特殊函数

注 这份笔记是对 数学分析笔记 (3) 中 Euler 积分与 概统笔记附录 中常用积分的整理与补充.

基础部分

- Beta 函数: $\mathrm{B}(p,q)=\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x\quad(p,q>0).$
  - 连续性.
  - 对称性: $B(p,q)=B(q,p)$.
  - 递推公式
    - $\mathrm{B}(p+1,q)=\dfrac{p}{p+q}\mathrm{B}(p,q).$
    - $\mathrm{B}(p,q)=\dfrac{(p-1)(q-1)}{(p+q-1)(p+q-2)}\mathrm{B}(p-1,q-1).$
  - 其它形式
    - $\mathrm{B}(p,q)=2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\,\mathrm{d}\theta.$
    - $\mathrm{B}(p,q)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,\mathrm{d}t.$
    - $\mathrm{B}(p,q)=\displaystyle\int_0^1\frac{t^{q-1}+t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}\,\mathrm{d}t.$
  - 特殊值
    - $\mathrm{B}(p,1)=\dfrac{1}{p}.$
    - $\mathrm{B}(s,s)=\displaystyle\int_0^1\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{s-1}\mathrm{d}x=\frac{B\left(\frac{1}{2},s\right)}{2^{2s-1}}.$
- Gamma 函数: $\Gamma(s)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{s-1}\,\mathrm{d}x\quad(s>0).$
  - 连续任意阶可导: $\Gamma^{(n)}(s)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{s-1}\ln^n x\,\mathrm{d}x.$
  - 递推公式: $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s).$

    注: Bohr-Mollerup 定理指出, 满足上述函数方程的所有函数中, 只有 Gamma 函数是对数凸的, 即 $\ln\Gamma(z)$ 是凸函数.
  - 其它形式: $\Gamma(s)=\alpha^s\displaystyle\int_0^{+\infty}t^{s-1}\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t.$
  - 特殊值
    - $\Gamma(n+1)=\Pi(n)=n!.$
    - $\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}.$
- Euler 积分的换元

$$\int_0^1 x^a(1-x^b)^c\,\mathrm{d}x=\frac{1}{b}\mathrm{B}\left(\frac{a+1}{b},c+1\right)\qquad(a>-1,\ b>0,\ c>-1)$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^a\,\mathrm{d}x}{(1+x^b)^c}=\frac{1}{|b|}\mathrm{B}\left(c-\frac{a+1}{b},\frac{a+1}{b}\right)\qquad\begin{pmatrix}a>-1,\ b>0,\ c>\dfrac{a+1}{b} & 或\\ a<-1,\ b<0,\ c>\dfrac{a+1}{b} & \end{pmatrix}$$

$$\int_0^{+\infty}x^n\mathrm{e}^{-ax^p}\,\mathrm{d}x=\frac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{p}\right)}{|p|a^{\frac{n+1}{p}}}\qquad\begin{pmatrix}a>0,\ p>0,\ n>-1 & 或\\ a>0,\ p<0,\ n<-1 & \end{pmatrix}$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln^n t}{t^{1+a}}\,\mathrm{d}t=\frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}}\qquad(a>0,\ n>-1)$$

变换的形式

Mellin 变换 $\{\mathcal{M}f\}(s)=\varphi(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}f(x)\,\mathrm{d}x.$

Mellin 逆变换 $[\mathcal{M}(\varphi)]=f(x)=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty}x^{-s}\varphi(s)\,\mathrm{d}s.$

- Euler 积分
  - $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{s-1}\,\mathrm{d}x=\mathcal{M}(\mathrm{e}^{-x}).$
  - $\mathrm{B}(p,q)=\int_0^{+\infty}\dfrac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,\mathrm{d}t=\mathcal{M}[(1+t)^{-(p+q)}].$
- Cahen-Mellin 积分
  - $\mathrm{e}^{-x}=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty}\Gamma(s)x^{-s}\,\mathrm{d}s.$
- 双边 Laplace 变换 $\{\mathcal{B}f\}(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t.$
  - $\{\mathcal{B}f\}(s)=\{\mathcal{M}f(-\ln x)\}(s).$
  - $\{\mathcal{M}f\}(s)=\{\mathcal{B}f(\mathrm{e}^{-x})\}(s).$
- 傅里叶变换 $\mathcal{F}[f](\omega)=\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x.$
  - $\{\mathcal{F}f\}(-s)=\{\mathcal{B}f\}(-\mathrm{i}s)=\{\mathcal{M}f(-\ln x)\}(-\mathrm{i}s).$
  - $\{\mathcal{M}f\}(s)=\{\mathcal{B}f(\mathrm{e}^{-x})\}(s)=\{\mathcal{F}f(\mathrm{e}^{-x})\}(-\mathrm{i}s).$
- Laplace 变换 $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)=\int_{0-}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t.$

  Laplace 逆变换 $f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\lim\limits_{T\to\infty}\int_{\gamma-\mathrm{i}T}^{\gamma+\mathrm{i}T}\mathrm{e}^{st}F(s)\,\mathrm{d}s.$
  - 时间域的函数 $\to$ 复频域的复变函数.
  - $F(s)$ 称为 $f(t)$ 的象函数, $f(t)$ 称为 $F(s)$ 的原函数.
  - e^{-st} 称为收敛因子.
  - $s=\sigma+\omega\mathrm{i}$ 为复频率.

  更多的可参考
  - [公式墙(1)——Laplace Transform(拉普拉斯变换) - 知乎 (zhihu.com)]()
  - [拉普拉斯变换的那些事儿——定义、性质与Airy常微分方程 - 知乎 (zhihu.com)]()

相关公式

Dirichlet 公式 $\mathrm{B}(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

点火公式推广 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\,\mathrm{d}x=\frac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}\cdot s,\quad (m,n\in\mathbb{N})$, 其中 m,n 都为偶数时, $s=\dfrac{\pi}{2}$, 否则 $s=1$.

Wallis 公式 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!^2}{(2n-1)!!(2n+1)!!}=\frac{\pi}{2}$.

- 推论 1: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}=\sqrt{\pi}$.
- 推论 2: $\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}=\dfrac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!}\sim\sqrt{\pi n}$.

Stirling 公式 $\Gamma(s+1)=\sqrt{2\pi s}\left(\dfrac{s}{\mathrm{e}}\right)^s\mathrm{e}^{\frac{\theta}{12s}},\quad s>0,\ 0<\theta<1$. (等价无穷大的证明见后文)

Euler-Gauss 乘积公式

$$\Gamma(s)=\frac{\Gamma(s+n+1)}{s(s+1)\cdots(s+n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^s n!}{s(s+1)\cdots(s+n)}.$$

- 注: 不能由左式直接得到右式, 应证明:
  1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{s-1}\,\mathrm{d}t-\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{s-1}\,\mathrm{d}t\right|=0$.
  2. $\displaystyle\Gamma(s)=\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{s-1}\,\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}n^s\mathrm{B}(s,n+1)$.
- 可借助上述将 $\Gamma(s)$ 的定义拓展至复平面上 (除原点和负整数点以外), 且倒数 $\Gamma(s)^{-1}$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析.
- 由 Stirling 公式得:

$$\frac{(s+n)!}{n!}\equiv\frac{\Pi(s+n)}{\Pi(n)}\sim n^s.$$

Weierstrass 公式 $\displaystyle\frac{1}{\Gamma(s)}=\mathrm{e}^{\gamma s}s\prod_{n\geq 1}\left(1+\frac{s}{n}\right)\mathrm{e}^{-\frac{s}{n}}$.

- 推论 $\displaystyle\Gamma(s)=\frac{1}{s}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^s}{1+\frac{s}{n}}$.

余元公式 $\mathrm{B}(s,1-s)=\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\dfrac{\pi}{\sin\pi s},\quad 0<s<1$.

- 证法一: 由 Euler-Gauss 乘积公式和 $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s^2}{n^2}\right)=\frac{\sin\pi s}{\pi s}$ 即得.
- 证法二: 由 $\displaystyle\int_0^1\frac{x^{s-1}+x^{-s}}{1+x}\,\mathrm{d}x$ 幂级数展开与 $\cos x$ 的 Fourier 展开式即得.

Legendre 倍量公式 $\Gamma(s)\Gamma\left(s+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}}\Gamma(2s),\quad s>0$.

- 证明: 由 $\mathrm{B}(s,s)=2^{1-2s}\mathrm{B}\left(s,\dfrac{1}{2}\right)$ 展开即得.

引理 1 (三角恒等式) $\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$.

证明　由 $\sum_{k=0}^{n-1}z^k=\frac{z^n-1}{z-1}=\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}\right)$ 令 $z=1$ 得:

$$\begin{aligned}n&=\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}-\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\\&=\prod_{k=1}^{n-1}2\sin\frac{k\pi}{n}(-\mathrm{i})\left(\cos\frac{k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{n}\right)\\&=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\end{aligned}$$

- 注: $\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}+\theta\right)\neq\frac{n}{2^{n-1}}\ (\theta\neq k_0\pi,\ k_0\in\mathbb{Z})$.

引理 2 $\prod_{k=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)=\sqrt{\prod_{k=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{k}{n}\right)}=\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}$.

证明　由余元公式与引理 1 即得.

引理 3 $\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma\left(m+1+\frac{k}{n}\right)=m!^n\frac{(mn+n-1)!}{n^{mn+n-1}}\cdot\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}$.

证明　由递推公式与引理 2 即得.

Gauss-Legendre 倍元公式推广 $\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma\left(x+\frac{k}{n}\right)=\frac{\Gamma(nx)}{n^{nx}}\sqrt{n}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}$.

证明　由高斯定理与引理 3 即得.

引理

$$\begin{aligned}\int_0^\pi\ln\sin x\,\mathrm{d}x&=\int_0^\pi\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x\\&=\pi\ln 2+2\int_0^\pi\ln\sin x\,\mathrm{d}x\\&=-\pi\ln 2\end{aligned}$$

Raabe 积分　$R(a)=\int_a^{a+1}\ln\Gamma(x)\,\mathrm{d}x=a(\ln a-1)+\frac{1}{2}\ln 2\pi$.

证明

1. $R'(a)=\ln\Gamma(a+1)-\ln\Gamma(a)=\ln a$.
2. $R(0)=\frac{1}{2}\int_0^1\ln\Gamma(x)\Gamma(1-x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln 2\pi$.

Dobinski 公式

1. $1-\frac{1}{n!}\int_0^n t^n\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}$.
2. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\int_0^n t^n\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$.

证明

1. 分布积分数归易得. (或利用二项式定理与 Gamma 函数定义)
2. 设随机变量 X_i 独立同分布 $P(1)$, 则 $X=X_1+X_2+\cdots+X_n\sim P(n)$, 于是由中心极限定理得

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}=\lim_{n\to\infty}P\left\{X\le n\right\}=\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{X-n}{\sqrt{n}}\le 0\right\}=\frac{1}{2}$$

引理 (Laplace 方法) 设 $f\in\mathbb{C}^2[a,b]$, $x_0\in(a,b)$ 是 f 唯一的极大值点, $f''(x_0)=-\lambda<0$, 则

$$\int_a^b\mathrm{e}^{Mf(x)}\,\mathrm{d}x\sim\mathrm{e}^{Mf(x_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{M\lambda}}\quad(M\to+\infty)$$

- 推论: $\int_a^b\mathrm{e}^{Mf(x)}\,\mathrm{d}x\approx\int_a^b\mathrm{e}^{Mf(x_0)-M\lambda\frac{(x-x_0)^2}{2}}\,\mathrm{d}x$.
- 若 $[a,b]$ 为无穷区间, 则还需两个充分条件:
  1. $\exists\eta>0,\ \forall(|x-x_0|\ge\delta)\wedge(x\in[a,b]):f(x)\le f(x_0)-\eta$.
  2. $\exists M_0>0:\int_a^n\mathrm{e}^{M_0f(x)}\,\mathrm{d}x<+\infty$.

Stirling 公式 $n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n,\quad n\to+\infty$. (由 Laplace 方法即得)

Digamma 函数

$$\psi(s)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\ln\Gamma(s)=\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}\ (s>0)$$

- 导数回顾: $\Gamma^{(n)}(s)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{s-1}\ln^n x\,\mathrm{d}x\ \ (s>0)$.
- Polygamma 函数: $\psi^{(n)}$.
- 函数方程 $\psi(s+1)=\psi(s)+\frac{1}{s}$.
- 余元公式 $\psi(1-s)-\psi(s)=\pi\cot\pi x$.
- 级数表示
  - $\psi(s+1)=-\gamma+\sum_{n\ge1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+s}\right)$. (由 Weierstrass 公式即得)
  - $\psi(n+1)=-\gamma+H_n$. (由上式或函数方程即得)
- 特殊值
  - $\psi(1)=-\gamma$.
  - $\psi\left(\frac{1}{2}\right)=-\gamma-2\ln2$.
- 高阶导数 $\psi^{(n)}(s)=\sum_{k\ge0}\frac{n!(-1)^{n+1}}{(k+s)^{n+!}}$. (由级数表示求导即得)

- Taylor 展开 $\psi(s+1)=-\gamma+\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\zeta(n+1)s^n$. (由高阶导数即得)
- 极限表示 $\psi(a)=\lim_{b\to\infty}[\Gamma(b)-\mathrm{B}(a,b)]$. (由关系式即得)
- 积分表示

$$
\begin{aligned}
\psi(s)&=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}-(1+x)^{-s}}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}-\frac{\mathrm{e}^{(1-s)x}}{\mathrm{e}^x-1}\right)\mathrm{d}x.\\
\psi(1)&=\int_0^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}\right)\mathrm{d}x=-\gamma.
\end{aligned}
$$

Riemann zeta 函数

Riemann zeta 函数 $\zeta(s)=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$.

Dirichlet eta 函数 $\eta(s)=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^s}=(1-2^{1-s})\zeta(s)$.

Dirichlet beta 函数 $\beta(s)=\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}$.

积分表达式 对 $s>0$ 有

$$
\begin{aligned}
\zeta(s)\Gamma(s)&=\int_0^{+\infty}\frac{x^{s-1}}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x\\
\eta(s)\Gamma(s)&=\int_0^{+\infty}\frac{x^{s-1}}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1\int_0^1\frac{[-\ln(xy)]^{s-2}}{1+xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
\beta(s)\Gamma(s)&=\int_0^1\int_0^1\frac{[-\ln(xy)]^{s-2}}{1+x^2y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

函数方程 (未)

$$
\begin{aligned}
\zeta(1-s)&=\frac{2}{(2\pi)^s}\cos\frac{\pi s}{2}\Gamma(s)\zeta(s),\\
\beta(1-s)&=\left(\frac{2}{n}\right)^s\sin\frac{\pi s}{2}\Gamma(s)\beta(s).
\end{aligned}
$$

......

[分数阶微积分 (zmx0142857.github.io)](zmx0142857.github.io)