

**Arkusz 1**

ZAD.1. (2p) Prawda czy Fałsz ? (podaj tylko odpowiedź, bez uzasadnienia)

– PRZEPISZ TREŚĆ PIERWSZEGO PODPUNKTU NA ARKUSZ ROZWIĄZAŃ –

(a)  $a \times (b \circ c) = (a \times b) \circ (a \times c)$

(b)  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  jest pierścieniem przemiennym i jest też ciałem

(c) Jeżeli macierze  $C$  i  $D$  są odwracalne, to  $(CD)^{-1} = C^{-1}D^{-1}$ .

(d) Jeżeli kwadratowy układ  $Ax = b$  ma nieskończenie wiele rozwiązań to  $\det A = 0$

ZAD.2. (a)(4p) Oblicz. Wynik podaj w postaci algebraicznej

$$\left( \frac{3\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} + 2i} \right)^{2021}$$

(b)(4p) Rozwiąż równanie. Rozwiązania podaj w postaci algebraicznej

$$z^4 + iz^3 + 5z + 5i = 0$$

ZAD.3. (3p) Znajdź element neutralny  $e_1$  i elementy odwrotne w podgrupie

$$(A, \otimes_{20}), \text{ gdzie } A = \{4, 8, 12, 16\}$$

**Arkusz 2**

ZAD.4. (a)(2p) Znajdź wzór na macierz  $X$  spełniającą równanie

$$(2X^{-1}A)^{-1} + B = X$$

(b)(3p) Rozwiąż równanie

$$X = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

ZAD.5. (3p) Określ liczbę rozwiązań układu w zależności od parametru  $k$ . Dla wartości  $k$ , dla której układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, rozwiąż go wykorzystując metodę eliminacji Gaussa, tak aby zmienna  $y$  była parametrem w rozwiązaniu.

$$\begin{cases} x - 4y + 2z = 1 \\ x - y + z = -3 \\ x - ky + 3z = 5 \end{cases}$$

**Arkusz 3**

ZAD.6. (4p) W  $\mathbb{Z}_5[x]$  znajdź wartości parametrów  $a, b, c$  tak, aby wielomian  $V(x)$  był podzielny przez  $W(x)$  i aby reszta z dzielenia  $V(x)$  przez  $(x+2)$  była równa 1.

$$V(x) = 2x^{50} + ax^{15} + bx^2 + cx, \quad W(x) = x^2 + 4x + 3$$

ZAD.7. Dane są wierzchołki czworokąta

$$A(0, 1, 2), \quad B = (3, -1, 1), \quad C(7, -2, -3), \quad D(1, 2, -1).$$

- (a) (2p) Oblicz pole czworokąta
- (b) (1p) Znajdź równanie płaszczyzny zawierającej ten czworokąt
- (c) (1p) Określ czy kąt przy wierzchołku  $A$  jest ostry, prosty czy rozwarty.
- (d) (1p) Znajdź równanie prostej (w postaci parametrycznej) przechodzącej przez wierzchołki  $B$  i  $D$
- (e) (2p) Znajdź rzut prostopadły punktu  $A$  na prostą  $BD$ .