3 恒定磁场

3.1 恒定磁场的基本定律

3.1.1 回路的安培力

$$\boldsymbol{F}_{21}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_2}\oint_{C_1}\frac{I_2\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\times(I_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{a}_R)}{R^2}.$$

- 即 C_1 对 C_2 的作用力，其中 $\boldsymbol{a}_R=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$.
- 真空中的磁导率 $\mu_0=4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{H/m}$.

3.1.2 比奥萨瓦定律

- 磁感应强度 (磁通量密度) $\boldsymbol{B}$
  - 单位为：$T = \mathrm{Wb/m^2} = 10^4\ \mathrm{Gs}.$
  - 线电流：$\boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\oint_{C'} \dfrac{I\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}' \times \boldsymbol{a}_R}{R^2}.$
  - 面电流：$\boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\iint_{S'} \dfrac{\boldsymbol{J}_\mathrm{s}(\boldsymbol{r}') \times \boldsymbol{a}_R}{R^2}\,\mathrm{d}S'.$
  - 体电流：$\boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\iiint_{V'} \dfrac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') \times \boldsymbol{a}_R}{R^2}\,\mathrm{d}V'.$
- 例子
  - 有限长直导线：$\boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi r}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)\boldsymbol{a}_\varphi.$
  - 无穷长直导线：$\boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\boldsymbol{a}_\varphi.$
  - 电流环的轴线：$\boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0 I r^2}{2(z^2 + r^2)^{3/2}}\boldsymbol{a}_z.$
  - 电流环的圆心：$\boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2r}\boldsymbol{a}_z.$
  - 无限大面电流：$B = \dfrac{\mu_0 J_\mathrm{s}}{2}.$

3.1.3 洛伦兹力方程

- 宏观回路：$\boldsymbol{F} = \displaystyle\oint_l I\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}.$
- 微观粒子：$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}.$
- 洛伦兹力方程：$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{E}).$

3.2 真空中恒定磁场方程

3.2.1 散度与磁通连续性原理

- 旋度场与无源性
  - $\boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{\nabla} \times \displaystyle\int_{V'} \dfrac{\boldsymbol{J}(r')}{R}\,\mathrm{d}V'.$
  - $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0.$
- 磁通量与连续性
  - 磁通 $\Phi_\mathrm{m} = \displaystyle\int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 单位为韦伯 Wb.
  - $\displaystyle\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}V = 0.$

3.2.2 真空中的安培环路定理

- 积分形式：$\oint_l \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0 I$.
- 微分形式：$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}$.
- 其中 I 为真实电流（自由电流），包括传导电流和运流电流.

3.2.3 位函数与矢量泊松方程

- 矢量磁位 $\boldsymbol{A}$.
  - $\boldsymbol{B}\equiv\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$.
  - $\boldsymbol{A}$ 不唯一. 若 $\boldsymbol{A}$ 满足上式，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\nabla}\phi$ 也满足.
  - 库仑规范：规定 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}=0$.
- 矢量泊松方程：$\Delta\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})-\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})=-\mu_0\boldsymbol{J}$.

3.2.4 矢量磁位的计算与应用

- 矢量磁位的计算

  > 可由毕奥–萨瓦定律或矢量泊松方程推得.

  - 线电流：$\boldsymbol{A}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_{V'}\frac{\boldsymbol{J}(r')}{R}\,\mathrm{d}V'$.
  - 面电流：$\boldsymbol{A}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_{S'}\frac{\boldsymbol{J}_s}{R}\,\mathrm{d}S'$.
  - 体电流：$\boldsymbol{A}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_{l'}\frac{\boldsymbol{I}}{R}\,\mathrm{d}l'$.
  - 或由 $\Delta\boldsymbol{A}=-\mu_0\boldsymbol{J}$ 与边界条件求解.
- 矢量磁位的应用
  - 求磁感应强度：$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$.
  - 求磁通量：$\Phi_{\mathrm{m}}=\displaystyle\int_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint_C\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$.

3.3 磁偶极子与介质磁化

3.3.1 磁偶极子及其矢量磁位

- 磁偶极子
  - 一个小载流圆环，右手螺旋方向.
  - 磁偶极矩 (磁矩)：$\boldsymbol{p}_{\mathrm{m}}=I\boldsymbol{S}=IS\boldsymbol{a}_z$.
- 矢量磁位
  - 矢量磁位：$\boldsymbol{A}=\dfrac{\mu_0}{4\pi r^2}\boldsymbol{p}_{\mathrm{m}}\times\boldsymbol{a}_r=\dfrac{\mu_0}{4\pi r^3}\boldsymbol{p}_{\mathrm{m}}\times\boldsymbol{r}$.
  - 磁感应强度：$\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0 IS}{4\pi r^3}(\boldsymbol{a}_r 2\cos\theta+\boldsymbol{a}_\theta\sin\theta)$.

3.3.2 磁化介质及其电流密度

- 介质的磁化
  - 介质磁化后：束缚电流 (磁化电流)，附加磁场.
  - 介质的分类：抗磁质，顺磁质，铁磁质.
  - 铁磁质：剩磁、磁滞现象.
- 磁化强度矢量 $\boldsymbol{M} = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{\sum \boldsymbol{p}_{\mathrm{m}}}{\Delta V}$.
  - 均匀磁化 / 非均匀磁化.
  - 磁化体电流密度：$\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{M}$.
  - 磁化面电流密度：$\boldsymbol{J}_{\mathrm{sm}} = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{n}$.

3.3.3 介质中的恒定磁场方程

- 磁场强度 $\boldsymbol{H}$.
  - 考虑 $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}) = \mu_0(\boldsymbol{J} + \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{M})$.
  - 于是定义磁场强度 $\boldsymbol{H} := \dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M}$，单位为 $\mathrm{A/m}$.
- 安培环路定律
  - 微分形式：$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$.
  - 积分形式：$\displaystyle\oint_l \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I$.
- 磁通连续性原理
  - 微分形式：$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$.
  - 积分形式：$\displaystyle\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$.
- 矢量电位函数
  - 泊松方程：$\Delta \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) = -\mu \boldsymbol{J}$.
  - 对于无源区域，拉普拉斯方程：$\Delta \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$.

3.3.4 磁化强度与相对磁导率

- 磁化强度：$\boldsymbol{M} \equiv \chi_{\mathrm{m}} \boldsymbol{H}$.
  - 介质的磁化率 χ_{m} 无量纲.
  - 在真空中，$\chi_{\mathrm{m}} = 0$.
  - 顺磁质 $\chi_{\mathrm{m}} > 0$，抗磁质 $\chi_{\mathrm{m}} < 0$.
  - 铁磁质 $\chi_{\mathrm{m}} \gg 1$，非铁磁质 $\chi_{\mathrm{m}} \approx 1$.
- 磁感应强度：$\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) = \mu_0(1 + \chi_{\mathrm{m}})\boldsymbol{H} = \mu_0 \mu_{\mathrm{r}} \boldsymbol{H} = \mu \boldsymbol{H}$.
  - 相对磁导率 μ_{r} 无量纲.
  - 磁导率 $\mu = \mu_0 \mu_{\mathrm{r}}$ 单位为 $\mathrm{H/m}$.

- 顺磁质和抗磁质的 $\mu_\mathrm{r} \approx 1$.
- 铁磁质的 $\mu_\mathrm{r} \gg 1$ 且非常数.

3.3.5 磁化强度与电流的计算

- 磁化强度和磁化电流的计算
  - $\boldsymbol{M} = \chi_\mathrm{m}\boldsymbol{H} = (\mu_\mathrm{r}-1)\boldsymbol{H} = \dfrac{\mu_\mathrm{r}-1}{\mu}\boldsymbol{B}$.
  - $\boldsymbol{J}_\mathrm{m} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{M} = \dfrac{\mu_\mathrm{r}-1}{\mu_\mathrm{r}}\boldsymbol{J} + \boldsymbol{\nabla}\dfrac{\mu_\mathrm{r}-1}{\mu}\times\boldsymbol{B}$.
  - $\boldsymbol{J}_\mathrm{sm} = \boldsymbol{M}\times\boldsymbol{e}_\mathrm{n} = \dfrac{\mu_\mathrm{r}-1}{\mu}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e}_\mathrm{n}$.
- 对于线性各向同性介质
  - $\boldsymbol{J}_\mathrm{m} = \dfrac{\mu_\mathrm{r}-1}{\mu_\mathrm{r}}\boldsymbol{J}$.
  - $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{M} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{H} = 0$.
- 媒质的本构方程
  - $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$.
  - $\boldsymbol{J}_\mathrm{c} = \sigma\boldsymbol{E}$.
  - $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$.

3.4 恒定磁场的边界条件

3.4.1 磁感应强度边界条件

- $\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2) = 0$.
- $B_\mathrm{1n} = B_\mathrm{2n} = \mu_1 H_\mathrm{1n} = \mu_2 H_\mathrm{2n}$.
- 若理想导体内部没有电磁场也没有电流，则 $B_\mathrm{n} = 0$.

3.4.2 磁场强度的边界条件

- $\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2) = \boldsymbol{J}_\mathrm{s}$.
- $H_\mathrm{1t} - H_\mathrm{2t} = \dfrac{B_\mathrm{1t}}{\mu_1} - \dfrac{B_\mathrm{2t}}{\mu_2} = J_\mathrm{s}$.
- 若媒质 2 为导体，则 $H_\mathrm{t} = J_\mathrm{s}$.
- 若导体表面有自由面电流，则将产生切向磁场强度分量.

3.4.3 电位函数的边界条件

- 矢量磁位
  - $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}_2$.
  - $\boldsymbol{n}\times\left(\dfrac{\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}_1}{\mu_1} - \dfrac{\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}_2}{\mu_2}\right) = \boldsymbol{J}_\mathrm{s}$.

- 标量磁位
  - $\phi_{\mathrm{m1}} = \phi_{\mathrm{m2}}$.
  - $\mu_1 \dfrac{\partial \phi_{\mathrm{m1}}}{\partial n} = \mu_2 \dfrac{\partial \phi_{\mathrm{m2}}}{\partial n}$.

3.4.4 分界面上的磁场方向

- 若 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}} = \boldsymbol{0}$，则
  - $\dfrac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \dfrac{\mu_1}{\mu_2}$.
  - $\dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}$.
- 铁磁质的 $\mu \gg 1$，因此空气中的磁场近似垂直于纯铁表面.

3.4.5 电流密度的计算方法

- 自由电流
  - 自由电流体密度：$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H}$.
  - 自由电流面密度：$\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}} = \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2)$.
- 磁化电流
  - 磁化体电流密度：$\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{M}$.
  - 磁化面电流密度：$\boldsymbol{J}_{\mathrm{sm}} = \boldsymbol{M}_1 \times \boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{M}_2 \times \boldsymbol{n}_2$.

3.5 无源磁场的标量磁位

3.5.1 标量磁位与磁压定义

- 对于无源区域 $\boldsymbol{J} = 0$，
  - 矢量磁位：$\boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{0}$.
  - 标量磁位：$\boldsymbol{H} \equiv -\boldsymbol{\nabla} \phi_{\mathrm{m}}$.
  - 标量磁位 ϕ_{m} 的单位为安培.
  - 磁压：$U_{\mathrm{mAB}} = \displaystyle\int_A^B \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \phi_{\mathrm{mA}} - \phi_{\mathrm{mB}}$.
- 多值性
  - 标量磁位与磁压都具有多值性.
  - 产生原因：$\displaystyle\oint_C \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I \neq 0$.
  - 消除方法：规定积分路径不穿过电流回路围成的区域 (磁障碍面).

3.5.2 拉氏方程与泊松方程

- $0 = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) \Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{H} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{M}$.
- 均匀磁化：$\boldsymbol{\nabla}^2 \phi_{\mathrm{m}} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{H} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu} = 0$.
- 非均匀磁化：$\boldsymbol{\nabla}^2 \phi_{\mathrm{m}} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{M} \equiv -\rho_{\mathrm{m}}$.

3.5.3 磁荷密度与边界条件

- 磁荷密度
  - 磁荷体密度 $\rho_{\mathrm{m}} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{M}$.
  - 磁荷面密度 $\rho_{\mathrm{sm}} = \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{n}$.
- 磁场强度的边界条件
  - $\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) = \rho_{\mathrm{sm}}$.
  - $H_{1\mathrm{n}} - H_{2\mathrm{n}} = \rho_{\mathrm{sm}}$.

3.5.4 电位函数的边界条件

- 矢量磁位的边界条件
  - $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}_2$.
  - $\boldsymbol{n} \times \left(\dfrac{\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}_1}{\mu_1} - \dfrac{\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}_2}{\mu_2} \right) = \boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}$.
- 标量磁位的边界条件
  - $\phi_{\mathrm{m}1} = \phi_{\mathrm{m}2}$.
  - $\mu_1 \dfrac{\partial \phi_{\mathrm{m}1}}{\partial n} = \mu_2 \dfrac{\partial \phi_{\mathrm{m}2}}{\partial n}$.

3.5.5 磁感应强度计算方法

- 利用标量磁位
  - $\rho_{\mathrm{m}} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{M}, \rho_{\mathrm{sm}} = \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{n}$.
  - $\phi_{\mathrm{m}} = \displaystyle\int_{V'} \frac{\rho_{\mathrm{m}}}{4\pi R} \,\mathrm{d}V' + \int_S \frac{\rho_{\mathrm{sm}}}{4\pi R} \,\mathrm{d}S'$.
  - $\boldsymbol{H} = -\boldsymbol{\nabla} \phi_{\mathrm{m}}, \boldsymbol{B} = \mu_0 (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M})$.
- 利用矢量磁位
  - $\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{M}, \boldsymbol{J}_{\mathrm{sm}} = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{n}$.
  - $\boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \displaystyle\int_{V'} \frac{\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}} \times \boldsymbol{a}_R}{R^2} \,\mathrm{d}V' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}} \times \boldsymbol{a}_R}{R^2} \,\mathrm{d}S'$.
  - $\boldsymbol{H} = \dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M}$.

3.6 恒定磁场的其它问题

3.6.1 自电感与互电感

- 自电感 L.
  - 磁通：$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$.
  - 磁链：$\Psi = n\Phi$.
  - 自感：$L = \dfrac{\Psi}{I}$.
- 互电感 M.
  - 互磁链：Ψ_{12}.
  - $M_{12} = \dfrac{\Psi_{12}}{I_2}$.
  - $M_{12} = M_{21} = M$.
- 自感大于零，互感可正可负.

3.6.2 内自感与外自感

- 磁链：$\Psi = n\Phi = \Psi_\mathrm{i} + \Psi_\mathrm{o}$.
  - 内磁链：Ψ_i 为与部分电流交链的磁链.
  - 外磁链：Ψ_o 为与全部电流交链的磁链.
- 电感：$L = \dfrac{\Psi}{I} = L_\mathrm{i} + L_\mathrm{o}$.
  - 内自感：$L_\mathrm{i} = \dfrac{\psi_\mathrm{i}}{I}$.
  - 外自感：$L_\mathrm{o} = \dfrac{\psi_\mathrm{o}}{I}$.
- 长直导体的内自感
  - 注意 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 的方向. $B_\mathrm{i} = \dfrac{\mu_0}{2\pi r}\dfrac{r^2 I}{a^2} = \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}$,
  - $L_\mathrm{i} = \dfrac{\Psi}{I}\displaystyle\int_0^a \frac{r^2}{a^2}\boldsymbol{B}_\mathrm{i} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{I}\int_0^a \frac{r^2}{a^2}\frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} l \, \mathrm{d}r = \frac{\mu_0 l}{8\pi}$.

3.6.3 自感与互感计算

- 互感
  - 矢量磁位：$\boldsymbol{A}_{21} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\oint_{l_1}\frac{I_1 \, \mathrm{d}\boldsymbol{l}_1}{R}$.
  - 磁通：$\Phi_{21} = \displaystyle\int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_{l_2} \boldsymbol{A}_{21} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$.
  - **诺依曼公式**：$M = \dfrac{N_1 N_2 \mu_0}{4\pi}\displaystyle\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_1}{R}$.
- 自感
  - 外自感：$L_\mathrm{o} = \dfrac{N^2 \mu_0}{4\pi}\displaystyle\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_1}{R}$.

- 内自感：$L_\mathrm{i} = \dfrac{\mu_0 l}{8\pi}$.
- 自电感：$L = L_\mathrm{i} + L_\mathrm{o}$.

3.6.4 能量与能量密度

- n 回路电流系统
  - $W_\mathrm{m} = \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} I_i \Psi_i = \dfrac{1}{2}\sum_{i,j} M_{ij} I_i I_j$.
  - $W_\mathrm{m} = \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} L_i I_i^2 + \dfrac{1}{2}\sum_{i\neq j} M_{ij} I_i I_j$.
- 两个回路
  - 互感系数：$M \leq \sqrt{L_1 L_2}$.
  - 耦合系数：$k = \dfrac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$.
- 磁场能量
  - $\omega_\mathrm{m} = \dfrac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H} = \dfrac{1}{2}\mu H^2 = \dfrac{B^2}{2\mu}$.
  - $W_\mathrm{m} = \dfrac{1}{2}\int_V \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}\,\mathrm{d}V$.

3.6.5 磁场力虚位移法

对于复杂系统，利用 $\mathrm{d}W = \mathrm{d}W_\mathrm{m} + F_g\,\mathrm{d}g$.

- 若回路电流不变
  - $\mathrm{d}W = \sum_{k=1}^{N} I_k\,\mathrm{d}\Psi_k$.
  - $\mathrm{d}W_\mathrm{m} = \dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} I_k\,\mathrm{d}\Psi_k$.
  - $F_g = \left.\dfrac{\partial W_\mathrm{m}}{\partial g}\right|_{I_k=\text{常数}}$.
- 若回路磁链不变
  - $\mathrm{d}W = 0$.
  - $F_g = -\left.\dfrac{\partial W_\mathrm{m}}{\partial g}\right|_{\Psi_k=\text{常数}}$.