ZAD.1. .

(a) *(1p)* Podaj warunek konieczny różniczkowalności funkcji $f(x)$ w $x = x_0$.

(b) *(4p)* Sprawdź czy prawdziwa jest nierówność

$$f'(1) + g''(1) < h'''(1)$$

dla

$$f(x) = x^{\left(x^4+1\right)} \quad , \quad g(x) = \operatorname{arc\,tg} x^2$$
$$h(x) = \cos 2x - 2\cos^2 x$$

w pun. x_0

a) jeżeli fun. jest różniczkowalna, to jest ciągła w otoczeniu tego punktu

b) $f(x) = x^{x^4+1}$

$\left(\left(x^4+1\right)\cdot \ln|x|\right)' =$

$= 4x^3 \cdot \ln|x| + \frac{1}{x}\cdot\left(x^4+1\right)$

$f'(x) = \left(e^{(x^4+1)\ln|x|}\right)' = \underline{\left(4x^3\cdot \ln|x| + x^3 + \frac{1}{x}\right)\cdot e^{(x^4+1)\ln|x|}}$

$g(x) = \operatorname{arctg} x^2$

$g'(x) = 2x \cdot \frac{1}{1+x^4} = \frac{2x}{1+x^4}$

$g''(x) = \frac{2(1+x^4) - 4x^3 \cdot 2x}{(1+x^4)^2} = \underline{\frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}}$

$h(x) = \cos 2x - 2\cos^2 x = 2\cos^2 x - 1 - 2\cos^2 x = -1$

$h'(x) = 0$

$h''(x) = 0$

$h'''(x) = 0$

$\frac{2-6}{4} + (4\cdot 0 + 1 + 1)\cdot 1 < 0$

$-1 + 2 < 0$

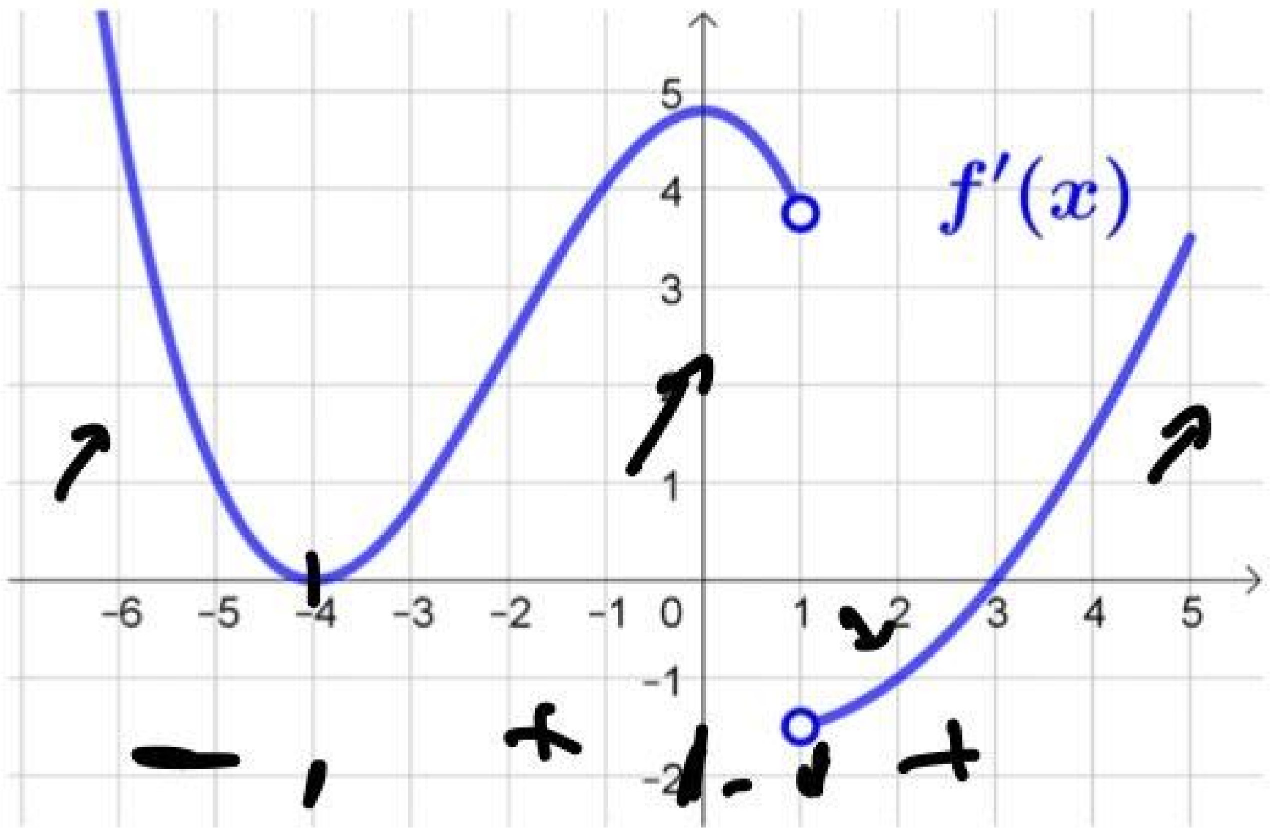
$1 < 0$

sprzeczność

ZAD.2. *(8p)* Na podstawie pokazanego wykresu pochodnej z ciągłej funkcji $f(x)$ określonej dla $x \in \mathbb{R}$ podaj:

(i) przedziały monotoniczności funkcji $f(x)$ oraz wartości x dla których funkcja ma ekstrema lokalne (określ czy są to maksima czy minima)

(ii) przedziały wklęsłości/wypukłości funkcji $f(x)$ oraz wartości x dla których wykres funkcji $f(x)$ ma punkty przegięcia.



i) f. rosnąca $x \in (-\infty, 1\rangle$ oraz $x \in \langle 3, \infty)$
f. malejąca $x \in \langle -1, 3\rangle$

ekstr. lok. (max): $x = 1$
ekstr. lok. (min): $x = 3$

ii) f. wyp. $x \in (-4, 0)$ oraz $x \in (1, \infty)$
f. wklęsła $x \in (-\infty, -4)$ oraz $x \in (0, 1)$

punkty przeg.: $x = -4$, $x = 0$, $x = 1$

ZAD.3. .

(a) *(1p)* Podaj warunek konieczny zbieżności szeregu liczbowego

(b) *(4p)* Określ przedział zbieżności szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-7)^n}{(n+1)\cdot 3^n}$$

a) jeżeli szereg $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-7)^n}{(n+1)3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{2x-7}{3}\right)^n$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{2x-7}{3}\right)^n\right|} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{|n+1|}}}_{1} \cdot \sqrt[n]{\left|\frac{2x-7}{3}\right|^n} = \left|\frac{2x-7}{3}\right|$

$-1 < \frac{2x-7}{3} < 1$

$-3 < 2x-7 < 3$

$4 < 2x < 10$

$2 < x < 5$

$x = 5: \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{10-7}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

$b_n \le a_n$

$\frac{1}{2n} \le \frac{1}{n+1}$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}$ → sz. Dirichleta $p=1 \Rightarrow$ rozb.

$x=2: \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{4-7}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}\cdot(-1)^n$

$\left|\frac{1}{n+1}\cdot(-1)^n\right| = \frac{1}{n+1}$ ← rozb, jw.

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-n-1}{(n+1)(n)} = \frac{-1}{n^2+n} \Rightarrow$ malejące

$\forall_{n>1} \frac{1}{n+1} > 0$

⇒ z kryt. Leib. sz. war. zbieżny

$x \in \langle 2, 5)$

Zad.4. Oblicz całki

(a) (4p) $\displaystyle\int \frac{x^2 \cdot \operatorname{arc\,tg} x}{x^2+1}\,dx$

(b) (4p) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x^2+2)}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{x^2 \cdot \operatorname{arctg}x}{x^2+1}\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg}x & \operatorname{tg}u = x \\ du = \frac{1}{1+x^2}\,dx & \end{array} \right\} = \int u \operatorname{tg}^2 u \, du =$

$\displaystyle = \int u \cdot \frac{\sin^2 u}{\cos^2 u}\, du = \left\{ \begin{array}{ll} a = u & b' = \frac{1-\cos^2 u}{\cos^2 u} \\ a' = 1 & b = \operatorname{tg}u - u \end{array} \right\} = u\operatorname{tg}u - u^2 - \int \operatorname{tg}u - u\,du =$

$\displaystyle \frac{\sin^2 u}{\cos^2 u} = \frac{1-\cos^2 u}{\cos^2 u}$

$\displaystyle = u\operatorname{tg}u - u^2 + \ln|\cos u| + \frac{u^2}{2} + C =$

$\displaystyle = \operatorname{arctg}(x)\, x - \operatorname{arctg}^2 x + \ln|\cos(\operatorname{arctg}x)| + \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + C$

$\displaystyle \int \operatorname{tg}u\,du = \left\{ \begin{array}{l} t = \cos u \\ dt = -\sin u \end{array} \right\} = \int -\frac{1}{t}\,dt = -\ln|t| = -\ln|\cos u)$

$\displaystyle \operatorname{tg}u = \frac{\sin u}{\cos u}$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x^2+2)}\,dx = 0 + 0 - \ln 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\ln 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\displaystyle \int \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x^2+2)}\,dx = \int \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{(x^2+2)}\,dx = \int \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2+2}\,dx =$

$\displaystyle = \ln|x-1| + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C$

$x^2 + x + 1 = A(x^2+2) + (Bx+C)(x-1)$

$x=1: \quad 3 = 3A \Rightarrow A = 1$

$x^2: \quad 1 = 1 + B \Rightarrow B = 0$

$x=0: \quad 1 = 2 - C \Rightarrow C = 1$

Zad.5. Rozwiąż

(a) *(4p)* $\begin{cases} y' - \frac{y}{x} = \sqrt{x} \cdot \cos\sqrt{x} \\ y(\pi^2) = 0 \end{cases}$

(b) *(4p)* $y'' - 3y' + 2y = 2xe^{4x}$

a) $\begin{cases} y' - \frac{y}{x} = \sqrt{x} \cdot \cos\sqrt{x} \\ y(\pi^2) = 0 \end{cases}$

$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \cos\sqrt{x}\,dx = \left\{ \begin{matrix} u = \sqrt{x} \\ du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \end{matrix} \right\} =$

$= 2\int \cos u\,du = 2\sin u + C = 2\sin\sqrt{x} + C$

$\upsilon(x) = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln|x|} = \frac{1}{x}$

$\left(y \cdot \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}$

$y \cdot \frac{1}{x} = 2\sin\sqrt{x} + C$

$\underline{y = 2x\sin\sqrt{x} + Cx}$

$y(\pi^2) = 2\pi^2 \sin\pi + C\pi^2 = C\pi^2 = 0 \Rightarrow C = 0$

$\underline{y = 2x\sin\sqrt{x}}$

b) $y'' - 3y' + 2y = 2xe^{4x}$ $\qquad \delta = 4$

1° $y'' - 3y' + 2y = 0$

$r^2 - 3r + 2 = 0$

$\Delta = 9 - 8 = 1$

$r_1 = \frac{3+1}{2} = 2 \quad r_2 = 1$

$\underline{y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{2x}}$

2° $\varphi = (Ax + B)e^{4x}$

$\varphi' = Ae^{4x} + 4e^{4x}(Ax + B)$

$\varphi'' = \underline{4e^{4x} \cdot A} + 16e^{4x}(Ax + B) + \underline{4Ae^{4x}}$

2° cd. można pomin. e^{4x}

$\cancel{8}5A + \cancel{16}(Ax + B) - \cancel{3}A - \cancel{12}(Ax + B) + 2(Ax + B) = 2x$

$5A + 6B + 6Ax = 2x$

$6A = 2 \qquad 5A + 6B = 0$

$A = \frac{1}{3} \qquad 6B = -\frac{5}{3}$

$B = -\frac{5}{18}$

$\underline{\varphi = \left(\frac{1}{3}x - \frac{5}{18}\right)e^{4x}}$

$\underline{y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \left(\frac{1}{3}x - \frac{5}{18}\right)e^{4x}}$