

Лабораторная работа N4

Используя схемы переменных направлений и дробных шагов, решить двумерную начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x, t)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров τ, h_x, h_y .

1.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad a > 0,$$

$$u(0, y, t) = \cos(\mu_2 y) \exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at),$$

$$u(\pi, y, t) = (-1)^{\mu_1} \cos(\mu_2 y) \exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at),$$

$$u(x, 0, t) = \cos(\mu_1 x) \exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at),$$

$$u(x, \pi, t) = (-1)^{\mu_2} \cos(\mu_1 x) \exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at),$$

$$u(x, y, 0) = \cos(\mu_1 x) \cos(\mu_2 y).$$

Аналитическое решение: $U(x, y, t) = \cos(\mu_1 x) \cos(\mu_2 y) \exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at)$.

1). $\mu_1 = 1, \mu_2 = 1$.

2). $\mu_1 = 2, \mu_2 = 1$.

3). $\mu_1 = 1, \mu_2 = 2$.

2.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad a > 0,$$

$$u(0, y, t) = \cos(\mu_2 y) \exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at),$$

$$u\left(\frac{\pi}{2} \mu_1, y, t\right) = 0,$$

$$u(x, 0, t) = \cos(\mu_1 x) \exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at),$$

$$u\left(x, \frac{\pi}{2} \mu_2, t\right) = 0,$$

$$u(x, y, 0) = \cos(\mu_1 x) \cos(\mu_2 y).$$

Аналитическое решение: $U(x, y, t) = \cos(\mu_1 x) \cos(\mu_2 y) \exp(-(\mu_1^2 + \mu_2^2)at)$.

1). $\mu_1 = 1, \mu_2 = 1$.

2). $\mu_1 = 2, \mu_2 = 1$.

3). $\mu_1 = 1, \mu_2 = 2$.

3.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad a > 0,$$

$$u(0, y, t) = \cosh(y) \exp(-3at),$$

$$u\left(\frac{\pi}{4}, y, t\right) = 0,$$

$$u(x,0,t) = \cos(2x) \exp(-3at),$$

$$u(x, \ln 2, t) = \frac{5}{4} \cos(2x) \exp(-3at),$$

$$u(x, y, 0) = \cos(2x) \cosh(y).$$

Аналитическое решение: $U(x, y, t) = \cos(2x) \cosh(y) \exp(-3at)$.

4.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad a > 0,$$

$$u(0, y, t) = \cosh(y) \exp(-3at),$$

$$u\left(\frac{\pi}{4}, y, t\right) = 0,$$

$$u(x, 0, t) = \cos(2x) \exp(-3at),$$

$$u_y(x, \ln 2, t) = \frac{3}{4} \cos(2x) \exp(-3at),$$

$$u(x, y, 0) = \cos(2x) \cosh(y).$$

Аналитическое решение: $U(x, y, t) = \cos(2x) \cosh(y) \exp(-3at)$.

5.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad a > 0,$$

$$u(0, y, t) = \sinh(y) \exp(-3at),$$

$$u\left(\frac{\pi}{2}, y, t\right) = -\sinh(y) \exp(-3at),$$

$$u_y(x, 0, t) = \cos(2x) \exp(-3at),$$

$$u(x, \ln 2, t) = \frac{3}{4} \cos(2x) \exp(-3at),$$

$$u(x, y, 0) = \cos(2x) \sinh(y).$$

Аналитическое решение: $U(x, y, t) = \cos(2x) \sinh(y) \exp(-3at)$.

6.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad a > 0,$$

$$u(0, y, t) = \sinh(y) \exp(-3at),$$

$$u_x\left(\frac{\pi}{4}, y, t\right) = -2 \sinh(y) \exp(-3at),$$

$$u_y(x, 0, t) = \cos(2x) \exp(-3at),$$

$$u(x, \ln 2, t) = \frac{3}{4} \cos(2x) \exp(-3at),$$

$$u(x, y, 0) = \cos(2x) \sinh(y).$$

Аналитическое решение: $U(x, y, t) = \cos(2x) \sinh(y) \exp(-3at)$.

7.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - xy \sin t,$$

$$u(0, y, t) = 0,$$

$$u(1, y, t) = y \cos t,$$

$$\begin{aligned} u(x, 0, t) &= 0, \\ u(x, 1, t) &= x \cos t, \\ u(x, y, 0) &= xy. \end{aligned}$$

Аналитическое решение: $U(x, y, t) = xy \cos t$.

8.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - xy \sin t,$$

$$u(0, y, t) = 0,$$

$$u(1, y, t) - u_x(1, y, t) = 0,$$

$$u(x, 0, t) = 0,$$

$$u(x, 1, t) - u_y(x, 1, t) = 0,$$

$$u(x, y, 0) = xy.$$

Аналитическое решение: $U(x, y, t) = xy \cos t$.

9.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sin x \sin y (\mu \cos \mu t + (a + b) \sin \mu t),$$

$$u(0, y, t) = 0,$$

$$u\left(\frac{\pi}{2}, y, t\right) = \sin y \sin(\mu t),$$

$$u(x, 0, t) = 0,$$

$$u_y(x, \pi, t) = -\sin x \sin(\mu t),$$

$$u(x, y, 0) = 0.$$

Аналитическое решение: $U(x, y, t) = \sin x \sin y \sin(\mu t)$.

1). $a = 1, b = 1, \mu = 1$.

2). $a = 2, b = 1, \mu = 1$.

3). $a = 1, b = 2, \mu = 1$.

4). $a = 1, b = 1, \mu = 2$.

10.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sin x \sin y (\mu \cos \mu t + (a + b) \sin \mu t),$$

$$u(0, y, t) = 0,$$

$$u_x(\pi, y, t) = -\sin y \sin(\mu t),$$

$$u(x, 0, t) = 0,$$

$$u_y(x, \pi, t) = -\sin x \sin(\mu t),$$

$$u(x, y, 0) = 0.$$

Аналитическое решение: $U(x, y, t) = \sin x \sin y \sin(\mu t)$.

1). $a = 1, b = 1, \mu = 1$.

2). $a = 2, b = 1, \mu = 1$.

3). $a = 1, b = 2, \mu = 1$.

4). $a = 1, b = 1, \mu = 2$.

