Magnetic Field

Constants

Permeability of free space: $\mu_0=4\pi imes 10^{-7} \mathrm{N/A}=1.26 imes 10^{-6} \mathrm{N/A}$

$$c^2 = rac{1}{\mu_0 arepsilon_0}$$

Biot-Savart Law

$$\mathrm{d}B = rac{\mu_0 I \, \mathrm{d}l}{4\pi r^2} \mathrm{sin}\, heta$$
 $ec{m{B}} = rac{\mu_0}{4\pi} \int rac{I}{r^2} \, \mathrm{d}ec{m{l}} imes \hat{m{r}}$

Finite current wire

$$B=rac{\mu_0}{4\pi}rac{I}{d}\int_{ heta_1}^{ heta_2}\sin heta\,\mathrm{d} heta=rac{\mu_0}{4\pi}rac{I}{d}(\cos heta_1-\cos heta_2)$$

To infinity: $B=rac{\mu_0 I}{2\pi d}.$

Finite plate

$$B = \int_{-L/2}^{L/2} d\left(B\frac{d}{r}\right) = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\mu_0}{2\pi r} \frac{I}{L} \frac{d}{r} dx$$

$$= \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\mu_0 I d}{2\pi L} \frac{dx}{x^2 + d^2} = \frac{\mu_0 I}{\pi L} \arctan \frac{L}{2d}$$

$$d \gg L \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$

$$d \ll L \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 I}{2L} \stackrel{d}{=} \frac{\mu_0}{2} j$$

Cross the plane: $\Delta B = \mu_0 j$.

Circular wire

Radius: R, distance to center: x, to wire: r.

$$B = \oint rac{\mu_0}{4\pi} rac{I \, \mathrm{d}l}{r^2} \sin heta = rac{\mu_0 IR}{2r^2} rac{R}{r} = rac{\mu_0 IR^2}{2r^3} = rac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

If
$$x=0$$
, then $B=rac{\mu_0 I}{2R}.$

For
$$N$$
 turn loops, $B=Nrac{\mu_0I}{2R}.$

A Stretched-out Solenoid

Choose dI = nI dx, $x = R \cot \beta$.

$$B = \int_{x_1}^{x_2} rac{\mu_0 n I R^2 dx}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} = rac{\mu_0 n I}{2} \int_{eta_1}^{eta_2} (-\sineta) deta
onumber
onumber = rac{\mu_0 n I}{2} (\coseta_2 - \coseta_1)$$

To infinity: $B = \mu_0 n I$, where n stands for number density.

Ampere's Circuital Theorem

$$\oint_L ec{m{B}} \cdot \mathrm{d}ec{m{l}} = \mu_0 \sum_i I_i$$

Toroid

Toroid is not solenoid!

$$B=rac{\mu_0 NI}{2\pi r}=\mu_0 nI$$

Cylindrical conductor

$$B = egin{cases} rac{\mu_0 I}{2\pi r} & (r > R) \ rac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} & (r < R) \end{cases}$$

Magnetic Field Due to Moving Charges

$$egin{align} I\,\mathrm{d}ec{m{l}} &= qec{m{v}}\,ns\,\mathrm{d}l = qec{m{v}}\,\mathrm{d}N \ \mathrm{d}ec{m{B}} &= rac{\mu_0}{4\pi}rac{I}{r^2}\,\mathrm{d}ec{m{l}} imes\hat{m{r}} \ &= rac{\mathrm{d}ec{m{B}}}{\mathrm{d}N} = rac{\mu_0}{4\pi}rac{q\,ec{m{v}} imes\hat{m{r}}}{r^2} \end{split}$$

Magnetic Field

Defined by Lorenz force.

$$ec{m{F}} \equiv q\,ec{m{v}} imesec{m{B}}$$
 $ec{m{ au}} \equiv NIS\,ec{m{n}} imesec{m{B}}$

Magnetic Flux

Defined by analogy with electric flux, with unit of Wb.

$$egin{aligned} \Phi_m &= \iint_S ec{m{B}} \cdot \mathrm{d} ec{m{A}} \ \Phi_m &= igoplus_{_G} ec{m{B}} \cdot \mathrm{d} ec{m{A}} \equiv 0 \end{aligned}$$

Monopoles doesn't exist.

Mass spectrograph.

The Hall Effect

P/N type semiconductor.

$$I = nedbv$$

$$V = Eb = vBb = \frac{BI}{ned} \equiv \frac{BIR}{d}$$

R: Hall coefficient.

The cyclotron accelerator.

Magnetic Force On Current

$$ec{f F} = q\,ec{m v}{ imes}ec{m B} = \int I\,\mathrm{d}ec{m l}{ imes}ec{m B}$$

Magnetic Moment

$$ec{m{m}}\equivec{m{\mu}}\equiv NIec{m{A}}$$

Torque on a Current Loop

$$ec{m{ au}} = ec{m{\mu}} { imes} ec{m{B}}$$

Galvanometer

The Magnetic Dipole Moment

$$egin{aligned} W &= \int_{ heta_1}^{ heta_2} au \, \mathrm{d} heta &= \left(-\mu B\cos heta
ight|_{ heta_1}^{ heta_2} \ U(heta) &= -ec{m{\mu}} {m{\cdot}} ec{m{B}} \end{aligned}$$

Chapter 11 Electronmagnetic Induction

- 11.1 EMI Phenomena
- 11.2 Faraday's law and Lenz's Law
- 11.3 Induced Electric Field
- 11.3 Self-Inductance and Mutual-Inductance
- 11.5 The Energy Stored in Magnetic Field

11.6 Applications

Motional electromotive force (emf) 感应电动势

11. 稳恒电流和运动电荷的磁场

11.1 恒定电流

• 电流分类

1. 传导电流:导体中带电粒子定向运动

2. 运流电流: 带电物体机械运动

3. 位移电流: 变化的电场

电流元: I di

• 宏观与微观: $I=rac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=nqsv$

• 电流密度: $ec{m{j}} \stackrel{d}{=} rac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S_{\perp}} ec{m{e}}_{m{v}}$

• 恒定电流连续性方程: $\iint_S \vec{m{j}} \cdot \mathrm{d} \vec{m{s}} = - rac{\mathrm{d} q}{\mathrm{d} t}$

• 基尔霍夫定律(节点定律)

• 电动势: $arepsilon = rac{W}{q} = \oint ec{m{E}}_{m{k}} \cdot \mathrm{d} ec{m{l}}$

。 开源时路端电压等于电源电动势

。 电动势与路径有关

11.2 磁场、磁感应强度

- 磁矩: $\vec{m} = IS\vec{e}_n$
 - 。 分子电流相当于小磁体
 - 。 其中 \vec{e}_n 与 I 成右手螺旋
- 磁感应强度
 - 1. 小磁针
 - 2. 运动电荷

$$lacksquare ec{m{F}} \equiv q\,ec{m{v}} imes ec{m{B}}$$

3. 载流线圈:稳定平衡时 \vec{m} 的方向

$$\vec{ au} = NIS \vec{n} \times \vec{B}$$

11.3 毕奥萨瓦定律

11.4 运动电荷产生磁场

单个运动电荷 (v ≪ c)

$$\circ \ I \, \mathrm{d} \vec{m{l}} = q \vec{m{v}} \, ns \, \mathrm{d} l = q \vec{m{v}} \, \mathrm{d} N$$
 $\circ \ \mathrm{d} \vec{m{B}} = rac{\mu_0}{4\pi} rac{I}{r^2} \vec{m{l}} imes \hat{m{r}}$ $\circ \ \vec{m{B}} = rac{\mathrm{d} \vec{m{B}}}{\mathrm{d} N} = rac{\mu_0}{4\pi} rac{q \, \vec{m{v}} imes \hat{m{r}}}{\mu_0 e v}$ \bullet 电子圆周运动: $B_0 = rac{\mu_0}{4\pi r^2}$

- 闭合电流磁矩: $m=IS=rac{ev}{2\pi r}\pi r^2=rac{evr}{2}$
- 旋转带电圆盘:

12. 运动电荷、载流导线受力

12.1 磁力线、磁通量、磁场的高斯定理

- 磁涌量:
 - $\bullet \ \Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$.
 - 。 穿出为正

12.2 安培环路定理

$$\oint_L ec{m{B}} \cdot \mathrm{d}ec{m{l}} = \mu_0 \sum I_{|\!\!|\!\!|}$$

磁场是非保守场

12.3 洛伦兹力

洛伦兹力: $F = q\vec{v} \times \vec{B}$

- 匀强磁场
 - ο 磁聚焦
 - 。 磁发散
- 非匀强磁场
 - ο 磁镜效应
 - 横向磁约束
 - 纵向磁约束
 - 。 磁约束

12.4 应用

- 回旋加速器
- 质谱仪
- 霍尔效应
 - 。 测量半导体特征
 - 。 霍尔传感器
 - ο 磁流体船

12.5 安培定律

$$ec{m{F}} = \int I \, \mathrm{d} ec{m{l}} imes ec{m{B}}$$

无限长平行直导线: $\dfrac{\mathrm{d}F_{21}}{\mathrm{d}l_2}=\dfrac{\mu_0I_1I_2}{2\pi a}.$

13 电磁感应 (1)

13.1 磁介质、顺磁质、抗磁质磁化

磁介质: 经磁化后能够影响磁场分布的物质。

• 传导电流: $I_0 o ec{m{B}_0}$

• 介质磁化: $ightarrow ec{B}_0'$

• 总磁感应强度: $ec{m{B}} = ec{m{B}}_0 + ec{m{B}}'$

• 相对磁导率: $\vec{m{B}} = \mu_r \vec{m{B}}_{m{0}}$

均匀各向同性介质充满磁场所在空间

分类:

- 顺磁质 (Paramagnetic substance) ,弱磁质: Mn, Al, O₂
 - $\circ \vec{B}' \uparrow \vec{B}_0 \uparrow, \exists \vec{B}' \ll \vec{B}_0, \mu_r > 1.$
 - 。 分子具有固定的分子磁矩 (电子轨道、自旋磁矩)
 - 。 磁场下表面表现出束缚 (磁化) 电流, 加强磁场
- 抗磁质 (Diamagnetic substance) , 弱磁质: Cu, Ag, H₂
 - $\circ \ \vec{B}' \uparrow \vec{B}_0 \downarrow, \ \exists \vec{B}' \ll \vec{B}_0, \mu_r < 1.$
 - \circ 无论电子绕原子核转动方向为何,其磁矩在 $ec{m{B}}$ 方向投影均小于零.
- 铁磁质 (Ferromagnetic substance) 强磁质: Fe, Co, Ni
 - $\circ \vec{B}' \uparrow \vec{B}_0 \uparrow, \ \exists \vec{B}' \gg \vec{B}_0, \mu_r \gg 1.$
 - 非线性关系, 且非单值对应关系.

13.2 磁介质中的安培环路定理

磁化电流与传导电流

• 传导电流: 有热效应

• 磁化电流: 无热效应

• 磁化面电流密度: $j_s \equiv \frac{I_s}{l}$.

• 磁化强度: $ec{m{M}}\equivrac{\sumec{m{m}}_{eta}^{'}}{\Delta V}$, $\left|ec{m{M}}
ight|=rac{I_{s}S}{lS}=j_{s}$.

• 积分关系: $\oint_L ec{m{M}} \cdot \mathrm{d}ec{m{l}} = Ml = I_s.$

安培环路定理

• 真空中: $\oint_I ec{m{B}} \cdot \mathrm{d} ec{m{l}} = \mu_0 \sum I_i$.

• 介质中: $\oint_L \vec{m{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{m{l}} = \mu_0 \sum (I_C + I_S) = \mu_0 \sum I_C + \mu_0 \oint_L \vec{m{M}} \cdot \mathrm{d}\vec{m{l}}.$

• 磁场强度: $ec{m{H}}\equivrac{ec{m{B}}}{\mu_0}-ec{m{M}}.$

• 介质中: $\oint_L ec{m{H}} \cdot \mathrm{d}ec{m{l}} = \sum I_C$.

仅适用于稳恒情况

• 各向同性介质: $ec{m{M}} = \kappa ec{m{H}}$, 磁化率: κ .

 $\circ \ \vec{\boldsymbol{B}} = \mu_0 (1 + \kappa) \vec{\boldsymbol{H}} = \mu_0 \mu_r \vec{\boldsymbol{H}}.$

• 相对磁导率: $\mu_r = 1 + \kappa$.

• 磁导率: $\mu = \mu_0 \mu_r$.

• 螺绕圈: $B = \mu H = \mu n I_0$.

13.3 法拉第电磁感应定律

楞次定律

法拉第电磁感应定律

• 感应电动势: $\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{B\,\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\cos\theta$.

。 动生电动势、感生电动势

• 感应电荷: $q=\int_{t_1}^{t_2}I\,\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}-rac{1}{R}rac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t=rac{\Phi_1-\Phi_2}{R}.$

。 磁通计

13.4 动生电动势

普遍表达式

$$\mathrm{d}\Phi = \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{s}} = \vec{\boldsymbol{B}} \cdot (\vec{\boldsymbol{v}} \times \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}) \, \mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d} \varepsilon = - \frac{\mathrm{d} \Phi}{\mathrm{d} t} = - \vec{B} \cdot (\vec{v} \times \mathrm{d} \vec{l}) = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d} \vec{l}$$

$$arepsilon_{ab} = \int_a^b (ec{m{v}}{ imes}ec{m{B}}){m{\cdot}}\,\mathrm{d}ec{m{l}}$$

微观本质

$$ec{oldsymbol{E}}_k = rac{ec{oldsymbol{F}}_k}{-e} = ec{oldsymbol{v}}{ imes}ec{oldsymbol{B}}$$

14 电磁感应 (2)

14.1 感生电动势

1. 麦克斯韦第一假设

不论有无导体或回路,变化的磁场在周围空间中产生一种感生电场(涡旋电场,或称右旋电场),这种电场的电力线是闭合曲线,其线积分即为感生电动势。

$$arepsilon = \oint_L ec{m{E}}_v \!\!\cdot \! \mathrm{d} ec{m{l}} = - \iint_S rac{\partial ec{m{B}}}{\partial t} \!\!\cdot \! \mathrm{d} ec{m{s}}$$

2. 说明

而数学上若 $\oint_L ec{m{a}} \cdot \mathrm{d}ec{m{l}} = \iint_S ec{m{b}} \cdot \mathrm{d}ec{m{s}}$,则 $ec{m{a}}$ 与 $ec{m{b}}$ 成右手螺旋关系,

故 \vec{E}_v 与 $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 成左螺旋关系。

3. 应用

- 电子感应加速器
- 涡电流
 - o 热效应
 - 电磁炉、高频驱动
 - 机械效应
 - 电磁阻尼、电磁驱动、电磁式转速表

14.2 自感和互感

1. 自感系数

定义

$$L=rac{arPhi}{I}$$
,单位:H(亨利), $arPhi$ 为磁通量

影响因素

- 与几何因素、磁介质有关
- 无铁磁质时,与 I 无关

2. 自感电动势

$$\varepsilon_L = -\frac{\mathrm{d}\Psi_m}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}(IL)}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

3. 长直密螺绕线管

$$B = \mu H = \mu nI = \frac{\mu NI}{l}$$
 $\Psi = N\Phi = NBS = \mu \frac{N^2}{l}SI$
 $L = \frac{\Psi}{l} = \mu \frac{N^2}{l}S = \mu n^2 V$

4. 互感系数

定义

$$egin{aligned} M_{21} &= rac{\Psi_{21}}{I_1} \ arepsilon_{21} &= -rac{\mathrm{d}\Psi_{21}}{\mathrm{d}t} = -M_{21}rac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} \ M_{21} &= M_{12} = M \end{aligned}$$

影响因素

只与线圈的形状、大小、匝数、相对位置、周围磁介质的磁导率有关

5. 两线圈缠绕在一起

$$egin{aligned} \Psi_{21} &= N_2 \Phi_{21} = N_2 B_1 S = N_2 \mu n_1 I_1 S \ M &= rac{\Psi_{21}}{I_1} = \mu n_1 N_2 S = \mu n_1 n_2 V \ M &= \sqrt{L_1 L_2} \end{aligned}$$

一般情况下有: $M=k\sqrt{L_1L_2}$, 其中 $k\in[0,1]$.

6. 应用

- 自感
 - 。 日光灯中的镇流器
- 互感
 - o 变压器、信号传递

14.3 磁场能量

1. 磁场能量的自感表达

$$\mathrm{d}W = arepsilon\,\mathrm{d}q = -Lrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}q = -Li\,\mathrm{d}i$$
 $W = \int_I^0 -Li\,\mathrm{d}i = rac{1}{2}LI^2$

2. 磁场能量密度的表述

以长直螺线管为例,但对一般情况亦适用。

$$L = \mu n^2 V$$
 $B = \mu H = \mu n I$
 $W_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{B^2 V}{2\mu}$
 $w_m = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2}BH$
 $W_m = \iiint_V w_m \,\mathrm{d}v = \iiint_V \frac{B^2}{2\mu} \,\mathrm{d}v$

14.4 位移电流、麦克斯韦方程组

一、位移电流

稳恒磁场: $\oint_L ec{m{H}} \cdot \mathrm{d}ec{m{l}} = \sum I$.

非稳恒磁场:

极板上电荷面密度 σ , 电位移矢量 D(t) 的通量为 ϕ_D .

$$\phi_D(t) = D(t)S = \sigma S = q$$

位移电流: $I_d \equiv rac{\mathrm{d}\phi_D}{\mathrm{d}t}.$

位移电流密度: $ec{m{j}}_d \equiv rac{\partial ec{m{D}}}{\partial t}.$

$$I_d = rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint_S ec{m{D}} \cdot \mathrm{d}ec{m{S}} = \iint_S rac{\partial ec{m{D}}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}ec{m{S}} = \iint_S ec{m{j}}_d \cdot \mathrm{d}ec{m{S}}$$

位移电流 不产生 焦耳热。

二、全电流的安培环路定理

全电流: $I=I_c+I_d$

$$\oint_{L} \vec{\boldsymbol{H}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = \sum I = \sum I_c + \frac{d\phi_d}{dt}$$

应用

三、麦克斯韦方程组

定理整理

1. 静电场高斯定理: $\oint_S ec{m{D}} \cdot \mathrm{d}ec{m{S}} = \sum q_f = \iiint_V
ho \, \mathrm{d}V$ 2. 静电场环路定理: $\oint_S ec{m{E}} \cdot \mathrm{d}ec{m{l}} = 0$

2. 静电场环路定理: $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ 3. 磁场高斯定理: $\vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

4. 安培环路定理: $\int_{I}^{S} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I = \iint_{S} \vec{j} \cdot d\vec{s}$

麦克斯韦假设

1. 有旋电流:
$$\oint_L \vec{E}_v \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$
2. 位移电流: $I_d = \frac{d\phi_d}{dt} = \iint_S \vec{j}_d \cdot d\vec{S}$

麦克斯韦方程组 (积分形式)

$$egin{aligned} & igotimes_{S} ec{m{D}} \cdot \mathrm{d} ec{m{S}} = \sum q_f \ & \oint_L ec{m{E}} \cdot \mathrm{d} ec{m{l}} = - \iint_S rac{\partial ec{m{B}}}{\partial t} \cdot \mathrm{d} ec{m{S}} \ & igotimes_{S} ec{m{B}} \cdot \mathrm{d} ec{m{S}} = 0 \ & \oint_L ec{m{H}} \cdot \mathrm{d} ec{m{l}} = \iint_S (ec{m{j}}_c + rac{\partial ec{m{D}}}{\partial t}) \cdot \mathrm{d} ec{m{S}} \end{aligned}$$

麦克斯韦方程组 (微分形式)

1. 高斯定理

$$egin{aligned} oldsymbol{
abla} \cdot ec{oldsymbol{D}} &=
ho_0 \ oldsymbol{
abla} \cdot ec{oldsymbol{B}} &= 0 \end{aligned}$$

2. 斯托克斯公式

$$egin{align} oldsymbol{
abla} imes oldsymbol{ec{E}} &= 0 \ oldsymbol{
abla} imes oldsymbol{ec{E}} &= -rac{\partial oldsymbol{ec{B}}}{\partial t} \ oldsymbol{
abla} imes oldsymbol{ec{H}} &= oldsymbol{ec{j}}_c + rac{\partial oldsymbol{ec{D}}}{\partial t} \ \end{align}$$

四、应用

$$\begin{array}{l} \frac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial x^2} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{H}}}{\partial x^2} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{H}}}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = c$$