$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2, H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ $H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2, H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$ $H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2, H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$ (μ 未知)	$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$	$\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$ 或 $\chi^2 \geq \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$ $\chi^2 \geq \chi_{\alpha}^2(n-1)$ $\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$
两个正态总体	$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta, H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \delta$ $H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq \delta, H_1: \mu_1 - \mu_2 > \delta$ $H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq \delta, H_1: \mu_1 - \mu_2 < \delta$ (σ_1^2, σ_2^2 已知)	$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$	$ Z \geq z_{\alpha/2}$ $Z \geq z_{\alpha}$ $Z \leq -z_{\alpha}$
	$H_0: \mu_1 - \mu_2 = \delta, H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \delta$ $H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq \delta, H_1: \mu_1 - \mu_2 > \delta$ $H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq \delta, H_1: \mu_1 - \mu_2 < \delta$ ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 未知)	$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - \delta}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$	$ T \geq t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)$ $T \geq t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2)$ $T \leq -t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2)$
	$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2, H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ $H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2, H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $H_0: \sigma_1^2 \geq \sigma_2^2, H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2$ (μ_1, μ_2 均未知)	$S_1^2/S_2^2 \sim F(n_1-1, n_2-1)$	$F \leq F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$ 或 $F \geq F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$ $F \geq F_{\alpha}(n_1-1, n_2-1)$ $F \leq F_{1-\alpha}(n_1-1, n_2-1)$