6.2.4 空间旋转与四元数

1 四元数的概念

- 定义 $\mathbb{V}$
  - $\boldsymbol{I}^2=\boldsymbol{J}^2=\boldsymbol{K}^2=\boldsymbol{IJK}=-1.$
  - $\mathbb{V}=v\mathbf{1}+v_1\boldsymbol{I}+v_2\boldsymbol{J}+v_3\boldsymbol{K}.$
  - 群定义: $Q_4=\left\langle a,b\mid a^2=b^2=(ab)^2\right\rangle.$
- 备注
  - 这里使用空心字母表示四元数元素, 而非集合, 以区分于标量和向量.
  - 这里四元数单位使用粗斜体, 表明它是 (四维实) 向量或 (二阶复) 矩阵.
  - 有的资料上使用正体表示四元数单位, 表明它是标量常数; 这里不建议如此表示.
- 概念
  - 数量部分: $v=v\mathbf{1}.$
  - 向量部分: $\boldsymbol{V}=v_1\boldsymbol{I}+v_2\boldsymbol{J}+v_3\boldsymbol{K}.$
  - 纯四元数: $\mathbb{V}=\boldsymbol{V}.$

2 四元数的起源

首先澄清一点, 以下内容不一定是四元数真正的起源, 只是我根据已学知识推断出的一条比较合理的路.

从历史上来说, 我们知道复数的加法与乘法即复平面中的平移与旋转, 于是希望将其推广到三维空间, 并且存在某种运算可以对应空间旋转.

在 $\mathrm{i}^2=-1$ 的基础上, 补充定义 $\mathrm{j}^2=-1,\mathrm{i}\neq\mathrm{j}$ 是很自然的想法, 于是三元数是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间. 但是 ij 应该等于多少呢? 由乘法的封闭性, 不妨令

$$\mathrm{ij}=x+y\mathrm{i}+z\mathrm{j},x,y,z\in\mathbb{R}.$$

首先我们看到, $z\neq0$, 否则两端左乘 i 得 $\mathrm{j}=-y+x\mathrm{i}\in\mathbb{C}$, 本质上还是复数.

于是由上式可得

$$\begin{aligned}\mathrm{j}&=\frac{1}{z}(\mathrm{ij}-x-y\mathrm{i}),\\\mathrm{ij}&=\frac{1}{z}(-\mathrm{j}-x\mathrm{i}+y),\end{aligned}$$

比较系数可得 $z^2=-1,z\notin\mathbb{R}$, 矛盾, 从而 ij 不能由上述三元数表示.

这个反证法的思路与 $\sqrt{2}$ 不是有理数的证明类似. 不过 $\sqrt{2}$ 虽然不属于有理数, 但属于实数, 有没有可能寻找到更大的代数系统, 使得乘法的封闭性得以满足呢?

自然的想法是令 $\mathrm{k}=\mathrm{ij}\notin\mathbb{C}$, 同样自然的, 我们令 $\mathrm{ij}=\mathrm{ji}$, 即满足交换律, 于是 $\mathrm{k}^2=1$. 现在我们知道, 这样的代数系统称为双复数, 不过更常见的定义是令 $\mathrm{i}^2=-1,\mathrm{j}^2=1,\mathrm{ij}=\mathrm{ji}=\mathrm{k}$, 其子环 $\mathbb{R}[\mathrm{i}]$ 称为圆复数 (即复数 $\mathbb{C}$), 而 $\mathbb{R}[\mathrm{j}]$ 称为双曲复数. 顾名思义, 双曲复数与双曲线有着密不可分的联系, 不过不是这里讨论的重点.

旋转运动是可逆的, 因此我们希望四元数除零元外都可逆. 双复数不能作为我们理想的 "四元数", 因为双复数有零因子, 从而双复数的乘法未必可逆. 例如 $(1+\mathrm{j})(1-\mathrm{j})=0$, 假设零因子 $1+j$ 有逆元且为 a^{-1}, 等式两端左乘 a^{-1}, 得 $\mathrm{j}=1$, 从而矛盾.

似乎又陷入了窘境, 而且这样构造出来的双复数在运算上不具有轮换对称性, 并不美观. 不过回过头来, 我们希望的是通过三元或四元的 "超复数" 来研究三维的空间旋转, 空间旋转又具有怎样的性质呢? 我们惊讶地发现, 空间旋转并不满足交换律! 随便拿起一支笔或一颗魔方, 便可以验证这一点.

如果让四元数也不满足交换律呢? 实数是满足交换律的, 因此我们令 $\mathrm{ij} \neq \mathrm{ji}$, 但具体是怎样的关系呢? 互为相反数是最简单的, 即 $\mathrm{ij} = -\mathrm{ji}$, 于是我们可以推得 $\mathrm{k}^2 = -1, \mathrm{jk} = -\mathrm{kj}, \mathrm{ki} = -\mathrm{ik}$, 这些运算恰好也是轮换对称的.

进一步我们还可以得到这种定义的四元数的诸多良好性质, 其中就包括非零元必有逆, 并且可以利用四元数方便地求解空间旋转的复合和效果. 这些就是接下来要推导的了. 即使抛开实际应用, 四元数作为纯数学, 内容也是丰富而有趣的.

我们称呼这种超复数为四元数, 但是定义似乎与之前的 $\boldsymbol{I}^2 = \boldsymbol{J}^2 = \boldsymbol{K}^2 = \boldsymbol{IJK} = -1$ 有所不同, 实际上它们是等价的, 读者可自证.

以上我们探索了三种形式的超复数, 作为复数的 "扩展", 它们的定义分别是:

1. $\mathrm{i}^2 = -1, \mathrm{j}^2 = -1, \mathrm{ij} = \mathrm{ji} = \mathrm{k}$. (双复数的等价超复数)
2. $\mathrm{i}^2 = -1, \mathrm{j}^2 = 1, \mathrm{ij} = \mathrm{ji} = \mathrm{k}$. (双复数)
3. $\mathrm{i}^2 = -1, \mathrm{j}^2 = -1, \mathrm{ij} = -\mathrm{ji} = \mathrm{k}$. (四元数)

形式上看, 只剩下一个有待研究:

4. $\mathrm{i}^2 = -1, \mathrm{j}^2 = 1, \mathrm{ij} = -\mathrm{ji} = \mathrm{k}$. (反四元数)

这种超复数称为分裂四元数或反四元数, 与双复数一样, 它也有非零元无逆, 如 $\dfrac{1+\mathrm{j}}{2}$ 即为幂等的零因子, 因此反四元数的性质也没有四元数好.

最后, 我们之后使用的四元数单位的字体与前文不同, 不再是正体. 四元数单位之所以要使用大写的粗斜体, 是为了与复数单位区分. 由复数推广至四元数是自然的, 但是之后在研究四元数时, 常将其同构映射为复矩阵, 此时若不用粗斜体, 则容易混淆; 而小写的粗斜体常用于表示空间向量, 因此表示为 $\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K}$ 是最为清晰的.

3 基本代数性质

- 性质
  - $\boldsymbol{IJ} = \boldsymbol{K},\ \boldsymbol{JK} = \boldsymbol{I},\ \boldsymbol{KI} = \boldsymbol{J}$.
  - $\boldsymbol{IJ} = -\boldsymbol{JI},\ \boldsymbol{JK} = -\boldsymbol{KJ},\ \boldsymbol{KI} = -\boldsymbol{IK}$.
  - $\boldsymbol{IJK} = \boldsymbol{JKI} = \boldsymbol{KIJ} = -1$.
- 乘法
  - $\boldsymbol{VW} = -\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{W} + \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{W}$.
  - $\mathbb{VW} = (vw - \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{W}) + (v\boldsymbol{W} + w\boldsymbol{V} + \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{W})$.
- 备注
  - 将四元数集合视为 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, 加法与乘法都是通常意义下的.
  - 将纯四元数视为三维空间向量, 点积与叉积都是通常意义下的.
  - 四元数无乘法交换律, 不能成域, 而只能构成环, 称为哈密顿四元数除环 $\mathbb{H}$.

4 两种矩阵同构

注: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 表示域 $\mathbb{F}$ 上由 n 阶矩阵构成的一般线性群.

- 二阶复矩阵

$$
\begin{aligned}
\phi_1: \quad & Q_4 \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \\
& \mathbb{V} = a\mathbf{1} + b\boldsymbol{I} + c\boldsymbol{J} + d\boldsymbol{K} \\
& \mapsto \begin{pmatrix} a - d\mathrm{i} & -b + c\mathrm{i} \\ b + c\mathrm{i} & a + d\mathrm{i} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

- $\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 对应于 $\mathit{1}(z) = z$, 即恒等变换.
- $\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}$, 对应于 $I(z) = \dfrac{1}{z}$, 即黎曼球面绕 x_1 轴旋转 180°.
- $\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 对应于 $J(z) = -\dfrac{1}{z}$, 即黎曼球面绕 x_2 轴旋转 180°.
- $\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{bmatrix}$, 对应于 $K(z) = -z$, 即黎曼球面绕 x_3 轴旋转 180°.

- 四阶实矩阵

$$
\begin{aligned}
\phi: \quad & Q_4 \to \mathrm{GL}_4(\mathbb{R}) \\
& \mathbb{V} = a\mathbf{1} + b\boldsymbol{I} + c\boldsymbol{J} + d\boldsymbol{K} \\
& \mapsto \begin{pmatrix} a & -b & d & -c \\ b & a & -c & -d \\ -d & c & a & -b \\ c & d & b & a \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

其中四元数单位被映射为

$$
\mathbf{1} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{I} \mapsto \begin{pmatrix} & -1 & & \\ 1 & & & \\ & & & -1 \\ & & 1 & \end{pmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{J} \mapsto \begin{pmatrix} & & & -1 \\ & & -1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{K} \mapsto \begin{pmatrix} & & 1 & \\ & & & -1 \\ -1 & & & \\ & 1 & & \end{pmatrix}.
$$

- 以下将 Q_4 与 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ 中的元素看成是相等的, 而不采用 $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ 的同构.

5 旋转公式矩阵证法

- 旋转的矩阵 (可求复合) ⭐

  绕 $\boldsymbol{v} = l\boldsymbol{i} + m\boldsymbol{j} + n\boldsymbol{k}$ 旋转 ψ 的矩阵 $[R_{\boldsymbol{v}}^{\psi}]$.

  记 $\boldsymbol{V} = l\boldsymbol{I} + m\boldsymbol{J} + n\boldsymbol{K}$, 则矩阵可表示为

$$
\mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi} = \cos\frac{\psi}{2} + \boldsymbol{V}\sin\frac{\psi}{2} \equiv \mathrm{e}^{\boldsymbol{V}\frac{\psi}{2}}.
$$

- 旋转的效果 (可求象) ⭐

  一般的, $\mathcal{R}_{\widehat{\tilde{p}}}^{\theta} = \mathcal{R}_{\hat{a}}^{\psi} \circ \mathcal{R}_{\hat{p}}^{\theta} \circ \mathcal{R}_{\hat{a}}^{-\psi}$, 即 $\mathbb{R}_{\widetilde{\boldsymbol{P}}}^{\theta} = \mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi} \circ \mathbb{R}_{\boldsymbol{P}}^{\theta} \circ \mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{-\psi}$.

  设 $\mathcal{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi}$ 将 $\boldsymbol{P} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ 旋转到 $\widetilde{\boldsymbol{P}}$:

  在上式中令 $\theta = \pi$, 则二元旋转 $\mathbb{R}_{\boldsymbol{P}}^{\theta}$ 和 $\mathbb{R}_{\widetilde{\boldsymbol{P}}}^{\pi}$ 正是纯四元数 $\mathbb{P}$ 和 $\widetilde{\mathbb{P}}$, 故有

$$
\widetilde{\mathbb{P}} = \mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi} \mathbb{P} \mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{-\psi}.
$$

- 伸缩旋转
  - $\forall \mathbb{Q}, \exists \boldsymbol{v}, \psi : \mathbb{Q} = |\mathbb{Q}| \mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi}$, 即伸缩旋转.

- 由旋转的象的公式得, 伸缩旋转的效果为:

$$\mathbb{P} \mapsto \widetilde{\mathbb{P}} = \mathbb{Q}\mathbb{P}\overline{\mathbb{Q}}.$$

6 共轭的性质

共轭 $\overline{\mathbb{V}}$ 是对于四元数而言的, 而非矩阵共轭.

- $\overline{\mathbb{V}} := \mathbb{V}^*$ (相应矩阵的共轭转置).
- $\overline{\mathbb{V}} = v - \boldsymbol{V}$.
- $\overline{\boldsymbol{V}\boldsymbol{W}} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{V}$. (注意顺序)
- $\overline{\mathbb{V}\mathbb{W}} = \overline{\mathbb{W}}\,\overline{\mathbb{V}}$. (注意顺序)

证明

(1) 式为矩阵共轭定义, (2) 式为向量共轭定义, 由矩阵表示可知二者等价.

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{V}\boldsymbol{W}} &= \overline{\sum v_i w_i \boldsymbol{I}^2 + \sum v_i w_j \boldsymbol{I}\boldsymbol{J}} \\ &= -\sum v_i w_i - \sum v_i w_j \boldsymbol{K} \\ &= -\sum v_i w_i + \sum v_i w_j \boldsymbol{J}\boldsymbol{I} \\ &= \boldsymbol{W}\boldsymbol{V} = \overline{\boldsymbol{W}}\,\overline{\boldsymbol{V}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathbb{V}\mathbb{W}} &= \overline{(v+\boldsymbol{V})(w+\boldsymbol{W})} \\ &= \overline{vw + v\boldsymbol{V} + w\boldsymbol{W} + \boldsymbol{V}\boldsymbol{W}} \\ &= vw - v\boldsymbol{V} - w\boldsymbol{W} + \boldsymbol{W}\boldsymbol{V} \\ &= (w-\boldsymbol{W})(v-\boldsymbol{V}) = \overline{\mathbb{W}}\,\overline{\mathbb{V}}.\end{aligned}$$

7 长度的性质

长度 $|\mathbb{V}|$ 又称为二范数.

- $|\mathbb{V}|^2 := \mathbb{V}\overline{\mathbb{V}} = \overline{\mathbb{V}}\mathbb{V} = \left|\overline{\mathbb{V}}\right|^2$.
- $|\boldsymbol{V}|^2 = -\boldsymbol{V}^2 = -\boldsymbol{V}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}$.
- $|\mathbb{V}|^2 = v^2 + |\boldsymbol{V}|^2 = v^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^3$.
- $|\mathbb{V}\mathbb{W}| = |\mathbb{V}|\,|\mathbb{W}|$.
- $|\mathbb{V}|^2 = \det(\mathbb{V})$.

证明

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{V}|^2 &= -\boldsymbol{V}\boldsymbol{V} = \sum v_i^2 + \sum v_i v_j (\boldsymbol{I}\boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}\boldsymbol{I}) = \sum v_i^2 = \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}. \\ |\mathbb{V}|^2 &= v^2 - \boldsymbol{V}^2 = v^2 + |\boldsymbol{V}|^2 = v^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2. \\ \left|\overline{\mathbb{V}}\right|^2 &= v^2 + |-\boldsymbol{V}|^2 = |\mathbb{V}|^2. \\ |\mathbb{V}\mathbb{W}|^2 &= \mathbb{V}\mathbb{W}\overline{\mathbb{V}\mathbb{W}} = \mathbb{V}\;\mathbb{W}\overline{\mathbb{W}}\;\overline{\mathbb{V}} = \mathbb{V}\overline{\mathbb{V}}|\mathbb{W}|^2 = |\mathbb{V}|^2|\mathbb{W}|^2. \\ \det(\mathbb{V}) &= (v - v_3\mathrm{i})(v + v_3\mathrm{i}) - (-v_1 + v_2\mathrm{i})(v_1 + v_2\mathrm{i}) = v^2 + \sum v_i^2.\end{aligned}$$

8 单位四元数

单位四元数 ($|\mathbb{V}| = 1$) 不一定是四元数单位.

- $\left|\mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi}\right| = 1$.
- $\overline{\mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi}} = \mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{-\psi}$.
- 当且仅当 $\mathbb{A}^2 = -1$ 时, $\mathbb{A}$ 是纯的单位四元数.
- $\forall \mathbb{Q}, \exists \boldsymbol{v}, \psi : \mathbb{Q} = |\mathbb{Q}|\mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi}$.

证明

$$
\begin{aligned}
&\left|\mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi}\right| = \left|\cos\frac{\psi}{2} + \boldsymbol{V}\sin\frac{\psi}{2}\right| = \cos^2\frac{\psi}{2} + |\boldsymbol{V}|^2\sin^2\frac{\psi}{2} = 1.\\
&\overline{\mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi}} = \cos\frac{\psi}{2} + (-\boldsymbol{V})\sin\frac{\psi}{2} = \cos\frac{-\psi}{2} + \boldsymbol{V}\sin\frac{-\psi}{2} = \mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{-\psi}.\\
&\mathbb{A}^2 = (a+\boldsymbol{A})^2 = a^2 + 2a\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 = -1 \Rightarrow a = 0.\\
&\boldsymbol{A}^2 = -|\boldsymbol{A}|^2 = -1 \Leftrightarrow \boldsymbol{A}\ \text{是纯的单位四元数}.
\end{aligned}
$$

第四点解方程即得 (有两解).

9 旋转公式反射证法

若 $\mathbb{P}$ 与 $\mathbb{A}$ 为纯四元数, 则

- 正交的充要条件: $\mathbb{P}\mathbb{A} + \mathbb{A}\mathbb{P} = 0$.
- 若 $\mathbb{A}$ 为单位纯四元数, 即 $\mathbb{A}^2 = -1$,
  - 则上述方程化为 $\mathbb{P} = \mathbb{A}\mathbb{P}\mathbb{A}$.
  - 令 $\Pi_{\boldsymbol{A}}$ 表示以 $\boldsymbol{A}$ 为法向量的过原点的平面, 其方程为 $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{A} = 0$.

    ⭐ 考虑变换 $\mathbb{P} \mapsto \mathbb{P}' = \mathbb{A}\mathbb{P}\mathbb{A}$,

    - $\mathbb{P}'$ 为纯四元数, 并且 $|\mathbb{P}'| = |\mathbb{P}|$, 于是该变换表示空间中的运动.
    - $\Pi_{\boldsymbol{A}}$ 上的每点均不动, 且正交于 $\Pi_{\boldsymbol{A}}$ 的向量均被反向, 于是该映射为**反射** $\mathfrak{R}_{\Pi_{\boldsymbol{A}}}$.
  - 若由 $\Pi_{\boldsymbol{A}}$ 到 $\Pi_{\boldsymbol{B}}$ 的角为 $\psi/2$, 两平面交线的单位向量为 $\boldsymbol{V}$, 则旋转 $\mathcal{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi} = \mathfrak{R}_{\Pi_{\boldsymbol{A}}} \circ \mathfrak{R}_{\Pi_{\boldsymbol{B}}}$ 可表示为

    $$\mathbb{P} \mapsto \widetilde{\mathbb{P}} = (-\mathbb{B}\mathbb{A})\mathbb{P}(-\overline{\mathbb{B}\mathbb{A}}).$$

  - 其中 $\mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi} = -\mathbb{B}\mathbb{A} = \cos\frac{\psi}{2} + \boldsymbol{V}\sin\frac{\psi}{2}$. ($\mathbb{P}$ 和 $-\mathbb{P}$ 的效果是一样的)

证明

由于是纯四元数, $\mathbb{P}\mathbb{A} + \mathbb{A}\mathbb{P} = -2\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{A}$, 因此得到第一点.

当 $\mathbb{A}^2 = -1$, 第一点的两端同乘 $\mathbb{A}$ 即得 $\mathbb{P} = \mathbb{A}\mathbb{P}\mathbb{A}$.

$\mathbb{P}'$ 为纯四元数的结论, 可以代入值后展开, 这里采用向量法另证:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}' &= \boldsymbol{A}(-\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{P}\times\boldsymbol{A})\\
&= -(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{A})\\
&= -(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{P} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{P})\boldsymbol{A}\\
&= \boldsymbol{P} - 2(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}.\\
|\mathbb{P}'| &= |\mathbb{A}\mathbb{P}\mathbb{A}| = |\mathbb{A}|\,|\mathbb{P}|\,|\mathbb{A}| = |\mathbb{P}|.
\end{aligned}
$$

不动点可用正交的等价条件证明, 这里继续使用向量法:

当 $\boldsymbol{P} \in \Pi_{\boldsymbol{A}}$ 时, $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{A} = 0$, 于是 $\mathbb{P}' = \boldsymbol{P}$.

若 $\boldsymbol{P} \perp \Pi_{\boldsymbol{A}}$, 则 $\mathbb{P}' = \boldsymbol{P} - 2\,|\boldsymbol{P}|\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P} - 2\boldsymbol{P} = -\boldsymbol{P}$.

$$\mathbb{P} \mapsto \widetilde{\mathbb{P}} = \mathbb{B}(\mathbb{A}\mathbb{P}\mathbb{A})\mathbb{B} = (-\mathbb{B}\mathbb{A})\mathbb{P}(-\overline{\mathbb{B}\mathbb{A}}).$$

$$-\mathbb{B}\mathbb{A} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A} = \cos\frac{\psi}{2} + \boldsymbol{V}\sin\frac{\psi}{2}.$$

10 旋转公式向量证法

将 Σ 和 $\mathbb{C}$ 中的点用 $\mathbb{C}^2$ 中的齐次坐标向量表示, 如 $\mathfrak{p}=[\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2]^{\mathrm{T}}, z=p=\dfrac{\mathfrak{p}_1}{\mathfrak{p}_2}$, 则

$$\mathfrak{p}\mapsto\widetilde{\mathfrak{p}}=\mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi}\mathfrak{p}.$$

取 $\langle\mathfrak{p},\mathfrak{p}\rangle\equiv|\mathfrak{p}_1|^2+|\mathfrak{p}_2|^2=2$, 则 Σ 与 $\mathbb{C}$ 中点的换算公式为

$$\begin{cases} X+\mathrm{i}Y=\dfrac{2z}{1+|z|^2}=\dfrac{2\mathfrak{p}_1\overline{\mathfrak{p}}_2}{|\mathfrak{p}_1|^2+|\mathfrak{p}_2|^2}=\mathfrak{p}_1\overline{\mathfrak{p}}_2, \\ Z=\dfrac{|z|^2-1}{|z|^2+1}=\dfrac{|\mathfrak{p}_1|^2-|\mathfrak{p}_2|^2}{|\mathfrak{p}_1|^2+|\mathfrak{p}_2|^2}=|\mathfrak{p}_1|^2-1. \end{cases}$$

记 p 的球极射影象 $\hat{p}$ 对应的单位向量为 $\boldsymbol{P}=(X,Y,Z)$, 则

$$\mathbb{P}=X\boldsymbol{I}+Y\boldsymbol{J}+Z\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}\mathrm{i}Z & -Y+\mathrm{i}X\\ Y+\mathrm{i}X & -\mathrm{i}Z\end{bmatrix}$$

注意到

$$1-\mathrm{i}\mathbb{P}=\begin{bmatrix}1+Z & X+\mathrm{i}Y\\ X-\mathrm{i}Y & 1-Z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathfrak{p}_1\overline{\mathfrak{p}}_1 & \mathfrak{p}_1\overline{\mathfrak{p}}_2\\ \mathfrak{p}_2\overline{\mathfrak{p}}_1 & \mathfrak{p}_2\overline{\mathfrak{p}}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathfrak{p}_1\\ \mathfrak{p}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{\mathfrak{p}}_1 & \overline{\mathfrak{p}}_2\end{bmatrix}=\mathfrak{p}\mathfrak{p}^*.$$

于是有

$$\begin{aligned}1-\mathrm{i}\widetilde{\mathbb{P}}=\widetilde{\mathfrak{p}}\widetilde{\mathfrak{p}}^*&=\left(\mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi}\mathfrak{p}\right)\left(\mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi}\mathfrak{p}\right)^*=\mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi}\mathfrak{p}\mathfrak{p}^*\left(\mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi}\right)^*\\ &=\mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi}(1-\mathrm{i}\mathbb{P})\left(\mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi}\right)^*=1-\mathrm{i}\mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi}\mathbb{P}\left(\mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi}\right)^*.\end{aligned}$$

从而得到 $\widetilde{\mathbb{P}}=\mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi}\mathbb{P}\mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{-\psi}$.

11 旋转公式几何证法

12 四元数的逆与伴随

- 定义: $\mathbb{V}\mathbb{V}^{-1}=\mathbb{V}^{-1}\mathbb{V}=1$.
- 计算: $\mathbb{V}^{-1}=\dfrac{\overline{\mathbb{V}}}{|\mathbb{V}|^2}=\dfrac{\mathbb{V}^*}{|\mathbb{V}|^2}$. (向量形式和矩阵形式)
- 旋转: $(\mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi})^{-1}=(\mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi})^*=\overline{\mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi}}=\mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{-\psi}=\mathbb{R}_{-\boldsymbol{v}}^{\psi}$.
- 共轭转置: $\overline{\mathbb{V}}=\mathbb{V}^*=\operatorname{adj}(\mathbb{V})$. (伴随矩阵)
- 模长: $\left|\mathbb{V}^{-1}\right|=|\mathbb{V}|^{-1}$.
- 交换: $\overline{\mathbb{V}^{-1}}=\overline{\mathbb{V}}^{-1}$.

证明

$$\begin{aligned}\mathbb{V}^{-1}&=\frac{|\mathbb{V}|^2\mathbb{V}^{-1}}{|\mathbb{V}|^2}=\frac{\mathbb{V}^*\mathbb{V}\,\mathbb{V}^{-1}}{|\mathbb{V}|^2}=\frac{\mathbb{V}^*}{|\mathbb{V}|^2}.\\ \operatorname{adj}(\mathbb{V})&=\det(\mathbb{V})\mathbb{V}^{-1}=|\mathbb{V}|^2\mathbb{V}^{-1}=\mathbb{V}^*.\\ \overline{\mathbb{V}^{-1}}&=\frac{\mathbb{V}}{|\mathbb{V}|^2}=\frac{\mathbb{V}}{\left|\overline{\mathbb{V}}\right|^2}=\overline{\mathbb{V}}^{-1}.\end{aligned}$$

13 四元数的其它运算

- 点积 (内积)
  - $\mathbb{P}\cdot\mathbb{Q} := pq + \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q}$.
  - $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q} = -\dfrac{\boldsymbol{PQ}+\boldsymbol{QP}}{2}$.
  - $\mathbb{P}\cdot\mathbb{Q} = \dfrac{\mathbb{P}^*\mathbb{Q}+\mathbb{Q}^*\mathbb{P}}{2}$.
- 叉积 (矢积, 向量积)
  - $\mathbb{P}\times\mathbb{Q} := \boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q}$.
  - $\mathbb{P}\times\mathbb{Q} = \dfrac{\mathbb{P}\mathbb{Q}-\mathbb{Q}\mathbb{P}}{2}$.
- 外积
  - $\operatorname{Outer}(\mathbb{P},\mathbb{Q}) := \dfrac{\mathbb{P}^*\mathbb{Q}-\mathbb{Q}^*\mathbb{P}}{2}$.
  - $\operatorname{Outer}(\mathbb{P},\mathbb{Q}) = p\boldsymbol{Q} - q\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q}$.
- 偶积
  - $\operatorname{Even}(\mathbb{P},\mathbb{Q}) := \dfrac{\mathbb{P}\mathbb{Q}+\mathbb{Q}\mathbb{P}}{2}$.
  - $\operatorname{Even}(\mathbb{P},\mathbb{Q}) = (pq - \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q}) + (p\boldsymbol{Q} + q\boldsymbol{P})$.
- 纯量部 (标量部)
  - $\operatorname{Scalar}(\mathbb{P}) = p$.
  - $\operatorname{Scalar}(\mathbb{P}) = 1\cdot\mathbb{P}$.
  - $\operatorname{Scalar}(\mathbb{P}) = \dfrac{\mathbb{P}+\mathbb{P}^*}{2}$.
- 向量部
  - $\operatorname{Vector}(\mathbb{P}) = \boldsymbol{P}$.
  - $\operatorname{Vector}(\mathbb{P}) = \operatorname{Outer}(1,\mathbb{P})$.
  - $\operatorname{Vector}(\mathbb{P}) = \dfrac{\mathbb{P}-\mathbb{P}^*}{2}$.
- 模
  - $|\mathbb{P}| := \sqrt{\mathbb{P}^*\mathbb{P}} = \sqrt{\overline{\mathbb{P}}\mathbb{P}}$.
  - $|\mathbb{P}| = \sqrt{\mathbb{P}\cdot\mathbb{P}} = \sqrt{p^2 - \boldsymbol{P}^2}$.
  - $|\mathbb{P}| = \sqrt{p^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$.
- 角度的度量
  - 符号数: $\operatorname{sgn}(\mathbb{P}) := \dfrac{\mathbb{P}}{|\mathbb{P}|}$.
  - 另一表示: $\operatorname{sgn}(\mathbb{P}) = \dfrac{\overline{\mathbb{P}^{-1}}}{|\mathbb{P}^{-1}|}$.
  - 幅角: $\arg() := \arccos\dfrac{p}{|\mathbb{P}|}$.

证明

- 点积

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{PQ}+\boldsymbol{QP} &= \sum p_i q_i(\boldsymbol{I}^2+\boldsymbol{I}^2) + \sum p_i q_j(\boldsymbol{IJ}+\boldsymbol{JI}) \\
&= -2\sum p_i q_i = -2\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathbb{P}}\mathbb{Q} &= (p-\boldsymbol{P})(q+\boldsymbol{Q}) = pq + p\boldsymbol{Q} - q\boldsymbol{P} - \boldsymbol{PQ}, \\
\overline{\mathbb{Q}}\mathbb{P} &= (p+\boldsymbol{P})(q-\boldsymbol{Q}) = pq - p\boldsymbol{Q} + q\boldsymbol{P} - \boldsymbol{QP}, \\
\overline{\mathbb{P}}\mathbb{Q} + \overline{\mathbb{Q}}\mathbb{P} &= 2pq - \boldsymbol{PQ} - \boldsymbol{QP} = 2pq + 2\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q} = 2\mathbb{P}\cdot\mathbb{Q}.
\end{aligned}
$$

- 叉积

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\mathbb{Q} &= (pq - \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q}) + (p\boldsymbol{Q} + q\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q}),\\
\mathbb{Q}\mathbb{P} &= (pq - \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q}) + (p\boldsymbol{Q} + q\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q}),\\
\mathbb{P}\mathbb{Q} - \mathbb{Q}\mathbb{P} &= 2\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q} = 2\mathbb{P}\times\mathbb{Q}.
\end{aligned}
$$

- 外积

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q} &= -\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q},\\
\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P} &= -\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q},\\
\operatorname{Outer}(\mathbb{P},\mathbb{Q}) &= p\boldsymbol{Q} - q\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}\\
&= p\boldsymbol{Q} - q\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q}.
\end{aligned}
$$

- 偶积: 由叉积证明过程即得.
- 纯量部与向量部: 由定义代入即得.
- 模: 即长度, 这里仅作总结, 结论均已证过.
- 符号数: $\operatorname{sgn}(\mathbb{P}) = \dfrac{\mathbb{P}}{|\mathbb{P}|} = \overline{\mathbb{P}}^{-1}|\mathbb{P}| = \dfrac{\overline{\mathbb{P}^{-1}}}{|\mathbb{P}^{-1}|}$.