电路原理

第 1 章 电路基本元件和电路基本定律

1.1 电路和电路模型

三种理想电路元件: 电阻, 电容, 电感.

集总参数电路模型.

1.2 电路变量

关联参考方向: 电流与电压的参考方向 (极性) 相同. 相应的有非关联参考方向.

相对于某点的 **电位**. A 点到 B 点的电压: $U_{AB} = U_{AO} - U_{BO}$.

关联参考方向: 若 $p = ui > 0$, 则电场力做功, 元件吸收电能.

1.3 电路元件

- 有源元件
- 无源元件: 电阻, 电容, 电感.

1.3.1 电阻

伏安特性.

线性电阻, 非线性电阻, 时不变电阻, 时变电阻.

电导: $G = R^{-1}$, 单位为西门子 (S).

线性电阻: $i = Gu,\ p = ui = i^2 R = Gu^2$. (关联参考方向)

线性电阻是双向性元件.

1.3.2 电容

库伏特性.

线性电容, 非线性电容, 时不变电容, 时变电容.

线性电容: $i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ (关联参考方向), 伏安关系式微分关系, 故电容元件又称为动态元件.

$p = Cu\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t},\ W_C(t) = \dfrac{1}{2}Cu^2(t).$

1.3.3 电感

韦安特性

线性电感, 非线性电感, 时不变电感, 时变电感.

$L = \dfrac{\psi_L}{i}$, 其中 ψ_L 为磁链.

磁通和磁链的单位是韦伯 (Wb), 电感的单位是亨利 (H).

线性电感: $u = \dfrac{\psi_L}{t} = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ (关联参考方向).

$p = Li\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t},\ W_L(t) = \dfrac{1}{2}Li^2(t).$

	电阻 R	**电感 L**	**电容 C**

电容 C	**电感 L**
$q = Cu$	$\psi_L = Li$
$i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$	$u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$
$p = Cu\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$	$p = Li\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

1.3.4 电压源

独立电压源, 独立电流源

独立源符号内同压异源.

1.3.5 电流源

- 电源既能发出功率, 也能吸收功率.

1.3.6 受控电源

受控电源 (非独立电源): 受控电压源, 受控电流源 (如晶体管集电极电流).

- 电压控制的电压源 (VCVS), $u_2 = \mu u_1$.
- 电压控制的电流源 (VCCS), $i_2 = g u_1$.
- 电流控制的电压源 (CCVS), $u_2 = r i_1$.
- 电流控制的电流源 (CCCS), $i_2 = \beta i_1$.

其中 μ, g, r, β 称为控制系数. u_1 称为控制量, u_2 称为控制量.

1.4 基尔霍夫定律

概念

- 支路: 流过相同电流的一段电路.
- 节点: 三条或三条以上支路的连接点乘坐节点.
- 回路: 任一闭路径称为回路.
- 网孔: 内部不含支路的回路称为网孔.

两类约束

- **自身约束**: 元件本身特性对电压与电流形成的约束
- **级联约束** (拓扑约束, 互连约束): 基尔霍夫定律

1.4.1 基尔霍夫电流定律 (KCL)

应用于节点或闭合面.

1. 节点电流代数和为零.
2. 流入等于流出.
3. 广义节点.

1.4.2 基尔霍夫电压定律 (KVL)

回路或某一段电路.

1. 回路电压代数和为零.
2. 两点间电压在不同路径下相同.
3. 无源降 = 有源升.

第 2 章 直流电路分析方法

2.1 电阻的连接及其等效变换

2.1.1 电阻的串并联及其等效变换

1 串联电路的等效电路

2 并联电路的等效电路

惠斯通电桥: $\dfrac{R_1}{R_2}=\dfrac{R_3}{R_4}$.

2.1.2 星形连接和三角联结

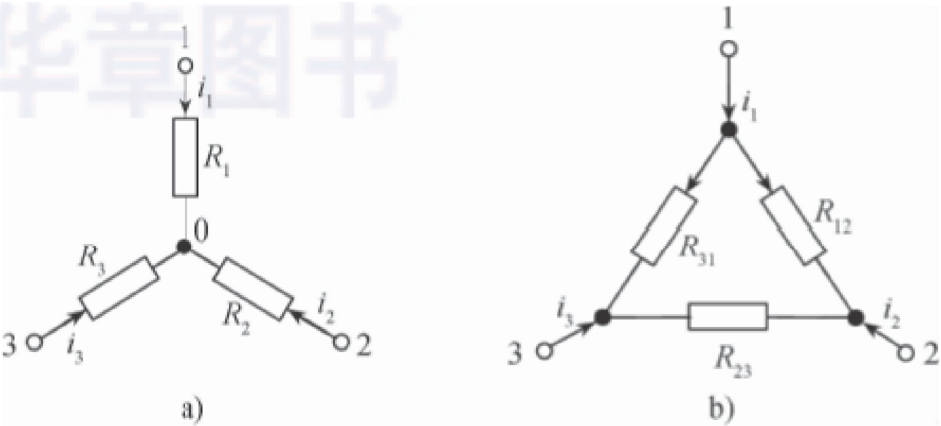


图 2-13 星形和三角形联结

1 角星变换

三角形联结变成星形联结

$$\begin{cases} R_1=\dfrac{R_{12}R_{13}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}, & \dfrac{1}{R_1}=\dfrac{1}{R_{12}}+\dfrac{1}{R_{13}}+\dfrac{R_{23}}{R_{12}R_{13}} \\ R_2=\dfrac{R_{21}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}, & \dfrac{1}{R_2}=\dfrac{1}{R_{21}}+\dfrac{1}{R_{23}}+\dfrac{R_{13}}{R_{21}R_{23}} \\ R_3=\dfrac{R_{31}R_{32}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}, & \dfrac{1}{R_3}=\dfrac{1}{R_{31}}+\dfrac{1}{R_{32}}+\dfrac{R_{12}}{R_{31}R_{32}} \end{cases}$$

2 星角变换

星形联结变成三角形联结

$$\begin{cases} R_{23}=\dfrac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_1}=R_2+R_3+\dfrac{R_2R_3}{R_1} \\ R_{31}=\dfrac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_2}=R_1+R_3+\dfrac{R_1R_3}{R_2} \\ R_{12}=\dfrac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_3}=R_1+R_2+\dfrac{R_1R_2}{R_3} \end{cases}$$

---

3 含有受控源的二端网络

- 外加电压源法.
- 外加电流源法.

2.2 电源的连接及其等效变换

2.2.1 电压源与电流源的串并联

电压源串联, 电流源并联.

- 只有电压相等的电压源才能并联.
- 只有电流相等的电流源才能串联.

2.2.2 电压源与电流源的等效变换

1 实际电源

1. 实际电压源 $U = U_\mathrm{s} - R_\mathrm{s} I$.
2. 实际电流源 $I = I_\mathrm{s} - \dfrac{U}{R} = I_\mathrm{s} - GU$.

2 等效变换

1. 流 → 压: $R_\mathrm{s} = R$, $U_\mathrm{s} = RI_\mathrm{s}$.
2. 压 → 流: $R = R_\mathrm{s}$, $I_\mathrm{s} = \dfrac{U_\mathrm{s}}{R_\mathrm{s}}$.

对外电路无影响的元件

- 与电流源串联的元件
- 与电压源并联的元件

2.3 支路电流法

1 无源电路

设节点数为 n, 支路数为 m, 则对于平面网络 (无交叉支路)

1. 独立节点数 = 节点方程数 = $n - 1$.
2. 网孔是独立回路, 且独立回路数 = 网孔数 = $m - (n - 1)$.

2 有恒流源

- 法一: 选取独立回路时, 不经过恒流源. (减少变量)
- 法二: 设恒流源两端的电压为 U_x.

3 含受控源

- 法一: 把受控源视为独立电源列写方程, 并补写控制量的方程.

2.4 回路电流法

省去 KCL 的 $(n - 1)$ 个方程.

1 无源电路

1. 选定 l 个独立回路, 确定回路电流的方向.
2. 列出回路电流方程 (考虑自电阻与互电阻).
3. 求解回路电流, 从而得出支路电流.

2 有恒流源

- 法一: 选取独立回路时, 令电流源只通过一个回路电流.
- 法二: 随意选取回路, 再列出回路电流与电流源电流的方程.

3 含受控源

- 法一: 受控源视为独立电源列写方程, 最后补写方程.

2.5 节点电压法

省去 KVL 的 $(b-n+1)$ 个方程.

1 无源电路

列出 KCL, 并将各支路电流用节点电压表示.

节点的自电导总为正, 互电导总为负.

1. 选定参考节点 (电位为零), 其余节点作为独立节点.
2. 对独立节点列节点电压方程, 并求解.
3. 求出其它待求量.

$$\begin{cases} G_{11}u_{n1}+G_{12}u_{n2}+\cdots+G_{1(n-1)}u_{n(n-1)}=i_{_{\mathrm{S}n1}}+G_{_{\mathrm{S}n1}}u_{_{\mathrm{S}n1}} \\ G_{21}u_{n1}+G_{22}u_{n2}+\cdots+G_{2(n-1)}u_{n(n-1)}=i_{_{\mathrm{S}n2}}+G_{_{\mathrm{S}n2}}u_{_{\mathrm{S}n2}} \\ \vdots \\ G_{(n-1)1}u_{n1}+G_{(n-1)2}u_{n2}+\cdots+G_{(n-1)(n-1)}u_{n(n-1)}=i_{_{\mathrm{S}n(n-1)}}+G_{_{\mathrm{S}n(n-1)}}u_{_{\mathrm{S}n(n-1)}} \end{cases}$$

其中 u_{ni} 为节点电压, G_{ii} 为自电导, G_{ij} 为互电阻,

$i_{_{\mathrm{S}ni}}$ 为该节点流入的电流源代数和, $G_{_{\mathrm{S}ni}}u_{_{\mathrm{S}ni}}$ 为与该节点相连的各电压源和电导乘积的代数和.

当只有两个节点时，为弥尔曼定理.

$$U_{ab}=\frac{\sum\frac{E}{R}+\sum I_S}{\sum\frac{1}{R}}.$$

2 有源电路

- 法一: 取电压源支路的一段作为参考节点.
- 法二: 将电压源支路的电流作为未知量列入节点方程 (流入为正), 再将电压源与节点电压的关系作为补充方程.

对于受控源, 宜采用法二.

注: 与电流源串联的电阻对外不起作用, 不可列入方程中.

若电路中只含有电压源,

数模变换器 (DAC)

【例 2-19】数模变换器（DAC）解码网络如图 2-38所示。输入该电路的二进制数最多可为 4 位数，开关 2^0、2^1、2^2、2^3 分别与其第一～四位数对应。当二进制的某位为“1”时，对应的开关就接在电源 U_s 上；当某位为“0”时，对应的开关就接地。图中开关位置表明输入为“1010”（对应十进制的 10），试说明其数模变换原理。

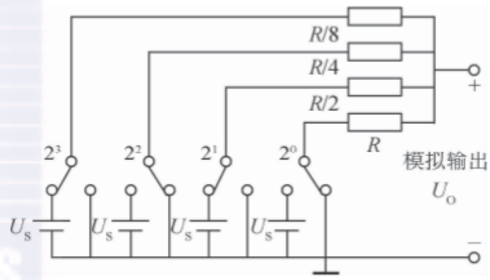


图 2-38　例 2-19 图

解　此电路的工作原理可以用节点电压方程来说明。

输出端的节点电压方程为

$$\left(\frac{8}{R}+\frac{4}{R}+\frac{2}{R}+\frac{1}{R}\right)U_o=\frac{8}{R}U_s+\frac{4}{R}U_s+\frac{2}{R}U_s+\frac{1}{R}U_s$$

$$U_o=\frac{U_s\frac{8}{R}+U_s\frac{4}{R}+U_s\frac{2}{R}+U_s\frac{1}{R}}{\frac{8}{R}+\frac{4}{R}+\frac{2}{R}+\frac{1}{R}}=\frac{U_s\frac{8}{R}+U_s\frac{4}{R}+U_s\frac{2}{R}+U_s\frac{1}{R}}{\frac{15}{R}}$$

设 $U_s=15\mathrm{V}$，输入为数字量“1001”（对应模拟量十进制数 9），此时

$$U_o=\frac{U_s\frac{8}{R}+0\frac{4}{R}+0\frac{2}{R}+U_s\frac{1}{R}}{\frac{15}{R}}=\frac{\frac{9}{R}U_s}{\frac{15}{R}}=9\mathrm{V}$$

这表明该电路完成了“数模变换”。

	KCL 方程数	KVL 方程数	总数
支路电流法	n-1	b-n+1	b
回路电流法	0	b-n+1	b-n+1
节点电压法	n-1	0	n-1

第 3 章 电路定理

替代定理

线性，非线性，时变，时不变

齐性定理

叠加定理

线性电路

- 叠加时，电压源短路，电流源开路.
- 叠加定理不能计算功率.
- 只有独立源可以单独作用

戴维南定理

- 无源二端网络用 P 表示.
- 有源二端网络用 A 表示.

线性含源二端网络，并等效为电压串联电阻.

求解方法：电压源电压等于开路电压，电阻等于各独立电源置零后得到的等效电阻.

求等效电阻

- 法一：无受控源时电阻等效变换（独立源置零）
- 法二：网络内独立电源置零，端口处施加电压 u（或电流 i），求出端口的电流 i（或电压 u），则等效电阻为 $R_i = \dfrac{u}{i}$.
- 法三：分别求出开路电压 u_k 和短路电流 i_d，则 $R_i = \dfrac{u_k}{i_d}$.

使用情况

- 求一条支路的电压或电流.
- 分析变动参数元件（如求最大功率，此时内外电阻相等）.
- 分析含有非线性元件的电路.
- 给出的条件不便于列写方程.

至例 3-8.

诺顿定理

线性含源二端网络，等效为电流源并联电阻.

最大功率

$P_{\text{Lmax}} = \dfrac{u_S^2}{4R_i}$.

特勒根定理

1. 特勒根第一定理（即功率守恒）：$\displaystyle\sum_{k=1}^{b} u_k i_k = 0$.
2. 特勒根第二定理（两电路拓扑结构相同时）：$\displaystyle\sum_{k=1}^{b} u_k \hat{i}_k = \sum_{k=1}^{b} \hat{u}_k i_k = 0$.

互易定理

4 线性动态电路暂态过程的时域分析

4.1 暂态过程与初始条件

电源、电阻、电感、电容串联：

$$RC\frac{\mathrm{d}u_{\text{C}}}{\mathrm{d}t} + LC\frac{\mathrm{d}^2u_{\text{C}}}{\mathrm{d}t^2} + u_{\text{C}} = u_{\text{S}}.$$
$$u_{\text{C}}(t) = u_{\text{Cp}}(t) + u_{\text{Ch}}(t).$$

其中 $u_{\mathrm{Cp}}(t)$ 为稳态解，$u_{\mathrm{Ch}}(t)$ 为暂态解.

暂态过程也称为过渡（动态）过程，此时的电路称为动态电路（网络）.

时域分析法 (经典法)，**换路定律**：

$$
\begin{aligned}
q = Cu, &\quad q(0_+) = q(0_-) \\
\psi = Li, &\quad \psi(0_+) = \psi(0_-)
\end{aligned}
$$

4.2 一阶电路的零输入响应

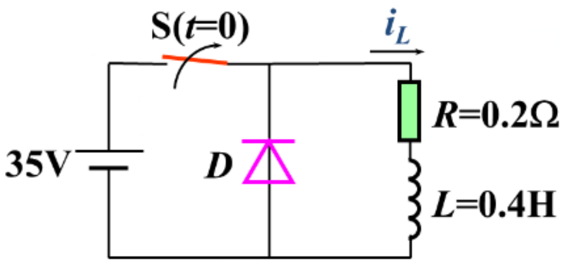
RC 电路与 LC 电路

$$
\begin{aligned}
RC\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t} + u_{\mathrm{C}} = 0 \quad &\Rightarrow \quad u_{\mathrm{C}}(t) = U_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \quad \Rightarrow \quad i_{\mathrm{C}}(t) = -C\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t} = \frac{U_0}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \\
L\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t} + Ri_{\mathrm{L}} = 0 \quad &\Rightarrow \quad i_{\mathrm{L}}(t) = I_0 \mathrm{e}^{-\frac{Rt}{L}} \quad \Rightarrow \quad u_{\mathrm{L}}(t) = L\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t} = -I_0 R\mathrm{e}^{-\frac{Rt}{L}}
\end{aligned}
$$

- **弛豫时间** $\tau = RC = \dfrac{L}{R}$.
- 电路固有频率 $p = -\dfrac{1}{\tau}$.
- 动态曲线上任意点切线与横轴的交点与切点的横坐标之差为 τ.

  即对于 $y = r\mathrm{e}^{-\frac{x}{\tau}}$，切线 $y = -\dfrac{r}{\tau}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\tau}}(x - x_0) + r\mathrm{e}^{-\frac{x}{\tau}}$ 与横轴交点为 $x_t = x_0 + \tau$.
- 3τ 时衰减至系数为 0.049787，5τ 时衰减至系数为 0.006738，此时一般认为已经达到稳态.
- 实验时注意操作步骤，否则小电源小电阻和电感也可能烧坏电表.

  可以采用 **预防措施**：并联二极管或小电阻，即泄放二极管（电阻）或续流二极管（电阻）



4.3 一阶电路的零状态响应

RC 电路和 RL 电路

$$
\begin{aligned}
RC\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t} + u_{\mathrm{C}} = RI_{\mathrm{s}} \quad &\Rightarrow \quad u_{\mathrm{C}} = RI_{\mathrm{s}}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad \Rightarrow \quad i_{\mathrm{C}}(t) = -C\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t} = I_{\mathrm{s}}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \\
L\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t} + Ri_{\mathrm{L}} = U_{\mathrm{s}} \quad &\Rightarrow \quad i_{\mathrm{L}} = \frac{U_{\mathrm{s}}}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{Rt}{L}}\right) \quad \Rightarrow \quad u_{\mathrm{L}} = L\frac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t} = U_{\mathrm{s}}\mathrm{e}^{-\frac{Rt}{L}}
\end{aligned}
$$

- 稳态响应仅与外加激励有关，故又称 **强制响应**.
- 暂态响应还与固有频率有关，故又称 **固有响应**.

4.4 全响应和三要素方法

对于一般的一阶电路微分方程：

$$
\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}f(t) = v(t).
$$

若求出初始值、稳态值和弛豫时间，则可直接得到：

$$
\begin{aligned}
f(t) &= f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)|_{t=0_+}]\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} && (\text{一般的激励}) \\
&= \underbrace{f(\infty)}_{\text{稳态响应}} + \underbrace{[f(0_+) - f(\infty)]\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{暂态响应}} && (\text{直流电源的激励}) \\
&= \underbrace{f(0_+)\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{f(\infty)(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})}_{\text{零状态响应}} && (\text{叠加原理的形式})
\end{aligned}
$$

4.5 一阶电路的阶跃响应

单位阶跃函数与延迟阶跃函数

$$
1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases} \qquad 1(t-t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0, \\ 1, & t > t_0. \end{cases}
$$

4.6 一阶电路的冲激响应

4.6.1 冲激响应

单位脉冲函数

$$
f(t) = \frac{1}{a}[1(t) - 1(t-a)] = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \dfrac{1}{a}, & 0 < t < a \\ 0, & t > a \end{cases}
$$

单位冲激函数

$$
\delta(t) = \lim_{a \to 0+} f(t)
$$

$$
\int_{-\infty}^{t} \delta(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 1(t)
$$

筛选性 (采样性质)

$$
g(t)\delta(t) = g(0)\delta(t)
$$

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t = g(t_0)
$$

单位冲激响应

$$
h(t) = \lim_{a \to 0+} \frac{1}{a}[s(t) - s(t-a)] = \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}
$$

$$
\int_{0}^{t} h(\xi)\,\mathrm{d}\xi = s(t)
$$

单位阶跃响应的导数就是单位冲激响应.

函数	符号	函数	符号	函数	符号
单位阶跃函数	$1(t)$	单位脉冲函数	$f(t)$	单位冲激函数	$\delta(t) = \dfrac{\mathrm{d}1(t)}{\mathrm{d}t}$
单位阶跃响应	$s(t)$			单位冲激响应	$h(t) = \dfrac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}$

对于一般的冲激函数 $K\delta(t)$, $h_K(t) = Kh(t)$.

4.6.2 电容电压和电感电压的跃变

若换路时电容和电感均为零状态, 则

电容: $i = CU_{\mathrm{S}}\,\delta(t)$.

电感: $u_{\mathrm{L}} = LI_{\mathrm{S}}\,\delta(t)$.

加入并联电容: (电荷守恒)

$$\begin{aligned} u_{C1}(0_+) &= u_{C2}(0_+) = \frac{C_1}{C_1+C_2}U_{\mathrm{S}} \\ i_{C1}(0) &= -\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}U_{\mathrm{S}}\,\delta(t) = -i_{C2}(0) \end{aligned}$$

加入串联电感: (磁链守恒)

$$\begin{aligned} i_1(0_+) &= i_2(0_+) = \frac{L_1U_{\mathrm{S}}}{(L_1+L_2)R_1} \\ u_{L1(0)} &= -\frac{L_1L_2}{L_1+L_2}\frac{U_{\mathrm{S}}}{R_1}\delta(t) = -u_{L2}(0) \end{aligned}$$

电容串联: $\dfrac{1}{C_s} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2} + \cdots + \dfrac{1}{C_n}$.

电容并联: $C_p = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$.

电感串联: $L_s = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$.

电感并联: $\dfrac{1}{L_p} = \dfrac{1}{L_1} + \dfrac{1}{L_2} + \cdots + \dfrac{1}{L_n}$.

4.7 线性动态网络对任意激励的响应

卷积分析法

将激励 $e(t)$ 用一系列矩形窄脉冲表示, 则

$$\begin{aligned} r(t) &= \int_0^t e(\lambda)h(t-\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = e(t)*h(\lambda) \\ &= \int_0^t e(t-\lambda)h(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = h(t)*e(\lambda) \end{aligned}$$

【例题】

第 5 章 正弦稳态电路的分析

5.1 正弦稳态响应

正弦激励电路的微分方程

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t} + u_{\mathrm{C}} = U_{\mathrm{Sm}}\sin(\omega t + \psi_{\mathrm{S}})$$

通解为

$$u_{\mathrm{C}}(t)=\underbrace{u_{\mathrm{Cm}}\sin(\omega t+\psi)}_{u_{\mathrm{Cp}}(t)}+\underbrace{K_1\mathrm{e}^{s_1 t}+K_2\mathrm{e}^{s_2 t}}_{u_{\mathrm{Ch}}(t)}.$$

正弦稳态 (交流) 电路, 正弦稳态 (交流) 响应.

5.2 正弦的相量表示

我国电网的正弦交流电流频率为 50 Hz, 称为 **工频**. 西方国家为 60 Hz.

正交, **反相**, 超前 (落后). 其中正交不是几何意义上的, 而是积分意义上的.

$$i=I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\varphi_i)=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\varphi_i).$$

旋转因子: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

用相量表示正弦量

$$\begin{aligned}u&=U_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\varphi_u)=\mathrm{Im}[U_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi_i)}]\\&=\mathrm{Im}[\dot{U}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\mathrm{Im}[\sqrt{2}\dot{U}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}].\end{aligned}$$

$\dot{U}_{\mathrm{m}}=U_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u}=U_{\mathrm{m}}\angle\varphi_u$ 称为振幅相量,

$\dot{U}=U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u}=U\angle\varphi_u$ 称为有效值相量.

并且有 $\dot{U}_{\mathrm{m}}=\sqrt{2}\dot{U}$, $U_{\mathrm{m}}=\sqrt{2}U$.

同频率正弦量相加:

$$\begin{aligned}i=i_1+i_2&=\sqrt{2}I_1\sin(\omega t+\psi_1)+\sqrt{2}I_2\sin(\omega t+\psi_2)\\&=\mathrm{Im}[\sqrt{2}(\dot{I}_1+\dot{I}_2)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\psi).\end{aligned}$$

其中 $\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2$, $I=\mathrm{Im}(\dot{I}_1+\dot{I}_2)$.

5.3 电阻、电感、电容元件的伏安关系的相量形式

参数	电阻	电感	电容
时域	$u=Ri$	$u=L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$	$i=C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$
有效值	$U=RI$	$U=\omega LI$	$I=\omega CU$
相位	$\varphi_u=\varphi_i$	$\varphi_u=\varphi_i+\dfrac{\pi}{2}$	$\varphi_i=\varphi_u+\dfrac{\pi}{2}$
频域	$\dot{U}=R\dot{I}$	$\dot{U}=\mathrm{j}\omega L\dot{I}$	$\dot{I}=\mathrm{j}\omega C\dot{U}$
阻抗	电阻 (抗) R	感抗 $X_L=\omega L$	容抗 $X_C=\dfrac{1}{\omega C}$
导纳	电导 (纳) $G=\dfrac{1}{R}$	感纳 $B_L=\dfrac{1}{\omega L}$	容纳 $B_C=\omega C$
瞬时功率 p	$p=UI(1-\cos 2\omega t)$	$p=UI\sin 2\omega t$	$p=-UI\sin 2\omega t$

参数	电阻	电感	电容
平均功率 P 或 无功功率 Q	$P = I^2R$ $= U^2/R$	$Q_L = I^2X_L$ $= U^2/X_L$	$Q_C = -I^2X_C$ $= -U^2/X_C$

无功功率: 单位为 Var 乏.

5.4 基尔霍夫定律的相量形式及电路的相量模型

$$
\begin{aligned}
\sum i = 0, \quad \sum \dot{I} = 0, \\
\sum u = 0, \quad \sum \dot{U} = 0.
\end{aligned}
$$

5.5 复阻抗与复导纳及其等效变化

阻抗串联	导纳并联
$\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C \\ &= \left[R + \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]\dot{I} \\ &= [R + \mathrm{j}(X_L - X_C)]\dot{I} \\ &= [R + \mathrm{j}X]\dot{I} = Z\dot{I} \\ &= U_R + \mathrm{j}U_X \end{aligned}$ $\begin{aligned} Z &= \dot{U}/\dot{I} = z\angle\varphi \\ z &= U/I = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \\ \varphi &= \varphi_z = \varphi_u - \varphi_i \\ &= \arctan\frac{X_L - X_C}{R} \end{aligned}$ $\begin{aligned} U &= zI = \sqrt{R^2 + X^2}I \\ &= \sqrt{U_R^2 + U_X^2} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \dot{I} &= \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C \\ &= \left[G + \mathrm{j}\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\right]\dot{U} \\ &= [G + \mathrm{j}(B_C - B_L)]\dot{U} \\ &= [G + \mathrm{j}B]\dot{U} = Y\dot{U} \\ &= I_R + \mathrm{j}I_B \end{aligned}$ $\begin{aligned} Y &= \dot{I}/\dot{U} = y\angle\theta = -y\angle\varphi \\ y &= I/U = \sqrt{G^2 + (B_C - B_L)^2} \\ \theta &= \varphi_i - \varphi_u = -\varphi \\ &= \arctan\frac{B_C - B_L}{G} \end{aligned}$ $\begin{aligned} I &= yU = \sqrt{R^2 + B^2}U \\ &= \sqrt{U_R^2 + U_B^2} \end{aligned}$

复阻抗与复导纳的等效变换:

$$
\begin{cases}
Z = R + \mathrm{j}X = \dfrac{1}{Y} = \dfrac{G - \mathrm{j}B}{G^2 + B^2} \\
Y = G + \mathrm{j}B = \dfrac{1}{Z} = \dfrac{R - \mathrm{j}X}{R^2 + X^2}
\end{cases}
$$

电抗	阻抗角	电纳	性质
$X = X_L - X_C > 0$	$\varphi = \varphi_u - \varphi_i > 0$	$B = B_C - B_L < 0$	感性
$X = X_L - X_C < 0$	$\varphi = \varphi_u - \varphi_i < 0$	$B = B_L - B_C > 0$	容性
$X = X_L - X_C = 0$	$\varphi = \varphi_i - \varphi_i = 0$	$B = B_L - B_C = 0$	阻性

- 感性、容性和阻性与电容和电感有关，与频率也有关.
- $\cos\varphi$ 称为 **功率因数**.

5.6 正弦交流电路的功率

无源二端网络的功率

对于 $Z = R + \mathrm{j}X$,

$$\begin{aligned}
p &= ui = U_\mathrm{m}I_\mathrm{m}\sin(\omega t+\varphi)\sin(\omega t) \\
&= 2UI\left[\sin^2(\omega t)\cos\varphi + \sin(\omega t)\cos(\omega t)\cos\varphi\right] \\
&= UI\cos\varphi - UI\cos(2\omega t+\varphi) && (\text{瞬时功率}) \\
&= UI\cos\varphi(1-\cos 2\omega t) + UI\sin\varphi\sin 2\omega t && (\text{另一形式}) \\
P &= \frac{1}{T}\int_0^T p\,\mathrm{d}t = UI\cos\varphi && (\text{平均功率}) \\
&= I^2 z\cos\varphi = I^2R = U^2\cos^2\varphi/R && (\text{另一形式}) \\
&\begin{cases} S = \sqrt{P^2+Q^2} \\ \varphi = \arctan\dfrac{Q}{P} \end{cases} && (\text{功率三角形}) \\
\tilde{S} &= \dot{U}\dot{I}^* = UI\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_u-\varphi_i)} = UI\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} && (\text{复功率}) \\
&= UI\cos\varphi + \mathrm{j}UI\sin\varphi = P + \mathrm{j}Q
\end{aligned}$$

平均功率 $P = UI\cos\varphi = I^2R$.

功率因数 $\lambda := \cos\varphi$.

视在功率 $S := UI$, 单位为伏安 (VA) 或千伏安 (kVA).

无功功率 $Q := UI\sin\varphi$, 单位为乏 (var) 或千乏 (kvar).

特殊情况

功率因数的提高

1. 感性负载并联电容.

   功率因数 $\cos\varphi \to \cos\varphi'$ 需并联电容 $C = \dfrac{P}{U^2\omega}(\tan\varphi - \tan\varphi')$.

   欠补偿, 全补偿, 过补偿.

2. 容性负载

最大传输功率

$$P = I^2R = \frac{U_\mathrm{S}^2R}{(R_\mathrm{i}+R)^2+(X_\mathrm{i}+X)^2} \le \frac{U_\mathrm{S}^2R}{(R_\mathrm{i}+R)^2} \le \frac{U_\mathrm{S}^2}{4R_\mathrm{i}}.$$

当且仅当为共轭复数 $Z = Z_\mathrm{i}^*$ 时取等.

5.7 正弦稳态电路的计算

5.8 谐振电路

一般调整电容使电路达到谐振.

5.8.1 RLC 串联谐振电路

LC 串联电路发生 **串联谐振**.

阻抗 $Z=R+\mathrm{j}\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)$.

谐振角频率 (固有角频率) $\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

谐振频率 (固有频率) $f_0=\dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.

发生谐振时阻抗 $Z=R$ 最小, 电流 $\dot{I}_0=\dfrac{\dot{U}}{R}$ 最大.

串联谐振电路的 **品质因数** 为

$$\begin{aligned}Q&=\frac{\omega_0 L}{R}=\frac{1}{\omega_0 CR}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\\&=\frac{I^2\cdot\omega_0 L}{I^2\cdot R}=\frac{Q_L}{P}=\frac{U_C}{U}=\frac{U_L}{U}\end{aligned}$$

各元件电压为

$$\begin{aligned}\dot{U}_R&=R\dot{I}=\dot{U}\\\dot{U}_L&=\mathrm{j}\omega_0 L\dot{I}=\mathrm{j}Q\dot{U}\\\dot{U}_C&=\frac{\dot{I}}{\mathrm{j}\omega_0 C}=-\mathrm{j}Q\dot{U}\end{aligned}$$

电容和电感的电压抵消, 故又称 **电压谐振**.

- 电力工程: 避免谐振.
- 电信工程: 利用谐振.

串联谐振对频率具有选择性 (**滤波性质**), 当电源频率偏离电路的谐振频率是, 电容电压和电感电压都会显著下降.

$$I=\frac{U}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}=\frac{I_0}{\sqrt{1+Q^2\left(\eta-\dfrac{1}{\eta}\right)^2}}>I_0 \qquad \left(\eta:=\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

$$U_L=\omega LI=\frac{QU}{\sqrt{\dfrac{1}{\eta^2}+Q^2\left(1-\dfrac{1}{\eta^2}\right)^2}}\le\frac{QU}{\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}}>QU \qquad \left(\omega=\omega_0\sqrt{\frac{2Q^2-1}{2Q^2}}<\omega_0\right)$$

$$U_C=\frac{I}{\omega C}=\frac{QU}{\sqrt{\eta^2+Q^2(\eta^2-1)^2}}\le\frac{QU}{\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}}>QU \qquad \left(\omega=\omega_0\sqrt{\frac{2Q^2}{2Q^2-1}}>\omega_0\right)$$

串联谐振电路的**通用谐振曲线** (Q 越大, 电路的选择性越好)

点击查看 Geogebra 图像　　或直接打开 网页链接

5.8.2 RLC 并联谐振电路

LC 并联电路发生 **并联谐振**.

导纳 $Y = G + \mathrm{j}\left(\omega C - \dfrac{1}{\omega L}\right)$.

谐振 (角) 频率 或 **固有 (角) 频率** 与串联谐振电路相同, 即 $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.

发生谐振时导纳 $Y = G$ 最小, 电压 $U_0 = \dfrac{I_S}{G}$ 最大.

并联谐振电路的 **品质因数** 为串联谐振电路的品质因数的倒数, 即为

$$\begin{aligned} Q &= \frac{B_L}{R} = \frac{R}{\omega_0 L} = \omega_0 CR = R\sqrt{\frac{C}{L}} \\ &= \frac{I^2 \cdot R}{I^2 \cdot \omega_0 L} = \frac{P}{Q_L} = \frac{U}{U_C} = \frac{U}{U_L} \end{aligned}$$

各元件电流为

$$\begin{aligned} \dot{I}_R &= G\dot{U} = \dot{I}_S \\ \dot{I}_L &= \frac{\dot{U}_0}{\mathrm{j}\omega_0 L} = -\mathrm{j}Q\dot{I}_S \\ \dot{I}_C &= \mathrm{j}\omega_0 C\dot{U}_0 = \mathrm{j}Q\dot{I}_S \end{aligned}$$

电容和电感的电流代数和为零, 故并联谐振又称 **电流谐振**.

$$U = \frac{I_S}{\sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} = \frac{U_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)^2}} \qquad \left(\eta := \frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

5.8.3 实际并联谐振电路

即 RL 串联后与 C 并联.

复导纳 $Y = \dfrac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + \mathrm{j}\left[\omega C - \dfrac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}\right]$.

并联谐振的**条件**为 $C = \dfrac{L}{R^2 + (\omega L)^2}$.

谐振角频率 $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{L^2}}$.

可以等效为 RLC 并联谐振电路, 此时等效参数值为

等效电导 $G_e = \dfrac{R}{R^2 + (\omega L)^2}$.

等效感纳 $B_L = \dfrac{1}{\omega L_e} = \dfrac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}$.

谐振阻抗 $R_0 = \dfrac{1}{G_e} = \dfrac{R^2 + (\omega_0 L)^2}{R} = \dfrac{L}{RC}$.

品质因数 $Q = \dfrac{B_L}{G_e} = \dfrac{\omega_0 L}{R} = \omega_0 C R_0$.

第 6 章 耦合电感电路

6.1 互感现象与互感电压

线圈中变化的电流产生变化的磁通, 并在自身线圈中产生 **自感电压**; 若与其它线圈 **交链**, 则会产生 **互感电压**. 互感又称 **耦合电感**.

自身线圈各匝中 **自感磁通** φ_{11} 之和称为 **自感磁链** ψ_{11}.
互感线圈各匝中 **互感磁通** φ_{21} 之和称为 **互感磁链** ψ_{21}. (2 由 1)

线性媒质 即线圈周围没有铁磁物质, 此时有 **自感系数** $L_1 = \pm\dfrac{\psi_{11}}{i_1}$ 和 **互感系数** $M_{21} = \pm\dfrac{\psi_{21}}{i_1} = \pm\dfrac{\psi_{12}}{i_2} = M_{12} = M$, 单位为亨利 (H).

互感电压 $u_{M2} = \pm\dfrac{\mathrm{d}\psi_{21}}{\mathrm{d}t} = \pm M\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$.

6.2 耦合电感电路的计算

同名端标记法

互感消去法

- 耦合线圈串联
  - **顺接** $u = (R_1 + R_2)i + (L_1 + L_2 + 2M)\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.
  - **反接** $u = (R_1 + R_2)i + (L_1 + L_2 - 2M)\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.
  - 推论 $W_L = \dfrac{Li^2}{2} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad M \leq \dfrac{L_1 + L_2}{2}$.
  - 相量 $\dot{U} = [(R_1 + R_2) + \mathrm{j}\omega(L_1 + L_2 \pm 2M)]\dot{I}$.
  - **互感抗** $\mathrm{j}\omega M$.
- 耦合线圈并联
  - **同侧并联** 与 **异侧并联**

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2 \\ \dot{U} &= (R_1 + \mathrm{j}\omega L_1)\dot{I}_1 \pm \mathrm{j}\omega M\dot{I}_2 = \Big[R_1\dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega(L_1 \mp M)\Big]\dot{I}_1 \pm \mathrm{j}\omega M\dot{I} \\ &= (R_2 + \mathrm{j}\omega L_2)\dot{I}_2 \pm \mathrm{j}\omega M\dot{I}_1 = \Big[R_2\dot{I}_2 + \mathrm{j}\omega(L_2 \mp M)\Big]\dot{I}_2 \pm \mathrm{j}\omega M\dot{I} \end{aligned}$$

  - **耦合系数** $K = \dfrac{M}{\sqrt{L_1L_2}} \in [0, 1]$.

    注: $M = K\sqrt{L_1L_2} \leq \sqrt{L_1L_2} \leq \dfrac{L_1 + L_2}{2}$.
  - **全耦合**: 当 $K = 1$ 时, 即 $M = \sqrt{L_1L_2}$.

6.3 空心变压器

原线圈 (初级线圈), 副线圈 (次级线圈).

空心变压器: 线圈绕在非铁磁材料上.

设空心变压器原副线圈的电压电流方向为关联方向,
初级回路总阻抗为 Z_{11}, 负载阻抗为 Z, 次级回路总阻抗为 Z_{22} (包括负载).

以同名端为例

$$\begin{cases}\dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega M\dot{U}_2 \\ 0 = \mathrm{j}\omega M\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{U}_2\end{cases}$$

得到

$$\begin{cases}\dot{U}_1 = \left(Z_{11} + \dfrac{\omega^2 M^2}{Z_{22}}\right)\dot{I}_1 = (Z_{11} + Z_{1r})\dot{I}_1 \\ \\ \dot{I}_2 = -\dfrac{\mathrm{j}\omega M\dfrac{\dot{U}_1}{Z_{11}}}{Z_{22} + \dfrac{\omega^2 M^2}{Z_{11}}} = -\dfrac{\mathrm{j}\omega M\dfrac{\dot{U}_1}{Z_{11}}}{Z_{22} + Z_{2r}}\end{cases}$$

其中

$$\begin{cases}Z_{1r} = \dfrac{\omega^2 M^2}{Z_{22}}, & (\text{次级对初级的反射阻抗}) \\ Z_{2r} = \dfrac{\omega^2 M^2}{Z_{11}}, & (\text{初级对次级的反射阻抗}) \\ U_e = \mathrm{j}\omega M\dfrac{\dot{U}_1}{Z_{11}}, & (\text{初级对次级的互感电压})\end{cases}$$

去互感效应法 即设出公共接地端后, 使用耦合线圈并联的互感消去法.

6.4 理想变压器

理想变压器不耗能也不储能, 只变换信号、传输电能.

理想化条件

1. 变压器不消耗能量. (无铜损)
2. 是全耦合变压器. (无磁损)
    1. 即 $K = M/\sqrt{L_1 L_2} = 1$.
    2. 此时 $\varphi_{21} = \varphi_{11}$, $\varphi_{12} = \varphi_{22}$.
3. 两个自感无穷大, 但比值为常数.

理想化措施

1. 用具有高磁导率的铁磁材料做铁心.
2. 增加初级次级线圈的匝数.
3. 使线圈紧密耦合.

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{\dfrac{N_1\varphi_{11}}{i_1}}{\dfrac{N_2\varphi_{22}}{i_2}} = \frac{\dfrac{N_1}{N_2}M_{21}}{\dfrac{N_2}{N_1}M_{12}} = \frac{N_1^2}{N_2^2} = n^2$$

$$
\begin{cases}
u_1 = L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\
u_2 = M \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\
M = \sqrt{L_1 L_2} \\
L_1, L_2 \to +\infty
\end{cases}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{cases}
\dfrac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \dfrac{u_1}{u_2} = n \\
\dfrac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = \dfrac{i_1}{i_2} = -\dfrac{1}{n} \\
Z_{\mathrm{in}} = \dfrac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = n^2 Z_2
\end{cases}
$$

第 7 章 三相电路

- 三相发电机: 转子、定子嵌有 3 个绕组 (线圈).
- 绕组电压称为 **相电压**.

$$
\begin{cases}
u_{\text{A}} = U_{\mathrm{m}} \sin(\omega t) \\
u_{\text{B}} = U_{\mathrm{m}} \sin(\omega t - 120^\circ) \\
u_{\text{C}} = U_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + 120^\circ)
\end{cases}
$$

- 相序
  - 正序 (A-B-C-A).
  - 负序 (A-C-B-A).
- 对称三相电路
  - 三相对称电源.
  - 三相对称负载.
  - 阻抗相同的三条输电线.
- 概念
  - 电源中点 (零点), 负载中点, 中性线.
  - 端线 (火线)
- 变量
  - 相电流 $I_P = I_{AB}$, 相电压 $U_P = U_A = U_{AO}$.
  - 线电流 $I_l = I_A$, 线电压 $U_l = U_{AB}$.
  - 中性线电流 $\dot{I}_{\mathrm{N}} = \dot{I}_{\mathrm{O'O}}$.
- 星形联结
  - 线电流等于相电流: $I_l = I_P$.
  - 线电压与相电压: $\dot{U}_l = \sqrt{3}\dot{U}_P \angle 30^\circ$.
  - 中性线上: $\dot{U}_{\mathrm{O'O}} = 0$, $\dot{I}_{\mathrm{O'O}} = 0$.
- 角形联结
  - 线电压等于相电压: $U_l = U_P$.
  - 线电流与相电流: $\dot{I}_l = \sqrt{3}\dot{I}_P \angle -30^\circ$.
- 星角变换 (△ → Y)
  - 三角形联结电源: $\dot{U}_P = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \dot{U}_l \angle -30^\circ$.
  - 三角形联结负载: $Z_L' = \dfrac{1}{3} Z_L$.

对称三相电路的功率

- 平均功率
  - 当负载为星形联结时, $U_l=\sqrt{3}U_P,\ I_l=I_P$.
  - 当负载为角形联结时, $U_l=U_P,\ I_l=\sqrt{3}I_P$.

  $$\begin{aligned}P&=U_{PA}I_{PA}\cos\varphi_{_\text{A}}+U_{PB}I_{PB}\cos\varphi_{_\text{B}}+U_{PC}I_{PC}\cos\varphi_{_\text{C}}\\&=3U_PI_P\cos\varphi=\sqrt{3}U_lI_l\cos\varphi\quad(\text{星形联结或三角联结})\end{aligned}$$

  其中 φ 为相电压与相电流的相位差, 即负载的阻抗角.

- 无功功率 $Q=3U_PI_P\sin\varphi=\sqrt{3}U_lI_l\sin\varphi$.
- 视在功率 $S=\sqrt{P^2+Q^2}=3U_PI_P=\sqrt{3}U_lI_l$.
- 功率因数 $\lambda=\dfrac{P}{S}=\cos\varphi=\dfrac{P}{\sqrt{3}U_lI_l}$.
- 瞬时功率 $p(t)=3U_PI_P\cos\varphi=P$.

功率的测量

- 三相四线制 (三只瓦特表)
- 三相三线制 (两只瓦特表)

  以 C 为参考位点, A 接表 1, B 接表 2, 则

  $$\begin{cases}P_1=U_\text{AC}I_\text{A}\cos(\varphi-30^\circ),\\P_2=U_\text{BC}I_\text{B}\cos(\varphi+30^\circ).\end{cases}$$