Arkusz 1

Zad. 1. *(5p)* Dana jest funkcja

$$f(x) = \left(\frac{8}{3} - x\right)\sqrt[5]{x^3}$$

(a) Wyznacz punkty przegięcia wykresu $f(x)$ i określ przedziały na których $f(x)$ jest jednocześnie rosnąca i wklęsła

(b) Podaj warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego funkcji w punkcie x_0.

Zad. 2. *(2p)* Znajdź przedziały na których poniższa funkcja jest stała. Znajdź wartości tych stałych.

$$f(x) = 2\operatorname{arc\,tg} x + \arcsin\frac{2x}{x^2+1}$$

Arkusz 2

Zad. 3. *(6p)* Oblicz całki

(a) $\displaystyle\int \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}\, dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x + 2}\, dx$

Zad. 4. *(3p)*

(a) Zapisz dwa różne wzory na obliczenie pola obszaru zawartego pomiędzy podanymi krzywymi. Nie obliczaj pola.

$$y = 2^x, \quad y = \sin\frac{\pi}{2}x, \quad x = 0, \quad x = 1$$

(b) Podaj warunek konieczny całkowalności funkcji na przedziale $[a, b]$

Arkusz 3

Zad. 5. *(8p)*

(a) Rozwiąż równanie $y'' - 2y' = 8\sin 2x + 2xe^{2x}$

(b) Rozwiąż równanie $y' \operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{tg} y = 0$

(c) Wyznacz i naszkicuj obszary istnienia i jednoznaczności rozwiązań równania z punktu (b).
Następnie określ na jakim maksymalnie przedziale (dla jakich x) może istnieć rozwiązanie tego równania z warunkiem początkowym $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ oraz jakie wartości może ono przyjmować.

Zad. 6. *(6p)*

(a) Określ przedział zbieżności szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+3)x^n \cdot 3^n$$

i wyprowadź wzór na jego sumę.

(b) Wykorzystaj znaleziony wzór do obliczenia

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+3)}{2^n}$$

(c) Określ zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, wiedząc że dla $n \geq 0$, $a_n > 0$ oraz $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = 2$. Odpowiedź uzasadnij.

1.

$$f(x) = \left(\frac{8}{3} - x\right)\sqrt[5]{x^3} \quad \swarrow x^{\frac{3}{5}}$$

$D = \mathbb{R}$

b) "f(x) ma ekstremum w punkcie, gdzie $f'(x)=0$ lub $f'(x)$ nie istnieje"

a) $f'(x) = \frac{3}{5}\cdot x^{-\frac{2}{5}}\left(\frac{8}{3}-x\right) + (-1)\cdot x^{\frac{3}{5}} = \frac{8}{5}x^{-\frac{2}{5}} - \frac{3}{5}x^{\frac{3}{5}} - 1x^{\frac{3}{5}} = \frac{8}{5}\left(x^{-\frac{2}{5}} - x^{\frac{3}{5}}\right)$

$D' = \mathbb{R} - \{0\}$

I.

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^{-\frac{2}{5}} - x^{\frac{3}{2}} = 0$

$x^{\frac{3}{2}}(x^{-1} - 1) = 0$

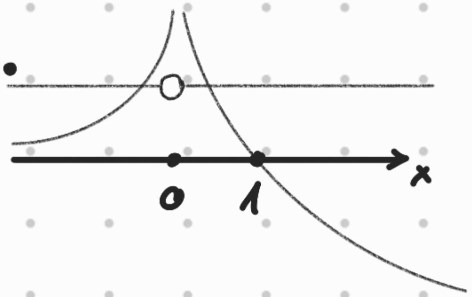
$\Downarrow$

$\sqrt[2]{x^3} = 0 \quad \vee \quad \frac{1}{x} - 1 = 0$

$\Downarrow \qquad \frac{1}{x} = 1$

$x = 0 \notin D \qquad x = 1 \in D, D'$

II.



oprócz pkt $x=0$ $f'(x)$ jest ciągła i

$f'(-1) = \frac{8}{5}\sqrt[5]{(-1)^3}\cdot\left(-\frac{1}{1} - 1\right) = -1\cdot(-2) = 2$

$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{5}\cdot\underbrace{\sqrt[5]{\frac{1}{8}}}_{>0}\cdot\underbrace{(2-1)}_{>0}$

$f'(2) = \frac{8}{5}\cdot\underbrace{\sqrt[5]{8}}_{>0}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{2} - 1\right)}_{<0}$

$\Downarrow$

$f'(x) > 0$ dla $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$

$f'(x) < 0$ dla $x \in (1, +\infty)$

III.

$f''(x) = \frac{8}{5}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot x^{-\frac{7}{5}} - \frac{8}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot x^{-\frac{2}{5}} = \frac{-8}{25}\cdot x^{-\frac{2}{5}}\cdot\left(2\cdot x^{-1} + 3\right)$

$D'' = \mathbb{R} - \{0\}$

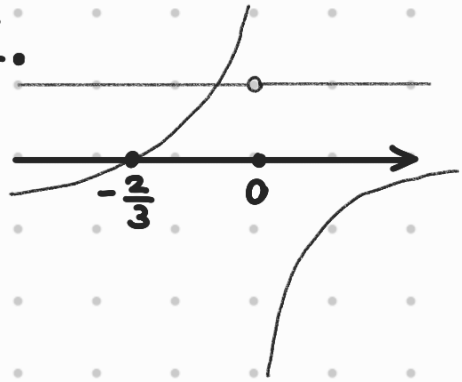
$f''(x) = 0 \Rightarrow x^{-\frac{3}{5}} = 0 \quad \vee \quad \frac{2}{x} + 3 = 0$

$\Downarrow \qquad \frac{2}{x} = -3$

$x = 0 \qquad 2 = -3x$

$\notin D, D', D'' \qquad x = -\frac{2}{3} \in D, D', D''$

IV.



dla $x \in (0, +\infty)$ $\quad x^{-\frac{2}{3}} > 0 \wedge \frac{2}{x} + 3 > 0 \Rightarrow f(x) < 0$

dla $x = -1$

$$f''(x) = -\frac{8}{25} \cdot (1) \cdot \left(-\frac{2}{1} + 3\right) = -\frac{8}{25}$$

CZYLI:

x	$(-\infty, -\frac{2}{3})$	$-\frac{2}{3}$	$(-\frac{2}{3}, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	brak	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	maksimum	$\searrow$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	brak	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$\frown$	pkt. przeg.	$\smile$	pkt. przeg.	$\frown$		$\frown$

$\nearrow \wedge \frown \Rightarrow x \in (-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (0, 1)$

2.

$f(x) = 2\operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{x^2+1}$ $\qquad D = \mathbb{R}$ $\qquad D' = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{x^2+1} + \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2}} = \frac{2}{x^2+1} + \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{(x^2+1)^2-4x^2}{(x^2+1)^2}}} =$$

$$= \frac{2}{x^2+1} + \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} \cdot \frac{(x^2+1)}{\sqrt{x^4-2x^2+1}} = \frac{2}{x^2+1} + \frac{-2(x^2-1)}{(x^2+1) \cdot |x^2-1|}$$

$f'(x) = 0$:

I. $x^2 - 1 > 0$ $\quad \vee \quad$ II. $x^2 - 1 < 0$

I: $0 = \frac{2}{x^2+1} + \frac{-2}{x^2+1}$

$0 = 0$

II: $0 = \frac{2}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+1}$

$0 = \frac{4}{x^2+1}$

r. sprzecz.

$\Downarrow$

$f'(x) = 0$
dla $x^2 - 1 > 0$
$x^2 > 1 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

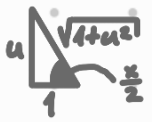
3.

a) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx = \left| \begin{matrix} u = \operatorname{arctg}\sqrt{x} & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{x+1} & v = x \end{matrix} \right| = x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx = \left| \begin{matrix} u^2 = x \\ 2u\,du = dx \end{matrix} \right| =$

$= x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\int\frac{u^2}{u^2+1}du = x\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \int 1 - \frac{1}{u^2+1}dx =$

$x\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg}\sqrt{x} + C$

b) $\int \frac{1}{\sin x + 2}dx = \left| \begin{matrix} u = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} u \Rightarrow dx = 2\cdot\frac{1}{u^2+1}du \\ \sin\frac{x}{2} = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \quad \cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \quad \sin x = \frac{2u}{u^2+1} \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{\frac{2u}{u^2+1}+2}\cdot\frac{2}{u^2+1}du =$



$= \int \frac{2}{\frac{2u^2+2u+2}{u^2+1}}\cdot\frac{1}{u^2+1}du = \cancel{\frac{1}{2}}\int\frac{1}{u^2+u+1}du = \cancel{\frac{1}{2}}\int\frac{1}{(u+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}du =$

$= \cancel{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{u+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + C, \quad C\in\mathbb{R}$

$= \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + C$

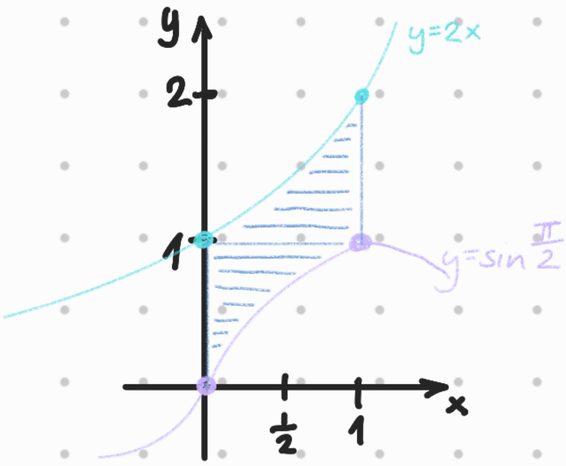
4.

a) $y = 2^x$

$y = \sin\frac{\pi}{2}x$

$x = 0$

$x = 1$



$P = \int_0^1 \pi\cdot(2^x - \sin\frac{\pi}{2}x)\,dx$

$y = 2^x \Downarrow x = \log_2 y$

$y = \sin\frac{\pi}{2}x$

$\frac{\pi}{2}x = \arcsin y$

$x = \frac{2}{\pi}\arcsin y$

$P = \int_0^1 \pi\cdot(\frac{2}{\pi}\arcsin y - 0)dx + \int_1^2 \pi\cdot(\log_2 y - 1)\,dx$

b) funkcja jest ograniczona

5.

a) $y''-2y'=8\sin 2x+2xe^{2x}$

① $r^2-2r=0$

$r=0 \quad \vee \quad r=2$

$y_1=e^{0x}=1$

$y_2=e^{2x}$

② I. $y''-2y'=8\sin 2x$

$\varphi=A\sin 2x+B\cos 2x$

$\varphi'=2A\cos 2x-2B\sin 2x$

$\varphi''=-4A\sin 2x-4B\cos 2x$

$-4A\sin 2x-4B\cos 2x-$
$4A\cos 2x+4B\sin 2x=8\sin 2x$

$\Downarrow$

$-4A+4B=8$

$-4A-4B=0$

$\Downarrow$

$\begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases}$

II $y''-2y'=2x\cdot e^{2x}$

$\varphi=(Ax^2+Bx)\cdot e^{2x}$

$\varphi'=(Ax^2+Bx)\cdot 2e^{2x}+(2Ax+B)\cdot e^{2x}$

$\varphi''=(Ax^2+Bx)\cdot 4e^{2x}+(2Ax+B)\cdot 2e^{2x}$
$+(2Ax+B)2e^{2x}+2A\cdot e^{2x}$

$2(2Ax+B)$

$e^{2x}(\cancel{4(Ax^2+Bx)}+4(2Ax+B)+2A$
$\cancel{-4(Ax^2+Bx)}-2(2Ax+B))=2xe^{2x}$

$e^{2x}(4Ax+2B+2A)=e^{2x}\cdot 2x$

$\Downarrow$

$4A=2$

$A+B=0$

$\Downarrow$

$\begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \end{cases}$

$y=C_1+C_2\cdot e^{2x}-\sin 2x+\cos 2x+\frac{1}{2}e^{2x}(x^2-x)$

b) $y' \operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{tg} y = 0$

$\frac{dy}{dx} \operatorname{ctg}^2 x = -\operatorname{tg} y \qquad | : \operatorname{tg} y \ , \ : \operatorname{ctg}^2 x$

$dy \cdot \operatorname{ctg} y = dx \cdot \operatorname{tg}^2 x$

$\int \operatorname{ctg} y \, dy = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx$

$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int -1 + \frac{1}{\cos^2 x} dx = -x + \operatorname{tg} x + C_1$

$\int \operatorname{ctg} y \, dy = \int \frac{\cos y}{\sin y} dy = \ln|\sin y| + C_2$

$\ln|\sin y| = -x + \operatorname{tg} x + \ln C \qquad \ln C = C_1 - C_2$

$\sin y = C \cdot e^{-x + \operatorname{tg} x}$

c) ZAŁ. dla (b)

idk co zrobić dla $\operatorname{tg} y = 0$ i $\operatorname{ctg}^2 x = 0$

6.

brak