概率论与数理统计

眠云跂石整理

第 1 章 事件的概率

组合公式

由 $(a+b)^n=\sum\limits_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^ib^{-ni}$ 知

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$$
$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}-\cdots+(-1)^{-1}\binom{n}{n}=0$$

由 $(1+x)^{m+n}=(1+x)^m(1+x)^n$ 知

$$\binom{m+n}{k}=\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$$

即

$$\sum_{k_1+k_2=k}\binom{n_1}{k_1}\binom{n_2}{k_2}=\binom{n_1+n_2}{k}$$

特别地, 当 $m=k=n$ 时,

$$\binom{2n}{n}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2$$

多项式系数: $\dfrac{n!}{r_1!\cdots r_k!}$.

利用第一式 (杨辉恒等式) 数归得第二式 (或直观理解)

$$\binom{n+m}{m}+\binom{n+m}{m+1}=\binom{n+m+1}{m+1}$$
$$\sum_{r=0}^{m}\binom{n-1+r}{r}=\binom{n+m}{m}$$

由负指数二项展开式 $(1-x)^{-r}=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\binom{-r}{i}(-x)^i=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\binom{i+r-1}{r-1}x^i$ 知

$$\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+r-1}{r-1}=0$$
$$\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+r-1}{r-1}(-1)^i=2^{-r}$$
$$p^{-r}=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+r-1}{r-1}p^r(1-p)^i$$

原式两边求导, 并令 $x=1-p$, 得

$$rp^{-r-1}=\sum_{i=0}^{\infty}i\binom{i+r-1}{r-1}(1-p)^{i-1}$$

Stirling 数, 拆分数, 装箱问题, Burnside 定理与 Polya 定理

事件的运算

- 记号
  - $A+B \equiv A \cup B.$
  - $AB \equiv A \cap B.$
  - $A-B \equiv A\overline{B}.$
- 加法
  - 交换律：$A+B=B+A.$
  - 结合律：$(A+B)+C=A+(B+C).$

    于是可定义 $A+B+C=(A+B)+C.$
  - 自加：$A+A=A.$
- 乘法
  - 交换律：$AB=BA.$
  - 结合律：$(AB)C=A(BC).$

    于是可定义 $ABC=(AB)C.$
  - 自乘：$AA=A.$
- 分配律
  - 加法与乘法：$(A+B)C=AC+BC.$
  - 减法与乘法：$(A-B)C=AC-BC.$

    本质为 $ABC=(AC)(BC)$, 这个式子在推导中是有用的.
- 减法
  - $A-B=A\overline{B} \neq A+(-B).$
  - $A \subseteq B \Leftrightarrow A-B=\varnothing.$
  - $A=B \Leftrightarrow A-B=B-A=\varnothing.$
- 无消去律
  - $A+B=A+C \nRightarrow B=C.$
  - $A-B=A-C \nRightarrow B=C.$
- 混合运算
  - $(A+B)-C \neq A+(B-C)$. (因为减法本质上是乘法)

    因此 $A+B-C$ 没有意义, 除非定义运算顺序或优先级.
  - $A-(B+C)=A-B-C=(A-C)-(B-C).$
  - $A-(B-C)=(A-B)C=AC-BC.$
- 负号 (补集)
  - $-(A+B)=(-A)(-B).$
  - $-(A-B)=B-A=(-A)B.$
  - $-(AB)=(-A)+(-B).$

    理论上可以这么写, 实际上用 $\overline{A}$ 的符号会更方便.
- 互斥
  - A 与 B 互斥 $\quad \Leftrightarrow \quad AB=\varnothing \quad \Leftrightarrow \quad P(AB)=0.$
  - $AC=BC \quad \Leftrightarrow \quad A-B$ 与 $B-A$ 均与 C 互斥 $\quad \Leftrightarrow \quad P(\overline{A}BC)=P(A\overline{B}C)=0.$

    当且仅当 $C=\Omega$ 时, 可由此推出 $A=B.$
  - A 与 B 互斥 $\quad \Rightarrow \quad AC$ 与 BC 互斥 $\quad \Rightarrow \quad P(C(A+B))=P(AC)+P(BC).$
- 对立
  - A 与 B 对立 $\quad \Leftrightarrow \quad AB=\varnothing$ 且 $A+B=\Omega.$
  - $\overline{A_1A_2\cdots A_n}=\overline{A}_1+\overline{A}_2+\cdots+\overline{A}_n.$
  - $\overline{A_1+A_2+\cdots+A_n}=\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_n.$
- 条件概率
  - 定义：$P(A \mid B)=P(AB)/P(B).$

- 全概率公式：若两两互斥的 B_i 之交为必然事件, 则 $P(A)=P(B_1)P(A\mid B_1)+P(B_2)P(A\mid B_2)+\cdots$.
- 贝叶斯公式:
  - $P(B\mid A)=\dfrac{P(B)P(A\mid B)}{P(A)}$.
  - $P(B_i\mid A)=\dfrac{P(AB_i)}{P(A)}=\dfrac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{\sum P(B_j)P(A\mid B_j)}$.

- 几率
  - 定义：$O(A)=\dfrac{P(A)}{1-P(A)}=\dfrac{P(A)}{P(\overline{A})}$.
  - 贝叶斯公式：$O(B\mid A)=\dfrac{P(B\mid A)}{P(\overline{B}\mid A)}=\dfrac{P(B)P(A\mid B)}{P(A)P(\overline{B}\mid A)}=\dfrac{P(B)P(A\mid B)}{P(\overline{B})P(A\mid \overline{B})}=O(B)\dfrac{P(A\mid B)}{P(A\mid \overline{B})}$.
  - 贝叶斯因子：$\mathrm{BF}=\dfrac{P(A\mid B)}{P(A\mid \overline{B})}$, 故 $O(B\mid A)=\mathrm{BF}\cdot O(B)$.
- 促进作用的性质
  - 具有对称性：A 促进 B, 则 B 促进 A, 即
    $$P(A\mid B)>P(A)\quad\Leftrightarrow\quad P(B\mid A)>P(B).$$
  - 不具有传递性：B 促进 A 且 C 促进 B 不能推出 C 促进 A, 即
    $$P(A\mid B)>P(A),\ P(B\mid C)>P(B)\quad\nRightarrow\quad P(A\mid C)>P(A).$$
  - 若 B 和 C 都促进 A, 则 $B+C$ 一定促进 A, 但 BC 和 $B-C$ 不一定促进 A, 即
    $$P(A\mid B)>P(A),\ P(A\mid C)>P(A)\quad\Leftrightarrow\quad P(A\mid B+C)>P(A).$$
  - 若 B 促进 A, 则 $\overline{B}$ 抑制 A, B 抑制 $\overline{A}$, $\overline{B}$ 促进 $\overline{A}$, 即
    $$P(A\mid B)>P(A)\quad\Leftrightarrow\quad P(A\mid\overline{B})<P(A)\quad\Leftrightarrow\quad P(\overline{A}\mid B)<P(\overline{A})\quad\Leftrightarrow\quad P(\overline{A}\mid\overline{B})>P(\overline{A}).$$
    $$P(A\mid B)=P(A)\quad\Leftrightarrow\quad P(A\mid\overline{B})=P(A)\quad\Leftrightarrow\quad P(\overline{A}\mid B)=P(\overline{A})\quad\Leftrightarrow\quad P(\overline{A}\mid\overline{B})=P(\overline{A}).$$
- 独立
  - A 与 B 独立 $\quad\Leftrightarrow\quad P(AB)=P(A)P(B)\quad\Rightarrow\quad P(A\mid B)=P(A)$.
  - 相互独立 $\Rightarrow$ 两两独立, 反之不一定成立.
  - 独立事件的任一部分也独立.
  - 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 独立, $B_i=A_i$ 或 $\overline{A}_i$, 则 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 也独立.
- 独立事件的概率
  - 乘法：$P(\prod E_i)=\prod P(E_i)$.
  - 加法：$P(\sum E_i)=1-P(\prod\overline{E_i})=1-\prod P(\overline{E_i})$.
  - 实例:
    $$\begin{aligned}P(E_0+E_1E_2)&=1-P(\overline{E_0}\,\overline{E_1E_2})=1-(1-P(E_0))(1-P(E_0E_1))\\&=P(E_0)+P(E_1)P(E_2)-P(E_0)P(E_1)P(E_2).\end{aligned}$$
- 运算定理
  - 加法定理 (并集)：$P(A+B)=P(A)+P(B)\quad\Leftrightarrow\quad AB=\varnothing\quad\Leftrightarrow\quad P(AB)=0$.
  - 减法定理 (差集)：$P(A-B)=P(A)-P(B)\quad\Leftrightarrow\quad A\supseteq B\quad\Leftrightarrow\quad P(B-A)=0$.
  - 乘法定理 (交集)：$P(AB)=P(A)P(B)\quad\Leftrightarrow\quad A$ 与 B 独立.
  - 加法推论 (补集)：$P(A^c)=P(\overline{A})=1-P(A)$ 恒成立.
- 表为互斥事件
  - $\sum A_i=A_1+\overline{A}_1A_2+\cdots+\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{n-1}A_n$.
    - $A+B=A+(B-A)$.
    - $A+B+C=A+(B-A)+(C-B-A)$.
  - 设 $f(m)=\sum\limits_{k,l}\left(\prod\limits_{i=1}^{m}A_{k_i}\prod\limits_{j=1}^{n-m}\overline{A}_{l_j}\right)$, 则 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i=\sum\limits_{m=1}^{n}f(m)$.
    - $A+B=(B-A)+(A-B)+AB$.
    - $A+B+C=ABC+(BC-A)+(AC-B)+(AB-C)+(A-B-C)+(B-A-C)+(C-A-B)$.
  - 综合应用
    - $A+B=A+(B-A)=(A-B)+B=(B-A)+(A-B)+AB$,

即 $A+B=A+\overline{A}B=\overline{A}B+A\overline{B}+AB.$

- $P(A+B)=P(A)+P(\overline{A}B)=P(\overline{A}B)+P(A\overline{B})+P(AB).$

- 容斥原理
  - $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$, 或 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A+B).$
  - $P(\overline{AB})=P(\overline{A}+\overline{B})$, $P(\overline{AB})+P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})+P(\overline{B}).$
  - $P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(CA)+P(ABC).$
- 恒等式
  - 化简含括号的运算
    - $(A+B)+(A-B)=A+B.$
    - $(A+B)-(A-B)=B.$
    - $(A-B)+(B-A)=(A+B)-AB.$
    - $(A-B)-(B-A)=A-B.$
  - 有用的概率恒等式
    - $A-B=A-AB$, 或 $A\overline{B}=A\overline{AB}.$
    - $P(A-B)=P(A)-P(AB).$ (利用减法定理)

      $P(AB)=P(A)-P(A\overline{B}).$
    - $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=P(A)-P(B)+P(\overline{A}B).$
- 例题
  - 欧拉装错信封：$P_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k!}.$
  - 先胜 n 局者为胜, 甲 a 胜 b 负, 则甲胜的概率为：$P_n(a,b)=\sum\limits_{i=1}^{n-b}p^{n-a-1+i}(1-p)^{n-b-i}\dbinom{2n-a-b-1}{n-a-1+i}.$
  - 设 n 个独立事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的概率分别为 $p_1,p_2,\cdots,p_n$, 记 $p=p_1+p_2+\cdots+p_n$, 则
    - $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都不发生的概率小于 e^{-p}.
    - $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少发生 k 个的概率小于 $p^k/k!$.
  - 蒲丰投针问题：$p=\dfrac{2l}{\pi a}.$

定理 1 独立事件的交与并

> 若 A 和 B 均与 C 独立, 则 AB 与 C 独立 $\Leftrightarrow A+B$ 与 C 独立.

证明

- 法一

1. 必要性

$$\begin{aligned}P((A+B)C)&=P(AC+BC)\\&=P(AC)+P(BC)-P(ABC^2)\\&=P(C)(P(A)+P(B)-P(AB))\\&=P(C)P(A+B).\end{aligned}$$

2. 充分性

$$\begin{aligned}P(ABC)&=P((AC)(BC))\\&=P(AC)+P(BC)-P((A+B)C)\\&=P(C)(P(A)+P(B)-P(A+B))\\&=P(C)P(AB).\end{aligned}$$

- 法二

1. 必要性

$$\begin{aligned}P((A+B)C)&=P((A-B)C)+P((B-A)C)+P(ABC)\\&=P(AC-ABC)+P(BC-ABC)+P(ABC)\\&=P(A)P(C)-P(AB)P(C)+P(B)P(C)-P(AB)P(C)+P(AB)P(C)\\&=P(C)(P(A)+P(B)-P(AB))\\&=P(C)P(A+B).\end{aligned}$$

2. 充分性

$$\begin{aligned}P(ABC) &= P((A+B)C) - P((A-B)C) - P((B-A)C) \\ &= P(A+B)P(C) - P(AC-ABC) - P(BC-ABC) \\ &= P(A+B)P(C) - P(A)P(C) + P(ABC) - P(B)P(C) + P(ABC) \\ &= P(AC) + P(BC) - P((A+B)C) \\ &= P(C)(P(A) + P(B) - P(A+B)) \\ &= P(C)P(AB).\end{aligned}$$

推论　增加互斥条件的充分条件

> 若 A 和 B 均与 C 独立, 且 A 与 B 互斥, 则 AB 与 $A+B$ 均与 C 独立.

定理 2 相互独立的充要条件

> 设 $0 < P(A) < 1$, 则 $P(B \mid A) = P(B \mid \overline{A})$ 是事件 A, B 相互独立的充要条件.

证明

1. 必要性

$$\begin{aligned}P(B) &= P(AB) + P(\overline{A}B) \\ &= P(A)P(B \mid A) + P(\overline{A})P(B \mid \overline{A}) \\ &= P(B \mid A) = P(AB)/P(A).\end{aligned}$$

2. 充分性

$$\begin{aligned}P(B \mid A) = P(AB)/P(A) &= P(B) \\ &= P(AB) + P(\overline{A}B) \\ &= P(A)P(B \mid A) + P(\overline{A})P(B \mid \overline{A}) \\ &= P(B \mid \overline{A}).\end{aligned}$$

推论　相互独立的充要条件

> 设 $0 < P(A) < 1$, 则 $P(A \mid B) = P(\overline{A} \mid B)$ 是事件 A, B 相互独立的充要条件.

第 2 章 随机变量及概率分布

2.1 一维随机变量

2.1.1 离散型随机变量

概率函数, 分布表,

分布函数是一个右连续的不减函数.

1 二项分布

$X \sim B(n, p)$.

理解: 事件发生的概率为 p, 则重复 n 次试验, 事件发生的次数为 x.

概率分布: $P(X=i) = b(i; n, p) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$.

最可能数: $x = \lfloor (n+1)p \rfloor$.

2 泊松分布

$X \sim P(\lambda)$.

理解: 单位时间内事件平均发生 λ 次, 则某一段单位时间内发生的次数为 x.

概率分布: $P(X=i) = \lim\limits_{n\to\infty} b(i; n, \frac{\lambda}{n}) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^i}{i!}$.

当二项分布满足 $n > 50, p < 0.1, np < 5$ 时, 用泊松分布近似效果较好.

3 超几何分布

$X \sim H(N, n, M)$.

理解: N 件产品中有 M 件次品, 从总体中抽 n 件时次品的数量 m.

概率分布：$P(X=m) = \binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m} \Big/ \binom{N}{n}$.

4 负二项分布

$X \sim NB(r, p)$.

理解: 合格率为 p, 抽取到 r 个合格产品时, 抽到的不合格产品的个数 x.

概率分布：$P(X=i) = d(i; r, p) = \binom{i+r-1}{r-1} p^r (1-p)^i$.

5 几何分布

$X \sim GE(p)$.

理解: 合格率为 p, 抽取到第一个合格产品时, 抽到的不合格产品的个数 x.

概率分布：$P(X=i) = p(1-p)^i$.

几何分布具有无记忆性.

2.1.2 连续型随机变量

概率分布函数, 概率密度函数

注：以下偏度系数定义为 $\beta_1 = \mu_3/\mu_2^{3/2}$，峰度系数定义为 $\beta_2 = \mu_4/\mu^2$.

1 正态分布

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

概率密度函数：$f(x) = (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-1} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

标准正态分布：$Y = (X-\mu)/\sigma \sim N(0,1)$.

3σ 原则：0.6826，09544，9.9974.

上 α 分位数：$\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha$.

2 指数分布

$X \sim E(\lambda)$.

概率密度函数：$f(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$

分布函数：$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$

指数分布具有无记忆性，即 $P(X > m + t \mid X > m) = P(X > t)$.

3 威布尔分布

概率密度函数：$f(x) = \begin{cases} \lambda \alpha x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\lambda x^\alpha}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$

分布函数：$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x^\alpha}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$

4 均匀分布

$X \sim R(a,b)$.

概率密度函数：$f(x)=\begin{cases}1/(b-a), & a \le x \le b,\\ 0, & x<a \text{ 或 } x>b.\end{cases}$

分布函数：$F(x)=\begin{cases}0, & x \le a,\\ (x-a)/(b-a), & a<x<b,\\ 1, & x \ge b.\end{cases}$

5 对数正态分布

$\ln X \sim N(\mu,\sigma^2)$.

概率密度函数：$f(x,\mu,\sigma)=\begin{cases}\left(x\sqrt{2\pi}\sigma\right)\exp\left[-\dfrac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], & x>0,\\ 0, & x \le 0.\end{cases}$

6 柯西分布

$X \sim C(\gamma,x_0)$.

概率密度函数：$f(x;x_0,\gamma)=\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{\gamma}{(x-x_0)^2+\gamma^2}\ (-\infty<x<+\infty)$.

7 拉普拉斯分布

$X \sim \mathrm{La}(\mu,b)$.

概率密度函数: $f(x)=\dfrac{1}{2\lambda}\mathrm{e}^{-\frac{|x-\mu|}{\lambda}}$.

2.2 多维随机变量

2.2.1 离散性随机向量

1 多项分布

$X=(X_1,\cdots,X_n) \sim M(N;p_1,\cdots,p_n)$.

$$P(X_1=k_1,X_2=k_2,\cdots,X_n=k_n)=\frac{N!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_n^{k_n}.$$

多项分布的边缘分布是二项分布.

$(X_1,X_2,\cdots,X_n) \sim M(N;p_1,p_2,\cdots,p_n) \quad \Rightarrow \quad X_1+X_2 \sim B(N;p_1+p_2)$.

2.2.2 连续型随机向量

1 矩形均匀分布

2 二维正态分布

$X=(X_1,X_2) \sim N(a,b,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$.

$$f(x_1,x_2)=(2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2})^{-1}\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x_1-a)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x_1-a)(x_2-b)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-b)^2}{\sigma_2^2}\right)\right].$$

当且仅当 $\rho=0$ 时, X_1 和 X_2 独立.

其它性质

- 二维正态分布的边缘分布是正态分布.
- 二维正态分布的条件分布是正态分布.
  若 $(X,Y) \sim N(a,b,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$, 则给定 $X=x$ 时 Y 的条件分布为
  $$N(b+\rho\sigma_2\sigma_1^{-1}(x-a),\ \sigma_2^2(1-\rho^2)).$$

- 二维正态分布的边缘分布的和仍为正态分布
  若 $(X_1,X_2)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$, 则 $Y=X_1+X_2\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2)$.
- 正态分布的联合分布不一定是二维正态分布.
- 相互独立的正态分布的和仍为正态分布
  若 $X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$, 则 $X_1+\cdots+X_n\sim N(\mu_1+\cdots+\mu_n,\sigma_1^2+\cdots+\sigma_n^2)$.
- 若 $Y=X_1+X_2$ 服从正态分布, X_1,X_2 独立, 则 X_1,X_2 也是正态分布.

2.2.3 边缘分布

1 概念解释

- 随机向量的分布可以决定其任一分量的边缘分布, 但反之不亦然.
- 随机向量也叫作其边缘分布的 **联合分布**.
- 类似的有二维的边缘分布.

2 多项分布

$(X_1,\cdots,X_n)\sim M(N;p_1,\cdots,p_n)$ 关于 X_1 的边缘分布为 $M(N,p_1)$.

3 二维正态分布

$(X_1,X_2)\sim N(a,b,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$ 关于 X_1 和 X_2 的边缘分布分别是 $N(a,\sigma_1^2)$ 和 $N(b,\sigma_2^2)$.

2.3 条件概率分布与随机变量的独立性

2.3.1 条件概率分布的概念

2.3.2 离散性随机变量的条件概率分布

1 多项分布

在给定 $X_2=k_2$ 的条件下, X_1 的条件分布为 $B(N-k_2,p_1/(1-p_2))$.

2.3.3 连续性随机变量的条件概率分布

$$f_1(x_1\mid a\le X_2\le b)=\int_a^b f(x_1,t_2)\,\mathrm{d}t_2\Big/\int_a^b f_2(t_2)\,\mathrm{d}t_2$$

$$\begin{aligned}&f(x_1,x_2)=f_2(x_2)f_1(x_1\mid x_2)\\&f(x_1,\cdots,x_n)=g(x_1,\cdots x_k)h(x_{k+1},\cdots,x_n\mid x_1,\cdots,x_k)\end{aligned}$$

$$f_1(x_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(x_2)f_1(x_1\mid x_2)\mathrm{d}x_2$$

正态变量的条件分布仍为正态. 正态分布条件分布的中心位置是

$$m(x_1)=b+\rho\sigma_2\sigma_1^{-1}(x_1-a).$$

2.3.4 随机变量的独立性

两个变量的独立 $\quad\Leftrightarrow\quad f_1(x_1)=f_1(x_1\mid x_2)$.

定义 3.1 连续型随机变量的相互独立 (独立)

> $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立 (独立) $\quad\Leftrightarrow\quad f(x_1,\cdots,x_n)=f_1(x_1)\cdots f_n(x_n)$.

定理 3.1

> 连续变量独立 $\quad\Leftrightarrow\quad$ 对应的事件独立.

定理 3.2

> 若连续型随机向量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的概率密度函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=g_1(x_1)g_2(x_2)\cdots g_n(x_n)$, 则 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立, 且 $f_i(x_i)=Cg_i(x_i)$.

定理 3.3

> 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立,
>
> $$Y_1 = g_1(X_1, X_2, \cdots, X_m),\ Y_2 = g_2(X_{m+1}, X_{m+2}, \cdots, X_n),$$
>
> 则 Y_1 和 Y_2 独立.

定义 3.2 离散性随机变量的相互独立

> $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立 (独立) 等价于
>
> $$\forall a_1, a_2, \cdots, a_n\colon\ P(X_1 = a_1, \cdots, X_n = a_n) = P(X_1 = a_1) \cdots P(X_n = a_n).$$

示性函数

$$X = \begin{cases} 1, & \text{当事件 } A \text{ 发生时}, \\ 0, & \text{当事件 } A \text{ 不发生时}. \end{cases}$$

2.4 随机变量的函数的概率分布

2.4.1 离散性分布

1. 多项分布 $(X_1, X_2, \cdots, X_n) \sim M(N; p_1, p_2, \cdots, p_n) \quad \Rightarrow \quad X_1 + X_2 \sim B(N; p_1 + p_2)$.
2. 二项分布 $X_1 \sim B(n_1, p),\ X_2 \sim B(n_2, p) \quad \Rightarrow \quad X_1 + X_2 \sim B(n_1 + n_2, p)$.
3. 泊松分布 $X_1 \sim P(\lambda_1),\ X_2 \sim P(\lambda_2) \quad \Rightarrow \quad X_1 + X_2 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$.

2.4.2 连续型分布

1 单变量函数

1.1 严格单调

若 X 有密度函数 $f(x)$, $Y = g(X)$ 且该函数严格单调, 令 $X = h(Y)$, 则 Y 的概率密度函数为

$$l(y) = f(h(y))\left|h'(y)\right|.$$

- $X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \Rightarrow \quad aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

1.2 幂函数

若 X 有密度函数 $f(x)$, $Y = X^n$, 其中 n 为偶数, 则 Y 的概率密度函数为

$$l(y) = \left|\frac{y^{\frac{1}{n}-1}}{n}\right|\left[f(y^{\frac{1}{n}}) + f(-y^{\frac{1}{n}})\right]. \quad (n \text{ 是偶数})$$

- 若 $X \sim N(0,1)$, 则 $Y = X^2$ 的密度函数为 $l(y) = \begin{cases} \left(\sqrt{2\pi y}\right)^{-1} \mathrm{e}^{-y/2}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$

2 多变量函数

以两个为例, 多变量是类似的.

$$\begin{cases} Y_1 = g_1(X_1, X_2) \\ Y_2 = g_2(X_1, X_2) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X_1 = h_1(Y_1, Y_2) \\ X_2 = h_2(Y_1, Y_2) \end{cases}$$

则雅可比行列式为

$$J(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial h_1}{\partial y_1} \\ \dfrac{\partial h_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial h_2}{\partial y_1} \end{vmatrix},$$

概率密度函数

$$l(y_1, y_2) = f(h_1(y_1, y_2), h_2(y_1, y_2))\left|J(y_1, y_2)\right|.$$

2.4.3 随机变量和的密度函数

设 (X_1, X_2) 的联合密度函数为 $f(x_1, x_2)$, 则 $Y = X_1 + X_2$ 的密度函数为

$$l(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y-x)\,\mathrm{d}x = \int_{\infty}^{+\infty} f(y-x, x)\,\mathrm{d}x.$$

- 法一：固定 y 后积分得分布函数, 再对 y 求导得上式.
- 法二：补充 $Y_2 = X_1$, 利用 2.4.2.2

- 二维正态分布的边缘分布的和仍为正态分布

  若 $(X_1, X_2) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, 则 $Y = X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2)$.
- 相互独立的正态分布的和仍为正态分布

  若 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, 则 $X_1 + \cdots + X_n \sim N(\mu_1 + \cdots + \mu_n, \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2)$.
- 若 $Y = X_1 + X_2$ 服从正态分布, X_1, X_2 独立, 则 X_1, X_2 也是正态分布.

自由度为 n 的皮尔逊卡方密度与 **卡方分布** $X \sim \chi_n^2$

$$k_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{-x/2} x^{(n-2)/2}}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right) 2^{n/2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

- 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 且有公共分布 $N(0,1)^*$ (**独立同分布 iid**), 则 $Y = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \sim \chi_n^2$.
- 若 $X_1 \sim \chi_m^2$ 与 $X_2 \sim \chi_n^2$ 独立, 则 $X_1 + X_2 \sim \chi_{m+n}^2$.
- 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 且都服从指数分布 $E(\lambda)$, 则 $X = 2\lambda(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \sim \chi_{2n}^2$.
- $E(\chi_n^2) = n$.
- $E(\chi_n^2)^{-1} = \dfrac{1}{n-2}$.
- $E(\chi_n^2)^k = \dfrac{2^k \Gamma\left(\dfrac{n}{2} + k\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}$ $(k \in \mathbb{Z})$.
- $\operatorname{Var}(\chi_n^2) = 2n$.

  注意到方差是均值的两倍，可以以此检验是否为卡方分布.

⭐ 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布, 且有分布函数 $F(x)$ 和密度函数 $f(x)$, 则

$$\begin{aligned} Y &= \max(X_1, X_2, \cdots, X_n) \sim nF^{n-1}(x) f(x), \\ Z &= \min(X_1, X_2, \cdots, X_n) \sim n[1 - F(x)]^{n-1} f(x). \end{aligned}$$

2.4.4 随机变量商的密度函数

设 (X_1, X_2) 的联合密度函数为 $f(x_1, x_2)$, 则 $Y = X_2 / X_1$ 的密度函数为

$$l(y) = \int_0^{+\infty} x_1 f(x_1, x_1 y)\,\mathrm{d}x_1.$$

- 法一：固定 y 后积分得分布函数, 再对 y 求导得上式.
- 法二：补充 $Y_2 = X_1$, 利用 2.4.2.2

设 X_1, X_2 独立, $X_1 \sim \chi_n^2$, $X_2 \sim N(0,1)$, $Y = X_2 / \sqrt{X_1/n}$, 则 Y 的概率函数为

$$t_n(y) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(n/2)} \left(1 + \frac{y^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

称为自由度为 n 的 t **分布**.

- $E(t_n) = 0$ $(n > 1)$.

- $\mathrm{Var}(t_n) = \dfrac{n}{n-2}\ (n > 2)$.

设 X_1, X_2 独立, $X_1 \sim \chi_n^2$, $X_2 \sim \chi_m^2$, $Y = \dfrac{X_2}{m} \bigg/ \dfrac{X_1}{n}$, 则 Y 的概率密度函数为

$$f_{m,n}(y) = m^{m/2} n^{n/2} \frac{\Gamma\left(\dfrac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} y^{m/2-1}(my+n)^{-(m+n)/2} \quad (y > 0)$$

称为自由度为 (m, n) 的 F **分布**.

- $E(f_{m,n}) = \dfrac{n}{n-2}\ (n > 2)$.
- $\mathrm{Var}(f_{m,n}) = \dfrac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$.

注意事项

- 概率密度函数在某点的取值必为 0, 如果非零, 则不存在这样的概率密度函数. 即混合型随机变量没有概率密度函数.
- 计算随机变量的函数的概率分布时，注意单调性和值域是否重叠.