数理统计

第 4 章 参数估计

4.1 基本概念与性质

4.1.1 基本概念与常用统计图

总体（母体）是概率分布族的一员.

总体分布 离散性（概率函数），连续型（概率密度函数）

单参数分布族

非参数总体

样本大小 (容量)

常用统计图

1. **频数分布表**

组号	区间	频数 n_i	频率 f_i
1	$(1,2]$	2	0.40
2	$(2,3]$	3	0.60
合计		5	1.00

2. **频率直方图** 以 $\dfrac{f_i}{\Delta t_i}$ 为高. 所有小矩形的面积和为 1.
3. **条形图**　一般用于小样本离散性随机变量总体分布.

4.1.2 经验分布函数与格列文科定理

经验分布函数 (样本分布函数) $F_n(x) = \{X_1, X_2, \cdots, X_n \text{ 中不大于 } x \text{ 的个数}\}/n.$

即将 X 的样本值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 从小到大重排后, 定义经验分布函数如下.

$$\underbrace{x_{(1)}, \cdots, x_{(1)}}_{n_1}, \underbrace{x_{(2)}, \cdots, x_{(2)}}_{n_2}, \cdots \underbrace{x_{(m)}, \cdots, x_{(m)}}_{n_m},$$

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < x_{(1)}, \\ \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{k} n_i, & x_{(k)} \le x < x_{(k+1)} \\ 1, & x \ge x_{(m)} \end{cases}$$

1. $0 \le F_n(x) \le 1$.
2. $F_n(x)$ 单调不减.
3. $F_n(-\infty) = 0,\ F_n(+\infty) = 1$.
4. $F_n(x)$ 右连续.

格列文科定理 对于任意实数 x, 经验分布函数 $F_n(x)$ 以概率 1 一致收敛于总体分布函数 $F(x)$, 即

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} \sup_{-\infty<x<+\infty} |F_n(x) - F(x)| = 0\right\} = 1.$$

- 经验分布函数不确定, 不唯一, 所以在极限外套一个 P.

4.1.3 常用统计量及其性质

统计量　只依赖于样本，而不依赖于其未知参数.

- 样本的统计量为 $g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$.
- 统计量的观测值为 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

样本均值 $\overline{X} = a_1 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i.$

- 其观测值记为 $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i.$
- 对于一般分布 ⭐
  - $E(\overline{X}) = \mu.$
  - $E\left(\overline{X}^2\right) = \dfrac{\sigma^2}{n} + \mu^2.$
  - $E\left(\overline{X}^3\right) = \dfrac{\mu_3}{n^2} + \dfrac{3}{n}\mu\sigma^2 + \mu^3.$
  - $E\left(\overline{X}^4\right) = \dfrac{\mu_4}{n^3} + \dfrac{4}{n^2}\mu_3\mu + \dfrac{18}{n}\mu^2\sigma^2 + 7\mu^4.$
  - $E\left(X_i^2\overline{X}\right) = \dfrac{\mu_3}{n} + \dfrac{n-1}{n}(\sigma^2 + \mu^2)\mu.$
  - $E\left(X_i\overline{X}^{k-1}\right) = E\left(\overline{X}^k\right).$
  - $D(\overline{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}.$
  - $\mu_k(\overline{X}) = E\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^k\right] = \dfrac{\mu_k}{n^{k-1}}.$

- ⭐ 设总体有 N 个数据 $a_1,a_2,\cdots,a_N$, 均值为 $\mu=\dfrac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}a_i$, 方差为 $\sigma^2=\dfrac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}(a_i-\mu)^2$.

  从总体中抽取 n 个值 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 作为样本, 则
  - $E(\overline{X})=\mu$.
  - $D(\overline{X})=\dfrac{N-n}{N-1}\dfrac{\sigma^2}{n}$.

  当 $N\to+\infty$ 时, 即抽取的样本相互独立时, 有 $D(\overline{X})\sim\dfrac{\sigma^2}{n}$.

样本离差平方和 $\mathrm{SS}=\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2$.

- 其观测值记为 $\mathrm{ss}=\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2$.

样本方差 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$.

- 其观测值记为 s^2.
- 标准差又称均方差, 样本标准差的观测值记为 s.
- 对于一般分布, 有
  - $E(S^2)=\sigma^2$.
  - $D(S^2)=\dfrac{1}{n}\left(\mu_4-\dfrac{n-3}{n-1}\sigma^4\right)$. ⭐
  - $\mathrm{Cov}(\overline{X},S^2)=\dfrac{\mu_3}{n}-\dfrac{3\sigma^3+\mu^2}{n-1}\mu..$
- 对于正态分布, 有 $D(S^2)=D\left(\dfrac{\sigma^2}{n-1}\chi^2_{n-1}\right)=\dfrac{2\sigma^4}{n-1}$. ⭐

样本原点矩 $a_k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^k$.

- 或使用 A_k 表示样本原点矩, 用 a_k 表示其观测值.

样本中心矩 $m_k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k$.

- 或使用 B_k 表示样本中心距, 用 b_k 表示其观测值.
- 矩称为理论矩，样本矩称为经验矩，即经验分布函数的矩.
- $m_2=\dfrac{n-1}{n}S^2$.
- $E(m_3)=\left(1-\dfrac{4}{n}+\dfrac{2}{n^2}\right)\mu_3+\dfrac{9-3n}{n}\mu\sigma^2+\dfrac{3-n}{n}\mu^3$.

不知道叫什么的统计量 $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2=\mathrm{SS}+n(\overline{X}-\mu)^2$.

样本协方差 $S_{XY}=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})$.

- 其观测值记为 s_{XY}.
- 样本协方差是总体协方差的无偏估计 (可以是有限总体的不放回抽取)

$E(S_{XY}) = \mathrm{Cov}(X, Y)$.

样本相关系数 $\rho_{XY} = \dfrac{S_{XY}}{S_X S_Y}$.

- 其中 S_X 和 S_Y 为样本均方差. 其观测值为 $\rho_{XY} = \dfrac{s_{_{XY}}}{s_{_X} s_{_Y}}$.

样本的 **众数** 记为 M_0.

次序统计量 $X_{(1)} \le X_{(2)} \le \cdots \le X_{(n)}$.

样本中位数 $\hat{m} = M_e = \begin{cases} X_{((n+1)/2)}, & n \text{ 为奇数}, \\ (X_{(n/2)} + X_{(n/2+1)})/2, & n \text{ 为偶数}. \end{cases}$

偏态系数

- 计算公式
  - 简单偏态系数 $\mathrm{SK} = \dfrac{m_3}{\sigma^3} = \dfrac{\sum(X - \overline{X})^3}{\sigma^3 \cdot N}$.
  - 加权偏态系数 $\mathrm{SK} = \dfrac{\sum(X - \overline{X})^3 F}{\sigma^3 \sum F}$.
- 取值说明
  - $\mathrm{SK} = 0$ 表示数据为完全的对称分布.
  - $\mathrm{SK} > 0$ 表示数据为 **正偏态** (或 **右偏态**).
  - $\mathrm{SK} < 0$ 表示数据为 **负偏态** (或 **左偏态**).

4.3.4 正态总体常用统计量

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 与 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 分别是来自正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2) = N(\mu, \sigma^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的相互独立的两个样本, 则

- 样本均值
  - $\overline{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$.
  - $\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$.
  - $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi_n^2$.
- 样本方差
  - $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$.
  - $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立.
  - $\dfrac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$.
- 两组样本
  - $\overline{X} - \overline{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$.
  - $\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim f_{n_1-1, n_2-1}$.

- 当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$, 令 $S_\omega^2=\dfrac{\mathrm{SS}_1^2+\mathrm{SS}_2^2}{n_1+n_2-2}$, 则

$$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t_{n_1+n_2-2}.$$

⭐ 设有 m 个方差均为 σ^2 的分布, 其中有 k 个分布的期望未知. 从这些分布中任取 n 个相互独立的样本数据, 则样本方差的一个无偏估计是 $S^2=\dfrac{\mathrm{SS}}{n-k}$. 若这些分布都是正态分布, 则进一步有 $\dfrac{\mathrm{SS}}{\sigma^2}\sim\chi_{n-k}^2$.

4.2 点估计

4.2.1 矩估计法

$$\alpha_m=\int_{-\infty}^{+\infty}x^mf(x;\theta_1,\cdots,\theta_2)\,\mathrm{d}x\approx a_m=\sum_{i=1}^nX_i^m/n$$

取 $m=1,2,\cdots,k$，联立方程组即得 $\theta_i\approx\hat\theta_i(X_1,\cdots,X_n)$.

- $\hat\theta_i(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 称为矩估计量.
- $\hat\theta_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为矩估计值. (其它估计相关名称类似)

变异系数 σ/μ.

🌙 对于任意均值 μ 与方差 σ^2 存在的总体, 有矩估计:

$$\begin{cases}\mu=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^nX_i\\ \sigma^2+\mu^2=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^nX_i^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\hat\mu=\overline{X}\\ \hat{\sigma^2}=\dfrac{\mathrm{SS}}{n}\end{cases}$$

4.2.2 极大似然估计法

样本 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的总体分布函数 (样本似然函数) 为

$$\begin{aligned}L(x_1,\cdots,x_n,;\theta_1,\cdots,\theta_k)&=\prod_{i=1}^nf(x_i;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n)\\ L(X_1,\cdots,X_n;\theta_1^*,\cdots,\theta_k^*)&=\max_{\theta_1,\cdots,\theta_k}L(X_1,\cdots,X_n;\theta_1,\cdots,\theta_k)\end{aligned}$$

欲得到极大似然估计，解如下似然方程组

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\theta_i}=0\quad(i=1,2,\cdots,k)$$

4.2.3 贝叶斯估计法

先验分布，先验概率. 允许使用主观概率.

设总体有概率密度 $f(X,\theta)$，抽样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，则 $(\theta,X_1,\cdots,X_n)$ 的联合密度为

$$h(\theta)f(X_1,\theta)\cdots f(X_n,\theta)$$

由此算出 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的边缘密度为

$$p(X_1, X_2, \cdots, X_n) = \int h(\theta) f(X_1, \theta) \cdots f(X_n, \theta) \mathrm{d}\theta$$

从而得出 θ 在给定 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的条件密度为

$$h(\theta \mid X_1, \cdots, X_n) = h(\theta) f(X_1, \theta) \cdots f(X_n, \theta) / p(X_1, \cdots, X_n)$$

一般去上式的均值作为估计, 即

$$\tilde{\theta} = E(h(\theta \mid X_1, X_2, \cdots, X_n)).$$

$h(\theta)$ 一般是概率函数，即满足 $h(\theta) \geq 0, \int h(\theta) \mathrm{d}\theta = 1.$

但对于积分域为无穷区间，或一些特定的分布，可以采用其它函数，比如 $h(\theta) = 1$，或直接取为先验密度等. 此时 $h(\theta)$ 称为 "广义先验密度".

根据 n 次独立试验中事件 A 发生的次数 X 去估计其发生的概率 p，按照 "同等无知" 原则（贝叶斯原则），由上述方法积分得

$$\tilde{p} = \frac{X+1}{n+2}.$$

- 估计正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 中的 μ 时，取 $h(\mu) = 1$;
- 估计正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 中的 σ 时，取 $h(\sigma) = \sigma^{-1}$;
- 估计指数分布 $E(\lambda)$ 中的 λ 时，取$h(\lambda) = \lambda^{-1}$.

由先验分布 $N(\mu. \sigma^2)$ 估计正态总体 $N(\theta, 1)$ 中的 θ 为（取 $h(\theta)$ 为先验密度）

$$\tilde{\theta} = \frac{n}{n+\sigma^{-2}} \overline{X} + \frac{\sigma^{-2}}{n+\sigma^{-2}} \mu.$$

4.3 点估计的优良性准则

估计的整体性能

1. 无偏性
    1. 没有系统性的偏差, 即误差的均值为零.
    2. 各次估计的均值依概率收敛至被估计值.
2. 有效性 (数量指标)
    1. 方差
    2. 均方误差
3. 相合性 (一致性)

4.3.1 估计量的无偏性

即无 **系统误差** $E(\hat{\theta}) - \theta$. 故 **无偏估计量** $\hat{g}$ 须满足

$$E_{\theta_1, \cdots, \theta_k}[\hat{g}(X_1, \cdots, X_n)] = g(\theta_1, \cdots, \theta_k).$$

- $m = \overline{X}$ 是 $E(X)$ 的无偏估计.

- 如果总体均值未知, 则 $S^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\overline{X})^2}{n-1}$ 是 $\mathrm{Var}(X)$ 的无偏估计.
- 如果总体均值已知, 则 $m_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(X_i-\overline{X})^2}{n}$ 是 $\mathrm{Var}(X)$ 的无偏估计.
- 由 $\sigma^2=E(S^2)=\mathrm{Var}(S)+(ES)^2$ 知, S 总是 σ 系统性偏低的估计.

设 $\hat{g}=\hat{g}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是未知参数的函数 $g(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$ 的一个估计量, 如果 $E(\hat{\theta})$ 存在, 且

$$\lim_{n\to\infty}E(\hat{g}(X_1,X_2,\cdots,X_n))=g(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$$

则称 $\hat{g}$ 为 g 的 **渐进无偏估计量**.

- $m_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 是 σ^2 的渐进无偏估计量, 但不是无偏估计量.

- ⭐ (看思路) 对于正态分布总体 $N(\mu,\sigma^2)$, 由 $(n-1)S^2/\sigma^2\sim\chi^2_{n-1}$ 算出

$$S/\sigma\sim g(s)=\begin{cases}\dfrac{(n-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{\frac{n-3}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)}, & s>0\\ 0 & s\leq 0.\end{cases}$$

计算 $E(S)=\sigma\int_0^{+\infty}sg(s)\,\mathrm{d}s$, 故 σ 的一个无偏估计是

$$\tilde{\sigma}=\sqrt{\frac{n-1}{2}}\frac{\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}S.$$

- 无偏估计不一定好, 比如 $X\sim P(\lambda)$, 则 $g(\lambda)=\mathrm{e}^{-2\lambda}$ 唯一的无偏估计为

$$\hat{g}(X)=\begin{cases}1, & X\text{ 为偶数},\\ -1, & X\text{ 为奇数}.\end{cases}$$

4.3.2 最小方差无偏估计

1 均方误差

$$\begin{aligned}M_{\hat{\theta}}(\theta)&=E_\theta\left[\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)-\theta\right]^2\\&=\mathrm{Var}_\theta(\hat{\theta})+\left[E_\theta(\hat{\theta})-\theta\right]^2\end{aligned}$$

2 最小方差无偏估计 (MVU 估计)

注意是最小方差, 而不是最小均方误差. (Minimum Variance Unbiased)

3 克拉美 - 劳不等式

对于单参数情况 $f(x,\theta)$, 为估计 $g(\theta)$, 记 **费歇尔信息量** 为

$$
\begin{aligned}
I(\theta) &= E\left[\left(\frac{\partial f(x,\theta)}{\partial \theta}\Bigg/ f(x,\theta)\right)^2\right] \\
&= \int \left[\left(\frac{\partial f(x,\theta)}{\partial \theta}\right)^2 \Bigg/ f(x,\theta)\right] \mathrm{d}x \qquad (\text{连续的总体分布}) \\
&= \sum_i \left(\frac{\partial f(a_i,\theta)}{\partial \theta}\right)^2 \Bigg/ f(a_i,\theta) \qquad (\text{离散的总体分布})
\end{aligned}
$$

则对任一无偏估计 $\hat{g} = \hat{g}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, 有 **克拉美 - 劳不等式**:

$$
\mathrm{Var}_\theta(\hat{\theta}) \geq (g'(\theta))^2/(nI(\theta)).
$$

- MVU 的均方误差不一定是最小的, 如对于正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 其中 μ 已知, 则 m_2 是 MVU 估计, 但 $E(m_2 - \sigma^2)^2 = \frac{2\sigma^4}{n} > E(\frac{m_2}{n+1} - \sigma^2)^2 = \frac{2\sigma^4}{n+1}$.
- 若 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 都是 θ 的 MVU 估计, 则 $a\hat{\theta}_1 + b\hat{\theta}_2 + c$ 是 $(a+b)\theta + c$ 的 MVU 估计. ⭐ ⭐ (利用第三章定理 3.1, 2°)
- 若 $E(X) = \theta$, $\sum_{i=1}^n c_i = 1$, 则 $\sum_{i=1}^n c_i X_i$ 是 θ 的无偏估计, 并且当且仅当 $c_i = \frac{1}{n}$ 时, 其为 MVU 估计.

4.3.3 估计量的相合性与渐进正态性

1 相合性

如果当样本大小 n 无限增加时, 估计量 $T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 依概率收敛于被估计值, 则称该估计量是**相合估计量**, 即

$$
\forall \varepsilon > 0: \lim_{n\to\infty} P_{\theta_1,\cdots,\theta_k}\left(|\hat{g}(X_1,\cdots,X_n) - g(\theta_1,\cdots,\theta_n)| \geq \varepsilon\right) = 0.
$$

具有相合性的例子: $m(n)$, $m_2(n)$, 绝大多数极大似然估计等等.

- 由切比雪夫不等式知:

  $$
  0 \leq \lim_{n\to\infty} P(|\hat{g} - g| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(\hat{g})}{\varepsilon^2}.
  $$

  若 $\lim_{n\to\infty} D(\hat{g}) = 0$, 则其为相合估计量.

2 渐进正态性

- 大样本性质
  - 相合性
  - 渐进正态性
- 小样本性质
  - 无偏性

4.4 区间估计

4.4.1 基本概念

奈曼理论 的原则: 先保证可靠度, 再提升精度.

称区间估计 $[\hat\theta_1, \hat\theta_2]$ 的 **置信系数** 为 $1-\alpha$, 如果

$$\exists\alpha > 0,\ \forall\theta : P_\theta\left(\hat\theta_1(X_1,\cdots,X_n) \le \theta \le \hat\theta_2(X_1,\cdots,X_n)\right) = 1-\alpha.$$

称区间估计 $[\hat\theta_1, \hat\theta_2]$ 的 **置信水平** (**置信度**) 为 $1-\alpha$, 如果

$$\exists\alpha > 0,\ \forall\theta : P_\theta\left(\hat\theta_1(X_1,\cdots,X_n) \le \theta \le \hat\theta_2(X_1,\cdots,X_n)\right) \ge 1-\alpha.$$

- 随机区间 $[\hat\theta_1, \hat\theta_2]$ 称为 **双侧置信区间**.
- $(-\infty, \hat\theta_2]$ 和 $[\hat\theta_1, +\infty)$ 称为 **单侧置信区间**.
- $\hat\theta_1$ 和 $\hat\theta_2$ 分别称为置信下界和置信上界.
- α 一般取为 0.1, 0.05, 0.01, 0.001.

区间估计的研究对象:

1. 置信系数或置信水平.
2. 区间长度.
3. 区间右端点与左端点之比.

4.4.2 枢轴变量法

上 β 分位点: $F(v_\beta) = 1-\beta$.

下 β 分位点: $F(w_\beta) = \beta$.

上 β 分位点就是下 $1-\beta$ 分位点.

统计三大分布的上 β 分位点记为: $\chi^2_n(\beta),\ t_n(\beta),\ f_{n,m}(\beta)$.

利用上 β 分位点 w_β 寻找区间估计的 **枢轴变量法**:

1. 找一个与被估计参数 $g(\theta)$ 有关的统计量 T.
2. 找 **枢轴变量** $S(T, g(\theta))$, 使其分布 F 与 θ 无关.
3. $a \le S(T, g(\theta)) \le b \quad \Leftrightarrow \quad A \le g(\theta) \le B$.
4. $P(w_{1-\alpha/2} \le S(T, g(\theta)) \le w_{a/2}) = 1-\alpha$.

一样本 t 区间估计, 为保证长度 $2St_{n-1}(\alpha/2)/\sqrt{n} \le L$, 斯泰因提出了 **两阶段抽样** 的方法, 其中追加抽样的次数为

$$m = \begin{cases} 0, & n \le [4t^2_{n-1}(\alpha/2)S^2/L^2]+1, \\ n-1-[4t^2_{n-1}(\alpha/2)S^2/L^2], & n > [4t^2_{n-1}(\alpha/2)S^2/L^2]+1. \end{cases}$$

记两次样本全体的均值为 $\tilde X$, 则区间估计 $[\tilde X - L/2,\ \tilde X + L/2]$ 有置信系数 $1-\alpha$.

4.4.3 大样本法

大样本区间估计: 利用 中心极限定理 与枢轴变量法.

例如, 一般的, 设总体有均值 θ, 方差 σ^2, 并且都位置, 从样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 做 θ 的区间估计. 由于样本均方差 S 是 σ 的祥和估计, 利用中心极限定理, 当 n 足够大时, 有

$$\sqrt{n}(\overline{X}-\theta)/S \sim N(0,1).$$

以此为枢轴变量, 于是有区间估计

$$\left[\overline{X}-Su_{\alpha/2}/\sqrt{n},\ \overline{X}+Su_{\alpha/2}/\sqrt{n}\right].$$

对于二项分布, 当 $\alpha=0.05$, $n \geq 40$ 时, 有区间长度 $\theta_2-\theta_1 \leq 0.3$.

4.4.4 置信界

置信系数 (水平) 为 α 的置信上界 $\overline{\theta}$ 和置信下界 $\underline{\theta}$:

$$\begin{aligned}
\forall\theta: P_\theta(\overline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n) \geq \theta) = 1-\alpha \\
\forall\theta: P_\theta(\underline{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n) \leq \theta) = 1-\alpha
\end{aligned}$$

4.4.5 贝叶斯法

即寻找 $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, 使得

$$\begin{aligned}
&\int_{\hat{\theta}_1}^{\hat{\theta}_2} h(\theta \mid X_1,\cdots,X_n)\,\mathrm{d}\theta = 1-\alpha && (\text{区间估计}) \\
&\int_{-\infty}^{\hat{\theta}} h(\theta \mid X_1,\cdots,X_n)\,\mathrm{d}\theta = 1-\alpha && (\text{置信上界}) \\
&\int_{\hat{\theta}}^{+\infty} h(\theta \mid X_1,\cdots,X_n)\,\mathrm{d}\theta = 1-\alpha && (\text{置信下界})
\end{aligned}$$

区间估计中确定 θ_1, θ_2 的方法 (原则):

1. 使 $\hat{\theta}_2-\hat{\theta}_1$ 最小.
2. 使 $\hat{\theta}_2/\hat{\theta}_1$ 最小.
3. 取置信水平为 $\alpha/2$ 的置信上下界.

常用区间估计表

表 7.1 正态总体均值、方差的置信区间(置信度为 $1-\alpha$)

	待估参数	其他参数	置信函数 G 的分布	双侧置信区间	单侧置信区间
单个正态总体	μ	σ^2 已知	$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$	$\left(\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right)$	$\left(-\infty,\overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha}\right),\left(\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha},+\infty\right)$
		σ^2 未知	$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$	$\left(\overline{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\overline{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$	$\left(\overline{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1),+\infty\right),\left(-\infty,\overline{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)\right)$
	σ^2	μ 已知	$\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$	$\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)},\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\right)$	$\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha}(n)},+\infty\right),\left(-\infty,\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n)}\right)$
		μ 未知	$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$	$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$	$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)},+\infty\right),\left(0,\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right)$
两个正态总体	$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2,σ_2^2 已知	$\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$	$\left(\overline{X}-\overline{Y}\mp z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$	$\left(\overline{X}-\overline{Y}-z_{\alpha}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}},+\infty\right)$, $\left(0,\overline{X}-\overline{Y}+z_{\alpha}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$
		$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 未知	$\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$	$\left(\overline{X}-\overline{Y}\mp t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\right)$	$\left(\overline{X}-\overline{Y}-t_{\alpha}(n_1+n_2-2)S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}},+\infty\right)$, $\left(-\infty,\overline{X}-\overline{Y}+t_{\alpha}(n_1+n_2-2)S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\right)$
	$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	μ_1,μ_2 已知	$\dfrac{n_1\sigma_1^2}{n_2\sigma_2^2}\cdot\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}\sim F(n_2,n_1)$	$\left(\dfrac{n_2}{n_1}\cdot\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}F_{1-\alpha/2}(n_2,n_1),\right.$ $\left.\dfrac{n_2}{n_1}\cdot\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}F_{\alpha/2}(n_2,n_1)\right)$	$\left(\dfrac{n_2}{n_1}\cdot\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}F_{1-\alpha}(n_2,n_1),+\infty\right)$, $\left(0,\dfrac{n_2}{n_1}\cdot\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}F_{\alpha}(n_2,n_1)\right)$
		μ_1,μ_2 未知	$\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$	$\left(\dfrac{S_1^2}{S_2^2}F_{1-\alpha/2}(n_2-1,n_1-1),\right.$ $\left.\dfrac{S_1^2}{S_2^2}F_{\alpha/2}(n_2-1,n_1-1)\right)$	$\left(\dfrac{S_1^2}{S_2^2}F_{1-\alpha}(n_2-1,n_1-1),+\infty\right)$, $\left(0,\dfrac{S_1^2}{S_2^2}F_{\alpha}(n_2-1,n_1-1)\right)$

表 7.2 0-1 分布参数 p 的置信区间(置信度为 $1-\alpha$)

待估参数	其他参数	置信函数 G 的分布	近似的双侧置信区间
p	n 已知	$\dfrac{\left(\dfrac{\mu_n}{n}-p\right)}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}}\dot\sim N(0,1)$	$\left(\dfrac{\mu_n}{n}-z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\dfrac{\mu_n}{n}\left(1-\dfrac{\mu_n}{n}\right)}{n}},\dfrac{\mu_n}{n}+z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\dfrac{\mu_n}{n}\left(1-\dfrac{\mu_n}{n}\right)}{n}}\right)$

第 5 章 假设检验

5.1 问题提法和基本概念

5.1.1 例子与问题提法

原假设 (零假设, 解消假设) 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子集, 其中 n 是未知参数的数量.

对立假设 (备择假设) 是原假设补集的子集.

检验统计量, 接受域, 否定域 (临界域), 临界值.

简单假设, 复合假设. 赘余参数 (多余参数, 讨厌参数).

5.1.2 功效函数

设总体分布中包含未知参数 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$, H_0 为原假设, H_1 为对立假设, Φ 是基于样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 而对 H_0 做的一个检验, 则其 **功效函数** 是:

$$\beta_\Phi(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n)=P_{\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n}(\text{在检验 }\Phi\text{ 之下, }H_0\text{ 被否定})$$

- 当 $(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n)\in H_0$ 时, 上式越小越好.
- 当 $(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n)\in H_1$ 时, 上式越大越好, 此时称为功效函数.

5.1.3 两类错误与假设检验思路

两类错误

1. H_0 正确, 但被否定.
2. H_0 错误, 但被接受.

$$\alpha_{1\Phi}(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)=\begin{cases}\beta_\Phi(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k), & (\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)\in H_0,\\ 0 & (\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)\in H_1.\end{cases}$$
$$\alpha_{2\Phi}(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)=\begin{cases}0, & (\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)\in H_0,\\ 1-\beta_\Phi(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k), & (\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)\in H_1.\end{cases}$$

奈曼-皮尔逊理论 的思路: 先保证第一类错误的概率不超过某个定值 α, 再使第二类错误的概率尽可能小.

5.1.4 检验水平与一致最优检验

H_0 的一个水平为 α 的检验 Φ:

$$\forall(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)\in H_0:\beta_\Phi(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)\le\alpha.$$

并使 α 仅可能小. 即固定第一类错误概率的原则.

- 若 Φ 是 H_0 的一个水平为 α_0 的检验, 则它也是水平为 α $(\forall\alpha>\alpha_0)$ 的检验.

假设检验问题 $H_0:H_1$ 的一个水平为 α 的一致最优检验 Φ: 即对任何一个其它水平 α 的检验 g 有

$$\beta_\Phi(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)\ge\beta_g(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)\quad(\text{对任何 }(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)\in H_1).$$

- 在总体分布只依赖于一个参数 θ, 而原假设 H_0 是 $\theta\le\theta_0$ 或 $\theta\ge\theta_0$ 时, 一致最优检验存在.

5.2 重要参数检验

5.2.1 正态总体均值的检验

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是从正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 中抽出的样本.

原假设和对立假设分别为:

1. $H_0:\mu\ge\mu_0,\ H_1:\mu<\mu_0.$
2. $H_0':\mu\le\mu_0,\ H_1':\mu>\mu_0.$
3. $H_0'':\mu=\mu_0,\ H_1'':\mu\ne\mu_0.$

1 方差已知

利用 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1).$

- $H_0:\mu\ge\mu_0,\ H_1:\mu<\mu_0.$
  - $\Phi:$ 当 $\overline{X}\ge\mu_0-\dfrac{\sigma u_\alpha}{\sqrt{n}}$ 时接受原假设 H_0, 否则否定 H_0.
  - 功效函数 $\beta_\Phi(\mu)=\Phi\left(\dfrac{\sqrt{n}}{\sigma}(\mu_0-\mu)-u_\alpha\right)\ge1-\beta.$
  - 欲使第二类错误概率足够小: $n\ge\dfrac{\sigma^2(u_\alpha+u_\beta)^2}{(\mu_0-\mu_1)^2}.$
- $H_0':\mu\le\mu_0,\ H_1':\mu>\mu_0.$

    - Φ : 当 $\overline{X} \le \mu_0 + \dfrac{\sigma u_\alpha}{\sqrt{n}}$ 时接受原假设 H_0', 否则否定 H_0'.
    - 功效函数 $\beta_\Phi'(\mu) = 1 - \Phi\left(\dfrac{\sqrt{n}}{\sigma}(\mu_0 - \mu) + u_\alpha\right) \ge 1 - \beta$.
    - 欲使第二类错误概率足够小: $n \ge \dfrac{\sigma^2(u_\alpha + u_\beta)^2}{(\mu_0 - \mu_1)^2}$.
- $H_0'' : \mu = \mu_0,\ H_1'' : \mu \ne \mu_0$.
    - Φ'' : 当 $\left|\overline{X} - \mu_0\right| \le \dfrac{\sigma u_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}$ 时接受 H_0'', 否则否定 H_0''.
    - 功效函数 $\beta_\Phi''(\mu) = 2\Phi\left(\dfrac{\sqrt{n}}{\sigma}(\mu_0 - \mu) - u_{\alpha/2}\right) \ge 1 - \beta$.
    - 欲使第二类错误概率足够小: $n \ge \dfrac{\sigma^2(u_{\frac{\alpha}{2}} + u_{\frac{1+\beta}{2}})^2}{(\mu_0 - \mu_1)^2}$.

注

- 若 $\mu_0 - \dfrac{\sigma u_\alpha}{\sqrt{n}} \le \overline{X} \le \mu_0 + \dfrac{\sigma u_\alpha}{\sqrt{n}}$, 则既接受 H_0, 也接受 H_0'.
- Φ 和 Φ' 都是一致最优检验.
- Φ'' 不是一致最优检验, 并且 H_0'' 不存在一致最优检验.

2 方差未知

利用 $\dfrac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$, 得到如下 t 检验:

- $H_0 : \mu \ge \mu_0,\ H_1 : \mu < \mu_0$.
    - Ψ : 当 $\overline{X} \ge \mu_0 - \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\alpha)$ 时接受原假设 H_0, 否则否定 H_0.
    - 功效函数 $\beta_\Psi(\mu, \sigma) = P_{\mu,\sigma}\left(\dfrac{\sqrt{n}}{S}(\overline{X} - \mu_0) < -t_{n-1}(\alpha)\right)$ 只依赖于 $\delta = \dfrac{\mu - \mu_0}{\sigma}$.
- $H_0' : \mu \le \mu_0,\ H_1' : \mu > \mu_0$.
    - Ψ' : 当 $\overline{X} \le \mu_0 + \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\alpha)$ 时接受原假设 H_0', 否则否定 H_0'.
- $H_0'' : \mu = \mu_0,\ H_1'' : \mu \ne \mu_0$.
    - Ψ'' : 当 $\left|\overline{X} - \mu_0\right| \le \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ 时接受原假设 H_0'', 否则否定 H_0''.

注: 除非检验水平 $\alpha \ge \dfrac{1}{2}$, 否则 Ψ 和 Ψ' 都不是一直最优检验.

5.2.2 两个正态总体均值差的检验

设 $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 和 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 分别是从正态总体 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma^2)$ 中抽取的相互独立的样本.

原假设和对立假设分别为

1. $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \ge \mu_0,\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 < \mu_0$.
2. $H_0' : \mu_1 - \mu_2 \le \mu_0,\ H_1' : \mu_1 - \mu_2 > \mu_0$.
3. $H_0'' : \mu_1 - \mu_2 = \mu_0,\ H_1'' : \mu_1 - \mu_2 \ne \mu_0$.

1 方差已知

利用 $\overline{X}-\overline{Y} \sim N\left(\mu_1-\mu_2, \dfrac{\sigma^2}{n_1}+\dfrac{\sigma^2}{n_2}\right)$, 记 $\mu_0=\mu_1-\mu_2, U=\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-\mu_0}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}}$, 则

- g : 当 $U \geq -u_\alpha$ 时接受 H_0, 否则否定 H_0.
- g' : 当 $U \leq u_\alpha$ 时接受 H_0', 否则否定 H_0'.
- g'' : 当 $|U| \leq u_{\alpha/2}$ 时接受 H_0'', 否则否定 H_0''.

2 方差未知

利用 $T=\dfrac{(\overline{X}-\overline{Y})-\mu_0}{S_\omega\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2},\ S_\omega=\dfrac{\mathrm{SS}_1+\mathrm{SS}_2}{n_1+n_2-2}$, 可得到如下两样本 t 检验:

- h : 当 $T \geq -t_{n_1+n_2-2}(\alpha)$ 时接受 H_0, 否则否定 H_0.
- h' : 当 $T \leq t_{n_1+n_2-2}(\alpha)$ 时接受 H_0', 否则否定 H_0'.
- h'' : 当 $|T| \leq t_{n_1+n_2-2}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ 时接受 H_0'', 否则否定 H_0''.

显著性检验 (希望原假设被否定的检验)

5.2.3 正态分布方差的检验

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是从正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 中抽出的样本.

原假设和对立假设分别为:

1. $H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2,\ H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$.
2. $H_0': \sigma^2 \leq \sigma_0^2,\ H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$.
3. $H_0'': \sigma^2 = \sigma_0^2,\ H_1'': \sigma^2 \neq \sigma_0^2$.

注: 方差检验的误差较大.

1 均值已知

利用 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2$,

- ϕ : 当 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \geq \sigma_0^2\chi_n^2(1-\alpha)$ 时接受 H_0, 否则否定 H_0.
- ϕ' : 当 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \leq \sigma_0^2\chi_n^2(\alpha)$ 时接受 H_0', 否则否定 H_0'.
- ϕ'' : 当 $\displaystyle\sigma_0^2\chi_n^2\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \leq \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \leq \sigma_0^2\chi_n^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ 时接受 H_0'', 否则否定 H_0''.

2 均值未知

利用 $\mathrm{SS} \sim \sigma^2\chi_{n-1}^2$,

- φ : 当 $\mathrm{SS} \geq \sigma_0^2\chi_n^2(1-\alpha)$ 时接受 H_0, 否则否定 H_0.
- φ' : 当 $\mathrm{SS} \leq \sigma_0^2\chi_n^2(\alpha)$ 时接受 H_0', 否则否定 H_0'.
- φ'' : 当 $\sigma_0^2\chi_n^2\left(1-\dfrac{\alpha}{2}\right) \leq \mathrm{SS} \leq \sigma_0^2\chi_n^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ 时接受 H_0'', 否则否定 H_0''.

5.2.π 两个正态分布方差商的检验

设 $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 和 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 分别是从正态总体 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma^2)$ 中抽取的相互独立的样本.

原假设和对立假设分别为

1. $H_0 : \sigma_1^2/\sigma_2^2 \geq \mu_0,\ H_1 : \sigma_1^2/\sigma_2^2 < \mu_0.$
2. $H_0' : \sigma_1^2/\sigma_2^2 \leq \mu_0,\ H_1' : \sigma_1^2/\sigma_2^2 > \mu_0.$
3. $H_0'' : \sigma_1^2/\sigma_2^2 = \mu_0,\ H_1'' : \sigma_1^2/\sigma_2^2 \neq \mu_0.$

1 均值已知

记 $U = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}$, 利用 $\dfrac{n_1\sigma_1^2}{n_2\sigma_2^2}\dfrac{1}{U} \sim F_{n_2,n_1}$, 下略.

2 均值未知

利用 $\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F_{n_1-1,n_2-1}$,

- g : 当 $\dfrac{S_1^2}{S_2^2} \geq \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}F_{n_1-1,n_2-1}(1-\alpha) = \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}F^{-1}_{n_2-1,n_1-1}(\alpha)$ 时接受 H_0, 否则否定 H_0.
- g'' : 当 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}F^{-1}_{n_2-1,n_1-1}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) \leq \dfrac{S_1^2}{S_2^2} \leq \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}F_{n_1-1,n_2-1}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ 时接受 H_0'', 否则否定 H_0''.

5.2.4 指数分布参数的检验

1 普通检验

利用 $2n\lambda\overline{X} \sim \chi^2_{2n}$.

2 截尾寿命检验

2.1 定数截尾法

取 n 个元件做试验, 取 $r \in \mathbb{N}, r < n$, 进行到 r 个元件失效时为止, 所有元件工作的时间为

$T = Y_1 + \cdots + Y_r + (n-r)Y_r \sim \chi^2_r.$

2.2 定时截尾法

到时刻 T_0 为止, 所有元件工作的总时间为满足 $2\lambda T \dot{\sim} \chi^2_{2u+1}$, 其中 u 是已经失效的元件个数.

5.2.5 二项分布参数的检验

普通检验

$H_0 : p \leq p_0,\ H_1 : p > p_0.$

φ : 当 $X < C$ 时接受 H_0, 否则否定 H_0.

$$\beta_\varphi(p) = P_p(X > C) = 1 - \sum_{i=0}^{C}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}.$$

一般可查表, 对于较大的样本, 难以查表, 可以使用大样本法.

随机化检验

检验 φ 的 **操作特征函数 (OC 函数)**

符号检验

非参数检验

5.2.6 泊松分布参数的检验

利用如下性质:

1. 泊松分布和的函数 (可加性)
   $$X_1 \sim P(\lambda_1),\, X_2 \sim P(\lambda_2) \quad \Rightarrow \quad X_1 + X_2 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2).$$
2. $P_\lambda(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^i}{i!} = \int_\lambda^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}t^k}{k!}\,\mathrm{d}t = K_{2k+2}(2\lambda)$. (卡方分布函数)
3. 若有一批零件寿命服从指数分布, 固定一个时间 $T > 0$, 让一个元件从时刻 0 开始工作, 每当这个元件坏了的时候马上用一个新的替换, 则到 T 时替换的次数 $X \sim P(\lambda T)$, 即 $P(X = n) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda T}(\lambda T)^n}{n!}$.
   - 若有 n 个元件同时开始工作, 每个元件损坏即替换, 则 $X \sim P(n\lambda T)$.

5.2.7 大样本检验

贝伦斯—费歇尔问题

$$T = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2}} \dot\sim \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} \sim N(0,1).$$

二项分布参数检验

$$\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \dot\sim N(0,1).$$

一般分布参数检验

$$\frac{\sum X - nE(X)}{\sqrt{n\,\mathrm{Var}(X)}} = \frac{\sum X - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \sim N(0,1)$$

5.2.8 贝叶斯方法

基本思路

若原假设的条件概率大于对立假设的条件概率:

$$P(H_0 \mid X_1, X_2, \cdots, X_n) > P(H_1 \mid X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

则接受原假设.

正态分布的区间检验

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为抽自正态总体 $N(\theta, \sigma^2)$ 的样本, 其中 θ 和 σ^2 都未知, 考虑检验问题

$$H_0 : a \le \theta \le b, \quad H_1 : \theta < a \vee \theta > b \, (a < b).$$

给 (θ, σ) 以广义先验密度 σ^{-1}, 则在得知样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 后 (θ, σ) 的后验密度为

$$h(\theta, \sigma) = C_n \sigma^{-(n+1)} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (X_i - \theta)^2\right], \quad (\theta \in \mathbb{R},\, \sigma > 0)$$
$$C_n = \left(\int_0^{+\infty} \mathrm{d}\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^{-(n+1)} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (X_i - \theta)^2\right] \mathrm{d}\sigma\right)^{-1}$$

从而得到 θ 的边缘后验密度为

$$\begin{aligned} h_\theta(\theta) &= C_n \int_0^{+\infty} \sigma^{-(n+1)} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (X_i - \theta)^2\right] \mathrm{d}\sigma \\ &= D_n \left[\sum_{i=1}^n (X_i - \theta)^2\right]^{-\frac{n}{2}} = D_n \left[\mathrm{SS} + n(\overline{X} - \theta)^2\right]^{-\frac{n}{2}} \\ &= D_n \mathrm{SS}^{-n} \left[1 + \frac{n(\overline{X} - \theta)^2}{\mathrm{SS}}\right]^{-\frac{n}{2}} = E_n \left[1 + \frac{n(\overline{X} - \theta)^2}{(n-1)S^2}\right]^{-\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

令 $\theta^* = \dfrac{\sqrt{n}(\theta - \overline{X})}{S}$, 则比较 t 分布密度函数知 $\theta^* \sim t_{n-1}$, 即

$$f_{\theta^*} = F_n \left(1 + \frac{\theta^{*2}}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}} = \frac{\left(1 + \dfrac{\theta^{*2}}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}}{\mathrm{B}\left(\dfrac{n-1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)\sqrt{n-1}}$$

由此可以得到 ⭐

$$\begin{aligned} P(H_0 \mid X_1, \cdots, X_n) &= P(a \le \theta \le b \mid X_1, \cdots, X_n) \\ &= P\left(\frac{\sqrt{n}(a - \overline{X})}{S} \le \theta^* \le \frac{\sqrt{n}(b - \overline{X})}{S} \mid X_1, \cdots X_n\right) \\ &= T_{n-1}\left(\frac{\sqrt{n}(b - \overline{X})}{S}\right) - T_{n-1}\left(\frac{\sqrt{n}(a - \overline{X})}{S}\right) \end{aligned}$$

信仰推断法: 信仰分布, 信仰概率.

5.3 拟合优度检验

5.3.1 理论分布完全已知且只取有限个值的情况

若认为 $X \sim H_0 : P(X = a_i) = p_i \; (i = 1, 2, \cdots, k)$, 设对 X 进行了足够多的 n 次实验, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 中等于 a_i 的个数记作 ν_i, 称为 a_i 这个 "类" 的 **经验值** 或 **观察值**, 其近似于**理论值** np_i.

定理 3.1 ⭐ 若原假设 H_0 成立, 则 $Z = \displaystyle\sum_{i=1}^k \frac{(np_i - \nu_i)^2}{np_i} \dot{\sim} \chi^2_{k-1}$.

拟合优度 $p(Z_0)=P(Z\geq Z_0\mid H_0)\approx 1-K_{k-1}(Z_0)$.

- 统计上的显著性不等于实用上的重要性.

5.3.2 理论分布只含有限个值但不完全已知的情况

设总体 $X\sim P(X=a_i)=p_i(\theta_1,\cdots,\theta_r)\ (i=1,2,\cdots,k;\ r\leq k-2)$, 并对 X 进行了足够多的 n 次观察, 记 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 中等于 a_i 的个数为 ν_i, 原假设为 H_0：总体分布对 $\theta_1^0,\theta_2^0,\cdots,\theta_r^0$ 成立.

定理 3.2 ☆ 在一定条件下, 若原假设 H_0 成立, 使用极大似然估计出 $(\hat\theta_1,\hat\theta_2,\cdots,\hat\theta_r)$, 并由此算出 $p_i=p_i(\hat\theta_1,\hat\theta_2,\cdots,\hat\theta_r)$, 则 $Z=\sum\limits_{i=1}^{k}\dfrac{(np_i-\nu_i)^2}{np_i}\dot\sim\chi^2_{k-1-r}$.

- 此时拟合优度约为 $p(Z_0)=1-K_{k-1-r}(Z_0)$.

5.3.3 对列联表的应用

$B\backslash A$	1	2	$\cdots$	i	$\cdots$	a	和
1	n_{11}	n_{12}	$\cdots$	n_{i1}	$\cdots$	n_{a1}	$n_{\cdot 1}$
2	n_{12}	n_{22}	$\cdots$	n_{i2}	$\cdots$	n_{a2}	$n_{\cdot 2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
j	n_{1j}	n_{2j}	$\cdots$	n_{ij}	$\cdots$	a_{aj}	$n_{\cdot j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
b	n_{1b}	n_{2b}	$\cdots$	n_{ib}	$\cdots$	n_{ab}	$n_{\cdot b}$
和	$n_{1\cdot}$	$n_{2\cdot}$	$\cdots$	$n_{i\cdot}$	$\cdots$	$n_{a\cdot}$	n

记 $P(A=i)=u_i,\ P(B=j)=v_j,\ P(A=i,\ B=j)=p_{ij}$.

H_0：A 和 B 独立, 即 $p_{ij}=u_iv_j$.

$$L=\prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b}(u_iv_j)^{n_{ij}}=\prod_{i=1}^{a}u_i^{n_{i\cdot}}\prod_{j=1}^{b}u_j^{n_{\cdot j}}$$

$$\begin{cases}0=\dfrac{\partial\ln L}{\partial u_i}=\dfrac{n_{i\cdot}}{u_i}-\dfrac{n_{a\cdot}}{u_a}\\0=\dfrac{\partial\ln L}{\partial v_j}=\dfrac{n_{\cdot j}}{v_j}-\dfrac{n_{a\cdot}}{v_b}\\\sum\limits_{i=1}^{a}n_{i\cdot}=\sum\limits_{j=1}^{b}n_{\cdot j}=n\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\hat u_i=\dfrac{n_{i\cdot}}{n}\\\hat v_j=\dfrac{n_{\cdot j}}{n}\\\hat p_{ij}=\dfrac{n_{i\cdot}n_{\cdot j}}{n^2}\end{cases}$$

自由度为 $k-1-r=ab-1-(a+b-2)=(a-1)(b-1)$.

$$Z=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\frac{nn_{ij}-n_{i\cdot}n_{\cdot j}}{nn_{i\cdot}n_{\cdot j}}\dot\sim\chi^2_{(a-1)(b-1)}$$

当 $a=b=2$ 时称为 **四格表**, 此时有

$$Z=\frac{n(n_{11}n_{22}-n_{12}n_{21})^2}{n_{1\cdot}n_{2\cdot}n_{\cdot 1}n_{\cdot 2}}\dot\sim\chi^2_1$$

列联表可用于 **独立性检验** 或 **齐一性检验** 等.

5.3.4 总体分布为一般分布的情况

一般分布: 离散型有限个取值, 离散型无限个取值, 连续型.

H_0 : 总体分布为 $F(x)$ (或 $F(x;\theta_1^0,\theta_2^0,\cdots,\theta_r^0)$).

取划分 $-\infty=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_{k-1}<a_k=+\infty$, 则区间 $I_i=(a_{i-1},a_i]$ 的概率为 $p_i(\theta_1,\cdots,\theta_r)=F(a_i;\theta_1,\cdots,\theta_r)-F(a_{i-1};\theta_1,\cdots,\theta_r),\quad (i=1,2,\cdots,k)$.

记 H_0' : 对某一组值 $(\theta_1^0,\theta_2^0,\cdots,\theta_r^0)$, 总体在区间 I_i 内的概率为 $p_i(\theta_1^0,\theta_2^0,\cdots,\theta_r^0)$.

- 由于积分等使得表达式的计算较为困难, 实际中可不采取极大似然估计, 而使用矩估计近似替代.
- 如果初始数据就只给出了各区间的数量, 而无精确的数据, 可使用区间的中点近似计算矩估计, 如:

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_i m_i\nu_i,\quad \hat{\sigma^2}=\frac{1}{n}\sum_i \nu_i(m_i-\hat{\mu})^2.$$