复分析-可视化方法

第 1 章 几何和复算术

1.1 复数的运算

- 复数加法: 平移变换.
- 复数乘法: 伸缩旋转.
  - 不用三角恒等式证明复数乘法的几何法则: 考虑变换 $z \mapsto \mathrm{i}z$, 构造直角.

1.2 复数的变换

- 恒等变换: $\mathcal{E}(z)=z$.
- 平移变换: $\mathcal{T}_v(z)=z+v$.
  - 复合: $\mathcal{T}_w\circ\mathcal{T}_v=\mathcal{T}_{w+v}$.
  - 逆元: $\mathcal{T}_v^{-1}=\mathcal{T}_{-v}$.
- 旋转变换: $\mathcal{R}_a^\theta$.
  - 复合: $\mathcal{R}_a^\phi\circ\mathcal{R}_a^\theta=\mathcal{R}_a^{\phi+\theta}$.
  - 逆元: $(\mathcal{R}_a^\theta)^{-1}=\mathcal{R}_a^{-\theta}$.
  - 分解:
    - $\mathcal{R}_a^\theta(z)=(\mathcal{T}_a\circ\mathcal{R}_0^\theta\circ\mathcal{T}_a^{-1})(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z-a)+a$.
    - $\mathcal{R}_a^\theta=\mathcal{T}_k\circ\mathcal{R}_0^\theta$, 其中 $k=a(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$.
  - 复合:
    - $\mathcal{T}_v\circ\mathcal{R}_a^\theta=\mathcal{R}_c^\theta$, 其中 $c=a+\dfrac{v}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$.
    - $\mathcal{R}_a^\theta\circ\mathcal{T}_v=\mathcal{R}_c^\theta$, 其中 $c=a+\dfrac{v\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$.
    - $(\mathcal{R}_b^\beta\circ\mathcal{R}_a^\alpha)(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)}z+a(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}+b(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta})$.
      - 当 $\alpha+\beta\neq 2k\pi$ 时, $\mathcal{R}_b^\beta\circ\mathcal{R}_a^\alpha=\mathcal{R}_c^{\alpha+\beta}$, 其中 $c=\dfrac{a(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}+b(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta})}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)}}$.
      - 当 $\alpha+\beta=2k\pi$ 时, $\mathcal{R}_b^\beta\circ\mathcal{R}_a^\alpha(z)=\mathcal{T}_k$. 其中 $k=(b-a)(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta})$.

    > 上式可推广至 n 次旋转的组合, 不再赘述.

- 反射变换: $\mathfrak{R}_L$. (非分式线性变换)
  - 逆元: $\mathfrak{R}_L^{-1}=\mathfrak{R}_L$.
  - 复合
    - 若 L_1 与 L_2 交于点 O , 夹角为 ϕ , 则 $\mathfrak{R}_{L_2}\circ\mathfrak{R}_{L_1}=\mathcal{R}_o^{2\phi}$.
    - 若 L_1 与 L_2 平行, 由 L_1 垂直连接到 L_2 的向量为 V , 则 $\mathfrak{R}_{L_2}\circ\mathfrak{R}_{L_1}=\mathcal{T}_{2V}$.
- 中心伸缩 (位似变换): $\mathcal{D}_a^r$.
- 伸缩旋转: $\mathcal{D}_a^{r,\theta}\equiv\mathcal{R}_a^\theta\circ\mathcal{D}_a^r\equiv\mathcal{D}_a^r\circ\mathcal{R}_a^\theta$.
  - 复合: $\mathcal{D}_o^{R,\phi}\circ\mathcal{D}_o^{r,\theta}=\mathcal{D}_o^{r,\theta}\circ\mathcal{D}_o^{R,\phi}=\mathcal{D}_o^{Rr,\theta+\phi}$.

- 逆元: $(\mathcal{D}_a^{r,\theta})^{-1} = \mathcal{D}_a^{1/r,-\theta}$.
- 分解
  - $\mathcal{D}_a^{r,\theta}(z) = (\mathcal{T}_a \circ \mathcal{D}_o^{r,\theta} \circ \mathcal{T}_a^{-1})(z) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z-a)+a$.
  - $\mathcal{D}_a^{r,\theta} = \mathcal{T}_k \circ \mathcal{D}_o^{r,\theta}$, 其中 $k = a(1-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$.
- 复合
  - $(\mathcal{D}_b^{R,\beta} \circ \mathcal{D}_a^{r,\alpha})(z) = Rr\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)} + a(1-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} + b(1-R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta})$.
    - 当 $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)} \neq 0$ 时, $\mathcal{D}_b^{R,\beta} \circ \mathcal{D}_a^{r,\alpha} = \mathcal{D}_c^{Rr,\alpha+\beta}$, 其中 $c = \dfrac{a(1-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} + b(1-R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta})}{1-Rr\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)}}$.
    - 当 $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)} = 0$ 时, $\mathcal{D}_b^{R,\beta} \circ \mathcal{D}_a^{r,\alpha} = \mathcal{T}_k$, 其中 $k = a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} - r) + b(1-R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta})$.

1.3 复数的应用

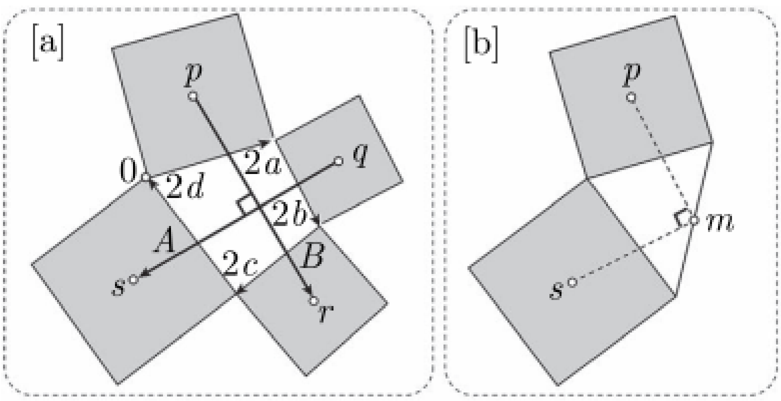
1.3.1 三角

- $\cos n\theta = \mathrm{Re}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n$, 从而可以用 $\cos\theta$, $\sin\theta$ 表示.
- $\cos^n\theta = \left(\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}\right)^n$, 从而可以用 $\cos k\theta$, $\sin k\theta$ 表示.
- $\tan n\theta = \dfrac{\mathrm{Im}\,(1+\mathrm{i}\tan\theta)^n}{\mathrm{Re}\,(1+\mathrm{i}\tan\theta)^n}$, 从而可以用 $\tan\theta$ 表示.

> 也可以用欧拉公式求出正余弦的 n 倍角公式, 再推得正切的.

1.3.2 几何

Thebault 第一问题: 在任意一个四边形的四个边上各做一个正方形, 则连接相对的正方形中心的线段互相垂直等长.



▶ 证法一 (复数法)

▶ 证法二 (变换法)

1.3.3 求导

由 $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)t}=(a+\mathrm{i}b)^n\mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)t}$ 得,

- $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left(\mathrm{e}^{at}\sin bt\right)=\left(a^2+b^2\right)^{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{at}\sin\left(bt+n\arctan\dfrac{b}{a}\right)$.
- $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left(\mathrm{e}^{at}\cos bt\right)=\left(a^2+b^2\right)^{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{at}\cos\left(bt+n\arctan\dfrac{b}{a}\right)$.

1.3.4 代数

▶ 实系数多项式可以分解为实线性因式和实二次因式.

若两个整数可写成两个平方之和, 则其积亦然, 因为

$$|(a+\mathrm{i}b)(c+\mathrm{i}d)|^2=|(ac-bd)+\mathrm{i}(ad+bc)|.$$

1.3.5 向量

- $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}:=|a|\cdot|b|\cos\theta$.
- $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}:=|a|\cdot|b|\sin\theta=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$.
- $\overline{a}b=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\mathrm{i}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

高斯系鞋带定理: 记任意的 n 边形各个顶点为 a_i, $i=1,2,\cdots,n$, 并且令 $a_{n+1}=a_1$, 则其面积为

$$\mathcal{A}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\boldsymbol{a}_i\times\boldsymbol{a}_{i+1}}{2}=\operatorname{Im}\sum_{i=1}^{n}\frac{\overline{a}_i a_{i+1}}{2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i y_{i+1}-x_{i+1}y_i}{2}.$$

1.4 变换与几何

- 运动: 运动就是平面到其自身的一个映射且使任两点 A,B 的距离与其象 $A'=\mathcal{M}(A)$, $B'=\mathcal{M}(B)$ 的距离相等.
    - 满足群的条件: 封闭性, 结合律, 幺元 (恒等变换), 逆元.
    - 分类: 保向运动, 反向运动.
    - 性质
        - 一个运动可以由它对任意三角形（即任意三个非共线的点）的 效果唯一确定.
        - 恰好存在一个保向运动 M （以及恰好一个反向运动 $\widetilde{M}$ ）将一 已给线段 AB 映为另一个等长线段 $A'B'$. 此外, $\widetilde{M}$ 即（M 再继以对 $A'B'$ 的一个反射）.
        - 每个保向运动都可以表示为 $\mathcal{M}(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z+v$.

- 全等: 如果存在一个运动 $\mathcal{M}$, 使得 $F'=\mathcal{M}(F)$, 就说 F 全等于 F', 记作 $F\cong F'$.
    - 满足等价关系： 反身性, 对称性, 传递性.
- 三反射定理
    - 每个保向运动均为两个反射的复合,
    - 每个反向运动均为三个反射的复合.
    - 推论: 一串反射的逆就是把这些反射以相反的次序再做一次.
- 相似: 把一平面映至自身且保持距离之比的映射.

> 几何学就是研究运动的集合的不变式 (不变量). ——克莱因

    - 任一相似必可分解为 $\mathcal{S}^r=\mathcal{M}\circ\mathcal{D}_p^r$.
    - 分类: 保向相似, 反向相似.
    - 每个保向相似都是一个伸缩旋转, 其特例是平移 (以无穷远点为旋转中心).

    > 一组平行线交于同一无穷远点, 所有平行线对应的无穷远点构成无穷远线.

    - 每个保向的相似变换均可表示为 $\mathcal{S}^r(z)=re^{\mathrm{i}\theta}z+v$.
- 空间复数
    - 空间中的每一个保向相似变换均为一伸缩旋转与沿旋转轴的平移的复合.
    - 空间中的旋转是 非交换 的.

1.5 多项式方程

1.5.2 二次方程

思路一: 配方法

对于 $ax^2+bx+c=0$, 有 $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a}$, 于是 $x_1,x_2=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

思路二: 韦达定理

对于 $x^2-\sigma_1x+\sigma_2=0$, 令 $\delta=x_1-x_2$, 则有

$$\begin{cases}x_1+x_2=\sigma_1,\\(x_1-x_2)^2=\sigma_1^2-4\sigma_2.\end{cases}$$

解之即得 x_1,x_2.

判别法则

由思路一, 令 $\Delta=b^2-4ac$, 则有

- 当 $\Delta < 0$ 时, 有两个共轭复根.
- 当 $\Delta = 0$ 时, 有一个二重实根.
- 当 $\Delta > 0$ 时, 有两个一重实根.

1.5.3 三次方程

对于 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, 令 $t = x + \dfrac{b}{3a}$ 即可化为 $t^3 + Bt + C = 0$.

方便起见, 下面只研究 $x^3 = 3px + 2q$. 习惯上, 令 $\omega_n = \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{n}}, \omega = \omega_3$.

思路一: 变量代换

1. 令 $x_0 = s + t$, 则当 $st = p$ 且 $s^3 + t^3 = 2q$ 时, 此 x_0 为三次方程之根.
2. 解得 $s^3, t^3 = q \pm \sqrt{q^2 - p^3}$, 从而求出三次方程的三根: $\begin{cases} x_0 = s + t, \\ x_1 = \omega s + \omega^2 t, \\ x_2 = \omega^2 s + \omega t. \end{cases}$

思路二: 三角换元

1. 代入 $x = 2\sqrt{p}\cos\theta$, 即得 $4\cos^3\theta - 3\cos\theta = \cos 3\theta = \dfrac{q}{p\sqrt{p}}$.
2. 于是 $x = 2\sqrt{p}\cos\dfrac{\phi + 2k\pi}{3}$, 其中 $\phi = \arccos\dfrac{q}{p\sqrt{p}}$.

注: 思路一和思路二的公式本质上是一样的, 其中 $\arg s^3 = \phi$, $\left|s^3\right| = p\sqrt{p}$.

思路三: 减少对称 $S_3 \to C_3 \to \{e\}$

对于 $x^3 - \sigma_1 x^3 + \sigma_2 x - \sigma_3 = 0$, 其中 σ_k 为初等对称多项式, 令

$$\begin{cases} X_1 = (x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)^3, \\ X_2 = (x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3)^3. \end{cases}$$

则 X_1 和 X_2 都是轮换对称多项式, 且

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = 2\sigma_1^3 - 9\sigma_1\sigma_2 + 27\sigma_3, \\ X_1 \cdot X_2 = (\sigma_1^2 - 3\sigma_2)^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 = \sqrt[3]{X_1}, \\ x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3 = \sqrt[3]{X_2}, \\ x_1 + x_2 + x_3 = \sigma_1. \end{cases}$$

解之即得 x_1, x_2, x_3.

判别法则

结合思路一与思路二可得, 对于实系数三次方程,

- 当 $0 \le q^2 < p^3$ 时, 有三个不等实根.
- 当 $q^2 = p^3 \ne 0$ 时, 有三个实根, 其中两个相等.
- 当 $q = p = 0$ 时, 有三个相等的实根.

- 当 $0 \le p^3 < q^2$ 时, 有一个实根, 两个共轭虚根.

1.5.3 四次方程

思路一: 费拉里法

对于 $ x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 $, 先消去三次项再配方, 则等价于

$$\left(x^2+\frac{1}{2}bx+y\right)^2=\left(\frac{1}{4}b^2-c+2y\right)x^2+\left(\frac{1}{2}by-d\right)x+y^2-e,$$

令右式关于 x 的判别式为零, 即解关于 y 的三次方程, 即得关于 x 的两个二次方程, 解之即得原方程的四个根.

思路二: 欧拉解法

消去三次项, 并将 $x^4+cx^2+dx+e=0$ 因式分解为

$$(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2)=0,$$

待定系数法解三次方程即得上述系数, 从而得四次方程的四根.

思路三: 变量代换

对于 $x^4+cx^2+dx+e=0$, 作 $x=u+v+w$, 则当

$$\begin{cases} u^2+v^2+w^2=-\dfrac{c}{2}, \\ u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2=\dfrac{c^2-4e}{16}, \\ uvw=-\dfrac{q}{8}. \end{cases}$$

时, 等式成立, 并且上述方程组的解即三次方程的解. 于是解 u,v,w 即得 x.

思路四: 减少对称 $S_4 \to D_2 \to \{e\}$

对于 $x^4-\sigma_1x^3+\sigma_2x^2-\sigma_3x+\sigma_4=0$, 其中 σ_k 为初等对称多项式,

$$\begin{cases} W_1 := x_1x_2+x_3x_4, \\ W_2 := x_1x_3+x_2x_4, \\ W_3 := x_1x_4+x_2x_3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_1 := W_1+W_2+W_3=\sigma_2, \\ h_2 := W_1W_2+W_2W_3+W_3W_1=\sigma_1\sigma_3-4\sigma_4, \\ h_3 := W_1W_2W_3=\sigma_1^2\sigma_4+\sigma_3^2-4\sigma_2\sigma_4. \end{cases}$$

W_1,W_2,W_3 即为 $W^3-h_1W^2+h_2W-h_3=0$ 的解, 于是有

$$\begin{matrix} \begin{cases} (x_1x_2)+(x_3x_4)=W_1, \\ (x_1x_2)(x_3x_4)=\sigma_4, \end{cases} \\ \begin{cases} (x_1+x_2)+(x_3+x_4)=\sigma_1, \\ (x_1+x_2)(x_3+x_4)=W_2+W_3, \end{cases} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \begin{cases} x_1x_2, \\ x_1+x_2. \end{cases} \\ \begin{cases} x_3x_4, \\ x_3+x_4. \end{cases} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1, \\ x_2, \\ x_3, \\ x_4. \end{cases}$$

判别法则

对于 $ax^4+4bx^3+6cx^2+4dx+e=0$, 令:

$$\begin{aligned}&H=b^2-ac, I=ae-4bd+3c^2,\\&G=a^2d-3abc+2b^3, J=\frac{4H^3-a^2HI-G^2}{a^3},\\&\Delta=I^3-27J^2, \delta=12H^2-a^2I.\end{aligned}$$

那么有如下根的判别法则:

- 若 $\Delta<0$ ，则方程有两个互异实根和一对共轭虚根。
- 若 $\Delta>0, \delta>0, H>0$ ，则方程有四个互异实根。
- 若 $\Delta>0, H\leqslant 0$ 或 $\delta<0$ ，则方程有两对互异的共轭虚根。
- 若 $\Delta=0, I\cdot J\neq 0, \delta>0, H>0$ ，则方程有一个两重实根和两个单重实根。
- 若 $\Delta=0, I\cdot J\neq 0, H\leqslant 0$ 或 $\delta<0$ ，则方程有一个两重实根和一对共轭虚根。
- 若 $G\neq 0, I=J=0$ ，则方程有一个三重实根和一个单重实根。
- 若 $G=\delta=0, H>0$ ，则方程有两个互异的两重实根。
- 若 $G=\delta=0, H<0$ ，则方程有一对两重共轭虚根。
- 若 $H=I=G=0$ ，则方程有一个四重实根。

第 2 章 作为变换的复函数

- 图像的描述
  - 至象平面的几何变换.
  - 向量场.
  - 黎曼曲面.
  - 模曲面.
- 卡西尼曲线: 到两点距离乘积为常数的曲线.
  - 映射 $z\mapsto w=Q(z)=(z-a_1)(z-a_2)+c$ 将卡西尼曲线族映为同心圆.
  - 特例: 伯努利双纽线 : $r^2=2\cos 2\theta$.
  - 与 帕修斯螺旋截线 相同.

点击查看 Geogebra 图像 或直接打开 网页链接

3.2 反演

- 复反演 $w = 1/z$
    - 分解 (与次序无关)
        - 几何反演.
        - 复共轭 (实轴反射).
    - 公式
        - $\mathcal{I}_K$ 表示对任意圆周 $K : |z-q| = R$ 的反演.
        - 由定义, $(w-q)\overline{(z-q)} = R^2$.
        - 解之得, $\mathcal{I}_K(z) = \dfrac{R^2}{\overline{z} - \overline{a}} + q$.