Arkusz 1

Zad. 1. *(5p)* Dana jest funkcja

$$f(x) = (5 - 6\ln x) \cdot x^3$$

(a) Wyznacz lokalne maksima i minima oraz punkty przegięcia $f(x)$

(b) Określ przedziały na których $f(x)$ jest jednocześnie rosnąca i wklęsła

(c) Wykorzystując różniczkę funkcji oblicz przybliżoną wartość $f(x)$ w $x = 1,1$

Zad. 2. *(3p)*

(a) Podaj warunek konieczny różniczkowalności funkcji w punkcie x_0.

(b) Podaj przykład funkcji (wzór i wykres), która w $x_0 = \pi$ spełnia warunek konieczny różniczkowalności, ale nie jest różniczkowalna.

(c) Używając definicji pochodnej, oblicz pochodną funkcji $g(x) = \dfrac{1}{x}$

Arkusz 2

Zad. 3. *(6p)* Oblicz całki

(a) $\displaystyle\int x^2 \cdot \operatorname{arc\,tg} x \; dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{3x^2 + 5x - 2}{(x^2 + 4x + 8)(x - 2)} \, dx$

Arkusz 3

Zad. 4. *(3p)* Oblicz objętość bryły powstałej przez obrót krzywej o równaniu

$$y = \frac{1}{\left(\ln^2 x + 1\right)} \sqrt{\frac{\ln x}{x}}$$

wokół osi OX na przedziale $\langle 1, \infty)$.

Zad. 5. *(4p)* Znajdź rozwiązanie równania

$$2y'' - 3y' + y = 4xe^x$$

Arkusz 4

Zad. 6.

(a) *(2p)* Rozwiąż równanie $y' - y^2 \cos x = 2xy^2$

(b) *(2p)* Wyznacz i naszkicuj obszary istnienia i jednoznaczności rozwiązań równania

$$y' = \frac{y^3 + x}{(y-1)(x-2)}$$

a następnie określ na jakim maksymalnie przedziale (dla jakich x) może istnieć rozwiązanie tego równania z warunkiem początkowym $y(1) = 2$.

Zad. 7. *(5p)* Dany jest szereg $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2) \cdot 4^n}$

(a) Określ przedział zbieżności tego szeregu i wyprowadź wzór na jego sumę.

(b) Podaj warunek konieczny zbieżności szeregu liczbowego.

1. $f(x)=(5-6\ln x)\cdot x^3$ $\qquad D=\mathbb{R}_+-\{0\}$

$f'(x)=3x^2(5-6\ln x)+x^3\cdot\left(-\frac{6}{x}\right)$ $\qquad D'=\mathbb{R}_+-\{0\}$

I.

$f'(x)=0$

$0=3x^2(5-6\ln x-2)$

$\Downarrow$

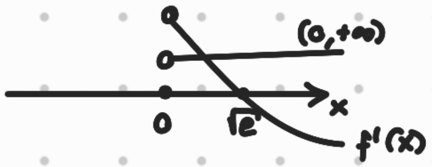
$x^2=0 \vee 3-6\ln x=0$

$x=0$ $\qquad \ln x=\frac{1}{2}$

$\notin\mathbb{R}_+-\{0\}$ $\qquad x=\sqrt{e}\in\mathbb{R}_+-\{0\}$

II.

$x^2>0$ w $(0,+\infty)$ $\wedge$ $\ln x\nearrow$ $\Rightarrow -\ln x\searrow$



III. $\qquad D''=(0,+\infty)$

$f''(x)=6x(3-6\ln x)+3x^2\cdot\left(-\frac{6}{x}\right)=6x(3-6\ln x-3)=-6x\cdot 6\ln x$

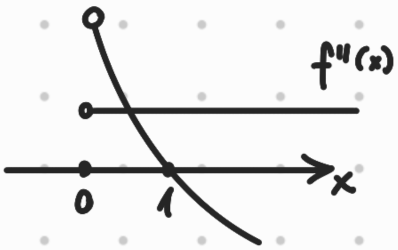
$f''(x)=0$

$\Downarrow$

$x=0 \vee \ln x=0$

$\notin(0,+\infty)$ $\qquad x=1\in(0,+\infty)$

IV.



w $x\in(0,+\infty)$: $x>0$, $\ln x\nearrow \Rightarrow -\ln x\searrow$

x	$(0,1)$	1	$(1,\sqrt{e})$	$\sqrt{e}$	$(\sqrt{e},+\infty)$
$f'(x)$	+	+	+	0	—
$f(x)$	↗	↗	↗	maksimum	↘
$f''(x)$	+	0	—	—	—
$f(x)$	∪	pkt przeg.	∩		∩

a) $f_{max}(\sqrt{e}) = e\sqrt{e}\cdot(5-3) = 2e\sqrt{e}$

$f_{p.p.}(1) = 1\cdot 5 = 5$

b) z tabelki $\Rightarrow \langle 1, \sqrt{e}\rangle$

c) $f(1{,}1) = ?$

$f(1) = 5$

$f'(1) = 3\cdot(3-6\cdot\ln 1) = 9$

$f(1{,}1) = 5 + 9(1{,}1-1) = 5 + 0{,}9 = 5{,}9$

2.

a) "funkcja jest ciągła w punkcie x_0"

b) $f(x) = |x-\pi|$

c) $g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\left(\frac{x-x-h}{x\cdot(x+h)}\right) = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$

3.

a) $\int x^2\cdot \operatorname{arctg} x\, dx = \begin{vmatrix} u = \operatorname{arctg} x & v' = x^2 \\ u' = \frac{1}{x^2+1} & v = \frac{1}{3}x^3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}x^3\operatorname{arctg} x - \frac{1}{3}\int\frac{x^3}{x^2+1}dx =$

$= \frac{1}{3}x^3\operatorname{arctg} x - \frac{1}{3}\int x - \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{3}x^3\operatorname{arctg} x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln|x^2+1| + C$ $\quad C\in\mathbb{R}$

b) $\int\frac{3x^2+5x-2}{(x^2+4x+8)(x-2)}dx = \int\frac{2x+5}{x^2+4x+8} + \frac{1}{x+2}\,dx = \int\frac{2x+4}{x^2+4x+8} + \frac{1}{x^2+4x+8} + \frac{1}{x+2}\,dx =$

$= \ln|x^2+4x+8| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{2}\right) + \ln|x+2| + C$

$C\in\mathbb{R}$

$\frac{3x^2+5x-2}{(x^2+4x+8)(x-2)} = \frac{Ax+B}{x^2+4x+8} + \frac{C}{x-2}$

$C = \frac{3\cdot 4+10-2}{4+8+8} = \frac{20}{20} = 1$

$3x^2+5x-2 = (x-2)(Ax+B) + x^2+4x+8$

$2x^2+x-10 = Ax^2 - 2Ax + Bx - 2B$

$\Downarrow$

$A = 2$

$B = 5$

$\int\frac{1}{x^2+4x+8}dx = \int\frac{1}{(x+2)^2+2^2}dx =$

$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{2}\right) + c$, $c\in\mathbb{R}$

4.

$$y=\frac{1}{\ln^2x+1}\cdot\sqrt{\frac{\ln}{x}}$$

$$V=\int_1^{\infty}\pi\cdot\left[\frac{1}{\ln^2x+1}\cdot\sqrt{\frac{\ln x}{x}}\right]^2dx$$

$$\int\frac{1}{(\ln^2x+1)^2}\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}\,dx=\left|\begin{matrix}u=\ln x\\ du=\frac{1}{x}dx\end{matrix}\right|=\int\frac{u}{(u^2+1)^2}\,du=\frac{1}{2}\int\frac{2u}{(u^2+1)^2}\,du=\left|\begin{matrix}v=u^2+1\\ dv=2u\end{matrix}\right|=$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{1}{v^2}\,dv=\frac{1}{2}\cdot(-1)\cdot v^{-1}+C=-\frac{1}{2}(u^2+1)^{-1}+C=-\frac{1}{2}\,\frac{1}{\ln^2x+1}+C$$

$$V=\left[-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{(\ln^2x+1)^2}\right]_1^{\infty}=\lim_{T\to\infty}\left[-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{(\ln^2x+1)^2}\right]_1^{T}=\lim_{T\to\infty}\left[-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{(\underbrace{\ln^2T+1}_{\to\infty})^2}+\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{(\ln^2 1+1)^2}\right]=\frac{\pi}{2}$$

7.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+2)\cdot4^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n\cdot x}{(n+3)\cdot4^n\cdot4}\cdot\frac{(n+2)\cdot4^n}{x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\overbrace{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)}^{\to 1}\cdot\frac{x}{4}\right|=\frac{|x|}{4}$$

$$\frac{|x|}{4}<1$$

$$|x|<4$$

$$\Downarrow$$

$$-4<x<4\ \Rightarrow\ x\in(-4,4)$$

dla $x=-4$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4)^n}{(n+2)4^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{n+2}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}}{k}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$$

$\Uparrow$

szereg anharmoniczny, zbieżny

$\Downarrow$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}$ jest zbieżny

$\Swarrow$

$x\in\langle-4,4)$

dla $x=4$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{(n+2)4^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+2}$

$\frac{1}{n+2}>\frac{1}{2n}$ od $n=3$

$\frac{1}{n+2}>\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}$

$\uparrow$

sz. Dirichleta, $p=1$, rozbieżny

$\Downarrow$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+2}$ jest rozbieżny

b) WARUNEK KONIECZNY ZBIEŻNOŚCI SZEREGU: $\sum a_n$ zbieżny $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

5.

$$2y''-3y+y=4xe^x$$

① $2r^2-3r+1=0$

$(2r-1)(r-1)=0$

$r=\frac{1}{2}$ $\quad r=1$

$y_1(x)=e^{\frac{1}{2}x}$ $\quad y_2=e^x$

$y=C_1e^{\frac{1}{2}x}+C_2e^x$

② $y_s(x)=C_1(x)e^{\frac{1}{2}x}+C_2(x)e^x$

$$\begin{bmatrix} e^{\frac{1}{2}x} & e^x \\ \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} & e^x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4xe^x \end{bmatrix}$$

$$W=\begin{vmatrix} e^{\frac{1}{2}x} & e^x \\ \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} & e^x \end{vmatrix} = e^{\frac{3}{2}x}-\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}x}=\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}x}$$

$$W_1=\begin{vmatrix} 0 & e^x \\ 4xe^x & e^x \end{vmatrix} = -4xe^{2x}$$

$$W_2=\begin{vmatrix} e^{\frac{1}{2}x} & 0 \\ \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} & 4xe^x \end{vmatrix} = 4x\cdot e^{\frac{3}{2}x}$$

$$c_1'=\frac{-4xe^{2x}}{\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}x}}=\cancel{-8x\cdot e^{\frac{1}{2}x}}$$

$$c_2'=\frac{4xe^{\frac{3}{2}x}}{\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}x}}=8x \qquad \cancel{\Rightarrow C_2=4x^2}$$

② próba met. przewidywań

$\varphi=Ae^x\cdot(Bx^2+Cx)$

$\varphi'=Ae^x\cdot(Bx^2+Cx)+Ae^x(2Bx+C)$

$\varphi''=Ae^x\cdot(Bx^2+Cx)+2Ae^x(2Bx+C)+Ae^x\cdot 2B$

$4Ae^x(2Bx+C)+2Ae^x\cdot 2B-3Ae^x(2Bx+C)=4xe^x$

$Ae^x(2Bx+C)+2Ae^x\cdot 2B=4xe^x$

$2ABe^x\cdot x+CAe^x+4ABe^x=4xe^x$

$$\begin{cases} 2AB=4 \\ CA+4AB=0 \end{cases} \Rightarrow AB=2$$

$$CA+2\cdot 4=0$$

$$AC=-8 \qquad \Rightarrow \varphi=2e^x\cdot x^2-8e^x\cdot x$$

6.

a) $y'-y^2\cos x=2xy^2$

$$y'=2xy^2+\cos x\, y^2$$
$$y'=(2x+\cos x)y^2$$
$$\frac{dy}{dx}=(2x+\cos x)y^2$$

$$\int\frac{1}{y^2}\,dy=\int 2x+\cos x\,dx$$

ZAŁ $y\neq 0$

$$\int 2x+\cos x\,dx=x^2+\sin x+C_1$$

$$\int\frac{1}{y^2}\,dy=-\int -y^{-2}\,dy=-y^{-1}+C_2=-\frac{1}{y}+C_2$$

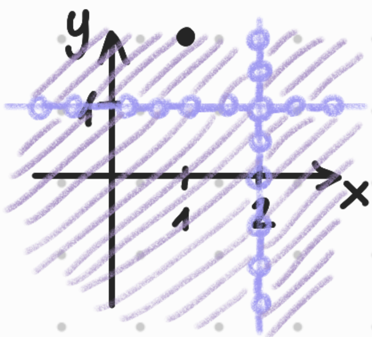
DLA $y=0$

$y'+0=0$

$y'=0 \quad \Rightarrow$ jest rozw.

$$-\frac{1}{y}=x^2+\sin x+C \qquad C=C_1-C_2$$
$$y=-\frac{1}{x^2+\sin x+C}$$

b) $y'=\dfrac{y^2+x}{(y-1)(x-2)}$



ZAŁ. $y\neq 1$
$x\neq 2$

$y(1)=2$

$(1,2) \quad \Rightarrow x\in(-\infty,2)$