توضیحات

سوال اول. با استفاده از روش پویا یک آرایه دو بعدی به که شامل n سطر و ۲ ستون می باشد تعریف می کنیم. (فرض کنید رشته ورودی شامل n حرف باشد.) در این آرایه مقدار $dp[i][0]$ نشان دهنده بهترین جواب از ابتدای رشته تا حرف i-ام در رشته با فرض برداشته نشدن آن حرف می باشد، همچنین مقدار $dp[i][1]$ به طور مشابه تعریف می شود با این تفاوت که خود حرف i-ام انتخاب شده باشد. مشخصا در صورتی که ما این پویا سازی را با صحت پیش ببریم جواب مساله برابر $dp[n][1]$ می باشد.

```
    string s;
    cin >> s;

    int n = s.size();
    int dp[n][2];
```

در کد بالا رشته از ورودی گرفته شده و آرایه مورد نظر را تعریف کردیم.

حالا نوبت مقادیر اولیه است. مشخصا $dp[0][0]$ برابر صفر می باشد، اما $dp[0][1]$ بستگی به حرف اول رشته دار؛ اگر حرف اول برابر ۰ بود آنگاه مقدارش ۱ و اگر حرف اول ۱ باشد مقدارش را صفر می گذاریم به این معنی که بهتر است آن را انتخاب نکنیم و به صفر برسیم تا اینکه مقدار منفی باشد. از این دیدگاه در ادامه نیز استفاده می کنیم.

```
    dp[0][0] = 0;
    // Agar s[0] == '0' bood pas dp[0][1] = 1 (true cast mishe be 1)
    dp[0][1] = (s[0] == '0');
```

حالا برای پویا سازی راه حل باید آرایه را از اول پیمایش کرد و ساخت.

```
/**
     * Be soorate dynamic programming pish mirim ba int dp[n][2]
     * dp[i][0]: behtarin javab dar baaze 0 ta i age khode i ro hesab nakonim
     * dp[i][1]: behtarin javab dar baaze 0 ta i age khode i ro hesab bekonim
     */
    for(int i = 1; i < n; i++) {
        // Agar ozve feli ro hesab nakonim ingar dp[i-1] hastim va ozve i-
1 om ro hesab kardim
        dp[i][0] = dp[i-1][1];

        /**
         * Hala mikhahim halati ke ozve i om ra bar midarim ra hesab konim
```

```
         * age s[i] == 1 bashe az meghdare adadie dp[i-1][1] yek vahed kam mishe
         */
        int v = dp[i-1][1] + (s[i] == '1' ? -1 : +1);

        /**
         * va age in meghdar manfi beshe behtare kolan bikhiale meghdar haye ghab
l az i beshim
         * va az jelo edame bedim
         */
        dp[i][1] = (v < 0 ? 0 : v);
    }
```

واضح است که $dp[i][0]$ برابر $dp[i-1][1]$ می باشد ولی برای $dp[i][1]$ باید به حرف i-ام رشته نیز توجه کرد. اگر ۰ بود باید یک واحد به مقدار اضافه کند و اگر ۱ بود یک واحد کم کند. پس از کم شدن اگر مقدار منفی شد بهتر است کلا قبل آن را فراموش کنیم و مقدار ۰ را ذخیره کنیم.

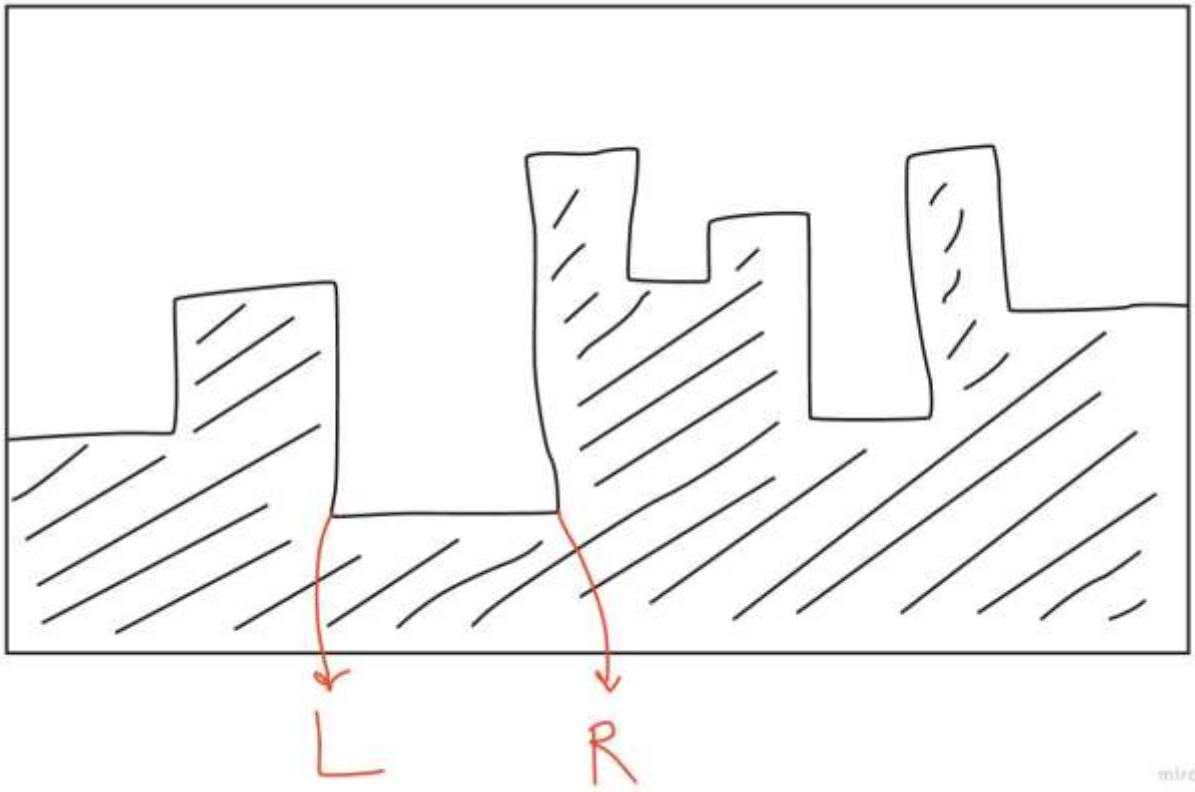
```
    int ans = 0;
    // Javab bara javab ham bayad rooye noghte payan ye loop zad
    for(int i = 0; i < n; i++) {
        if (dp[i][1] > ans) ans = dp[i][1];
    }

    cout << ans << endl;
```

حالا برای مشخص کردن جواب باید تمام نقاط پایان را آزمود و بزرگ ترین جواب را نمایش داد.

تحلیل پیچیدگی زمان. مقدار دهی آرایه dp در یک پیمایش یک سطحی اتفاق می افتد که به اندازه n می باشد. برای بدست آورند مقدار ans هم یک پیمایش صورت میگیرد ولی باز هم به اندازه n پس در کل این الگوریتم در $O(n)$ اجرا می شود.

تحلیل پیچیدگی حافظه. در کل یک آرایه ۲ در n استفاده شده پس نیاز این الگوریتم به حافظه از مرتبه $O(n)$ می باشد.

سوال دوم. برای حل این سوال به روش پویا با این روند پیش می رویم که جدول را به صورت برج هایی با ارتفاع مشخص در نظر بگیرید که تعداد مربع های واحدی که در آن ستون وجود دارد را ارتفاع هر برج در نظر میگیرم.



سپس اولین برج را که کمترین ارتفاع را دارد مشخص می کنیم و اندیس آن را در L ذخیره می کنیم. حالا تمام برج های بعد از این که ارتفاعشان کمترین مقدار هست (برابر $h[L]$ می باشد) در نظر بگیرید، حال فرض کنید آخرین برجی که هست اندیسش R می باشد. حالا تمام مربع هایی که می توان جا داد دارای طولی بین ۱ و $R - L + 1$ می باشد. پس تمام این حالات را چک می کنیم و مقدار h را بر اساس آن تغییر می دهیم. البته ما مقدار R را ذخیره نمی کنیم ولی در یک پیمایش مقادیر ممکنه را در R نگه می داریم.

تنها یک چیز مانده آن هم چک کردن آن است که آیا حالت فعلی h را قبلا حل کرده ایم یا نه؟ برای این باید ابزار پویا سازی مناسبی را انتخاب کرد. که آن ابزار *HashMap* می باشد. اما فقط در پایتون به راحتی می توان یک *list* را ابتدا به *tuple* تبدیل کرد و سپس آن را در *HashMap* قرار داد.

اثبات اینکه روش حریصانه ای که به کار بردیم بسیار ساده است. هر بار کمترین ارتفاع را پوشش داده و مقدار بالا می آوریم. البته مشخصا باید ارتفاع عمودی هم سنجیده شود که مربعی که داریم آن را قرار می دهیم از جدول بیرون نزند. اما در کل هر بار تعداد برج هایی که کمترین ارتفاع را دارند حداقل یک واحد کم می شوند پس بعد از چندین بار اجرا مقدار عددی کمترین ارتفاع حداقل یک واحد افزایش پیدا می کند. این جا به دلیل مشخص بودن سقف برای ارتفاع م محدود بودن تعداد برج ها، ناوردایی به وجود می آید که گام

های ما مقدار عددی کمترین ارتفاع و تعداد برج ها با کمترین ارتفاع را به ترتیب افزایش و کاهش می دهد و به ترتیب حد های B برای مقدار عدد کمترین ارتفاع سقف می باشد و ۱ کفی برای تعداد برج هاست.

نقطه بازگشت حالتی است که تمام برج ها ارتفاعی برابر با B داشته باشند.

برای انتقال بهتر منظورم کد پایتونی که زدم و تست هایم را به درستی حل کرد در این قسمت درج می کنم و توضیح می دهم:

```
def solve(h: tuple, n: int, m: int, d: dict):
    # dp check
    if h in d:
        return d[h]
```

این صورت تابع است و هر بار ارتفاع برج ها را در یک *tuple* از آرگومان هایش میگیرد. همچنین یک رفرنس از دیکشنری می گیرد که نقش *HashMap* را بازی می کند.

```
    L = 0
    min_height = h[0]

    # Peyda kardane min_height va L
    for i in range(len(h)):
        if (h[i] < min_height):
            min_height = h[i]
            L = i
```

سپس برای ادامه کار ما نیاز به اولین برجی داریم که کمترین ارتفاع دارد. با یک پیمایش همانند کد بالا آن ها را بدست می آوریم.

```
    # Noghte nahayee
    if min_height == n:
        return 0
```

نقطه بازگشت: اگر کوتاه ترین برج ارتفاعش به سقف مستطیل خورده باشد پس کارمان تمام است و دیگر حالتی بعد از این وجود ندارد. پس نمی توان این را ادامه داد و به این دلیل ۰ را بر می گرداند.

```
    # Rah haye por kardan nmitune bishtr az n * m bashe
    # chon age hame ro 1*1 bzarim mishe in
    ans = n * m
```

لم. جواب مساله همیشه کوچک تر از ضرب ابعاد مستطیل است. این هم واضح است چرا که اگر همه خانه ها را با مربع های واحد پر کنیم این عدد بدست می آید.

```
# copy mikonim baraye check kardane hameye halat ha
    dummy = list(h)
```

از روی حالت برج ها یک لیست موقتی می سازیم و قرار است برای قرار دادن تمام مربع های ممکن از آن استفاده کنیم.

```
    # Gharar dadane tamame moraba hayee ke emkan darad
    for R in range(L, m):
        if dummy[R] == min_height:
            width = R - L + 1

            if min_height + width <= n:
                dummy[L:R+1] = [min_height + width] * width
                ans = min(ans, solve(tuple(dummy), n, m, d) + 1)
        else:
            break
```

تمام حالت های ممکن برای نقطه پایانی مربعی که می خواهیم قرار دهیم را با R پیمایش می کنیم و اگر در پیمایش به برجی رسیدیم که ارتفاعش با کوتاه ترین برج متفاوت بود پیمایش را قطع کند.

حالا برای یک R مشخص که می خواهیم حالت را بررسی کنیم ابتدا طول مربع را بدست می اوریم و در *width* نگه داری می کنیم. سپس به صورت عمودی این مربع را قبل اینکه قرار دهیم بررسی می کنیم اگر در مستطیل جا می شد، لیستی که به عنوان لیست کمکی از روی *h* کپی کرده بودیم را تغییر می دهیم به این صورت که از خانه L تا خود خانه R باید به مقدار *width* بالا بیایند و سپس این حالت جدید را به تابع پاس می دهیم. همچنین جواب را به علاوه یک کرده و با *ans* مقایسه می کنیم که اگر کمتر شد مقدار بهتر را در خود نگه دارد.

```
    # dp assignment
    d[h] = ans

    return d[h]
```

در انتها هم باید کار های مربوط به پویا سازی را انجام داد و مقدار نهایی را برگرداند.

تحلیل پیچیدگی زمان. چون پویا سازی انجام شده پس این الگوریتم در $O(f(n,m))$ کار می کند که $f(n,m)$ تعداد حالت های ممکن است. مشخصا حد بالای $f(n,m)$ برابر 2^{nm} می باشد زیرا هر خانه یا درونش پر شده یا خالی است. اما فقط حالت های خاصی در این الگوریتم به وجود می آیند. حالت هایی که از پایین ساخته شده باشند و در یک ستون یک پارچه باشند. پس به ازای هر ستون ما n حالت داریم و در کل الگوریتم در $O(m^n)$ کار می کند.

تحلیل پیچیدگی حافظه. از آنجایی که امکان دارد تمام حالات بررسی شوند و برای هر حالت یک بار تابع صدا زده می شود پس حداقل m^n رو داریم. ولی برای خود دیکشنری که اعمالش به طور میانگین در $O(\log size)$ انجام می شود خواهیم داشت: $O(\log m^n) = O(n \log m)$ که در برابر قسمتی که مربوط به *functional call* بود ناچیز است. پس در کل نیاز الگوریتم به حافظه از $O(m^n)$ می باشد.

سوال سه. به صورت استقرایی فکر می کنیم و عضو n ام را عضو جدید در نظر میگیریم. این عضو یا تنها می ماند و یا به یک نفر دوست می شود. برای دوست شدن با یک نفر $n-1$ حق انتخاب دارد.

$$f(n) = (n-1) * f(n-2) + f(n-1)$$

اثبات درستی. به ازای یک n وقتی تابع صدا زده می شود. ابتدا چک می شود که آیا برای این مقدار قبلا جواب حساب شده یا نه. اگر بلی که نیازی به محاسبه نیست و مقدارش را از آرایه مورد نظر بر می گرداند. اگر هم محاسبه نشده باشد به صورت بازگشتی طبق فرمول بالا محاسبه می شود. هر کدام از توابعی که به کار رفته شده دوباره چک می کند که آیا قبلا مقدار آرگومان خودشان در آرایه پویا وجود دارد یا نه؟

```
int solve(int n, vector<int> &dp) {
    if (n < 2) return 1;

    if (dp[n] == -1) {
        // Esteghrayee fekr mikonim

        // Ozve jadid ya ba yeki az (n-1) nafare dg doost mishe => (n-1) * f(n-2)
        // ya tanha mimoone => f(n)
        dp[n] = (n-1) * solve(n-2, dp) + solve(n-1, dp);
    }

    return dp[n];
}
```

تحلیل پیچیدگی زمان. از آنجایی که آرایه پویا شده اندازه اش n می باشد و هر مقدار یک بار محاسبه می شود پس: $O(n)$

تحلیل پیچیدگی حافظه. به وضوح $O(n)$ که اندازه آرایه است.

سوال چهار. دو رشته ورودی را به ترتیب s و t در نظر بگیرید. همچنین برای قسمت پویا سازی یک آرایه دو بعدی $(n+1) \times (m+1)$ در نظر بگیرید. مقدار $dp[i][j]$ نشان دهنده جواب مساله برای زیر رشته $s[0:i+1]$ و $t[0:j+1]$ می باشد. ما سه نوع حرکت داریم که این حرکت ها را در آرایه dp شبیه سازی می کنیم:

- حذف: یک واحد از بعد اول کم کن. $i: i-1$ هزینه = ۱
- درج: یک واحد از بعد دوم کم کن. $j: j-1$ هزینه = ۱
- تغییر: یک واحد از هر دو بعد کم کن. $i: i-1, j: j-1$ هزینه = ۲

تنها کافی است بین این سه حرکت کمترین مقدار را مشخص کنیم و در $dp[i][j]$ قرار دهیم.

نحوه کار. این الگوریتم از حرف اخر s با متغیر i و از حرف آخر t با متغیر j شروع به پیمایش می کند. در ادامه اگر s_i برابر t_j بود یک واحد پیمایش را پیش می برد بدون آنکه هزینه ای حساب شود ولی اگر متفاوت بود سه حالتی که در بالا مشخص شد را امتحان می کنیم.

اثبات درستی. نقاط بازگشت این الگوریتم زمانی هستند که حداقل یکی از i و j به صفر برسند. مقدار آن یکی که صفر نیست کمترین هزینه می شود. زیرا باید به آن تعداد عمل درج را انجام داد.

```cpp
int solve(string s, string t, int i, int j, vector<vector<int>> &dp) {
    if (i == 0 || j == 0) return i + j;

    if (dp[i][j] != -1) return dp[i][j];

    // Akharin harf yeksan
    if (s[i-1] == t[j-1]) {
        return solve(s, t, i-1, j-1, dp);
    }

    // Akharin harf tafavot dare
    int remove = solve(s, t, i-1, j, dp) + 1;
    int insert = solve(s, t, i, j-1, dp) + 1;
    int replace = solve(s, t, i-1, j-1, dp) + 2;

    dp[i][j] = min( min(remove, insert), replace);

    return dp[i][j];
}
```

آرگومان های این تابع:

- s و t رشته های مساله
- i و j اندیس های پیمایش برای رشته ها
- dp آرایه دو بعدی برای پویا سازی

سپس در ابتدا بررسی می کنیم که آیا به نقطه بازگشت رسیدیم یا نه؟

سپس اگر حروف متناظر با i و j برابر بودند ادامه بده و هزینه ای رادر نظر نگیر. در غیر این صورت برای حذف و درج هزینه یک واحد و برای تغییر هزینه ۲ واحد را حساب کن و کمترین مقدار بین این سه مقدار را که به صورت بازگشتی حساب می شوند را به عنوان خروجی باز می گرداند. بررسی اولیه نقطه بازگشت همانند همه راه حل های سوالات قبل و بعد از روش *memorization* استفاده می کند و باعث کاهش هزینه زمانی می شود.

تحلیل پیچیدگی زمان. از آنجایی که تمام خانه های جدول دقیقا یک بار محسابه می شوند. (چون ما هم می توانیم از j یک واحد کم کنیم و هم i) و به کمک پویا سازی این الگوریتم در $O(mn)$ اجرا می شود.

تحلیل پیچیدگی حافظه. یک آرایه دو بعدی به ابعاد $n \times m$ داریم پس: $O(nm)$ حافظه نیاز است.