Arkusz 1

Zad.1. .

(a) *(1p)* Podaj warunek konieczny różniczkowalności funkcji $f(x)$ w $x = x_0$.

(b) *(4p)* Sprawdź czy prawdziwa jest nierówność

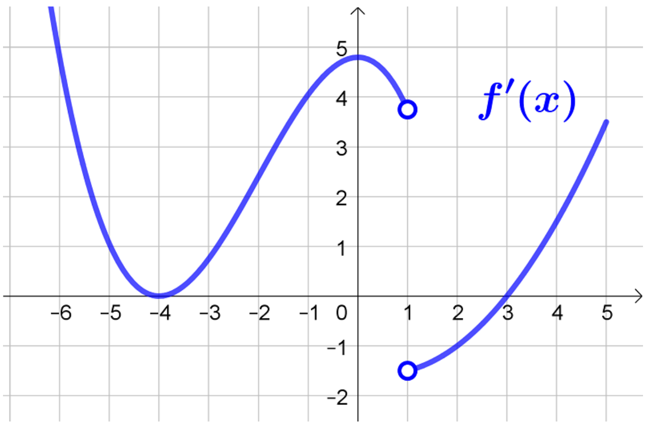
$$f'(1) + g''(1) < h'''(1)$$

dla

$$f(x) = x^{\left(x^4+1\right)} \quad , \quad g(x) = \operatorname{arc\,tg} x^2$$
$$h(x) = \cos 2x - 2\cos^2 x$$

Zad.2. *(8p)* Na podstawie pokazanego wykresu pochodnej z ciągłej funkcji $f(x)$ określonej dla $x \in \mathbb{R}$ podaj:

(i) przedziały monotoniczności funkcji $f(x)$ oraz wartości x dla których funkcja ma ekstrema lokalne (określ czy są to maksima czy minima)
(ii) przedziały wklęsłości/wypukłości funkcji $f(x)$ oraz wartości x dla których wykres funkcji $f(x)$ ma punkty przegięcia.



Zad.3. .

(a) *(1p)* Podaj warunek konieczny zbieżności szeregu liczbowego

(b) *(4p)* Określ przedział zbieżności szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-7)^n}{(n+1)\cdot 3^n}$$

Arkusz 2

Zad.4. Oblicz całki

(a) *(4p)* $\displaystyle\int \frac{x^2 \cdot \operatorname{arc\,tg} x}{x^2+1}\,dx$

(b) *(4p)* $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x^2+2)}\,dx$

Arkusz 3

Zad.5. Rozwiąż

(a) *(4p)* $\begin{cases} y' - \frac{y}{x} = \sqrt{x} \cdot \cos\sqrt{x} \\ y(\pi^2) = 0 \end{cases}$

(b) *(4p)* $y'' - 3y' + 2y = 2xe^{4x}$

1.

b) $f'(x)+g''(x)<h'''(x)$

$f(x)=x^{x^4+1}=x\cdot x^{x^4}=x\cdot(e^{\ln x^{x^4}})=x\cdot e^{x^4\ln x}$

$[e^{x^4\cdot\ln x}]'=[x^4\cdot\ln x]'\cdot e^{x^4\ln x}$

$[x^4\ln x]'=4x^3\ln x+\frac{1}{x}\cdot x^4=x^3(4\ln x+1)$

$f'(x)=1\cdot e^{x^4\ln x}+x\cdot e^{x^4\ln x}\cdot x^3(4\ln x+1)=e^{x^4\ln x}(1+x^4(4\ln x+1))$

$f'(x)=x^{x^4}(1+x^4(4\ln x+1))$

$\underline{f'(1)}=1(1+1(4\ln 1+1))=1(1+1)=2$

$g(x)=\operatorname{arctg} x^2$

$g'(x)=2x\cdot\frac{1}{x^4+1}=\frac{2x}{x^4+1}$

$g''(x)=\frac{2(x^4+1)-4x^3\cdot 2x}{(x^4+1)^2}$

$\underline{g''(1)}=\frac{2\cdot 2-4\cdot 2}{2^2}=\frac{4-8}{4}=-1$

$h(x)=\cos 2x-2\cos^2 x=2\cos^2 x-1-2\cos^2 x=-1\Rightarrow$ f. stała.

$h'(x)=0,\ h''(x)=0,\ h'''(x)=0$

$1-1>0\Rightarrow$ nieprawda!

2.

x	$(-\infty,-4)$	-4	$(-4,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	+	+	+	brak	−	0	+
$f'(x)$	↘	min.	↗	max.	↘		↗		↗
$f''(x)$	−	0	+	0	−		+	+	+
$f(x)$	↗		↗	↗	↗	max	↘	min	↗
$f(x)$	∩	pkt. przeg.	∪	pkt. przeg.	∩	pkt przeg?	∪		∪

a) $f_{max}(1)$
$f_{min}(3)$

b)

3

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-7)^n}{(n+1)\cdot 3^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2x-7)^n\cdot(2x-7)}{(n+2)\cdot 3\cdot 3^n}\cdot\frac{3^n\cdot(n+1)}{(2x-7)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\overset{\to 1}{\frac{n+1}{n+2}}\cdot\frac{2x-7}{3}\right| = \left|\frac{2x-7}{3}\right|$$

$\left|\frac{2x-7}{3}\right|<1$

$-1<\frac{2x-7}{3}<1$

$-3<2x-7<3$

$4<2x<10$

$2<x<5$

dla $x=2$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{(n+1)\cdot 3^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ ← sz. anharmoniczny, zbieżny

dla $x=5$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(n+1)\cdot 3^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ ← sz. harmoniczny, rozbieżny

przedział zbieżności: $\langle 2,5)$

4.

a) $\int\frac{x^2\cdot \text{arctg}x}{x^2+1}\,dx = \left|\begin{matrix} u=\text{arctg}x & v'=\frac{x^2}{x^2+1} \\ u'=\frac{1}{x^2+1} & v=x-\text{arctg}x\end{matrix}\right| =$

$$= x\cdot\text{arctg}x-\text{arctg}^2x-\tfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+\tfrac{1}{2}\text{arctg}^2x + C_{\,C\in\mathbb{R}}$$

$\int\frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int 1-\frac{1}{x^2+1}\,dx = x-\text{arctg}x$

$\int\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\cdot\text{arctg}x\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\int\overset{[\text{arctg}x]'}{\frac{1}{x^2+1}}\cdot\text{arctg}x\,dx$

$\int\frac{1}{x^2+1}\text{arctg}x\,dx = \left|\begin{matrix} u=\text{arctg}x \\ du=\frac{1}{x^2+1}dx\end{matrix}\right| = \int u\,du = \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}\text{arctg}^2x$

b) $\int_{-1}^{0}\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x^2+2)}\,dx$ to pominęłam

5.

$$\begin{cases} y' - \frac{y}{x} = \sqrt{x} \cdot \cos\sqrt{x} \\ y(\pi^2) = 0 \end{cases}$$

$y' - \frac{1}{x}y = \sqrt{x} \cdot \cos\sqrt{x}$ $\qquad x \in \mathbb{R}_+$

$u = e^{-\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$

$\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$

$\left(\frac{1}{x}y\right)' = \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

$$\frac{1}{x}y = \int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \left| \begin{array}{l} u^2 = x \\ dx = 2u\,du \end{array} \right| = \int 2\cos u \, du = 2\sin u + C = 2\sin\sqrt{x} + C$$

$y = 2x\sin\sqrt{x} + Cx$

$y(\pi^2) = 0$

$2\pi^2 \cdot \sin|\pi| + C\pi^2 = 0$

$C\pi^2 = 0$

$C = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2x \cdot \sin\sqrt{x}$

b) $y'' - 3y' + 2y = 2xe^{4x}$

① $r^2 - 3r + 2 = 0$

$(r-2)(r-1) = 0$

$r = 2 \ \vee \ r = 1$ $\qquad y_1 = e^x$

$\qquad y_2 = e^{2x}$

② $\varphi = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{2x}$

$$\begin{bmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2xe^{4x} \end{bmatrix}$$

$W = 2e^{3x} - e^{3x} = e^{3x}$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{2x} \\ 2xe^{4x} & 2e^{2x} \end{vmatrix} = -2xe^{6x}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & 2xe^{4x} \end{vmatrix} = 2xe^{5x}$$

$$c_1' = -2xe^{3x}$$
$$c_2' = 2xe^{2x}$$

$$c_2 = \int 2xe^{2x}\,dx = \begin{vmatrix} u=x & v'=2e^{2x} \\ u'=1 & v=e^{2x} \end{vmatrix} = xe^{2x} - \int e^{2x}\,dx = xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$c_1 = -\int 2xe^{3x}\,dx = \begin{vmatrix} u=x & v'=e^{3x} \\ u'=1 & v=\frac{1}{3}e^{3x} \end{vmatrix} = -\frac{2}{3}xe^{3x} + \frac{2}{3}\int e^{3x}\,dx = -\frac{2}{3}xe^{3x} + \frac{2}{9}e^{3x}$$

$$\varphi = -\frac{2}{3}xe^{4x} + \frac{2}{9}e^{4x} + xe^{4x} - \frac{1}{2}e^{4x} = \frac{1}{3}xe^{4x} - \frac{5}{18}e^{4x}$$