KARTKA 1

ZAD.1. (a) *(1p)* Podaj warunek konieczny istnienia pochodnej właściwej funkcji $f(x)$ w $x = x_0$.

(b) *(2p)* Korzystając z definicji, oblicz pochodną funkcji $f(x) = \sqrt{x-2}$.

(c) *(5p)* Znajdź punkty przegięcia i zbadaj wklęsłość/wypukłość wykresu funkcji

$$f(x) = (2 - \ln x) \cdot x^2$$

KARTKA 2

ZAD.2. Oblicz całki

(a) *(3p)* $\displaystyle\int \frac{1}{3 + \sin x + 3\cos x}\, dx$

(b) *(5p)* $\displaystyle\int \operatorname{arc\,ctg} \sqrt{x}\, dx$

KARTKA 3

ZAD.3. *(5p)* Oblicz objętość bryły powstałej z obrotu wokół osi OX obszaru ograniczonego przez $y = 0$ i $y = \sqrt{\frac{x}{e^x}}$ dla $x \geq 0$

ZAD.4. (a) *(1p)* Podaj warunek konieczny zbieżności nieskończonego szeregu liczbowego

(b) *(4p)* Znajdź przedział zbieżności szeregu

$$\sum_{n=4}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{3^n \sqrt{n}}$$

KARTKA 4

ZAD.5. Rozwiąż równania różniczkowe

(a) *(4p)* $y'' + 2y' = 8xe^{-2x}$

(b) *(3p)* $y' \sin x - y \cos x = (x \sin x)^2$

(c) *(2p)* Naszkicuj obszar istnienia i jednoznaczności rozwiązań równania z punktu (b). Następnie określ na jakim maksymalnie przedziale może istnieć rozwiązanie tego równania z warunkiem początkowym $y(1) = 1$.

ZAD.6. *(+2p)* Wyznacz dywergencję funkcji $f(x, y, z) = \ln(x + 2y + 3z)$

1.

b) $f(x)=\sqrt{x-2}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h-2}-\sqrt{x+2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-2-x+2}{h(\sqrt{x+h-2}+\sqrt{x+2})}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{x+h-2}+\sqrt{x-2})}=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

c) $f(x)=(2-\ln x)\cdot x^2=2x^2-x^2\ln x$

$$f'(x)=4x-\left[2x\ln x+\tfrac{1}{x}\cdot x^2\right]=4x-x-2x\ln x=3x-2x\ln x$$

$$f''(x)=3-\left[2\ln x+\tfrac{1}{x}\cdot 2x\right]=3-2\ln x-2=1-2\ln x$$

2.

a) $$\int\frac{1}{3+\sin x+3\cos x}dx=\left|\begin{matrix}u=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\Rightarrow dx=\frac{2}{u^2+1}du\\ \sin x=\frac{2u}{u^2+1},\quad \cos x=\frac{1-u^2}{u^2+1}\end{matrix}\right|=\int\frac{1}{3+\frac{2u}{u^2+1}+\frac{3-3u^2}{u^2+1}}\cdot\frac{2}{u^2+1}du=$$

$$=\int\frac{u^2+1}{3u^2+3+2u+3-3u^2}\cdot\frac{2}{u^2+1}du=\int\frac{1}{u+3}du=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3\right|+C$$ idk chyba ok

b) $$\int\operatorname{arcctg}\sqrt{x}\,dx=\left|\begin{matrix}u^2=x\\dx=2udu\end{matrix}\right|=2\int\operatorname{arcctg}u\cdot u\,du=\left|\begin{matrix}v=\operatorname{arcctg}u & w'=u\\ v'=-\frac{1}{u^2+1} & w=\frac{1}{2}u^2\end{matrix}\right|=$$

$$=u^2\operatorname{arcctg}u+\int\frac{u^2}{u^2+1}du=u^2\operatorname{arcctg}u+u-\operatorname{arctg}u+C=$$

$$=x\cdot\operatorname{arcctg}\sqrt{x}+\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$$

3. $y=0$

$y=\sqrt{\frac{x}{e^x}}$

$x\geq 0$

$$V=\int_0^\infty\pi\cdot\left[\sqrt{\frac{x}{e^x}}\right]^2dx$$

$$\int\frac{x}{e^x}dx=\left|\begin{matrix}u=x & v'=e^{-x}\\ u'=1 & v=-e^{-x}\end{matrix}\right|=-\frac{x}{e^x}+\int\frac{1}{e^x}dx=-\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e^x}+C$$ $C\in\mathbb{R}$

$$V=\frac{-\pi}{e^x}(x+1)\Big|_0^\infty=\lim_{T\to\infty}\frac{-\pi}{e^x}(x+1)\Big|_0^T=\lim_{T\to\infty}\left[-\frac{\pi\cdot T}{e^T}-\frac{\pi}{e^T}+\frac{\pi\cdot 0}{e^0}+\frac{\pi}{e^0}\right]=$$

$$=-\pi\cdot\lim_{T\to\infty}\frac{T}{e^T}-\pi\cdot\lim_{T\to\infty}\frac{1}{e^T}+0+\lim_{T\to\infty}\frac{\pi}{e^0}=\pi$$

$$\boxed{\lim_{T\to\infty}\frac{T}{e^T}\overset{L'H}{=}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{e^T}=0}$$

4.

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(x-2)^n}{3^n \cdot \sqrt{n}}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|(-1)^n \cdot \frac{(x-2)^n}{3^n \cdot \sqrt{n}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(x-2)^n}{3^n \cdot \sqrt{n}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-2|}{3 \cdot \sqrt[2n]{\sqrt{n}}} = \frac{|x-2|}{3}$$

$1 > \frac{|x-2|}{3}$

$3 > |x-2|$

$-3 < x-2 < 3$

$-1 < x < 5$

DLA $x=-1$: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(-3)^n}{3^n} \cdot \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot (-1)^n \cdot \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ ← szereg Dirichleta, $p=\frac{1}{2}$, rozbieżny

DLA $x=5$: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{3^n}{3^n} \cdot \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

KRYTERIUM LEIBNIZA

$B = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

$b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

1 $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

2 $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$b_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ $\Rightarrow b_{n+1} < b_n$

1 $\wedge$ 2 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ jest zbieżny

ODP. $x \in (-1, 5\rangle$

5. nie mam

6.