第一章作业

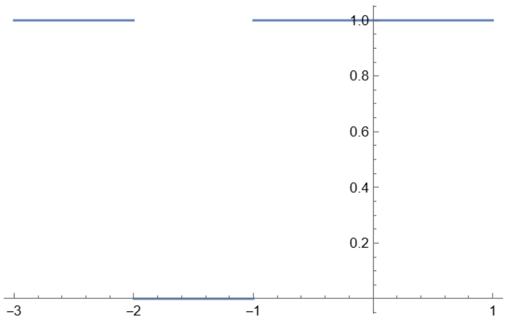
警告：本人作业中可能会包含以下要素，

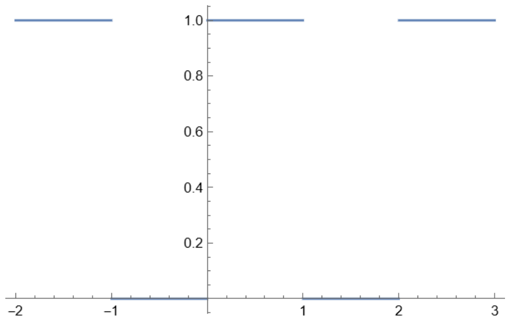
1. 源码流出；
2. 牛刀杀鸡；
3. 略去过程；
4. 略去答案.

> 好吧只是开玩笑，重要的过程大都会有的.
>
> 此外，备注里也会详细写一些知识点或者拓展内容.

1.1

1. $f(t) = u(t^2 + 3t + 2) = \mathbb{I}\{t < -2 \text{ 或 } t > -1\}$.
2. $f(t) = u(\sin \pi t) = \mathbb{I}\{2k < t < 2k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$.





1.2

1. 周期的, $T = \dfrac{2\pi}{3}$.
2. 周期的, $T = \pi$.
3. 非周期.

1.3 $f(t) = tu(t) - (t-1)u(t-1) - u(t-3)$.

1. 2. 3. 4. 均略.

1.4 图略.

0. $q_4(t) = \dfrac{t+2}{2}u(t+2) - tu(t) + \dfrac{t-2}{2}u(t-2)$.
1. $q_4'(t) = \dfrac{1}{2}u(t+2) - u(t) + \dfrac{1}{2}u(t-2)$.
2. $q_4''(t) = \dfrac{1}{2}\delta(t+2) - \delta(t) + \dfrac{1}{2}\delta(t+2)$.

1.5 图略.

1. $f_{\mathrm{e}}(t)=\dfrac{f(t)+f(-t)}{2}$.
2. $f_{\mathrm{o}}(t)=\dfrac{f(t)-f(-t)}{2}$.

1.6 图略.

1.7

1. 原式 $=\cos\omega$.
2. 原式 $=0$.
3. 原式 $=\mathrm{e}^{-2\lambda}\mathbb{I}\left\{\lambda\geq 0\right\}$.
4.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\sin 10t}{10t}\bigg|_{t=0}=\frac{\sin 10t-10t\cos t}{10t^2}\bigg|_{t=0}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{\left(10t-\frac{(10t)^2}{6}\right)-10t\left(1-\frac{(10t)^2}{2}\right)+o(t^3)}{10t^2}=0\end{aligned}$$

1.8

1.

$$\begin{aligned}t\left[u(t)-u(t-2)\right]*\delta(1-t)&=t\left[u(t)-u(t-2)\right]*\delta(t-1)\\&=(t-1)\left[u(t-1)-u(t-3)\right].\end{aligned}$$

2. 法一: 由定义与筛选性质

$$\begin{aligned}&\big[(1-3t)\delta'(t)\big]*\mathrm{e}^{-3t}u(t)\\=&\int_{-\infty}^{+\infty}(1-3x)\delta'(x)\mathrm{e}^{3x-3t}u(t-x)\,\mathrm{d}x\\=&\int_{-\infty}^{t}(1-3x)\mathrm{e}^{3x-3t}\delta'(x)\,\mathrm{d}x\\=&\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-3t}\delta'(x)\,\mathrm{d}x\\=&\,\mathrm{e}^{-3t}\delta(t)=\delta(t).\end{aligned}$$

   法二: 由定义与分类讨论 (略)

   法三: 由筛选性质与卷积的性质

$$\begin{aligned}&\big[(1-3t)\delta'(t)\big]*\mathrm{e}^{-3t}u(t)\\=&\,\delta'(t)*\mathrm{e}^{-3t}u(t)+3\delta(t)*\mathrm{e}^{-3t}u(t)\\=&\,\delta(t)-3\mathrm{e}^{-3t}u(t)+3\mathrm{e}^{-3t}u(t)=\delta(t).\end{aligned}$$

注 此题由 mathematica 算出来的结果有误.

1.9 略.

1.10

1. 原式 $= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{t} \delta\left(\tau-\frac{1}{2}\right) \mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}u\left(t-\frac{1}{2}\right).$
2. 原式 $= \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos\dfrac{\pi}{4}\delta(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\delta'(t).$
3. 原式 $= \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t)\sin t\,\mathrm{d}t = -1.$

1.11

1. $f_1(t) = 1 + u(t-1),$
   $f_2(t) = \mathrm{e}^{-(t+1)}u(t+1).$

$$
\begin{aligned}
f_1(t) * f_2(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (1+u(t-x-1))\mathrm{e}^{-(x+1)}u(x+1)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x+1)}\,\mathrm{d}x + u(t)\int_{-1}^{t-1} \mathrm{e}^{-(x+1)}\,\mathrm{d}x \\
&= 1 + (1-\mathrm{e}^{-t})u(t).
\end{aligned}
$$

2. $f_1(t) = \sin(t)u(t).$
   $f_2(t) = u(t-1).$

$$
\begin{aligned}
f_1(t) * f_2(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x)u(x)u(t-x-1)\,\mathrm{d}x \\
&= u(t-1)\int_{0}^{t-1} \sin x\,\mathrm{d}x \\
&= [1-\cos(t-1)]u(t-1).
\end{aligned}
$$

1.12 ⭐

1. 该系统对 $\delta(t)$ 的响应为 $h_0(t) = 0$, 由于 $h_0(t-\tau) \neq h_\tau(t)$, 故该系统是时变的.
2. 注意到 $h_{-1}(t) = u(t+1) - u(t+2)$, 故为非因果.
3. $x_1(t) = u(t-1) - u(t-3)$ 的响应为

$$
\begin{aligned}
y_1(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)h_\tau(t)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{1}^{3} (u(t-\tau) - u(t-2\tau))\,\mathrm{d}\tau \\
&= \begin{cases} 0, & t < 1, \\ t-1, & 1 \le t < 2, \\ \dfrac{t}{2}, & 2 \le t < 3, \\ 3 - \dfrac{t}{2}, & 3 \le t < 6, \\ 0, & 6 \le t. \end{cases}
\end{aligned}
$$

   $x_2(t) = \mathrm{e}^{-t}u(t)$ 的响应为

$$
\begin{aligned}
y_2(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(\tau) h_\tau(t)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\tau} u(\tau)\left[u(t-\tau)-u(t-2\tau)\right]\mathrm{d}\tau \\
&= u(t)\int_{t/2}^{t} \mathrm{e}^{-\tau}\,\mathrm{d}\tau = \left(\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} - \mathrm{e}^{-t}\right)u(t).
\end{aligned}
$$

备注

我之前认知上的一个错误是, 觉得题目中给出了一个信号的响应, 但没有给出一般信号的响应, 从而有无数种满足条件的线性系统. 比如 $x(t)$ 的响应可以是

1. $y(t) = \displaystyle\int_{t-\tau}^{t} x(s)\,\mathrm{d}s$,
   1. 首先这是满足题意的:
      1. 该系统是线性的.
      2. 代入 $x(t) = \delta(t-\tau)$ 则有 $y(t) = h_\tau(t)$.
   2. 其次系统的分类是:
      1. $x(t-t_0)$ 的响应为 $\displaystyle\int_{t-\tau}^{t} x(s-t_0)\,\mathrm{d}s = \int_{t-t_0-\tau}^{t-t_0} x(s)\,\mathrm{d}s = y(t-t_0)$, 即时不变.
      2. 当常数 $\tau \geq 0$ 时, 该系统是因果的; 否则是非因果的.
2. $y(t) = \displaystyle\int_{t-\tau}^{t} x(s)\,\mathrm{d}s - \delta(t-\tau)x(0) + x(t)$,
   1. 题目中没有给出状态, 如果初始状态 $x(0) = 1$, 那么
      1. 该系统是线性的.
      2. 代入 $x(t) = \delta(t-\tau)$ 则有 $y(t) = h_\tau(t)$.
   2. 其次系统的分类是
      1. $x(t-t_0)$ 的响应不等于 $y(t-t_0)$, 因此系统是时变的.
      2. 同样的, 当常数 $\tau \geq 0$ 时, 该系统是因果的; 否则是非因果的.

这个问题困扰了我很久, 十分恼火, 问题到底出在哪儿了? 我知道答案的思路是什么, 知道如何用答案的思路去求解, 但我想知道的是, 上面的思路为什么不对? 如果不能指出问题的根本原因, 我就永远无法真正理解这个知识点.

这些推理没有问题, 信号 $x(t)$ 是一个函数 (即 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的一个确定的映射), 响应 $y(t) = \Pi(x(t), x(0))$ 是其泛函; 但是 $\delta(t-\tau)$ 的响应是 $h_\tau(t)$, 它无法仅仅作为其泛函而表示为 $h_\tau(t) = \Pi(\delta(t-\tau))$, 因此还需要增加一个参数 τ. 一般的, 我们写为 $y_\tau(t) = \Pi(x(t), x(0), \tau)$. 题目中没有给出具体的映射关系 $x(t) \mapsto y(t)$, 而只有一个 $\delta(t-\tau)$ 的例子, 无法确定 Π, 就好比 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 只给出 $a \mapsto b$, 无法确定 f. 既然如此, 系统的不确定性就非意料之外了.

有问题的是对题目的理解, 或者说对概念的约定. 我们不能将 τ 仅仅理解为一个参数, 或者说一个常数, 而要认识到作者想要表达的是延迟 τ 之后的冲激响应为 $h_\tau(t)$. 这里的 τ 是信号 $x(t)$ 延迟的时间, 而不能抛开信号的延迟去讨论 τ. 比如之前说到的 $y(t) = \displaystyle\int_{t-\tau}^{t} x(s)\,\mathrm{d}s$, 这仅仅对于延迟 τ 后的信号 $\delta_\tau(t)$ 成立, 而对其它信号并不成立. 准确来说, 出题人的意图是, 信号 $x(t)$ 先时移为 $x(t-\tau)$, 后经系统为 $y_\tau(t)$; 先经系统为 $y_0(t)$, 再时移为 $y_0(t-\tau)$.

理解了这些概念, 尤其是 $h_\tau(t)$ 定义为延迟的冲激信号 $\delta(t-\tau)$ 的响应, 对于所有的 τ 都成立, 而不是某一个特定的 τ, 那么一切问题就都迎刃而解了. 实际上, 我们可由此唯一地确定该系统:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= H(p)x(t) = H(p)\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)H(p)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h_\tau(t)\,\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}
$$

产生这样的理解偏差, 就好比两个人在争吵, 但又互不理解对方真正在表达什么, 用着相同的词汇表达着不同的事物. 这种争执, 不仅愚蠢, 而且浪费时间, 还坏人心情, 尽管双方都振振有词. 我的建议是, 不要吝惜笔墨与口舌, 在讨论任何事情之前, 先确保自己的表述不会使得对方产生理解上的偏差 (尽管说起来容易做起来难).

1.13

1. 满足可分解性、零状态线性、零输入线性, 故为线性系统.

   $e(t-\tau)$ 的响应与 $r(t-\tau)$ 相同, 因此是非时变系统.
2. 满足可分解性、零状态线性, 不满足零输入线性, 故为非线性系统.

   $e(t-\tau)$ 的响应与 $r(t-\tau)$ 不同, 因此是时变系统.
3. 满足可分解性、零状态线性、零输入线性, 故为线性系统.

   $e(t-\tau)$ 的响应与 $r(t-\tau)$ 不同, 因此是时变系统.
4. 满足可分解性、零输入线性, 不满足零状态线性, 故为非线性系统.

   $e(t-\tau)$ 的响应与 $r(t-\tau)$ 相同, 因此是非时变系统.
5. 满足可分解性、零输入线性、零状态线性, 故为线性系统.

   $e(t-\tau)$ 的响应与 $r(t-\tau)$ 相同, 因此是非时变系统.

注　教材中未指出, 参考其它资料可知线性系统的判断依据是

1. 可分解性 $y(t) = y_{\mathrm{zs}}(t) + y_{\mathrm{zi}}(t)$.
2. 零状态线性 $T\left[\{af_1(t)+bf_2(t)\},\{0\}\right] = aT\left[\{f_1(t)\},\{0\}\right] + bT\left[\{f_2(t)\},\{0\}\right]$.
3. 零输入线性 $T\left[\{0\},\{af_1(t)+bf_2(t)\}\right] = aT\left[\{0\},\{f_1(t)\}\right] + bT\left[\{0\},\{f_2(t)\}\right]$.

1.14

1. 原式 $= \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} 3\delta(-2t)\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}$.
2. 原式 $= \left.\dfrac{t^2+2t+3}{2}\right|_{t=\frac{1}{2}} = \dfrac{17}{8}$.

1.15

1. 原式 $= -f'(0) = -2$.
2. 原式 $= f'(1) = 8$.

1.16

1. $r(t) = e(t-1) - e(1-t)$.
   1. $k_1e_1(t) + k_2e_2(t)$ 的响应为 $k_1r_1(t) + k_2r_2(t)$, 故为线性.
   2. $e_\tau(t) = e(t-\tau)$ 的响应为

$$
\begin{aligned}
r_\tau(t) &= e_\tau(t-1) - e_\tau(1-t) \\
&= e(t-\tau-1) - e(1-t-\tau) \\
&\neq e(t-\tau-1) - e(1-t+\tau) \\
&= r(t-\tau),
\end{aligned}
$$

故为时变.

3. 取 $t=0$, 则与 1 时刻的响应有关, 故为非因果.

2. $r(t) = \begin{cases} 0, & t<0, \\ e(t)+e(t-100), & t \geq 0. \end{cases}$

    1. $k_1e_1(t)+k_2e_2(t)$ 的响应为 $k_1r_1(t)+k_2r_2(t)$, 故为线性.

    2. $e_\tau(t)=e(t-\tau)$ 的响应为

    $$
    \begin{aligned}
    r_\tau(t) &= \begin{cases} 0, & t<0, \\ e(t-\tau)+e(t-\tau-100), & t\geq 0. \end{cases} \\
    &\neq \begin{cases} 0, & t<\tau, \\ e(t-\tau)+e(t-\tau-100), & t\geq \tau. \end{cases} \\
    &= r(t-\tau),
    \end{aligned}
    $$

    故为时变.

    3. 响应只与现在与过去时刻的信号有关, 故为因果.

3. $r(t) = \begin{cases} 0, & e(t)<0, \\ e(t)+e(t-100), & e(t) \geq 0. \end{cases}$

    1. 直流信号 1 的响应为 2,

    直流信号 -1 的响应为 0,

    但是二者之和 0 的响应 0, 故为非线性.

    2. $e_\tau(t)=e(t-\tau)$ 的响应为 $r_\tau(t)=r(t-\tau)$, 故为非时变.

    3. 响应只与现在与过去时刻的信号有关, 故为因果.

4. 由第 1.12 题, 为线性、时变、非因果.