KARTKA 1

ZAD.1. Rozwiąż równania różniczkowe

(a) *(4p)* $(1-x^2)y' - xy = \ln(\arcsin x)$

(b) *(4p)* $y'' - 6y' + 9y = 3x^2 - 1 + e^{3x}$

KARTKA 2

ZAD.2. (a) *(1p)* Podaj warunek konieczny istnienia całki oznaczonej $\int_a^b f(x)\,dx$

Oblicz całki

(b) *(4p)* $\int_0^{\pi/3} \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}\,dx$

(c) *(3p)* $\int \cos(\ln x)\,dx$

KARTKA 3

ZAD.3. *(1p)* Podaj przykład funkcji (wzór) $f(x)$, która w $x=1$ ma pionową styczną ($f'(1)=\infty$).

(b) *(4p)* Znajdź równanie stycznej do krzywej $f(x) = x^{(x^2+1)}$ w punkcie $x = x_0$, w którym $g'(x_0) = \frac{\pi}{4}$, gdzie $g(x) = x \operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2}$

(c) *(5p)* Znajdź ekstrema, punkty przegięcia, określ przedziały monotoniczności i wklęsłości/wypukłości funkcji

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 4\ln(x-3)$$

ZAD.4. *(5p)* Zapisz dwa różne wzory (dwie całki, jedna po dx, druga po dy) na obliczenie pola obszaru ograniczonego przez podane krzywe. Wykonaj szkic. Nie obliczaj pola.

$$y = \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad y = \pi, \quad x = 1$$

ZAD.5. (a) *(1p)* Podaj warunek konieczny zbieżności nieskończonego szeregu liczbowego

(b) *(2p)* Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}$$

(c) *(3p)* Wyznacz przedział zbieżności szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1-x}{2}\right)^n$$

niestety rozwiązania arkuszów pop. są wybrakowane

1. brak

2.

b) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}\,dx$

a) istnieje całka oznaczona $\Leftrightarrow$ f. jest ograniczona

c) $\int \cos(\ln x)\,dx$

b) $\int \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}\,dx = \left| \begin{matrix} u=\ln\cos x & v'=\frac{1}{\cos^2 x} \\ u'=\frac{-\sin x}{\cos x} & v=\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x} \end{matrix} \right| = \operatorname{tg}x\cdot\ln(\cos x) + \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx =$

$= \operatorname{tg}x\cdot\ln(\cos x) + \operatorname{tg}x - x + C \qquad C\in\mathbb{R}$

$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \left| \begin{matrix} u=\operatorname{tg}x \\ x=\operatorname{arctg}u \\ dx=\frac{1}{u^2+1}du \end{matrix} \right| = \int \frac{u^2}{u^2+1}\,du = \int 1-\frac{1}{u^2+1}\,du = u-\operatorname{arctg}u + C = \operatorname{tg}x - x + C$

$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}\,dx = \left[\operatorname{tg}x\cdot\ln(\cos x) + \operatorname{tg}x - x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\cdot\ln\frac{1}{2} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}0\cdot\ln 1 + \operatorname{tg}0 - 0 =$

$= \sqrt{3}\ln\frac{1}{2} + \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$

c) $\int \cos(\ln x)\,dx = \left| \begin{matrix} u=\cos(\ln x) & v'=1 \\ u'=\frac{1}{x}\cdot(-\sin(\ln x)) & v=x \end{matrix} \right| = x\cdot\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\,dx =$

$= \left| \begin{matrix} u=\sin(\ln x) & v'=1 \\ u'=\frac{1}{x}\cdot\cos(\ln x) & v=x \end{matrix} \right| = x\cdot\cos(\ln x) + x\cdot\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx$

$2\cdot\int \cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x)$

$\int \cos(\ln x)\,dx = \frac{1}{2}x(\cos(\ln x) + \sin(\ln x))$

3.

a) np. $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$??

b) $f(x) = x^{x^2+1} = x\cdot x^{x^2} = x\cdot e^{\ln x^{x^2}} = x\cdot e^{x^2\ln x}$

$[e^{x^2\cdot\ln x}]' = e^{x^2\cdot\ln x}\cdot[x^2\cdot\ln x]'$

$[x^2\cdot\ln x]' = 2x\ln x + \frac{1}{x}\cdot x^2 = 2x\ln x + x$

$f'(x) = e^{x^2\ln x} + x\cdot e^{x^2\ln x}\cdot(2x\ln x + x) = x^{x^2} + x^{x^2}\cdot x\cdot x(2\ln x + 1) =$

$= x^{x^2}(1 + x^2(2\ln x + 1))$

$g(x) = x\operatorname{arctg}x - \ln\sqrt{1+x^2}$

$g'(x) = \operatorname{arctg}x + \frac{x}{x^2+1} - 2x\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arctg}x + \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+1} = \operatorname{arctg}x$ itd.

c) $f(x)=\frac{x^2}{2}-4\ln(x-3)$ $\qquad D=(-3,+\infty)$

$f'(x)=x-4\cdot\frac{1}{x-3}$ $\qquad D'=(-3,+\infty)$

$f''(x)=1-4\cdot(-1)\cdot\frac{1}{(x-3)^2}=1+\frac{4}{(x-3)^2}$ $\qquad D''=(-3,+\infty)$

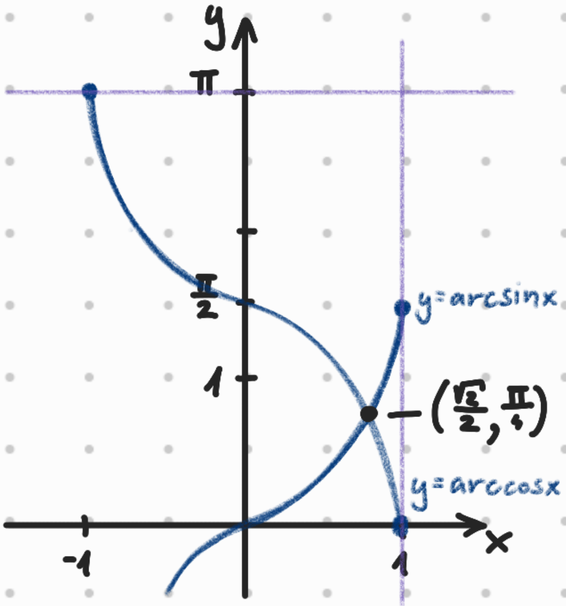
4.

$y=\arcsin x$

$y=\arccos x$

$y=\pi$

$x=1$



$$P=\int_{-1}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\pi-\arccos x\,dx+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\pi-\arcsin x\,dx$$

$y=\arcsin x$ $\qquad y=\arccos x$

$x=\sin y$ $\qquad x=\cos y$

$$P=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin y-\cos y\,dy+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}1-\cos y\,dy$$

5.

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

b) $\sum_{n\to\infty}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)\cdot\cancel{(2n)!}}{(n+1)^2\cdot(n+1)^{2n}}\cdot\frac{n^{2n}}{\cancel{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n}\cdot\frac{(2n+2)}{(n+1)^2} = \left[\frac{1}{e^2}\cdot 0\right] = 0 < 1 \Rightarrow \text{szereg zbieżny}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{-n-1}\right]^{\frac{2n}{-n-1}} = e^{-2}$$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1-x}{2}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1-x}{2}\right)^n\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[2]{\sqrt[n]{n}}}\cdot\left|\frac{1-x}{2}\right| = \left[\frac{1}{\sqrt[2]{1}}\cdot\left|\frac{1-x}{2}\right|\right] = \left|\frac{1-x}{2}\right|$$

$\left|\frac{1-x}{2}\right| < 1$

$-1 < \frac{1-x}{2} < 1$

$-2 < 1-x < 2 \quad |-1$

$-3 < -x < 1 \quad |\cdot(-1)$

$3 > x > -1$

dla $x=-1$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ $\leftarrow$ sz. Dirichleta, $p=\frac{1}{2}$, rozbieżny

dla $x=3$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

KRYT. LEIBNIZA

$b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

① $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

② $b_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

$\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$

$\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

$b_n > b_{n+1}$

① $\wedge$ ② $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ jest zbieżny

$x \in (-1, 3\rangle$