

# 作业 2：小心！

本次作业涵盖了在线辅导中第 5.5.x 周的所有问题。对于作业中任何需要您编写代码的部分，请将您的工作完成在 `hw2Work.py` 文件中。

你可以和其他同学从高层次上讨论这个问题，但你提交的所有东西都必须是自己的成果。

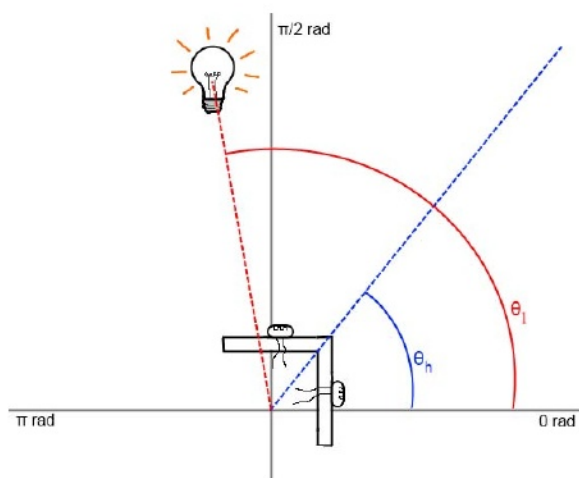
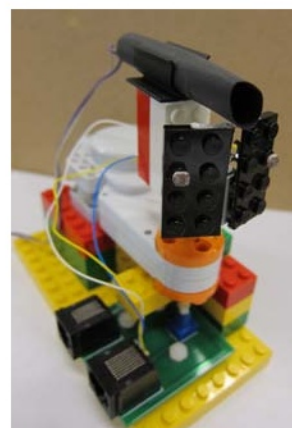
## 引言

在这个问题中，我们使用您在 Design Labs 4 和 5 中练习的技术和方法来构建和分析一个系统模型，我们将在 Design Labs 7 至 9 中再次看到该模型，它控制一个电机来转动机器人“头部”（如图右所示）以面向一束光。该系统由三个组件组成：

- 一个光传感器，通过它可以确定光相对于头部所在的位置
- 一个马达，我们可以用它来把头转向光源。
- 一个控制电路，用于控制电机（您将在后续的实验中构建）

我们对这个系统的思考如下：这束光在世界的某个地方。

具有一些绝对的角度位置 $\theta_l$ 。头部本身也具有一个绝对的角度位置，我们称之为 $\theta_h$ 。目标是使头部转向面对光源；也就是说，我们希望有一个能使 $\theta_h$ 等于 $\theta_l$ 的系统。 $\theta_h$ 和 $\theta_l$ 之间的关系如下图所示：



## 1 初步信息

请注意，在本课程中，我们使用大写字母表示信号，用小写字母表示信号的样本。例如， $\Theta_h$  是一个信号，其样本为  $\theta_h[n]$ 。常量可以是字母或大写字母，这取决于该特定常量的约定。

该系统中的电机产生一个扭矩，使电机加速。角加速度  $\alpha_h$ （以  $\frac{\text{弧度}}{\text{秒}^2}$  为单位）

电机的：

$$\alpha_h[n] = k_m i_m[n]$$

其中  $i_m$  是流经电机的电流（以安培为单位）， $k_m$  是所使用的电机的特定常数。

所有电机都是发电机。如果你用手工机械驱动直流电机（即用手转动轴），你会测量到电机触点之间的电压降。事实上，即使我们使用电池驱动电机，这种电压降（称为反电动势，或反EMF）仍然会产生。这种反EMF（以伏特为单位）与电机的角速度成正比：

$$v_b[n] = k_b \omega_h[n]$$

其中  $\omega_h$  是电机的角速度（在  $\frac{\text{弧度}}{\text{秒}}$  使用）。

并且  $k_b$  是电机特有的常数

一旦我们知道外加电压、反电动势和电机的电阻，我们就可以利用[欧姆定律](#)来计算通过电机的电流。电流等于电机两端的总电压降除以电机的电阻：

$$i_m[n] = \frac{(v_c[n] - v_b[n])}{r_m}$$

其中， $v_c$  是用于驱动电机的电压， $r_m$  是电机的电阻（ $r_m$  对于给定的电机是恒定的，并且以欧姆为单位进行测量）。

我们将光方向传感器建模为产生一个电压  $v_s$ ，该电压与光的角度位置和头部角度位置之间的角度成正比。我们将这种差异称为误差  $e$ 。

$$v_s[n] = k_s(\theta_l[n] - \theta_h[n]) = k_s e[n]$$

其中  $k_s$  也是一个常数。最后，我们使用一个简单的比例控制器（增益为  $k_c$ ）来产生电压  $v_c$ ，从而驱动电机：

$$v_c[n] = k_c v_s[n]$$

请注意， $k_c$  是我们能够控制的唯一增益；其他所有增益都由我们使用的部件预先决定了。

自我检查 1.  $k_m$ 、 $k_b$ 、 $k_s$  和  $k_c$  各自的单位应该是什么？

## 2 构建模型

这个系统类似于您在最近的设计实验室中看到的**壁面跟随者**和壁面探测器。正因如此，我们从熟悉的组成部分的角度来考虑这个系统：一个控制器、一个植物和一个传感器。

### 2.1 传感器与控制器的建模

给定传感器信号  $V_s$ ，我们使用一个简单的比例控制器来生成控制电压  $V_c$ 。 $V_s$  反过来，与  $E = (\Theta_l - \Theta_h)$  成正比。

在我们的模型中，我们将这两个系统结合起来，形成一个以  $E$  作为输入并生成  $V_c$  作为输出的模块。

请注意，与设计实验室 4 和 5 中的系统不同，我们将光传感器建模为一种不同寻常的“传感器”，它直接测量误差，**没有时间延迟**。

**步骤 1.** 为这个控制/传感器系统找到系统功能，并绘制相关的方框图。您可以根据自己喜欢的顺序进行这些操作，但要确保您的系统功能与方框图相符。

**步骤 2.** 使用 **lib601.sf 模块** 中提供的原语和组合子，定义一个方法 `controllerAndSensorModel`，该方法接受一个增益  $k_c$  作为输入，并输出一个 `sf.SystemFunction` 实例，该实例表示具有此增益的控制器/传感器系统。在定义中，您可以使用 `hw2Work.py` 中定义的任何变量。

切勿直接使用分子和分母的多项式来构造此实例。

#### 第 5 周 5.5.1

将您的系统功能和代码输入到这个辅导问题中，然后向上加载您的方框图的 PDF 版本。输入的详细说明系统功能已纳入导师系统，可在该问题的导师页面上获取。引理。关于在各种平台上创建 PDF 文件的相关信息，查阅本手册的附录 2。

### 2.2 建模工厂

我们的工厂将  $V_c$ （控制器的输出）作为输入，并生成输出  $\Theta_h$ 。

正如在设计实验 5 中，我们将该装置分为两个较小的系统：电机和一个积分器。

#### 2.2.1 集成商

我们首先制作一个积分器，其输入为电机的角速度  $\Omega_h$ ，输出为电机的角位置  $\Theta_h$ 。请记住，所有信号均每隔  $T$  秒采样一次。

**第三步.** 求出积分器的系统函数，并绘制相关的方框图。

**步骤 4.** 使用 **lib601.sf 模块** 中提供的原语和组合子，定义一个方法 `integrator`，该方法接受一个时间步长  $T$ （样本之间的时间间隔）作为输入，并返回一个 `sf.SystemFunction` 实例，该实例表示具有适当时间步长的积分器。

<sup>1</sup> The “plant” is the system we are trying to control. It is called the “plant” (as in factory, not as in leafy green thing) because a common early application of control theory was controlling manufacturing plants.

请注意积分器和**累加器**之间的区别；例如，积分器将速度转换为位置，其方式使得在给定的时间步长下的位置由前一位置和前一速度决定，正如在**设计实验 4**中所做的那样。

## 2.2.2 电机建模

接下来，我们对电机进行建模，它以  $V_c$  作为输入，并生成  $\Omega_h$  作为输出。

**第 5 步。**利用前一页给出的方程，求出电机的系统函数，并画出相关的方框图。在您的方框图上标注  $A_h$ 。<sup>2</sup>

**第 6 步。**使用 lib601.sf 模块提供的原语和组合子，以及你已经创建的任何相关方法，定义一个名为 motorModel 的方法，该方法接受与积分器相同的输入，但返回一个表示电机的 sf.SystemFunction 实例。你可以假设  $k_b$ 、 $k_m$  和  $k_s$  已经为你定义好了。

## 2.2.3 联合工厂

**第 7 步。**为整个工厂找到系统功能，并绘制相关的方框图。标注出方框图中与电机和积分器相对应的部分。

**第 8 步。**使用您上面构建的部件，以及 lib601.sf 模块中提供的任何相关原语和组合子，定义一个名为 plantModel 的方法，该方法接受与 integrator 和 motorModel 相同的输入，并返回一个 sf.SystemFunction 的实例，该实例表示整个植物模型。

**第 5 周 5.5.2** 将电机模型和组合系统模型的系统功能，以及本节的代码输入到这个辅导问题中，并上传一份组合系统方框图的 PDF 文件。请确保在**方框图**中标注出代表电机和积分器的部分。

## 2.3 综合起来

现在我们将所有这些系统连接在一起，形成一个大的系统，其输入  $\Theta_l$  是光的角位置，其输出  $\Theta_h$  是头的角位置。

**第 9 步。**为这个组合系统找到系统函数，并绘制相关的方框图。在您的方框图上标注以下信号： $\Theta_l$ 、 $\Theta_h$ 、 $E$ 、 $V_s$ 、 $I_m$ 、 $\Omega_h$ 、 $A_h$ 、 $V_c$ 、 $V_b$ 。

同样，以你觉得更自然的顺序来做这些，但要确保你的系统功能与你的图表相符。

**第 10 步：**这个系统的极点是什么？用代数表达式表示，包括  $k_c$  和任何必要的常数。

**第 11 步。**利用您上面构建的部件，以及 lib601.sf 模块中提供的任何相关基本类型和组合子，定义一个名为 lightTrackerModel 的方法，该方法以 作为输入

<sup>2</sup> A is a capital "A," not a capital "a."

用于控制器的增益 ( $k_c$ ) 和时间步长 ( $T$ )，并返回 `sf.SystemFunction` 的一个实例，该实例表示具有指定增益和时间步长的整个光跟踪系统。

第 5 周 **5.5.3** 节 将整个光跟踪模型的系统功能以及本节代码输入到这个辅导问题中，并上传整个系统的方框图 PDF 文件。务必在您的方框图中标注信号  $\Theta_l$ 、 $\Theta_h$ 、 $E$ 、 $V_s$ 、 $I_m$ 、 $\Omega_h$ 、 $A_h$ 、 $V_c$  和  $V_b$ 。

### 3 系统分析

我们将要求您提出一些主张，并从理论上或经验上论证它们是正确的：

- 理论方面 - 您可以通过确定特定系统的极点来对其进行分析，并通过解析计算函数的最值来找到最优增益。
- 实证的 - 您可以根据初始条件生成特定系统行为的关系图，并且通过系统地对一组候选增益进行采样、评估并返回最佳增益来找到良好的增益。

在下面证明您的每个答案的正确性，要么通过经验，要么通过理论。

对于该分析，假设给定常量具有以下数值（这些数值在 `hw2Work.py` 中为您定义）：

- $k_m = 1000 \frac{\text{rad}}{\text{sec}^2 \text{Amp}}$
- $k_b = 0.5 \frac{\text{volts}}{\frac{\text{rad}}{\text{sec}}}$
- $k_s = 5 \frac{\text{volts}}{\text{rad}}$
- $r_m = 20$  欧姆

**第 12 步。**给定方程中常数的这些值，找到使头部对光线位置的变化反应最快，同时使头部在不振荡的情况下收敛到期望的角度位置的  $k_c$  的值。最佳增益的极点是什么？对于此步骤，使用  $T = 0.005$  秒。（提示：请参阅附录 1 中的最优解）

解释您是如何得出这个答案的，并绘制所选增益下光跟踪器对单位阶跃输入的响应。这将模拟系统在头部开始面向光源，但在  $t = 0$  时光源瞬间移动到  $\theta_l = 1$  弧度并无限保持时的行为。

这里有一个便捷的程序，它以一个系统函数作为输入，并生成一个图表，展示该系统从静止状态开始，以单位阶跃信号作为输入时的行为。为了方便您使用，此函数在 `hw2Work.py` 中定义。

```
def plotOutput(sfModel):
    smModel = sfModel.differenceEquation().stateMachine()
    outSig = ts.TransducedSignal(sig.StepSignal(), smModel)
    outSig.plot()
```

<sup>3</sup> When a system “starts from rest,” this means that all inputs to and outputs from the system for time  $t < 0$  have value 0.

**第 13 步。**当  $T = 0.005$  秒时，对于什么范围的  $k_c$ ，系统是单调收敛的？振荡收敛的？发散的？对于您上述找到的每个范围中的一个增益，绘制光跟踪器对单位阶跃输入的响应。

**第 14 步。**将  $k_c$  固定在您在第 12 步中找到的最佳值上。现在，尝试增加  $T$ 。也尝试减少它。用不同的  $k_c$  和  $T$  的值进行实验；对于时间步长  $T$  如何影响系统的行为，您能得出什么结论？

**第 5 周 5.5.4 节** 回答此问题中的问题，并上传一份清晰标注的图表的 PDF 文件。

## 4 变量引用

供您参考，以下是本次作业中使用的符号的总结：

- $\Theta_l$ ：光的绝对角度位置，其样本为  $\theta_l[n]$  的信号。
- $\Theta_h$ ：头的绝对角度位置，其样本为  $\theta_h[n]$  的信号。
- $E$ ：误差信号 ( $\Theta_l - \Theta_h$ )
- $V_s$ ：光方向传感器产生的电压，其样本为  $v_s[n]$  的信号。
- $I_m$ ：流过电机的电流，其样本为  $i_m[n]$  的信号。
- $\Omega_h$ ：电机的角速度，其样本为  $\omega_h[n]$  的信号。
- $A_h$ ：电机的角加速度，其样本为  $\alpha_h[n]$  的信号。
- $V_c$ ：电机控制电压，其样本为  $v_c[n]$  的信号。
- $V_b$ ：电机的反电动势，其样本为  $v_b[n]$  的信号。

## 附录 1：最优解

回想一下，通过**减小主导极点的幅值**可以提高系统响应的收敛速度。因此，为了找到可能的最佳性能，您可以构建一个函数  $f(k)$  来计算系统主导极点的幅值，然后找到使该函数取最小值的  $k$  值。

寻找一个函数的最小值是一个一般性的问题。给定一个函数  $f(x)$ ，我们怎样才能找到一个值  $x^*$  such, 使得对于所有  $x$ ,  $f(x) \geq f(x^*)$  呢？如果  $f$  是可微的，我们可以通过求导、令导数为 0 并求解  $x$  来相对容易地做到这一点。当函数  $f$  很复杂，可能存在多个最小值，和/或希望扩展到具有多个自变量的函数时，这就会变得棘手。对于不可微的函数（如涉及  $\max$  或  $\text{abs}$  的函数），根本没有简单的数学方法。在一维中，如果我们知道一个可能包含最小值的  $x$  的范围，我们可以合理地在该范围内对不同的  $x$  值进行采样，对每个  $x$  值计算  $f(x)$ ，并返回使  $f(x)$  最小化的采样  $x$  值。

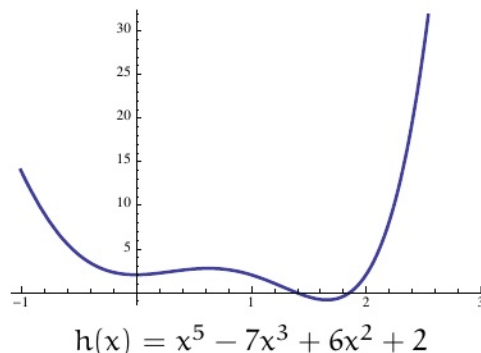
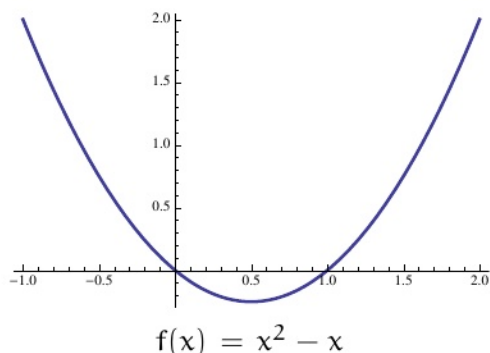
程序 `optimize.optOverLine` 实现了这一功能。它是 **lib601 optimize 模块** 的一部分，调用方式如下：

`optimize.optOverLine`（目标函数、最小  $x$  值、最大  $x$  值、 $x$  步长数、比较）

- 目标：一个接受单个数值参数（在我们的示例中是  $x$ ）并返回一个数值的程序（在我们的示例中是  $f(x)$ ）
- $xmin, xmax$ ：自变量的一组取值范围
- $numXsteps$ ：在该范围内测试多少个点
- $compare$ ：一个可选的比较函数，默认值为 `operator.lt`，即 Python 中的小于运算符  $<$ 。这意味着如果您未指定  $compare$  参数，该过程将返回使目标最小化的值。

该程序返回一个元组  $(bestObjValue, bestX)$ ，其中包含目标的最佳值（在我们的示例中为  $f(x^*)$ ）以及与之对应的  $x$  值（在我们的示例中为  $x^*$ ）。

**自我检查 2.** 这里有两个函数的图形。使用 `optimize.optOverLine` 来找到其中一个函数的最小值。函数  $f$  在  $x = 0.5$  处有最小值，值为  $-0.25$ ；函数  $h$  在  $x = 1.66$  处有最小值，值为  $-0.88$ 。





## 附录 2：创建 PDF 文件

也许创建 PDF 文档最简单的方法是使用扫描仪。

注意：无论您使用何种方法创建 PDF 文件，在提交之前一定要仔细检查，以确保它们有效且完整；通过在 PDF 阅读器中打开它们，并确保它们能正确打开且包含您认为应该包含的所有内容来进行检查。

### 打印为 PDF 格式

**在雅典娜（或普通版Ubuntu）上：**在适当的程序中打开您想要转换的文件。选择“文件”→“打印”。选择“打印到文件”选项。确保在“输出格式”下选择了“PDF”。选择保存生成的PDF文件的位置，然后点击“打印”。

**在 Windows 系统上：**安装一个 PDF 打印机（如 [doPDF](#)）。在适当的程序中打开您想要转换的文件。选择“文件”→“打印”。选择打印到您最近安装的 PDF 打印机；然后您将看到有关保存生成的 PDF 文件位置的选项。

**在 Mac OSX 系统上：**在适当的程序中打开您想要转换的文件。选择“文件”→“打印”。点击“打印”对话框左下角的“PDF”按钮。选择“保存为 PDF...”选项，选择您想要保存生成的 PDF 文件的位置，然后点击“保存”。

### 自由办公软件 / 开放源代码的办公软件

[LibreOffice](#) 和 [OpenOffice.org](#) 允许将文件直接导出为 PDF 格式。

创建一个文件，其中包含您希望包含在 PDF 中的所有图形和文本。选择“文件”→“导出为 PDF”。确保选中“PDF/A-1a”旁边的方框。对于提交图形或扫描件，您可能希望选择“图像”下的“无损压缩”选项。点击“导出”，选择保存生成的 PDF 的位置，然后点击“保存”。

### 在线绘图工具

欢迎您尝试使用在线绘图工具来[绘制框图](#)，例如[谷歌文档](#)演示文稿绘图工具、[diagram.ly](#) 或 [gliffy.com](#)。我们不推荐其中的任何一种；效果可能因人而异。



麻省理工学院开放式课  
程网站 <http://ocw.mit.edu>

6.01SC 《电气工程与计算机科学导论》 2011 年春季

有关引用这些材料或我们的使用条款的信息，请访问：<http://ocw.mit.edu/terms>。