# 6 无界媒质中的均匀平面波

- 6.1 理想介质中的均匀平面波
  - 6.1.1 理想介质中的波动方程
  - 6.1.2 理想介质中均匀平面波
  - 6.1.3 时谐均匀平面波瞬时值
  - 6.1.4 时谐均匀平面波的概念
  - 6.1.5 均匀平面波的传播特性
- 6.2 平面波的极化
  - 6.2.1 平面波极化
  - 6.2.2 直线极化波
  - 6.2.3 圆形极化波
  - 6.2.4 椭圆极化波
  - 6.2.5 合成与分解
- 6.3 导电媒质中的均匀平面波
  - 6.3.1 导电媒质中的波动方程
    - 6.3.2 时谐均匀平面波瞬时值
  - 6.3.3 导电媒质中平面波特性
  - 6.3.4 低损耗媒质的近似计算
  - 6.3.5 良导电媒质的表面阻抗
- 6.4 均匀平面波对平面边界的垂直入射
  - 6.4.1 垂直入射的反射波与折射波
  - 6.4.2 理想介质与理想导体分界面
  - 6.4.3 理想介质与理想介质分界面

# 6.1 理想介质中的均匀平面波

# 6.1.1 理想介质中的波动方程

在无源的线性、均匀、各向同性的无限大理想介质中,

• 对于一般场, 齐次波动方程为

$$\circ \ \, \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2} = 0.$$

• 对于时谐场, 亥姆霍兹方程为

$$\bullet \quad \nabla^2 \dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) + k^2 \dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) = \dot{\boldsymbol{0}}.$$

$$onumber \nabla^2 \dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) + k^2 \dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) = \dot{\boldsymbol{0}}.$$

• 概念说明

• 波数: 
$$k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} = \frac{\omega}{v}$$
.

$$\circ$$
 波速:  $v = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_{\mathrm{r}} \varepsilon_{\mathrm{r}}}}$ 

#### 6.1.2 理想介质中均匀平面波

• 考虑沿 z 轴方向传播的均匀平面波

• 麦克斯韦第一与第二方程的约束

$$\begin{split} & \circ \ E_z(z,t) = H_z(z,t) = 0. \\ & \circ \ \frac{\partial E_x(z,t)}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y(z,t)}{\partial t}. \\ & \circ \ -\frac{\partial H_y(z,t)}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t}. \end{split}$$

• 齐次一维标量波动方程的标准形式

$$egin{aligned} & rac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial z^2} = rac{1}{v^2} rac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial t^2}. \ & \circ & rac{\partial^2 H_y(z,t)}{\partial z^2} = rac{1}{v^2} rac{\partial^2 H_y(z,t)}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

• 上述方程的解

$$\bullet \ E_x(z,t) = f_1(t-z/v) + f_2(t+z/v).$$

■ 入射波 
$$E_x^+(z,t) = f_1(t-z/v)$$
 沿  $+a_z$  方向传播

■ 反射波 
$$E_x^-(z,t)=f_2(t+z/v)$$
 沿  $-{m a}_z$  方向传播.

$$\circ \ \ H_y(z,t) = H_y^+(z,t) + H_y^-(z,t).$$

$$H_y^+(z,t) = \frac{1}{\mu v} E_x^+(z,t).$$

$$lacksquare H_y^-(z,t) = -rac{1}{\mu v} E_x^-(z,t).$$

• 本征波阻抗

# 6.1.3 时谐均匀平面波瞬时值

• 时谐电磁场

$$egin{aligned} & rac{\mathrm{d}^2 \dot{E}_x(z)}{\mathrm{d}z^2} = -\omega^2 \mu arepsilon \dot{E}_x(z) = \gamma^2 \dot{E}_x(z). \ & \circ rac{\mathrm{d}^2 \dot{H}_y(z)}{\mathrm{d}z^2} = -\omega^2 \mu arepsilon \dot{H}_y(z) = \gamma^2 \dot{H}_y(z). \end{aligned}$$

• 符号说明

。 传播常数: 
$$\gamma := \sqrt{-k^2} = \sqrt{-\omega^2 \mu \varepsilon} \equiv i\beta$$

• 相位常数: 
$$\beta := \omega_{\gamma}/\mu\varepsilon = k$$
, 单位为 rad/m.

2

• 波动方程的复数解

$$ullet \dot{E}_x(z) = \dot{E}_{x0}^+ \mathrm{e}^{-\gamma z} + \dot{E}_{x0}^- \mathrm{e}^{\gamma z} = \dot{E}_{x0}^+ \mathrm{e}^{-\mathrm{j} eta z} + \dot{E}_{x0}^- \mathrm{e}^{\mathrm{j} eta z}.$$

$$egin{aligned} & \circ \ \dot{H}_y(z) = \dot{H}_{y0}^+ \mathrm{e}^{-\gamma z} + \dot{H}_{y0}^- \mathrm{e}^{\gamma z} = rac{1}{\eta} \Big( \dot{E}_{x0}^+ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}eta z} - \dot{E}_{x0}^- \mathrm{e}^{\mathrm{j}eta z} \Big). \end{aligned}$$

• 给定初值  $\dot{E}_{x0}^{+}=E_{x0}^{+}\angle \varphi_{\mathrm{e}}$ ,则瞬时值为

$$ullet egin{aligned} ullet oldsymbol{E}_x^+(z,t) &= oldsymbol{a}_x \sqrt{2} E_{x0}^+ \cos(\omega t - eta z + arphi_{
m e}). \end{aligned}$$

$$oldsymbol{\circ} oldsymbol{H}_y^+(z,t) = oldsymbol{a}_y rac{\sqrt{2} E_{x0}^+}{\eta} \mathrm{cos}(\omega t - eta z + arphi_\mathrm{e}).$$

$$oldsymbol{\circ} \; oldsymbol{S}^+(z,t) = oldsymbol{a}_z rac{2{E_{x0}^+}^2}{\eta} {
m cos}^2 (\omega t - eta z + arphi_{
m e}).$$

- 均匀平面波的说明
  - 坡应廷矢量的角频率为电磁场的两倍.
  - 电磁场量与坡应廷矢量的振幅为常数.
  - $\circ$  电磁场量的相位相等, $\varphi_{\mathrm{p}} = \omega t \beta z + \varphi_{\mathrm{e}}$ .

#### 6.1.4 时谐均匀平面波的概念

• 定义

• 周期: 
$$T \equiv \frac{1}{f} := \frac{2\pi}{\omega}$$
.

$$\circ$$
 传播常数:  $\gamma := \sqrt{-\omega^2 \mu \varepsilon}$ 

• 波

。 波速: 
$$v:=rac{1}{\sqrt{\mu arepsilon}}\equiv rac{c}{\sqrt{\mu_{
m r}arepsilon_{
m r}}}.$$

。 波数: 
$$k := \omega \sqrt{\mu \varepsilon} = \frac{\omega}{v}$$
.

$$\circ$$
 波长:  $\lambda := vT = \frac{2\pi}{k}$ .

相

。 相位: 
$$\varphi_{\mathrm{p}} := \omega t - \beta z + \varphi_{\mathrm{e}}$$
.

。 相数: 
$$\beta := \operatorname{Im} \gamma = \omega \sqrt{\mu \varepsilon}$$
.

。 相速: 
$$v_{
m p}:=rac{{
m d}z}{{
m d}t}igg|_{arphi_{
m p}={
m s}{
m s}{
m s}}=rac{\omega}{eta}=rac{1}{\sqrt{\muarepsilon}}.$$

• 理想介质中

$$\circ \ \beta = k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v_{\rm p}}.$$

$$v = v_{\rm p} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{\omega}{\beta}.$$

# 6.1.5 均匀平面波的传播特性

- 均匀平面波的分量
  - 。 电磁场沿平面波传播方向无分量, 称为横电磁波 (TEM 波)
  - 。 横向分量中, 两组相互垂直的电磁场分量分别组成独立分量波组.

- 。 每组分量波可存在入射波与反射波,其速度均为  $v=\dfrac{1}{\sqrt{\mu arepsilon}}$
- 电场与磁场的关系
  - 。 平面波的性质

$$m{\dot{H}}=rac{1}{\eta}m{a}_{\mathrm{n}} imes\dot{m{E}}.$$

$$m{\dot{E}} = \eta \dot{m{H}} imes m{a}_{
m n}.$$

。 麦克斯韦方程

$$\bullet \quad \dot{\boldsymbol{H}} = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu}\boldsymbol{\nabla}\times\dot{\boldsymbol{E}}.$$

$$\bullet \quad \dot{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{\mathrm{i}\omega\varepsilon} \boldsymbol{\nabla} \times \dot{\boldsymbol{H}}.$$

- 理想媒质 (无损耗媒质)
  - 。 本征波阻抗  $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$  为实数.
  - 。 电场与磁场的相位相同.
- 电磁波的能量
  - 。 电磁场能量密度相等

• 电场: 
$$w_{\mathrm{e}}^+(z,t)=rac{arepsilon}{2}E_x^+(z,t)^2=rac{\sqrt{\muarepsilon}}{2}E_x^+H_x^+(z,t).$$

• 磁场: 
$$w_{\mathrm{m}}^+(z,t)=rac{\mu}{2}H_x^+(z,t)^2=rac{\sqrt{\muarepsilon}}{2}E_x^+H_x^+(z,t).$$

• 于是: 
$$w_{\mathrm{e}}^+(z,t) = w_{\mathrm{m}}^+(z,t), \quad w_{\mathrm{e}}^-(z,t) = w_{\mathrm{m}}^-(z,t).$$

。 能量流动密度与均值

$$oldsymbol{ ilde{S}}^+ = \dot{oldsymbol{E}}(z) imes \dot{oldsymbol{H}}^*(z) = rac{{E_{x0}^+}^2}{\eta} oldsymbol{a}_z = rac{{E_{x0 ext{m}}^+}^2}{2\eta} oldsymbol{a}_z.$$

$$\qquad \boldsymbol{S}_{\mathrm{avg}}^+(z) = \mathrm{Re}\, \widetilde{\boldsymbol{S}}^+ = E_{x0}^+ H_{x0}^+ \boldsymbol{a}_z.$$

$$\bullet \quad \boldsymbol{S}_{\mathrm{avg}}^{-}(z) = \operatorname{Re} \widetilde{\boldsymbol{S}}^{-} = -E_{x0}^{-} H_{x0}^{-} \boldsymbol{a}_{z}.$$

# 6.2 平面波的极化

# 6.2.1 平面波极化

• 对于沿 z 轴方向传播的均匀平面波,

$$\circ \ E_x(z,t) = E_{x ext{m}}\cos(\omega t - eta z + arphi_x).$$

$$\circ \ E_y(z,t) = E_{y ext{m}} \cos(\omega t - eta z + arphi_y).$$

$$ullet oldsymbol{E} = oldsymbol{a}_x E_x(z,t) + oldsymbol{a}_y E_y(z,t).$$

- 波的极化 (偏振)
  - 。 定义: 空间中给定电场矢量的末端点随时间变化的轨迹.
  - 。 分类: 线极化、圆极化、椭圆极化.

### 6.2.2 直线极化波

$$\circ \ \frac{E_x}{E_y} = \frac{E_{x\mathrm{m}}}{E_{y\mathrm{m}}} .$$

$$\circ \ \ \varphi := \arctan rac{E_y}{E_x} = \arctan rac{E_{y ext{m}}}{E_{x ext{m}}}.$$

• 当 
$$|\varphi_x - \varphi_y| = \pi$$
 时,

$$\circ \ \frac{E_x}{E_y} = -\frac{E_{x\mathrm{m}}}{E_{v\mathrm{m}}}.$$

$$ullet \ arphi := rctanrac{E_y}{E_x} = -rctanrac{E_{y ext{m}}}{E_{x ext{m}}}.$$

- 特殊情况
  - 。  $\varphi = 0$ : x 轴取向的线性极化波.
  - $\circ \ arphi = rac{\pi}{2}$ : y 轴取向的线性极化波

### 6.2.3 圆形极化波

当
$$E_{x ext{m}}=E_{y ext{m}}=E_{ ext{m}}$$
且 $|arphi_x-arphi_y|=rac{\pi}{2}$ 时, $|oldsymbol{E}|=E_{ ext{m}}.$ 

$$\circ \ \ \varphi = \omega t - kz + \varphi_x.$$

$$\circ \ \ \varphi = -(\omega t - kz + \varphi_x).$$

。 此时称为左旋圆极化.

# 6.2.4 椭圆极化波

消去 t, 记  $\theta = \varphi_x - \varphi_y$ , 得

$$rac{E_x^2}{E_{x ext{m}}^2} - 2rac{E_xE_y}{E_{x ext{m}}E_{y ext{m}}}{\cos heta} + rac{E_y^2}{E_{y ext{m}}^2} = \sin^2 heta.$$

1  $|\cos[a + b]^2 - 2\cos[a + b]\cos[a + c]\cos[b - c] + \cos[a + c]^2 // Simplify$ 

- 直线极化
  - $\circ$  当  $\theta=0$  时,为一三象限的直线极化.
  - $\circ$  当  $\theta = \pi$  时,为二四象限的直线极化。
- 圆形极化 ( $E_{x\mathrm{m}}=E_{y\mathrm{m}}=E_{\mathrm{m}}$ )
  - $\circ$  当  $heta=rac{\pi}{2}$  时,为右旋圆极化.
  - $\circ$  当  $heta=-rac{\pi}{2}$  时,为左旋圆极化.

- 椭圆极化
  - $\circ \ \tan 2\varphi = \frac{2E_{x{\rm m}}E_{y{\rm m}}\cos\theta}{E_{x{\rm m}}^2-E_{y{\rm m}}^2}.$
  - 。 当  $heta=\pmrac{\pi}{2}, E_{x ext{m}}
    eq E_{y ext{m}}$  时,为正椭圆极化.
  - 固定 z, 增加 t,
    - 当 $\theta > 0$ 时,为右旋椭圆极化.
    - 当 $\theta$ <0时,为左旋椭圆极化.
  - 固定 t, 增加 z,
    - 当 $\theta > 0$ 时,为左旋椭圆极化。
    - 当 θ < 0 时, 为右旋椭圆极化.</li>

### 6.2.5 合成与分解

# 6.3 导电媒质中的均匀平面波

### 6.3.1 导电媒质中的波动方程

在均匀、线性、各向同性、无局外电源的导电媒质中,

- 复数形式的麦克斯韦方程组
  - 。 麦克斯韦第一方程

    - 复介电常数:  $\varepsilon_{\mathrm{c}} = \varepsilon \left( 1 \mathrm{j} \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right) = |\varepsilon_{\mathrm{c}}| \mathrm{e}^{\mathrm{j} \delta_{\mathrm{c}}}.$
    - 损耗角正切:  $an \delta_{\mathrm{c}} = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon}$ .
  - 。 麦克斯韦第二方程:  $\mathbf{\nabla} imes \dot{\mathbf{E}} = -\mathrm{j}\omega\mu\dot{\mathbf{H}}.$
  - 。 麦克斯韦第三方程:  $\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{H}} = 0$ .
  - 。 麦克斯韦第四方程:  $\nabla \cdot \dot{E} = 0$ .
- 复数波动方程

$$ullet \ oldsymbol{
abla}^2 \dot{m{H}}(m{r}) + \omega^2 \mu arepsilon_{
m c} \dot{m{H}}(m{r}) = 0.$$

$$\circ \ k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon_{
m c} = \omega^2 \mu \varepsilon \left( 1 - {
m j} rac{\sigma}{\omega \varepsilon} 
ight).$$

# 6.3.2 时谐均匀平面波瞬时值

• 考虑电磁波沿 z 轴方向传播,

$$\circ \;\; rac{\mathrm{d}^2 \dot{E}_x(z)}{\mathrm{d}z^2} = -\omega^2 \mu arepsilon_\mathrm{c} \dot{E}_x(z) = \gamma^2 \dot{E}_x(z).$$

$$\circ \; rac{\mathrm{d}^2 \dot{H}_y(z)}{\mathrm{d}z^2} = -\omega^2 \mu arepsilon_\mathrm{c} \dot{H}_y(z) = \gamma^2 \dot{H}_y(z).$$

#### • 复数传播常数

• 传播常数:  $\gamma = \sqrt{-k^2} = \alpha + j\beta$ .

。 衰减常数: 
$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \varepsilon^2}} - 1 \right)}$$
,单位为  $1 \, \mathrm{Np} = 20 \, \mathrm{lg} \, \mathrm{e} \, \mathrm{dB}$ .

。 相位常数: 
$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \varepsilon^2}} + 1 \right)} > \alpha$$
,単位为  $\mathrm{rad/m}$ .

#### • 波动方程的复数解

$$\dot{E}_{x}(z) = \dot{E}_{x0}^{+} e^{-\gamma z} + \dot{E}_{x0}^{-} e^{\gamma z} = \dot{E}_{x0}^{+} e^{-\alpha z} e^{-\mathrm{j}\beta z} + \dot{E}_{x0}^{-} e^{\alpha z} e^{\mathrm{j}\beta z}.$$

$$\dot{H}_{y}(z) = \dot{H}_{y0}^{+} e^{-\gamma z} + \dot{H}_{y0}^{-} e^{\gamma z} = \frac{1}{n} \Big( \dot{E}_{x0}^{+} e^{-\alpha z} e^{-\mathrm{j}\beta z} - \dot{E}_{x0}^{-} e^{\alpha z} e^{\mathrm{j}\beta z} \Big).$$

#### • 复数 本征波阻抗

#### • 波动方程的瞬时值

$$oldsymbol{e} oldsymbol{E}_x^+(z,t) = \sqrt{2} E_{x0}^+ \mathrm{e}^{-lpha z} \cos(\omega t - eta z + arphi_\mathrm{e}) oldsymbol{a}_z.$$

$$oldsymbol{eta}_y^+(z,t) = \sqrt{2} rac{E_{x0}^+}{|\eta_{
m c}|} {
m e}^{-lpha z} \cos(\omega t - eta z + arphi_{
m e} - \phi) oldsymbol{a}_z.$$

◦ 电场相位超前磁场相位 *ф*.

#### 相速

$$v_{
m p} = rac{\omega}{eta} = rac{v_{
m p}\,{
m \Xi /\!\!\! j}}{\sqrt{rac{1}{2}igg(\sqrt{1+igg(rac{\sigma}{\omegaarepsilon}igg)^2}+1igg)}}.$$

• 波长

$$\lambda = rac{2\pi}{eta} = rac{\lambda_{ ext{ iny $\chi$}}}{\sqrt{rac{1}{2}igg(\sqrt{1+igg(rac{\sigma}{\omegaarepsilon}igg)^2}+1igg)}}.$$

相速与 ω 有关,不同频率的电磁波相速不同,从而发生色散,因此导电媒质是色散媒质.

# 6.3.3 导电媒质中平面波特性

- 均匀平面波的分量
  - 仍为横电磁波 (TEM 波).
  - 。 横向分量有两组独立分量波组
  - 。 每组独立分量波存在入射波与反射波.
- 入射波与反射波

- 波数  $k = \beta j\alpha$ , 传播常数  $\gamma = \alpha + j\beta$  都是复数
- $\circ$  波在传播的过程中按相速度  $\beta$  滞后,按  $e^{-\alpha|z|}$  衰减.
- 。 电导率  $\sigma$  越大,衰减因子  $\alpha$  越大,波长  $\lambda=\dfrac{2\pi}{\beta}$  越短,相速  $v_{\mathrm{p}}=\dfrac{\omega}{\beta}$  越慢.
- 电场与磁场的关系
  - 。 平面波的性质

$$\bullet \quad \dot{\boldsymbol{H}} = \frac{1}{\eta_c} \boldsymbol{a}_{\mathrm{n}} \times \dot{\boldsymbol{E}}.$$

$$m{\dot{E}} = \eta_{
m c} \dot{m{H}} imes m{a}_{
m n}.$$

。 麦克斯韦方程

$$\bullet \dot{\boldsymbol{H}} = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu}\boldsymbol{\nabla}\times\dot{\boldsymbol{E}}.$$

$$\bullet \quad \dot{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_{\mathrm{c}}}\boldsymbol{\nabla}\times\dot{\boldsymbol{H}}.$$

• 导电媒质 (有损耗媒质)

。 本振波阻抗 
$$\eta_{\mathrm{c}} = \dfrac{\sqrt{\mu/\varepsilon}}{\sqrt{1-\mathrm{j}\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}}}$$
 为复数.

- $\circ$  电场相位超前磁场相位  $\phi$ .
- 电磁波的能量
  - 。 电磁场能量密度不等

• 电场: 
$$w_{\mathrm{e\,max}}^+ = \frac{\varepsilon}{2} |E_x^+(z,t)|^2$$
.

■ 磁场: 
$$w_{ ext{m max}}^+ = \frac{\mu}{2} \big| H_y^+(z,t) \big|^2 = \frac{\varepsilon}{2} |E_x^+(z,t)|^2 \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon}\right)^2}.$$

■ 于是: 
$$w_{\text{emax}}^+ < w_{\text{mmax}}^+$$
,  $w_{\text{emax}}^- < w_{\text{mmax}}^-$ .

。 复数能流密度与均值

$$egin{aligned} oldsymbol{ ilde{S}}^+(z) = \dot{oldsymbol{E}}(z) imes \dot{oldsymbol{H}}^*(z) = rac{{E_{x0}^+}^2}{|\eta_c|} \mathrm{e}^{-2lpha z} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi} oldsymbol{a}_z. \end{aligned}$$

$$oldsymbol{oldsymbol{S}} oldsymbol{S}_{
m avg}^+(z) = {
m Re}\, \widetilde{oldsymbol{S}}^+(z) = rac{E_{x0}^{+\;2}\cos\phi}{|\eta_{
m c}|} {
m e}^{-2lpha z} oldsymbol{a}_z.$$

$$\bullet \quad \boldsymbol{S}_{\mathrm{avg}}^{-}(z) = \mathrm{Re}\, \widetilde{\boldsymbol{S}}^{-}(z) = -\frac{E_{x0}^{-2}\cos\phi}{|\eta_c|} \mathrm{e}^{-2\alpha z} \boldsymbol{a}_z.$$

#### 6.3.4 低损耗媒质的近似计算

・ 损耗角正切 
$$an \delta_{
m c} = rac{\sigma}{\omega arepsilon} = rac{J_{
m cm}}{J_{
m dm}}.$$

- 。 当  $an \delta_{
  m c} o 0$  时,传导电流为零,是理想介质.
- 。 当  $an \delta_{
  m c} \ll 1$  时,传导电流很小,是良介质(低损耗媒质)
- 。 当  $an \delta_{
  m c}\gg 1$  时,传导电流很大,是良导体(良导电媒质)
- 。 当  $an \delta_{c} o \infty$  时,传导电流无穷,是理想导体.
- 低损耗媒质  $(\sigma \ll \omega \varepsilon)$

- 。 近似计算 (1)
  - $lacksquare lpha pprox rac{\sigma}{2} \sqrt{rac{\mu}{arepsilon}} pprox rac{\sigma \, \eta_{
    m c}}{2}.$
  - $\qquad \beta \approx \omega \sqrt{\mu \varepsilon} \left( 1 + \frac{\sigma^2}{8\omega^2 \varepsilon^2} \right).$
  - $\quad \blacksquare \ \, \eta_{\rm c} \approx \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \, \Big( 1 + {\rm j} \frac{\sigma}{2\omega\varepsilon} \Big).$
- 近似计算 (2)
  - $lacksquare lpha pprox rac{\sigma}{2} \sqrt{rac{\mu}{arepsilon}} pprox rac{\sigma \, \eta_{
    m c}}{2}.$
  - $\qquad \beta \approx \omega \sqrt{\mu \varepsilon}.$
  - $\quad \blacksquare \quad \eta_{\rm c} \approx \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}.$
- 。 例子:云母、聚乙烯、聚苯乙烯等.

### 6.3.5 良导电媒质的表面阻抗

- 良导电媒质的近似计算  $(\sigma\gg\omega\varepsilon)$ 
  - 。 近似计算
    - $\qquad \alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\pi f\mu\sigma}.$
    - $lacksquare \eta_{
      m c} pprox \sqrt{{
      m j} rac{\mu \omega}{\sigma}} = (1+{
      m j}) \sqrt{rac{\pi f \mu}{\sigma}}.$
  - $\circ \;\; \eta_{
    m c} \equiv R_{
    m s} + {
    m j} X_{
    m s}.$ 
    - 表面电阻:  $R_{
      m s} pprox \sqrt{rac{\pi f \mu}{\sigma}}.$
    - 表面电抗:  $X_{\mathrm{s}} pprox \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}}$ .
  - 。 性质说明
    - 电场超前磁场 45°.
    - 振幅按 e<sup>-αz</sup> 衰减.
    - $\sigma, \mu, f$  越大,衰减越快.
  - 。 趋肤效应
    - 高频电磁波进入良导体后, 在数微米内基本衰减完毕.
    - 透入深度: 衰减为表面值的  $e^{-1}$  倍时经过的距离.
    - 透入深度:  $\delta = \frac{1}{\alpha} \approx \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{\pi f\mu\sigma}}$
    - 在经过距离  $4.6\delta$  时,电磁波振幅衰减为原来的 1%.
  - 。 静电屏蔽
    - 为实现静电屏蔽,一般取良导体的厚度为一个波长.
    - $\blacksquare \ \, \mathbb{D} \, d = \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi \delta = \frac{2\pi}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}.$

■ 经过一个波长后衰减 54.5751dB.

#### • 良导电媒质的表面阻抗

○ 导体内部 (沿 z 方向传播)

■ 场强的振幅:  $\dot{E}_{xm}(z) = \dot{E}_{xm} \mathrm{e}^{-\alpha z} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$ .

■ 电流体密度:  $\dot{J}_{x\mathrm{m}}(z) = \sigma \dot{E}_{x\mathrm{m}} \mathrm{e}^{-\alpha z} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$ 

• 总传导电流: 
$$\dot{I}_{x\mathrm{m}} = \int_0^{+\infty} \dot{J}_{x\mathrm{m}}(z) \, \mathrm{d}z = \frac{\sigma \dot{E}_{x\mathrm{m}}}{\alpha + \mathrm{j}\beta}.$$

○ 表面阻抗 (x 方向单位长度, y 方向单位长度)

• 表面阻抗: 
$$Z_{\rm c}=rac{lpha}{\sigma}+{
m j}rac{eta}{\sigma}=\eta_{\rm c}.$$

• 表面电阻: 
$$R_{
m s}=rac{lpha}{\sigma}=rac{1}{\sigma\delta}pprox\sqrt{rac{\pi f\mu}{\sigma}}.$$

• 表面电抗: 
$$X_{\mathrm{s}}=rac{eta}{\sigma}pproxrac{1}{\sigma\delta}pprox\sqrt{rac{\pi f\mu}{\sigma}}.$$

。 电磁平均功率

■ 等效表面电流密度: 
$$\dot{J}_{\mathrm{sm}}(z)=\dot{I}_{x\mathrm{m}}=rac{\dot{E}_{x\mathrm{m}}(0^+)}{\eta_c}=\dot{H}_{y\mathrm{m}}(0^+).$$

$$lacksymbol{\bullet}$$
 平均功率:  $p_0 = rac{1}{2} \dot{I}_{
m xm} \cdot \dot{I}_{
m xm}^* R_{
m s} = rac{1}{2} J_{
m sm}^2 R_{
m s}.$ 

$$lacksymbol{\bullet}$$
 平均功率:  $oldsymbol{S}_{\mathrm{avg}}(z)ig|_{z=0}=\mathrm{Re}\left[rac{1}{2}\dot{oldsymbol{E}}_{x\mathrm{m}}(z) imes\dot{H}_{y\mathrm{m}}^{*}(z)
ight]igg|_{z=0}=rac{1}{2}H_{y\mathrm{m}}^{2}R_{\mathrm{s}}oldsymbol{a}_{z}.$ 

■ 上述磁场可取导体表面内侧或外侧的总磁场.

# 6.4 均匀平面波对平面边界的垂直入射

### 6.4.1 垂直入射的反射波与折射波

- 记号约定: E, E', E'' 分别表示入射波、反射波和折射波.
- 电场与磁场
  - 媒质1中(入射波+反射波)
    - \$ \dot{\bm E}\_1(z) = \pqty{\dot{E}\_{10} \e^{-\gamma\_1 z} + \dot{E}'\_{10} \e^{\gamma\_1 z}} \bm a\_x \$.
    - \$\\dot{\bm H}\_1(z) = \\dfrac{1}{\eta\_1} \pqty{\\dot{E}\_{10} \e^{-\gamma\_1 z} \\dot{E}'\_{10} \e^{\gamma\_1 z}} \\bm a\_y \$.

10

o 媒质 2 中 (折射波)

$$\bullet \quad \dot{\boldsymbol{E}}_{2}(z) = \dot{E}_{20}^{"} \mathrm{e}^{-\gamma_{2}z} \boldsymbol{a}_{x}.$$

$$oldsymbol{\dot{H}}_2(z) = rac{1}{n_2} \dot{E}_{20}^{\prime\prime} \mathrm{e}^{-\gamma_2 z} oldsymbol{a}_y.$$

• 边界条件

。 联立 
$$E_{1t} = E_{2t}, H_{1t} = H_{2t}$$
.

。 反射系数: 
$$R:=rac{\dot{E}_{10}'}{\dot{E}_{10}}=rac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}.$$

。 折射系数: 
$$T:=rac{\dot{E}_{10}''}{\dot{E}_{10}}=rac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1}=R+1.$$

### 6.4.2 理想介质与理想导体分界面

- 分界媒质
  - 。 媒质性质
    - 理想介质:  $\sigma_1 = 0, \gamma_1 = j\beta_1 = j\omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}, \eta_1 = \sqrt{\mu_1/\varepsilon_1}.$
    - 理想导体:  $\sigma_2 = \infty, \dot{E}_{20}'' = \dot{H}_{20}'' = 0$ , 不存在电磁波.
  - 。 边界条件
    - R = -1, T = 0, 即全反射现象.
    - 自由面电流:  $\dot{m{J}}_{\mathrm{s}} = m{n} imes \dot{m{H}}_1 = rac{2\dot{E}_{10}}{\eta_1} m{a}_x.$
- 合成波
  - 。 频域

$$oldsymbol{\dot{E}}_1(z) = \dot{E}_{10} \left( \mathrm{e}^{-\mathrm{j}eta_1 z} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}eta_1 z} 
ight) oldsymbol{a}_x = -2 \mathrm{j} \dot{E}_{10} \sin(eta_1 z) oldsymbol{a}_x.$$

$$egin{aligned} oldsymbol{\dot{H}}_1(z) &= rac{\dot{E}_{10}}{\eta_1} ig( \mathrm{e}^{-\mathrm{j}eta_1 z} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}eta_1 z} ig) oldsymbol{a}_y = 2 rac{\dot{E}_{10}}{\eta_1} \mathrm{cos}(eta_1 z) oldsymbol{a}_y. \end{aligned}$$

$$\circ$$
 时域 (初值  $\dot{E}_{10} = \sqrt{2}E_{10}\angle 0^{\circ}$ )

• 
$$E_1(z,t) = 2\sqrt{2}E_{10}\sin(\beta_1 z)\sin(\omega t)$$
.

$$\mathbf{H}_1(z,t) = \frac{2\sqrt{2}E_{10}}{\eta_1}\cos(\beta_1 z)\cos(\omega t).$$

- 说明
  - 。 合成波为纯驻波
    - 波节点:纯驻波的零点.
    - 波腹点: 纯驻波的最值点.
  - 。 相位与振幅比较
    - 行波:相位随时间变化,振幅不变.
    - 驻波:振幅随时间变化,相位不变.
  - 。 能量的传输
    - 行波:可以传输能量.
    - 驻波:不能传输能量,只有电磁振荡.

# 6.4.3 理想介质与理想介质分界面

• 媒质 2

$$oldsymbol{\dot{E}}_2(z) = T E_{10} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}eta_2 z} oldsymbol{a}_x.$$

$$oldsymbol{\dot{H}}_2(z) = rac{TE_{10}}{\eta_c} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}eta_2 z} oldsymbol{a}_y.$$

• 媒质1

。 电场

$$oldsymbol{\dot{E}}_1(z) = \left(E_{10}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}eta_1z} + RE_{10}\mathrm{e}^{\mathrm{j}eta_1z}
ight)oldsymbol{a}_x$$
,即入射波 + 反射波.

$$oldsymbol{\dot{E}}_1(z)=E_{10}\left(T\mathrm{e}^{-\mathrm{j}eta_1z}+\mathrm{j}2R\sineta_1z
ight)oldsymbol{a}_x$$
,即行波+驻波.

• 
$$\dot{m E}_1(z)=E_{10}\left(1+R{
m e}^{{
m j}2eta_1z}
ight){
m e}^{-{
m j}eta_1z}m a_x$$
,即 $+m a_z$ 方向的平面波.

ο 磁场

$$m{\dot{H}}_1(z)=rac{E_{10}}{\eta_1}ig(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}eta_1z}-R\mathrm{e}^{\mathrm{j}eta_1z}ig)m{a}_y$$
,即入射波 + 反射波.

$$m{\dot{H}}_1(z)=rac{E_{10}}{\eta_1}ig(T\mathrm{e}^{-\mathrm{j}eta_1z}-2R\coseta_1zig)m{a}_y$$
,即行波+驻波

• 
$$\dot{m{H}}_1(z)=rac{E_{10}}{\eta_1}ig(1-R\mathrm{e}^{\mathrm{j}2eta_1z}ig)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}eta_1z}m{a}_y$$
,即  $+m{a}_z$  方向的平面波.

。 电磁场的振幅

$$ig| \left| \dot{m{E}}_{
m 1m}(z) 
ight| = \sqrt{2} E_{
m 10} \sqrt{1 + R^2 + 2R \cos(2eta_1 z)}.$$

$$ullet \left| \dot{m{H}}_{
m 1m}(z) 
ight| = rac{\sqrt{2} E_{10}}{\eta_1} \sqrt{1 + R^2 - 2R \cos(2eta_1 z)}.$$

- 。 波幅点与波节点的分布
- 驻波系数 (驻波比)

。 驻波系数: 
$$ho := rac{\left| oldsymbol{B} 
ight|_{ ext{max}}}{\left| oldsymbol{B} 
ight|_{ ext{min}}} = rac{\left| oldsymbol{H} 
ight|_{ ext{min}}}{\left| oldsymbol{H} 
ight|_{ ext{min}}} = rac{1 + \left| R 
ight|}{1 - \left| R 
ight|}.$$

• 行波 
$$\rho = 1$$
, 纯驻波  $\rho = \infty$ .

o 反射系数: 
$$|R| = \frac{\rho - 1}{\rho + 1}$$
.

• 坡应廷矢量

$$oldsymbol{\circ} \;\; oldsymbol{S}_{ ext{avg}} = ext{Re}\left[\dot{oldsymbol{E}}(z) imes \dot{oldsymbol{H}}^*(z)
ight] = rac{E_{10}^2}{n_1} oldsymbol{a}_z.$$

$$oldsymbol{\circ} \; oldsymbol{S}'_{ ext{avg}} = \operatorname{Re}\left[\dot{oldsymbol{E}}'(z) imes \dot{oldsymbol{H}}'^*(z)
ight] = -rac{R^2 E_{10}^2}{\eta_1} oldsymbol{a}_z.$$

$$oldsymbol{\circ} ~~ oldsymbol{S}_{ ext{avg}}'' = \operatorname{Re}\left[\dot{oldsymbol{E}}''(z) imes \dot{oldsymbol{H}}''^*(z)
ight] = rac{T^2 E_{10}^2}{\eta_2} oldsymbol{a}_z.$$

$$ullet \ |oldsymbol{S}_{ ext{avg}}| = ig|oldsymbol{S}_{ ext{avg}}'ig| + ig|oldsymbol{S}_{ ext{avg}}''ig|.$$