Arkusz 1

Zad. 1. *(5p)* Dana jest funkcja

$$f(x) = -4\sqrt{(6-x)^3} - 3x^2$$

(a) Wyznacz ekstrema lokalne i przedziały monotoniczności $f(x)$.

(b) Podaj przykład funkcji $g(x)$ (wzór) takiej, że $g'(1) = 0$, ale funkcja nie ma ekstremum lokalnego w $x = 1$.

Zad. 2. *(6p)* Oblicz całki

(a) $\displaystyle\int x \cdot \frac{\cos x}{\sin^3 x}\, dx$

(b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{4}{x^2 + 2x - 3}\, dx$

Arkusz 2

Zad. 3. *(2p)* Korzystając z różniczki zupełnej, oblicz przybliżoną wartość wyrażenia

$$\sqrt{(2,9)^3 - 2}$$

Zad. 4. *(7p)* Rozwiąż równania

(a) $y'' - 6y' + 9y = 2e^x + (6x+2)e^{3x}$

(b) $(y^2 + y)y' \operatorname{tg}^2 x - 1 + y^2 = 0$

niestety rozwiązania arkuszów pop. są wybrakowane

Arkusz 3

Zad. 5. *(4p)* Oblicz objętość bryły powstałej przez obrót krzywej

$$y = \sqrt{\frac{x-1}{x^2+5x+7}}$$

wokół osi OX na przedziale $[1, 2]$

Zad. 6. *(6p)*

(a) Określ przedział zbieżności szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n+1}$$

(b) Wyprowadź wzór na sumę powyższego szeregu

(c) Wykorzystaj wzór znaleziony w (b) do obliczenia

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)2^n}$$

(d) Oblicz $\lim_{n\to\infty} a_n$ wiedząc, że dla $a_n \geq b_n > 0$ mamy $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 2$ oraz $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \frac{1}{2}$.

1.

b) $g(x) = (x-1)^3$

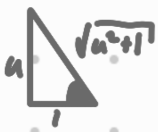
a) $f(x) = -4\cdot(6-x)^{\frac{3}{2}} - 3x^2$ $\qquad D=\mathbb{R}$

$f'(x) = -4\cdot\frac{3}{2}\cdot(6-x)^{\frac{1}{2}} - 6x$ $\qquad D'=\mathbb{R}$

$f''(x) = -6\cdot(-\frac{1}{2})\cdot\frac{1}{\sqrt{6-x}} - 6 = \frac{3}{\sqrt{6-x}} - 6$ $\qquad D''=\mathbb{R}-\{6\}$

2.

a) $\int x\cdot\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx = \left|\begin{array}{ll} u=x & v'=\frac{\cos x}{\sin 3x} \\ u'=1 & v=-\frac{1}{2}\mathrm{ctg}^2 x\end{array}\right| = -\frac{1}{2}x\,\mathrm{ctg}^2 x + \frac{1}{2}\int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx$

$= \left|\begin{array}{l} u=\mathrm{tg}x \\ x=\mathrm{arctg}u \\ dx=\frac{1}{u^2+1}du\end{array}\right.$ 

$\left.\begin{array}{l}\cos x=\frac{1}{\sqrt{u^2+1}} \\ \sin x=\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\end{array}\right| = -\frac{1}{2}x\,\mathrm{ctg}^2 x + \frac{1}{2}\int\frac{1}{u^2+1}\cdot\frac{1}{u^2+1}\cdot\frac{u^2+1}{u^2}du =$

$= -\frac{1}{2}x\,\mathrm{ctg}x + \frac{1}{2}\int\frac{1}{(u^2+1)u^2}du = -\frac{1}{2}x\,\mathrm{ctg}x + \frac{1}{2}\int\frac{-1}{(u^2+1)} + \frac{1}{u^2}du =$

$-\frac{1}{2}x\,\mathrm{ctg}x - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}u + \frac{1}{2}\cdot(-2)\cdot u^{-1} = -\frac{1}{2}x\,\mathrm{ctg}x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{\mathrm{tg}x} + C$

$\int\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx = \int\mathrm{ctg}x\cdot\frac{1}{\sin^2 x}dx = \left|u=\mathrm{ctg}x,\ du=\frac{-1}{\sin^2 x}dx\right| = -\int u\,du = -\frac{1}{2}u^2 + C$

b) $\int_0^2\frac{4}{x^2+2x-3}dx$

$x^2+2x-3=0$
$x^2+2x+1=4$
$(x+1)^2=2^2$
$x+1=2 \ \vee\ x+1=-2$
$x=1 \qquad x=-3$

$\frac{4}{(x-1)(x+3)} = \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+3}$

$\int\frac{4}{(x-1)(x+3)}dx = \int\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3}dx = \ln|x-1| - \ln|x+3| + C$

$\int_0^2\frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+3}dx = \left[\ln|x-1| - \ln|x+3|\right]_0^2 =$ niestety zadanie niedokończone

UWAGA
$\ln 0$ dla $x=1$

3. brak

4. brak

5.
$$y=\sqrt{\frac{x-1}{x^2+5x+7}}$$

na $\langle 1,2\rangle$

$$V=\int_1^2 \pi\cdot y^2\,dx$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2+5x+7=0 \\ \Delta=25-28=-3<0 \end{array}\right] \qquad x^2+5x+7$$

$$\int\frac{x-1}{x^2+5x+7}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x-2}{x^2+5x+7}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+5}{x^2+5x+7}-\frac{7}{x^2+5x+7}\,dx=$$

$$\int\frac{2x+5}{x^2+5x+7}\,dx=\ln|x^2+5x+7|+C_1$$

$$\int\frac{7}{x^2+5x+7}\,dx=7\int\frac{1}{(x+\frac{5}{2})+\frac{3}{4}}\,dx=7\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\mathrm{arctg}\left(\frac{(x+\frac{5}{2})2}{\sqrt{3}}\right)+C_2$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2+5x+7|-\frac{7}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\frac{2x+5}{\sqrt{3}}\right)+C$$

$$V=\frac{1}{2}\ln|x^2+5x+7|-\frac{7}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\frac{2x+5}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_1^2\cdot\pi=$$

$$\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\ln 21-\frac{7}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\frac{9}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{2}\ln 13+\frac{7}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

6.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n+1}$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{3x\cdot(3x)^n}{n+2} \cdot \frac{n+1}{(3x)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{n+2} \cdot 3x \right| = |3x|$$

$|3x| < 1$

$-1 < 3x < 1$

$-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$

dla $x = -\frac{1}{3}$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ ← szereg anharmoniczny, zbieżny

dl $= \frac{1}{3}$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ← szereg harmoniczny, rozbieżny

ODP. $x \in \langle -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

d) $\lim_{n\to\infty} a_n = ?$

$a_n \geq b_n > 0$, wszystkie wyrazy obu ciągów są dodatnie

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a_n}{b_n}} = \left[\sqrt[\infty]{2}\right] = 1$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \frac{1}{2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{a_n}}{\sqrt[n]{b_n}} = 1 \wedge \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{a_n}\right)^n = \left[\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\infty}\right] = 0$$