Arkusz 1

Zad. 1. Dana jest funkcja

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2-9)^2}$$

(a) *(4p)* Wyznacz lokalne maksima i minima oraz przedziały monotoniczności funkcji $f(x)$

(b) *(1p)* Wyznacz równanie stycznej do wykresu $f(x)$ w punkcie $x_0 = 1$

Zad. 2. *(5p)* Oblicz wartość wyrażenia

$$f'(1) + g''(1) + h'''(1)$$

gdzie

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x \quad , \quad g(x) = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x$$

$$h(x) = \cos 2x + 2\sin^2 x$$

Arkusz 2

Zad. 3. *(6p)* Oblicz całki

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{3x^2+x+2}{(x^2+3x+3)(x-1)}\,dx$

niestety rozwiązania arkuszów pop. są wybrakowane

Arkusz 3

Zad. 4. *(3p)* Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi

$$y = \operatorname{arc\,tg} x, \quad y = 2x, \quad x = 1$$

Zad. 5. *(4p)* Określ przedział zbieżności szeregu i wyprowadź wzór na jego sumę.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)x^n}{5^n}$$

Arkusz 4

Zad. 6. Rozwiąż równania

(a) *(4p)* $2y'' + 4y' = e^x + 4x$

(b) *(3p)* $xy' = 2y + x^2 \ln x$

1.

$f(x)=(x^2-9)^{\frac{2}{3}}$ $\qquad D=\mathbb{R}$

$f'(x)=2x\cdot\frac{2}{3}\cdot(x^2-9)^{-\frac{1}{3}}=\frac{4}{3}\cdot x\cdot(x^2-9)^{-\frac{1}{3}}=\frac{4}{3}\cdot\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-9}}$

$f''(x)=\frac{4}{3}\left((x^2-9)^{-\frac{1}{3}}+x\cdot 2x\cdot(-\frac{1}{3})\cdot(x^2-9)^{-\frac{4}{3}}\right)=\frac{4}{3}(x^2-9)^{-\frac{1}{3}}\left(1-\frac{2x^2}{3(x^2-9)}\right)$

$D'=D''=\mathbb{R}-\{-3,3\}$

b) $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$f(1)=\sqrt[3]{8^2}=\sqrt[3]{64}=4$

$f'(1)=2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{1-9}}=2\cdot\frac{2}{3}\cdot(-\frac{1}{2})=-\frac{2}{3}$

$y=4-\frac{2}{3}(x-1)$

$y=-\frac{2}{3}x+4\frac{2}{3}$

2. brak

3.

a) $\int\frac{1}{\cos x}dx=\int\frac{\cos x}{1-\sin^2x}dx=\left|\begin{matrix}u=\sin x\\ du=\cos x\,dx\end{matrix}\right|=\int\frac{1}{1-u^2}du=\int\frac{\frac{1}{2}}{1-u}+\frac{\frac{1}{2}}{1+u}du=$

$\frac{1}{2}\ln|1-u|+\frac{1}{2}\ln|1+u|+C$, $C\in\mathbb{R}$

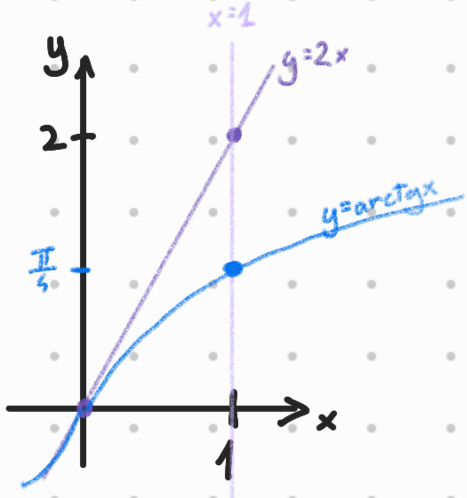
b) brak

4.

$y = \operatorname{arctg} x$

$y = 2x$

$x = 1$



$$P = \int_0^1 2x - \operatorname{arctg} x \, dx$$

$$\int 2x - \operatorname{arctg} x \, dx = x^2 - \int \operatorname{arctg} x \, dx = \left| \begin{matrix} u = \operatorname{arctg} x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x^2+1} & v = x \end{matrix} \right| = x^2 - x\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1} \, dx =$$

$$= x^2 - x\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

$$P = x^2 - x \cdot \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) \Big|_0^1 = 1 - \operatorname{arctg} 1 + \frac{1}{2}\ln 2 - 0 + 0 - \frac{1}{2}\ln 1 = 1 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$$

5.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2) \cdot x^n}{5^n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{(n+3) \cdot x \cdot x^n}{5 \cdot 5^n} \cdot \frac{5^n}{x^n (x+2)} \right| = \lim \left| \frac{x+3}{x+2} \cdot \frac{x}{5} \right| = \left| \frac{x}{5} \right|$$

$$-1 < \frac{x}{5} < 1$$

$$-5 < x < 5$$

DLA $x = -5$: $\sum_{n=0}^{\infty} (n+2) \cdot \frac{(-5)^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) \cdot (-1)^n$

$$\lim_{n \to \infty} (-1)^n \cdot (n+2) = \begin{cases} -\infty & \text{dla nieparz. wyrazów} \\ \infty & \text{dla parz. wyrazów} \end{cases}$$ $\Rightarrow$ granica nie istnieje

$\Downarrow$

sz. rozb.

DLA $x = 5$: $\sum_{n=0}^{\infty} (n+2) \cdot \frac{5^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)$

$\lim_{n \to \infty} (n+2) = \infty$ $\Rightarrow$ sz. rozb.

$x \in (-5, 5)$

6. brak