Zad.1. (a) *(4p)* Dana jest funkcja

$$f(x) = 6x^2 + 8\sqrt{(x+2)^3}$$

Wyznacz punkty w których styczna do wykresu $f(x)$ jest funkcją stałą. Określ przedziały monotoniczności funkcji $f(x)$.

(b) *(1p)* Podaj przykład funkcji ciągłej $g(x)$ (wzór) takiej, że $g'(1)$ nie istnieje, ale funkcja nie ma ekstremum lokalnego w $x = 1$.

$(x+2)^3 \geq 0$

$x+2 \geq 0$

$x \geq -2$

a) $f(x) = 6x^2 + 8(x+2)^{\frac{3}{2}}$

$f'(x) = 12x + 8 \cdot \frac{3}{2} \cdot (x+2)^{\frac{1}{2}} = 12x + 12\sqrt{x+2} = 0$

$x + \sqrt{x+2} = 0$

$\sqrt{x+2} = -x$

$x \leq 0$

$x \in \langle -2, 0 \rangle$

$x+2 = x^2$

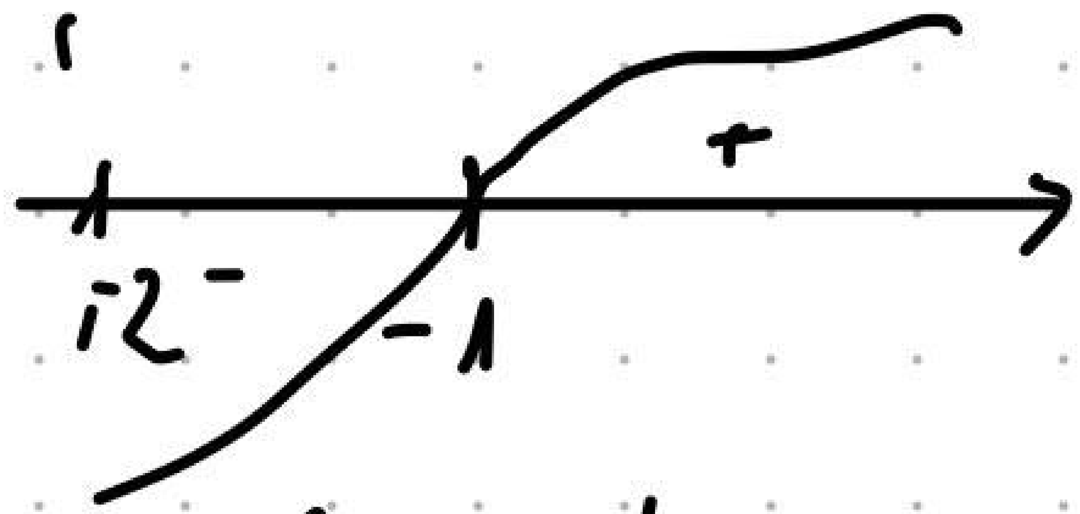
$0 = x^2 - x - 2$

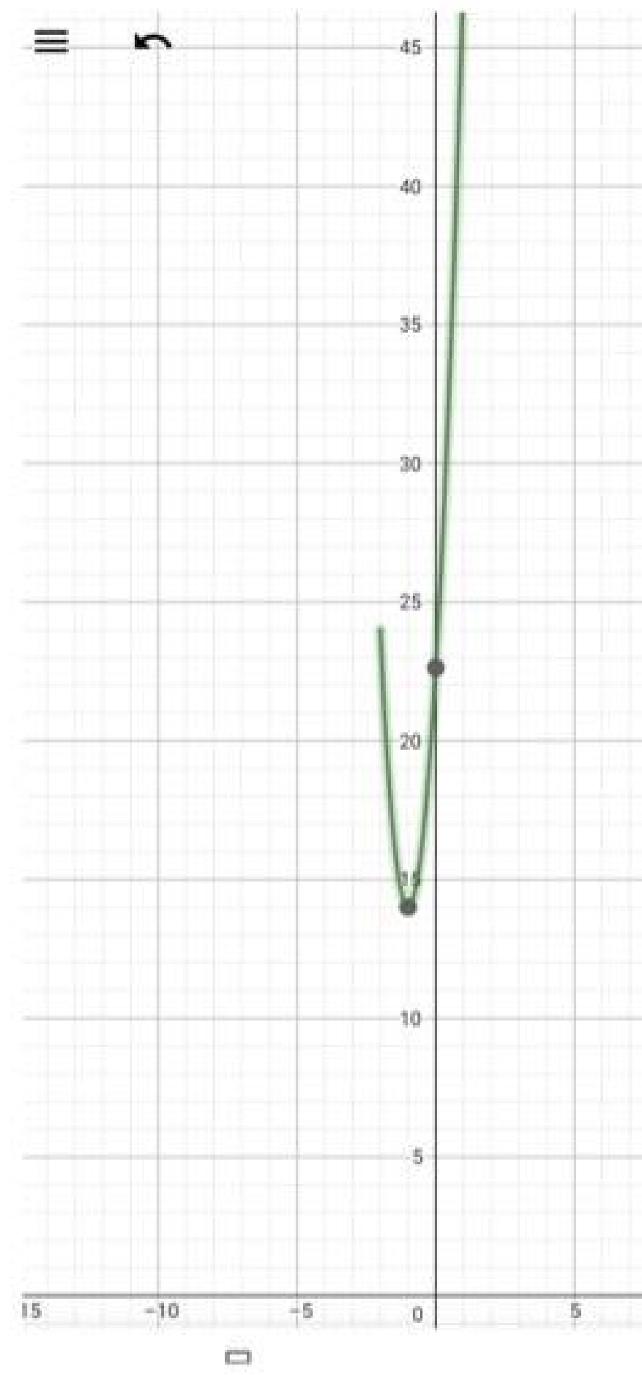
$\Delta = 1 + 4 \cdot 2 = 3^2$

$x_1 = \frac{1+3}{2} = 2 \notin D$

$x_2 = \frac{1-3}{2} = -1$

styczna do wyk. jest f. stałą dla $x = -1$





f. jest malejąca dla $x \in \langle -2, -1 \rangle$

f jest rosnąca dla $x \in \langle -1, \infty)$

b) $g(x) = \arccos x$

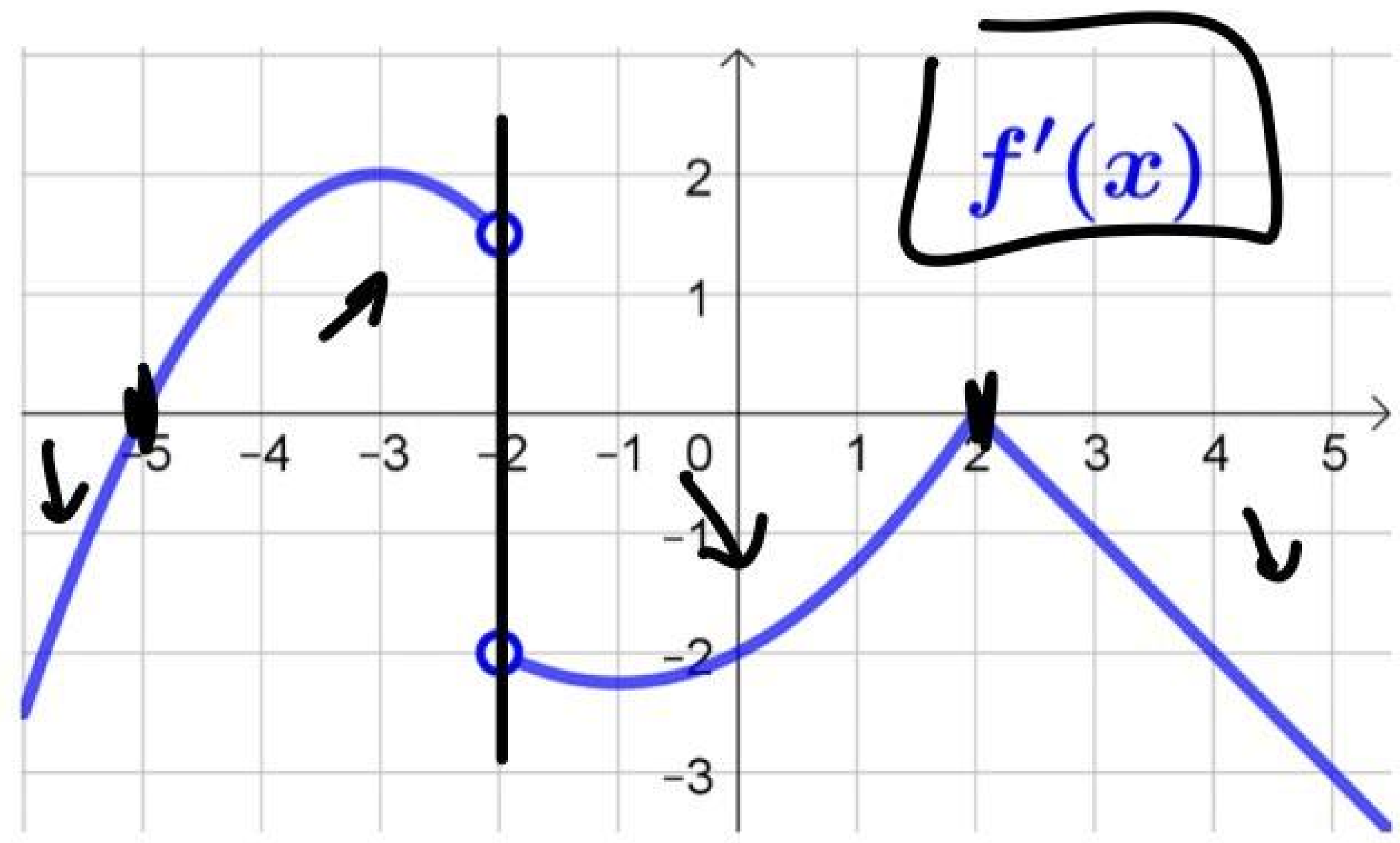
$g'(x) = \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}$

lub

$g(x) = \begin{cases} 1, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$

Zad.2. *(4p)*

Na podstawie pokazanego wykresu pochodnej z ciągłej funkcji $f(x)$ określonej dla $x \in \mathbb{R}$ podaj przedziały monotoniczności funkcji $f(x)$ oraz wartości x dla których funkcja ma ekstrema lokalne (określ czy są to maksima czy minima)



f. maleje w $x \in (-\infty, -5\rangle$ oraz $\langle -2, \infty)$

f. rośnie w $x \in \langle -5, -2 \rangle$

$f_{max\,lok}$ w $x = -2$ $\quad$ $f_{min\,lok}$ w $x = -5$

|Arkusz 2|

ZAD.3. *(4p)* Stosując tw. o całkowaniu i różniczkowaniu szeregów, oblicz sumę

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+2)3^n}{5^n}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n+2) \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n \qquad t = \frac{3}{5} \quad |t| < 1$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n+2) \cdot t^n = \sum_{n=2}^{\infty} (n+2) \cdot t^{n+1} \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{t} \sum_{n=2}^{\infty} \left(t^{n+2}\right)' = \frac{1}{t} \left(\sum_{n=2}^{\infty} t^{n+2}\right)' =$$

$$= \frac{1}{t}\left(\frac{t^4}{1-t}\right)' = \frac{1}{t} \cdot \frac{4t^3 \cdot (1-t) + t^4}{(1-t)^2} = \frac{4t^2 - 4t^3 + t^3}{(1-t)^2}$$

$t = \frac{3}{5}$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n+2)\left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{4 \cdot \frac{9}{\cancel{25}} - 3 \cdot \frac{27}{\cancel{125}}5}{\cancel{\left(\frac{2}{5}\right)^2}} = \frac{36 - \frac{81}{5}}{4}$$

(a) *(4p)* $\int x^2 \cdot \arcsin(x)\, dx$

$$\int x^2 \cdot \arcsin x \, dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \arcsin x & v' = x^2 \\ u' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right\} = \arcsin x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= \underline{\underline{(\arcsin x) \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{9}\sqrt{(1-x^2)^3} + C}}$$

$$\int \frac{x^3}{3\sqrt{1-x^2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 1 - x^2 \Rightarrow x^2 = 1-u \\ du = -2x\,dx \\ -\frac{1}{2} du = x\,dx \end{array} \right\} = \frac{1}{3} \int \frac{-\frac{1}{2}(1-u)}{\sqrt{u}} du = -\frac{1}{6} \int u^{-\frac{1}{2}} du + \frac{1}{6} \int \sqrt{u}\, du =$$

$$= -\frac{1}{3} u^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot u^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{9}\sqrt{(1-x^2)^3} + C$$

(b) *(4p)* $\displaystyle\int \frac{12x-26}{x^3-6x^2+13x}\,dx$

$$\int \frac{12x-26}{x(x^2-6x+13)}\,dx = \int \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2-6x+13}\,dx = \int \frac{-2}{x} + \frac{2x}{x^2-6x+13}\,dx$$

$$12x-26 = A(x^2-6x+13)+(Bx+C)x$$

$x=0: \; -26 = 13A \Rightarrow A=-2$

$x^2: \; 0 = -2+B \Rightarrow B=2$

$x=1: \; -14 = 8\cdot(-2)+(2+C)$

$-14 = -14+C \Rightarrow C=0$

$$0x^2+12x-26 = (A+B)x^2+(C-6A)x+13A$$

$$\begin{cases} A+B=0 & -2+B=0 \Rightarrow B=2 \\ C-6A=12 & C+12=12 \Rightarrow C=0 \\ -26=13A \Rightarrow A=-2 \end{cases}$$

$$\int \frac{-2}{x} + \frac{2x}{x^2-6x+13}\,dx = \underline{\underline{-2\ln|x| + \ln|x^2-6x+13| + 3\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-3}{2} + C}}$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{-2}{x}\,dx = -2\int \frac{1}{x}\,dx = -2\ln|x| + C$$

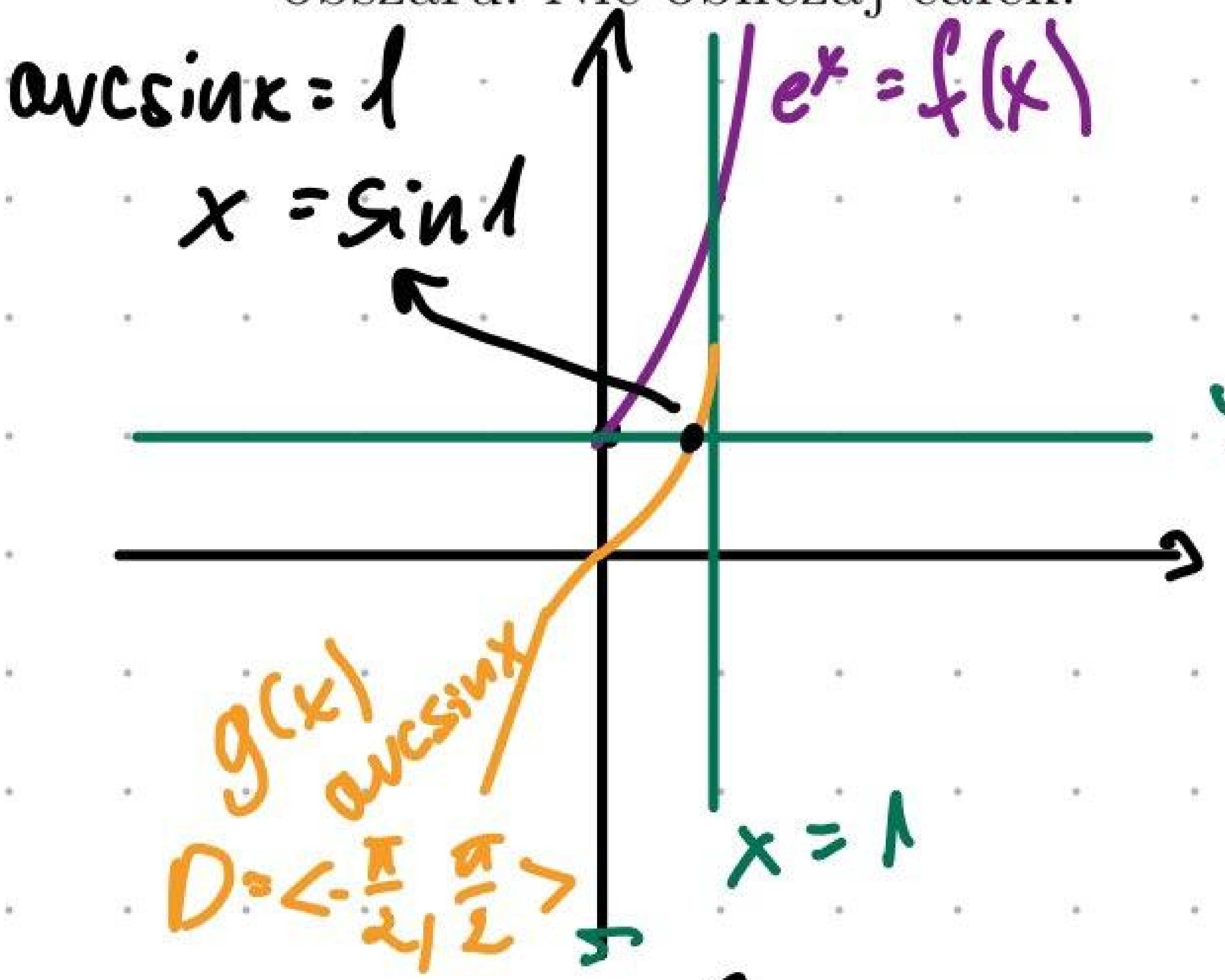
$$\int \frac{2x}{x^2-6x+13}\,dx = \int \underbrace{\frac{2x-6}{x^2-6x+13}}_{\ln|x^2-6x+13|}\,dx + \int \frac{6}{x^2-6x+13}\,dx$$

$$\int \frac{6}{x^2-6x+13}\,dx = 6\int \frac{1}{(x-3)^2+2^2} = \frac{6}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-3}{2} + C = 3\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-3}{2} + C$$

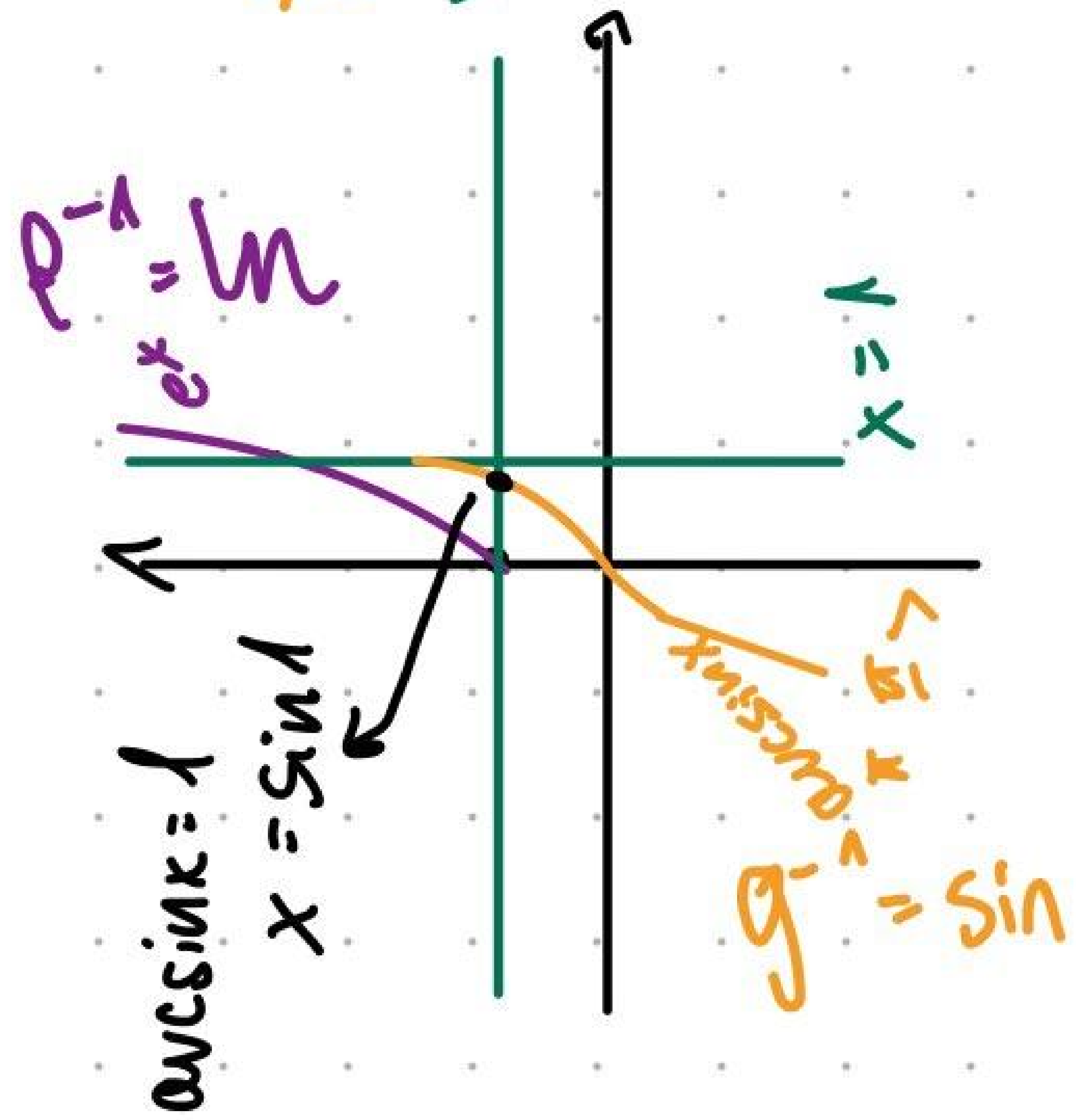
ZAD.5. *(4p)* Dany jest obszar ograniczony krzywymi

$$y = \arcsin x,\ y = e^x,\ y = 1,\ x = 1$$

Zapisz dwie różne całki (jedna po dx, druga po dy) na obliczenie pola tego obszaru. Nie obliczaj całek.



$$P_1 = \int_0^{\sin 1} e^x - 1 \, dx + \int_{\sin 1}^{1} e^x - \arcsin x \, dx$$



$$P_2 = \int_1^{\frac{\pi}{2}} \sin y - \ln y \, dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^{e} 1 - \ln y \, dy$$

(a) *(4p)* $\begin{cases} y' - \dfrac{y}{x^2} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = e^{\cos\left(\frac{1}{x}\right)} \\ y\left(\frac{2}{\pi}\right) = 0 \end{cases}$

(b) *(4p)* $y'' - 2y' = 8xe^{2x}$

$$\int \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\,dx = \left\{ \begin{matrix} t = \frac{1}{x} \\ dt = -\frac{1}{x^2}dx \end{matrix} \right\} = -\int \sin t\,dt = \cos t + C = \cos\frac{1}{x} + C$$

a) $\begin{cases} y' - \frac{y}{x^2} \cdot \sin\frac{1}{x} = e^{\cos\frac{1}{x}} \\ y\left(\frac{2}{\pi}\right) = 0 \end{cases}$

$$y' - y \cdot \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2} = 0$$

$$y' = y \cdot \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\,dx$$

$$\ln y = \cos\frac{1}{x} + C$$

$$y = C_1 e^{\cos\frac{1}{x}} = (x + C_2) \cdot e^{\cos\frac{1}{x}} = \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot e^{\cos\frac{1}{x}}$$

$$y' = C_1'(x) \cdot e^{\cos\frac{1}{x}} + C_1(x) \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \sin\frac{1}{x} \cdot e^{\cos\frac{1}{x}}$$

$$C_1'(x) \cdot e^{\cos\frac{1}{x}} \cancel{+ C_1(x) \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \sin\frac{1}{x} \cdot e^{\cos\frac{1}{x}} - \frac{C_1 e^{\cos\frac{1}{x}}}{x^2} \cdot \sin\frac{1}{x}} = e^{\cos\frac{1}{x}}$$

$$C_1'(x) \cdot e^{\cos\frac{1}{x}} = e^{\cos\frac{1}{x}}$$

$$C_1'(x) = 1$$

$$C_1(x) = x + C_2$$

$$C_1(x) = x - \frac{\pi}{2}$$

$$y\left(\frac{2}{\pi}\right) = \left(\frac{2}{\pi} + C_2\right) e^{\cos\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{2}{\pi} + C_2\right) e^0 = \frac{2}{\pi} + C_2 = 0$$

$$C_2 = -\frac{\pi}{2}$$

(b) *(4p)* $y'' - 2y' = 8xe^{2x}$

$$\varphi = (Ax + B)xe^{2x} = (Ax^2 + Bx)e^{2x}$$

$$\varphi' = (2Ax + B)\cdot e^{2x} + 2e^{2x}(Ax^2 + Bx)$$

$$\varphi'' = 2Ae^{2x} + 2e^{2x}(2Ax + B) + 4e^{2x}(Ax^2 + Bx) + 2e^{2x}(2Ax + B)$$

$$y'' - 2y' = 0$$

$$r^2 - 2r = 0$$

$$r(r-2) = 0$$

$$r = 0 \vee r = 2$$

$$y_0 = C_1e^{0x} + C_2e^{2x} = C_1 + C_2e^{2x}$$

$$\cancel{2}A\cancel{e^{2x}} + \cancel{2}\cancel{e^{2x}}(2Ax + B) + \cancel{4e^{2x}(Ax^2 + Bx)} + \cancel{2e^{2x}(2Ax + B)} - \cancel{2(2Ax + B)}\cancel{e^{2x}} - \cancel{4e^{2x}(Ax^2 + Bx)} = \cancel{8}x\cancel{e^{2x}}$$

$$A + 2Ax + B = 4x \qquad \begin{cases} A + B = 0 \Rightarrow B = -2 \\ 2A = 4 \Rightarrow A = 2 \end{cases}$$

$$y = C_1 + C_2e^{2x} + \underbrace{(2x - 2)xe^{2x}}_{\varphi}$$