

Euler 积分

注 这份笔记是对 [数学分析笔记\(3\)](#) 中 Euler 积分与 [概统笔记附录](#) 中常用积分的整理与补充.

基础部分

- Beta 函数: $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx \quad (p, q > 0).$
 - 连续性.
 - 对称性: $B(p, q) = B(q, p).$
 - 递推公式
 - $B(p+1, q) = \frac{p}{p+q} B(p, q).$
 - $B(p, q) = \frac{(p-1)(q-1)}{(p+q-1)(p+q-2)} B(p-1, q-1).$
 - 其它形式
 - $B(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta.$
 - $B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt.$
 - $B(p, q) = \int_0^1 \frac{t^{q-1} + t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}} dt.$
 - 特殊值
 - $B(p, 1) = \frac{1}{p}.$
 - $B(s, s) = \int_0^1 \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x \right)^2 \right]^{s-1} dx = \frac{B\left(\frac{1}{2}, s\right)}{2^{2s-1}}.$
- Gamma 函数: $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \quad (s > 0).$
 - 连续任意阶可导: $\Gamma^{(n)}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} \ln^n x dx.$
 - 递推公式: $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s).$

注: Bohr-Mollerup 定理指出, 满足上述函数方程的所有函数中, 只有 Gamma 函数是对数凸的, 即 $\ln \Gamma(z)$ 是凸函数.
 - 其它形式: $\Gamma(s) = \alpha^s \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-\alpha t} dt.$
 - 特殊值
 - $\Gamma(n+1) = \Pi(n) = n!.$
 - $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}.$
- Euler 积分的换元

$$\int_0^1 x^a (1-x^b)^c dx = \frac{1}{b} B\left(\frac{a+1}{b}, c+1\right) \quad (a > -1, b > 0, c > -1)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^a dx}{(1+x^b)^c} = \frac{1}{|b|} B\left(c - \frac{a+1}{b}, \frac{a+1}{b}\right) \quad \left(\begin{array}{l} a > -1, b > 0, c > \frac{a+1}{b} \text{ 或} \\ a < -1, b < 0, c > \frac{a+1}{b} \end{array} \right)$$

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-ax^p} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{p}\right)}{|p| a^{\frac{n+1}{p}}} \quad \left(\begin{array}{l} a > 0, p > 0, n > -1 \text{ 或} \\ a > 0, p < 0, n < -1 \end{array} \right)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln^n t}{t^{1+a}} dt = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}} \quad (a > 0, n > -1)$$

变换的形式

Mellin 变换 $\{\mathcal{M}f\}(s) = \varphi(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} f(x) dx.$

Mellin 逆变换 $[\mathcal{M}(\varphi)] = f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s} \varphi(s) ds.$

- Euler 积分

- $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx = \mathcal{M}(e^{-x}).$

- $B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt = \mathcal{M}[(1+t)^{-(p+q)}].$

- Cahen-Mellin 积分

- $e^{-x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s) x^{-s} ds.$

- 双边 Laplace 变换 $\{\mathcal{B}f\}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} f(t) dt.$

- $\{\mathcal{B}f\}(s) = \{\mathcal{M}f(-\ln x)\}(s).$

- $\{\mathcal{M}f\}(s) = \{\mathcal{B}f(e^{-x})\}(s).$

- 傅里叶变换 $\mathcal{F}[f](\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx.$

- $\{\mathcal{F}f\}(-s) = \{\mathcal{B}f\}(-is) = \{\mathcal{M}f(-\ln x)\}(-is).$

- $\{\mathcal{M}f\}(s) = \{\mathcal{B}f(e^{-x})\}(s) = \{\mathcal{F}f(e^{-x})\}(-is).$

- Laplace 变换 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0-}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt.$

Laplace 逆变换 $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} e^{st} F(s) ds.$

- 时间域的函数 \rightarrow 复频域的复变函数.

- $F(s)$ 称为 $f(t)$ 的象函数, $f(t)$ 称为 $F(s)$ 的原函数.

- e^{-st} 称为收敛因子.

- $s = \sigma + \omega i$ 为复频率.

更多的可参考

- [公式墙\(1\)——Laplace Transform\(拉普拉斯变换\) - 知乎 \(zhihu.com\)](#)

- [拉普拉斯变换的那些事儿——定义、性质与Airy常微分方程 - 知乎 \(zhihu.com\)](#)

相关公式

Dirichlet 公式 $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$

广义 Dirichlet 公式

$$\begin{aligned} B(\alpha) &= B(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) := \int \cdots \int \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i-1} d\mathbf{x} \quad \left(\sum_{i=1}^n x_i = 1 \right) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2) \cdots \Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)} = \frac{\Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(a_0)} \quad \left(a_0 = \sum_{i=1}^n a_n \right) \end{aligned}$$

其中 d ($d \in \mathbb{N}^+$) 维积分域是一个开放的 $d - 1$ 维正单纯形, 由顶点 $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$ 围成.

点火公式推广 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx = \frac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!} \cdot s, \quad (m, n \in \mathbb{N}),$ 其中 m, n 都为偶数时, $s = \frac{\pi}{2}$, 否则 $s = 1$.

Wallis 公式 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!^2}{(2n-1)!!(2n+1)!!} = \frac{\pi}{2}.$

- 推论 1: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)! \sqrt{n}} = \sqrt{\pi}.$
- 推论 2: $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!} \sim \sqrt{\pi n}.$

Stirling 公式 $\Gamma(s+1) = \sqrt{2\pi s} \left(\frac{s}{e}\right)^s e^{\frac{\theta}{12s}}, \quad s > 0, 0 < \theta < 1.$ (等价无穷大的证明见后文)

Euler-Gauss 乘积公式

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+n+1)}{s(s+1) \cdots (s+n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n n!}{s(s+1) \cdots (s+n)}.$$

- 注: 不能由左式直接得到右式, 应证明:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt - \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{s-1} dt \right| = 0.$
2. $\Gamma(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{s-1} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} n^s B(s, n+1).$

- 可借助上述将 $\Gamma(s)$ 的定义拓展至复平面上 (除原点和负整数点以外), 且倒数 $\Gamma(s)^{-1}$ 在 \mathbb{C} 上解析.
- 由 Stirling 公式得:

$$\frac{(s+n)!}{n!} \equiv \frac{\Pi(s+n)}{\Pi(n)} \sim n^s.$$

Weierstrass 公式 $\frac{1}{\Gamma(s)} = e^{\gamma s} s \prod_{n \geq 1} \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-\frac{s}{n}}.$

- 推论 $\Gamma(s) = \frac{1}{s} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^s}{1 + \frac{s}{n}}.$

余元公式 $B(s, 1-s) = \Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}, \quad 0 < s < 1.$

- 证法一: 由 Euler-Gauss 乘积公式和 $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right) = \frac{\sin \pi s}{\pi s}$ 即得.
- 证法二: 由 $\int_0^1 \frac{x^{s-1} + x^{-s}}{1+x} dx$ 幂级数展开与 $\cos x$ 的 Fourier 展开式即得.

Legendre 倍量公式 $\Gamma(s)\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2s-1}}\Gamma(2s), \quad s > 0.$

- 证明: 由 $B(s, s) = 2^{1-2s}B\left(s, \frac{1}{2}\right)$ 展开即得.

引理 1 (三角恒等式) $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$

证明 由 $\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{z^n - 1}{z - 1} = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)$ 令 $z = 1$ 得:

$$\begin{aligned} n &= \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \cos \frac{2k\pi}{n} - i \sin \frac{2k\pi}{n}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} 2 \sin \frac{k\pi}{n} (-i) \left(\cos \frac{k\pi}{n} + i \sin \frac{k\pi}{n}\right) \\ &= 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} \end{aligned}$$

- 注: $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{n} + \theta\right) \neq \frac{n}{2^{n-1}} \quad (\theta \neq k_0\pi, k_0 \in \mathbb{Z}).$

引理 2 $\prod_{k=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{k}{n}\right) = \sqrt{\prod_{k=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{k}{n}\right)\Gamma\left(1 - \frac{k}{n}\right)} = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}.$

证明 由余元公式与引理 1 即得.

引理 3 $\prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(m + 1 + \frac{k}{n}\right) = m!^n \frac{(mn + n - 1)!}{n^{mn+n-1}} \cdot \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}.$

证明 由递推公式与引理 2 即得.

Gauss-Legendre 倍元公式推广 $\prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(x + \frac{k}{n}\right) = \frac{\Gamma(nx)}{n^{nx}} \sqrt{n} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}.$

证明 由高斯定理与引理 3 即得.

引理

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \ln \sin x \, dx &= \int_0^\pi \ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \right) dx \\ &= \pi \ln 2 + 2 \int_0^\pi \ln \sin x \, dx \\ &= -\pi \ln 2\end{aligned}$$

Raabe 积分 $R(a) = \int_a^{a+1} \ln \Gamma(x) \, dx = a(\ln a - 1) + \frac{1}{2} \ln 2\pi.$

证明

1. $R'(a) = \ln \Gamma(a+1) - \ln \Gamma(a) = \ln a.$
2. $R(0) = \frac{1}{2} \int_0^1 \ln \Gamma(x) \Gamma(1-x) \, dx = \frac{1}{2} \ln 2\pi.$

Dobinski 公式

1. $1 - \frac{1}{n!} \int_0^n t^n e^{-t} \, dt = e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}.$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} \int_0^n t^n e^{-t} \, dt = \frac{1}{2}.$

证明

1. 分布积分法归易得. (或利用二项式定理与 Gamma 函数定义)
2. 设随机变量 X_i 独立同分布 $P(1)$, 则 $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim P(n)$, 于是由中心极限定理得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} P\{X \leq n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{X-n}{\sqrt{n}} \leq 0\right\} = \frac{1}{2}$$

引理 (Laplace 方法) 设 $f \in \mathbb{C}^2[a, b]$, $x_0 \in (a, b)$ 是 f 唯一的极大值点, $f''(x_0) = -\lambda < 0$, 则

$$\int_a^b e^{Mf(x)} \, dx \sim e^{Mf(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{M\lambda}} \quad (M \rightarrow +\infty)$$

- 推论: $\int_a^b e^{Mf(x)} \, dx \approx \int_a^b e^{Mf(x_0) - M\lambda \frac{(x-x_0)^2}{2}} \, dx.$
- 若 $[a, b]$ 为无穷区间, 则还需两个充分条件:
 1. $\exists \eta > 0, \forall (|x - x_0| \geq \delta) \wedge (x \in [a, b]) : f(x) \leq f(x_0) - \eta.$
 2. $\exists M_0 > 0 : \int_a^n e^{M_0 f(x)} \, dx < +\infty.$

Stirling 公式 $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad n \rightarrow +\infty.$ (由 Laplace 方法即得)

Digamma 函数

$$\psi(s) = \frac{d}{ds} \ln \Gamma(s) = \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} \quad (s > 0)$$

- 导数回顾: $\Gamma^{(n)}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} \ln^n x \, dx \quad (s > 0).$
- Polygamma 函数: $\psi^{(n)}.$

- 函数方程 $\psi(s+1) = \psi(s) + \frac{1}{s}$.
- 余元公式 $\psi(1-s) - \psi(s) = \pi \cot \pi s$.
- 级数表示
 - $\psi(s+1) = -\gamma + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+s} \right)$. (由 Weierstrass 公式即得)
 - $\psi(n+1) = -\gamma + H_n$. (由上式或函数方程即得)
- 特殊值
 - $\psi(1) = -\gamma$.
 - $\psi\left(\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2 \ln 2$.
- 高阶导数 $\psi^{(n)}(s) = \sum_{k \geq 0} \frac{n!(-1)^{n+1}}{(k+s)^{n+1}}$. (由级数表示求导即得)
- Taylor 展开 $\psi(s+1) = -\gamma + \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \zeta(n+1) s^n$. (由高阶导数即得)
- 极限表示 $\psi(a) = \lim_{b \rightarrow \infty} [\Gamma(b) - B(a, b)]$. (由关系式即得)
- 积分表示

$$\psi(s) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - (1+x)^{-s}}{x} dx = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{(1-s)x}}{e^x - 1} \right) dx.$$

$$\psi(1) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \right) dx = -\gamma.$$

不完全 Euler 积分

Gamma 分布, Beta 分布, Dirichlet 分布

Riemann zeta 函数

Riemann zeta 函数 $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$.

Dirichlet eta 函数 $\eta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$.

Dirichlet beta 函数 $\beta(s) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}$.

积分表达式 对 $s > 0$ 有

$$\begin{aligned} \zeta(s)\Gamma(s) &= \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx \\ \eta(s)\Gamma(s) &= \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x + 1} dx \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{[-\ln(xy)]^{s-2}}{1+xy} dx dy \\ \beta(s)\Gamma(s) &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{[-\ln(xy)]^{s-2}}{1+x^2y^2} dx dy \end{aligned}$$

函数方程 (未)

$$\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s} \cos \frac{\pi s}{2} \Gamma(s) \zeta(s)$$

$$\beta(1-s) = \left(\frac{2}{n}\right)^s \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(s) \beta(s)$$

.....

[分数阶微积分 \(zmx0142857.github.io\)](https://zmx0142857.github.io)