第三章作业

3.1

1. $\omega = 100\ \mathrm{rad/s}, T = \dfrac{\pi}{50}\ \mathrm{s}.$
2. $\omega = \dfrac{\pi}{2}\ \mathrm{rad/s}, T = 4\ \mathrm{s}.$
3. $\omega = 2\ \mathrm{rad/s}, T = \pi\ \mathrm{s}.$
4. $\omega = \pi\ \mathrm{rad/s}, T = 2\ \mathrm{s}.$
5. $\omega = \dfrac{\pi}{4}\ \mathrm{rad/s}, T = 8\ \mathrm{s}.$
6. $\omega = \dfrac{\pi}{30}\ \mathrm{rad/s}, T = 60\ \mathrm{s}.$

注　展开为三角级数后, 基波频率即所有角频率的最大公约数, 基波周期即所有周期的最小公倍数.

3.2

1. 周期矩形脉冲
    1. 三角形式
        1. $a_0 = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{-2}^{2} f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}.$
        2. $a_n = \dfrac{2}{4}\displaystyle\int_{-2}^{2} f(t)\cos\left(\dfrac{n\pi t}{2}\right)\mathrm{d}t = \mathrm{Sa}\left(\dfrac{n\pi}{2}\right).$
        3. $b_n = \dfrac{2}{4}\displaystyle\int_{-2}^{2} f(t)\sin\left(\dfrac{n\pi t}{2}\right)\mathrm{d}t = 0.$
    2. 指数形式 $F_n = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{-2}^{2} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\mathrm{Sa}\left(\dfrac{n\pi}{2}\right).$
2. 周期半正弦波

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{0}^{1}\sin(\pi t)\,\mathrm{d}t = \left.\frac{-\cos(\pi t)}{2\pi}\right|_0^1 = \frac{1}{\pi},\\
a_n &= \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\cos(n\pi t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sin(\pi t)\cos(n\pi t)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 \frac{\sin((n+1)\pi t) - \sin((n-1)\pi t)}{2}\,\mathrm{d}t\\
&= \left.\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\cos((n-1)\pi t)}{n-1} - \frac{\cos((n+1)\pi t)}{n+1}\right)\right|_0^1\\
&= \frac{1+\cos(n\pi)}{\pi(1-n^2)},\\
b_n &= \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\sin(n\pi t)\,\mathrm{d}t = \frac{\sin n\pi}{\pi(1-n^2)},\\
F_n &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 \sin(\pi t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\pi t}\,\mathrm{d}t\\
&= \left.\frac{-\mathrm{j}n\pi\sin(\pi t) - \pi\cos(\pi t)}{2\pi^2(1-n^2)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}\right|_0^1 = \frac{1+(-1)^n}{\pi(1-n^2)}.
\end{aligned}
$$

3.3 不想做, 以后再说.

1. 三角形式
    1. $a_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0}\frac{-2Et}{T}\,\mathrm{d}t+\frac{1}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}}\frac{2Et}{T}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$.
    2. $a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0}\frac{-2Et}{T}\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)\mathrm{d}t+\frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}}\frac{2Et}{T}\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)\mathrm{d}t=\frac{2E\left[(-1)^n-1\right]}{n^2\pi^2}$
    .
    3. $b_n=0$.
2. 指数形式
    1. $F_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$. (不用展开计算积分)
    2. $$F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{0}\frac{-2Et}{T}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}\,\mathrm{d}t+\frac{1}{T}\int$$
    3.
    4. $F_n=\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}$.

3.4 略.

3.5 ☆

1. $f(t)=f(-t)$, 故只有余弦分量, 且直流分量为零.

   $f(t)=-f\left(t+\frac{T}{2}\right)$, 故只有奇次谐波.

   所有只含有奇次谐波的余弦分量. (基波?)
2. 只含有奇次谐波的正弦分量. (基波?)
3. 只含有奇次谐波.
4. 只含有正弦分量.
5. 只含有直流与偶次谐波的余弦分量.
6. 只含有直流与偶次谐波的正弦分量.

3.6

0. $v_i(t)$ 的傅里叶展开
    1. $a_0=\frac{1}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}}\frac{2E}{T}t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}$.
    2. $a_n=\frac{2((-1)^n-1)}{n^2\pi^2}$.
    3. $b_n=-\frac{2(-1)^n}{n\pi}$.
1. 稳态时电容两端电压

    1. 直流分量即 $a_0 = \dfrac{1}{4}$ V.
    2. 信号的基波为 $\dfrac{-4}{\pi^2}\cos 2\pi 10^3 t + \dfrac{2}{\pi}\sin 2\pi 10^3 t$,

       幅度为 0.754679 V, 电容电压幅度为 0.639017 V.
    3. 信号的五次谐波为 $\dfrac{-4}{25\pi^2}\cos 10\pi 10^3 t + \dfrac{2}{5\pi}\sin 10\pi 10^3 t$,

       幅度为 0.128352 V, 电容电压幅度为 0.0389310 V.
2. 电容电压与信号电压相应分量的比值
    1. 直流分量: 1.
    2. 基波分量: 0.8467.
    3. 五次谐波: 0.3033.
3. 因此该电路构成低通滤波器, 滤去信号中的高频分量.

注 标答第一问错了吧...

```
f[t_] := Which[
    t < 0, 0,
    True, t / 500
] (* [-T/2, T/2] 的信号, 我们不关心其它处的取值 *)

Subscript[a, 5] = FourierCosCoefficient[
    f[t], t, 5,
    FourierParameters -> {1, 2 Pi / 1000}
] (* 信号的五次谐波余弦系数 *)

Subscript[b, 5] = FourierSinCoefficient[
    f[t], t, 5,
    FourierParameters -> {1, 2 Pi / 1000}
] (* 信号的五次谐波正弦系数 *)

Subscript[u, C, 5] = N[
    Sqrt[Subscript[a, 5]^2 + Subscript[b, 5]^2]
    10^4/(10 Pi) / Sqrt[10^6 + (10^4/(10 Pi))^2]
] (* 电容电压的五次谐波幅度 *)
```

3.7

1. 思路一 (由定义) $\mathcal{F}[f_1(t)](\omega) = \displaystyle\int_0^{\tau} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}}{\mathrm{j}\omega}$.

   思路二 (由性质) $\mathcal{F}[f_1(t)](\omega) = \tau\,\mathrm{Sa}\left(\dfrac{\omega\tau}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega\tau}{2}}$.

   这两个结果是一样的.
2. 思路一 (由定义) $\mathcal{F}f_2(t) = \displaystyle\int_0^{\tau} \frac{t}{\tau}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}-1}{\omega^2\tau} + \frac{\mathrm{j}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}}{\omega}$.

   思路二 (由性质) $\mathcal{F}f_2(t) = \mathcal{F}\dfrac{f_1^{(-1)}(t)}{\tau} - \mathcal{F}u(t-\tau) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}-1}{\omega^2\tau} + \dfrac{\mathrm{j}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}}{\omega}$.

   评价是不如用定义.

3. $\mathcal{F} f_3(t) = \int_{-1}^{1} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} \, \mathrm{d}t = \frac{\pi \cos \omega}{\frac{\pi^2}{4} - \omega^2}$.
4. $\mathcal{F} f_4(t) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(\omega_0 t) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} \, \mathrm{d}t = \frac{\frac{4\pi\mathrm{j}}{T} \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\omega^2 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}$.

3.8

1. $f(t) \leftrightarrow 4 \, \mathrm{Sa}\,(2\omega)$,
   $\omega_\mathrm{c} = \frac{\pi}{2} \ \mathrm{rad}/\mu\mathrm{s}.$
   $B = f_\mathrm{c} = \frac{\omega_\mathrm{c}}{2\pi} = \frac{1}{4} \ \mathrm{MHz}.$
2. $f(t) \leftrightarrow 10 \, \mathrm{Sa}\,(10\omega) - 2 \, \mathrm{Sa}\,(\omega)$,
   $B = \frac{1}{10}$ MHz, 哦不对, 应该是 0.0414 MHz 左右.
3. $f(t) = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4} t}{2}$,
   $B = \frac{1}{8} \ \mathrm{MHz}.$
4. $f(t) \leftrightarrow \frac{2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega} (1 - \cos \omega)}{\omega^2}$.
   $B = \frac{1}{2} \ \mathrm{MHz}.$
5.

注

- 对于矩形信号的叠加, 带宽即时域 t_m 的两倍.
- 是答案错了, 还是我算错了?

3.9

1. $\tau \, \mathrm{Sa}\left(\frac{\tau\omega}{2}\right) \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{j}\omega\tau}{2}} - \tau \, \mathrm{Sa}\left(\frac{\tau\omega}{2}\right) \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{j}\omega\tau}{2}} = 2\mathrm{j}\tau \, \mathrm{Sa}\left(\frac{\tau\omega}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = \frac{4\mathrm{j}}{\omega} \sin^2 \frac{\omega\tau}{2}$.
2. $6 \, \mathrm{Sa}\,(3\omega) + 2 \, \mathrm{Sa}\,(\omega) = \frac{8 \sin \omega \cos^2 \omega}{\omega}$.
3. $f_2(t) = \frac{2}{\tau} f_1^{(-1)}(t) \leftrightarrow \frac{8}{\omega^2} \sin^2 \frac{\omega\tau}{2}$.
4. $\int_{-2\tau}^{2\tau} \frac{t}{2\tau} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} \, \mathrm{d}t = \frac{2\mathrm{j} \cos 2\omega\tau}{\omega} - \frac{\mathrm{j} \sin 2\omega\tau}{\omega^2 \tau}$. (评价是不如直接用定义).
5. $f_5(t) = \sin(6\pi t) G_2(t) \leftrightarrow \mathrm{j}\left[\mathrm{Sa}\,(\omega + 6\pi) - \mathrm{Sa}\,(\omega - 6\pi)\right] = \frac{12\mathrm{j}\pi \sin \omega}{(6\pi)^2 - \omega^2}$.
6. $f_6(t) = \cos(10\pi t) f_\triangle(t) \leftrightarrow \frac{1}{2} \mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega + 10\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} \mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega - 10\pi}{2}\right)$.

注

- 答案中将 τ 写成了 T.

- 注意从 时域乘积 -> 频域卷积, 需要**除以 2π**.

3.10

1. 思路一: 由冲激函数的性质, $f(t)=\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}}\delta(t-2)\leftrightarrow\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}(\omega+1)}$.

   思路二: 由 $\delta(t)\leftrightarrow 1$ 先时移后频移, 得到 $f(t)\leftrightarrow\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}(\omega+1)}$.
2. 思路一: 由 $\delta'(t)\leftrightarrow\mathrm{j}\omega$ 先频移后时移, 得到 $f(t)\leftrightarrow(\mathrm{j}\omega+3)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}$.

   思路二: 由冲激函数性质, $f(t)=\delta'(t-1)+3\delta(t-1)\leftrightarrow(\mathrm{j}\omega+3)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}$.
3. $f(t)=1-2G_6(t)\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)-12\,\mathrm{Sa}(3\omega)=2\pi\delta(\omega)-\dfrac{4\sin 3\omega}{\omega}$.
4. 由 $\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{\alpha+\mathrm{j}\omega}$ 时移, 得到 $f(t)\leftrightarrow\mathrm{e}^2\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}}{2+\mathrm{j}\omega}=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega+2}}{2+\mathrm{j}\omega}$.
5. 由 $u(t)=\delta^{(-1)}(t)=\pi\delta(\omega)+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}$ 得到 $f(t)=u(t-2)\leftrightarrow\pi\delta(\omega)\dfrac{\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\omega}}{\mathrm{j}\omega}$.

3.11

由尺度性质与时移性质, 得到 $f_2(t)=f_1(t_0-t)\leftrightarrow F_1(-\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$.

3.12

1. 由 $\delta(t+\omega_0)\leftrightarrow\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}$, 得 $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}}{2\pi}\leftrightarrow\delta(-t+\omega_0)=\delta(t-\omega_0)$.
2. 由 $G_{2\omega_0}(t)\leftrightarrow 2\omega_0\,\mathrm{Sa}\left(\omega_0\omega\right)$, 得 $\dfrac{\omega_0}{\pi}\mathrm{Sa}(\omega_0 t)\leftrightarrow G_{2\omega_0}(t)$.
3. 由上一题, $\left(\dfrac{\omega_0}{\pi}\right)^2\mathrm{Sa}(\omega_0 t)\leftrightarrow\dfrac{\omega_0}{\pi}G_{2\omega_0}(t)$.

3.13

1. $f_1\left(t-\dfrac{\tau}{2}\right)=T_{\frac{\tau}{2}}\left(t-\dfrac{\tau}{2}\right)\leftrightarrow\dfrac{E\tau}{2}\mathrm{Sa}^2\left(\dfrac{\omega\tau}{4}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{2}}$,
2. $\cos(\omega_0 t)=\dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}}{2}\leftrightarrow\pi\left[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\right]$,
3. $f_2(t)\leftrightarrow\dfrac{E\tau}{4}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{2}}\left[\mathrm{Sa}^2\left(\dfrac{(\omega-\omega_0)\tau}{4}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0\frac{\tau}{2}}+\mathrm{Sa}^2\left(\dfrac{(\omega+\omega)\tau}{4}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0\frac{\tau}{2}}\right]$.

备注

- 门函数 $G_\tau(t):=u\left(t+\dfrac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\dfrac{\tau}{2}\right)$, 在 $\left(-\dfrac{\tau}{2},\dfrac{\tau}{2}\right)$ 非零.
- 三角波 $T_\tau(t):=\left(1-\left|\dfrac{t}{\tau}\right|\right)G_{2\tau}(t)$, 在 $(-\tau,\tau)$ 非零.
- 之所以将三角波定义在该区间, 而不是 $\left(-\dfrac{\tau}{2},\dfrac{\tau}{2}\right)$,

  是因为在卷积上形式简洁, 在傅里叶变换上形式统一:
  1. $T_\tau(t)=G_\tau(t)*G_\tau(t)$.
  2. $G_\tau(t)\leftrightarrow\tau\,\mathrm{Sa}\left(\dfrac{\tau\omega}{2}\right)$, $\mathrm{Sa}(\omega_0 t)\leftrightarrow\dfrac{\pi}{\omega_0}G_{2\omega_0}(\omega)$.
  3. $T_\tau(t)\leftrightarrow\tau\,\mathrm{Sa}^2\left(\dfrac{\tau\omega}{2}\right)$, $\mathrm{Sa}^2\left(\omega_0 t\right)\leftrightarrow\dfrac{\pi}{\omega_0}T_{2\omega_0}(\omega)$.

- 附门函数与三角波及其傅里叶变换的 Mathematica 绘图代码:

```
Plot[
    {HeavisidePi[t], HeavisideLambda[t]}, {t, -1, 1},
    GridLines -> Automatic,
    PlotLegends -> LineLegend["Expressions"]
] (* 门函数与三角波 *)
Plot[
    {FourierTransform[
        HeavisidePi[t], t, \[Omega],
        FourierParameters -> {1, -1}
    ], FourierTransform[
        HeavisideLambda[t], t, \[Omega],
        FourierParameters -> {1, -1}
    ]}, {\[Omega], -10 Pi, 10 Pi},
    PlotRange -> All,
    PlotLegends -> LineLegend[{
        "\[ScriptCapitalF][\!\(\*SubscriptBox[\(G\), \
        \(\[Tau]\)]\)(t)](\[Omega])",
        "\[ScriptCapitalF][\!\(\*SubscriptBox[\(T\), \
        \(\[Tau]\)]\)(t)](\[Omega])"
    }]
] (* 傅里叶变换 *)
```

3.14

0. $f(t) = 2T_2(t-1) \leftrightarrow 4\,\mathrm{Sa}^2\,(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}$.
1. $\varphi(\omega) = -\omega$.
2. $F(0) = 4$.
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\,\mathrm{d}\omega = 2\pi f(0) = 2\pi$.
4. 思路一: 由奇偶性质, 傅里叶变换的实部只含偶分量, 故为 $\mathrm{Re}\,F(\omega) = \dfrac{f(t)+f(-t)}{2}$.

   思路二: $F(\omega) = 4\,\mathrm{Sa}^2(2\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega} \leftrightarrow T_2(t+1) + T_2(t-1)$.

注

- 附绘图代码:

```
f[t_] := 2 HeavisideLambda[(t - 1) / 2]

Plot[
    (f[t] + f[-t])/2, {t, -2, 2},
    GridLines -> Automatic
] (* f(t) 的偶分量 *)

Plot[
    InverseFourierTransform[
        Real[FourierTransform[
            f[t], t, \[Omega],
            FourierParameters -> {1, -1}
        ]], \[Omega], t,
        FourierParameters -> {1, -1}
```

```
    ], {t, -2, 2},
    GridLines -> Automatic
] (* 第四问; 算了这样计算量有点大, 直接绘 f[t+1] 吧 *)
```

3.15

1. 思路一: 由微分性质, $tf(2t) \leftrightarrow \frac{\mathrm{j}}{4}F'\left(\frac{\omega}{4}\right)$.

   思路二: 也可以使用频域卷积,

   - 由冲激函数高阶导数的抽样性质, $\delta^{(n)}(t) \leftrightarrow (\mathrm{j}\omega)^n$,
   - 由对称性质, $t^n \leftrightarrow 2\pi\mathrm{j}^2\delta^{(n)}(\omega)$,
   - 由频域卷积, $tf(2t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\mathrm{j}\delta'(\omega) * \frac{1}{2}F\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\mathrm{j}}{4}F'\left(\frac{\omega}{4}\right)$.
2. 类似第一问, $(t-2)f(t) \leftrightarrow \mathrm{j}F'(\omega) - 2F(\omega)$.
3. 由尺度性质, $(t-2)f(-2t) \leftrightarrow -\frac{\mathrm{j}}{4}F'\left(-\frac{\omega}{2}\right) - F\left(-\frac{\omega}{2}\right)$.
4. 由微分性质
   1. 时域微分: $f'(t) \leftrightarrow \mathrm{j}\omega F(\omega)$.
   2. 频域微分: $tf'(t) \leftrightarrow -F(\omega) - \omega F'(\omega)$.
5. 由尺度性质与时移性质, $f(1-t) \leftrightarrow F(-\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}$.
6. 由前两问与第五问思路,
   1. 频域微分: $tf(t) \leftrightarrow \mathrm{j}F'(\omega)$.
   2. 尺度与时移: $(1-t)f(1-t) \leftrightarrow \mathrm{j}F'(-\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}$.
7. 由尺度性质与时移性质, $f(2t-5) \leftrightarrow \frac{1}{2}F\left(\frac{\omega}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{5}{2}\omega}$.

注

- 标答第二问复制错了.
- 其它结果与标答一致, 注意到 $\frac{\mathrm{d}F(a\omega)}{\mathrm{d}\omega} = aF'(a\omega)$.

3.16 ⭐

1. 已知 $\mathrm{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{\mathrm{j}\omega}$ (可由类似第四问的方式得到)

   以及 $1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$ (可由对称性质得到),

   于是 $u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{\mathrm{j}\omega}$.
2. 由定义, $G_\tau(t) \leftrightarrow \tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\tau\omega}{2}\right)$,

   由时移性质, $G_\tau\left(t-\frac{\tau}{2}\right) \leftrightarrow \frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\tau\omega}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{\tau}{2}} = \frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}}{\mathrm{j}\omega}$,

   ---

   ~~考虑第三项, 记~~ $F_2(\omega) = \lim_{\tau\to\infty}\frac{-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}}{\mathrm{j}\omega} = \begin{cases}0, & \omega \neq 0,\\ \infty, & \omega = 0.\end{cases}$

   ~~如果我们能求出~~ $\int_{-\infty}^{+\infty} F_2(\omega)\,\mathrm{d}\omega$~~, 并且值为~~ $\cancel{\pi}$~~;~~

~~那么我们就可以得到~~ $u(t)=\lim\limits_{\tau\to\infty} G_\tau\left(t-\dfrac{\tau}{2}\right) \leftrightarrow \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)$~~;~~

~~一种思路是直接换元, 上式~~ $=\displaystyle\int_{+\mathrm{j}\infty}^{-\mathrm{j}\infty} \mathrm{j}\frac{\mathrm{e}^z}{z}\,\mathrm{d}z$~~, 与~~ τ ~~无关,~~

~~但是该积分发散 (不定积分也不可由初等函数表示).~~

~~另一种思路是由~~ $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F_2(\omega)\,\mathrm{d}\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\omega$~~, 同样可以消去~~ τ~~,~~

~~但是该积分同样发散.~~

~~好, 这个路子走不通, 我们另寻他路.~~

~~将原式改写为~~ $G_\tau\left(t-\dfrac{\tau}{2}\right)=\dfrac{1-\cos\omega\tau+\mathrm{j}\sin\omega\tau}{\mathrm{j}\omega}$~~, 记~~

太乐了, 看仔细点, 这个式子取极限后对于任意非零 ω 都是发散的. 算个锤子.

3. 由 $\delta(t)\leftrightarrow 1$ 与时域积分, 有 $u(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)$.
4. 由 $\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{\alpha+\mathrm{j}\omega}=\dfrac{\alpha-\mathrm{j}\omega}{\alpha^2+\omega^2}$,
   1. 思路一:
      1. $\lim\limits_{\alpha\to0_+}\dfrac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}=\begin{cases}0, & \omega\neq0,\\ \infty, & \omega=0\end{cases}$

         $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\,\mathrm{d}\omega=\pi.$

         于是由冲激函数定义, $\lim\limits_{\alpha\to0_+}\dfrac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}=\pi\delta(\omega)$.
      2. $\lim\limits_{\alpha\to0_+}\dfrac{-\mathrm{j}\omega}{\alpha^2+\omega^2}=\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}$.
      3. 于是 $u(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega)$.
   2. 思路二: $u(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\mathrm{j}\alpha)t}\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)\leftrightarrow\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}$.

注

做题前记:

我不喜欢增加参数后计算傅里叶变换, 然后取极限的方法.

不是说技巧性强, 它的技巧很明确, 一般是这两个路子:

1. 通过乘上诸如 $\mathrm{e}^{-\alpha t}$ 的函数, 将不满足绝对可积的函数变为绝对可积. 这与拉普拉斯变换的引入是类似的.
2. 通过乘上诸如 $\mathrm{e}^{-\alpha g(t)}$ 的函数, 对 α 求导后消去信号 $f(t)$ 分母中的 $g(t)$, 从而便于求解积分. 最后对 α 积分即可.

问题是我认为一些情况下, 这样做并不严谨. 比如利用单边指数函数取极限, 我们需要证明含参反常积分一致收敛之后, 才能交换极限与积分的运算次序. 而这实际上是做不到的 (在普通的高等数学的意义下).

诸如冲激函数, 它们本身并不是数学分析中允许存在的函数; 它们在泛函分析中通过广义函数以积分的形式定义. 对于符号函数、直流函数、阶跃函数等, 我们完全可以绕开 (或者说间接地使用) 傅里叶变换中的柯西主值积分, 而只使用冲激函数与傅里叶变换的性质, 去求解它们的傅里叶变换.

这样做不仅有可能 (这么说是因为我没有学过泛函分析与广义函数论) 更加严谨, 而且在推导上更加简便, 即使记不住结论, 也可以轻松推得, 又何乐而不为呢?

做题后记:

作者有使用第二种方法算过吗? 我表示怀疑. 思路看起来没什么问题, 但是难以实践.

第四种方法, 如果使用频移特性, 结果将会出错, 为什么?

如果说条件不适用, 什么条件不适用?

3.17

1. $\cos(\omega_0 t)u(t) \leftrightarrow \dfrac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0^2-\omega^2}+\dfrac{\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$.
2. $\sin(\omega_0 t)u(t) \leftrightarrow \dfrac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}+\dfrac{\mathrm{j}\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$.

3.18

0. $F(\omega)=T_{\omega_2-\omega_1}(\omega+\omega_0)+T_{\omega_2-\omega_1}(\omega-\omega_0)$.
1.
$$\begin{aligned} f(t)\cos(\omega_0 t) &\leftrightarrow \pi\left[F(\omega+\omega_0)+F(\omega-\omega_0)\right] \\ &= \pi\left[T_{\Delta\omega}(\omega+2\omega_0)+T_{\Delta\omega}(\omega)+T_{\Delta\omega}(\omega-2\omega_0)\right]. \end{aligned}$$
2. $f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega-\omega_0)=T_{\Delta\omega}(\omega)+T_{\Delta\omega}(\omega-2\omega_0)$.
3. 与 1 类似.

图略.

3.19

1. $\mathrm{Sa}\,(100t) \leftrightarrow \dfrac{\pi}{100}G_{200}(\omega)$,

   $\omega_\mathrm{m}=100$.

   $f_\mathrm{m}=\dfrac{2\omega_\mathrm{m}}{2\pi}=\dfrac{100}{\pi}$.

   $T_\mathrm{m}=\dfrac{1}{f_\mathrm{m}}=\dfrac{\pi}{100}$.
2. $\mathrm{Sa}^2(100t) \leftrightarrow \dfrac{\pi}{100}T_{200}(\omega)$,

   $\omega_\mathrm{m}=200$.

   $f_\mathrm{m}=\dfrac{200}{\pi}$.

   $T_\mathrm{m}=\dfrac{\pi}{200}$.
3. $f_\mathrm{m}=\dfrac{100}{\pi}, T_\mathrm{m}=\dfrac{\pi}{100}$.
4. $f_\mathrm{m}=\dfrac{120}{\pi}, T_\mathrm{m}=\dfrac{\pi}{120}$.

注 ⭐

对于时域的理想抽样, 首先傅里叶级数展开抽样脉冲信号,

$$
\begin{aligned}
p(t) = \delta_{T_s}(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_\mathrm{s}) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_s t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_\mathrm{s}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_s t} \\
&\leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{T_\mathrm{s}} \delta(\omega - n\omega_\mathrm{s}),
\end{aligned}
$$

于是抽样信号的傅里叶变换为

$$
\begin{aligned}
f_\mathrm{s}(t) = f(t)p(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t - nT_\mathrm{s}) \\
&\leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F(\omega) * P(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{F(\omega - n\omega_\mathrm{s})}{T_\mathrm{s}},
\end{aligned}
$$

记 $F(\omega)$ 仅在 $(-\omega_\mathrm{m}, \omega_\mathrm{m})$ 有限, 于是需要 $\omega_\mathrm{m} < \omega_\mathrm{s} - \omega_\mathrm{m}$, 即

1. 临界采样角频率 $\omega_\mathrm{s} = 2\omega_\mathrm{m}$ (越大越好).
2. 奈奎斯特抽样频率 $f_\mathrm{s} = \dfrac{\omega_\mathrm{s}}{2\pi} = 2f_\mathrm{m}$.
3. 奈奎斯特抽样间隔 $T_\mathrm{s} = \dfrac{2\pi}{\omega_\mathrm{s}} = \dfrac{1}{2f_\mathrm{m}}$.

一些常用信号的奈奎斯特抽样频率与间隔:

- $\mathrm{Sa}(\omega_0 t) \leftrightarrow \dfrac{\pi}{\omega_0} G_{2\omega_0}(\omega), \omega_\mathrm{m} = \omega_0, f_\mathrm{m} = \dfrac{\omega_0}{\pi}, T_\mathrm{m} = \dfrac{\pi}{\omega_0}$.
- $\mathrm{Sa}^2(\omega_0 t) \leftrightarrow \dfrac{\pi}{\omega_0} T_{2\omega_0}(\omega), \omega_\mathrm{m} = 2\omega_0, f_\mathrm{m} = \dfrac{2\omega_0}{\pi}, T_\mathrm{m} = \dfrac{\pi}{2\omega_0}$.
- $\mathrm{Sa}^n(\omega_0 t), \omega_\mathrm{m} = n\omega_0, f_\mathrm{m} = \dfrac{n\omega_0}{\pi}, T_\mathrm{m} = \dfrac{\pi}{n\omega_0}$.

3.20

1. $f(t) = T_{\tau/2}(t) \leftrightarrow \dfrac{\tau}{2} \mathrm{Sa}^2\left(\dfrac{\omega\tau}{4}\right)$,
2. 略.
3. 略.

```
Plot[
    Sum[
        Sinc[(\[Omega] - 8 n Pi)/2]^2, {n, -3, 3}
    ], {\[Omega], -16 Pi, 16 Pi}
] (* 1; 2、3 略 *)
```

3.21

1. $f(t) + f(t - t_0) \leftrightarrow F(\omega) + F(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$, 不改变函数值非零时自变量的区间, 因此仍为 ω_0.
2. $f'(t) \leftrightarrow \mathrm{j}\omega F(\omega)$, 同样仍为 ω_0.

3. $f^2(t) \leftrightarrow F(\omega) * F(\omega)$, 故为 $2\omega_0$.
4. $f(t)\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \pi\left[F(\omega+\omega_0)+F(\omega-\omega_0)\right]$, 于是为 $3\omega_0$.

注

- 奈奎斯特频率一般用 f_{s} 表示; 这里应称呼为奈奎斯特角频率.
- 注意 $\omega_{\mathrm{s}} = 2\omega_{\mathrm{m}}$, 第四题为 $3\omega_0$ 而非 $2\omega_0$.

3.22

1. $\omega_{\mathrm{s}} = 3000\pi, T_{\max} = T_{\mathrm{s}} = \dfrac{2\pi}{2\omega_{\mathrm{s}}} = \dfrac{1}{3000}$.
2. $F(\omega) = \dfrac{1}{4\pi \cdot 10^6} G_{2000\pi}(t) * G_{4000\pi}(t)$,

   周期梯形, 周期为 6000 π, 幅度为 1/2000.

注 标答中的幅度似乎有误.

3.23

1. $F(\omega) = 14\pi\left[\delta(\omega+320\pi)+\delta(\omega+240\pi)+\delta(\omega-240\pi)+\delta(\omega-320\pi)\right]$.

   $F_{\mathrm{s}}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dfrac{F(\omega - n\omega_{\mathrm{s}})}{T_{\mathrm{s}}}$.
2. $\omega_{\mathrm{m}} = 320\pi\ \mathrm{rad/s}, \mathrm{B} = \mathrm{f_c} = \dfrac{\omega_{\mathrm{c}}}{2\pi} = \dfrac{\omega_{\mathrm{m}}}{2\pi} = 160\ \mathrm{Hz}$.
3. $f_{\mathrm{s}} = \dfrac{2\omega_{\mathrm{m}}}{2\pi} = 320\ \mathrm{Hz}$.

3.24

1. $x(t)$: $T_{\mathrm{s}} = \dfrac{\pi}{\omega_{\mathrm{m}}} = \dfrac{\pi}{8}$.

   $x(2t)$: $T_{\mathrm{s}} = \dfrac{\pi}{16}$.

   $x(t/2)$: $T_{\mathrm{s}} = \dfrac{\pi}{4}$.
2. 问: 是否会发生混叠?

   答: 当采样周期小于等于奈奎斯特周期时, 不会发生混叠.

   因此 $x_{\mathrm{s}}(2t)$ 的频谱会发生混叠, $x_{\mathrm{s}}(t/2)$ 和 $x_{\mathrm{s}}(t)$ 不会发生混叠.
3. 问: 采样信号的频谱?

   答: 可以由以下代码绘制:

```
Plot[
    {
        Sum[HeavisideLambda[(\[Omega] - 16 n)/4], {n, -5, 5}],
        Sum[HeavisideLambda[(\[Omega] - 16 n)/8], {n, -5, 5}],
        Sum[HeavisideLambda[(\[Omega] - 16 n)/16]/2, {n, -5, 5}]
    }, {\[Omega], -32, 32},
    PlotLegends -> {
        "\!\(\*SubscriptBox[\(x\), \(s\)]\)(t/2)",
        "\!\(\*SubscriptBox[\(x\), \(s\)]\)(t)",
        "\!\(\*SubscriptBox[\(x\), \(2\)]\)(2t)"}
]
```

3.25

1. $G_\tau(t) \leftrightarrow \tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\tau\omega}{2}\right)$,
2. $\omega_\mathrm{m} = \frac{16\pi}{\tau}$, $f_\mathrm{s} = \frac{\omega_\mathrm{m}}{\pi} = 6.4\ \mathrm{kHz}$.

3.26

1. $\omega_\mathrm{m} = 5\pi, T_\mathrm{s} = \frac{1}{5}$, 这里认为会发生混叠.
2. 如果认为低通滤波器滤除的频率包含 $\pi/T = 5\pi$, 那么

$$y(t) = \sum_{n=0}^{4} \frac{\sin(n\pi t)}{2^n} = \sum_{n=0}^{4} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\pi t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\pi t}}{2^{n+1}\mathrm{j}}.$$

注

- 第一问中认为临界采样时, 低通滤波器无法保留临界频率的信号, 所以也会发生混叠. ⭐
- 标答中 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\pi/t}$ 改为 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\pi t}$.

3.27

1. $f_\mathrm{s} \geq 2f_1 = \frac{\omega_1}{\pi}$.
2. $X_1(\omega) = \frac{G_{2\omega_1}(\omega) + T_{\omega_1}(\omega)}{2}$,

   无需: $x_1(t) = \frac{\omega_1}{2\pi}\mathrm{Sa}(\omega_1 t) + \frac{\omega_1}{4\pi}\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega_1 t}{2}\right)$,

$$P(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{T_\mathrm{s}} \delta(\omega - n\omega_\mathrm{s}),$$

$$X_\mathrm{s}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{T_\mathrm{s}} (G_{2\omega_1}(\omega - n\omega_\mathrm{s}) + T_{\omega_1}(\omega - n\omega_\mathrm{s})).$$

3. $H_2(\omega) = \frac{1}{H_1(\omega)}$.

3.28

由 $u_2 = i_1 R_1 + i_1'' = i_2 R_2 + \int i_2\,\mathrm{d}t$ 得

$$\begin{aligned}I_s(\omega) &= \frac{\mathrm{j}\omega R_1 + \mathrm{j}^2\omega^2 + \mathrm{j}\omega T_2 + 1}{\mathrm{j}\omega R_2 + 1} I_1(\omega),\\ U_2(\omega) &= (\mathrm{j}\omega + R_1) I_1(\omega).\end{aligned}$$

当 $R_1 = R_2 = 1\,\Omega$ 时, $H(\omega) = 1$, 为无失真传输.

3.29

1. $E(\omega) = \mathrm{j}\pi(\delta(\omega+1) - \delta(\omega-1) + \delta(\omega+3) - \delta(\omega-3))$.
   $R(\omega) = \dfrac{\mathrm{j}\pi}{1-\mathrm{j}}\delta(\omega+1) - \dfrac{\mathrm{j}\pi}{1+\mathrm{j}}\delta(\omega-1) + \dfrac{\mathrm{j}\pi}{1-3\mathrm{j}}\delta(\omega-3) - \dfrac{\mathrm{j}\pi}{1+3\mathrm{j}}\delta(\omega+3)$.
   $r(t) = \dfrac{j-1}{4}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t} - \dots$
2. 略.
3. 有失真.

3.30

1. $H(\omega) = \dfrac{\mathrm{j}\omega}{(\mathrm{j}\omega)^2 + 3\mathrm{j}\omega + 2}$.
2. $H(\omega) = \dfrac{\mathrm{j}\omega + 4}{(\mathrm{j}\omega)^2 + 5\mathrm{j}\omega + 6}$.

备注　第一题标答分子应为 $\mathrm{j}\omega$.

3.31

1. $F(\omega) = \pi\left[\delta(\omega+2) + \delta(\omega-2)\right]$.
2. $Y(\omega) = \mathrm{j}\pi\delta(\omega+2) - \mathrm{j}\pi\delta(\omega-2)$.
3. $y(t) = \sin(2t)$.

3.32

1. $F(\omega) = \dfrac{1}{2\pi}\pi G_6(\omega) * \pi(\delta(\omega+5) + \delta(\omega-5)) = \dfrac{\pi}{2}[G_6(\omega+5) + G_6(\omega-5)]$.
2. $y(t) = \dfrac{\sin(2t)\sin(4t)}{t}$.

3.33

1. $F(\omega) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} 6\pi(-\mathrm{j})^n\delta(\omega-n)$.
2. $y(t) = -2\cos 2t + 4\sin t + 3$.

3.34

0. $H(\omega) = G_{2\pi}(\omega)$.
1. $F(\omega) = G_{2\pi}(\omega)$,
   $Y(\omega) = G_{2\pi}(\omega)$.

2. $f(t) = G_2(t)$,

   $F(\omega) = 2\,\mathrm{Sa}\,(\omega)$.

   $Y(\omega) = 2\,\mathrm{Sa}(\omega) G_{2\pi}(\omega)$.

```
Plot[
    {
        HeavisidePi[\[Omega]/(2 Pi)],
        2 Sinc[\[Omega]] HeavisidePi[\[Omega]/(2 Pi)]
    }, {\[Omega], -Pi, Pi},
    PlotLegends -> "Expressions"
]
```

3.35

0. $v_2(t) = [v_1(t-T) - v_1(t)] * h(t)$.

   $V_2(\omega) = V_1(\omega)\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T} - 1\right) H(\omega)$.

   $H(\omega) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0} G_2(\omega)$.

   $h(t) = \dfrac{\mathrm{Sa}(t-t_0)}{\pi}$.

1. 法一：利用卷积定理（难）

   $V_1(\omega) = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega} + \pi\delta(\omega)$,

   $V_2(\omega) = \ldots$

   法二：直接求解卷积（易）

$$\begin{aligned} v_2(t) &= \mathbb{I}\left\{0 < t < T\right\} * \frac{\mathrm{Sa}(t-t_0)}{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^T \mathrm{Sa}(t-x-t_0)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\mathrm{Si}(t-t_0-T) - \mathrm{Si}(t-t_0)}{\pi}. \end{aligned}$$

2. 法一：利用卷积定理（易）

   $V_1(\omega) = 2\pi G_1(\omega)$.

   $V_2(\omega) = 2\pi\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(T+t_0)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}\right) G_1(\omega)$.

   $v_2(t) = \mathrm{Sa}\left(\dfrac{t-t_0-T}{2}\right) - \mathrm{Sa}\left(\dfrac{t-t_0}{2}\right)$.

   法二：直接求解卷积（难）

$$\begin{aligned} v_2(t) &= \left[\mathrm{Sa}\left(\frac{t}{2} - T\right) - \mathrm{Sa}\left(\frac{t}{2}\right)\right] * \frac{\mathrm{Sa}(t-t_0)}{\pi} \\ &= \end{aligned}$$

备注 ⭐

- 两种方法都要试一试，没有哪种方法一定是最优的.
- 抽样函数的卷积为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Sa}(\omega_1 t) * \mathrm{Sa}(\omega_2 t) &= \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\pi}{\omega_1} G_{2\omega_1}(\omega) \cdot \frac{\pi}{\omega_2} G_{2\omega_2}(\omega)\right](t) \\
&= \frac{\pi^2}{\omega_1 \omega_2} \mathcal{F}^{-1}\left[G_{2\min(\omega_1,\omega_2)(\omega)}\right](t) \\
&= \frac{\pi\,\mathrm{Sa}(\min(\omega_1,\omega_2)t)}{\max(\omega_1,\omega_2)}.
\end{aligned}
$$

```
(* graph of Sa(t) and Si(t) *)
Plot[
    {Sinc[t], SinIntegral[t]},
    {t, -2 Pi, 2 Pi},
    PlotLegends -> "Expressions"
]

(* Question 1: Method 1 (failed) *)
V = (1/(I \[Omega]) + Pi DiracDelta[\[Omega]]) (E^(-I \[Omega] T) - 1) E^(-I \[Omega] Subscript[t, 0]) HeavisidePi[t/2]
InverseFourierTransform[
    V, \[Omega], t,
    FourierParameters -> {1, -1}
]

(* Question 2: Method 2 (failed; calculation aborted) *)
Convolve[Sinc[t], Sinc[t], t, x]
```

3.36

1. $F(\omega) = G_4(\omega)$.
2. 输出信号的象函数:

$$
\begin{aligned}
Y(\omega) &= \frac{1}{2\pi} F(\omega) * \mathcal{F}[\cos(4t)](\omega) + \frac{1}{2\pi} F(\omega) H(\omega) * \mathcal{F}[\sin(4t)](\omega) \\
&= G_2(\omega+5) + G_2(\omega-5).
\end{aligned}
$$

3. $y(t) = \dfrac{\mathrm{Sa}(t)}{\pi}\left(\mathrm{e}^{-5\mathrm{j}t} + \mathrm{e}^{5\mathrm{j}t}\right) = \dfrac{2\sin t}{\pi t}\cos(5t).$

3.37

1. 滤波器输入信号的象函数:

$$
\begin{aligned}
F_{\mathrm{s}}(\omega) &= \frac{1}{4\pi} G_{4\pi}(\omega) * \pi\left[\delta(\omega+1000) + \delta(\omega-1000)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[G_{4\pi}(\omega+1000) + G_{4\pi}(\omega-1000)\right].
\end{aligned}
$$

2. 滤波器输出信号的象函数:

$$
Y(\omega) = \frac{1}{4}\left[G_2(\omega+1000) + G_2(\omega-1000)\right].
$$

3. 于是输出信号在时域为:

$$y(t)=\frac{\sin(t)\mathrm{e}^{1000\mathrm{j}t}+\sin(t)\mathrm{e}^{-1000\mathrm{j}t}}{4\pi}=\frac{2}{\pi}\mathrm{Sa}(t)\cos(1000t).$$

3.38

1. 滤波器输入信号的象函数：

$$\begin{aligned}F_{\mathrm{s}}(\omega)&=\frac{1}{(2\pi)^2}G_2(\omega)*\pi^2\left[\delta(\omega+2000)+2\delta(\omega)+\delta(\omega-2000)\right]\\&=\frac{1}{4}[G_2(\omega+2000)+2G_2(\omega)+G_2(\omega-2000)],\end{aligned}$$

2. 输出信号的象函数：$Y(\omega)=\dfrac{1}{2}G_2(\omega)$.
3. 输出信号的时域为：$y(t)=\dfrac{\sin t}{2\pi t}$.

3.39

```
(* 1 *)
Y = FourierTransform[
    (5 + 2 Cos[10 t] + 3 Cos[20 t]) Cos[200 t], t, \[Omega],
    FourierParameters -> {1, -1}
]

(* 2 *)
Y = FourierTransform[
    Sin[t]/t Cos[3 t], t, \[Omega],
    FourierParameters -> {1, -1}
]
Plot[Y, {\[Omega], -5, 5}]
```

3.40

1. 能保证，因为系统中只涉及实值信号的卷积：

$$y(t)=x(t)*\sin(\omega_{\mathrm{c}}t)+\left[x(t)*\frac{1}{\pi t}\right]\cos(\omega_{\mathrm{c}}t).$$

2. 由系统框图得到 $Y(\omega)=2\mathrm{j}\pi\left[X(\omega+\omega_{\mathrm{c}})-X(\omega-\omega_{\mathrm{c}})\right]$，于是当且仅当 $\omega_{\mathrm{c}}>\omega_{\mathrm{m}}$ 时可恢复信号.

备注　第一问解答中的表达式仅作说明使用，如果给出激励信号，不建议使用该式计算，而应作傅里叶变换后利用第二问中得到的表达式.

警告　该题无法使用采样定理或理想低通滤波器中的结论，而应该用采样定理的推导思路去分析系统框图.