Kartka 1

Zad.1. (a) *(1p)* Podaj warunek konieczny istnienia pochodnej właściwej funkcji $f(x)$ w $x = x_0$.

(b) *(2p)* Korzystając z definicji, oblicz pochodną funkcji $f(x) = \dfrac{1}{x+3} + x + 3$.

(c) *(5p)* Wyznacz ekstrema lokalne i przedziały monotoniczności funkcji

$$f(x) = 3\ln(x^2+1) - \ln x^3$$

Kartka 2

Zad.2. Oblicz całki

(a) *(4p)* $\displaystyle\int_0^e x \cdot \ln x \, dx$

(b) *(4p)* $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x + 9}\, dx$

Kartka 3

Zad.3. *(4p)* Oblicz długość łuku krzywej $y = \frac{1}{4}\left(x^2 - 2\ln x\right), \ \ x \in \langle 1, 2\rangle$

Zad.4. (a) *(1p)* Podaj warunek konieczny zbieżności nieskończonego szeregu liczbowego

(b) *(4p)* Pokaż, że szereg jest zbieżny, a następnie oblicz jego sumę

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n(n-2)}{4^n}$$

Kartka 4

Zad.5. Rozwiąż równania różniczkowe

(a) *(5p)* $y'' - 4y = 8x^2 + 2e^{2x}$

(b) *(3p)* $(1+x^2)y' - xy = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

niestety rozwiązania arkuszów pop. są wybrakowane

1.

a) funkcja jest ciągła? nie dąży do ∞ ani nie ma 'ostrego' ekstremum?

b) $f(x) = \frac{1}{x+3} + x+3$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h+3} + x+h+3 - \frac{1}{x+3} - x - 3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(h + \frac{1}{x+h+3} - \frac{1}{x+3}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(h + \frac{x+3-x-h-3}{(x+h)(x+h+3)}\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(1 + \frac{-1}{(x+3)(x+h+3)}\right) = 1 - \frac{1}{(x+3)^2}$$

c) $f(x) = 3\ln(x^2+1) - \ln x^3$

$D = (0, +\infty)$

$D' =$

$f'(x) = 3\cdot 2x \cdot \frac{1}{x^2+1} - 3x^2 \cdot \frac{1}{x^3}$

$f'(x) = \frac{6x}{x^2+1} - \frac{3}{x}$

$f''(x) = \frac{6x^2+6-12x^2}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{x^2}$

2.

a) $\int_0^e x \cdot \ln x \, dx$

$$\int x\cdot \ln x \, dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & v' = x \\ u' = \frac{1}{x} & v = \frac{1}{2}x^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C, \ C \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^e x \cdot \ln x \, dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2\right]_0^e = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 = \frac{1}{4}e^2$$

b) $$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x + 9} dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)\cdot \cos x}{\sin^2 x + 9} dx = \left| u = \sin x, \ du = \cos x \, dx \right| = -\int \frac{u^2-1}{u^2+9} du =$$

$$= -\int 1 - 10 \cdot \frac{1}{u^2+3^2} du = -\left(u - \frac{10}{3}\cdot \operatorname{arctg}\frac{u}{3}\right) + C = -\sin x + \frac{10}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sin x}{3} + C$$

3.

$y = \frac{1}{4}(x^2 - 2\ln x)$

$y' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}$

$[y']^2 = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{1}{x^2}$

$1 + [y']^2 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2} = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\frac{1}{x}\right)^2$

$$\int \sqrt{1+[y']^2}\, dx = \int \sqrt{\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2x}\right)^2}\, dx = \int \Big|\overbrace{\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{x}}^{>0, \text{ bo } x\in\mathbb{R}_+ \text{ (bo } \ln x)}\Big| \, dx = \int \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\ln x + C$$

$$L = \left[\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}\ln x\right]_1^2 = 1 + \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4} - 0 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$$

4.

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

b) Z. $A = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}(n-2)$

T. A jest zbieżny

D.

$$B = \sum_{n=3}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{4^n}(n-2) \right| = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n-2}{4^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{4\cdot 4^n}\cdot\frac{4^n}{n-2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\cdot\overbrace{\frac{n-1}{n-2}}^{\to 1} = \frac{1}{4} < 1 \Rightarrow \text{ciąg zbieżny}$$

niedokończone

5. brak