概率论与数理统计

眠云跂石整理

附录

A.1 常用积分

特殊函数 伽马函数与贝塔函数.

$$\begin{aligned}
&\text{伽马函数与递推式:} && \Gamma(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t=(x-1)\Gamma(x-1) && (x>0)\\
&\text{贝塔函数与关系式:} && \mathrm{B}(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} && (x,y>0)\\
&\text{勒让德倍量公式:} && \Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}}\Gamma(2s) && (s>0)\\
&\text{余元公式:} && B(s,1-s)=\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin\pi s} && (0<s<1)
\end{aligned}$$

$$\begin{cases}\Gamma(n)=(n-1)!, & n\in\mathbb{N}^+,\\ \Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)=\dfrac{(n-2)!!}{2^{(n-1)/2}}\sqrt{\pi}, & n\text{ 为正奇数.}\end{cases}$$

$$B(s,s)=\frac{1}{2^{2n-1}}B\left(\frac{1}{2},s\right)\quad(s>0)$$

特殊函数的应用

一般的

$$\int_0^1 x^a(1-x^b)^c\,\mathrm{d}x=\frac{1}{b}\mathrm{B}\left(\frac{a+1}{b},c+1\right)\qquad(a>-1,\,b>0,\,c>-1)$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^a\,\mathrm{d}x}{(1+x^b)^c}=\frac{1}{|b|}\mathrm{B}\left(c-\frac{a+1}{b},\frac{a+1}{b}\right)\qquad\begin{pmatrix}a>-1,\,b>0,\,c>\dfrac{a+1}{b} & \text{或}\\ a<-1,\,b<0,\,c>\dfrac{a+1}{b} & \end{pmatrix}$$

$$\int_0^{+\infty}x^n\mathrm{e}^{-ax^p}\,\mathrm{d}x=\frac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{p}\right)}{|p|a^{\frac{n+1}{p}}}\qquad\begin{pmatrix}a>0,\,p>0,\,n>-1 & \text{或}\\ a>0,\,p<0,\,n<-1 & \end{pmatrix}$$

特殊的

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^m\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}=\mathrm{B}\left(n-\frac{m+1}{2},\frac{m+1}{2}\right)\qquad(\text{注意积分限})$$
$$\int_0^{+\infty}\frac{x^m\,\mathrm{d}x}{(1+x)^n}=\mathrm{B}\left(n-m-1,m+1\right)$$

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax^p}\,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{pa^{\frac{1}{p}}}$$

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^p}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{p}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \text{(注意积分限)}$$

$$\int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-ax} = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}} = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

$$\int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-ax^2} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2a^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$\int_0^{+\infty} x^{2n} \mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{(2n-1)!!}{2(2a)^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_0^{+\infty} x^{2n+1} \mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{(2n)!!}{(2a)^{n+1}}$$

$$\int_0^{+\infty} x^2 \mathrm{e}^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

A.2 常用分布

A.2.1 一维离散型

1 二项分布

1.1 基础概念

- $X \sim B(n, p)$.
- 理解: 事件发生的概率为 p, 则重复 n 次试验, 事件发生的次数为 x.
- 概率分布: $P(X=i) = b(i; n, p) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$.

1.2 数字特征

- 最可能数: $x = \lfloor (n+1)p \rfloor$.
- 期望: $E(X) = np$.
- 方差: $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$.
- 母函数: $G(s) = (ps+q)^n,\ s \in (-\infty, +\infty)$.
- 特征函数: $g(t) = (p\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + q)^n$.

1.3 其它性质

- 二项分布和的函数

  $$X_1 \sim B(n_1, p),\ X_2 \sim B(n_2, p) \quad \Rightarrow \quad X_1 + X_2 \sim B(n_1+n_2, p).$$
- 发生偶数次的概率为 $p_n = \dfrac{1}{2}[1 + (1-2p)^n]$.

- 记 $f(p)=P(X\le k)$, 则 $f'(p)<0$, 并且

$$f(p)=\frac{n!}{k!(n-k-1)!}\int_0^{1-p}t^k(1-t)^{n-k-1}\,\mathrm{d}t.$$

1.4 参数估计

- 矩估计: $p=m/n$. (MVU 估计)
- 极大似然估计: $p=m/n$. (MVU 估计)
- 贝叶斯估计
  - 同等无知原则: $p=\dfrac{X+1}{n+2}$.
  - 若先验密度 $h(p)=p^{a-1}(1-p)^{b-a-1}$, 则 $\tilde{p}=\dfrac{X+c}{n+d}$.
- 区间估计
  - 大样本法: 近似地取枢轴变量 $(Y_n-np)/\sqrt{np(1-p)}\sim N(0,1)$, 则

    $$\theta_1,\theta_2=\frac{n}{n+u_{\alpha/2}^2}\left(\hat{p}+\frac{u_{\alpha/2}^2}{2n}\pm u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}+\frac{u_{\alpha/2}^2}{4n^2}}\right),\quad \hat{p}=Y_n/n.$$

    取 $\hat{p}(1-\hat{p})=1/4$, 则区间长度为 $u_{\alpha/2}/\sqrt{n+u_{\alpha/2}^2}$.

    当 $\alpha=0.05,\ n\ge 40$ 时, 有 $\theta_2-\theta_1\le 0.3$.
- $p^k\ (k\le n)$ 的无偏估计是 $\dfrac{X^{\underline{k}}}{n^{\underline{k}}}$. (下降阶乘幂)

2 泊松分布

2.1 基础概念

- $X\sim P(\lambda)$.
- 理解: 单位时间内事件平均发生 λ 次, 则某一段单位时间内发生的次数为 x.
- 概率分布: $P(X=i)=\lim\limits_{n\to\infty}b(i;n,\dfrac{\lambda}{n})=\dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^i}{i!}$.
- 当二项分布满足 $n>50,p<0.1,np<5$ 时, 用泊松分布近似效果较好.

2.2 数字特征

- 最可能数: $k=\lfloor\lambda\rfloor$.
- 期望: $E(X)=\lambda$.
- 方差: $\mathrm{Var}(X)=\lambda$.
- 中位数: $m_e=\dfrac{\ln 2\lambda}{\lambda}$.
- $E\left|X-m_e\right|=m_e$.
- 母函数: $G(s)=\mathrm{e}^{\lambda(s-1)},\ s\in(-\infty,+\infty)$.
- 特征函数: $g(t)=\mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1)}$.

2.3 其它性质

- 泊松分布和的函数 (可加性)

  $$X_1\sim P(\lambda_1),\ X_2\sim P(\lambda_2)\quad\Rightarrow\quad X_1+X_2\sim P(\lambda_1+\lambda_2).$$
- 记 $f(\lambda)=P(X\le k)$, 则 $f'(\lambda)<0$, 并且

$$f(\lambda)=\frac{1}{k!}\int_{\lambda}^{+\infty} t^k\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

- 若 $X\sim P(\lambda)$, $Y\sim B(X,p)$, 则 $Y\sim P(\lambda p)$.

2.4 参数估计

- 矩估计
  - $\lambda=m$. (MVU 估计)
  - $\lambda=m_2$ 或 S^2.
- 极大似然估计: $\lambda=\overline{X}$.
- 贝叶斯估计: 见第四章第五题.
- 区间估计
  - 大样本法: 近似地取 $(Y_n-n\lambda)/\sqrt{n\lambda}\sim N(0,1)$, 则

$$A,B=\overline{X}+u_{\alpha/2}^2/(2n)\pm u_{\alpha/2}\sqrt{u_{\alpha/2}^2/(4n^2)+\overline{X}/n},\quad \overline{X}=Y_n/n.$$

3 超几何分布

3.1 基础概念

- $X\sim H(N,n,M)$.
- 理解: N 件产品中有 M 件次品, 从总体中抽 n 件时次品的数量 m.
- 概率分布: $P(X=m)=\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}\Big/\binom{N}{n}$.

3.2 数字特征

- 期望: $E(X)=\dfrac{nM}{N}$.
- 方差: $\mathrm{Var}(X)=\dfrac{nM(N-n)(N-M)}{N^2(N-1)}=\dfrac{nM}{N}\dfrac{N-n}{N-1}\left(1-\dfrac{M}{N}\right)$.

3.3 其它性质

3.4 参数估计

已知 N, n 估计 M.

- 贝叶斯估计: 采用同等无知原则, 则$M=\dfrac{N+2}{n+2}(X+1)-1$.

4 负二项分布

4.1 基础概念

- $X\sim NB(r,p)$, 又称为正整数形式帕斯卡分布.
- 理解: 合格率为 p, 抽取到 r 个合格产品时, 抽到的不合格产品的个数 x.
- 概率分布: $P(X=i)=d(i;r,p)=\binom{i+r-1}{r-1}p^r(1-p)^i$.

4.2 数字特征

- 数学期望: $E(X)=\dfrac{r(1-p)}{p}$.
- 方差: $\operatorname{Var}(X)=\dfrac{r(1-p)}{p^2}$.

4.3 其它性质

4.4 参数估计

注: $m_e:=(X_1+X_2+\cdots+X_n)/n$.

- 矩估计: $p=\dfrac{r}{m_e+r}$.
- 极大似然估计: $p=\dfrac{r}{m_e+r}$.
- 贝叶斯估计: $p=\dfrac{nr+1}{nr+nm_e+1}$.

5 几何分布

5.1 基础概念

- $X\sim GE(p)$.
- 理解: 合格率为 p, 抽取到第一个合格产品时, 抽到的不合格产品的个数 x.
- 概率分布: $P(X=i)=p(1-p)^i$.

5.2 数字特征

- 数学期望: $E(X)=\dfrac{1-p}{p}$.
- 方差: $\operatorname{Var}(X)=\dfrac{1-p}{p^2}$.
- 母函数: $G(s)=\dfrac{ps}{1-qs}-1,\ s\in\left(-\dfrac{1}{q},\dfrac{1}{q}\right)$.
- 特征函数: $g(t)=\dfrac{p\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{1-q\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}-1$.

5.3 其它性质

- 几何分布具有无记忆性.
- 若 $X_1,X_2,\cdots,X_r$ 独立同分布 $GE(p)$, 则 $X_1+X_2+\cdots+X_r\sim NB(r,p)$.

5' 几何分布

5'.1 基础概念

- $X\sim G(p)$.
- 理解: 合格率为 p, 抽取到第一个合格产品时, 抽取的总产品的个数 x.
- 概率分布: $P(X=i)=p(1-p)^{i-1}$.

5'.2 数字特征

- 数学期望: $E(X)=\dfrac{1}{p}$.
- 方差: $\operatorname{Var}(X)=\dfrac{1-p}{p^2}$.
- 母函数

- $G(s) = \dfrac{ps}{1-qs}$, $s \in \left(-\dfrac{1}{q}, \dfrac{1}{q}\right)$.
- $G^{(n)}(1) = \dfrac{(1-p)^{n-1}}{p^n} n!$.

- 特征函数: $g(t) = \dfrac{p\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{1-q\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}$.

5'.3 其它性质

- 几何分布具有无记忆性.
- 若 $X_1, X_2, \cdots, X_r$ 独立同分布 $G(p)$, 则 $X_1 + X_2 + \cdots + X_r - r \sim NB(r, p)$.

A.2.2 一维连续型

概率分布函数, 概率密度函数

注: 以下偏度系数定义为 $\beta_1 = \mu_3/\mu_2^{3/2}$，峰度系数定义为 $\beta_2 = \mu_4/\mu^2$.

1 正态分布

1.1 基础概念

- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.
- 概率密度函数: $f(x) = (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.
- 标准正态分布: $Y = (X-\mu)/\sigma \sim N(0,1)$.

1.2 数字特征

- 期望: μ.
- 方差: σ^2.
- k 阶中心矩: $\mu_k = \begin{cases} \sigma^k(k-1)!!, & k \text{ 为偶数}, \\ 0, & k \text{ 为奇数}. \end{cases}$
- 偏度系数: $\beta_1 = 0$.
- 峰度系数: $\beta_2 = 3$.
- 特征函数: $g(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu t - \frac{\sigma^2}{2}t^2}$.

1.3 其它性质

- 3σ 原则: 0.6826，09544，9.9974.
- 上 α 分位数: $\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha$.
- 相互独立的正态分布的运算
    - 分布之和
        - 若 $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 相互独立, 则 $X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.
        - 若 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ 且相互独立, 则 $X_1 + \cdots + X_n \sim N(\mu_1 + \cdots + \mu_n, \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2)$.
    - 分布之差

      若 $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 相互独立, 则 $X_1 - X_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.
    - 分布之商

      若 X_1 和 X_2 独立同分布 $N(0,1)$, 则 $X_1/X_2 \sim C(1,0)$ (柯西分布).
    - 分布之积

若 $X_1 \sim N(0,\sigma_1^2),\ X_2 \sim N(0,\sigma_2^2)$, 则 $X_1X_2 \sim \dfrac{1}{\pi\sigma_1\sigma_2}K_0\left(\dfrac{|z|}{\sigma_1\sigma_2}\right)$ (修正贝塞尔函数; 暂时未学)

- 平方之和

  若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布 $N(0,1)$, 则 $Y = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \sim \chi_n^2$.

- 统计量的分布
  - $\sqrt{n}(\overline{X} - \mu)/\sigma \sim N(0,1)$. (标准差已知)
  - $\sqrt{n}\left(\overline{X} - \mu\right)/S \sim t_{n-1}$. (标准差未知)
  - $(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi_{n-1}^2$.

1.4 参数估计

- 已知 σ^2, 估计 μ.
  - 矩估计
    - $\mu = m$. (MVU 估计)
  - 区间估计
    - 枢轴变量法

      根据 $\sqrt{n}(\overline{X} - \mu)/\sigma \sim N(0,1)$, 知

      $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2] = \left[\overline{X} - \sigma u_{\alpha/2}/\sqrt{n}, \overline{X} + \sigma u_{\alpha/2}/\sqrt{n}\right]$.
- 已知 μ, 估计 σ^2.
  - 矩估计 $\theta = \sigma^2$.
    - $\hat{\theta} = m_2$. (μ 已知时的 MVU 估计, 且此时均方误差为 $\dfrac{2}{n}\sigma^4$)
- 估计 μ 和 σ^2.
  - 矩估计
    - $\mu = m$. (MVU 估计)
    - $\sigma^2 = S^2$. (μ 未知时的 MVU 估计)
  - 极大似然估计: $\mu = m,\ \sigma^2 = m_2$.
  - 区间估计
    - 枢轴变量法
      - 根据$\sqrt{n}\left(\overline{X} - \mu\right)/S \sim t_{n-1}$, 知一样本 t 区间估计为

        $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2] = \left[\overline{X} - St_{n-1}(\alpha/2)/\sqrt{n}, \overline{X} + St_{n-1}(1-\alpha/2)/\sqrt{n}\right]$.
      - 根据 $(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi_{n-1}^2$, 知

        $$[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2] = \left[(n-1)S^2/\chi_{n-1}^2(\alpha/2),\ (n-1)S^2/\chi_{n-1}^2(1-\alpha/2)\right].$$
  - 无偏估计

    $$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{n-1}{2}}\frac{\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}S.$$
- 估计变异系数 σ/μ.
  - 矩估计: $\sqrt{m_2}/m$ 或 S/m.
- 估计 $N(\theta,1)$ 的 θ.
  - 贝叶斯估计: 先验密度 $h(\theta) \sim N(\mu,\sigma^2)$, 则

$$\tilde{\theta} = \frac{n}{n+1/\sigma^2}\overline{X} + \frac{1/\sigma^2}{n+1\sigma^2}\mu.$$

- 对于 $N(\mu_1,\sigma^2),\ N(\mu_2,\sigma^2)$, 已知 σ^2, 估计 $\mu_1-\mu_2$.
  - 区间估计 (两样本 t 区间估计)
    - 枢轴估计法

      记 $S^2 = \left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 + \sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2\right] \Big/ \sqrt{n+m-2}$,

      由 $T = \sqrt{\dfrac{mn}{m+n}}\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S} \sim t_{n+m-2}$, 知区间估计为

      $[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2] = \left[(\overline{X}-\overline{Y}) - St_{n+m-2}(\alpha/2)\sqrt{\dfrac{n+m}{nm}},\ (\overline{X}-\overline{Y}) + St_{n+m-2}(\alpha/2)\sqrt{\dfrac{n+m}{nm}}\right]$.
- 贝伦斯 - 费歇尔问题: 对于 $N(\mu_1,\sigma_1^2),\ N(\mu_2,\sigma_2^2)$, 所有参数均未知, 估计 $\mu_1-\mu_2$.
  - 区间估计
    - 大样本法: 取枢轴变量

$$\begin{aligned} N(0,1) &\sim \left[(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)\right]\Big/\sqrt{\sigma_1^2/n+\sigma_2^2/m} && \text{(严格的)} \\ &\sim \left[(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)\right]\Big/\sqrt{S_1^2/n+S_2^2/m} && \text{(近似的)} \end{aligned}$$

- 对于 $N(\mu_1,\sigma_1^2),\ N(\mu_2,\sigma_2^2)$, 所有参数均未知, 估计 $\lambda=\sigma_1^2/\sigma_2^2$.
  - 区间估计
    - 枢轴变量法

      由 $(S_2^2/\sigma_2^2)/(S_1^2/\sigma_1^2) \sim F_{m-1,n-1}$, 知

$$[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2] = \left[(S_1^2/S_2^2)F_{m-1,n-1}(1-\alpha/2),\ (S_1^2/S_2^2)F_{m-1,n-1}(\alpha/2)\right].$$

2 指数分布

2.1 基础概念

- $X \sim E(\lambda)$.
- 概率密度函数: $f(x) = \begin{cases}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0.\end{cases}$
- 分布函数: $F(x) = \begin{cases}0, & x\le 0, \\ 1-\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0.\end{cases}$

2.2 数字特征

- 数学期望: $E[X]=\lambda^{-1}$.
- 方差: $\mathrm{Var}[X]=\lambda^{-2}$.
- k 阶矩: $E(X^k)=\dfrac{k!}{\lambda^k}$.
- 特征函数: $g(t)=\dfrac{\lambda}{\lambda-\mathrm{i}t}$.

2.3 其它性质

- 指数分布具有无记忆性，即 $P(X > m + t \mid X > m) = P(X > t)$.
- 若有一批元件寿命 $X \sim E(\lambda)$, 让一个元件开始工作, 每当这个元件坏了就用一个新的替换, 则到经历时间 T 后替换的次数 $Y \sim P(\lambda T)$.
- 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布 $E(\lambda)$, 则
$$X = 2\lambda(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \sim \chi^2_{2n}.$$

2.4 参数估计

- 矩估计: $1/\lambda = m$. (MVU 估计)
- 极大似然估计: $\lambda = 1/m$.
- 贝叶斯估计: 若先验密度为 $h(\lambda) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda}\ (\lambda > 0)$, 其它值为零, 则 $\lambda = \dfrac{n+2}{n\overline{X}+1}$.
- 区间估计
  - 枢轴变量法
    - 估计 λ.
      由 $2n\lambda\overline{X} \sim \chi^2_{2n}$, 知
      $$[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2] = \left[\chi^2_{2n}(1-\alpha/2)/(2n\overline{X}),\ \chi^2_{2n}(\alpha/2)/(2n\overline{X})\right].$$
    - 估计 $1/\lambda$.
      由 $2n\lambda\overline{X} \sim \chi^2_{2n}$, 知
      $$[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2] = \left[(2n\overline{X})/\chi^2_{2n}(1-\alpha/2),\ (2n\overline{X})/\chi^2_{2n}(\alpha/2)\right].$$
- 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布 $E(\lambda_1)$, $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ 独立同分布 $E(\lambda_2)$, 估计 λ_2/λ_1.
  - 区间估计 (枢轴变量法)
    - 利用 $\dfrac{4\lambda_1 n\overline{X}}{4\lambda_2 m\overline{Y}} \sim \dfrac{2n\chi^2_{2n}}{2m\chi^2_{2m}} \sim F_{2n,2m}$.

3 威布尔分布

概率密度函数: $f(x) = \begin{cases} \lambda\alpha x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda x^\alpha}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$

分布函数: $F(x) = \begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-\lambda x^\alpha}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$

4 均匀分布

4.1 基础概念

- $X \sim R(a, b)$.
- 概率密度函数: $f(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & a \le x \le b, \\ 0, & x < a \text{ 或 } x > b. \end{cases}$
- 分布函数: $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ (x-a)/(b-a), & a < x < b, \\ 1, & x \ge b. \end{cases}$

4.2 数字特征

- 数学期望: $\dfrac{a+b}{2}$.
- 方差: $\dfrac{(b-a)^2}{12}$.
- k 阶原点矩: $\alpha_k = \dfrac{1}{k+1}\dfrac{b^k-a^k}{b-a}$.
- k 阶中心距: $\mu_k = \begin{cases} \dfrac{1}{k+1}\left(\dfrac{b-a}{2}\right)^k, & k \text{ 为偶数}, \\ 0, & k \text{ 为奇数}. \end{cases}$
- 偏度系数: $\beta_1 = 0$.
- 峰度系数: $\beta_2 = \dfrac{9}{5}$.
- 特征函数: $g(t) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}bt}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}at}}{\mathrm{i}t(b-a)}, & t \neq 0, \\ 1, & t = 0. \end{cases}$

4.3 其它性质

- 若 $X \sim U\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, 则 $\tan X \sim C(1,0)$.

4.4 参数估计

- 估计 $R(\theta_1,\theta_2)$ 的参数.
  - 矩估计: $\theta_1 = m - \sqrt{3m_2}$, $\theta_2 = m + \sqrt{3m_2}$.
  - 极大似然估计: $\theta_1 = \min\limits_i(X_i)$, $\theta_2 = \max\limits_i(X_i)$.
- 估计 $R(0,\theta)$ 的参数.
  - 极大似然估计: $\hat{\theta} = \max\limits_i(X_i)$.
  - 无偏估计
    - $\hat{\theta} = \dfrac{n+1}{n}\max\limits_i(X_i)$. (MVU 估计)
    - $\hat{\theta} = (n+1)\min\limits_i(X_i)$. (方差很大)
    - $\hat{\theta} = \max\limits_i(X_i) + \min\limits_i(X_i)$.
  - 区间估计
    - 由 $\hat{\theta}_1 := \max\limits_i(X_i) \sim F_{\hat{\theta}_1}(x) = \dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n}$,

      $[\max(X_i), (1-\alpha)^{-\frac{1}{n}}\max(X_i)]$ 的置信系数为 $1-\alpha$.

5 对数正态分布

5.1 基础概念

- $\ln X \sim N(\mu,\sigma^2)$.
- 概率密度函数: $f(x,\mu,\sigma) = \begin{cases} \left(x\sqrt{2\pi}\sigma\right)\exp\left[-\dfrac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$

5.2 数字特征

- 期望: $E(X)=\mathrm{e}^{\mu+\sigma^2/2}$.
- 方差: $\operatorname{Var}(X)=\left(\mathrm{e}^{\sigma^2}-1\right)\mathrm{e}^{2\mu+\sigma^2}$.
- k 阶原点矩: $\alpha_k=\mathrm{e}^{\mu k+k^2\sigma^2/2}$.

6 柯西分布

6.1 基础概念

- $X\sim C(\gamma,x_0)$.
- 概率密度函数: $f(x;x_0,\gamma)=\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{\gamma}{(x-x_0)^2+\gamma^2}\quad(-\infty<x<+\infty)$.
- 累积分布函数: $F(x;x_0,\gamma)=\dfrac{1}{\pi}\arctan\dfrac{x-x_0}{\gamma}+\dfrac{1}{2}$.
- 标准柯西分布: $C(1,0)\sim t_1$.
- 广义柯西分布: $X_k\sim f_m(X_k\mid\sigma_X)=\dfrac{a_m}{1+\left(\dfrac{X_k^2}{2\sigma_k^2}\right)^m}\ (a_m>0.5)$.

6.2 数字特征

- 数学期望不存在. (仅 Cauchy 主值积分存在)
- 方差不存在.
- 高阶矩不存在.

6.3 其它性质

- 可加性: 若 X_i 独立同分布 $C(\gamma,x_0)$, 则 $X_1+X_2+\cdots+X_n\sim C(n\gamma,nx_0)$.
- 若 X_1 和 X_2 独立同分布 $N(0,1)$, 则 $\dfrac{X_1}{X_2}\sim C(1,0)$.
- 若 $X\sim U\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, 则 $\tan X\sim C(1,0)$.

6.4 参数估计

- 参数估计: 可使用样本中位数 $\tilde{m}$ 估计.

7 拉普拉斯分布

7.1 基础概念

- $X\sim\operatorname{La}(\mu,b)$.
- 概率密度函数: $f(x)=\dfrac{1}{2\lambda}\mathrm{e}^{-\frac{|x-\mu|}{\lambda}}$.

7.2 数字特征

7.3 其它性质

7.4 参数估计

- 估计 b.
  - 矩估计: $\tilde{b}=m$.
  - 极大似然估计: $\tilde{b}=m_e$.

8 卡方分布

8.1 基础概念

- 自由度为 n 的皮尔逊卡方密度与卡方分布 $X \sim \chi_n^2$.
- 概率密度函数

$$k_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{-x/2} x^{(n-2)/2}}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right) 2^{n/2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

8.2 数字特征

- $E(\chi_n^2) = n.$
- $E(\chi_n^2)^{-1} = \dfrac{1}{n-2}.$
- $E(\chi_n^2)^k = \dfrac{2^k \Gamma\left(\dfrac{n}{2} + k\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} \ (k \in \mathbb{Z}).$
- $\mathrm{Var}(\chi_n^2) = 2n.$

  注意到方差是均值的两倍，可以以此检验是否为卡方分布.

8.3 其它性质

- 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布 $N(0,1)$, 则

$$Y = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2 \sim \chi_n^2.$$

- 若 $X_1 \sim \chi_m^2$ 与 $X_2 \sim \chi_n^2$ 独立, 则

$$X_1 + X_2 \sim \chi_{m+n}^2.$$

- 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布 $E(\lambda)$, 则

$$X = 2\lambda(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) \sim \chi_{2n}^2.$$

- 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则

$$(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi_{n-1}^2.$$

9 t 分布

9.1 基础概念

- 自由度为 n 的 t 分布 $X \sim t_n$.
- 概率密度函数

$$t_n(y) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(n/2)} \left(1 + \frac{y^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

9.2 数字特征

- $E(t_n) = 0 \ (n > 1).$
- $\mathrm{Var}(t_n) = \dfrac{n}{n-2} \ (n > 2).$

9.3 其它性质

- 设 X_1, X_2 独立, $X_1 \sim \chi_n^2$, $X_2 \sim N(0,1)$, 则

$$\frac{X_2}{\sqrt{X_1/n}} \sim t_n$$

- 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则

$$\sqrt{n}\,(\overline{X} - \mu)/S \sim t_{n-1}.$$

- 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布 $N(\mu_1, \sigma^2)$, $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ 独立同分布 $N(\mu_2, \sigma^2)$, 且 X_i, Y_j 独立, 则

$$\frac{\sqrt{\dfrac{nm(n+m-2)}{n+m}}\left[(\overline{X}+\overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)\right]}{\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 + \sum_{j=1}^{m}(Y_j - \overline{Y})^2}} \sim t_{n+m-2}.$$

10 F 分布

10.1 基础概念

- 自由度为 (m, n) 的 F 分布 $X \sim F_{m,n}$.
- 概率密度函数

$$f_{m,n}(y) = m^{m/2} n^{n/2} \frac{\Gamma\left(\dfrac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} y^{m/2-1}(my+n)^{-(m+n)/2} \quad (y > 0).$$

10.2 数字特征

- $E(f_{m,n}) = \dfrac{n}{n-2}\ (n > 2)$.
- $\mathrm{Var}(f_{m,n}) = \dfrac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$.

10.3 其它性质

- 设 X_1, X_2 独立, $X_1 \sim \chi_n^2$, $X_2 \sim \chi_m^2$, 则

$$\frac{X_2}{m} \bigg/ \frac{X_1}{n} \sim F_{m,n}.$$

- 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ 独立同分布 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 且 X_i, Y_j 独立, 则

$$\frac{S_Y}{\sigma_2^2} \bigg/ \frac{S_X}{\sigma_1^2} \sim F_{m-1,n-1}.$$

- $\forall k, n, \in \mathbb{N}, a \in (0,1) : kF_{k,n}(a) \geq F_{1,n}(a)$.

A.2.3 多维离散型

1 多项分布:

$X=(X_1,\cdots,X_n)\sim M(N;p_1,\cdots,p_n)$.

$$P(X_1=k_1,X_2=k_2,\cdots,X_n=k_n)=\frac{N!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_n^{k_n}.$$

多项分布的边缘分布是二项分布.

$(X_1,X_2,\cdots,X_n)\sim M(N;p_1,p_2,\cdots,p_n)\quad\Rightarrow\quad X_1+X_2\sim B(N;p_1+p_2)$.

A.2.4 多维连续型

1 矩形均匀分布

2 二维正态分布

$X=(X_1,X_2)\sim N(a,b,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$.

$f(x_1,x_2)=(2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2})^{-1}\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x_1-a)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x_1-a)(x_2-b)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-b)^2}{\sigma_2^2}\right)\right]$.

当且仅当 $\rho=0$ 时, X_1 和 X_2 独立.

其它性质

- 二维正态分布的边缘分布是正态分布.
- 二维正态分布的条件分布是正态分布.

  若 $(X,Y)\sim N(a,b,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$, 则给定 $X=x$ 时 Y 的条件分布为

  $$N(b+\rho\sigma_2\sigma_1^{-1}(x-a),\ \sigma_2^2(1-\rho^2)).$$

- 二维正态分布的边缘分布的和仍为正态分布

  若 $(X_1,X_2)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$, 则 $Y=X_1+X_2\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2)$.
- 独立的正态分布的联合分布是正态分布.

  正态分布的联合分布<u>不一定</u>是二维正态分布.
- 若 $Y=X_1+X_2$ 服从正态分布, X_1,X_2 独立, 则 X_1,X_2 也是正态分布. ⭐

3 多元正态分布

设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为 n 元随机变量, 令

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\mu}=\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\\\vdots\\\mu_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{nn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&n_{nn}\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{C}$ 为协方差矩阵. 如果 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的概率密度函数为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\boldsymbol{C}|^{\frac{1}{2}}}$$

则称 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是参数为 $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{C}$ 的 n 元正态变量.

其它性质

- n 维正态分布的边缘分布是正态分布.
- n 维正态分布的条件分布是正态分布.
- n 维正态分布的边缘分布的和是正态分布.
- n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 服从 n 维正态分布的充要条件是:

$$\forall l_i \in \mathbb{R}\,(i = 1, 2, \cdots, n) : l_1X_1 + l_2X_2 + \cdots + l_nX_n \sim N(\mu, \sigma^2).$$

- 若 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ 都是 n 维正态分布分量 $X_i\,(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的线性函数, 则 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_m)$ 服从 m 维正态分布.
- n 维正态分布各分量相互对立充要条件是它们两两不相关.