6 无界媒质中的均匀平面波

6.1 理想介质中的均匀平面波

6.1.1 理想介质中的波动方程

在无源的线性、均匀、各向同性的无限大理想介质中，

- 对于一般场，齐次波动方程为
  - $\boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) - \mu\varepsilon \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2} = 0.$
  - $\boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) - \mu\varepsilon \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2} = 0.$
- 对于时谐场，亥姆霍兹方程为
  - $\boldsymbol{\nabla}^2 \dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) + k^2 \dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) = \dot{\boldsymbol{0}}.$
  - $\boldsymbol{\nabla}^2 \dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) + k^2 \dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) = \dot{\boldsymbol{0}}.$
- 概念说明
  - 波数：$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \dfrac{\omega}{v}.$
  - 波速：$v = \dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \dfrac{c}{\sqrt{\mu_{\mathrm{r}}\varepsilon_{\mathrm{r}}}}.$

6.1.2 理想介质中均匀平面波

- 考虑沿 z 轴方向传播的均匀平面波
  - $\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{E}(z,t)}{\partial z^2} = \mu\varepsilon \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{E}(z,t)}{\partial t^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{E}(z,t)}{\partial t^2}.$
  - $\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{H}(z,t)}{\partial z^2} = \mu\varepsilon \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{H}(z,t)}{\partial t^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{H}(z,t)}{\partial t^2}.$
- 麦克斯韦第一与第二方程的约束
  - $E_z(z,t) = H_z(z,t) = 0.$
  - $\dfrac{\partial E_x(z,t)}{\partial z} = -\mu \dfrac{\partial H_y(z,t)}{\partial t}.$
  - $-\dfrac{\partial H_y(z,t)}{\partial z} = \varepsilon \dfrac{\partial E_x(z,t)}{\partial t}.$
- 齐次一维标量波动方程的标准形式
  - $\dfrac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial z^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial t^2}.$
  - $\dfrac{\partial^2 H_y(z,t)}{\partial z^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 H_y(z,t)}{\partial t^2}.$
- 上述方程的解
  - $E_x(z,t) = f_1(t - z/v) + f_2(t + z/v).$
    - 入射波 $E_x^+(z,t) = f_1(t - z/v)$ 沿 $+\boldsymbol{a}_z$ 方向传播.
    - 反射波 $E_x^-(z,t) = f_2(t + z/v)$ 沿 $-\boldsymbol{a}_z$ 方向传播.
  - $H_y(z,t) = H_y^+(z,t) + H_y^-(z,t).$
    - $H_y^+(z,t) = \dfrac{1}{\mu v} E_x^+(z,t).$
    - $H_y^-(z,t) = -\dfrac{1}{\mu v} E_x^-(z,t).$
- 本征波阻抗
  - $\eta := \dfrac{E_x^+(z,t)}{H_y^+(z,t)} = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}.$
  - $\eta_0 = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx 120\pi \approx 377\ \Omega.$

6.1.3 时谐均匀平面波瞬时值

- 时谐电磁场
  - $\dfrac{\mathrm{d}^2 \dot{E}_x(z)}{\mathrm{d}z^2} = -\omega^2\mu\varepsilon \dot{E}_x(z) = \gamma^2 \dot{E}_x(z).$
  - $\dfrac{\mathrm{d}^2 \dot{H}_y(z)}{\mathrm{d}z^2} = -\omega^2\mu\varepsilon \dot{H}_y(z) = \gamma^2 \dot{H}_y(z).$
- 符号说明
  - 传播常数：$\gamma := \sqrt{-k^2} = \sqrt{-\omega^2\mu\varepsilon} \equiv \mathrm{j}\beta$
  - 相位常数：$\beta := \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = k$，单位为 $\mathrm{rad/m}$.
- 波动方程的复数解

- $\dot{E}_x(z) = \dot{E}_{x0}^{+}\mathrm{e}^{-\gamma z} + \dot{E}_{x0}^{-}\mathrm{e}^{\gamma z} = \dot{E}_{x0}^{+}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} + \dot{E}_{x0}^{-}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}$.
    - $\dot{H}_y(z) = \dot{H}_{y0}^{+}\mathrm{e}^{-\gamma z} + \dot{H}_{y0}^{-}\mathrm{e}^{\gamma z} = \dfrac{1}{\eta}\left(\dot{E}_{x0}^{+}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} - \dot{E}_{x0}^{-}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}\right)$.
- 给定初值 $\dot{E}_{x0}^{+} = E_{x0}^{+}\angle\varphi_{\mathrm{e}}$，则瞬时值为
    - $\boldsymbol{E}_x^{+}(z,t) = \boldsymbol{a}_x\sqrt{2}E_{x0}^{+}\cos(\omega t - \beta z + \varphi_{\mathrm{e}})$.
    - $\boldsymbol{H}_y^{+}(z,t) = \boldsymbol{a}_y\dfrac{\sqrt{2}E_{x0}^{+}}{\eta}\cos(\omega t - \beta z + \varphi_{\mathrm{e}})$.
    - $\boldsymbol{S}^{+}(z,t) = \boldsymbol{a}_z\dfrac{2{E_{x0}^{+}}^{2}}{\eta}\cos^2(\omega t - \beta z + \varphi_{\mathrm{e}})$.
- 均匀平面波的说明
    - 坡应廷矢量的角频率为电磁场的两倍.
    - 电磁场量与坡应廷矢量的振幅为常数.
    - 电磁场量的相位相等，$\varphi_{\mathrm{p}} = \omega t - \beta z + \varphi_{\mathrm{e}}$.

6.1.4 时谐均匀平面波的概念

- 定义
    - 周期：$T \equiv \dfrac{1}{f} := \dfrac{2\pi}{\omega}$.
    - 传播常数：$\gamma := \sqrt{-\omega^2\mu\varepsilon}$.
- 波
    - 波速：$v := \dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \equiv \dfrac{c}{\sqrt{\mu_{\mathrm{r}}\varepsilon_{\mathrm{r}}}}$.
    - 波数：$k := \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \dfrac{\omega}{v}$.
    - 波长：$\lambda := vT = \dfrac{2\pi}{k}$.
- 相
    - 相位：$\varphi_{\mathrm{p}} := \omega t - \beta z + \varphi_{\mathrm{e}}$.
    - 相数：$\beta := \operatorname{Im}\gamma = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$.
    - 相速：$v_{\mathrm{p}} := \left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right|_{\varphi_{\mathrm{p}}=\text{常数}} = \dfrac{\omega}{\beta} = \dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$.
- 理想介质中
    - $\beta = k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{\omega}{v_{\mathrm{p}}}$.
    - $v = v_{\mathrm{p}} = \dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \dfrac{\omega}{\beta}$.

6.1.5 均匀平面波的传播特性

- 均匀平面波的分量
    - 电磁场沿平面波传播方向无分量，称为横电磁波（TEM 波）
    - 横向分量中，两组相互垂直的电磁场分量分别组成独立分量波组.

- 每组分量波可存在入射波与反射波，其速度均为 $v=\dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$.
- 电场与磁场的关系
  - 平面波的性质
    - $\dot{\boldsymbol{H}}=\dfrac{1}{\eta}\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}\times\dot{\boldsymbol{E}}$.
    - $\dot{\boldsymbol{E}}=\eta\dot{\boldsymbol{H}}\times\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}$.
  - 麦克斯韦方程
    - $\dot{\boldsymbol{H}}=-\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega\mu}\boldsymbol{\nabla}\times\dot{\boldsymbol{E}}$.
    - $\dot{\boldsymbol{E}}=\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon}\boldsymbol{\nabla}\times\dot{\boldsymbol{H}}$.
- 理想媒质（无损耗媒质）
  - 本征波阻抗 $\eta=\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}$ 为实数.
  - 电场与磁场的相位相同.
- 电磁波的能量
  - 电磁场能量密度相等
    - 电场：$w_{\mathrm{e}}^{+}(z,t)=\dfrac{\varepsilon}{2}E_x^{+}(z,t)^2=\dfrac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{2}E_x^{+}H_x^{+}(z,t)$.
    - 磁场：$w_{\mathrm{m}}^{+}(z,t)=\dfrac{\mu}{2}H_x^{+}(z,t)^2=\dfrac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{2}E_x^{+}H_x^{+}(z,t)$.
    - 于是：$w_{\mathrm{e}}^{+}(z,t)=w_{\mathrm{m}}^{+}(z,t),\quad w_{\mathrm{e}}^{-}(z,t)=w_{\mathrm{m}}^{-}(z,t)$.
  - 能量流动密度与均值
    - $\widetilde{\boldsymbol{S}}^{+}=\dot{\boldsymbol{E}}(z)\times\dot{\boldsymbol{H}}^{*}(z)=\dfrac{{E_{x0}^{+}}^{2}}{\eta}\boldsymbol{a}_z=\dfrac{{E_{x0\mathrm{m}}^{+}}^{2}}{2\eta}\boldsymbol{a}_z$.
    - $\boldsymbol{S}_{\mathrm{avg}}^{+}(z)=\mathrm{Re}\,\widetilde{\boldsymbol{S}}^{+}=E_{x0}^{+}H_{x0}^{+}\boldsymbol{a}_z$.
    - $\boldsymbol{S}_{\mathrm{avg}}^{-}(z)=\mathrm{Re}\,\widetilde{\boldsymbol{S}}^{-}=-E_{x0}^{-}H_{x0}^{-}\boldsymbol{a}_z$.

6.2 平面波的极化

6.2.1 平面波极化

- 对于沿 z 轴方向传播的均匀平面波，
  - $E_x(z,t)=E_{x\mathrm{m}}\cos(\omega t-\beta z+\varphi_x)$.
  - $E_y(z,t)=E_{y\mathrm{m}}\cos(\omega t-\beta z+\varphi_y)$.
  - $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{a}_xE_x(z,t)+\boldsymbol{a}_yE_y(z,t)$.
- 波的极化（偏振）
  - 定义：空间中给定电场矢量的末端点随时间变化的轨迹.
  - 分类：线极化、圆极化、椭圆极化.

6.2.2 直线极化波

- 当 $\varphi_x = \varphi_y$ 时，
  - $\dfrac{E_x}{E_y} = \dfrac{E_{x\mathrm{m}}}{E_{y\mathrm{m}}}$.
  - $\varphi := \arctan \dfrac{E_y}{E_x} = \arctan \dfrac{E_{y\mathrm{m}}}{E_{x\mathrm{m}}}$.
- 当 $|\varphi_x - \varphi_y| = \pi$ 时，
  - $\dfrac{E_x}{E_y} = -\dfrac{E_{x\mathrm{m}}}{E_{y\mathrm{m}}}$.
  - $\varphi := \arctan \dfrac{E_y}{E_x} = -\arctan \dfrac{E_{y\mathrm{m}}}{E_{x\mathrm{m}}}$.
- 特殊情况
  - $\varphi = 0$： x 轴取向的线性极化波.
  - $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$： y 轴取向的线性极化波.

6.2.3 圆形极化波

当 $E_{x\mathrm{m}} = E_{y\mathrm{m}} = E_{\mathrm{m}}$ 且 $|\varphi_x - \varphi_y| = \dfrac{\pi}{2}$ 时，$|\boldsymbol{E}| = E_{\mathrm{m}}$.

- 当 $\varphi_x - \varphi_y = \dfrac{\pi}{2}$ 时，
  - $\varphi = \omega t - kz + \varphi_x$.
  - 此时称为右旋圆极化.
- 当 $\varphi_y - \varphi_x = \dfrac{\pi}{2}$ 时，
  - $\varphi = -(\omega t - kz + \varphi_x)$.
  - 此时称为左旋圆极化.

6.2.4 椭圆极化波

消去 t，记 $\theta = \varphi_x - \varphi_y$，得

$$\frac{E_x^2}{E_{x\mathrm{m}}^2} - 2\frac{E_x E_y}{E_{x\mathrm{m}} E_{y\mathrm{m}}} \cos\theta + \frac{E_y^2}{E_{y\mathrm{m}}^2} = \sin^2\theta.$$

```
Cos[a + b]^2 - 2 Cos[a + b] Cos[a + c] Cos[b - c] + Cos[a + c]^2 // Simplify
```

- 直线极化
  - 当 $\theta = 0$ 时，为一三象限的直线极化.
  - 当 $\theta = \pi$ 时，为二四象限的直线极化.
- 圆形极化（$E_{x\mathrm{m}} = E_{y\mathrm{m}} = E_{\mathrm{m}}$）
  - 当 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ 时，为右旋圆极化.
  - 当 $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$ 时，为左旋圆极化.

- 椭圆极化
  - $\tan 2\varphi = \dfrac{2E_{x\mathrm{m}}E_{y\mathrm{m}}\cos\theta}{E_{x\mathrm{m}}^2 - E_{y\mathrm{m}}^2}$.
  - 当 $\theta = \pm\dfrac{\pi}{2}, E_{x\mathrm{m}} \neq E_{y\mathrm{m}}$ 时，为正椭圆极化.
  - 固定 z，增加 t，
    - 当 $\theta > 0$ 时，为右旋椭圆极化.
    - 当 $\theta < 0$ 时，为左旋椭圆极化.
  - 固定 t，增加 z，
    - 当 $\theta > 0$ 时，为左旋椭圆极化.
    - 当 $\theta < 0$ 时，为右旋椭圆极化.

6.2.5 合成与分解

6.3 导电媒质中的均匀平面波

6.3.1 导电媒质中的波动方程

在均匀、线性、各向同性、无局外电源的导电媒质中，

- 复数形式的麦克斯韦方程组
  - 麦克斯韦第一方程
    - $\boldsymbol{\nabla} \times \dot{\boldsymbol{H}} = \dot{\boldsymbol{J}} + \mathrm{j}\omega\dot{\boldsymbol{D}} = \mathrm{j}\omega\varepsilon\left(1 - \mathrm{j}\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)\dot{\boldsymbol{E}} = \mathrm{j}\omega\varepsilon_{\mathrm{c}}\dot{\boldsymbol{E}}$.
    - 复介电常数：$\varepsilon_{\mathrm{c}} = \varepsilon\left(1 - \mathrm{j}\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right) = |\varepsilon_{\mathrm{c}}|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\delta_{\mathrm{c}}}$.
    - 损耗角正切：$\tan\delta_{\mathrm{c}} = \dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}$.
  - 麦克斯韦第二方程：$\boldsymbol{\nabla} \times \dot{\boldsymbol{E}} = -\mathrm{j}\omega\mu\dot{\boldsymbol{H}}$.
  - 麦克斯韦第三方程：$\boldsymbol{\nabla} \cdot \dot{\boldsymbol{H}} = 0$.
  - 麦克斯韦第四方程：$\boldsymbol{\nabla} \cdot \dot{\boldsymbol{E}} = 0$.
- 复数波动方程
  - $\boldsymbol{\nabla}^2\dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) + \omega^2\mu\varepsilon_{\mathrm{c}}\dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) = 0$.
  - $\boldsymbol{\nabla}^2\dot{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r}) + \omega^2\mu\varepsilon_{\mathrm{c}}\dot{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r}) = 0$.
  - $k^2 = \omega^2\mu\varepsilon_{\mathrm{c}} = \omega^2\mu\varepsilon\left(1 - \mathrm{j}\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)$.

6.3.2 时谐均匀平面波瞬时值

- 考虑电磁波沿 z 轴方向传播，
  - $\dfrac{\mathrm{d}^2\dot{E}_x(z)}{\mathrm{d}z^2} = -\omega^2\mu\varepsilon_{\mathrm{c}}\dot{E}_x(z) = \gamma^2\dot{E}_x(z)$.
  - $\dfrac{\mathrm{d}^2\dot{H}_y(z)}{\mathrm{d}z^2} = -\omega^2\mu\varepsilon_{\mathrm{c}}\dot{H}_y(z) = \gamma^2\dot{H}_y(z)$.

- 复数 **传播常数**
  - 传播常数：$\gamma=\sqrt{-k^2}=\alpha+\mathrm{j}\beta$.
  - 衰减常数：$\alpha=\omega\sqrt{\dfrac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1+\dfrac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}-1\right)}$，单位为 $1\ \mathrm{Np}=20\lg\mathrm{e}\ \mathrm{dB}$.
  - 相位常数：$\beta=\omega\sqrt{\dfrac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1+\dfrac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}+1\right)}>\alpha$，单位为 $\mathrm{rad/m}$.
- 波动方程的复数解
  - $\dot{E}_x(z)=\dot{E}_{x0}^{+}\mathrm{e}^{-\gamma z}+\dot{E}_{x0}^{-}\mathrm{e}^{\gamma z}=\dot{E}_{x0}^{+}\mathrm{e}^{-\alpha z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}+\dot{E}_{x0}^{-}\mathrm{e}^{\alpha z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}$.
  - $\dot{H}_y(z)=\dot{H}_{y0}^{+}\mathrm{e}^{-\gamma z}+\dot{H}_{y0}^{-}\mathrm{e}^{\gamma z}=\dfrac{1}{\eta}\left(\dot{E}_{x0}^{+}\mathrm{e}^{-\alpha z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}-\dot{E}_{x0}^{-}\mathrm{e}^{\alpha z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta z}\right)$.
- 复数 **本征波阻抗**
  - $\eta_{\mathrm{c}}=\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon_{\mathrm{c}}}}=\dfrac{\eta}{\sqrt{1-\mathrm{j}\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}}}=|\eta_{\mathrm{c}}|\angle\phi$.
  - $\eta_{\mathrm{c}}=\dfrac{\dot{E}_x^{+}(z)}{\dot{H}_y^{+}(z)}=\dfrac{\dot{E}_x^{-}(z)}{-\dot{H}_y^{-}(z)}$.
- 波动方程的瞬时值
  - $\boldsymbol{E}_x^{+}(z,t)=\sqrt{2}E_{x0}^{+}\mathrm{e}^{-\alpha z}\cos(\omega t-\beta z+\varphi_{\mathrm{e}})\boldsymbol{a}_z$.
  - $\boldsymbol{H}_y^{+}(z,t)=\sqrt{2}\dfrac{E_{x0}^{+}}{|\eta_{\mathrm{c}}|}\mathrm{e}^{-\alpha z}\cos(\omega t-\beta z+\varphi_{\mathrm{e}}-\phi)\boldsymbol{a}_z$.
  - 电场相位超前磁场相位 ϕ.
- 相速

$$v_{\mathrm{p}}=\frac{\omega}{\beta}=\frac{v_{\mathrm{p}\,无损}}{\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{1+\left(\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}+1\right)}}.$$

- 波长

$$\lambda=\frac{2\pi}{\beta}=\frac{\lambda_{无损}}{\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{1+\left(\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}+1\right)}}.$$

- 相速与 ω 有关，不同频率的电磁波相速不同，从而发生色散，因此导电媒质是色散媒质.

6.3.3 导电媒质中平面波特性

- 均匀平面波的分量
  - 仍为横电磁波（TEM 波）.
  - 横向分量有两组独立分量波组.
  - 每组独立分量波存在入射波与反射波.
- 入射波与反射波

- 波数 $k=\beta-\mathrm{j}\alpha$，传播常数 $\gamma=\alpha+\mathrm{j}\beta$ 都是复数.
- 波在传播的过程中按相速度 β 滞后，按 $\mathrm{e}^{-\alpha|z|}$ 衰减.
- 电导率 σ 越大，衰减因子 α 越大，波长 $\lambda=\dfrac{2\pi}{\beta}$ 越短，相速 $v_{\mathrm{p}}=\dfrac{\omega}{\beta}$ 越慢.

- 电场与磁场的关系
  - 平面波的性质
    - $\dot{\boldsymbol{H}}=\dfrac{1}{\eta_{\mathrm{c}}}\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}\times\dot{\boldsymbol{E}}$.
    - $\dot{\boldsymbol{E}}=\eta_{\mathrm{c}}\dot{\boldsymbol{H}}\times\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}$.
  - 麦克斯韦方程
    - $\dot{\boldsymbol{H}}=-\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega\mu}\boldsymbol{\nabla}\times\dot{\boldsymbol{E}}$.
    - $\dot{\boldsymbol{E}}=\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_{\mathrm{c}}}\boldsymbol{\nabla}\times\dot{\boldsymbol{H}}$.
- 导电媒质（有损耗媒质）
  - 本振波阻抗 $\eta_{\mathrm{c}}=\dfrac{\sqrt{\mu/\varepsilon}}{\sqrt{1-\mathrm{j}\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}}}$ 为复数.
  - 电场相位超前磁场相位 ϕ.
- 电磁波的能量
  - 电磁场能量密度不等
    - 电场：$w_{\mathrm{e\,max}}^{+}=\dfrac{\varepsilon}{2}|E_x^{+}(z,t)|^2$.
    - 磁场：$w_{\mathrm{m\,max}}^{+}=\dfrac{\mu}{2}\left|H_y^{+}(z,t)\right|^2=\dfrac{\varepsilon}{2}|E_x^{+}(z,t)|^2\sqrt{1+\left(\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}$.
    - 于是：$w_{\mathrm{e\,max}}^{+}<w_{\mathrm{m\,max}}^{+},\quad w_{\mathrm{e\,max}}^{-}<w_{\mathrm{m\,max}}^{-}$.
  - 复数能流密度与均值
    - $\widetilde{\boldsymbol{S}}^{+}(z)=\dot{\boldsymbol{E}}(z)\times\dot{\boldsymbol{H}}^{*}(z)=\dfrac{E_{x0}^{+\,2}}{|\eta_{\mathrm{c}}|}\mathrm{e}^{-2\alpha z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}\boldsymbol{a}_z$.
    - $\boldsymbol{S}_{\mathrm{avg}}^{+}(z)=\mathrm{Re}\,\widetilde{\boldsymbol{S}}^{+}(z)=\dfrac{E_{x0}^{+\,2}\cos\phi}{|\eta_{\mathrm{c}}|}\mathrm{e}^{-2\alpha z}\boldsymbol{a}_z$.
    - $\boldsymbol{S}_{\mathrm{avg}}^{-}(z)=\mathrm{Re}\,\widetilde{\boldsymbol{S}}^{-}(z)=-\dfrac{E_{x0}^{-\,2}\cos\phi}{|\eta_{\mathrm{c}}|}\mathrm{e}^{-2\alpha z}\boldsymbol{a}_z$.

6.3.4 低损耗媒质的近似计算

- **损耗角正切** $\tan\delta_{\mathrm{c}}=\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}=\dfrac{J_{\mathrm{cm}}}{J_{\mathrm{dm}}}$.
  - 当 $\tan\delta_{\mathrm{c}}\to 0$ 时，传导电流为零，是理想介质.
  - 当 $\tan\delta_{\mathrm{c}}\ll 1$ 时，传导电流很小，是良介质（低损耗媒质）
  - 当 $\tan\delta_{\mathrm{c}}\gg 1$ 时，传导电流很大，是良导体（良导电媒质）
  - 当 $\tan\delta_{\mathrm{c}}\to\infty$ 时，传导电流无穷，是理想导体.
- **低损耗媒质**（$\sigma\ll\omega\varepsilon$）

- 近似计算（1）
  - $\alpha \approx \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \approx \frac{\sigma\,\eta_\mathrm{c}}{2}$.
  - $\beta \approx \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left(1+\frac{\sigma^2}{8\omega^2\varepsilon^2}\right)$.
  - $\eta_\mathrm{c} \approx \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(1+\mathrm{j}\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon}\right)$.
- 近似计算（2）
  - $\alpha \approx \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \approx \frac{\sigma\,\eta_\mathrm{c}}{2}$.
  - $\beta \approx \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$.
  - $\eta_\mathrm{c} \approx \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$.
- 例子：云母、聚乙烯、聚苯乙烯等.

6.3.5 良导电媒质的表面阻抗

- **良导电媒质的近似计算**（$\sigma \gg \omega\varepsilon$）
  - 近似计算
    - $\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\pi f\mu\sigma}$.
    - $\eta_\mathrm{c} \approx \sqrt{\mathrm{j}\frac{\mu\omega}{\sigma}} = (1+\mathrm{j})\sqrt{\frac{\pi f\mu}{\sigma}}$.
  - $\eta_\mathrm{c} \equiv R_\mathrm{s} + \mathrm{j}X_\mathrm{s}$.
    - 表面电阻：$R_\mathrm{s} \approx \sqrt{\frac{\pi f\mu}{\sigma}}$.
    - 表面电抗：$X_\mathrm{s} \approx \sqrt{\frac{\pi f\mu}{\sigma}}$.
  - 性质说明
    - 电场超前磁场 45°.
    - 振幅按 $\mathrm{e}^{-\alpha z}$ 衰减.
    - σ, μ, f 越大，衰减越快.
  - 趋肤效应
    - 高频电磁波进入良导体后，在数微米内基本衰减完毕.
    - 透入深度：衰减为表面值的 e^{-1} 倍时经过的距离.
    - 透入深度：$\delta = \frac{1}{\alpha} \approx \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{\pi f\mu\sigma}}$.
    - 在经过距离 4.6δ 时，电磁波振幅衰减为原来的 1%.
  - 静电屏蔽
    - 为实现静电屏蔽，一般取良导体的厚度为一个波长.
    - 即 $d = \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{\pi f\mu\sigma}}$.

- 经过一个波长后衰减 $54.5751\mathrm{dB}$.

- **良导电媒质的表面阻抗**
  - 导体内部（沿 z 方向传播）
    - 场强的振幅：$\dot{E}_{x\mathrm{m}}(z) = \dot{E}_{x\mathrm{m}} \mathrm{e}^{-\alpha z} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$.
    - 电流体密度：$\dot{J}_{x\mathrm{m}}(z) = \sigma \dot{E}_{x\mathrm{m}} \mathrm{e}^{-\alpha z} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$.
    - 总传导电流：$\dot{I}_{x\mathrm{m}} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dot{J}_{x\mathrm{m}}(z)\,\mathrm{d}z = \dfrac{\sigma \dot{E}_{x\mathrm{m}}}{\alpha + \mathrm{j}\beta}$.
  - 表面阻抗（x 方向单位长度，y 方向单位长度）
    - 表面阻抗：$Z_\mathrm{c} = \dfrac{\alpha}{\sigma} + \mathrm{j}\dfrac{\beta}{\sigma} = \eta_\mathrm{c}$.
    - 表面电阻：$R_\mathrm{s} = \dfrac{\alpha}{\sigma} = \dfrac{1}{\sigma\delta} \approx \sqrt{\dfrac{\pi f \mu}{\sigma}}$.
    - 表面电抗：$X_\mathrm{s} = \dfrac{\beta}{\sigma} \approx \dfrac{1}{\sigma\delta} \approx \sqrt{\dfrac{\pi f \mu}{\sigma}}$.
  - 电磁平均功率
    - 等效表面电流密度：$\dot{J}_{\mathrm{sm}}(z) = \dot{I}_{x\mathrm{m}} = \dfrac{\dot{E}_{x\mathrm{m}}(0^+)}{\eta_\mathrm{c}} = \dot{H}_{y\mathrm{m}}(0^+)$.
    - 平均功率：$p_0 = \dfrac{1}{2} \dot{I}_{x\mathrm{m}} \cdot \dot{I}_{x\mathrm{m}}^* R_\mathrm{s} = \dfrac{1}{2} J_{\mathrm{sm}}^2 R_\mathrm{s}$.
    - 平均功率：$\boldsymbol{S}_{\mathrm{avg}}(z)\big|_{z=0} = \mathrm{Re}\left[\dfrac{1}{2} \dot{\boldsymbol{E}}_{x\mathrm{m}}(z) \times \dot{H}_{y\mathrm{m}}^*(z)\right]\bigg|_{z=0} = \dfrac{1}{2} H_{y\mathrm{m}}^2 R_\mathrm{s} \boldsymbol{a}_z$.
    - 上述磁场可取导体表面内侧或外侧的总磁场.

6.4 均匀平面波对平面边界的垂直入射

6.4.1 垂直入射的反射波与折射波

- 记号约定：$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}', \boldsymbol{E}''$ 分别表示入射波、反射波和折射波.
- 电场与磁场
  - 媒质 1 中（入射波 + 反射波）
    - $ \dot{\bm E}_1(z) = \pqty{\dot{E}_{10} \e^{-\gamma_1 z} + \dot{E}'_{10} \e^{\gamma_1 z}} \bm a_x $.
    - $ \dot{\bm H}_1(z) = \dfrac{1}{\eta_1} \pqty{\dot{E}_{10} \e^{-\gamma_1 z} - \dot{E}'_{10} \e^{\gamma_1 z}} \bm a_y $.
  - 媒质 2 中（折射波）
    - $\dot{\boldsymbol{E}}_2(z) = \dot{E}''_{20} \mathrm{e}^{-\gamma_2 z} \boldsymbol{a}_x$.
    - $\dot{\boldsymbol{H}}_2(z) = \dfrac{1}{\eta_2} \dot{E}''_{20} \mathrm{e}^{-\gamma_2 z} \boldsymbol{a}_y$.
- 边界条件
  - 联立 $E_{1\mathrm{t}} = E_{2\mathrm{t}}, H_{1\mathrm{t}} = H_{2\mathrm{t}}$.
  - 反射系数：$R := \dfrac{\dot{E}'_{10}}{\dot{E}_{10}} = \dfrac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$.

- 折射系数：$T := \frac{\dot{E}''_{10}}{\dot{E}_{10}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1} = R+1.$

6.4.2 理想介质与理想导体分界面

- 分界媒质
  - 媒质性质
    - 理想介质：$\sigma_1 = 0, \gamma_1 = \mathrm{j}\beta_1 = \mathrm{j}\omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}, \eta_1 = \sqrt{\mu_1/\varepsilon_1}.$
    - 理想导体：$\sigma_2 = \infty, \dot{E}''_{20} = \dot{H}''_{20} = 0$，不存在电磁波.
  - 边界条件
    - $R = -1, T = 0$，即全反射现象.
    - 自由面电流：$\dot{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{s}} = \boldsymbol{n} \times \dot{\boldsymbol{H}}_1 = \frac{2\dot{E}_{10}}{\eta_1}\boldsymbol{a}_x.$
- 合成波
  - 频域
    - $\dot{\boldsymbol{E}}_1(z) = \dot{E}_{10}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z}\right)\boldsymbol{a}_x = -2\mathrm{j}\dot{E}_{10}\sin(\beta_1 z)\boldsymbol{a}_x.$
    - $\dot{\boldsymbol{H}}_1(z) = \frac{\dot{E}_{10}}{\eta_1}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z}\right)\boldsymbol{a}_y = 2\frac{\dot{E}_{10}}{\eta_1}\cos(\beta_1 z)\boldsymbol{a}_y.$
  - 时域（初值 $\dot{E}_{10} = \sqrt{2}E_{10}\angle 0^\circ$）
    - $\boldsymbol{E}_1(z,t) = 2\sqrt{2}E_{10}\sin(\beta_1 z)\sin(\omega t).$
    - $\boldsymbol{H}_1(z,t) = \frac{2\sqrt{2}E_{10}}{\eta_1}\cos(\beta_1 z)\cos(\omega t).$
- 说明
  - 合成波为纯驻波
    - 波节点：纯驻波的零点.
    - 波腹点：纯驻波的最值点.
  - 相位与振幅比较
    - 行波：相位随时间变化，振幅不变.
    - 驻波：振幅随时间变化，相位不变.
  - 能量的传输
    - 行波：可以传输能量.
    - 驻波：不能传输能量，只有电磁振荡.

6.4.3 理想介质与理想介质分界面

- 媒质 2
  - $\dot{\boldsymbol{E}}_2(z) = TE_{10}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2 z}\boldsymbol{a}_x.$
  - $\dot{\boldsymbol{H}}_2(z) = \frac{TE_{10}}{\eta_{\mathrm{c}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_2 z}\boldsymbol{a}_y.$
- 媒质 1

- 电场
  - $\dot{\boldsymbol{E}}_1(z) = \left(E_{10}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z} + RE_{10}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z}\right)\boldsymbol{a}_x$，即入射波 + 反射波.
  - $\dot{\boldsymbol{E}}_1(z) = E_{10}\left(T\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z} + \mathrm{j}2R\sin\beta_1 z\right)\boldsymbol{a}_x$，即行波 + 驻波.
  - $\dot{\boldsymbol{E}}_1(z) = E_{10}\left(1 + R\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\beta_1 z}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z}\boldsymbol{a}_x$，即 $+\boldsymbol{a}_z$ 方向的平面波.
- 磁场
  - $\dot{\boldsymbol{H}}_1(z) = \dfrac{E_{10}}{\eta_1}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z} - R\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_1 z}\right)\boldsymbol{a}_y$，即入射波 + 反射波.
  - $\dot{\boldsymbol{H}}_1(z) = \dfrac{E_{10}}{\eta_1}\left(T\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z} - 2R\cos\beta_1 z\right)\boldsymbol{a}_y$，即行波 + 驻波.
  - $\dot{\boldsymbol{H}}_1(z) = \dfrac{E_{10}}{\eta_1}\left(1 - R\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\beta_1 z}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_1 z}\boldsymbol{a}_y$，即 $+\boldsymbol{a}_z$ 方向的平面波.
- 电磁场的振幅
  - $\left|\dot{\boldsymbol{E}}_{1\mathrm{m}}(z)\right| = \sqrt{2}E_{10}\sqrt{1 + R^2 + 2R\cos(2\beta_1 z)}$.
  - $\left|\dot{\boldsymbol{H}}_{1\mathrm{m}}(z)\right| = \dfrac{\sqrt{2}E_{10}}{\eta_1}\sqrt{1 + R^2 - 2R\cos(2\beta_1 z)}$.
- 波幅点与波节点的分布

- 驻波系数（驻波比）
  - 驻波系数：$\rho := \dfrac{|\boldsymbol{B}|_{\max}}{|\boldsymbol{B}|_{\min}} = \dfrac{|\boldsymbol{H}|_{\max}}{|\boldsymbol{H}|_{\min}} = \dfrac{1 + |R|}{1 - |R|}$.
    - 行波 $\rho = 1$，纯驻波 $\rho = \infty$.
    - $\rho \geq 1$ 且越小越好.
  - 反射系数：$|R| = \dfrac{\rho - 1}{\rho + 1}$.
- 坡应廷矢量
  - $\boldsymbol{S}_{\mathrm{avg}} = \mathrm{Re}\left[\dot{\boldsymbol{E}}(z) \times \dot{\boldsymbol{H}}^*(z)\right] = \dfrac{E_{10}^2}{\eta_1}\boldsymbol{a}_z$.
  - $\boldsymbol{S}'_{\mathrm{avg}} = \mathrm{Re}\left[\dot{\boldsymbol{E}}'(z) \times \dot{\boldsymbol{H}}'^*(z)\right] = -\dfrac{R^2E_{10}^2}{\eta_1}\boldsymbol{a}_z$.
  - $\boldsymbol{S}''_{\mathrm{avg}} = \mathrm{Re}\left[\dot{\boldsymbol{E}}''(z) \times \dot{\boldsymbol{H}}''^*(z)\right] = \dfrac{T^2E_{10}^2}{\eta_2}\boldsymbol{a}_z$.
  - $|\boldsymbol{S}_{\mathrm{avg}}| = \left|\boldsymbol{S}'_{\mathrm{avg}}\right| + \left|\boldsymbol{S}''_{\mathrm{avg}}\right|$.