第六章

6.1

由备注中的结论：

1. $2^{-n}u(n) \overset{z}{\leftrightarrow} \dfrac{2z}{2z-1}, |z| > \dfrac{1}{2}.$
2. $-2^{-n}u(-n-1) \overset{z}{\leftrightarrow} \dfrac{2z}{2z-1}, |z| < \dfrac{1}{2}.$
3. $(-3)^n u(n) \overset{z}{\leftrightarrow} \dfrac{z}{z+3}, |z| > 3.$
4. 这里求双边 z 变换：$\delta(n+1) \overset{z}{\leftrightarrow} \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n+1) z^{-n} = z, |z| < \infty.$
5. $\delta(n) - \dfrac{1}{8}\delta(n-3) \overset{z}{\leftrightarrow} 1 - \dfrac{1}{8z^3}, |z| > 0.$
6. 法一：直接由定义与等比数列求和公式

   $$2^{-n}u(n) - 2^{-n}u(n-10) \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{1-(2z)^{-10}}{1-(2z)^{-1}}, |z| > 0.$$

   法二：利用微分性质

   $$F(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{2}} - \frac{z \cdot z^{-10}}{z-\frac{1}{2}} = \frac{1-(2z)^{-10}}{1-(2z)^{-1}}, |z| > 0.$$

7. $(2^{-n}+3^n)u(n) \overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} \dfrac{z}{z-\dfrac{1}{2}}+\dfrac{z}{z-3}, |z|>3.$

8. 由备注中的结论有，

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)u(n) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\frac{n\pi}{2}+\cos\frac{n\pi}{2}\right)u(n)\\ &\overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z^2+z}{z^2+1}, \quad |z|>1.\end{aligned}$$

9. $\cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)u(n) \overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} \dfrac{z(z-\dfrac{\sqrt{2}}{2}z)}{z^2-\sqrt{z}+1}, |z|>1.$

备注　该题使用的结论及其证明现罗列如下：

- 由等比数列求和公式，有：
  - $a^n u(n) \overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n = \frac{z}{z-a}, \mathrm{ROC}\colon |z|>|a|.$
  - $-a^n u(-n-1) \overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} -\displaystyle\sum_{n=-1}^{-\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = \frac{z}{z-a}, \mathrm{ROC}\colon |z|<|a|.$
- 利用线性性质与上述结论 (序列指数加权)，有

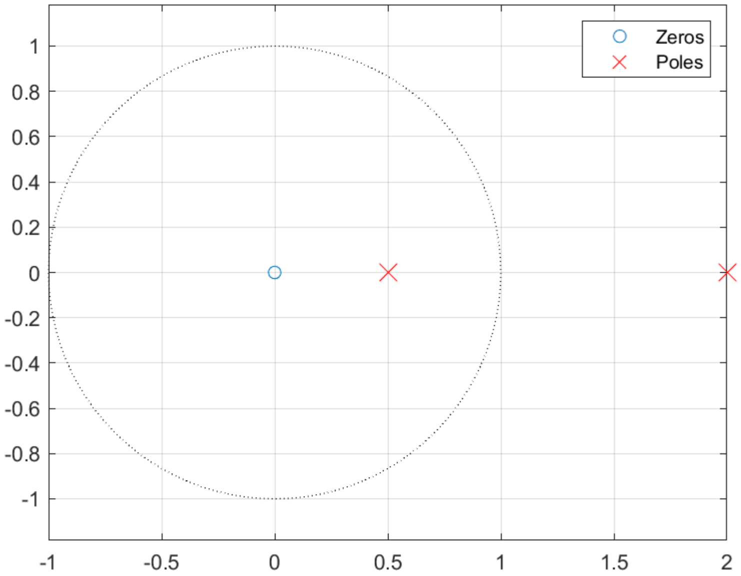
$$\begin{aligned}\cos(\omega_0 n)u(n) &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 n}}{2}u(n) \overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0}}+\frac{z}{z-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0}}\right)\\ &= \frac{z(z-\cos\omega_0)}{z^2-2z\cos\omega_0+1}, \quad |z|>1,\\ \sin(\omega_0 n)u(n) &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 n}}{2\mathrm{j}}u(n) \overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} \frac{1}{2\mathrm{j}}\left(\frac{z}{z-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0}}-\frac{z}{z-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0}}\right)\\ &= \frac{z\sin\omega_0}{z^2-2z\cos\omega_0+1}, \quad |z|>1.\end{aligned}$$

6.2

1. 其 z 变换及其收敛域为

$$\begin{aligned}2^{-|n|} \overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} \sum_{n=-1}^{-\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2z}\right)^n &= -\frac{z}{z-2}+\frac{2z}{2z-1}\\ &= \frac{-3z}{(2z-1)(z-2)}, = \frac{-3z}{2z^2-5z+2}, \quad 0.5<|z|<2.\end{aligned}$$

2. 零极点图的代码及其图像



附

- 调用代码：

```
a = [2, -5, 2];
b = [-3, 0];
plotpzd(a, b, true)
```

- 函数代码：

```
function plotpzd(a, b, showCircle)
% Plot the zeros-poles distribution map
% Variable a is a denominator coefficient vector,
% and b is a nominator coefficient vector.

ps = roots(a);          % roots of denominator polynomial
zs = roots(b);          % roots of nominator polynomial
legStr = [];            % legend string

if (~isempty(zs))
    plot(real(zs), imag(zs), 'o');  hold on;
    legStr = [legStr; 'Zeros'];
end
if (~isempty(ps))
    plot(real(ps), imag(ps), 'rx', 'markersize', 12);
    legStr = [legStr; 'Poles'];
end
if(~exist('showCircle','var'))
    showCircle = false;
end
if (showCircle)
    rectangle('position', [-1, -1, 2, 2], 'curvature', [1,1], 'LineStyle',
':')
end

xmin = floor(min([real(ps); real(zs)]));    xmin = min(xmin, -1);
xmax = ceil(max([real(ps); real(zs)]));     xmax = max(xmax, 1);
ymin = floor(min([imag(ps); imag(zs)]));    ymin = min(ymin, -1);
ymax = ceil(max([imag(ps); imag(zs)]));     ymax = max(ymax, 1);
```

```
axis([xmin xmax ymin ymax]), axis equal;
legend(legStr), grid on;

% set(gca,'YAxisLocation','origin');
% set(gca,'XAxisLocation','origin');

end
```

6.3

1. $x(n) = \delta(n)$.
2. $x(n) = \delta(n+3)$.
3. $x(n) = \delta(n-1)$.
4. $x(n) = \delta(n) + 2\delta(n+1) - 2\delta(n-2)$.
5. $x(n) = a^n u(n)$.
6. $x(n) = -a^n u(-n-1)$.

备注

- $\delta(n-m) \overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow} z^{-m}$.
- $\dfrac{z}{z-a} \overset{\mathcal{Z}_B}{\leftrightarrow} \begin{cases} a^n u(n), & |z| > |a|, \\ -a^n u(-n-1), & |z| < |a|. \end{cases}$

6.4

1. 展开 $\dfrac{X(z)}{z} = \dfrac{2}{z} + \dfrac{1}{z+0.5}$,

   于是 $X(z) = 2 + \dfrac{z}{z+0.5}$,

   从而 $x(n) = 2\delta(n) + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n u(n)$.

2. $\dfrac{X(z)}{z} = \dfrac{z-\dfrac{1}{2}}{\left(z+\dfrac{1}{2}\right)\left(z+\dfrac{1}{4}\right)} = \dfrac{4}{z+\dfrac{1}{2}} - \dfrac{3}{z+\dfrac{1}{4}}$,

   $x(n) = \left[4\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n - 3\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n\right] u(n)$.

3. $x(n) = \left(2^{1-n} - 4^{-n}\right) u(n)$.
4. $\dfrac{X(z)}{z} = \dfrac{-a}{z} + \left(a - \dfrac{1}{a}\right) \dfrac{1}{z - \dfrac{1}{a}}$.

   $x(n) = -a\delta(n) + \left(a - \dfrac{1}{a}\right) a^{-n} u(n)$.

备注　当 $|z| > |a|$ 时，有

$$\frac{z}{z-a} \overset{z}{\leftrightarrow} a^n u(n), \qquad \frac{1}{z-a} \overset{z}{\leftrightarrow} a^{n-1} u(n-1),$$
$$\frac{z}{(z-a)^2} \overset{z}{\leftrightarrow} a^{n-1} n \cdot u(n), \qquad \frac{1}{(z-a)^2} \overset{z}{\leftrightarrow} a^{n-2}(n-1)u(n-1),$$
$$\frac{z}{(z-a)^{k+1}} \overset{z}{\leftrightarrow} a^{n-k}\binom{n}{k}u(n), \qquad \frac{1}{(z-a)^k} \overset{z}{\leftrightarrow} a^{n-k}\binom{n-1}{k-1}u(n-1),$$

$$\left(\frac{z}{z-a}\right)^k \overset{z}{\leftrightarrow} a^n \frac{(n+k)_{(k)}}{n!}u(n), \qquad \left(\frac{z+a}{z}\right)^k \overset{z}{\leftrightarrow} a^n \binom{k}{n} u(n-k).$$

6.5

由长除法:

1. $x(n)=\{1,3,7,\cdots\}$.
2. $x(n)=\left\{1,\frac{3}{2},\frac{9}{4},\cdots\right\}$.
3. $x(n)=\{0,1,2,\cdots\}$.

备注

- 有如下思路
  1. 直接求出 z 逆变化，从而得到序列的前若干项.
  2. 幂级数展开（求导法）
  3. 幂级数展开（长除法）

  如果无需 z 逆变换的闭合表达式，则第三种方法一般最为简便.
- 这里采用前两种算法的 mathematica 代码如下:

  0. 题述函数的定义:

```
X1[z_] := z^2/((z - 2) (z - 1))
X2[z_] := (z^2 + z + 1)/((z - 1) (z + 0.5))
X3[z_] := (z^2 - z)/(z - 1)^3
```

  1. 求逆变换的代码:

```
Table[InverseZTransform[X1[z], z, n], {n, 0, 2}]
Table[InverseZTransform[X2[z], z, n], {n, 0, 2}]
Table[InverseZTransform[X3[z], z, n], {n, 0, 2}]
```

  2. 幂级数展开的代码:

```
Series[X1[1/z], {z, 0, 2}]
Series[X2[1/z], {z, 0, 2}]
Series[X3[1/z], {z, 0, 2}]
```

  经检验，结果是一致的.

6.6

0. $X(z)=\dfrac{8z}{z-1}-\dfrac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}-\dfrac{6z}{z-\frac{1}{2}}$.
1. $x(n)=[8-(2n+6)2^{-n}]u(n)$.
2. $x(n)=[(2n+6)2^{-n}-8]u(-n-1)$.
3. $x(n)=-8u(-n-1)-(2n+6)2^{-n}u(n)$.

备注 当 $|z|<|a|$ 时，有

$$\begin{aligned}\frac{z}{z-a}&\overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow}-a^nu(-n-1),\\ \frac{z}{(z-a)^2}&\overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow}-a^{n-1}n\cdot u(-n-1),\\ \frac{z}{(z-a)^{k+1}}&\overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow}-a^{n-k}\binom{n}{k}u(-n-1),\end{aligned}$$

6.7

1. $\dfrac{X(z)}{z}=\dfrac{1}{(z-1)^2(z+1)}=\dfrac{1}{4(z+1)}+\dfrac{1}{2(z-1)^2}-\dfrac{1}{4(z-1)}$.

   $x(n)=\dfrac{(-1)^n+2n-1}{4}u(n)$.
2. $\dfrac{X(z)}{z}=\dfrac{1}{(z-6)^2}$.

   $x(n)=6^{n-1}n\cdot u(n)$.
3. $X(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{-\infty}\frac{z^{-n}}{(-n)!}$.

   $x(n)=\dfrac{u(-n)}{(-n)!}$.
4. 由 6.1 备注中的结论：

$$\begin{aligned}x(n)&=\left[\cos(\omega n)+\frac{1+\cos\omega}{\sin\omega}\sin(\omega n)\right]u(n)\\ &=\frac{\sin(n+1)\omega+\sin(n\omega)}{\sin\omega}u(n)\end{aligned}$$

备注 $\mathrm{e}^{az}\overset{\mathcal{Z}}{\leftrightarrow}\dfrac{a^{-n}}{(-n)!}u(-n)$.

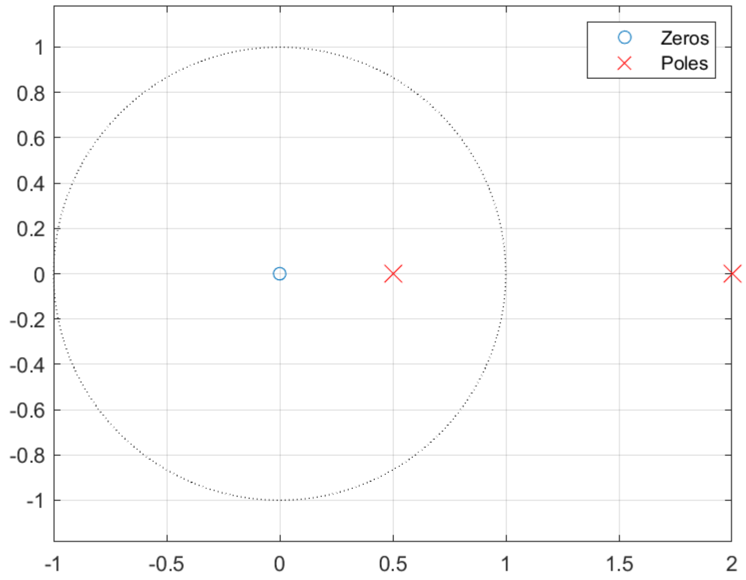
6.8

$$X(z)=\frac{-3z}{2z^2-5z+2}=\frac{-3z}{(2z-1)(z-2)}=\frac{z}{z-\frac{1}{2}}-\frac{z}{z-2}.$$

1. 右边序列：$x(n)=[2^{-n}-2^n]u(n)$.
2. 左边序列：$x(n)=[2^n-2^{-n}]u(-n-1)$.

3. 双边序列：$x(n)=2^{-n}u(n)+2^{n}u(-n-1)$.

附　零极点图如下图所示：



6.9

1. 思路一：求 z 逆变换.
   - $\dfrac{X(z)}{z}=\dfrac{z^2+z+1}{z(z-1)(z-2)}=\dfrac{1}{2z}-\dfrac{3}{z-1}+\dfrac{7}{2(z-2)}$.
   - $x(n)=\dfrac{1}{2}\delta(n)-3u(n)+\dfrac{7}{2}2^{n}u(n)$,
   - 因此 $x(0)=1$，$x(\infty)$ 不存在.

   思路二：特值定理
   - $x(0)=\lim\limits_{z\to\infty}X(z)=1$.
   - 由于极点绝对值大于 1，$x(\infty)$ 不存在.
2. $x(0)=\lim\limits_{z\to\infty}X(z)=1$.

   $x(\infty)=\lim\limits_{z\to 1}(z-1)X(z)=0$.
3. $x(0)=\lim\limits_{z\to\infty}X(z)=0$.

   $x(\infty)=\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{z}{z-0.5}=2$.

6.10

1. $X(z)=\ln\left(1+\dfrac{a}{z}\right)=az^{-1}-\dfrac{a^2z^{-2}}{2}+\dfrac{a^3z^{-3}}{3}-\cdots$.
2. $x(n)=(-1)^{n+1}\dfrac{a^n}{n}u(n-1)$.

备注　类似的，有以下结论：

- $\mathrm{e}^{az}\overset{z}{\leftrightarrow}\dfrac{a^{-n}}{(-n)!}u(-n)$.
- $\ln\left(1-\dfrac{a}{z}\right)\overset{z}{\leftrightarrow}-\dfrac{a^n}{n}u(n-1)$.

- $\ln\dfrac{z-b}{z-a} \overset{z}{\leftrightarrow} \dfrac{a^n-b^n}{n}u(n-1).$

6.11

1. 思路一：利用定义，$x(n) \overset{z}{\leftrightarrow} \dfrac{1-z^{-8}}{1-z^{-1}}.$

   思路二：平移性质，$x(n) \overset{z}{\leftrightarrow} \dfrac{z-z^{-7}}{z-1}.$

2. 思路一：利用定义——裂项相消，或者逐项求导

   思路二：微分性质，由 $u(n) \overset{z}{\leftrightarrow} 1+\dfrac{1}{z-1}$，有

$$\begin{cases} n\cdot u(n) \overset{z}{\leftrightarrow} \dfrac{z}{(z-1)^2}, \\ n^2\cdot u(n) \overset{z}{\leftrightarrow} \dfrac{z^2+z}{(z-1)^3}. \end{cases} \quad\Rightarrow\quad n(n-1)u(n) \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{2z}{(z-1)^3}.$$

   思路三：由卷积定理可得. 实际上，由数学归纳法有

$$\frac{z}{(z-a)^{k+1}} \overset{z}{\leftrightarrow} a^{n-k}\binom{n}{k}u(n),$$

   取 $k=2$，即得 $n(n-1)u(n) \overset{z}{\leftrightarrow} \dfrac{2z}{(z-1)^3}.$

3. 思路一：利用微分性质，$x(n)=(n+1)u(n) \overset{z}{\leftrightarrow} \dfrac{z^2}{(z-1)^2}.$

   思路二：利用卷积定理，$x(n) \overset{z}{\leftrightarrow} \left(\dfrac{z}{z-1}\right)^2.$

4. 见 6.10 备注，由幂级数展开得到 $x(n) \overset{z}{\leftrightarrow} \ln\dfrac{z-b}{z-a}.$

5. 由 $\dfrac{a^n}{n}u(n-1) \overset{z}{\leftrightarrow} \ln\dfrac{z}{z-a}$ 与位移性质得 $x(n) \overset{z}{\leftrightarrow} \dfrac{z}{a}\ln\dfrac{z}{z-a}.$

6. 利用微分性质和尺度性质（见本题备注中的结论），有 $x(n) \overset{z}{\leftrightarrow} \dfrac{z^2}{z^2+\frac{1}{4}}.$

7. 思路一：利用定义与差比数列求和公式.

   思路二：利用卷积定理（或直接由第二问中提到的结论）.

   思路三：利用微分性质，$x(n) \overset{z}{\leftrightarrow} \dfrac{-z}{(z+1)^2}.$

8. 思路一：利用定义，$x(n) \overset{z}{\leftrightarrow} \dfrac{z^2+2z+3}{z^3}.$

   思路二：利用时移性质.

备注

- 第二问标答分母次方应该为 3.
- 利用 6.1 备注中的结论和尺度性质（序列指数加权），$a^nf(n) \overset{z}{\leftrightarrow} F\left(\dfrac{z}{a}\right)$，有

$$\beta^n \cos(n\omega_0)u(n) \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z(z-\beta\cos\omega_0)}{z^2-2\beta z\cos\omega_0+\beta^2}, \quad \mathrm{ROC}: |z|>|\beta|,$$
$$\beta^n \sin(n\omega_0)u(n) \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{\beta z\sin\omega_0}{z^2-2\beta z\cos\omega_0+\beta^2}, \quad \mathrm{ROC}: |z|>|\beta|.$$

- 第八问标答有误.

6.12

$$\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1} b(z-1)\left(\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-\mathrm{e}^{-aT}}\right) = b.$$

6.13

1. $Y(z) = \dfrac{z}{z-a}\cdot\dfrac{b}{b-z} = \dfrac{b}{b-a}\left(\dfrac{z}{z-a}-\dfrac{z}{z-b}\right).$

   $y(n) = \dfrac{b}{b-a}[a^n u(n) + b^n u(-n-1)].$
2. $Y(z) = \dfrac{z^{-1}}{z-a} = \dfrac{z}{a^2(z-a)} - \dfrac{1}{az} - \dfrac{1}{a^2}.$

   $y(n) = a^{n-2}u(n) - a\delta(n-1) - a^{-2}\delta(n) = a^{n-2}u(n-2).$
3. $Y(z) = \dfrac{z}{z-a}\cdot\dfrac{z^2}{z-1} = z + \dfrac{a^2}{a-1}\dfrac{z}{z-a} + \dfrac{1}{1-a}\dfrac{z}{z-1}.$

   $y(n) = \delta(n+1) + \dfrac{a^{n+2}-1}{a-1}u(n) = \dfrac{1-a^{n+2}}{1-a}u(n+1).$

备注　第一问应当注意收敛域；并不严谨.

6.14

3. $\dfrac{ie^b\left(-1+e^{2i\mathrm{w}0}\right)z^2}{2\left(e^b z-1\right)\left(-z+e^{i\mathrm{w}0}\right)\left(-1+e^{i\mathrm{w}0}z\right)}.$

备注　不想做这题.

6.15

1. $Y(z) - 2.5(z^{-1}Y(z)-1) + z^{-2}Y(z) - z^{-1} + 1 = 0,$

   $Y(z) = \dfrac{z^{-1}-3.5}{1-2.5z^{-1}+z^{-2}} = \dfrac{z(1-3.5z)}{(z-0.5)(z-2)} = \dfrac{0.5z}{z-0.5} - \dfrac{4z}{z-2}.$

   $y(n) = 0.5^{n+1} - 2^{n+2}.$
2. $Y(z) - z^{-1}Y(z) - 2(z^{-2}Y(z)+3) = 0,$

   $Y(z) = \dfrac{6}{1-z^{-1}-2z^{-2}} = \dfrac{6z^2}{(z-2)(z+1)} = \dfrac{4z}{z-2} + \dfrac{2z}{z+1},$

   $y(n) = 2^{n+2} + 2(-1)^n.$
3. $Y(z) + 0.1(z^{-1}Y(z)+4) - 0.02(z^{-2}Y(z)+4z^{-1}+6) = \dfrac{10z}{z-1},$

   $Y(z) = z\dfrac{9.72z^2+0.36z-0.08}{(z-1)(z^2+0.1z+0.02)},$

4. $Y(z)-0.9z^{-1}Y(z)=\dfrac{0.05z}{z-1}$,

$$Y(z)=z\frac{0.05z}{(z-1)(z-0.9)}=\frac{0.5z}{z-1}-\frac{0.45z}{z-0.9},$$

$$y(n)=0.5-0.45\cdot 0.9^n.$$

5. $Y(z)+5z^{-1}Y(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2}$,

$$Y(z)=z\frac{z}{(z-1)^2(z+5)}=-\frac{5z}{36(z+5)}+\frac{z}{6(z-1)^2}+\frac{5z}{36(z-1)},$$

$$y(n)=\left[\frac{n}{6}+\frac{5}{36}-\frac{5}{36}(-5)^n\right]u(n).$$

6. $(z^2Y(z)-z^2-z)-(zY(z)-z)-2Y(z)=\dfrac{z}{z-1}$,

$$Y(z)=\frac{z(z^2-z+1)}{(z-1)(z-2)(z+1)}=\frac{z}{z-2}-\frac{z}{2(z-1)}+\frac{z}{2(z+1)},$$

$$y(n)=\left[2^n-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(-1)^n\right]u(n).$$

备注

- 这里解出的 $y(n)$ 无需加上 $u(n)$，因为还需考虑负数的情况，并且上述答案对负数的情况也是成立的（非因果信号）.
- 第三问答案似乎有误，

```
Apart[((10 z)/(z - 1) - 0.28 + 0.08/z)/((1 + 0.1 z^-1 + 0.02 z^-2) z), z]

RSolveValue[{
        y[n] + 0.1 y[n - 1] - 0.02 y[n - 2] == 10 UnitStep[n],
        y[-1] == 4, y[-2] == 6
    }, y[n], n
] // Simplify
```

6.16

1. $8z^2-2z-3=(2z+1)(4z-3)$，故为稳定.
2. $2z^2+5z+2=(2z+1)(z+2)$，故为不稳定.
3. $2z^2+z-1=(2z-1)(z+1)$，故为临界稳定.
4. $z^2-z+1=\left(z-\dfrac{1-\mathrm{j}\sqrt{3}}{2}\right)\left(z-\dfrac{1+\mathrm{j}\sqrt{3}}{2}\right)$，故为临界稳定.

6.17

6.18

1. $Y(z)=\dfrac{z}{z+1}$,

   $h(n)=(-1)^nu(n).$

   系统临界稳定.

2. 思路一（直接求卷积）：$y(n)=x(n)*h(n)=5\,[1+(-1)^n]u(n)$.

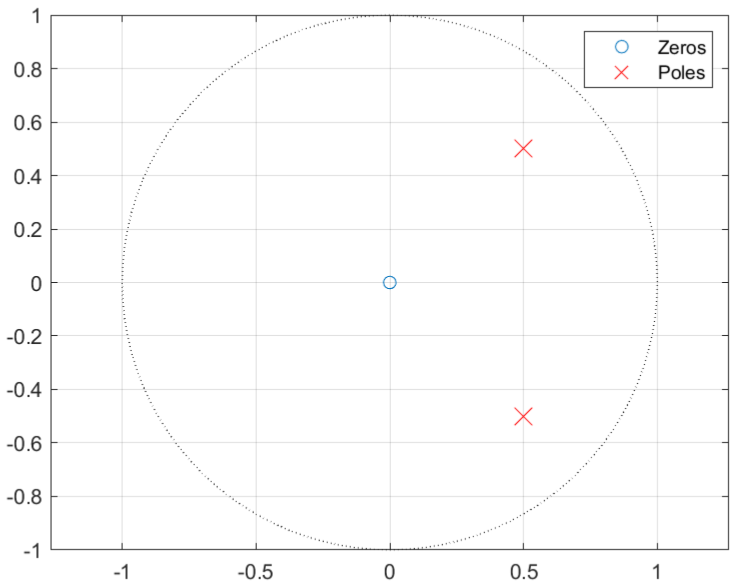
思路二（用卷积定理）

$$Y(n)=\frac{10z}{z-1}\frac{z}{z+1}=\frac{5z}{z-1}+\frac{5z}{z+1},$$

$$y(n)=5\,[1+(-1)^n]u(n).$$

6.19

1. $y(n)-y(n-1)+\dfrac{1}{2}y(n-2)=x(n-1)$.
2. $H(z)=\dfrac{z}{z^2-z+0.5}$.



3. 由 $\alpha^n\sin(\omega n)\overset{z}{\leftrightarrow}\dfrac{\alpha z\sin\omega}{z^2-2\alpha z\cos\omega+\alpha^2}$ 得 $y(n)=2^{1-\frac{n}{2}}\sin\dfrac{\pi}{4}nu(n)$.

6.20

1. $H(z)=\dfrac{1}{3-6z^{-1}}=\dfrac{z}{3(z-2)}$,

   $h(n)=\dfrac{2^n}{3}u(n)$.
2. $H(z)=1-5z^{-1}+8z^{-3}$,

   $h(n)=\delta(n)-5\delta(n-1)+8\delta(n-3)$.
3. $H(z)=\dfrac{1}{1-z^{-2}/4}=\dfrac{z^2}{(z+0.5)(z-0.5)}=\dfrac{0.5z}{z-0.5}+\dfrac{0.5z}{z+0.5}$,

   $h(n)=0.5\,[0.5^n+(-0.5)^n]u(n)$.
4. $H(z)=\dfrac{1}{1-3z^{-1}+3z^{-2}-z^{-3}}=\dfrac{z^3}{(z-1)^3}=\dfrac{z}{z-1}+\dfrac{2z}{(z-1)^2}+\dfrac{z}{(z-1)^3}$,

   $h(n)=\left[1+2n+\dfrac{n(n-1)}{2}\right]u(n)=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}u(n)$.
5. $H(z)=\dfrac{1-3z^{-2}}{1-5z^{-1}+6z^{-2}}=1+\dfrac{5z-9}{(z-2)(z-3)}=1-\dfrac{z}{z-2}+\dfrac{6z}{z-3}$.

   $h(n)=\delta(n)-2^nu(n)+6\cdot 3^nu(n)$.

备注

- 考虑零状态响应；系统框图略.
- 第四问实际上有 $\left(\dfrac{z}{z-a}\right)^k \overset{z}{\leftrightarrow} a^n \dfrac{(n+k)_{(k)}}{n!} u(n)$.

  证明 已知 $k=1$ 时成立，由数学归纳法，若 k 时成立，则

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{z}{z-a}\right)^{k+1} &\overset{z}{\leftrightarrow} \sum_{m=0}^{n} a^n \frac{(m+k)_{(k)}}{m!} u(n) \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

  （等以后补充吧.）

6.21

0. $H(z) = \dfrac{z}{z-0.5} - \dfrac{z}{z-10}$,
1. 当 $10 < |z| \leq \infty$ 时，

   $h(n) = (0.5^n - 10^n) u(n)$.

   因果、不稳定.
2. 当 $0.5 < |z| < 10$ 时，

   $h(n) = 0.5^n u(n) + 10^n u(-n-1)$.

   非因果、稳定.

6.22

0. $y(n) - ay(n-1) = x(n)$,

   $H(z) = \dfrac{z}{z-a}$,
1. $Y_1(z) = \dfrac{z^2}{(z-a)(z-1)} = \dfrac{a}{a-1}\dfrac{z}{z-a} - \dfrac{1}{a-1}\dfrac{z}{z-1}$,

   $y_1(n) = \underbrace{\dfrac{a^{n+1}}{a-1} u(n)}_{\text{瞬态响应}} + \underbrace{\dfrac{-1}{a-1} u(n)}_{\text{稳态响应}}$.
2. $Y_2(z) = \dfrac{z^2}{(z-a)(z-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}-a}\dfrac{z}{z-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}} + \dfrac{a}{a-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}}\dfrac{z}{z-a}$,

   $y_2(n) = \underbrace{\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}}{a-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega} u(n)}_{\text{稳态响应}} + \underbrace{\dfrac{-a}{a-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}} a^n u(n)}_{\text{瞬态相应}}$.

6.23

1. $H_1(z) = \dfrac{z}{z-1}$,
2. $H(z) = (H_1 + H_2) H_3 = \dfrac{2z}{(z+1)(z-1)}$,
3. $X(z) = 1 + \dfrac{1}{z}$,

4. $Y_{\text{zs}}(z) = \dfrac{2}{z-1}$,
5. $y_{\text{zs}}(n) = 2u(n-1)$.

6.24 ?

1. $X_1(z) = \dfrac{z}{z-0.5}$,

   $Y_1(z) = 1 + \dfrac{az}{z-0.25}$,

   $H(z) = 1 - \dfrac{0.5}{z} + a\dfrac{z-0.5}{z-0.25}$,

   $X_2(z) = \dfrac{z}{z+2}$,

   $Y_2(z) = \dfrac{z-0.5}{z+2} + a\dfrac{z-0.5}{z-0.25}\dfrac{z}{z+2}$,

---

6.25

1. $H(z) = \dfrac{2+z^{-1}}{1+3z^{-1}+2z^{-2}} = \dfrac{z(2z+1)}{(z+2)(z+1)}$.

   故系统不稳定.
2. $Y_{\text{zs}}(z) = \dfrac{z^2(2z+1)}{(z+2)(z+1)(z-1)} = \dfrac{2z}{z+2} - \dfrac{z}{2(z+1)} + \dfrac{z}{2(z-1)}$,

   $y_{\text{zs}}(n) = [2(-2)^n - 0.5(-1)^n + 0.5]u(n)$.
3. $Y_{\text{zi}}(z) = \dfrac{-z^{-1}-2}{1+3z^{-1}+2z^{-2}} = -\dfrac{z(2z+1)}{(z+2)(z+1)} = \dfrac{z}{z+1} - \dfrac{3z}{z+2}$,

   $y_{\text{zi}}(n) = [(-1)^n - 3(-2)^n]u(n)$.
