3 恒定磁场

- 3.1 恒定磁场的基本定律
 - 3.1.1 回路的安培力
 - 3.1.2 比奥萨瓦定律
 - 3.1.3 洛伦兹力方程
- 3.2 真空中恒定磁场方程
 - 3.2.1 散度与磁通连续性原理
 - 3.2.2 真空中的安培环路定理
 - 3.2.3 位函数与矢量泊松方程
 - 3.2.4 矢量磁位的计算与应用
- 3.3 磁偶极子与介质磁化
 - 3.3.1 磁偶极子及其矢量磁位
 - 3.3.2 磁化介质及其电流密度
 - 3.3.3 介质中的恒定磁场方程
 - 3.3.4 磁化强度与相对磁导率
 - 3.3.5 磁化强度与电流的计算
- 3.4 恒定磁场的边界条件
 - 3.4.1 磁感应强度边界条件
 - 3.4.2 磁场强度的边界条件
 - 3.4.3 电位函数的边界条件
 - 3.4.4 分界面上的磁场方向
 - 3.4.5 电流密度的计算方法
- 3.5 无源磁场的标量磁位
 - 3.5.1 标量磁位与磁压定义
 - 3.5.2 拉氏方程与泊松方程
 - 3.5.3 磁荷密度与边界条件
 - 3.5.4 电位函数的边界条件
 - 3.5.5 磁感应强度计算方法
- 3.6 恒定磁场的其它问题
 - 3.6.1 自电感与互电感
 - 3.6.2 内自感与外自感
 - 3.6.3 自感与互感计算
 - 3.6.4 能量与能量密度
 - 3.6.5 磁场力虚位移法

3.1 恒定磁场的基本定律

3.1.1 回路的安培力

$$oldsymbol{F}_{21} = rac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} rac{I_2 \, \mathrm{d} oldsymbol{l}_2 imes (I_1 \, \mathrm{d} oldsymbol{l}_1 imes oldsymbol{a}_R)}{R^2}.$$

- 即 C_1 对 C_2 的作用力,其中 $\boldsymbol{a}_R = \boldsymbol{r}_2 \boldsymbol{r}_1$.
- 真空中的磁导率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \; \text{H/m}.$

3.1.2 比奥萨瓦定律

• 磁感应强度 (磁通量密度) B

• 单位为:
$$T = Wb/m^2 = 10^4 Gs$$
.

。 线电流:
$$oldsymbol{B} = rac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C'} rac{I \, \mathrm{d} oldsymbol{l}' imes oldsymbol{a}_R}{R^2}.$$

$$\circ$$
 面电流: $oldsymbol{B} = rac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S'} rac{oldsymbol{J_{
m S}}(oldsymbol{r}') imes oldsymbol{a}_R}{R^2} \, {
m d}S'.$

$$\circ$$
 体电流: $oldsymbol{B} = rac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} rac{oldsymbol{J}(oldsymbol{r}') imes oldsymbol{a}_R}{R^2} \, \mathrm{d}V'.$

• 例子

。 有限长直导线:
$$oldsymbol{B}=rac{\mu_0 I}{4\pi r}(\cos heta_1-\cos heta_2)oldsymbol{a}_{arphi}.$$

。 无穷长直导线:
$$oldsymbol{B}=rac{\mu_0 I}{2\pi r}oldsymbol{a}_{arphi}.$$

$$\circ$$
 电流环的轴线: $m{B} = rac{\mu_0 I r^2}{2(z^2 + r^2)^{3/2}} m{a}_z.$

$$\circ$$
 电流环的圆心: $oldsymbol{B}=rac{\mu_0 I}{2r}oldsymbol{a}_z.$

$$\circ$$
 无限大面电流: $B=rac{\mu_0 J_{
m s}}{2}$.

3.1.3 洛伦兹力方程

• 宏观回路:
$$oldsymbol{F} = \oint_I I \, \mathrm{d} oldsymbol{l} imes oldsymbol{B}.$$

• 微观粒子:
$${m F} = q{m v} imes {m B}$$
.

• 洛伦兹力方程:
$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E})$$
.

3.2 真空中恒定磁场方程

3.2.1 散度与磁通连续性原理

• 旋度场与无源性

$$egin{aligned} \circ & oldsymbol{B} = rac{\mu_0}{4\pi} oldsymbol{
abla} imes \int_{V'} rac{oldsymbol{J}(r')}{R} \, \mathrm{d}V'. \end{aligned}$$

$$\circ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0.$$

• 磁通量与连续性

。 磁通
$$\Phi_{\mathrm{m}} = \int_{S} m{B} \cdot \mathrm{d}m{S}$$
 单位为韦伯 Wb.

$$\circ \oint_{S} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{V} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} \, dV = 0.$$

3.2.2 真空中的安培环路定理

- 积分形式: $\oint_{I}oldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}oldsymbol{l}=\mu_{0}I.$
- 微分形式: $\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J}$.
- 其中 I 为真实电流(自由电流),包括传导电流和运流电流

3.2.3 位函数与矢量泊松方程

- 矢量磁位 A.
 - $\circ \ m{B} \equiv m{\nabla} \times m{A}$.
 - 。 \boldsymbol{A} 不唯一. 若 \boldsymbol{A} 满足上式,则 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla} \phi$ 也满足.
 - 。 库仑规范: 规定 $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$.
- 矢量泊松方程: $\Delta A = \nabla (\nabla \cdot A) \nabla \times (\nabla \times A) = -\mu_0 J$.

3.2.4 矢量磁位的计算与应用

- 矢量磁位的计算
 - 可由毕奥-萨瓦定律或矢量泊松方程推得.

。 线电流:
$$oldsymbol{A} = rac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} rac{oldsymbol{J}(r')}{R} \, \mathrm{d}V'.$$

$$\circ$$
 面电流: $\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\mathbf{J}_s}{R} \, \mathrm{d}S'$.

$$\circ$$
 体电流: $oldsymbol{A} = rac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{U}} rac{oldsymbol{I}}{R} \, \mathrm{d}l'.$

- \circ 或由 $\Delta \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{J}$ 与边界条件求解.
- 矢量磁位的应用
 - 求磁感应强度: $\mathbf{B} = \mathbf{\nabla} \times \mathbf{A}$.
 - 。 求磁通量: $\Phi_{\mathrm{m}} = \int_{S} m{B} \cdot \mathrm{d} m{S} = \oint_{C} m{A} \cdot \mathrm{d} m{l}$.

3.3 磁偶极子与介质磁化

3.3.1 磁偶极子及其矢量磁位

- 磁偶极子
 - 。 一个小载流圆环, 右手螺旋方向.
 - \circ 磁偶极矩 (磁矩): $\boldsymbol{p}_{\mathrm{m}} = I\boldsymbol{S} = IS\boldsymbol{a}_{z}$.
- 矢量磁位
 - 。 矢量磁位: $oldsymbol{A} = rac{\mu_0}{4\pi r^2} oldsymbol{p}_{ ext{m}} imes oldsymbol{a}_r = rac{\mu_0}{4\pi r^3} oldsymbol{p}_{ ext{m}} imes oldsymbol{r}.$
 - 。 磁感应强度: $oldsymbol{B} = rac{\mu_0 IS}{4\pi r^3} (oldsymbol{a}_r 2\cos heta + oldsymbol{a}_ heta\sin heta).$

3.3.2 磁化介质及其电流密度

• 介质的磁化

○ 介质磁化后: 束缚电流(磁化电流), 附加磁场.

○ 介质的分类: 抗磁质, 顺磁质, 铁磁质.

○ 铁磁质: 剩磁、磁滞现象.

- 磁化强度矢量 $oldsymbol{M} = \lim_{\Delta V
 ightarrow 0} rac{\sum oldsymbol{p}_{\mathrm{m}}}{\Delta V}.$
 - 均匀磁化/非均匀磁化.

 \circ 磁化体电流密度: $oldsymbol{J}_{\mathrm{m}} = oldsymbol{
abla} imes oldsymbol{M}$.

 \circ 磁化面电流密度: $oldsymbol{J}_{\mathrm{sm}} = oldsymbol{M} imes oldsymbol{n}$.

3.3.3 介质中的恒定磁场方程

磁场强度 H.

 \circ 考虑 $\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 (\boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}) = \mu_0 (\boldsymbol{J} + \nabla \times \boldsymbol{M}).$

 $oldsymbol{\circ}$ 于是定义磁场强度 $oldsymbol{H}:=rac{oldsymbol{B}}{\mu_0}-oldsymbol{M}$,单位为 $\mathrm{A/m}$.

• 安培环路定律

○ 微分形式: $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$.

。 积分形式: $\oint_I oldsymbol{H} \cdot \mathrm{d} oldsymbol{l} = I.$

• 磁通连续性原理

微分形式: **▽・***B* = 0.

。 积分形式: $\oint_{S} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} = 0$.

• 矢量电位函数

• 泊松方程: $\Delta A = -\nabla \times (\nabla \times A) = -\mu J$.

 \circ 对于无源区域,拉普拉斯方程: $\Delta A = 0$.

3.3.4 磁化强度与相对磁导率

• 磁化强度: $M \equiv \chi_{\rm m} H$.

 \circ 介质的磁化率 $\chi_{\rm m}$ 无量纲.

 \circ 在真空中, $\chi_{\mathrm{m}}=0$.

• 顺磁质 $\chi_{\rm m} > 0$,抗磁质 $\chi_{\rm m} < 0$.

• 铁磁质 $\chi_{\rm m}\gg 1$, 非铁磁质 $\chi_{\rm m}\approx 1$.

• 磁感应强度: ${m B} = \mu_0({m H} + {m M}) = \mu_0(1 + \chi_{
m m}){m H} = \mu_0\mu_{
m r}{m H} = \mu{m H}$.

 \circ 相对磁导率 μ_r 无量纲.

• 磁导率 $\mu = \mu_0 \mu_r$ 单位为 H/m.

- 顺磁质和抗磁质的 $\mu_{\rm r} \approx 1$.
- 。 铁磁质的 $\mu_{\rm r}\gg 1$ 且非常数.

3.3.5 磁化强度与电流的计算

• 磁化强度和磁化电流的计算

$$egin{aligned} & oldsymbol{M} = \chi_{
m m} oldsymbol{H} = (\mu_{
m r} - 1) oldsymbol{H} = rac{\mu_{
m r} - 1}{\mu} oldsymbol{B}. \ & oldsymbol{J}_{
m m} = oldsymbol{
abla} imes oldsymbol{M} = rac{\mu_{
m r} - 1}{\mu_{
m r}} oldsymbol{J} + oldsymbol{
abla} rac{\mu_{
m r} - 1}{\mu} imes oldsymbol{B}. \ & oldsymbol{O}_{
m sm} = oldsymbol{M} imes oldsymbol{e}_{
m n} = rac{\mu_{
m r} - 1}{\mu} oldsymbol{B} imes oldsymbol{e}_{
m n}. \end{aligned}$$

• 对于线性各向同性介质

$$egin{aligned} &oldsymbol{\sigma} oldsymbol{J}_{
m m} = rac{\mu_{
m r}-1}{\mu_{
m r}} oldsymbol{J}. \ &oldsymbol{\nabla} oldsymbol{\cdot} oldsymbol{M} = -oldsymbol{
abla} oldsymbol{\cdot} oldsymbol{H} = 0. \end{aligned}$$

• 媒质的本构方程

$$\circ$$
 $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$.

$$\circ \ m{J}_c = \sigma m{E}$$
.

$$\bullet$$
 $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$.

3.4 恒定磁场的边界条件

3.4.1 磁感应强度边界条件

•
$$n \cdot (B_1 - B_2) = 0.$$

•
$$B_{1n} = B_{2n} = \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$$
.

• 若理想导体内部没有电磁场也没有电流,则 $B_n=0$.

3.4.2 磁场强度的边界条件

•
$$\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) = \boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}$$
.

•
$$H_{1t} - H_{2t} = \frac{B_{1t}}{\mu_1} - \frac{B_{2t}}{\mu_2} = J_s$$
.

- 若媒质 2 为导体,则 $H_{\rm t}=J_{\rm s}$.
- 若导体表面有自由面电流,则将产生切向磁场强度分量.

3.4.3 电位函数的边界条件

• 矢量磁位

$$\bullet \ \, {m A}_1 = {m A}_2.$$

$$ullet \ oldsymbol{n} imes \left(rac{oldsymbol{
abla} imes oldsymbol{A}_1}{\mu_1} - rac{oldsymbol{
abla} imes oldsymbol{A}_2}{\mu_2}
ight) = oldsymbol{J}_{ ext{s}}.$$

• 标量磁位

$$\circ \ \phi_{\mathrm{m}1} = \phi_{\mathrm{m}2}.$$

$$\circ \ \mu_1 rac{\partial \phi_{\mathrm{m}1}}{\partial n} = \mu_2 rac{\partial \phi_{\mathrm{m}2}}{\partial n}.$$

3.4.4 分界面上的磁场方向

• 若 $J_s = 0$,则

$$\circ \ \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

$$\circ \ \frac{B_1}{B_2} = \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1}.$$

• 铁磁质的 $\mu\gg 1$,因此空气中的磁场近似垂直于纯铁表面.

3.4.5 电流密度的计算方法

• 自由电流

○ 自由电流体密度: $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H}$.

 \circ 自由电流面密度: $\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}} = \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2)$.

• 磁化电流

○ 磁化体电流密度: $J_{\text{m}} = \nabla \times M$.

 \circ 磁化面电流密度: $\boldsymbol{J}_{\mathrm{sm}} = \boldsymbol{M}_1 \times \boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{M}_2 \times \boldsymbol{n}_2$.

3.5 无源磁场的标量磁位

3.5.1 标量磁位与磁压定义

• 对于无源区域 J=0,

○ 矢量磁位: $\nabla^2 \mathbf{A} = -\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}$.

 $◦ 标量磁位: oldsymbol{H} \equiv -oldsymbol{
abla} \phi_{\mathrm{m}}.$

。 标量磁位 ϕ_{m} 的单位为安培.

。 磁压: $U_{
m mAB} = \int_A^B m{H} \cdot {
m d}m{l} = \phi_{
m mA} - \phi_{
m mB}.$

• 多值性

。 标量磁位与磁压都具有多值性.

。 产生原因: $\oint_C oldsymbol{H} \cdot \mathrm{d} oldsymbol{l} = I
eq 0.$

○ 消除方法: 规定积分路径不穿过电流回路围成的区域(磁障碍面).

3.5.2 拉氏方程与泊松方程

•
$$0 = \nabla \cdot \boldsymbol{B} = \mu_0 \nabla \cdot (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) \Rightarrow \nabla \cdot \boldsymbol{H} = -\nabla \cdot \boldsymbol{M}$$
.

• 均匀磁化:
$$\nabla^2 \phi_{\mathrm{m}} = - \nabla \cdot \boldsymbol{H} = - \nabla \cdot \frac{\boldsymbol{B}}{\mu} = 0.$$

• 非均匀磁化:
$$\mathbf{\nabla}^2 \phi_{\mathrm{m}} = \mathbf{\nabla} \cdot \mathbf{M} \equiv -\rho_{\mathrm{m}}.$$

3.5.3 磁荷密度与边界条件

- 磁荷密度
 - \circ 磁荷体密度 $ho_{
 m m} = -oldsymbol{
 abla} oldsymbol{\cdot} oldsymbol{M}$.
 - \circ 磁荷面密度 $\rho_{\rm sm} = \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{n}$.
- 磁场强度的边界条件

$$\circ \ m{n} \cdot (m{H}_1 - m{H}_2) =
ho_{
m sm}.$$

$$\circ \ \ H_{1n} - H_{2n} =
ho_{
m sm}.$$

3.5.4 电位函数的边界条件

• 矢量磁位的边界条件

$$\bullet \ A_1 = A_2.$$

$$ullet \ oldsymbol{n} imes \left(rac{oldsymbol{
abla} imes oldsymbol{A}_1}{\mu_1} - rac{oldsymbol{
abla} imes oldsymbol{A}_2}{\mu_2}
ight) = oldsymbol{J}_{ ext{s}}.$$

• 标量磁位的边界条件

$$\circ \ \phi_{\mathrm{m}1} = \phi_{\mathrm{m}2}.$$

3.5.5 磁感应强度计算方法

• 利用标量磁位

$$oldsymbol{\circ} \
ho_{\mathrm{m}} = -oldsymbol{
abla} oldsymbol{\cdot} oldsymbol{M},
ho_{\mathrm{sm}} = oldsymbol{M} oldsymbol{\cdot} oldsymbol{n}.$$

$$\circ ~~\phi_{\mathrm{m}} = \int_{V'} rac{
ho_{\mathrm{m}}}{4\pi R} \, \mathrm{d}V' + \int_{S} rac{
ho_{\mathrm{sm}}}{4\pi R} \, \mathrm{d}S'.$$

$$\circ \ \boldsymbol{H} = -\boldsymbol{\nabla}\phi_{\mathrm{m}}, \boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}).$$

• 利用矢量磁位

$$oldsymbol{\circ} ~~ oldsymbol{J}_{\mathrm{m}} = oldsymbol{
abla} imes oldsymbol{M}, oldsymbol{J}_{\mathrm{sm}} = oldsymbol{M} imes oldsymbol{n}.$$

$$ullet \; \; oldsymbol{B} = rac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} rac{oldsymbol{J}_{\mathrm{m}} imes oldsymbol{a}_R}{R^2} \, \mathrm{d}V' + rac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} rac{oldsymbol{J}_{\mathrm{s}} imes oldsymbol{a}_R}{R^2} \, \mathrm{d}S'.$$

$$ho \ oldsymbol{H} = rac{oldsymbol{B}}{\mu_0} - oldsymbol{M}.$$

3.6 恒定磁场的其它问题

3.6.1 自电感与互电感

- 自电感 L.
 - 。 磁通: $\Phi = \int_S m{B} \cdot \mathrm{d} m{S}$.
 - 磁链: Ψ = nΦ.
 - 。 自感: $L = \frac{\Psi}{I}$.
- 互电感 M.
 - 互磁链: Ψ₁₂.
 - $\circ \ M_{12} = rac{\Psi_{12}}{I_2}.$
 - $M_{12} = M_{21} = M.$
- 自感大于零,互感可正可负.

3.6.2 内自感与外自感

- 磁链: $\Psi = n\Phi = \Psi_{\rm i} + \Psi_{\rm o}$.
 - \circ 内磁链: Ψ_{i} 为与部分电流交链的磁链.
 - \circ 外磁链: Ψ_{o} 为与全部电流交链的磁链.
- 电感: $L=rac{\Psi}{I}=L_{
 m i}+L_{
 m o}.$
 - 。 内自感: $L_{
 m i}=rac{\psi_{
 m i}}{I}.$
 - 。 外自感: $L_{
 m o}=rac{\psi_{
 m o}}{I}.$
- 长直导体的内自感
 - \circ 注意 $m{B}$ 和 $m{S}$ 的方向. $B_{\mathrm{i}}=rac{\mu_0}{2\pi r}rac{r^2I}{a^2}=rac{\mu_0Ir}{2\pi a^2},$

$$ullet \ L_{
m i} = rac{\Psi}{I} \int_0^a rac{r^2}{a^2} m{B}_{
m i} \cdot {
m d}m{S} = rac{1}{I} \int_0^a rac{r^2}{a^2} rac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} l \, {
m d}r = rac{\mu_0 l}{8\pi}.$$

3.6.3 自感与互感计算

- 互感
 - \circ 矢量磁位: $oldsymbol{A}_{21}=rac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l_1}rac{I_1\,\mathrm{d}oldsymbol{l}_1}{R}.$
 - 。 磁通: $\Phi_{21} = \int_S m{B} \cdot \mathrm{d}m{S} = \oint_{l_2} m{A}_{21} \cdot \mathrm{d}m{l}_2.$
 - \circ 诺依曼公式: $M=rac{N_1N_2\mu_0}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}rac{\mathrm{d}m{l}_2\cdot\mathrm{d}m{l}_1}{R}.$
- 自感
 - 。 外自感: $L_{\mathrm{o}}=rac{N^{2}\mu_{0}}{4\pi}\oint_{l_{1}}\oint_{l_{2}}rac{\mathrm{d}m{l}_{2}\cdot\mathrm{d}m{l}_{1}}{R}.$

。 内自感: $L_{\rm i}=rac{\mu_0 l}{8\pi}$.

 \circ 自电感: $L=L_{\mathrm{i}}+L_{\mathrm{o}}$.

3.6.4 能量与能量密度

• n 回路电流系统

$$\circ \ \ W_{
m m} = rac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \Psi_i = rac{1}{2} \sum_{i,j} M_{ij} I_i I_j.$$

$$ullet W_{
m m} = rac{1}{2} \sum_{i=1}^n L_i I_i^2 + rac{1}{2} \sum_{i
eq j} M_{ij} I_i I_j.$$

• 两个回路

o 互感系数: $M \leq \sqrt{L_1 L_2}$.

。 耦合系数:
$$k=\dfrac{M}{\sqrt{L_1L_2}}$$

• 磁场能量

$$oldsymbol{\omega}_{\mathrm{m}}=rac{1}{2}oldsymbol{B}\cdotoldsymbol{H}=rac{1}{2}\mu H^2=rac{B^2}{2\mu}.$$

$$ullet W_{
m m} = rac{1}{2} \int_V oldsymbol{H} oldsymbol{\cdot} oldsymbol{B} \, \mathrm{d}V.$$

3.6.5 磁场力虚位移法

对于复杂系统,利用 $\mathrm{d}W=\mathrm{d}W_\mathrm{m}+F_g\,\mathrm{d}g.$

• 若回路电流不变

$$\circ \ \mathrm{d} W = \sum_{k=1}^N I_k \, \mathrm{d} \Psi_k.$$

$$\circ \ \mathrm{d}W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} I_k \, \mathrm{d}\Psi_k.$$

$$ullet \ F_g = \left. rac{\partial W_{
m m}}{\partial g}
ight|_{I_{
m b} = 2 \%}.$$

• 若回路磁链不变

$$\circ dW = 0.$$

$$\circ \ \ F_g = -\frac{\partial W_{\mathrm{m}}}{\partial g}\bigg|_{\Psi_k = \mathring{\mathrm{m}} \mathring{\mathrm{m}}}.$$