

Arkusz 1

ZAD.1. (2p) Prawda czy Fałsz ? (podaj tylko odpowiedź, bez uzasadnienia)

- (a) Jeżeli $AB = BA$ to macierze A i B są kwadratowe.
- (b) Dla macierzy $A_{3 \times 3}$ zachodzi równość $\det(2A) = 8 \det A$
- (c) Jeżeli $\det A = 0$ to układ $Ax = b$ nie ma rozwiązania.
- (d) (\mathbb{Z}_n, \oplus_n) jest grupą abelową wtedy i tylko wtedy gdy n jest liczbą pierwszą

ZAD.2. (3p) Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x + y + z + w = 2 \\ 3x + y - z + w = -3 \\ x - y + 2z + 2w = 0 \end{cases}$$

- (b) (1p) Jakie są możliwe wartości wyznacznika macierzy rzeczywistej $A_{n \times n}$ jeżeli $A^3 = 16A^{-1}$

Arkusz 2

ZAD.3. (4p) Sprawdź czy zbiór liczb całkowitych podzielnych przez 2 z działaniem zdefiniowanym poniżej jest grupą abelową,

$$a \oplus b = a + b - 4$$

ZAD.4. (a) (2p) Znajdź wzór na macierz X spełniającą równanie

$$(3X + AX)^{-1} = X^{-1}B + C$$

- (b) (2p) Znajdź macierz X

$$X \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} - X$$

Arkusz 3

ZAD.5. (a) (3p) W pierścieniu $\mathbb{Z}_5[x]$ znajdź wartości parametrów A, B tak aby wielomian $V(x) = Ax^{300} + Bx^{14} + 2$ był podzielny przez wielomian $W(x) = x^2 + 2x + 2$.

(b) (5p) W $\mathbb{C}[x]$ znajdź resztę z dzielenia wielomianu $V(x) = x^{300} + 2x^{14} + 2$ przez wielomian $W(x) = x^3 + 1$.

ZAD.6. Dane są wierzchołko trójkąta
 $A(-2, 5, 3), B(3, 6, 1), C(1, 6, 5)$.

(a) (1p) Znajdź równanie płaszczyzny zawierającej ten trójkąt.

(b) (1p) Znajdź pole powierzchni trójkąta ABC .

(c) (2p) Określ czy kąt przy wierzchołku A jest ostry, prosty, czy rozwarty.

(d) (3p) Znajdź równanie prostej zawierającej wysokość opuszczoną z wierzchołka A .

(e) (1p) Znajdź wysokość czworościanu $ABCD$, gdzie $D = (0, -1, 2)$