

# 平面旋转与空间旋转

---

## 0 前言

## 1 平面旋转

### 1.1 解析几何

#### 1.1.1 点关于点的旋转

#### 1.1.2 线关于点的旋转

### 1.2 旋转矩阵

#### 1.2.1 二阶矩阵

#### 1.2.2 三阶矩阵

### 1.3 复数旋转

#### 1.3.1 复数代数

#### 1.3.2 复数变换

## 2 空间旋转

### 2.1 空间旋转思路

#### 2.1.1 旋转思路概述

#### 2.1.2 罗德里格公式

#### 2.1.3 空间旋转矩阵

### 2.2 四元数的起源

#### 2.2.1 动机与三元数

#### 2.2.2 四元数的起源

#### 2.2.3 超复数的分类

### 2.3 四元数的代数

#### 2.3.1 基本性质

##### 1 四元数的概念

##### 2 基本代数性质

##### 3 两种矩阵同构

#### 2.3.2 常用算符

##### 1 共轭性质

##### 2 长度性质

##### 3 逆与伴随

#### 2.3.3 其它性质

##### 1 单位四元数

##### 2 二元的运算

##### 3 一元的运算

### 2.4 空间旋转公式

#### 2.4.1 矩阵证法

#### 2.4.2 反射证法

#### 2.4.3 向量证法

## 参考文献

## 0 前言

---

你可能有三角函数的基础，却未曾推导过平面旋转公式；或者熟知平面旋转公式，不过对空间旋转不甚了解；或者知晓空间旋转，却仍无法很好地理解四元数；或者看过四元数的科普视频或文章，但对四元数的由来仍抱有疑惑。那么这篇文章便是写给你看的；即使熟知四元数，甚至用四元数实现过空间旋转，也可以看看这篇文章，作为思路整理、知识复习和角度拓展。

在这篇文章里，我将分别讨论平面旋转与空间旋转，从历史的角度深入阐释四元数的由来，用简明的语言论证四元数的性质与空间旋转公式，最后比较多种旋转公式的优劣. 本文并不侧重于复数与四元数的可视化，如有需要可以参考 3blue1brown 的视频 ([复数](#), [四元数](#))；本文中我们也不会讨论运动的分类，而只着眼于旋转这一情况；

阅读本文需要有高中的数学基础，并了解行列式与矩阵的定义；个别地方用到了抽代的概念，不知道可以跳过，不影响整体的理解；1.3、2.3、2.4 这三节是从我笔记里复制过来的，给没有学过的人看的话易读性可能会比较差（提前谢罪）.

## 1 平面旋转

### 1.1 解析几何

#### 1.1.1 点关于点的旋转

在平面几何中，用直角坐标计算角度是相对繁琐的，参数中含有角度的极坐标更适合求解旋转. 因此我们希望利用极坐标的思路，求解直角坐标系中的旋转公式.

欲求点  $(x_1, y_1)$  关于原点顺时针旋转  $\beta$  后的坐标，将点表示为

$$(x_1, y_1) = (r \cos \alpha, r \sin \alpha), \quad (1)$$

于是旋转后的坐标  $(x, y)$  可表示为

$$\begin{cases} x = r \cos(\alpha + \beta) = x_1 \cos \beta - y_1 \sin \beta, \\ y = r \sin(\alpha + \beta) = x_1 \sin \beta + y_1 \cos \beta. \end{cases} \quad (2)$$

更一般的，利用平移，点  $(x_1, y_1)$  关于点  $(x_0, y_0)$  旋转  $\beta$  后的坐标可表示为

$$\begin{cases} x = (x_1 - x_0) \cos \beta - (y_1 - y_0) \sin \beta, \\ y = (x_1 - x_0) \sin \beta + (y_1 - y_0) \cos \beta. \end{cases} \quad (3)$$

#### 1.1.2 线关于点的旋转

欲求直线  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  关于原点顺时针旋转  $\beta$  后的坐标，我们单独研究直线上的每一点  $(x_1, y_1)$ ，有

$$\begin{cases} x = x_1 \cos \beta - y_1 \sin \beta, \\ y = x_1 \sin \beta + y_1 \cos \beta. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x \cos \beta + y \sin \beta, \\ y_1 = -x \sin \beta + y \cos \beta. \end{cases} \quad (4)$$

上式可联立方程解得，也可以直接根据  $(x_1, y_1)$  可看作由  $(x, y)$  绕原点顺时针旋转  $-\beta$  而得. 代入直线方程，消去  $x_1, y_1$ ，得旋转后的直线为

$$(A_1 \cos \beta - B_1 \sin \beta)x + (A_1 \sin \beta + B_1 \cos \beta)y + C = 0. \quad (5)$$

关于任意点  $(x_0, y_0)$  的旋转公式是类似的，只需要将上式的  $x$  和  $y$  分别替换为  $(x - x_0)$  和  $y - y_0$  即可.

记旋转后的直线为  $Ax + By + C = 0$ ，于是有系数变换

$$\begin{cases} A = A_1 \cos \beta - B_1 \sin \beta, \\ B = A_1 \sin \beta + B_1 \cos \beta. \end{cases} \quad (6)$$

注意到上式与 (2) 式形式相同, 这是因为对直线的旋转, 也是对直线的法向量  $(A_1, B_1)$  的旋转. 同时  $C$  保持不变, 这是因为旋转只改变法向量的方向, 而不改变其长度.

## 1.2 旋转矩阵

### 1.2.1 二阶矩阵

由矩阵及其乘法的定义, (2) (6) 的变换方程可表示为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

其中左乘的矩阵称为旋转矩阵, 简记为  $[R_\beta]$ . 这样的记号是有好处的, 因为它将角度与坐标分开了, 便于研究变换的复合; 这里的中括号是沿用了复分析里的习惯, 不加中括号则表示旋转变换, 加了中括号则表示旋转矩阵.

尽管矩阵乘法具有结合律, 若干个矩阵相乘, 从左向右算或从右向左算都可以得到正确的答案, 但作为变换看待的矩阵, 应当理解为从右向左算, 因为这对应了逐次的变换. 这并不奇怪, 一般来说映射也是从右向左算的, 而左乘矩阵实际上可以看作多元函数.

由上, 可以验证旋转矩阵具有如下性质:

1.  $\det[R_\alpha] = 1$ .
2.  $[R_\alpha]^{-1} = [R_{-\alpha}] = [R_\alpha]^T$ .
3.  $[R_\beta][R_\alpha] = [R_{\alpha+\beta}] = [R_\alpha][R_\beta]$ .

### 1.2.2 三阶矩阵

对于任意点  $(x_0, y_0)$  的旋转, 可以同样地表示为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

不过平移不是线性变换, 无法分离出矩阵, 除非使用三阶矩阵:

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

不过代价是存储空间与计算量的增大. 有兴趣的读者可以思考一下旋转变换  $[R_\alpha]$  与伸缩变换  $(x, y) = (kx_1, ky_1)$  对应的三阶矩阵是什么, 不过这不是本文的重点.

## 1.3 复数旋转

### 1.3.1 复数代数

对于复数及其运算, 这里仅作回顾. 记  $i^2 = -1$ , 则  $z \in \mathbb{C}$  可表示为

1. 直角坐标:  $z = a + bi$ , 其中  $a \in \mathbb{R}$  称为实部,  $b \in \mathbb{R}$  称为虚部.
2. 极坐标系:  $z = re^{i\theta}$ , 其中  $r \in \mathbb{R}$  称为模长,  $\theta \in \mathbb{R}$  称为幅角.

换算关系由欧拉公式给出:  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ , 并且有如下计算法则

1. 加法:  $(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$ .
2. 乘法:  $r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$ .

将复数看作平面上的点, 并称该平面为复平面:

$$\begin{aligned}\mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ a + bi &\mapsto (a, b)\end{aligned}$$

于是复数加法可以看作平移变换, 复数乘法可以看作伸缩旋转, 从而可以用于求解旋转变换, 具体见下一节.

上面我们回忆了直角坐标下的复数加法与极坐标下的复数乘法, 其它运算不是本文的重点. 不过其中极坐标下具有相同模长的复数相加减, 比较有趣, 但也常被教学所忽略, 结论如下, 有兴趣的读者可以尝试用代数与几何的方法分别证明.

1.  $e^{i\theta} + e^{i\phi} = 2 \cos \frac{\theta - \phi}{2} \cdot e^{\frac{i(\theta + \phi)}{2}}$ .
2.  $e^{i\theta} - e^{i\phi} = 2i \sin \frac{\theta - \phi}{2} \cdot e^{\frac{i(\theta + \phi)}{2}}$ .

### 1.3.2 复数变换

保向变换如下, 直接抄了之前的笔记, 以后可能会补充解释.

- **恒等变换:**  $\mathcal{E}(z) = z$ .
- **平移变换:**  $\mathcal{T}_v(z) = z + v$ .
  - 复合:  $\mathcal{T}_w \circ \mathcal{T}_v = \mathcal{T}_{w+v}$ .
  - 逆元:  $\mathcal{T}_v^{-1} = \mathcal{T}_{-v}$ .
- **旋转变换:**  $\mathcal{R}_a^\theta$ .
  - 复合:  $\mathcal{R}_a^\phi \circ \mathcal{R}_a^\theta = \mathcal{R}_a^{\phi+\theta}$ .
  - 逆元:  $(\mathcal{R}_a^\theta)^{-1} = \mathcal{R}_a^{-\theta}$ .
  - 分解:
    - $\mathcal{R}_a^\theta(z) = (\mathcal{T}_a \circ \mathcal{R}_0^\theta \circ \mathcal{T}_a^{-1})(z) = e^{i\theta}(z - a) + a$ .
    - $\mathcal{R}_a^\theta = \mathcal{T}_k \circ \mathcal{R}_0^\theta$ , 其中  $k = a(1 - e^{i\theta})$ .
  - 复合:
    - $\mathcal{T}_v \circ \mathcal{R}_a^\theta = \mathcal{R}_{c'}^\theta$ , 其中  $c = a + \frac{v}{1 - e^{i\theta}}$ .
    - $\mathcal{R}_a^\theta \circ \mathcal{T}_v = \mathcal{R}_{c'}^\theta$ , 其中  $c = a + \frac{ve^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}}$ .
    - $(\mathcal{R}_b^\beta \circ \mathcal{R}_a^\alpha)(z) = e^{i(\alpha+\beta)}z + a(1 - e^{i\alpha})e^{i\beta} + b(1 - e^{i\beta})$ .
      - 当  $\alpha + \beta \neq 2k\pi$  时,  $\mathcal{R}_b^\beta \circ \mathcal{R}_a^\alpha = \mathcal{R}_c^{\alpha+\beta}$ , 其中  $c = \frac{a(1 - e^{i\alpha})e^{i\beta} + b(1 - e^{i\beta})}{1 - e^{i(\alpha+\beta)}}$ .
      - 当  $\alpha + \beta = 2k\pi$  时,  $\mathcal{R}_b^\beta \circ \mathcal{R}_a^\alpha = \mathcal{T}_k$ . 其中  $k = (b - a)(1 - e^{i\beta})$ .

上式可推广至  $n$  次旋转的组合, 不再赘述.

  - **中心伸缩 (位似变换):**  $\mathcal{D}_a^r$ .

- **伸缩旋转 (相似变换):**  $\mathcal{D}_a^{r,\theta} \equiv \mathcal{R}_a^\theta \circ \mathcal{D}_a^r \equiv \mathcal{D}_a^r \circ \mathcal{R}_a^\theta$ .
  - 复合:  $\mathcal{D}_o^{R,\phi} \circ \mathcal{D}_o^{r,\theta} = \mathcal{D}_o^{r,\theta} \circ \mathcal{D}_o^{R,\phi} = \mathcal{D}_o^{Rr,\theta+\phi}$ .
  - 逆元:  $(\mathcal{D}_a^{r,\theta})^{-1} = \mathcal{D}_a^{1/r,-\theta}$ .
  - 分解
    - $\mathcal{D}_a^{r,\theta}(z) = (\mathcal{T}_a \circ \mathcal{D}_o^{r,\theta} \circ \mathcal{T}_a^{-1})(z) = re^{i\theta}(z - a) + a$ .
    - $\mathcal{D}_a^{r,\theta} = \mathcal{T}_k \circ \mathcal{D}_o^{r,\theta}$ , 其中  $k = a(1 - re^{i\theta})$ .
  - 复合
    - $(\mathcal{D}_b^{R,\beta} \circ \mathcal{D}_a^{r,\alpha})(z) = Rre^{i(\alpha+\beta)} + a(1 - re^{i\alpha})e^{i\beta} + b(1 - Re^{i\beta})$ .
      - 当  $re^{i(\alpha+\beta)} \neq 0$  时,  $\mathcal{D}_b^{R,\beta} \circ \mathcal{D}_a^{r,\alpha} = \mathcal{D}_c^{Rr,\alpha+\beta}$ , 其中
 
$$c = \frac{a(1 - re^{i\alpha})Re^{i\beta} + b(1 - Re^{i\beta})}{1 - Rre^{i(\alpha+\beta)}}.$$
      - 当  $re^{i(\alpha+\beta)} = 0$  时,  $\mathcal{D}_b^{R,\beta} \circ \mathcal{D}_a^{r,\alpha} = \mathcal{T}_k$ , 其中  $k = a(e^{i\beta} - r) + b(1 - Re^{i\beta})$ .

## 2 空间旋转

### 2.1 空间旋转思路

#### 2.1.1 旋转思路概述

处理空间旋转，常见的思路有：

1. 利用欧拉角
  1. 经典欧拉角.
  2. 泰特布莱恩角.
2. 利用轴角
  1. 罗德里格斯旋转公式.
  2. 四元数旋转公式.
3. 利用莫比乌斯变换.
4. 利用矩阵.

其中利用欧拉角的方法，最直观，参数也最少 (3 个参数)，并且也有利于同时处理旋转与平移变换. 但是为了提高计算效率，往往会存储 6 个单位数据；而且三维空间中的任意一个方向，都可以通过至少两种不同的欧拉角表示，即存在着歧义性问题；此外，欧拉角还存在着万向节死锁的问题.

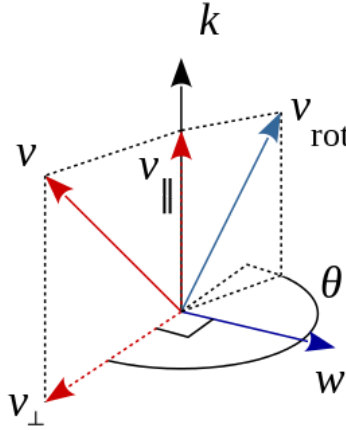
利用轴角可以避免歧义性问题与万向节锁死. 其中罗德里格斯旋转公式易于理解、容易运用，但是计算量大，计算精度较低. 更重要的是，该公式的应用是对应固定的旋转轴而言的，难以求解旋转的复合. 相比之下，四元数形式复杂，难以理解，但是计算量小，需要的存储空间也少，在求解旋转的复合上也有着优势. 但四元数也存在着算法上的缺点，即难以同时处理旋转与位移变换.

利用莫比乌斯线性变换与黎曼球面，虽然思路简明清晰，但是结果非常复杂，而且计算量很大. 不过这个方法的结果可以大大简化四元数旋转公式的推导. 但是由于需要复分析的前置知识，下文将列出结论后直接应用，而不再推导，具体步骤可以参考 Tristan Needham 的《复分析：可视化方法》.

最后的 "利用矩阵", 其实并不能称之为思路, 因为旋转矩阵不是凭空出现的, 而是由前面的各种方法推导而来. 实际上, 以上每一种方法都有相应的矩阵公式, 比如四元数既同构于二阶复矩阵的子环, 也同构于四阶实矩阵的子环, 因此就有了两种矩阵表示.

### 2.1.2 罗德里格公式

网上有许多文章解释了欧拉角, 故这里不再重述. 有兴趣的读者可以参考这篇文章: <https://www.zhihu.com/question/47736315>. 这里仅介绍罗德里格斯旋转公式, 如图 (图片来自网络)



先说结论, 设转轴的单位方向向量为  $\mathbf{k}$ , 旋转前的向量为  $\mathbf{v}$ , 旋转  $\theta$  后的向量为  $\mathbf{v}'$  (即图中的  $\mathbf{v}_{\text{rot}}$ ), 则

$$\mathbf{v}' = \cos \theta \mathbf{v} + (1 - \cos \theta)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k} + \sin \theta \mathbf{k} \times \mathbf{v} \quad (11)$$

$$= \mathbf{v} + (1 - \cos \theta)\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{v}) + \sin \theta \mathbf{k} \times \mathbf{v}. \quad (12)$$

**证明**

令  $\mathbf{v}$  平行于  $\mathbf{k}$  的分量为  $\mathbf{v}_{//}$ , 垂直于  $\mathbf{k}$  的分量为  $\mathbf{v}_{\perp}$ , 则  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{//} + \mathbf{v}_{\perp}$ .

$\mathbf{v}'$  记号同理, 并令  $\mathbf{w} = \mathbf{k} \times \mathbf{v}_{\perp}$ , 则  $\mathbf{w} = \mathbf{k} \times \mathbf{v}$ . 若消去  $\mathbf{v}_{\perp}$ , 则有

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \mathbf{v}_{//} + \mathbf{v}'_{\perp} \\ &= \mathbf{v}_{//} + (\cos \theta \mathbf{v}_{\perp} + \sin \theta \mathbf{w}) \\ &= \mathbf{v}_{//} + \cos \theta (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{//}) + \sin \theta \mathbf{w} \\ &= \cos \theta \mathbf{v} + (1 - \cos \theta) \mathbf{v}_{//} + \sin \theta \mathbf{w} \\ &= \cos \theta \mathbf{v} + (1 - \cos \theta)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k})\mathbf{k} + \sin \theta \mathbf{k} \times \mathbf{v}. \end{aligned}$$

若消去  $\mathbf{v}_{//}$ , 则有

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \mathbf{v}_{//} + \mathbf{v}'_{\perp} \\ &= (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\perp}) + (\cos \theta \mathbf{v}_{\perp} + \sin \theta \mathbf{w}) \\ &= \mathbf{v} + (\cos \theta - 1) \mathbf{v}_{\perp} + \sin \theta \mathbf{k} \times \mathbf{v} \\ &= \mathbf{v} + (1 - \cos \theta) \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{v}) + \sin \theta \mathbf{k} \times \mathbf{v}. \end{aligned}$$

实际上, 上式还可以直接由  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$  得到.

### 2.1.3 空间旋转矩阵

欲从罗德里格斯旋转公式推导矩阵形式，最大的阻力是叉乘。故这里引入反对称矩阵，即对于

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

我们定义  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$  的反对称矩阵为

$$\hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

于是有  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \hat{\mathbf{a}} \mathbf{b}$ ，将向量叉乘转换为了矩阵乘法。

记  $\mathbf{I}$  为单位矩阵，则式 (11) 与 (12) 可表示为  $\mathbf{v}' = \mathbf{R} \mathbf{v}$ ，其中

$$\mathbf{R} = \cos \theta \mathbf{I} + (1 - \cos \theta) \mathbf{k} \mathbf{k}^T + \sin \theta \hat{\mathbf{k}} \quad (15)$$

$$= \mathbf{I} + (1 - \cos \theta) (\hat{\mathbf{k}})^2 + \sin \theta \hat{\mathbf{k}}. \quad (16)$$

记  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)^T$ ，则展开为矩阵形式后即为

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \theta + k_1^2(1 - \cos \theta) & k_1^2(1 - \cos \theta) - k_3 \sin \theta & k_1^2(1 - \cos \theta) + k_2 \sin \theta \\ k_2^2(1 - \cos \theta) + k_3 \sin \theta & \cos \theta + k_2^2(1 - \cos \theta) & k_2^2(1 - \cos \theta) - k_1 \sin \theta \\ k_3^2(1 - \cos \theta) - k_2 \sin \theta & k_1 \sin \theta + k_3^2(1 - \cos \theta) & \cos \theta + k_3^2(1 - \cos \theta) \end{pmatrix}. \quad (17)$$

注意这里的旋转矩阵是三阶矩阵，之后在四元数中我们会发现还可以表示为二阶复矩阵或三阶实矩阵，只不过其它运算也会发生相应的改变。

## 2.2 四元数的起源

### 2.2.1 动机与三元数

由上，利用欧拉角求解空间旋转存在着万向节死锁的问题，罗德里格斯公式计算复杂、难以求解旋转复合，实际上，利用莫比乌斯变换得到的旋转矩阵在应用时也较为繁琐。因此，我们需要寻找一种便捷且适用性广的求解空间旋转的方法。

我们知道，复数是实数的推广，而复数的乘法恰好对应了复平面上的旋转。那么可不可以推广复数，使得某种“超复数”存在某种运算可以对应空间旋转呢？

在  $i^2 = -1$  的基础上，补充定义  $j^2 = -1, i \neq j$  是很自然的想法，于是三元数是  $\mathbb{R}$  上的线性空间。但是  $ij$  应该等于多少呢？由乘法的封闭性，不妨令

$$ij = x + yi + zj, x, y, z \in \mathbb{R}. \quad (18)$$

首先我们看到， $z \neq 0$ ，否则两端左乘  $i$  得  $j = -y + xi \in \mathbb{C}$ ，本质上还是复数。

于是由上式可得

$$j = \frac{1}{z}(ij - x - yi), \quad (19)$$

$$ij = \frac{1}{z}(-j - xi + y), \quad (20)$$

比较系数可得  $z^2 = -1, z \notin \mathbb{R}$ , 矛盾, 从而  $ij$  不能由上述三元数表示.

这个反证法的思路与  $\sqrt{2}$  不是有理数的证明类似. 不过  $\sqrt{2}$  虽然不属于有理数, 但属于实数, 有没有可能寻找到更大的代数系统, 使得乘法的封闭性得以满足呢?

### 2.2.2 四元数的起源

自然的想法是令  $k = ij \notin \mathbb{C}$ , 同样自然的, 我们令  $ij = ji$ , 即满足交换律, 于是  $k^2 = 1$ . 现在我们知道, 这样的代数系统称为双复数, 不过更常见的定义是令  $i^2 = -1, j^2 = 1, ij = ji = k$ , 其子环  $\mathbb{R}[i]$  称为圆复数 (即复数  $\mathbb{C}$ ), 而  $\mathbb{R}[j]$  称为双曲复数. 顾名思义, 双曲复数与双曲线有着密不可分的联系, 不过不是这里讨论的重点.

旋转运动是可逆的, 因此我们希望四元数除零元外都可逆. 双复数不能作为我们理想的 "四元数", 因为双复数有零因子, 从而双复数的乘法未必可逆. 例如  $(1 + j)(1 - j) = 0$ , 假设零因子  $1 + j$  有逆元且为  $a^{-1}$ , 等式两端左乘  $a^{-1}$ , 得  $j = 1$ , 从而矛盾.

似乎又陷入了窘境, 而且这样构造出来的双复数在运算上不具有轮换对称性, 并不美观. 不过回过头来, 我们希望通过三元或四元的 "超复数" 来研究三维的空间旋转, 空间旋转又具有怎样的性质呢? 我们惊讶地发现, 空间旋转并不满足交换律! 随便拿起一支笔或一颗魔方, 便可以验证这一点.

如果让四元数也不满足交换律呢? 实数是满足交换律的, 因此我们令  $ij \neq ji$ , 但具体是怎样的关系呢? 互为相反数是最简单的, 即  $ij = -ji$ , 于是我们可以推得  $k^2 = -1, jk = -kj, ki = -ik$ , 这些运算恰好也是轮换对称的.

进一步我们还可以得到这种定义的四元数的诸多良好性质, 其中就包括非零元必有逆, 并且可以利用四元数方便地求解空间旋转的复合和效果. 这些就是接下来要推导的了. 即使抛开实际应用, 四元数作为纯数学, 内容也是丰富而有趣的.

最后, 数学之外的有关哈密顿发现四元数的故事, 有兴趣可以看看这篇文章: <https://zhuanlan.zhihu.com/p/150699389>

### 2.2.3 超复数的分类

以上我们探索了三种形式的超复数, 作为复数的 "扩展", 它们的定义分别是:

1.  $i^2 = -1, j^2 = -1, ij = ji = k$ . (双复数的等价超复数)

2.  $i^2 = -1, j^2 = 1, ij = ji = k$ . (双复数)

3.  $i^2 = -1, j^2 = -1, ij = -ji = k$ . (四元数)

从形式上看, 只剩下一个有待研究:

4.  $i^2 = -1, j^2 = 1, ij = -ji = k$ . (反四元数)

这种超复数称为分裂四元数或反四元数, 与双复数一样, 它也有非零元无逆, 如  $\frac{1+j}{2}$  即为幂等的零因子, 因此反四元数的性质也没有四元数好.

最后, 我们之后使用的四元数单位的字体与前文不同, 不再是正体. 四元数单位之所以要使用大写的粗斜体, 是为了与复数单位区分. 由复数推广至四元数是自然的, 但是之后在研究四元数时, 常将其同构映射为复矩阵, 此时若不用粗斜体, 则容易混淆; 而小写的粗斜体常用于表示空间向量, 因此表示为  $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$  是最为清晰的.



## 2.3 四元数的代数

### 2.3.1 基本性质

#### 1 四元数的概念

- 定义  $\mathbb{V}$ 
  - $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -1$ .
  - $\mathbb{V} = v\mathbf{1} + v_1\mathbf{I} + v_2\mathbf{J} + v_3\mathbf{K}$ .
  - 读者可验证上述定义与上一节中的定义等价.
- 备注
  - 这里使用空心字母表示四元数元素, 而非集合, 以区分于标量和向量.
  - 这里四元数单位使用粗斜体, 表明它是 (四维实) 向量或 (二阶复) 矩阵.
  - 有的资料上使用正体表示四元数单位, 表明它是标量常数; 这里不建议如此表示.
- 概念
  - 数量部分:  $v = v\mathbf{1}$ .
  - 向量部分:  $\mathbf{V} = v_1\mathbf{I} + v_2\mathbf{J} + v_3\mathbf{K}$ .
  - 纯四元数:  $\mathbb{V} = \mathbf{V}$ .

#### 2 基本代数性质

- 性质
  - $IJ = K, JK = I, KI = J$ .
  - $IJ = -JI, JK = -KJ, KI = -IK$ .
  - $IJK = JKI = KIJ = -1$ .
- 乘法
  - $\mathbf{VW} = -\mathbf{V} \cdot \mathbf{W} + \mathbf{V} \times \mathbf{W}$ .
  - $\mathbb{VW} = (vw - \mathbf{V} \cdot \mathbf{W}) + (v\mathbf{W} + w\mathbf{V} + \mathbf{V} \times \mathbf{W})$ .
- 备注
  - 将四元数集合视为  $\mathbb{R}$  上的线性空间, 加法与乘法都是通常意义下的.
  - 将纯四元数视为三维空间向量, 点积与叉积都是通常意义下的.
  - 四元数无乘法交换律, 不能成域, 而只能构成环, 称为哈密顿四元数除环  $\mathbb{H}$ .

#### 3 两种矩阵同构

注:  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$  表示域  $\mathbb{F}$  上由  $n$  阶矩阵构成的一般线性群.

- 二阶复矩阵

$$\begin{aligned}\phi_1: \quad Q_4 &\rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \\ \mathbb{V} &= a\mathbf{1} + b\mathbf{I} + c\mathbf{J} + d\mathbf{K} \\ &\mapsto \begin{pmatrix} a - di & -b + ci \\ b + ci & a + di \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{21}$$

- $\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , 对应于  $1(z) = z$ , 即恒等变换.
- $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ , 对应于  $I(z) = \frac{1}{z}$ , 即黎曼球面绕  $x_1$  轴旋转  $180^\circ$ .
- $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , 对应于  $J(z) = -\frac{1}{z}$ , 即黎曼球面绕  $x_2$  轴旋转  $180^\circ$ .
- $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ , 对应于  $K(z) = -z$ , 即黎曼球面绕  $x_3$  轴旋转  $180^\circ$ .
- 四阶实矩阵

$$\begin{aligned}
\phi: Q_4 &\rightarrow \text{GL}_4(\mathbb{R}) \\
\mathbb{V} &= a\mathbf{1} + b\mathbf{I} + c\mathbf{J} + d\mathbf{K} \\
&\mapsto \begin{pmatrix} a & -b & d & -c \\ b & a & -c & -d \\ -d & c & a & -b \\ c & d & b & a \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{22}$$

其中四元数单位被映射为

$$\begin{aligned}
\mathbf{1} &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, & \mathbf{I} &\mapsto \begin{pmatrix} & -1 & & \\ 1 & & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{J} &\mapsto \begin{pmatrix} & & & -1 \\ & & -1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}, & \mathbf{K} &\mapsto \begin{pmatrix} & & 1 & \\ & & & -1 \\ -1 & & & \\ & 1 & & \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{23}$$

- 备注
  - 以下将  $Q_4$  与  $\text{GL}_2(\mathbb{C})$  中的元素看成是相等的, 而不采用  $\text{GL}_4(\mathbb{R})$  的同构.
  - 想要通过计算机求解四元数运算, 可以利用矩阵形式.

## 2.3.2 常用算符

### 1 共轭性质

共轭  $\overline{\mathbb{V}}$  是对于四元数而言的, 而非矩阵共轭.

- $\overline{\mathbb{V}} := \mathbb{V}^*$  (相应矩阵的共轭转置).
- $\overline{\mathbb{V}} = v - \mathbf{V}$ .
- $\overline{\mathbf{VW}} = \mathbf{WV}$ . (注意顺序)
- $\overline{\mathbb{VW}} = \overline{\mathbb{W}} \overline{\mathbb{V}}$ . (注意顺序)

**证明**

(1) 式为矩阵共轭定义, (2) 式为向量共轭定义, 由矩阵表示可知二者等价.

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{V}\mathbf{W}} &= \overline{\sum v_i w_i \mathbf{I}^2 + \sum v_i w_j \mathbf{I}\mathbf{J}} \\
&= -\sum v_i w_i - \sum v_i w_j \mathbf{K} \\
&= -\sum v_i w_i + \sum v_i w_j \mathbf{J}\mathbf{I} \\
&= \mathbf{W}\mathbf{V} = \overline{\mathbf{W}} \overline{\mathbf{V}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbb{V}\mathbb{W}} &= \overline{(v + \mathbf{V})(w + \mathbf{W})} \\
&= \overline{vw + v\mathbf{V} + w\mathbf{W} + \mathbf{V}\mathbf{W}} \\
&= vw - v\mathbf{V} - w\mathbf{W} + \mathbf{W}\mathbf{V} \\
&= (w - \mathbf{W})(v - \mathbf{V}) = \overline{\mathbb{W}} \overline{\mathbb{V}}.
\end{aligned}$$

## 2 长度性质

长度  $|\mathbb{V}|$  又称为二范数.

- $|\mathbb{V}|^2 := \mathbb{V}\overline{\mathbb{V}} = \overline{\mathbb{V}}\mathbb{V} = |\overline{\mathbb{V}}|^2$ .
- $|\mathbf{V}|^2 = -\mathbf{V}^2 = -\mathbf{V}\mathbf{V} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}$ .
- $|\mathbb{V}|^2 = v^2 + |\mathbf{V}|^2 = v^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$ .
- $|\mathbb{V}\mathbb{W}| = |\mathbb{V}| |\mathbb{W}|$ .
- $|\mathbb{V}|^2 = \det(\mathbb{V})$ .

**证明**

$$\begin{aligned}
|\mathbf{V}|^2 &= -\mathbf{V}\mathbf{V} = \sum v_i^2 + \sum v_i v_j (\mathbf{I}\mathbf{J} + \mathbf{J}\mathbf{I}) = \sum v_i^2 = \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}. \\
|\mathbb{V}|^2 &= v^2 - \mathbf{V}^2 = v^2 + |\mathbf{V}|^2 = v^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2. \\
|\overline{\mathbb{V}}|^2 &= v^2 + |-\mathbf{V}|^2 = |\mathbb{V}|^2. \\
|\mathbb{V}\mathbb{W}|^2 &= \mathbb{V}\mathbb{W}\overline{\mathbb{V}\mathbb{W}} = \mathbb{V} \mathbb{W}\overline{\mathbb{W}} \overline{\mathbb{V}} = \mathbb{V}\overline{\mathbb{V}} |\mathbb{W}|^2 = |\mathbb{V}|^2 |\mathbb{W}|^2. \\
\det(\mathbb{V}) &= (v - v_3\mathbf{i})(v + v_3\mathbf{i}) - (-v_1 + v_2\mathbf{i})(v_1 + v_2\mathbf{i}) = v^2 + \sum v_i^2.
\end{aligned}$$

## 3 逆与伴随

- 定义:  $\mathbb{V}\mathbb{V}^{-1} = \mathbb{V}^{-1}\mathbb{V} = 1$ .
- 计算:  $\mathbb{V}^{-1} = \frac{\overline{\mathbb{V}}}{|\mathbb{V}|^2} = \frac{\mathbb{V}^*}{|\mathbb{V}|^2}$ . (向量形式和矩阵形式)
- 旋转:  $(\mathbb{R}_v^\psi)^{-1} = (\mathbb{R}_v^\psi)^* = \overline{\mathbb{R}_v^\psi} = \mathbb{R}_v^{-\psi} = \mathbb{R}_{-v}^\psi$ .
- 共轭转置:  $\overline{\mathbb{V}} = \mathbb{V}^* = \text{adj}(\mathbb{V})$ . (伴随矩阵)
- 模长:  $|\mathbb{V}^{-1}| = |\mathbb{V}|^{-1}$ .
- 交换:  $\overline{\mathbb{V}^{-1}} = \overline{\mathbb{V}}^{-1}$ .

**证明**

$$\begin{aligned}\mathbb{V}^{-1} &= \frac{|\mathbb{V}|^2 \mathbb{V}^{-1}}{|\mathbb{V}|^2} = \frac{\mathbb{V}^* \mathbb{V} \mathbb{V}^{-1}}{|\mathbb{V}|^2} = \frac{\mathbb{V}^*}{|\mathbb{V}|^2}. \\ \text{adj}(\mathbb{V}) &= \det(\mathbb{V}) \mathbb{V}^{-1} = |\mathbb{V}|^2 \mathbb{V}^{-1} = \mathbb{V}^*. \\ \overline{\mathbb{V}^{-1}} &= \frac{\mathbb{V}}{|\mathbb{V}|^2} = \frac{\mathbb{V}}{|\overline{\mathbb{V}}|^2} = \overline{\mathbb{V}}^{-1}.\end{aligned}$$

### 2.3.3 其它性质

#### 1 单位四元数

单位四元数 ( $|\mathbb{V}| = 1$ ) 不一定是四元数单位.

- $|\mathbb{R}_v^\psi| = 1$ .
- $\overline{\mathbb{R}_v^\psi} = \mathbb{R}_v^{-\psi}$ .
- 当且仅当  $\mathbb{A}^2 = -1$  时,  $\mathbb{A}$  是纯的单位四元数.
- $\forall \mathbb{Q}, \exists v, \psi : \mathbb{Q} = |\mathbb{Q}| \mathbb{R}_v^\psi$ .

**证明**

$$\begin{aligned}|\mathbb{R}_v^\psi| &= \left| \cos \frac{\psi}{2} + \mathbf{V} \sin \frac{\psi}{2} \right| = \cos^2 \frac{\psi}{2} + |\mathbf{V}|^2 \sin^2 \frac{\psi}{2} = 1. \\ \overline{\mathbb{R}_v^\psi} &= \cos \frac{\psi}{2} + (-\mathbf{V}) \sin \frac{\psi}{2} = \cos \frac{-\psi}{2} + \mathbf{V} \sin \frac{-\psi}{2} = \mathbb{R}_v^{-\psi}. \\ \mathbb{A}^2 &= (a + \mathbf{A})^2 = a^2 + 2a\mathbf{A} + \mathbf{A}^2 = -1 \Rightarrow a = 0. \\ \mathbf{A}^2 &= -|\mathbf{A}|^2 = -1 \Leftrightarrow \mathbf{A} \text{ 是纯的单位四元数.}\end{aligned}$$

第四点解方程即得 (有两解).

#### 2 二元的运算

- 点积 (内积)
  - $\mathbb{P} \cdot \mathbb{Q} := pq + \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}.$
  - $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = -\frac{\mathbf{PQ} + \mathbf{QP}}{2}.$
  - $\mathbb{P} \cdot \mathbb{Q} = \frac{\mathbb{P}^* \mathbb{Q} + \mathbb{Q}^* \mathbb{P}}{2}.$
- 叉积 (矢积, 向量积)
  - $\mathbb{P} \times \mathbb{Q} := \mathbf{P} \times \mathbf{Q}.$
  - $\mathbb{P} \times \mathbb{Q} = \frac{\mathbf{PQ} - \mathbf{QP}}{2}.$
- 外积
  - $\text{Outer}(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) := \frac{\mathbb{P}^* \mathbb{Q} - \mathbb{Q}^* \mathbb{P}}{2}.$
  - $\text{Outer}(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) = p\mathbf{Q} - q\mathbf{P} - \mathbf{P} \times \mathbf{Q}.$
- 偶积
  - $\text{Even}(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) := \frac{\mathbf{PQ} + \mathbf{QP}}{2}.$

- $\text{Even}(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) = (pq - \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) + (p\mathbf{Q} + q\mathbf{P}).$

### 证明

- 点积

$$\mathbf{PQ} + \mathbf{QP} = \sum p_i q_i (\mathbf{I}^2 + \mathbf{I}^2) + \sum p_i q_j (\mathbf{IJ} + \mathbf{JI}) \quad (24)$$

$$= -2 \sum p_i q_i = -2\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}. \quad (25)$$

$$\overline{\mathbb{P}}\mathbf{Q} = (p - \mathbf{P})(q + \mathbf{Q}) = pq + p\mathbf{Q} - q\mathbf{P} - \mathbf{PQ}, \quad (26)$$

$$\overline{\mathbb{Q}}\mathbf{P} = (p + \mathbf{P})(q - \mathbf{Q}) = pq - p\mathbf{Q} + q\mathbf{P} - \mathbf{QP}, \quad (27)$$

$$\overline{\mathbb{P}}\mathbf{Q} + \overline{\mathbb{Q}}\mathbf{P} = 2pq - \mathbf{PQ} - \mathbf{QP} = 2pq + 2\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = 2\mathbb{P} \cdot \mathbb{Q}. \quad (28)$$

- 叉积

$$\mathbb{P}\mathbf{Q} = (pq - \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) + (p\mathbf{Q} + q\mathbf{P} + \mathbf{P} \times \mathbf{Q}), \quad (29)$$

$$\mathbb{Q}\mathbf{P} = (pq - \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) + (p\mathbf{Q} + q\mathbf{P} - \mathbf{P} \times \mathbf{Q}), \quad (30)$$

$$\mathbb{P}\mathbf{Q} - \mathbb{Q}\mathbf{P} = 2\mathbf{P} \times \mathbf{Q} = 2\mathbb{P} \times \mathbb{Q}. \quad (31)$$

- 外积

$$\mathbf{PQ} = -\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{P} \times \mathbf{Q}, \quad (32)$$

$$\mathbf{QP} = -\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} - \mathbf{P} \times \mathbf{Q}, \quad (33)$$

$$\text{Outer}(\mathbb{P}, \mathbb{Q}) = p\mathbf{Q} - q\mathbf{P} - \mathbf{PQ} + \mathbf{QP} \quad (34)$$

$$= p\mathbf{Q} - q\mathbf{P} - \mathbf{P} \times \mathbf{Q}. \quad (35)$$

- 偶积: 由叉积证明过程即得.

### 3 一元的运算

- 纯量部 (标量部)

- $\text{Scalar}(\mathbb{P}) = p.$

- $\text{Scalar}(\mathbb{P}) = 1 \cdot \mathbb{P}.$

- $\text{Scalar}(\mathbb{P}) = \frac{\mathbb{P} + \mathbb{P}^*}{2}.$

- 向量部

- $\text{Vector}(\mathbb{P}) = \mathbf{P}.$

- $\text{Vector}(\mathbb{P}) = \text{Outer}(1, \mathbb{P}).$

- $\text{Vector}(\mathbb{P}) = \frac{\mathbb{P} - \mathbb{P}^*}{2}.$

- 模

- $|\mathbb{P}| := \sqrt{\mathbb{P}^* \mathbb{P}} = \sqrt{\overline{\mathbb{P}} \mathbb{P}}.$

- $|\mathbb{P}| = \sqrt{\mathbb{P} \cdot \mathbb{P}} = \sqrt{p^2 - \mathbf{P}^2}.$

- $|\mathbb{P}| = \sqrt{p^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}.$

- 角度的度量

- 符号数:  $\text{sgn}(\mathbb{P}) := \frac{\mathbb{P}}{|\mathbb{P}|}.$

- 另一表示:  $\text{sgn}(\mathbb{P}) = \frac{\overline{\mathbb{P}^{-1}}}{|\mathbb{P}^{-1}|}$ .
- 幅角:  $\arg(\mathbb{P}) := \arccos \frac{p}{|\mathbb{P}|}$ .

### 证明

- 纯量部与向量部: 由定义代入即得.
- 模: 即[长度](#), 这里仅作总结, 结论均已证过.
- 符号数:  $\text{sgn}(\mathbb{P}) = \frac{\mathbb{P}}{|\mathbb{P}|} = \overline{\mathbb{P}^{-1}} |\mathbb{P}| = \frac{\overline{\mathbb{P}^{-1}}}{|\mathbb{P}^{-1}|}$ .

## 2.4 空间旋转公式

注: 空间旋转公式即下文中的 (37) (38) 两式.

### 2.4.1 矩阵证法

前置知识: 黎曼球面上关于单位向量  $\mathbf{v} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$  顺时针旋转  $\psi$  的变换, 对应于复平面上莫比乌斯线性变换的矩阵形式为

$$[R_{\mathbf{v}}^{\psi}] = \begin{bmatrix} \cos \frac{\psi}{2} + in \sin \frac{\psi}{2} & (-m + il) \sin \frac{\psi}{2} \\ (m + il) \sin \frac{\psi}{2} & \cos \frac{\psi}{2} - in \sin \frac{\psi}{2} \end{bmatrix}. \quad (36)$$

如 2.1.1 中所说, 这个式子我们不做证明, 也不做解释, 在本小节的推导里, 只会以之作为推导的中间步骤.

- 旋转的矩阵 (可求复合)

绕  $\mathbf{v} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$  旋转  $\psi$  的矩阵  $[R_{\mathbf{v}}^{\psi}]$ .

记  $\mathbf{V} = l\mathbf{I} + m\mathbf{J} + n\mathbf{K}$ , 代入四元数的二阶矩阵形式, 可得

$$\mathbb{R}_{\mathbf{v}}^{\psi} = \cos \frac{\psi}{2} + \mathbf{V} \sin \frac{\psi}{2} =: e^{\mathbf{V} \frac{\psi}{2}}. \quad (37)$$

- 旋转的效果 (可求象)

一般的,  $\mathcal{R}_{\hat{\mathbf{p}}}^{\theta} = \mathcal{R}_{\hat{\mathbf{a}}}^{\psi} \circ \mathcal{R}_{\hat{\mathbf{p}}}^{\theta} \circ \mathcal{R}_{\hat{\mathbf{a}}}^{-\psi}$ , 即  $\mathbb{R}_{\hat{\mathbf{p}}}^{\theta} = \mathbb{R}_{\mathbf{v}}^{\psi} \circ \mathbb{R}_{\hat{\mathbf{p}}}^{\theta} \circ \mathbb{R}_{\mathbf{v}}^{-\psi}$ .

设  $\mathcal{R}_{\mathbf{v}}^{\psi}$  将  $\mathbf{P} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  旋转到  $\tilde{\mathbf{P}}$ :

在上式中令  $\theta = \pi$ , 则二元旋转  $\mathbb{R}_{\mathbf{P}}^{\theta}$  和  $\mathbb{R}_{\tilde{\mathbf{P}}}^{\pi}$  正是纯四元数  $\mathbb{P}$  和  $\tilde{\mathbb{P}}$ , 故有

$$\tilde{\mathbb{P}} = \mathbb{R}_{\mathbf{v}}^{\psi} \mathbb{P} \mathbb{R}_{\mathbf{v}}^{-\psi}. \quad (38)$$

- 伸缩旋转

- $\forall \mathbb{Q}, \exists \mathbf{v}, \psi : \mathbb{Q} = |\mathbb{Q}| \mathbb{R}_{\mathbf{v}}^{\psi}$ , 即伸缩旋转.
- 由旋转的象的公式得, 伸缩旋转的效果为:

$$\mathbb{P} \mapsto \tilde{\mathbb{P}} = \mathbb{Q} \mathbb{P} \overline{\mathbb{Q}}. \quad (39)$$

## 2.4.2 反射证法

### 思路

若  $\mathbb{P}$  与  $\mathbb{A}$  为纯四元数, 则

- 正交的充要条件:  $\mathbb{P}\mathbb{A} + \mathbb{A}\mathbb{P} = 0$ .
- 若  $\mathbb{A}$  为单位纯四元数, 即  $\mathbb{A}^2 = -1$ ,
  - 则上述方程化为  $\mathbb{P} = \mathbb{A}\mathbb{P}\mathbb{A}$ .
  - 令  $\Pi_{\mathbf{A}}$  表示以  $\mathbf{A}$  为法向量的过原点的平面, 其方程为  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = 0$ .

考虑变换  $\mathbb{P} \mapsto \mathbb{P}' = \mathbb{A}\mathbb{P}\mathbb{A}$ ,

- $\mathbb{P}'$  为纯四元数, 并且  $|\mathbb{P}'| = |\mathbb{P}|$ , 于是该变换表示空间中的运动.
- $\Pi_{\mathbf{A}}$  上的每点均不动, 且正交于  $\Pi_{\mathbf{A}}$  的向量均被反向, 于是该映射为**反射**  $\mathfrak{R}_{\Pi_{\mathbf{A}}}$ .
- 若由  $\Pi_{\mathbf{A}}$  到  $\Pi_{\mathbf{B}}$  的角为  $\psi/2$ , 两平面交线的单位向量为  $\mathbf{V}$ , 则旋转  $\mathcal{R}_{\mathbf{v}}^{\psi} = \mathfrak{R}_{\Pi_{\mathbf{A}}} \circ \mathfrak{R}_{\Pi_{\mathbf{B}}}$  可表示为

$$\mathbb{P} \mapsto \tilde{\mathbb{P}} = (-\mathbb{B}\mathbb{A})\mathbb{P}(-\overline{\mathbb{B}\mathbb{A}}). \quad (40)$$

- 其中  $\mathbb{R}_{\mathbf{v}}^{\psi} = -\mathbb{B}\mathbb{A} = \cos \frac{\psi}{2} + \mathbf{V} \sin \frac{\psi}{2}$ . ( $\mathbb{P}$  和  $-\mathbb{P}$  的效果是一样的)

### 证明

由于是纯四元数,  $\mathbb{P}\mathbb{A} + \mathbb{A}\mathbb{P} = -2\mathbf{P} \cdot \mathbf{A}$ , 因此得到第一点.

当  $\mathbb{A}^2 = -1$ , 第一点的两端同乘  $\mathbb{A}$  即得  $\mathbb{P} = \mathbb{A}\mathbb{P}\mathbb{A}$ .

$\mathbb{P}'$  为纯四元数的结论, 可以代入值后展开, 这里采用向量法另证:

$$\mathbb{P}' = \mathbf{A}(-\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{P} \times \mathbf{A}) \quad (41)$$

$$= -(\mathbf{P} \cdot \mathbf{A})\mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\mathbf{P} \times \mathbf{A}) \quad (42)$$

$$= -(\mathbf{P} \cdot \mathbf{A})\mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})\mathbf{P} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{P})\mathbf{A} \quad (43)$$

$$= \mathbf{P} - 2(\mathbf{P} \cdot \mathbf{A})\mathbf{A}. \quad (44)$$

$$|\mathbb{P}'| = |\mathbb{A}\mathbb{P}\mathbb{A}| = |\mathbb{A}| |\mathbb{P}| |\mathbb{A}| = |\mathbb{P}|. \quad (45)$$

不动点可用正交的等价条件证明, 这里继续使用向量法:

当  $\mathbf{P} \in \Pi_{\mathbf{A}}$  时,  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = 0$ , 于是  $\mathbb{P}' = \mathbf{P}$ .

若  $\mathbf{P} \perp \Pi_{\mathbf{A}}$ , 则  $\mathbb{P}' = \mathbf{P} - 2|\mathbf{P}|\mathbf{A} = \mathbf{P} - 2\mathbf{P} = -\mathbf{P}$ .

$$\mathbb{P} \mapsto \tilde{\mathbb{P}} = \mathbb{B}(\mathbb{A}\mathbb{P}\mathbb{A})\mathbb{B} = (-\mathbb{B}\mathbb{A})\mathbb{P}(-\overline{\mathbb{B}\mathbb{A}}). \quad (46)$$

$$-\mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{B} \times \mathbf{A} = \cos \frac{\psi}{2} + \mathbf{V} \sin \frac{\psi}{2}. \quad (47)$$

## 2.4.3 向量证法

将  $\Sigma$  和  $\mathbb{C}$  中的点用  $\mathbb{C}^2$  中的齐次坐标向量表示, 如  $\mathbf{p} = [p_1, p_2]^T, z = p = \frac{p_1}{p_2}$ , 则

$$\mathbf{p} \mapsto \tilde{\mathbf{p}} = \mathbb{R}_{\mathbf{v}}^{\psi} \mathbf{p}. \quad (48)$$

取  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle \equiv |p_1|^2 + |p_2|^2 = 2$ , 则  $\Sigma$  与  $\mathbb{C}$  中点的换算公式为

$$\begin{cases} X + iY = \frac{2z}{1 + |z|^2} = \frac{2\mathbf{p}_1\bar{\mathbf{p}}_2}{|\mathbf{p}_1|^2 + |\mathbf{p}_2|^2} = \mathbf{p}_1\bar{\mathbf{p}}_2, \\ Z = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} = \frac{|\mathbf{p}_1|^2 - |\mathbf{p}_2|^2}{|\mathbf{p}_1|^2 + |\mathbf{p}_2|^2} = |\mathbf{p}_1|^2 - 1. \end{cases} \quad (49)$$

记  $p$  的球极射影象  $\hat{p}$  对应的单位向量为  $\mathbf{P} = (X, Y, Z)$ , 则

$$\mathbb{P} = X\mathbf{I} + Y\mathbf{J} + Z\mathbf{K} = \begin{bmatrix} iZ & -Y + iX \\ Y + iX & -iZ \end{bmatrix} \quad (50)$$

注意到

$$1 - i\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1 + Z & X + iY \\ X - iY & 1 - Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1\bar{\mathbf{p}}_1 & \mathbf{p}_1\bar{\mathbf{p}}_2 \\ \mathbf{p}_2\bar{\mathbf{p}}_1 & \mathbf{p}_2\bar{\mathbf{p}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{p}}_1 & \bar{\mathbf{p}}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{p}\mathbf{p}^*. \quad (51)$$

于是有

$$1 - i\tilde{\mathbb{P}} = \tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{p}}^* = (\mathbb{R}_v^\psi \mathbf{p})(\mathbb{R}_v^\psi \mathbf{p})^* = \mathbb{R}_v^\psi \mathbf{p}\mathbf{p}^* (\mathbb{R}_v^\psi)^* \quad (52)$$

$$= \mathbb{R}_v^\psi (1 - i\mathbb{P})(\mathbb{R}_v^\psi)^* = 1 - i\mathbb{R}_v^\psi \mathbb{P} (\mathbb{R}_v^\psi)^*. \quad (53)$$

从而得到  $\tilde{\mathbb{P}} = \mathbb{R}_v^\psi \mathbb{P} \mathbb{R}_v^{-\psi}$ .

## 参考文献

简单列一下主要参考的书和网站:

1. Tristan Needham 的《复分析: 可视化方法》
2. <https://www.zhihu.com/question/47736315>
3. <https://www.cnblogs.com/wtyuan/p/12324495.html>
4. <https://zhuanlan.zhihu.com/p/435306687>