

KARTKA 1

ZAD.1. (5p) Przy dzieleniu wielomianu $W(x) \in \mathbb{Z}_7[x]$ przez $(2x^2 + 6x + 6)$ reszta z dzielenia wynosi $(3x + 1)$, a przy dzieleniu przez $(3x^2 + x)$ reszta wynosi $(5x + 2)$. Znajdź resztę z dzielenia $W(x)$ przez $(x^2 + 2x + 6)$ (wszystko w $\mathbb{Z}_7[x]$).

ZAD.2. (5p) Określ dla jakich wartości parametru k , układ równań ma niezerowe rozwiązania. Znajdź te rozwiązania.

$$\begin{cases} (k+2)x - y - 2z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ kx + (k+2)y = 0 \end{cases}$$

ZAD.3.(a) (3p) Rozwiąż równanie $(2AX)^{-1} = X^{-1} + B$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

(b) (3p) Rozwiąż nierówność

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 3-x & -3 \\ -4 & x-1 & 5 & -4 \\ 4 & 2 & x-4 & 4 \\ 2 & -x & -4 & x-1 \end{vmatrix} > \det(X) - 21$$

KARTKA 2

ZAD.4. (a) (5p) Oblicz. Wynik podaj w postaci algebraicznej

$$\left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{(-1 + i)(-\sqrt{3} - i)} \right)^{101}$$

(b) (4p) Rozwiąż równanie w \mathbb{C}

$$z^4 + z\sqrt{3} + iz\sqrt{3} = 0$$

KARTKA 3

ZAD.5. Dane są dwie proste,

$$l_1 : \frac{x-1}{2} = y+2 = \frac{z+3}{-1}, \quad l_2 : \frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-2}$$

(a) (2p) Znajdź równanie płaszczyzny π zawierającej te proste.

(b) (2p) Znajdź odległość między prostymi l_1 i l_2 .

(c) (2p) Znajdź współrzędne punktu R będącego rzutem prostopadłym punktu $P = (-4, 5, -3)$ na płaszczyznę π .

(d) (2p) Określ czy kąt $\angle PRQ$, gdzie $Q = (1, 0, -1)$, jest ostry, prosty, czy rozwarty.