数学分析

第 1 章 集合与映射

定理

$S_X^C \equiv X \backslash C.$

定理 1.1.1 可列个可列集的并也是可列集.

定理1.1.2 有理数是可列集.

定理 1.2.1 三角不等式

$$|a| - |b| \leq |a+b| \leq |a| + |b|$$

定理 1.2.2 平均值不等式

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq n \bigg/ \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right)$$

第 2 章 数列极限

定理

- 整数具有 **离散性**, 有理数具有 **稠密性**, 实数具有 **连续性**.

定理 2.1.1 (确界存在定理——实数系连续性定理) ⭐ 非空有上界的数集必有上确界, 非空有下界的数集必有下确界.

定理 2.1.2 (确界唯一性定理) 非空有解数集的上 (下) 确界是唯一的.

- 有理数集合若有界, 则未必有确界.

定理 2.1.3 (Dedekind 切割定理) ⭐ 设 $\tilde{A}/\tilde{B}$ 是实数集 $\mathbb{R}$ 的一个切割，则 $\tilde{A}$ 有最大值或 $\tilde{B}$ 有最小值.

定理 2.2.1 收敛数列极限的唯一性.

定理 2.2.2 收敛数列的有界性.

定理 2.2.3 收敛数列的保序性.

定理 2.2.4 收敛数列的夹逼性.

定理 2.2.5 数列极限的四则运算.

定号无穷大量: 正无穷大量, 负无穷大量.

定理 2.3.1 设 $x_n \neq 0$, 则 $\{x_n\}$ 是无穷大量的充要条件是 $\left\{ \dfrac{1}{x_n} \right\}$ 是无穷小量.

定理 2.3.2 设 $\{x_n\}$ 是无穷大量, 若当 $n > N_0$ 时, $|y_n| \geq \delta > 0$ 成立, 则 $\{x_n y_n\}$ 是无穷大量.

推论 设 $\{x_n\}$ 是无穷大量, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$, 则 $\{x_n y_n\}$ 和 $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ 都是无穷大量.

定理 2.3.3 (Stolz 定理) ⭐ 设 $\{y_n\}$ 是严格单调增加的正无穷大量, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a$ (可以为正负无穷), 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = a$.

- 若第一个极限不存在 (如为不定号无穷), 则不一定成立.

定理 2.4.1 单调有界数列必定收敛.

定义 2.4.1 如果一列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$ 满足条件

1. $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n],\ n = 1, , 2, 3, \cdots$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$.

则称这列闭区间形成一个 **闭区间套**.

定理 2.4.2 (闭区间套定理) ⭐ 如果 $\{[a_n, b_n]\}$ 形成一个闭区间套, 则存在唯一实数 ξ 属于所有的闭区间 $[a_n, b_n]$, 且 $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

- 若改为开区间套, 则结果亦成立, 只不过这个实数可能不属于任何一个上述开区间.

定理 2.4.3 实数集是不可列集.

定理 2.4.4 若数列收敛域 a, 则它的任何子列也收敛于 a.

推论 若数列有两个子列分别收敛于不同的极限, 则该数列发散.

定理 2.4.5 (Bolzano-Weierstrass 定理) ⭐ 有界数列必有收敛子列. (应用闭区间套定理)

定理 2.4.6 无界数列必存在子列极限为无穷.

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \infty.$$

定义 2.4.3 如果数列 $\{x_n\}$ 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得当 $n, m > N$ 时成立 $|x_n - x_m| < \varepsilon$, 则称该数列为 **基本数列**.

定理 2.4.7 (Cauchy 收敛原理) ⭐ 数列收敛的充要条件是, 该数列为基本数列.

- 实数系的 **完备性**: 由实数构成的基本数列必有实数极限.
- 有理数系不具有完备性. (见自然常数的定义及其无理性)

推论 若数列 $\{x_n\}$ 满足压缩性条件

$$|x_{n+1} - x_n| \leq k\,|x_n - x_{n-1}|, 0 < k < 1, n = 2, 3, \cdots,$$

则该数列收敛.

实数系基本定理

$$\begin{array}{ccc}
\text{确界存在定理} & & \\
\Downarrow & & \\
\text{单调有界数列收敛定理} & & \text{确界存在定理} \\
\Downarrow & & \Uparrow \\
\text{闭区间套定理} & & \text{闭区间套定理} \\
\Downarrow & & \Uparrow \\
\text{Bolzano-Weierstrass 定理} & & \text{Cauchy 收敛原理} \\
\Downarrow & & \\
\text{Cauchy 收敛原理} & &
\end{array}$$

定理 2.4.8 ⭐ 实数系的连续性等价于完备性.

笔记

数列极限

- 求出递推公式, 或反之, 求出通项公式
- 单调有界, 数学归纳法, 分奇偶讨论

例题

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2} = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = 0$ (Hint: $2k > \sqrt{(2k+1)(2k-1)}$).
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^b}{a^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0\ (a, b > 0)$.
3. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则
    1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$. (先考虑 a=0; 对于正负无穷亦成立)
    2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$. (各项大于 0. 利用均值不等式)
4. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, 则
    1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = ab$. (先考虑 a=b=0)
5. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ 存在, 则
    1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} = 0$. (用前 n 项和表示分子)
    2. $\lim\limits_{n\to\infty} (n! \cdot a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} = 0$.
    3. 若 $\{p_n\}$ 是递增的正无穷大量, 则

       $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n}{p_n} = 0$. (将项转化为前 n 项和)
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} = \dfrac{1}{k+1}$.
7. 利用定义欧拉常数的数列
    1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}\right) = \ln 2$.
    2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}\right] = \ln 2$.

8. 若 $x_1 = a, y_1 = b$,

   1. 若 $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n},\ y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$, 则 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 收敛, 且 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} y_n =: AGM(a, b)$.
   2. 若 $x_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2},\ y_{n+1} = \dfrac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$, 则 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 收敛, 且 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} y_n =: AHM(a, b)$.

第 3 章 函数极限与连续函数

定理

定理 3.1.1 (极限唯一性) 设 A 与 B 都是函数 $f(x)$ 在点 x_0 的极限, 则 $A = B$.

定理 3.1.2 (局部保序性) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A,\ \lim\limits_{x \to x_o} g(x) = B,\ A > B$, 则存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 成立 $f(x) > g(x)$.

推论 1 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \neq 0$, 则存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$, 成立 $|f(x)| > \dfrac{|A|}{2}$.

推论 2 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A,\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, 且存在 $r > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < r$ 时, 成立 $f(x) \leq g(x)$, 则 $A \leq B$.

推论 3 (局部有界性) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, 则存在 $\delta > 0$, 使得 $f(x)$ 在 $O(x_0, \delta) \setminus |x_0|$ 有界.

定理 3.1.3 (夹逼性) 若存在 $r > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < r$ 时, 成立 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, 且 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$, 则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

定理 3.1.4 函数极限的四则运算.

定理 3.1.5 (Heine 定理) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的充要条件是, 对于任意满足条件 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0,\ x_n \neq 0\ (n = 1, 2, \cdots)$ 的数列 $\{x_n\}$, 相应的函数值数列 $|f(x_n)|$ 成立 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

定理 3.1.5' $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在的充要条件是, 对于任意满足条件 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0,\ x_n \neq 0\ (n = 1, 2, \cdots)$ 的数列 $\{x_n\}$, 相应的函数值数列 $|f(x_n)|$ 收敛.

定理 3.1.6 ⭐ 函数极限 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ 存在且有限的充要条件是, $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 使得 $\forall x', x'' > X,\ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

- 同样的还有 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x),\ \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x),\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. (即函数极限的 Cauchy 收敛原理, 应用 Heine 定理可证.)

单侧极限, 单侧连续.

不连续点

- 第一类不连续点: 左右极限存在但不相等.

  又称 **跳跃点**, 左右极限只差称为该点的 **跃度**.
- 第二类不连续点: 左右极限至少有一个不存在.

- 第三类不连续点: 左右极限存在且相等, 但不等于该点的函数值.

另一种分类

- 第一类间断点: 左右极限存在
  - 可去间断点
  - 跳跃间断点
- 第二类间断点: 左右极限不存在
  - 无穷间断点
  - 震荡间断点

Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数},\end{cases}$$

在任意点单侧极限不存在, 故任意点都为震荡间断点.

Riemann 函数 ⭐

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{p}, & x=\dfrac{q}{p}\ (p\in\mathbb{N}^+,q\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},\gcd(p,q)=1),\\ 1, & x=0,\\ 0, & x\text{ 是无理数},\end{cases}$$

在任意点的极限存在且为 0. 即一切无理点都是连续点, 一切有理点都是可去间断点.

定理 3.2.1 (反函数存在性定理) 若函数 $y=f(x),x\in D_f$ 是严格单调增加 (减少) 的, 则存在它的反函数 $x=f^{-1}(y),y\in R_f$, 并且 $f^{-1}(y)$ 也是严格单调增加 (减少) 的.

定理 3.2.2 (反函数连续性定理) 设函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续且严格单调增加, 则它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $[f(a),f(b)]$ 连续且严格单调增加.

定理 3.2.3 (复合函数连续性定理) 若 $u=g(x)$ 在点 x_0 连续, $g(x_0)=u_0$, $y=f(u)$ 在点 u_0 连续, 则复合函数 $y=f\circ g(x)$ 在点 x_0 连续.

定理 3.2.4 一切初等函数在其定义区间连续.

- 高阶无穷小量: $u(x)=o(v(x))$.
- 同阶无穷小量: $u(x)=O(v(x))$. (或同阶无穷大量)
- 等价无穷小量: $u(x)\sim v(x)$. (或等价无穷大量)
- $u(x)=o(1)\quad(x\to x_0)$ 表示其为无穷小量.
- $u(x)=O(1)\quad(x\to x_0)$ 表示其为有界量.

定理 3.3.1 设 $u(x),v(x),w(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域 U 上有定义, 且 $v(x)\sim w(x)\quad(x\to x_0)$, 那么

1. $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)w(x)=A\quad\Rightarrow\quad\lim\limits_{x\to x_0}u(x)v(x)=A.$
2. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{u(x)}{w(x)}=A\quad\Rightarrow\quad\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{u(x)}{v(x)}=A.$

定理 3.4.1 (有界性定理) 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则它在 $[a,b]$ 上有界.

推论 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,+\infty]$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ (有限数), 则它在 $[a,+\infty]$ 上有界.

定理 3.4.2 (最值定理) 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则它在 $[a,b]$ 上必能渠道最大值与最小值, 即

$$\exists \xi,\eta \in [a,b], \forall x \in [a,b] : f(\xi) \leq f(x) \leq f(\eta)$$

定理 3.4.3 (零点存在性定理) 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续, 且 $f(a)\cdot f(b) < 0$, 则 $\exists \xi \in (a,b),\ f(\xi) = 0.$

定理 3.4.4 (中间值定理) 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则它一定能取到最大值和最小值之间的任何一个值.

推论 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续, m 是最小值, M 是最大值, 则其值域为 $R_f = [m,M]$.

定义 3.4.1 设函数 $f(x)$ 在区间 X 上定义, 若

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x', x'' \in X) \wedge |x' - x''| < \delta : |f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 在此区间上 **一致连续**.

定理 3.4.5 ⭐ 设函数 $f(x)$ 在区间 X 上定义, 则 $f(x)$ 在 X 上一致连续的充要条件是: 对任何点列 $\{x'_n\}$ $(x'_n \in X)$ 和 $\{x''_n\}$ $(x''_n \in X)$, 只要满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x'_n - x''_n) = 0$, 就成立 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x'_n) - f(x''_n)) = 0.$

定理 3.4.6 (Cantor 定理) ⭐ 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则它在 $[a,b]$ 上一致连续. (一致连续性定理)

定理 3.4.7 ⭐ 函数 $f(x)$ 在有限开区间 (a,b) 连续, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续的充要条件是 $f(a+)$ 与 $f(b-)$ 存在.

- 该定理不适用于无限开区间的情况.
- ⭐ 若函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ (有限数), 则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

笔记

注意事项

- $\lim\limits_{n\to\infty} f(x)$ 需要分正负无穷两类讨论.

总结

- 实数系的 5 个基本定理: 确界存在性定理, 闭区间套定理, Bolzano-Weierstrass 定理, Cauchy 收敛原理.
- 闭区间上连续函数的 5 个定理: 有界性定理, 最值定理, 零点存在性定理, 中间值定理, Cauchy 定理.

一致连续性

基本初等函数 ⭐

- $\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致连续.
- x^n $(n<0)$ 在 $(0,a)$ 非一致连续, 在 $(a,+\infty)$ 一致连续.
- x^n $(0<n<1)$ 在 $[0,+\infty)$ 一致连续.
- x^n $(n>1)$ 在 $[0,+\infty)$ 非一致连续.
- $\ln x$ 在 $(0,a)$ 非一致连续, 在 $(a,+\infty)$ 一致连续.
- e^x 在 $(-\infty,a)$ 一致连续, 在 $(a,+\infty)$ 非一致连续.

性质 ⭐

- 一致连续函数的复合函数一致连续.
- 一致连续函数之和一定一致连续.
- 一致连续函数之积不一定一致连续

第 4 章 微分

定理

定理 4.1.1 函数 $y=f(x)$ 在 x 处可微的充要条件是在此处可导.

定理 4.3.1 $[c_1f(x)+c_2g(x)]'=c_1f'(x)+c_2g'(x)$.

定理 4.3.2 $[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.

定理 4.3.3 $\left[\dfrac{1}{g(x)}\right]'=-\dfrac{g'(x)}{g(x)^2}$.

推论 $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$.

定理 4.3.4 (反函数求导定理) $[f^{-1}(y)]'=\dfrac{1}{f'(x)}$.

定理 4.4.1 (复合函数求导法则) $[f(g(x))]'=f'(g(x))g'(x)$.

一阶微分形式不变性

定理 4.5.1 $[\sum\limits_{i=1}^{n}c_1f(x)+c_2g(x)]^{(n)}=c_1f^{(n)}(x)+c_2g^{(n)}(x)$.

定理 4.5.2 (Leibniz 公式) $[f(x)\cdot g(x)]^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$.

笔记

微分

- $\mathrm{d}\left(x^2\right)=2x\,\mathrm{d}x$.
- $\mathrm{d}x^2=(\mathrm{d}x)^2$.
- $\mathrm{d}^2x=\mathrm{d}(\mathrm{d}x)=0$.

关系

- 可微必定连续
- 可微等价于可导

第 5 章 微分中值定理及其应用

定理

定理 5.1.1 (Fermat 引理) 设 x_0 是 $f(x)$ 的一个极值点, 且 $f(x)$ 在 x_0 处导数存在, 则 $f'(x_0)=0$.

定理 5.1.2 (Rolle 定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 上可导, 且 $f(a)=f(b)$, 则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$f'(\xi)=0.$$

Legendre 多项式 ⭐ $p_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^2-1\right)^n \quad (n=0,1,2,\cdots)$ 在 $(-1,1)$ 恰有 n 个不同的根.

定理 5.1.3 (Lagrange 中值定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 上可导, 则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

若 $a=x, b-a=\Delta x$, 则 Lagrange 公式又可写作

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)(b-a).$$

定理 5.1.4 若 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导且有 $f'(x)\equiv 0$, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 上恒为常数.

定理 5.1.5 (一阶导数与单调性) 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上可导, 则其单调递增的充要条件是 $\forall x\in I: f'(x)\geq 0$.

定理 5.1.6 (二阶导数与凸性) 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上二阶可导, 则 $f(x)$ 在区间 I 上是下凸函数的充要条件是 $\forall x\in I: f''(x)\geq 0$.

定理 5.1.7 拐点的判别.

定理 5.1.8 (Jensen 不等式) 若 $f(x)$ 为区间 I 的下凸 (上凸) 函数, 则对于任意的 $x_i\in I$ 和满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$ 的 $\lambda_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 成立

$$f(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i)\leq\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$$

定理 5.1.9 (Cauchy 中值定理) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 上可导, 且对于任意 $x\in(a,b)$, $g'(x)\neq 0$, 则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Darboux 定理 ⭐ 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导, $x_1,x_2\in(a,b)$, $f'(x_1)f'(x_2)<0$, 则 $\exists\xi\in(x_1,x_2): f'(\xi)=0$.

定理 5.2.1 (L' Hospital 法则) 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(a,a+d]$ 上可导, 且 $g'(x)\neq 0$. 若 $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\lim\limits_{x\to a+}g(x)=0$ 或 $\lim\limits_{x\to a+}g(x)=\infty$, 且 $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (有限数或无穷), 则成立

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

定理 5.3.1 (带 Peano 余项的 Talor 公式) 设 $f(x)$ 在 x_0 处有 n 阶导数, 则存在 x_0 的一个邻域, 对于该邻域中的任一点 x, 成立

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x),$$

其中余项 $r_n(x)=o((x-x_0)^n)$.

定理 5.3.2 (带 Lagrange 余项的 Taylor 公式) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有 n 阶连续导数, 且在 (a,b) 上有 $n+1$ 阶导数. 设 $x_0\in[a,b]$ 为一定点, 则对于任意 $x\in[a,b]$, 成立

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x),$$

其中余项 $r_n(x)=\dfrac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, ξ 在 x 和 x_0 之间.

引理 设函数 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 处可导, 在 $[a,b]$ 上的 l_0 个不同的点上有 $g(x)=0$, 同时在其中的 l_1 个点上有 $g'(x)=0$, 则 $g'(x)$ 在 $[a,b]$ 内至少有 l_0+l_1-1 个不同的零点.

定理 5.3.3 (插值多项式的余项定理) ⭐ 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有 n 阶连续导数, 在 (a,b) 上具有 $n+1$ 阶导数, 且 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 $m+1$ 个互异点 $x_0,x_1\cdots,x_m$ 上的函数值和若干阶导数值 $f^{(j)}(x_i)$ $(i=0,1,\cdots,m,j=0,1,\cdots,n_i-1;\sum\limits_{i=1}^{m}n_i=n+1)$ 是已知的, 则对于任意 $x\in[a,b]$, 差值问题有余项估计

$$r_n(x)=f(x)-p_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{m}(x-x_i)^{n_i},$$

这里的 $\xi\in[\min\{x_i,x\},\max\{x_i,x\}]$.

定理 5.3.4 满足上述插值条件的多项式存在且唯一.

---

1. Lagrange 插值多项式 $n_0=n_1=\cdots=n_m=1,\ m=n.$

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\left[f(x_k)\prod_{i=0,\ i\neq k}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}\right].$$

---

2. Taylor 插值多项式 $n_0=n+1,\ m=0.$

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}f^{(k)}(x_0)\frac{(x-x_0)^k}{k!}.$$

---

3. Hermite 插值多项式 ⭐ $n_0=n_1=\cdots=n_m=2,\ m=n.$

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\left[f(x_k)q_k^{(0)}(x)+f'(x_k)q_k^{(1)}(x)\right],$$

其中 $\left\{q_k^{(0)}(x),q_k^{(1)}\right\}_{k=0}^{n}$ 是满足条件

$$\begin{cases}q_k^{(0)}(x_i)=\delta_{ik},\\ [q_k^{(0)}]'(x_i)=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}q_k^{(1)}(x_i)=0,\\ [q_k^{(1)}]'(x_i)=\delta_{ik},\end{cases}\qquad i,k=0,1,2,\cdots,n$$

的 **基函数**, 其中 δ_{ik} 为 **Kronecker 记号**. 实际上

$$q_k^{(0)} = \left[\prod_{i=0,\, i\neq k}^{n}\left(\frac{x-x_i}{x_k-x_i}\right)^2\right]\left[1-\left(\sum_{i=0,\, i\neq k}^{n}\frac{2}{x_k-x_i}\right)(x-x_k)\right],$$

$$q_k^{(1)} = \left[\prod_{i=0,\, i\neq k}^{n}\left(\frac{x-x_i}{x_k-x_i}\right)^2\right](x-x_k).$$

Marclaurin 公式

定理 5.4.1 设 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域有 $n+2$ 阶导数存在, 则它的 $n+1$ 次 Taylor 多项式的导数恰为 $f'(x)$ 的 n 次 Taylor 多项式.

渐近线 水平渐近线, 斜渐近线, (铅锤渐近线). 充要条件为:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0 \quad \vee \quad \lim_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0.$$

以正无穷为例, 则有

$$\begin{cases} a = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}, \\ b = \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]. \end{cases}$$

外推 ⭐ 若对于某个值 a, 按参数 h 算出的近似值 $a_1(h)$ 可以 Taylor 展开 (无需真正计算), 则

$$\begin{aligned} a_1(h) &= a + c_1h + jc_2h^2 + c_3h^3 + \cdots \\ a_1\left(\frac{h}{2}\right) &= a + \frac{1}{2}c_1h + \frac{1}{4}c_2h^2 + \frac{1}{8}c_3h^3 + \cdots \\ a_2(h) &= 2a_1\left(\frac{h}{2}\right) - a_1(h) = a + d_2h^2 + d_3h^3 + \cdots \end{aligned}$$

于是两个 $O(h)$ 阶的近似值组合得到了 $O(h^2)$ 的近似值. 同样的,

$$a_k(h) = \frac{2^{k-1}a_{k-1}\left(\frac{h}{2}\right)-a_{k-1}(h)}{2^{k-1}-1} = a + O(h^k).$$

定理 5.5.1 (极值点判定定理) 第一判别法和第二判别法.

数值求解

1. 二分法.
2. Newton 迭代法 (切线法).

   Newton 法是二次收敛 (平方收敛) 的迭代方法.
3. 割线法 (弦割法).

定理 5.6.1 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中有二阶连续导数, 且满足条件

1. $f(a)\cdot f(b)<0$;
2. $f'(x)$ 在 (a,b) 保号;
3. $f''(x)$ 在 (a,b) 保号.

取 $x_0 \in (a,b)$, 且 $f(x_0)\cdot f''(x_0) > 0$, 则以之为初值的 Newton 迭代过程 $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ 产生的序列 $\{x_k\}$ 单调收敛于方程 $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 中的唯一解.

笔记

泰勒公式的应用

- 近似计算
- 求极限
- 证明不等式
- 求曲线的渐近线
- 外推

函数作图

1. 定义域, 不连续点.
2. 奇偶性, 周期性.
3. 驻点, 导数不存在的点.
4. 拐点, 凹凸性.
5. 渐近线.

Machin 公式 $\pi = 16\arctan\dfrac{1}{5} - \arctan\dfrac{1}{239}$.

例题

1. Jensen 不等式
    1. 若 $a,b,p,q \geq 0, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, 则 $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$.
2. $\arctan\dfrac{1+x}{1-x} - \arctan x = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}, & x<1 \\ -\dfrac{3\pi}{4}, & x>1 \end{cases}$
3. 中值定理
    1. $|\arctan a - \arctan b| \leq |a-b|$.
    2. 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续, 在 $(1,+\infty)$ 上可导, $\mathrm{e}^{-x^2}f'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有界, 则 $\mathrm{e}^{-x^2}f(x), x\mathrm{e}^{-x^2}f(x)$ 也在 $(1,+\infty)$ 上有界.
    3. $f(b)+f(a)-2f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = \left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2 f''(\eta)$.
4. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数, 且 $|f(x)| \leq A,\ |f''(x)| \leq B$, 则 $|f'(x)| \leq 2A+B$. ⭐
5. 利用 Stolze 定理
    1. 设 $0 < x_1 < \dfrac{\pi}{2},\ x_{n+1} = \sin x_n\ (n=1,2,\cdots)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0,\ x_n^2 \sim \dfrac{3}{n}$.
    2. 设 $y_1 > 0,\ y_{n+1} = \ln(1+y_n)\ (n=1,2,\cdots)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0,\ y_n \sim \dfrac{2}{n}$.

第 6 章 不定积分

定理

定理 6.1.1 (线性性) 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的原函数都存在, 则对任意常数 k_1 和 k_2, 函数 $k_1 f(x)+k_2 g(x)$ 的原函数也存在, 且为 $k_1\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x+k_2\int g(x)\,\mathrm{d}x$.

- 两类换元积分法
- 分部积分公式
- 有理函数的不定积分

定理 6.3.1 ⭐ 设有理函数 $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ 是真分式, 多项式 $q(x)$ 有 k 重实根 α, 即 $q(x)=(x-\alpha)^k q_1(x)$, $q_1(\alpha)\neq 0$. 则存在实数 λ 与多项式 $p_1(x)$, 其次数低于 $(x-\alpha)^{k-1}q_1(x)$ 的次数, 成立

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{\lambda}{(x-\alpha)^k}+\frac{p_1(x)}{(x-\alpha)^{k-1}q_1(x)}.$$

定理 6.3.2 ⭐ 设有理函数 $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ 是真分式, 多项式 $q(x)$ 有 l 重共轭复根 $\beta\pm\gamma\mathrm{i}$, 即 $q(x)=(x^2+2\xi x+\eta^2)^l q^*(x)$, $q^*(\beta\pm\gamma\mathrm{i})\neq 0$, $\xi=-\beta$, $\eta^2=\beta^2+\gamma^2$. 则存在实数 μ,ν 和多项式 $p^*(x)$, 其次数低于 $(x^2+2\xi x+\eta^2)^{l-1}q^*(x)$ 的次数, 成立

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{\mu x+\nu}{(x^2+2\xi x+\eta^2)^l}+\frac{p^*(x)}{(x^2+2\xi x+\eta^2)^{l-1}q^*(x)}.$$

推论

$$\int\frac{p_m(x)}{q_n(x)}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{i}\sum_{r=1}^{m_k}\int\frac{\lambda_{kr}\,\mathrm{d}x}{(x-\alpha_k)^r}+\sum_{k=1}^{j}\sum_{r=1}^{n_k}\int\frac{\mu_{kr}x+\nu_{kr}}{(x^2+2\xi_k x+\eta_k^2)^r}\,\mathrm{d}x$$

- 积分表见 p237.

笔记

有理函数不定积分

- 拆项比较系数时, 通分时分子不展开, 而是代入特殊值, 简化计算.
- 定理 6.3.2 推论的右边数项, 高次分母的积分时, 分子拆成两部分, 一部分利用换元法消去 x; 另一部分分子为常数, 配凑出二次项, 一部分与分母相消, 另一部分使用分部积分, 则可得到递推公式.

可化成有理函数不定积分的情况

1. $R\left(x,\sqrt[n]{\dfrac{\xi x+\eta}{\mu x+\nu}}\right)$, 作变量代换 $t=\sqrt[n]{\dfrac{\xi x+\eta}{\mu x+\nu}}$, 则 $x=\dfrac{-\nu t^n+\eta}{\mu t^n-\eta}$.
2. $R(\sin x,\cos x)$, 作变量代换 $t=\tan\dfrac{x}{2}$, 则

   $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\mathrm{d}x=\dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$.
3. $R(x,\sqrt{a+x},\sqrt{b+x})$, 作变量代换 $t=\sqrt{a+x}$, $\sqrt{t^2-a+b}=t+u$, 则

   $R(x,\sqrt{a+x},\sqrt{b+x})=R(t,\sqrt{t^2-a+b})=R(u)$.

多项式的其它形式 (平移)

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{p_n^{(k)}(x-a)}{k!}(x-a)^k.$$

例题

1. 设多项式 $p_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ 系数满足关系 $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(i-1)!} = 0$, 则 $\int p\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$ 是初等函数.
   ⭐

第 7 章 定积分

定理

Riemann 可积 若 $\exists I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得对任意一种划分 $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ 和任意点 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 只要 $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n}(\Delta x_i) < \delta$, 便有

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I \right| < \varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 称 I 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分.

- Dirichlet 函数在 Riemann 意义下不可积 (在每个小区间分别考虑有理数与无理数, 则二者和式的极限分别为 0 和 1).

Darboux 和 记 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 和 $[x_{i-1}, x_i]$ 的上下确界分别为 M, M_i, m, m_i, 则和式

$$\overline{S}(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i,\ \underline{S}(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

分别称为相应于划分 P 的 **Darboux 大和** 与 **Darboux 小和**.

- 定义 $\omega_i = M_i - m_i$ 为 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的 **振幅**.

引理 7.1.1 若在原有划分中加入分店形成新的划分, 则大和不增, 小何不减.

引理 7.1.2 记 $\overline{\mathbf{S}}, \underline{\mathbf{S}}$ 分别为一切可能的大和与小和的集合, 则

$$\forall \overline{S}(P_1) \in \overline{\mathbf{S}}, \underline{S}(P_2) \in \underline{\mathbf{S}} : m(b-a) \le \underline{S}(P_2) \le \overline{S}(P_1) \le M(b-a).$$

引理 7.1.3 (Darboux 定理) ⭐ 对任意在 $[a,b]$ 上有界的函数 $f(x)$, 恒有

$$\lim_{\lambda \to 0} \overline{S}(P) = L \equiv \inf\left\{ \overline{S}(P) \mid \overline{S}(P) \in \overline{\mathbf{S}} \right\},$$
$$\lim_{\lambda \to 0} \underline{S}(P) = l \equiv \sup\left\{ \underline{S}(P) \mid \underline{S}(P) \in \underline{\mathbf{S}} \right\}.$$

定理 7.1.1 (Riemann 可积的充要条件) ⭐ 有界函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积的充要条件是

$$\forall P : \lim_{\lambda \to 0} \overline{S}(P) = L = l = \lim_{\lambda \to 0} \underline{S}(P).$$

定理 7.1.2 ⭐ 有界函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积的充要条件是

$$\forall P: \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=0.$$

推论 0 ⭐ 有限区间上的一致连续函数必定可积.

推论 1 ⭐ 闭区间上的连续函数必定可积.

推论 2 ⭐ 闭区间上的单调函数必定可积.

定理 7.1.3 ⭐ 有界函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积的充要条件是

$$\forall\varepsilon>0,\exists P: \sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon.$$

推论 3 ⭐ 闭区间上只有有限个不连续点的有界函数必定可积.

- Riemann 函数在 $[0,1]$ 可积.

定积分的基本性质

性质 1 (线性性质) $\int_a^b[k_1f(x)+k_2g(x)]\,\mathrm{d}x=k_1\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+k_2\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

推论 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 而 $g(x)$ 只在有限个点上与 $f(x)$ 的取值不相同, 则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上也可积, 并且 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

性质 2 (乘积可积性) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可积, 则 $f(x)\cdot g(x)$ 在 $[a,b]$ 上也可积.

性质 3 (保序性) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可积, 且恒有 $f(x)\geq g(x)$, 则成立 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\geq\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

性质 4 (绝对可积性) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $|f(x)|$ 也于此可积, 且 $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leq\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x.$

性质 5 (区间可加性) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则对任意点 $c\in[a,b]$, $f(x)$ 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上都可积; 反之亦然, 且 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

性质 6 (积分第一中值定理) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可积, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号, 令 m,M 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的上下确界. 则存在 $\eta\in[m,M]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=\eta\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

- 特殊的, 当 $f(x)$ 连续且 $g(x)\equiv 1$ 时, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a).$

定理 7.3.1 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 作函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,\ x\in[a,b]$, 则

1. $F(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数.
2. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微, 并且 $F'(x)=f(x)$.

定理 7.3.2 (微积分基本定理) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

定理 7.3.3 设 $u(x), v(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有连续倒数, 则

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

定义 7.3.1 ⭐ 设 $g_n(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的一列函数 $(n=0,1,2,\cdots)$, 若对任意的 m 和 n, $g_m(x)g_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且有

$$\int_a^b g_m(x)g_n(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \displaystyle\int_a^b g_n^2(x)\,\mathrm{d}x > 0, & m = n, \end{cases}$$

则称 $\{g_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的 **正交函数列**. 当 $g_n(x)$ 是多项式时, 称为 **正交多项式列**.

- ⭐ Legendre 多项式是 $[-1,1]$ 上的正交多项式列.

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^2-1\right)^n$$

$$\int_{-1}^1 p_m(x)p_n(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \dfrac{2}{2n+1}, & m = n. \end{cases}$$

定理 7.3.4 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, $x=\varphi(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ (或 $[b,a]$) 上有连续导数, 其值域包含于 $[a,b]$, 且 $\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

- 注意 $x=\varphi(t)$ 须有连续导数.

定理 7.3.5 设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上可积, 则

1. 若 $f(x)$ 是偶函数, 则 $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$
2. 若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

定理 7.3.6 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的可积函数, 则对任一 a,

$$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- $\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \cdots, \sin nx, \cos nx, \cdots\}$ 是任意一个长度为 2π 的区间上的正交函数列.

- ⭐ 注意最后一列最后两行. (均为饶 x 轴旋转)

	直角坐标显式方程 $y=f(x), x\in[a,b]$	直角坐标参数方程 $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases} t\in[T_1,T_2]$	极坐标方程 $r=r(\theta),\theta\in[\alpha,\beta]$
平面图形面积	$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$	$\int_{T_1}^{T_2} \lvert y(t)x'(t)\rvert\,\mathrm{d}t$	$\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$
弧长的微分	$\mathrm{d}l=\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$	$\mathrm{d}l=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$	$\mathrm{d}l=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$
曲线弧长	$\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$	$\int_{T_1}^{T_2}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$	$\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$
旋转体体积	$\pi\int_a^b[f(x)]^2\mathrm{d}x$	$\pi\int_{T_1}^{T_2}y^2(t)\lvert x'(t)\rvert\,\mathrm{d}t$	$\frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$
旋转曲面面积	$2\pi\int_a^b\lvert f(x)\rvert\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$	$2\pi\int_{T_1}^{T_2}\lvert y(t)\rvert\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t$	$2\pi\int_\alpha^\beta r(\theta)\sin\theta\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$

- 绕 y 轴旋转: $V=2\pi\displaystyle\int_a^b xf(xj)\,\mathrm{d}x$.

曲率

$$K=\frac{|x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)|}{(x'^2(t)+y'^2(t))^{\frac{3}{2}}}=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\left|r^2+2r'^2-rr''\right|}{\left|r^2+r'^2\right|^{\frac{3}{2}}}$$

---

n 步 Newton-Cotes 求积公式 ⭐ 将 $[a,b]$ 以步长 $h=\dfrac{b-a}{n}$ 分成 n 等分, 以分点 $x_i=a+ih$ 为节点作 Lagrange 插值多项式, 并积分, 得

$$f(x)\approx p_n(x)=\sum_{i=0}^n\left[\prod_{j=0,h\neq i}^n\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right]f(x_i)$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\approx(b-a)\sum_{i=0}^n C_i^{(n)}f(x_i)$$

其中 **Cotes 系数** 为

$$\begin{aligned}C_i^{(n)}&=\frac{1}{b-a}\int_a^b\prod_{j=0}^n\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\,\mathrm{d}x\quad(x=a+th)\\&=\frac{h}{b-a}\int_0^n\prod_{j=0,j\neq i}\frac{t-j}{i-j}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{n}\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\int_0^n\prod_{j=0,j\neq i}^n(t-j)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

由表达式及 Newton-Cotes 公式对 $f(x)\equiv 1$ 精确成立, 知

1. $C_i^{(n)}=C_{n-i}^{(n)}$.

2. $\sum_{i=0}^{n} C_i^{(n)} = 1$.

- 当 $n=1$ 时, 得到梯形公式.
- 当 $n=2$ 时, 得到 **Simpson 公式** ⭐

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right].$$

- 当 $n=4$ 时, 得到 **Cotes 公式** ⭐

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{90}\{7[f(x_0)+f(x_4)]+32[f(x_1+f(x_3))]+12f(x_2)\}.$$

定理 7.6.1 (Newton-Cotes 公式误差估计定理) ⭐ 设 $f^{(n+1)}(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 则用 Newton-Cotes 公式计算 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 的误差 $R_n(f)$ 满足估计式

$$|R_n(f)| \le \frac{M_f h^{n+2}}{(n+1)!}\int_0^n \left|\prod_{j=0}^{n}(t-j)\right|\mathrm{d}t$$
$$M_f = \max_{x\in[a,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$$

- 注意这里是 $n+1$ 次多形式.

定义 7.6.1 若一个数值求积公式在被积函数时任意不高于 n 次的多项式时都精确成立, 而且存在着一个 $n+1$ 次多项式使公式不能精确成立, 则称该求积公式具有 **n 次代数精确度**.

推论 1 ⭐ n 步 Newton-Cotes 求积公式的代数精度至少为 n.

推论 2 ⭐ $n=2k$ 步的 Newton-Cotes 求积公式的代数精度至少为 $n+1$.

- 特别地, 当 $n=2$ 时, Simpson 公式具有三次代数精度.

复化求积公式 ⭐

1. **复化梯形公式**

$$\begin{aligned} T_m^{(1)} &= \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{m}[f(x_{i-1})+f(x_i)] \\ &= \frac{h}{2}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{m-1}f(x_i)\right]. \end{aligned}$$

   对整个区间直接使用梯形公式的误差为 $O((b-a)^3)$, 复化梯形公式的误差为 $O((b-a)h^2)$.

2. **复化 Simpson 公式**

$$\begin{aligned} T_m^{(2)} &= \frac{h}{6}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{m-1}f(x_i)+4\sum_{i=1}^{m}f(x_{i-\frac{1}{2}})\right] \\ &= \frac{4T_{2m}^{(1)}-T_m^{(1)}}{4-1} \end{aligned}$$

误差为 $O((b-a)h^5)$. (实质上是对复化梯形公式做了一次外推)

3. **复化 Cotes 公式**

$$T_m^{(3)} = \frac{4^2 T_{2m}^{(2)} - T_m^{(2)}}{4^2-1}.$$

4. **Romberg 方法**

$$T_m^{(k+1)} = \frac{4^k T_{2m}^{(k)} - T_m^{(k)}}{4^k-1}.$$

适合计算机实现 **自适应算法**.

定义 7.6.2 设使用 $[a,b]$ 上 $n+1$ 个节点 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 的近似求积公式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^n a_i^{(n)} f(x_i)$$

对于 $2n+1$ 次的任意多项式 $p_{2n+1}(x)$ 都有

$$\int_a^b p_{2n+1}(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^n a_i^{(n)} p_{2n+1}(x_i),$$

则称该求和公式为 $[a,b]$ 上的 **Gauss 型求积公式**.

Gauss-Legendre 求积公式 ⭐ 以 $n+1$ 次 Legendre 多项式 $p_{n+1}(x)$ 的根 $\{x_i^*\}_{i=0}^n$ 作为插值节点, 作 $f(x)$ 的 Lagrange 插值多项式, 并在 $[-1,1]$ 上积分, 由此得到的数值积分公式称为 Gauss 型求积公式.

$$a_i^{(n)} = \int_{-1}^1 \prod_{j=0,j\neq i}^n \frac{x-x_j^*}{x_i^*-x_j^*}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \frac{p_{n+1}(x)}{(x-x_i^*)[p_{n+1}(x_i^*)]'}\,\mathrm{d}x \quad (i=0,1,2,\cdots,n)$$

笔记

Holder 不等式 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1,\ p,q>0$, 则

$$\int_a^b |f(x)g(x)| \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.$$

- 由 $ab \le \dfrac{a^p}{p}+\dfrac{a^q}{q}$.

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上都可积, 则

Schwarz 不等式 $\left[\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x.$

Minkowski 不等式 $\left\{\int_a^b [f(x)+g(x)]^2\,\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}} \le \left[\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}} + \left\{\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}.$

例题

可积性

- 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积
  - 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.
  - 若 $|f(x)| \geq m > 0$, 则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 在 $[a,b]$ 上也可积.
  - 若 $A \leq f(x) \leq B$, $g(u)$ 在 $[A,B]$ 上连续, 则 $g(f(x))$ 在 $[a,b]$ 上可积.
- 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界
  - 若不连续点为 $\{x_n\}$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上也可积.
  - 可积的充要条件是: $\forall \varepsilon > 0, \sigma > 0, \exists P$, 使得振幅 $\omega_i \geq \varepsilon$ 的小区间长度和 $\sum\limits_{\omega_i \geq \varepsilon} \Delta x_i < \sigma$.

---

1. 由定积分定义与 Jensen 不等式得: 🌙
   1. $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b \ln f(x)\,\mathrm{d}x \leq \ln\left(\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)$.
   2. $f\left(\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right) \leq \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a f(\varphi(t))\,\mathrm{d}t$.
2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = 0,\ M = \sup\limits_{a\leq x\leq b} |f''(x)|$, 则
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{M(b-a)^3}{24}.$$
   注: 对泰勒展开式积分. 🌙
3. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且单调减少, 则 🌙
$$\forall \alpha \in [0,1] : \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \geq \alpha \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$
   1. 法一: 求导, 求极值.
   2. 法二: 对 $(1-\alpha)\displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \geq \alpha \int_\alpha^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ 两端分别使用中值定理.
   3. 法三: $\displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_0^1 f(\alpha t)\,\mathrm{d}t \geq \alpha \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.
4. **(Young 不等式)** 设 $y = f(x)$ 是 $[0,+\infty]$ 上严格单调增加的连续函数, 且 $f(0) = 0$, 则
$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y \geq ab \quad (a > 0, b > 0).$$
5. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(x) \geq 0, g(x) > 0$, 则
$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_a^b f^n(x) g(x)\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{N}} = \max_{a\leq x\leq b} f(x).$$

第 8 章 反常积分

定理

Cauchy 主值 (cpv)

定理 8.2.1 (Cauchy 收敛原理) ⭐ 反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A_0 \geq a : \forall A, A' \geq A_0, \left| \int_A^{A'} f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon.$$

定义 8.2.1 设 $f(x)$ 在任意有限区间 $[a, A] \subset [a, +\infty)$ 上可积, 且 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则称 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ **绝对收敛**, $f(x)$ 在$[a, +\infty)$ 上 **绝对可积**.

若 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛而非绝对收敛, 则称为 **条件收敛**, $f(x)$ 在$[a, +\infty)$ 上 **条件可积**.

推论 若反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛, 则它一定收敛.

定理 8.2.2 (比较判别法) 设在 $[a, +\infty)$ 上恒有 $0 \leq f(x) \leq K\varphi(x)$, 其中 K 是正常数, 则

1. 当 $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛时, $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛.
2. 当 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散时, $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ 也发散.

推论 (比较判别法的极限形式) 设在 $[a, +\infty)$ 上恒有 $f(x) \geq 0$ 和 $\varphi(x) \geq 0$, 且 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = l$, 则

1. 若 $0 \leq l < +\infty$, 则 $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛时 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 也收敛.
2. 若 $0 < l \leq +\infty$, 则 $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ 发散时 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 也发散.

若 $0 < l < +\infty$, 则 $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 同时收敛或同时发散.

定理 8.2.3 (Cauchy 判别法) 设在 $[a, +\infty) \subset (0, +\infty)$ 上恒有 $f(x) \geq 0$, K 是正常数, 则

1. 若 $f(x) \leq \dfrac{K}{x^p}$, 且 $p > 1$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.
2. 若 $f(x) \geq \dfrac{K}{x^p}$, 且 $p \leq 1$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

推论 (Cauchy 判别法的极限形式) 设在 $[a, +\infty) \subset (0, +\infty)$ 上恒有 $f(x) \geq 0$, K 是正常数, 且 $\lim\limits_{x \to +\infty} x^p f(x) = l$, 则

1. 若 $0 \leq l < +\infty$, $p > 1$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.
2. 若 $0 < l \leq +\infty$, $p \leq 1$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

定理 8.2.4 (积分第二中值定理) ⭐ 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调, 则存在 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x + g(b)\int_{\xi}^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

推论 ⭐ 在定理 8.2.4 的条件下

1. 若 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加, 且 $g(a)\geq 0$, 则存在 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(b)\int_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. 若 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少, 且 $g(b)\geq 0$, 则存在 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x.$$

定理 8.2.5 (A-D 判别法) ⭐ 若下列两个条件之一满足, 则 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛:

1. **(Abel 判别法)** $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界.
2. **(Dirichlet 判别法)** $F(A)=\displaystyle\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界, $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界且 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$.

笔记

Cauchy 主值:

- 若 $f(x)\geq 0$, 则 $(\mathrm{cpv})\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛 $\quad\Leftrightarrow\quad \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

例题

1. 设 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 且 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 一致连续, 则 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

第 9 章 数项级数

定理

调和级数的 **余和数列**.

定理 9.1.1 (级数收敛的必要条件) 设级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛, 则其通项构成的数列 $\{x_n\}$ 是无穷小量, 即 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

定理 9.1.2 (线性性) 设 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A,\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B,\ \alpha.\beta$ 是两个常数, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)=\alpha A+\beta B.$$

定理 9.1.3 (加法结合律) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛, 则在它的求和表达式中任意添加括号后所得的级数仍然收敛, 且其和不变.

定义 9.2.1 在有界数列 $\{x_n\}$ 中, 若存在它的一个子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=\xi$, 则称 ξ 为数列 $\{x_n\}$ 的一个 **极限点**.

定理 9.2.1 ⭐ 有界数列 $\{x_n\}$ 的极限点的集合 E 的上确界 H 和下确界 h 均属于 E, 即

$$H=\max E,\ h=\min E.$$

- 无界亦成立.

定义 9.2.2 **上极限** $H=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, **下极限** $h=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$.

定理 9.2.2 ⭐ 有界数列 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件是

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n.$$

- 无界亦成立.

定理 9.2.3 ⭐ 设 $\{x_n\}$ 是有界数列, 则

1. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n=H$ 的充要条件是: $\forall\varepsilon>0$,
    1. $\exists N,\forall n>N: x_n<H+\varepsilon$.
    2. $\{x_n\}$ 中有无穷多项满足 $x_n>H-\varepsilon$.
2. $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n=h$ 的充要条件是: $\forall\varepsilon>0$,
    1. $\exists N,\forall n>N: x_n>H-\varepsilon$.
    2. $\{x_n\}$ 中有无穷多项满足 $x_n<H+\varepsilon$.

定理 9.2.4 ⭐ 设 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 是两数列, 则

1. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(x_n+y_n)\le\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n.$

    $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(x_n+y_n)\ge\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n+\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n.$
2. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 则

    $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(x_n+y_n)=\lim\limits_{n\to\infty} x_n+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n.$

    $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(x_n+y_n)=\lim\limits_{n\to\infty} x_n+\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n.$

    (要求上述诸式的右端不是待定型)

定理 9.2.5 ⭐ 设 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 是两数列, 则

1. 若 $x_n\ge 0,\, y_n\ge 0$, 则

    $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(x_ny_n)\le\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n.$

    $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(x_ny_n)\ge\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n\cdot\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n.$
2. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x\in(0,+\infty)$, 则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n.$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\underline{\lim_{n\to\infty}}y_n.$$

(要求上述诸式的右端不是待定型)

对于 $\{x_n\}$, 记

$$\begin{aligned} b_n &= \sup\{x_{n+1},x_{n+2},\cdots\}=\sup_{k>n}\{x_k\} \\ a_n &= \inf\{x_{n+1},x_{n+2},\cdots\}=\inf_{k>n}\{x_k\} \\ H^* &= \lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\sup_{k>n}\{x_k\} \\ h^* &= \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\inf_{k>n}\{x_k\} \end{aligned}$$

定理 9.2.6 ⭐ H^* 是 $\{x_n\}$ 的最大极限点, h^* 是 $\{x_n\}$ 的最小极限点, 即

$$H^*=\max E=\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n,\quad h^*=\min E=\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n.$$

定理 9.3.1 (正项级数的收敛原理) 正项级数收敛的充要条件是它的部分和数列有上界.

定理 9.3.2 (比较判别法) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$ 是两个正项级数, 若 $\exists A>0: x_n\le Ay_n,\ n=1,2,\cdots$, 则

1. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$ 收敛时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 也收敛.
2. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 发散时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$ 也发散.

定理 9.3.2' (比较判别法的极限形式) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$ 是两个正项级数, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=l$, 则

1. 若 $0\le l<+\infty$, 则当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$ 收敛时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 也收敛.
2. 若 $0<l\le+\infty$, 则当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$ 发散时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 也发散.

定理 9.3.3 (Cauchy 判别法) ⭐ 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 是正项级数, $r=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{x_n}$, 则

1. 当 $r<1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛.
2. 当 $r>1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 发散.
3. 当 $r=1$ 时, 级数可能收敛可能发散.

定理 9.3.4 (d' Alembert 判别法) ⭐ 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n\ (x_n\ne0)$ 是正项级数, 则

1. 当 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\overline{r}<1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛.

2. 当 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \underline{r} > 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散.
3. 当 $\overline{r} \geq 1$ 或 $\underline{r} \leq 1$ 时, 级数可能收敛, 也可能发散.

引理 9.3.1 ⭐ 设 $\{x_n\}$ 是正项数列, 则

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \underline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

- 能用 d' Alembert 判别法判定的敛散情况, 一定能用 Cauchy 判别法判定, 反之不亦然. 二者本质是比较判别法.

定理 9.3.5 (Rabbe 判别法) ⭐ 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n\ (x_n \neq 0)$ 是正项级数, $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = r$, 则

1. 当 $r > 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛.
2. 当 $r < 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散.

定理 9.3.5' (Bertrand 判别法) 🌙 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n\ (x_n \neq 0)$ 是正项级数,

$\lim\limits_{n\to\infty} \left[n\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) - 1\right] \ln n = r$, 则判断标准同上.

设 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 非负且 Riemann 可积,

取一单调增加趋于 $+\infty$ 的数列 $\{a_n\} : a = a_1 < a_2 < \cdots$, 令 $u_n = \displaystyle\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

定理 9.3.6 (积分判别法) ⭐ 反常积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 与正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 同时收敛或同时发散于 $+\infty$, 且

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

特别地, 当 $f(x)$ 单调减少时, 取 $a_n = n$, 则反常积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 与正项级数 $\sum\limits_{n=N}^{\infty} f(n)\ (N = [a] + 1)$ 同时收敛或同时发散.

- 由反常积分的收敛性判断级数的收敛性.
- 由级数的收敛性判断反常积分的收敛性.
- 若 $f(x) \geq 0$ 不恒成立,则由反常积分的收敛性仍可得到级数的收敛性, 但反之不亦然.

定理 9.4.1 (级数的 Cauchy 收敛原理) ⭐ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛的充要条件是: $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+$:

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_m| < \varepsilon$$

对一切 $m > n > N$ 成立.

- 当 $m = n + 1$ 时, 即为必要条件 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

- $\forall \varepsilon>0, \forall p \in \mathbb{N}^{+}, \exists N(\varepsilon, p): \forall n>N,\left|x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{n+p}\right|<\varepsilon$ 无法推出级数收敛.

定义 9.4.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} u_{n}\ \left(u_{n}>0\right)$ 称为 **交错级数**, 若 $\left|u_{n}\right|$ 单调减少且收敛于 0, 则称为 **Leibniz 级数**.

定理 9.4.2 (Leibniz 判别法) Leibniz 级数必定收敛.

1. Leibniz 级数满足 $0 \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} u_{n} \leq u_{1}$.
2. 余和 $r_{n}=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k+1}$ 满足 $\left|r_{n}\right| \leq u_{n+1}$.

引理 9.4.1 (Abel 变换; 分部求和公式) ⭐ 设 $\left\{a_{n}\right\},\left\{b_{n}\right\}$ 是两数列, 记 $B_{k}=\sum\limits_{i=1}^{k} b_{i}\ (k=1,2, \cdots)$, 则

$$
\sum_{k=1}^{P} a_{k} b_{k}=a_{p} B_{p}-\sum_{k=1}^{P-1}\left(a_{k+1}-a_{k}\right) B_{k} .
$$

引理 9.4.2 (Abel 引理) ⭐ 设 $\left\{a_{k}\right\}$ 为单调数列, $\left\{B_{k}\right\}\ \left(B_{k}=\sum\limits_{i=1}^{k} b_{i}, k=1,2, \cdots\right)$ 为有界数列, 即 $\exists M>0, \forall k:\left|B_{k}\right| \leq M$, 则

$$
\left|\sum_{k=1}^{P} a_{k} b_{k}\right| \leq M\left(\left|a_{1}\right|+2\left|a_{p}\right|\right) .
$$

定理 9.4.3 (级数的 A-D 判别法) ⭐ 若下列两个条件之一满足, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n} b_{n}$ 收敛:

1. (**Abel 判别法**) $\left|a_{n}\right|$ 单调有界, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_{n}$ 收敛;
2. (**Dirichlet 判别法**) $\left|a_{n}\right|$ 单调趋于 0, $\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} b_{i}\right\}$ 有界.

- Leibniz 判别法和 Abel 判别法均可看作 Dirichlet 判别法的特例.

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{n}$ 是任意项级数, 令

$$
\begin{aligned}
& x_{n}^{+}=\frac{\left|x_{n}\right|+x_{n}}{2}=\begin{cases}x_{n}, & x_{n}>0, \\ 0, & x_{n} \leq 0,\end{cases} \\
& x_{n}^{-}=\frac{\left|x_{n}\right|-x_{n}}{2}=\begin{cases}-x_{n}, & x_{n}<0, \\ 0, & x_{n} \geq 0 .\end{cases}
\end{aligned}
$$

定理 9.4.4 ⭐ 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{n}$ 绝对收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{n}^{+}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{n}^{-}$ 都收敛; 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{n}$ 条件收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{n}^{+}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{n}^{-}$ 都发散到 $+\infty$.

加法交换律

定理 9.4.5 ☆ 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 绝对收敛, 则它的 **更序级数** $\sum_{n=1}^{\infty} x'_n$ 也绝对收敛, 且和不变, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} x'_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

定理 9.4.6 (Riemann) ☆ 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 条件收敛, 则 $\forall a \in [-\infty, +\infty]$, 必定存在 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的更序级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x'_n$ 满足 $\sum_{n=1}^{\infty} x'_n = a$.

级数的乘法

级数的 **Cauchy 乘积**.

对于正方形排列所得的乘积, 只要 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ 收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right).$$

定理 9.4.7 ☆ 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 则将 $a_i b_j$ 按任一方式排列求和而成的级数也绝对收敛, 且其和等于 $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$.

无穷乘积

定义 9.5.1 如果部分积数列 $\{P_n\}$ 收敛于一个非零有限数 P, 则称无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛, 且称 P 为它的积. 如果发散或收敛于 0, 则称无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 发散.

定理 9.5.1 ☆ 如果无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛, 则

1. $\lim_{n\to\infty} p_n = 1$.
2. $\lim_{m\to\infty} \prod_{n=m+1}^{\infty} p_n = 1$. 🌙

Wallis 公式 ☆

设 $p_n = 1 - \frac{1}{(2n)^2}$, 记 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x$, 则

$$
I_{2n}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2},\quad I_{2n+1}=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},
$$

$$
P_n=\prod_{k=1}^{n}p_k=\frac{[(2n-1)!!]^2}{[(2n)!!]^2}\cdot(2n+1)=\frac{2}{\pi}\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}},
$$

$$
1<\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}<\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}}=\frac{2n+1}{2n},
$$

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}}=1\quad\Rightarrow\quad\prod_{n=1}^{\infty}p_n=\frac{2}{\pi}
$$

$$
\frac{\pi}{2}=\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\right)\cdot\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\right)\cdots
$$

$$
\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\sim\sqrt{n\pi}\quad(n\to+\infty)
$$

Viete 公式 ⭐

$$
\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}
$$

令 $x=\frac{\pi}{2}$, 即得

$$
\frac{2}{\pi}=\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\pi}{2^n}\cdots
$$

无穷乘积与无穷级数

定理 9.5.2 ⭐ 无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 收敛的充要条件是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln p_n$ 收敛.

推论 9.5.1 ⭐ 设 $a_n>0$ (或 $a_n<0$), 则无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛的充要条件是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

- 即对于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 有: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+x_n)$ 收敛 $\quad\Leftrightarrow\quad\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛.

推论 9.5.2 ⭐ 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛的充要条件是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛.

- 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2=+\infty$，则无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 发散于 0.
- 当无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 可能都发散.

定义 9.5.2 当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln p_n$ 绝对收敛时，无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ **绝对收敛**.

定理 9.5.3 ⭐ 设 $a_n>-1,\ n=1,2,\cdots$,则下述命题等价:

1. 无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 绝对收敛.

2. 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ 收敛.
3. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛.

Stirling 公式 ⭐

令 $b_n=\dfrac{n!\mathrm{e}^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$, 则 $\dfrac{b_n}{b_{n-1}}=\mathrm{e}^{1+\left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}=1-\dfrac{1}{12n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$,

故 $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{b_n}{b_{n-1}}-1\right)$ 是收敛的定号级数, 故无穷乘积 $\prod_{n=2}^{\infty}\dfrac{b_n}{b_{n-1}}$ 收敛于非零实数,

$\lim_{n\to\infty}b_n=b_1\prod_{n=2}^{\infty}\dfrac{b_n}{b_{n-1}}$ 也收敛于非零实数, 故

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n^2}{b_{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot\sqrt{\frac{2}{n}}=\sqrt{2\pi}$$

$$n!\sim\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}\quad(n\to+\infty)$$

巴塞尔问题

$$\sin x=(2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2\dfrac{k\pi}{2n+1}}\right)$$

$$\sin x=x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

笔记

- 可利用级数收敛的必要条件证明数列收敛于 0.
  - $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^2}=0.$
  - $\lim_{n\to\infty}\dfrac{(2n)!}{2^{n(n+1)}}=0.$
- 若由 Cauchy 判别法或 d' Alembert 判别法判断出 $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 也发散.
- 正弦级数的有界性

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|=\left|\frac{\cos\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{2n+1}{2}x}{2\sin\dfrac{x}{2}}\right|\leq\frac{1}{\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|}.$$

- 等价无穷大

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{n\pi}$$

$$n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-n}$$

- 一些无穷乘积

$$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\right)\cdot\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\right)\cdot\cdots$$

$$\frac{2}{\pi} = \cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\pi}{2^n}\cdot\cdots$$

$$\sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

- 若 $\{x_n\}$ 和 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n(x_n - x_{n-1})$ 收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛. ⭐
- 若 $x_n > 0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) > 0$, 则交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n x_n$ 收敛. ⭐
- 由柯西乘积数归得: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n = (1-q)^{-k}$. ⭐

例题

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\sqrt{n^2+1}\pi\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\pi$ 收敛.
2. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$, 则
   1. 存在发散的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}\right)$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n} = 0$.
   2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{S_n^2} \le \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{S_n - S_{n-1}}{S_n S_{n-1}} = \frac{2}{x_1} - \frac{1}{S_n}$ 收敛.
3. 无穷乘积

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\cdot\cdots\cdot(\beta+n)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdot\cdots\cdot(\alpha+n)} = 0 \quad (0<\beta<\alpha)$$

4. 设 $|q|<1$, 则

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n) = \frac{1}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})}$$

第 10 章 函数项级数

定理

定义 10.1.1 设 $u_n(x)$ 在 $\mathbb{E}$ 上定义, 对于任意固定的 $x_0 \in \mathbb{E}$, 若数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛, 则称函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在点 x_0 收敛, x_0 称为其 **收敛点**. 收敛点全体构成的集合 $\mathbb{D}$ 称为 **收敛域**.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $\mathbb{D}$ 上 **点态收敛** 于 **和函数** $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, 即 **部分和函数** 的极限.

逐项求极限: $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{n\to\infty}$, $\quad \lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{n\to\infty} = \lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to x_0}$.

逐项求导: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum\limits_{n=1}^{\infty} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, $\quad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \lim\limits_{n\to\infty} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$.

逐项积分: $\displaystyle\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b$, $\quad \displaystyle\int_a^b \lim_{n\to\infty} = \lim_{n\to\infty} \int_a^b$.

定义 10.1.2 设 $\{S_n(x)\}(x \in \mathbb{D})$ 是一函数序列, 若对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N(\varepsilon)$, 当 $n > N(\varepsilon)$ 时,

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$$

对一切 $x \in \mathbb{D}$ 成立, 则称 $\{S_n(x)\}$ 在 $\mathbb{D}$ 上 **一致收敛** 于 $S(x)$, 记为 $S_n(x) \overset{\mathbb{D}}{\rightrightarrows} S(x)$.

同样的有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $\mathbb{D}$ 上一致收敛于 $S(x)$. 即

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N, \forall x \in \mathbb{D} : \left| \sum_{k=1}^{n} u_k(x) - S(x) \right| = |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$$

推论 10.1.1 若函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $\mathbb{D}$ 上一致收敛, 则函数序列 $\{u_n(x)\}$ 在 $\mathbb{D}$ 上一致收敛于 $u(x) \equiv 0$.

定义 10.1.3 若对于任意给定的闭区间 $[a, b] \subset \mathbb{D}$, 函数序列 $\{S_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $S(x)$, 则称 $\{S_n(x)\}$ 在 $\mathbb{D}$ 上 **内闭一致收敛** 于 $S(x)$.

定理 10.1.1 设函数序列 $\{S_n(x)\}$ 在集合 $\mathbb{D}$ 上点态收敛于 $S(x)$, 定义 $S_n(x)$ 与 $S(x)$ 的距离为

$$d(S_n, S) = \sup_{x\in\mathbb{D}} |S_n(x) - S(x)|.$$

则 $\{S_n(x)\}$ 在 $\mathbb{D}$ 上一致收敛于 $S(x)$ 的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} d(S_n, S) = 0$.

定理 10.1.2 设函数序列 $\{S_n(x)\}$ 在集合 $\mathbb{D}$ 上点态收敛于 $S(x)$, 则 $|S_n(x)|$ 在 $\mathbb{D}$ 上一致连续收敛于 $S(x)$ 的充要条件是: 对任意数列 $|x_n|, x_n \in \mathbb{D}$, 成立

$$\lim_{n\to\infty} (S_n(x_n) - S(x_n)) = 0.$$

一致收敛的判别

定理 10.2.1 (函数项级数一致收敛的 Cauchy 收敛原理) 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $\mathbb{D}$ 上一致收敛的充要条件是, $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall m > n > N, \forall x \in \mathbb{D}$

$$|S_m(x) - S_n(x)| = |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots u_m(x)| < \varepsilon.$$

定理 10.2.2 (Weierstrass 判别法) 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)(x \in \mathbb{D})$ 的每一项 $u_n(x)$ 满足

$$|u_n(x)| \leq a_n, \quad x \in \mathbb{D},$$

并且数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $\mathbb{D}$ 上一致收敛.

- 此时不仅一致收敛, 还在绝对意义上一致收敛.

定理 10.2.3 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)(x \in \mathbb{D})$ 满足如下两个条件之一, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 $\mathbb{D}$ 上一致收敛.

1. (**Abel 判别法**) 函数序列 $\{a_n(x)\}$ 对每一固定的 $x \in \mathbb{D}$ 关于 n 是单调的, 且 $\{a_n(x)\}$ 在 $\mathbb{D}$ 上一致有界:

   $$|a_n(x)| \leq M, \quad x \in \mathbb{D}, n \in \mathbb{N}^+,$$

   同时, 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 在 $\mathbb{D}$ 上一致收敛.
2. (**Dirichlet 判别法**) 函数序列 $\{a_n(x)\}$ 对每一固定的 $x \in \mathbb{D}$ 关于 n 是单调的, 且 $\{a_n(x)\}$ 在 $\mathbb{D}$ 上一致收敛于 0; 同时, 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 的部分和序列在 $\mathbb{D}$ 上一致有界:

   $$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k(x)\right| \leq M, \quad x \in \mathbb{D}, n \in \mathbb{N}^+.$$

一致收敛级数的性质

定理 10.2.4 (连续性定理) 设函数序列 $\{S_n(x)\}$ 的每一项 $S_n(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 且一致收敛于 $S(x)$, 则 $S(x)$ 在 $[a, b]$ 上也连续.

- 即可以逐项求极限, $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{n \to \infty} S_n(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \lim\limits_{x \to x_0} S_n(x)$.

定理 10.2.4' (逐项求极限定理) 设对每个 n, $u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $S(x)$, 则 $S(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续. 这时, $\forall x_0 \in [a, b]$,

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x).$$

定理 10.2.5 设函数序列 $\{S_n(x)\}$ 的每一项 $S_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $S(x)$, 则 $S(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 且

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} S_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

定理 10.2.5' (逐项积分定理) 设对每个 n, $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$, 则 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

定理 10.2.6 设函数序列 $\{S_n(x)\}$ 满足

1. $S_n(x)\ (n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导函数.
2. $\{S_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上点态收敛于 $S(x)$.
3. $\{S_n'(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $\sigma(x)$.

则 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S(x)=\sigma(x)$. 即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S_n(x).$$

定理 10.2.6' (逐项求导定理) 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 满足

1. $u_n(x)\ (n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导函数.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上点态收敛于 $S(x)$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $\sigma(x)$.

则 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_n(x).$$

定理 10.2.7 (Dini 定理) 设函数序列 $|S_n(x)|$ 在闭区间 $[a,b]$ 上点态收敛于 $S(x)$, 如果

1. $S_n(x)\ (n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,b]$ 上连续.
2. $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.
3. $\{S_n(x)\}$ 关于 n 单调.

则 $[S_n(x)]$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$.

定理 10.2.7' 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上点态收敛于 $S(x)$, 如果

1. $u_n(x)\ (n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,b]$ 上连续.
2. $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.
3. 对任意固定的 $x\in[a,b]$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 是正项级数或负向级数.

则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$.

处处不可导的连续函数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\varphi(10^n x)}{10^n}$.

幂级数

对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 令 $A = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$, 定义 **收敛半径**

$$R = \begin{cases} +\infty, & A = 0, \\ \dfrac{1}{A}, & A \in (0, +\infty), \\ 0, & A = +\infty. \end{cases}$$

定理 10.3.1 (Cauchy-Hadamard 定理) 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 当 $|x| < R$ $(R > 0)$ 时绝对收敛; 当 $|x| > R$ 时发散.

定理 10.3.2 (d' Alembert 判别法) 如果对幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 成立

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = A,$$

则此幂级数的收敛半径为 $R = \dfrac{1}{A}$.

- 即不等式 $\underline{\lim_{n\to\infty}} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} \le \underline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n} \le \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n} \le \overline{\lim_{n\to\infty}} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ 的推论.

Abel 第一定理 设 $x_0 = 0$, 如果幂级数在点 ξ 收敛, 则当 $|x| < |\xi|$ 时幂级数绝对收敛. 如果幂级数在点 η 发散, 则当 $|x| > |\eta|$ 时幂级数发散.

定理 10.3.3 (Abel 第二定理) 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R, 则

1. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 上内闭一致收敛.
2. 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = R$ 收敛, 则它在任意闭区间 $[a, R] \subset (-R, R]$ 上一致收敛.

- 即幂级数在包含于收敛域中的任意闭区间上一致收敛.

定理 10.3.4 (和函数的连续性) 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R, 则和函数在 $(-R, R)$ 上连续; 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = R$ 收敛, 则和函数在 $x = R$ 左连续.

定理 10.3.5 (逐项可积性) 设 a, b 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛域中任意二点, 则

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n \,\mathrm{d}x,$$

且逐项积分所得幂级数与原幂级数具有相同的收敛半径.

- 收敛半径相同, 但收敛域可能扩大.

定理 10.3.6 (逐项可导性) 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R, 则它在 $(-R, R)$ 上可以逐项求导, 即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a_nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},$$

且逐项求导所得幂级数的收敛半径也是 R.

- 收敛半径相同, 但收敛域可能缩小.

Taylor 级数与余项公式

定理 10.4.1 (积分形式的余项公式) 设 $f(x)$ 在 $O(x_0,r)$ 上任意阶可导, 则

$$\begin{aligned}
f(x)&=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+r_n(x),\quad x\in O(x_0,r)\\
r_n(x)&=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t\quad(\text{积分形式的余项公式})\\
&=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\quad(\text{Lagrang 余项})\\
&=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}\quad(\text{Cauchy 余项})
\end{aligned}$$

定理 10.5.1 (Weierstrass 第一逼近定理) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 则它的 **Bernstein 多项式** 序列 $\{B_n(f,x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 f.

$$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\mathrm{C}_n^kx^k(1-x)^{n-k}$$

Bernstein 多项式的性质

1. 线性性: $B_n(\alpha f+\beta g,x)=\alpha B_n(f,x)+\beta B_n(g,x)$.
2. 单调性: 若 $f(t)\geq g(t)$ 恒成立, 则 $B_n(f,x)\geq B_n(g,x)$.
3. $B_n(1,x)=1$.

   $B_n(t,x)=\dfrac{1}{n^1}n^{\underline{1}}x^1.$

   $B_n(t^2,x)=\dfrac{1}{n^2}(n^{\underline{2}}x^2+n^{\underline{1}}x^1).$

   $B_n(t^3,x)=\dfrac{1}{n^3}(n^{\underline{3}}x^3+3n^{\underline{2}}x^2+n^{\underline{1}}x^1).$

   $B_n(t^4,x)=\dfrac{1}{n^4}(n^{\underline{4}}x^4+6n^{\underline{3}}x^3+7n^{\underline{2}}x^2+n^{\underline{1}}x^1).$

   $B_n(t^5,x)=\dfrac{1}{n^5}(n^{\underline{6}}x^6+10n^{\underline{4}}x^4+25n^{\underline{3}}x^3+15n^{\underline{2}}x^2+n^{\underline{1}}x^1).$

   $B_n(t^6,x)=\dfrac{1}{n^6}(n^{\underline{7}}x^7+15n^{\underline{6}}x^6+65n^{\underline{4}}x^4+90n^{\underline{3}}x^3+31n^{\underline{2}}x^2+n^{\underline{1}}x^1).$

   找到了比较方便的递推式, 希望没有算错.

- 可以用有理系数多项式逼近.

笔记

- $f(x)=x^a(1-x)^b\ (0<x<1)$ 在 $x=\dfrac{a}{a+b}$ 处取到最值 $\dfrac{a^ab^b}{(a+b)^{a+b}}$.
- 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 和它们的 Cauchy 乘积 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1)$ 都收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\right)\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\right)$.
- 幂级数展开

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n,\quad \begin{cases}x\in(-1,1), & \alpha\le -1,\\ x\in(-1,1], & -1<\alpha<0,\\ x\in[-1,1], & \alpha>0.\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\sin x&=\sum_{n=0}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{2}\cdot\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad x\in\mathbb{R}\\
\cos x&=\sum_{n=0}^{\infty}\cos\frac{n\pi}{2}\cdot\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad x\in\mathbb{R}\\
\arcsin x&=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad x\in(-1,1)\\
\arccos x&=\frac{\pi}{2}-\arcsin x,\quad x\in(-1,1)\\
\sinh x&=\sum_{n=0}^{\infty}\sin^2\frac{n\pi}{2}\cdot\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad x\in\mathbb{R}\\
\cosh x&=\sum_{n=0}^{\infty}\cos^2\frac{n\pi}{2}\cdot\frac{x^n}{n!}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad x\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

- 和函数

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)=\frac{1}{1-x}\ln\frac{1}{1-x}\\
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n^2}=\int_0^t-\frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

- 巴塞尔问题

$$\zeta(2n)=\frac{(2\pi)^{2n}(-1)^{n+1}B_{2n}}{2\cdot(2n)!}.$$

-

例题

1. (不) 一致收敛的例子
    1. $S_n(x)=x^n$ 在 $(0,+\infty)$ 不一致收敛于 $S(x)=0$.
    2. $S_n(x)=\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ 在 $[0,a]$ 一致收敛, 但在 $[0,+\infty)$ 上不一致收敛.

3. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} x^{\alpha} \mathrm{e}^{-nx}$ 在 $[0, +\infty)$ 上当且仅当 $\alpha > 0$ 时一致收敛.
5. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛.

   如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p} x^n$.
6. 设 $\{a_n\}$ 单调收敛于 0, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 在 $(0, 2\pi)$ 内闭一致收敛.

2. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, 且 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{A_n} = 0$, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 1.
(考虑幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n$ 并用 d' Alembert 判别法)
3. 设 $P_n(x) = 0, P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x^2 - P_n^2(x)}{2}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, 则 $\{P_n(x)\}$ 在 $[-1, 1]$ 上一致收敛于 $|x|$.

第 11 章 Euclid 空间上的极限和连续

Euclid 空间上的距离与极限

向量空间: 定义加法与数乘.

$\mathbb{R}^n$ 上的 **内积**: $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.

1. (**正定性**) $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \geq 0$, 而 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$ 当且仅当 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.
2. (**对称性**) $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle$.
3. (**线性性**) $\langle \lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \lambda \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle + \mu \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle$.
4. (**Schwarz 不等式**) $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle^2 \leq \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle$.

定义 11.1.1 距离 $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$. **Euclid 范数** $\| \boldsymbol{x} \| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}$.

定理 11.1.1 距离满足一下性质:

1. (**正定性**) $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \geq 0$, 当且仅当 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ 时取等.
2. (**对称性**) $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| = |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|$.
3. (**三角不等式**) $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}| \leq |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| + |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}|$.

领域, **极限**, **收敛**, **发散**, **有界集**.

开集与闭集

以邻域 $O(\boldsymbol{x}, \delta)$ 判断: **内点**, **内部** S^o, **外点**, **边界点**, **边界** ∂S, **孤立点**, **聚点**.

定理 11.1.2 $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{a} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = a_i \ (i = 1, 2, \cdots, n)$.

定理 11.1.3 $\boldsymbol{x}$ 是点集 $S \subset \mathbb{R}^n$ 的聚点的充要条件是: 存在点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 满足 $\boldsymbol{x} \in S$, $\boldsymbol{x}_k \neq \boldsymbol{x}$, 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}$.

定义 11.1.5 设 S 是 $\mathbb{R}^n$ 上的点集, 若 S 中的每一个点都是它的内点, 则称 S 为 **开集**; 若 S 中包含了它的所有聚点, 则称 S 为 **闭集**. S 与它的聚点全体 S' 的并集称为 S 的 **闭包**, 记为 $\overline{S}$.

定理 11.1.4 $\mathbb{R}^n$ 上的点集 S 为闭集的充要条件是 S^c 是开集.

引理 11.1.1 (De Morgan 公式) 设 $\{S_\alpha\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一组 (有限或无限多个) 子集, 则

1. $\left(\bigcup\limits_\alpha S_\alpha\right)^c = \bigcap\limits_\alpha S_\alpha^c$.
2. $\left(\bigcap\limits_\alpha S_\alpha\right)^c = \bigcup\limits_\alpha S_\alpha^c$.

定理 11.1.5

1. 开集之并是开集.
2. 闭集之交是闭集.
3. 有限个开集之交是开集.
4. 有限个闭集之并是闭集.

- 开集与并集之差是开集, 并集与开集之差是并集.

定理 11.1.6 (闭矩形套定理) 设 $\Delta_k = [a_k, b_k] \times [c_k, d_k]$ $(k = 1, 2, \cdots)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上一列闭矩形, 如果

1. $\Delta_{k+1} \subset \Delta_k$.
2. $\sqrt{(b_k - a_k)^2 + (d_k - c_k)^2} \to 0$ $(k \to \infty)$.

则存在唯一的点 $\boldsymbol{a} = (\xi, \eta) \in \bigcap\limits_{k=1}^{n} \Delta_k$, 且

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = \xi, \quad \lim_{k\to\infty} c_k = \lim_{k\to\infty} d_k = \eta.$$

定理 11.1.6' (Cantor 闭区域套定理) 设 $\{S_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的非空闭集序列, 满足

$$S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_k \supset S_{k+1} \supset \cdots,$$

以及 $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{diam} S_k = 0$, 则存在唯一点属于 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} S_k$. 其中

$$\operatorname{diam} S = \sup\{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \mid \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S\},$$

称为 S 的直径.

定理 11.1.7 (Bolzano—Weierstrass 定理) $\mathbb{R}^n$ 上的有界点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 中必有收敛子列.

推论 11.1.1 $\mathbb{R}^n$ 上的有界无限点集至少有一个聚点.

定义 11.1.6 若 $\mathbb{R}^n$ 上的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 满足:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}^+, \forall k, l > K : |\boldsymbol{x}_l - \boldsymbol{x}_k| < \varepsilon,$$

则称 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 为 **基本点列** (或 **Cauchy 点列**).

定理 11.1.8 (Cauchy 收敛原理) $\mathbb{R}^n$ 上的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 收敛的充要条件是: $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 为基本点列.

定义 11.1.7 设 S 为 $\mathbb{R}^n$ 上的点集, 如果 $\mathbb{R}^n$ 中的一组开集 $\{U_\alpha\}$ 满足 $\bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha \supset S$, 那么称 $\{U_\alpha\}$ 为 S 的一个 **开覆盖**. 如果 S 的任意一个开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 中总存在一个有限子覆盖, 即存在 $\{U_\alpha\}$ 中的有限个开集 $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^{P}$ 满足 $\bigcup\limits_{i=1}^{P} U_{\alpha_i} \supset S$, 则称 S 为 **紧集**.

定理 11.1.9 (Heine—Borel 定理) $\mathbb{R}^n$ 上的点集 S 是紧集的充要条件为: 它是有界闭集.

- 紧集之交与紧集之并仍是紧集.

定理 11.1.10 设 S 是 $\mathbb{R}^n$ 上的点集, 那么以下三个命题等价:

1. S 是有界闭集.
2. S 是紧集.
3. S 的任一无限子集在 S 中必有聚点.

- Euclid 空间上的基本定理：Cantor 闭区间套定理、Bolzano—Weierstrass 定理、Cauchy 收敛原理和 Heine—Borel 定理，它们是相互等价的.

---

n 重极限, 累次极限

- 二次极限存在, 二重极限不一定存在.
- 二重极限存在, 二次极限可能都存在, 可能有一个不存在, 也可能都不存在.
- 两个极限运算不一定可以交换次序.

定理 11.2.1 若二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点存在二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$, 且当 $x\neq x_0$ 时存在极限 $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=\varphi(x)$, 那么

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\lim_{n\to\infty}\varphi(x)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A.$$

- 注意条件是二重极限存在.
- 若二重极限和两个二次极限都存在, 则极限运算可以交换次序.

向量值函数 (多元函数组)

定理 11.2.3 如果 g 在 D 上连续, f 在 Ω 上连续, 那么复合映射 $f\circ g$ 在 D 上连续.

- $f+g$ 与 $\langle f,g\rangle$ 也是连续的. 注意到

$$|\langle f(x),g(x)\rangle-\langle f(x_0),g(x_0)\rangle|=|\langle f(x)-f(x_0),g(x)\rangle+\langle f(x_0),g(x)-g(x_0)\rangle|.$$

连续, 一致连续.

定理 11.3.1 连续映射将紧集映射称紧集.

定理 11.3.2 (有界性定理) 设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集, f 是 K 上的连续函数, 则 f 在 K 上有界.

定理 11.3.3 (最值定理)

定理 11.3.4 (一致连续性定理) 设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集, $f:K\to\mathbb{R}^m$ 为连续映射, 则 f 在 K 上一致连续.

定义 11.3.3 设 S 是 $\mathbb{R}^n$ 中的点集, 若连续映射 $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^n$ 的值域全部落在 S 中, 即 $\gamma([0,1])\subset S$, 则称 γ 为 S 中的 **道路**, $\gamma(0)$ 与 $\gamma(1)$ 分别称为道路的 **起点** 与 **终点**.

若 S 中任意两点之间都存在道路, 则称 S 是 **(道路) 连通** 的, 且称为 **连通集**.

连通的开集称为 **(开) 区域**, 其闭包称为 **闭区域**.

定理 11.3.5 连续映射将连通集映射成连通集.

推论 11.3.1 连续函数将连通的紧集映射成闭区间.

定理 11.3.6 (中间值定理)

笔记

- 内部 S^o, 边界 ∂S, 聚点集 S', 闭包 $\overline{S}$.
- 开集的所有点都是聚点.
- 所有内点组成的点集是开集.
- 闭包是闭集.
- 由 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_i - tb_i)^2 \geq 0$ 可推出:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=n}^{n} b_i^2}.$$

- 设 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 为连续映射, 则对于 $\mathbb{R}^n$ 中的任意子集 A 成立

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

- 设 f 是有界开区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上的一致连续函数, 则可将 f 连续延拓到 D 的边界上, 且 f 在 D 上有界.

例题

1. 设二元函数 $f(x, y)$ 在开集 $D \subset \mathbb{R}^2$ 内对于变量 x 是连续的, 对于变量 y 满足 **Lipschitz 条件**:

$$\left|f(x, y') - f(x, y'')\right| \leq L\left|y' - y''\right|,$$

其中 L 为 Lipschitz 常数, 则 $f(x, y)$ 在 D 上连续.