

无需语言的证明 1

毕达哥拉斯定理: $c \cdot c' = a \cdot a' + b \cdot b'$

滚圆面积

用工具三等分角

无限步三等分角

三等分线段 (相似)

维维安尼定理: 等边三角形内任意一点到三遍垂直距离直和等于三角形的高.

射影定理另证

圆的交弦与与切线长相等

$$\begin{aligned} &(a+b+c)^2 + (a+b-c)^2 + (a-b+c)^2 + (a-b-c)^2 \\ &= (2a)^2 + (2b)^2 + (2c)^2 \\ &(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ad+bc)^2 + (bd-ac)^2 \end{aligned}$$

四棱台体积

$$V = \frac{h}{b-a} \cdot \frac{1}{3}(b^3 - a^3) = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$$

"卡瓦列里原理"计算半球体积

正余弦定理的另证.

摩尔魏特方程

$$\begin{aligned} &(a-b) \cos \frac{\gamma}{2} = c \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \\ &\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3 = \pi \end{aligned}$$

纳皮尔不等式

$$0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{1}{a}$$

斐波那契数列

$$\begin{aligned} &F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1} \\ &1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1) \\ &1 + 9 + \cdots + 9^n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (1 + 3 + \cdots + 3^n) \end{aligned}$$

加布里瓦尔的阶梯

三角数的倒数级数

$$\sin(2n+1)\theta=\sin\theta+2\sin\theta\sum_{k=1}^n\cos2k\theta$$

$$\arctan\frac{1}{n^2+n+1}=\arctan(n+1)-\arctan n$$

$$-\lambda^n\left|AB-\lambda E\right|=\left|\begin{pmatrix}A&AB-\lambda E\\ \lambda E&O\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}A&E\\ \lambda E&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E&B\\ O&-\lambda I\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{matrix}A&E\\ \lambda E&B\end{matrix}\right|(-\lambda)^n$$

$$-\lambda^n\left|BA-\lambda E\right|=\left|\begin{pmatrix}O&\lambda E\\ BA-\lambda E&\lambda B\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}A&E\\ \lambda E&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-E&O\\ A&\lambda I\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{matrix}A&E\\ \lambda E&B\end{matrix}\right|(-\lambda)^n$$

$$\left|AB-\lambda E\right|=\left|BA-\lambda E\right|$$

毕达哥拉斯三元组

Calissons 问题