

**ARKUSZ 1**

ZAD.1. (4p) Sprawdź czy zbiór  $(\mathbb{Z} - \{0\} \times \mathbb{Z})$  z działaniem  $\star$  jest grupą abelową

$$(a, b) \star (c, d) = (ac, b + d + 1)$$

ZAD.2. (a)(1p) Oblicz  $\left(\sin \frac{\pi}{12} + i \cos \frac{\pi}{12}\right)^4$ . Wynik podaj w postaci algebraicznej.

(b)(3p) Rozwiąż równanie. Rozwiązania podaj w postaci algebraicznej,  
 $z^3 = (3 + i)^6$

**ARKUSZ 2**

ZAD.3. Dane są wielomiany:  $V(x) = x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 3x^2 + 6x + 6$  oraz  
 $W(x) = 3x^3 + x + 4$ .

- (a)(2p) W pierścieniu  $\mathbb{Z}_7[x]$  znajdź iloraz  $Q(x)$  i resztę  $R(x)$  z dzielenia  $V(x)$  przez  $W(x)$
- (b)(4p) W  $\mathbb{C}[x]$ , wyznacz wszystkie pierwiastki wielomianu  $V(x)$  wiedząc, że jednym z nich jest  $x_1 = -1 + i$ .

ZAD.4. (2p) Prawda czy Fałsz ? (podaj tylko odpowiedź, bez uzasadnienia)

- (a) Jeżeli macierze  $A$  i  $B$  są kwadratowe to  $AB = BA$ .
- (b) Macierz  $A$  jest odwracalna wtedy i tylko wtedy gdy  $\det A \neq 0$ .
- (c) Zbiór  $\mathbb{Z}_{n \times m}$  ze zwykłym dodawaniem macierzy jest grupą abelową.
- (d) Układ 6 równań z 4 niewiadomymi może mieć dokładnie jedno rozwiązanie.

**ARKUSZ 3**

ZAD.5. Dany jest układ równań, gdzie  $k \in \mathbb{R}$  jest parametrem.

$$\begin{cases} x + 3y - z + 3t = -2k \\ x + y + z - t = k \\ 2x + 3y + z = 1 \end{cases}$$

- (a)(2p) Znajdź rozwiązanie układu dla  $k = 2$ .  
(b)(1p) Dla jakich wartości parametru  $k$  układ ma dokładnie jedno rozwiązanie ? Odpowiedź uzasadnij.

ZAD.6. (a)(3p) Znajdź macierz  $X$  spełniającą równanie

$$\left(2X + \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \cdot X\right)^{-1} = X^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0,5 & 2 \\ 0,5 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- (b)(1p) Udowodnij, że jeżeli  $A$  i  $B$  są macierzami odwracalnymi ze zbioru  $K_{n \times n}$  to  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

---

**ARKUSZ 4**

ZAD.7. Dane są dwie proste

$$l_1 : x - 1 = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 1}{-1}, \quad l_2 : \frac{x}{-2} = y - 1 = \frac{z - 2}{-1}$$

- (a)(1p) Znajdź równanie płaszczyzny zawierającej prostą  $l_2$  i prostopadłej do płaszczyzny  $3x - 2y - z + 4 = 0$   
(b) (3p) Znajdź odległość między prostymi  $l_1$  i  $l_2$   
(d) (3p) Znajdź rzut prostopadły prostej  $l_1$  na płaszczyznę  $x - y + 2z = 0$