

# 概率论与数理统计

眠云跂石整理

## 附录

### A.1 常用积分

特殊函数 伽马函数与贝塔函数.

$$\text{伽马函数与递推式: } \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = (x-1)\Gamma(x-1) \quad (x > 0)$$

$$\text{贝塔函数与关系式: } B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (x, y > 0)$$

$$\text{勒让德倍量公式: } \Gamma(s)\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2s-1}}\Gamma(2s) \quad (s > 0)$$

$$\text{余元公式: } B(s, 1-s) = \Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s} \quad (0 < s < 1)$$

$$\begin{cases} \Gamma(n) = (n-1)!, & n \in \mathbb{N}^+, \\ \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{(n-2)!!}{2^{(n-1)/2}}\sqrt{\pi}, & n \text{ 为正奇数.} \end{cases}$$

$$B(s, s) = \frac{1}{2^{2s-1}}B\left(\frac{1}{2}, s\right) \quad (s > 0)$$

特殊函数的应用

一般的

$$\int_0^1 x^a (1-x^b)^c dx = \frac{1}{b} B\left(\frac{a+1}{b}, c+1\right) \quad (a > -1, b > 0, c > -1)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^a dx}{(1+x^b)^c} = \frac{1}{|b|} B\left(c - \frac{a+1}{b}, \frac{a+1}{b}\right) \quad \left( \begin{array}{l} a > -1, b > 0, c > \frac{a+1}{b} \text{ 或} \\ a < -1, b < 0, c > \frac{a+1}{b} \end{array} \right)$$

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-ax^p} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{p}\right)}{|p|a^{\frac{n+1}{p}}} \quad \left( \begin{array}{l} a > 0, p > 0, n > -1 \text{ 或} \\ a > 0, p < 0, n < -1 \end{array} \right)$$

特殊的

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^m dx}{(1+x^2)^n} &= B\left(n - \frac{m+1}{2}, \frac{m+1}{2}\right) \quad (\text{注意积分限}) \\ \int_0^{+\infty} \frac{x^m dx}{(1+x)^n} &= B(n-m-1, m+1) \end{aligned}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^p} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{pa^{\frac{1}{p}}}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^p} dx = \frac{1}{p}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (\text{注意积分限})$$

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}} = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-ax^2} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2a^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{(2n-1)!!}{2(2a)^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-ax^2} dx = \frac{(2n)!!}{(2a)^{n+1}}$$

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

## A.2 常用分布

### A.2.1 一维离散型

#### 1 二项分布

##### 1.1 基础概念

- $X \sim B(n, p)$ .
- 理解: 事件发生的概率为  $p$ , 则重复  $n$  次试验, 事件发生的次数为  $x$ .
- 概率分布:  $P(X = i) = b(i; n, p) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$ .

##### 1.2 数字特征

- 最可能数:  $x = \lfloor (n+1)p \rfloor$ .
- 期望:  $E(X) = np$ .
- 方差:  $\text{Var}(X) = np(1-p)$ .
- 母函数:  $G(s) = (ps + q)^n, s \in (-\infty, +\infty)$ .
- 特征函数:  $g(t) = (pe^{it} + q)^n$ .

##### 1.3 其它性质

- 二项分布和的函数

$$X_1 \sim B(n_1, p), X_2 \sim B(n_2, p) \Rightarrow X_1 + X_2 \sim B(n_1 + n_2, p).$$

- 发生偶数次的概率为  $p_n = \frac{1}{2}[1 + (1-2p)^n]$ .

- 记  $f(p) = P(X \leq k)$ , 则  $f'(p) < 0$ , 并且

$$f(p) = \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \int_0^{1-p} t^k (1-t)^{n-k-1} dt.$$

#### 1.4 参数估计

- 矩估计:  $p = m/n$ . (MVU 估计)
- 极大似然估计:  $p = m/n$ . (MVU 估计)
- 贝叶斯估计

- 同等无知原则:  $p = \frac{X+1}{n+2}$ .
- 若先验密度  $h(p) = p^{a-1}(1-p)^{b-a-1}$ , 则  $\tilde{p} = \frac{X+c}{n+d}$ .

- 区间估计

- 大样本法: 近似地取枢轴变量  $(Y_n - np)/\sqrt{np(1-p)} \sim N(0, 1)$ , 则

$$\theta_1, \theta_2 = \frac{n}{n + u_{\alpha/2}^2} \left( \hat{p} + \frac{u_{\alpha/2}^2}{2n} \pm u_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} + \frac{u_{\alpha/2}^2}{4n^2}} \right), \quad \hat{p} = Y_n/n.$$

取  $\hat{p}(1-\hat{p}) = 1/4$ , 则区间长度为  $u_{\alpha/2}/\sqrt{n + u_{\alpha/2}^2}$ .

当  $\alpha = 0.05$ ,  $n \geq 40$  时, 有  $\theta_2 - \theta_1 \leq 0.3$ .

- $p^k$  ( $k \leq n$ ) 的无偏估计是  $\frac{X^k}{n^k}$ . (下降阶乘幂)

## 2 泊松分布

### 2.1 基础概念

- $X \sim P(\lambda)$ .
- 理解: 单位时间内事件平均发生  $\lambda$  次, 则某一段单位时间内发生的次数为  $x$ .
- 概率分布:  $P(X = i) = \lim_{n \rightarrow \infty} b(i; n, \frac{\lambda}{n}) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!}$ .
- 当二项分布满足  $n > 50, p < 0.1, np < 5$  时, 用泊松分布近似效果较好.

### 2.2 数字特征

- 最可能数:  $k = \lfloor \lambda \rfloor$ .
- 期望:  $E(X) = \lambda$ .
- 方差:  $\text{Var}(X) = \lambda$ .
- 中位数:  $m_e = \frac{\ln 2 \lambda}{\lambda}$ .
- $E|X - m_e| = m_e$ .
- 母函数:  $G(s) = e^{\lambda(s-1)}$ ,  $s \in (-\infty, +\infty)$ .
- 特征函数:  $g(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$ .

### 2.3 其它性质

- 泊松分布和的函数 (可加性)

$$X_1 \sim P(\lambda_1), X_2 \sim P(\lambda_2) \Rightarrow X_1 + X_2 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2).$$

- 记  $f(\lambda) = P(X \leq k)$ , 则  $f'(\lambda) < 0$ , 并且

$$f(\lambda) = \frac{1}{k!} \int_{\lambda}^{+\infty} t^k e^{-t} dt.$$

- 若  $X \sim P(\lambda)$ ,  $Y \sim B(X, p)$ , 则  $Y \sim P(\lambda p)$ .

## 2.4 参数估计

- 矩估计
  - $\lambda = m$ . (MVU 估计)
  - $\lambda = m_2$  或  $S^2$ .
- 极大似然估计:  $\lambda = \bar{X}$ .
- 贝叶斯估计: 见第四章第五题.
- 区间估计
  - 大样本法: 近似地取  $(Y_n - n\lambda)/\sqrt{n\lambda} \sim N(0, 1)$ , 则

$$A, B = \bar{X} + u_{\alpha/2}^2/(2n) \pm u_{\alpha/2} \sqrt{u_{\alpha/2}^2/(4n^2) + \bar{X}/n}, \quad \bar{X} = Y_n/n.$$

## 3 超几何分布

### 3.1 基础概念

- $X \sim H(N, n, M)$ .
- 理解:  $N$  件产品中有  $M$  件次品, 从总体中抽  $n$  件时次品的数量  $m$ .
- 概率分布:  $P(X = m) = \frac{\binom{M}{m} \binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}$ .

### 3.2 数字特征

- 期望:  $E(X) = \frac{nM}{N}$ .
- 方差:  $\text{Var}(X) = \frac{nM(N-n)(N-M)}{N^2(N-1)} = \frac{nM}{N} \frac{N-n}{N-1} \left(1 - \frac{M}{N}\right)$ .

### 3.3 其它性质

### 3.4 参数估计

已知  $N, n$  估计  $M$ .

- 贝叶斯估计: 采用同等无知原则, 则  $M = \frac{N+2}{n+2}(X+1) - 1$ .

## 4 负二项分布

### 4.1 基础概念

- $X \sim NB(r, p)$ , 又称为正整数形式帕斯卡分布.
- 理解: 合格率为  $p$ , 抽取到  $r$  个合格产品时, 抽到的不合格产品的个数  $x$ .
- 概率分布:  $P(X = i) = d(i; r, p) = \binom{i+r-1}{r-1} p^r (1-p)^i$ .

## 4.2 数字特征

- 数学期望:  $E(X) = \frac{r(1-p)}{p}$ .
- 方差:  $\text{Var}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$ .

## 4.3 其它性质

## 4.4 参数估计

注:  $m_e := (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n$ .

- 矩估计:  $p = \frac{r}{m_e + r}$ .
- 极大似然估计:  $p = \frac{r}{m_e + r}$ .
- 贝叶斯估计:  $p = \frac{nr + 1}{nr + nm_e + 1}$ .

# 5 几何分布

## 5.1 基础概念

- $X \sim GE(p)$ .
- 理解: 合格率为  $p$ , 抽取到第一个合格产品时, 抽到的不合格产品的个数  $x$ .
- 概率分布:  $P(X = i) = p(1-p)^i$ .

## 5.2 数字特征

- 数学期望:  $E(X) = \frac{1-p}{p}$ .
- 方差:  $\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$ .
- 母函数:  $G(s) = \frac{ps}{1-qs} - 1, s \in \left(-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right)$ .
- 特征函数:  $g(t) = \frac{pe^{it}}{1-qe^{it}} - 1$ .

## 5.3 其它性质

- 几何分布具有无记忆性.
- 若  $X_1, X_2, \cdots, X_r$  独立同分布  $GE(p)$ , 则  $X_1 + X_2 + \cdots + X_r \sim NB(r, p)$ .

# 5' 几何分布

## 5'.1 基础概念

- $X \sim G(p)$ .
- 理解: 合格率为  $p$ , 抽取到第一个合格产品时, 抽取的总产品的个数  $x$ .
- 概率分布:  $P(X = i) = p(1-p)^{i-1}$ .

## 5'.2 数字特征

- 数学期望:  $E(X) = \frac{1}{p}$ .
- 方差:  $\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$ .
- 母函数

- $G(s) = \frac{ps}{1 - qs}, s \in \left(-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}\right).$
  - $G^{(n)}(1) = \frac{(1-p)^{n-1}}{p^n} n!.$
- 特征函数:  $g(t) = \frac{pe^{it}}{1 - qe^{it}}.$

### 5.3 其它性质

- 几何分布具有无记忆性.
- 若  $X_1, X_2, \dots, X_r$  独立同分布  $G(p)$ , 则  $X_1 + X_2 + \dots + X_r - r \sim NB(r, p).$

## A.2.2 一维连续型

概率分布函数, 概率密度函数

注: 以下偏度系数定义为  $\beta_1 = \mu_3/\mu_2^{3/2}$ , 峰度系数定义为  $\beta_2 = \mu_4/\mu^2$ .

### 1 正态分布

[点击查看 Geogebra 图像](#)

#### 1.1 基础概念

- $X \sim N(\mu, \sigma^2).$
- 概率密度函数:  $f(x) = (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-1} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$
- 标准正态分布:  $Y = (X - \mu)/\sigma \sim N(0, 1).$
- $3\sigma$  原则: 0.6826, 0.9544, 0.9974.
- 上  $\alpha$  分位数:  $\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha.$

#### 1.2 数字特征

- 期望:  $\mu.$
- 方差:  $\sigma^2.$
- $k$  阶中心矩:  $\mu_k = \begin{cases} \sigma^k (k-1)!!, & k \text{ 为偶数,} \\ 0, & k \text{ 为奇数.} \end{cases}$
- 偏度系数:  $\beta_1 = 0.$
- 峰度系数:  $\beta_2 = 3.$
- 特征函数:  $g(t) = e^{i\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t^2}.$

#### 1.3 其它性质

- 相互独立的正态分布的函数
  - 分布之和
    - 若  $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$  相互独立, 则  $X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$
    - 若  $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$  且相互独立, 则  $X_1 + \dots + X_n \sim N(\mu_1 + \dots + \mu_n, \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2).$
  - 分布之差
    - 若  $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$  相互独立, 则  $X_1 - X_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$
  - 分布之商
    - 若  $X_1$  和  $X_2$  独立同分布  $N(0, 1)$ , 则  $X_1/X_2 \sim C(1, 0)$  (柯西分布).
  - 分布之积

若  $X_1 \sim N(0, \sigma_1^2)$ ,  $X_2 \sim N(0, \sigma_2^2)$ , 则  $X_1 X_2 \sim \frac{1}{\pi \sigma_1 \sigma_2} K_0\left(\frac{|z|}{\sigma_1 \sigma_2}\right)$  (修正贝塞尔函数; 暂时未学)

#### 平方之和

若  $X_1, X_2, \dots, X_n$  独立同分布  $N(0, 1)$ , 则  $Y = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 \sim \chi_n^2$ .

#### 统计量的分布

○  $\bar{X}$  与  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  独立.

○ 均值已知, 标准差已知

- $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ .
- $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \sim N(0, 1)$ .
- $\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi_n^2$ .

○ 均值已知, 标准差未知

- $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t_{n-1}$ .

○ 均值未知, 标准差已知

- $\frac{SS}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma}\right)^2 \sim \chi_{n-1}^2$ .

○ 两份相互独立的样本

$X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$ , iid,  $\sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ .

$Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$ , iid,  $\sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ .

- $\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$ .
- $\frac{S_1^2}{\sigma_1^2} \bigg/ \frac{S_2^2}{\sigma_2^2} \sim f(n_1 - 1, n_2 - 1)$ .
- 当  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$  时,

$$S_\omega := \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}},$$

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_\omega \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1 + n_2 - 2}.$$

注: 利用  $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma}$  和  $\frac{SS}{\sigma^2}$ , 由 t 分布的定义即得.

#### 1.4 参数估计

• 已知  $\sigma^2$ , 估计  $\mu$ .

○ 矩估计

- $\mu = m$ . (MVU 估计)

○ 区间估计

- 枢轴变量法

根据  $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma \sim N(0, 1)$ , 知

$$[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2] = [\bar{X} - \sigma u_{\alpha/2}/\sqrt{n}, \bar{X} + \sigma u_{\alpha/2}/\sqrt{n}].$$

- 已知  $\mu$ , 估计  $\sigma^2$ .

- 矩估计  $\theta = \sigma^2$ .

- $\hat{\theta} = m_2$ . ( $\mu$  已知时的 MVU 估计, 且此时均方误差为  $\frac{2}{n}\sigma^4$ )

- 估计  $\mu$  和  $\sigma^2$ .

- 矩估计

- $\mu = m$ . (MVU 估计)

- $\sigma^2 = S^2$ . ( $\mu$  未知时的 MVU 估计)

- 极大似然估计:  $\mu = m, \sigma^2 = m_2$ .

- 区间估计

- 枢轴变量法

- 根据  $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/S \sim t_{n-1}$ , 知一样本  $t$  区间估计为

$$[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2] = [\bar{X} - St_{n-1}(\alpha/2)/\sqrt{n}, \bar{X} + St_{n-1}(1 - \alpha/2)/\sqrt{n}].$$

- 根据  $(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi_{n-1}^2$ , 知

$$[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2] = [(n-1)S^2/\chi_{n-1}^2(\alpha/2), (n-1)S^2/\chi_{n-1}^2(1 - \alpha/2)].$$

- 无偏估计

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} S.$$

- 估计变异系数  $\sigma/\mu$ .

- 矩估计:  $\sqrt{m_2}/m$  或  $S/m$ .

- 估计  $N(\theta, 1)$  的  $\theta$ .

- 贝叶斯估计: 先验密度  $h(\theta) \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 则

$$\tilde{\theta} = \frac{n}{n+1/\sigma^2} \bar{X} + \frac{1/\sigma^2}{n+1/\sigma^2} \mu.$$

- 对于  $N(\mu_1, \sigma^2), N(\mu_2, \sigma^2)$ , 已知  $\sigma^2$ , 估计  $\mu_1 - \mu_2$ .

- 区间估计 (两样本  $t$  区间估计)

- 枢轴估计法

$$\text{记 } S^2 = \left[ \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 \right] / \sqrt{n+m-2},$$

$$\text{由 } T = \sqrt{\frac{mn}{m+n}} \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S} \sim t_{n+m-2}, \text{ 知区间估计为}$$

$$[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2] = \left[ (\bar{X} - \bar{Y}) - St_{n+m-2}(\alpha/2) \sqrt{\frac{n+m}{nm}}, (\bar{X} - \bar{Y}) + St_{n+m-2}(\alpha/2) \sqrt{\frac{n+m}{nm}} \right].$$

- 贝伦斯 - 费歇尔问题: 对于  $N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$ , 所有参数均未知, 估计  $\mu_1 - \mu_2$ .

- 区间估计

- 大样本法: 取枢轴变量



$$N(0, 1) \sim \left[ (\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2) \right] / \sqrt{\sigma_1^2/n + \sigma_2^2/m} \quad (\text{严格的})$$

$$\sim \left[ (\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2) \right] / \sqrt{S_1^2/n + S_2^2/m} \quad (\text{近似的})$$

- 对于  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ , 所有参数均未知, 估计  $\lambda = \sigma_1^2/\sigma_2^2$ .

- 区间估计

- 枢轴变量法

由  $(S_2^2/\sigma_2^2)/(S_1^2/\sigma_1^2) \sim F_{m-1, n-1}$ , 知

$$[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2] = [(S_1^2/S_2^2)F_{m-1, n-1}(1 - \alpha/2), (S_1^2/S_2^2)F_{m-1, n-1}(\alpha/2)].$$

## 2 指数分布

[点击查看 Geogebra 图像](#)

### 2.1 基础概念

- $X \sim E(\lambda)$ .
- 概率密度函数:  $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$
- 分布函数:  $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$

### 2.2 数字特征

- 数学期望:  $E[X] = \lambda^{-1}$ .
- 方差:  $\text{Var}[X] = \lambda^{-2}$ .
- $k$  阶矩:  $E(X^k) = \frac{k!}{\lambda^k}$ .
- 特征函数:  $g(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$ .

### 2.3 其它性质

- 指数分布具有无记忆性, 即  $P(X > m + t \mid X > m) = P(X > t)$ .
- 若有一批元件寿命  $X \sim E(\lambda)$ , 让一个元件开始工作, 每当这个元件坏了就用一个新的替换, 则到经历时间  $T$  后替换的次数  $Y \sim P(\lambda T)$ .
- 若  $X_1, X_2, \dots, X_n$  独立同分布  $E(\lambda)$ , 则

$$Y = 2\lambda(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \sim \chi_{2n}^2.$$

- 若  $X_i \sim E(\lambda_i)$  相互独立, 则

$$Y = \min(X_1, X_2, \dots, X_n) \sim E(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n).$$

### 2.4 参数估计

- 矩估计:  $1/\lambda = m$ . (MVU 估计)
- 极大似然估计:  $\lambda = 1/m$ .
- 贝叶斯估计: 若先验密度为  $h(\lambda) = \lambda e^{-\lambda}$  ( $\lambda > 0$ ), 其它值为零, 则  $\lambda = \frac{n+2}{n\bar{X}+1}$ .
- 区间估计
  - 枢轴变量法
    - 估计  $\lambda$ .

由  $2n\lambda\bar{X} \sim \chi_{2n}^2$  知

$$[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2] = \left[ \chi_{2n}^2(1 - \alpha/2)/(2n\bar{X}), \chi_{2n}^2(\alpha/2)/(2n\bar{X}) \right].$$

- 估计  $1/\lambda$ .

由  $2n\lambda\bar{X} \sim \chi_{2n}^2$  知

$$[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2] = \left[ (2n\bar{X})/\chi_{2n}^2(1 - \alpha/2), (2n\bar{X})/\chi_{2n}^2(\alpha/2) \right].$$

- 若  $X_1, X_2, \dots, X_n$  独立同分布  $E(\lambda_1)$ ,  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  独立同分布  $E(\lambda_2)$ , 估计  $\lambda_2/\lambda_1$ .

- 区间估计 (枢轴变量法)

- 利用  $\frac{4\lambda_1 n \bar{X}}{4\lambda_2 m \bar{Y}} \sim \frac{2n\chi_{2n}^2}{2m\chi_{2m}^2} \sim F_{2n, 2m}$ .

### 3 威布尔分布

[点击查看 Geogebra 图像](#)

概率密度函数:  $f(x) = \begin{cases} \lambda \alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x^\alpha}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$

分布函数:  $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x^\alpha}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$

### 4 均匀分布

#### 4.1 基础概念

- $X \sim R(a, b)$ .
- 概率密度函数:  $f(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & a \leq x \leq b, \\ 0, & x < a \text{ 或 } x > b. \end{cases}$
- 分布函数:  $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ (x-a)/(b-a), & a < x < b, \\ 1, & x \geq b. \end{cases}$

#### 4.2 数字特征

- 数学期望:  $\frac{a+b}{2}$ .
- 方差:  $\frac{(b-a)^2}{12}$ .
- $k$  阶原点矩:  $\alpha_k = \frac{1}{k+1} \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{b-a}$ .
- $k$  阶中心矩:  $\mu_k = \begin{cases} \frac{1}{k+1} \left( \frac{b-a}{2} \right)^k, & k \text{ 为偶数}, \\ 0, & k \text{ 为奇数}. \end{cases}$
- 偏度系数:  $\beta_1 = 0$ .
- 峰度系数:  $\beta_2 = \frac{9}{5}$ .
- 特征函数:  $g(t) = \begin{cases} \frac{e^{ibt} - e^{iat}}{it(b-a)}, & t \neq 0, \\ 1, & t = 0. \end{cases}$

### 4.3 其它性质

- 若  $X_1, X_2, \dots, X_n$  独立同分布  $U(a, b)$ , 则

$$\max(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \sim f(x) = \frac{n(x-a)^{n-1}}{(b-a)^n}$$

$$\min(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \sim f(x) = \frac{n(b-x)^{n-1}}{(b-a)^n}$$

- 若  $X \sim U\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , 则  $\tan X \sim C(1, 0)$ .

### 4.4 参数估计

- 估计  $R(\theta_1, \theta_2)$  的参数.
  - 矩估计:  $\theta_1 = m - \sqrt{3m_2}$ ,  $\theta_2 = m + \sqrt{3m_2}$ .
  - 极大似然估计:  $\theta_1 = \min_i(X_i)$ ,  $\theta_2 = \max_i(X_i)$ .

- 估计  $R(0, \theta)$  的参数.

- 极大似然估计:  $\hat{\theta} = \max_i(X_i)$ .

- 无偏估计

- $\hat{\theta} = \frac{n+1}{n} \max_i(X_i)$ . (MVU 估计)

- $\hat{\theta} = (n+1) \min_i(X_i)$ . (方差很大)

- $\hat{\theta} = \max_i(X_i) + \min_i(X_i)$ .

- 区间估计

- 由  $\hat{\theta}_1 := \max_i(X_i) \sim F_{\hat{\theta}_1}(x) = \frac{nx^{n-1}}{\theta^n}$ ,

$$[\max(X_i), (1-\alpha)^{-\frac{1}{n}} \max(X_i)] \text{ 的置信系数为 } 1-\alpha.$$

## 5 对数正态分布

[点击查看 Geogebra 图像](#)

### 5.1 基础概念

- $\ln X \sim N(\mu, \sigma^2)$ .
- 概率密度函数:  $f(x, \mu, \sigma) = \begin{cases} \left(x\sqrt{2\pi}\sigma\right)^{-1} \exp\left[-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right], & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$

### 5.2 数字特征

- 期望:  $E(X) = e^{\mu+\sigma^2/2}$ .
- 方差:  $\text{Var}(X) = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu+\sigma^2}$ .
- $k$  阶原点矩:  $\alpha_k = e^{\mu k + k^2 \sigma^2 / 2}$ .

## 6 柯西分布

[点击查看 Geogebra 图像](#)

### 6.1 基础概念

- $X \sim C(\gamma, x_0)$ .
- 概率密度函数:  $f(x; x_0, \gamma) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\gamma}{(x - x_0)^2 + \gamma^2} \quad (-\infty < x < +\infty)$ .
- 累积分布函数:  $F(x; x_0, \gamma) = \frac{1}{\pi} \arctan \frac{x - x_0}{\gamma} + \frac{1}{2}$ .
- 标准柯西分布:  $C(1, 0) \sim t_1$ .
- 广义柯西分布:  $X_k \sim f_m(X_k | \sigma_X) = \frac{a_m}{1 + \left(\frac{X_k^2}{2\sigma_k^2}\right)^m} \quad (a_m > 0.5)$ .

### 6.2 数字特征

- 数学期望不存在. (仅 Cauchy 主值积分存在)
- 方差不存在.
- 高阶矩不存在.

### 6.3 其它性质

- 可加性: 若  $X_i$  独立同分布  $C(\gamma, x_0)$ , 则  $X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim C(n\gamma, nx_0)$ .
- 若  $X_1$  和  $X_2$  独立同分布  $N(0, 1)$ , 则  $\frac{X_1}{X_2} \sim C(1, 0)$ .
- 若  $X \sim U\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , 则  $\tan X \sim C(1, 0)$ .

### 6.4 参数估计

- 参数估计: 可使用样本中位数  $\tilde{m}$  估计.

## 7 拉普拉斯分布

[点击查看 Geogebra 图像](#)

### 7.1 基础概念

- $X \sim \text{La}(\mu, b)$ .
- 概率密度函数:  $f(x) = \frac{1}{2\lambda} e^{-\frac{|x-\mu|}{\lambda}}$ .

### 7.2 数字特征

### 7.3 其它性质

### 7.4 参数估计

- 估计  $b$ .
  - 矩估计:  $\tilde{b} = m$ .
  - 极大似然估计:  $\tilde{b} = m_e$ .

## 8 卡方分布

[点击查看 Geogebra 图像](#)

### 8.1 基础概念

- 自由度为  $n$  的皮尔逊卡方密度与卡方分布  $X \sim \chi_n^2$ .
- 概率密度函数

$$k_n(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x/2} x^{(n-2)/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{n/2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

- 例子 (以下  $x > 0$ )

$$\begin{aligned} k_1(x) &= \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{2\pi x}} & k_2(x) &= \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} \\ k_3(x) &= \frac{\sqrt{x} e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{2\pi}} & k_4(x) &= \frac{x}{4} e^{-\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

- 上  $\alpha$  分位数  $\chi_\alpha^2(n)$ .

### 8.2 数字特征

- $E(X) = n$ .
- $\text{Var}(X) = 2n$ .

注意到方差是均值的两倍, 可以以此检验是否为卡方分布.

- $E(X^{-1}) = \frac{1}{n-2}$ .
- $E(X^k) = \frac{2^k \Gamma\left(\frac{n}{2} + k\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad (k \in \mathbb{Z})$ .

### 8.3 其它性质

- 由中心极限定理近似求值  $X \sim \chi_n^2$ ,

$$\frac{X - n}{\sqrt{2n}} \sim N(0, 1) \Rightarrow \frac{\chi_\alpha^2(n) - n}{\sqrt{2n}} \approx z_\alpha \Rightarrow \chi_\alpha^2(n) \approx n + z_\alpha \sqrt{2n}.$$

- 若  $X_1, X_2, \dots, X_n$  独立同分布  $N(0, 1)$ , 则

$$Y = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 \sim \chi_n^2.$$

- 若  $X_1 \sim \chi_m^2$  与  $X_2 \sim \chi_n^2$  独立, 则

$$X_1 + X_2 \sim \chi_{m+n}^2.$$

- 若  $X_1, X_2, \dots, X_n$  独立同分布  $E(\lambda)$ , 则

$$X = 2\lambda(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \sim \chi_{2n}^2.$$

- 若  $X_1, X_2, \dots, X_n$  独立同分布  $N(\mu, \sigma^2)$ , 则

$$(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi_{n-1}^2.$$

## 9 t 分布

[点击查看 Geogebra 图像](#)

### 9.1 基础概念

- 自由度为  $n$  的 t 分布  $X \sim t_n$ .
- 概率密度函数

$$t_n(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

- 上  $\alpha$  分位数  $t_\alpha(n)$ .
- 由对称性知:  $t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$ .

### 9.2 数字特征

- $E(t_n) = 0$  ( $n > 1$ ).
- $\text{Var}(t_n) = \frac{n}{n-2}$  ( $n > 2$ ).

### 9.3 其它性质

- 若  $X \sim N(0, 1)$  与  $Y \sim \chi_n^2$  独立, 则

$$\frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t_n.$$

- 若  $X_1, X_2, \dots, X_n$  独立同分布  $N(\mu, \sigma^2)$ , 则

$$\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/S \sim t_{n-1}.$$

- 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  独立同分布  $N(\mu_1, \sigma^2)$ ,  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  独立同分布  $N(\mu_2, \sigma^2)$ , 且  $X_i, Y_j$  独立, 则

$$\frac{\sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}} [(\bar{X} + \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)]}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^m (Y_j - \bar{Y})^2}} \sim t_{n+m-2}.$$

## 10 F 分布

[点击查看 Geogebra 图像](#)

### 10.1 基础概念

- 自由度为  $(m, n)$  的 F 分布  $X \sim F_{m,n}$ .
- 概率密度函数

$$f_{m,n}(x) = m^{m/2} n^{n/2} \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{m}{2}-1} (mx+n)^{-\frac{m+n}{2}} \quad (x > 0)$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} x^{\frac{m}{2}-1} \left(1 + \frac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+n}{2}} \quad (x > 0)$$

- 若  $F \sim F(m, n)$ , 则  $F^{-1} \sim F(n, m)$ .
- 第一自由度为  $n_1$ , 第二自由度为  $n_2$  的  $F$  分布的上  $\alpha$  分位数  $F_\alpha(n_1, n_2)$ .
- $F_\alpha(m, n) \cdot F_{1-\alpha}(n, m) = 1$ .

### 10.2 数字特征

- $E(f_{m,n}) = \frac{n}{n-2} \quad (n > 2)$ .
- $\text{Var}(f_{m,n}) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$ .

### 10.3 其它性质

- 设  $X_1, X_2$  独立,  $X_1 \sim \chi_n^2, X_2 \sim \chi_m^2$ , 则

$$\frac{X_2}{m} \bigg/ \frac{X_1}{n} \sim F_{m,n}.$$

- 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  独立同分布  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  独立同分布  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ , 且  $X_i, Y_j$  独立, 则

$$\frac{S_Y}{\sigma_2^2} \bigg/ \frac{S_X}{\sigma_1^2} \sim F_{m-1, n-1}.$$

- $\forall k, n, \in \mathbb{N}, a \in (0, 1) : kF_{k,n}(a) \geq F_{1,n}(a)$ .

## A.2.3 多维离散型

### 1 多项分布:

$$X = (X_1, \dots, X_n) \sim M(N; p_1, \dots, p_n).$$

$$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \dots, X_n = k_n) = \frac{N!}{k_1! k_2! \dots k_n!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}.$$

多项分布的边缘分布是二项分布.

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) \sim M(N; p_1, p_2, \dots, p_n) \Rightarrow X_1 + X_2 \sim B(N; p_1 + p_2).$$

## A.2.4 多维连续型

### 1 矩形均匀分布

## 2 二维正态分布

$$X = (X_1, X_2) \sim N(a, b, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho).$$

$$f(x_1, x_2) = (2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2})^{-1} \exp \left[ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left( \frac{(x_1-a)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x_1-a)(x_2-b)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-b)^2}{\sigma_2^2} \right) \right].$$

当且仅当  $\rho = 0$  时,  $X_1$  和  $X_2$  独立.

### 其它性质

- 二维正态分布的**边缘分布**是正态分布.

- 二维正态分布的**条件分布**是正态分布.

若  $(X, Y) \sim N(a, b, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ , 则给定  $X = x$  时  $Y$  的条件分布为

$$N(b + \rho\sigma_2\sigma_1^{-1}(x-a), \sigma_2^2(1-\rho^2)).$$

- 二维正态分布的**边缘分布的和**仍为正态分布

若  $(X_1, X_2) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ , 则  $Y = X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2)$ .

- **独立**的正态分布的**联合分布**是正态分布.

正态分布的联合分布不一定是二维正态分布.

- 若  $Y = X_1 + X_2$  服从正态分布,  $X_1, X_2$  独立, 则  $X_1, X_2$  也是正态分布. ★

## 3 多元正态分布

设  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  为  $n$  元随机变量, 令

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

其中  $\mathbf{C}$  为**协方差矩阵**. 如果  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  的概率密度函数为

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\mathbf{C}|^{\frac{1}{2}}}$$

则称  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  是参数为  $\boldsymbol{\mu}, \mathbf{C}$  的  $n$  元正态变量.

### 其它性质

- $n$  维正态分布的**边缘分布**是正态分布.

- $n$  维正态分布的**条件分布**是正态分布.

- $n$  维正态分布的**边缘分布的和**是正态分布.

- $n$  维随机变量  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  服从  $n$  维正态分布的充要条件是:

$$\forall l_i \in \mathbb{R} (i = 1, 2, \dots, n) : l_1 X_1 + l_2 X_2 + \cdots + l_n X_n \sim N(\mu, \sigma^2).$$

- 若  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  都是  $n$  维正态分布分量  $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$  的**线性函数**, 则  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$  服从  $m$  维正态分布.

- $n$  维正态分布各分量**相互独立**充要条件是它们**两两不相关**.