Arkusz 1

Zad. 1. *(5p)* Dana jest funkcja

$$f(x) = \left(\frac{8}{3} - x\right)\sqrt[5]{x^3}$$

(a) Wyznacz punkty przegięcia wykresu $f(x)$ i określ przedziały na których $f(x)$ jest jednocześnie rosnąca i wklęsła

(b) Podaj warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego funkcji w punkcie x_0.

Zad. 2. *(2p)* Znajdź przedziały na których poniższa funkcja jest stała. Znajdź wartości tych stałych.

$$f(x) = 2 \operatorname{arc\,tg} x + \arcsin \frac{2x}{x^2+1}$$

Arkusz 2

Zad. 3. *(6p)* Oblicz całki

(a) $\displaystyle\int \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x}\, dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x + 2}\, dx$

Zad. 4. *(3p)*

(a) Zapisz dwa różne wzory na obliczenie pola obszaru zawartego pomiędzy podanymi krzywymi. Nie obliczaj pola.

$$y = 2^x, \quad y = \sin\frac{\pi}{2}x, \quad x = 0, \quad x = 1$$

(b) Podaj warunek konieczny całkowalności funkcji na przedziale $[a, b]$

Arkusz 3

Zad. 5. *(8p)*

(a) Rozwiąż równanie $y'' - 2y' = 8\sin 2x + 2xe^{2x}$

(b) Rozwiąż równanie $y' \operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{tg} y = 0$

(c) Wyznacz i naszkicuj obszary istnienia i jednoznaczności rozwiązań równania z punktu (b).
Następnie określ na jakim maksymalnie przedziale (dla jakich x) może istnieć rozwiązanie tego równania z warunkiem początkowym $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ oraz jakie wartości może ono przyjmować.

Zad. 6. *(6p)*

(a) Określ przedział zbieżności szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+3)x^n \cdot 3^n$$

i wyprowadź wzór na jego sumę.

(b) Wykorzystaj znaleziony wzór do obliczenia

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+3)}{2^n}$$

(c) Określ zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, wiedząc że dla $n \geq 0$, $a_n > 0$ oraz $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = 2$. Odpowiedź uzasadnij.