Arkusz 1

Zad.1. *(4p)* Prawda czy Fałsz ? (podaj tylko odpowiedź, bez uzasadnienia)

(a) Jeżeli macierze A i B są odwracalne, to $(A+B)^{-1} = B^{-1}+A^{-1}$.

(b) Wielomian $f(z) = z^8 - a$, gdzie $a, z \in \mathbb{C}$, ma przynajmniej jeden pierwiastek wielokrotny.

(c) Jeżeli układ $Ax = b$ ma jedno rozwiązanie, to $\det A \neq 0$.

(d) $(\mathbb{Z}_n, \otimes_n)$ jest grupą abelową wtedy i tylko wtedy gdy n jest liczbą pierwszą

Zad.2. *(5p)* Określ liczbę rozwiązań równania w zależności od wartości parametru $p \in \mathbb{R}$. Dla wartości p dla której istnieje nieskończenie wiele rozwiązań, znajdź te rozwiązania używając metody eliminacji Gaussa.

$$\begin{cases} (p+1)x - y + pz = 1 \\ (3-p)x + 4y - pz = -4 \\ px + 3y = -3 \end{cases}$$

Zad.3. *(3p)* Naszkicuj zbiór liczb zespolonych z, spełniających nierówność

$$\operatorname{Im}\left(\frac{(1+i)z}{(1-i)\overline{z}}\right) \leq 0$$

Arkusz 2

Zad.4. *(4p)* Rozwiąż równanie. Rozwiązania przedstaw w postaci algebraicznej i zaznacz na płaszczyźnie zespolonej.

$$z^3 = \frac{-4+2i}{2-i}$$

Zad.5. (a) *(2p)* Znajdź wzór na macierz X spełniającą równanie

$$(AX+B)\,C = 3AX$$

(b) *(2p)* Znajdź macierz X

$$X = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Arkusz 3

Zad.6. *(5p)* W pierścieniu $\mathbb{Z}_5[x]$, nie wykonując dzielenia, znajdź resztę z dzielenia wielomianu $V(x) = x^{26} + 2x^{10} + 3x^2 + 1$ przez $W(x) = x^3 + x^2 + 3x$.

Zad.7. Dana jest prosta i płaszczyzna

$$l\ :\ \frac{x-3}{2} = y+1 = z-4, \qquad \pi : 2x - y + 3z - 7 = 0$$

(a) *(1p)* Znajdź punkt przecięcia prostej l i płaszczyzny π

(b) *(2p)* Znajdź rzut prostopadły punktu $P(13,4,9) \in l$ na płaszczyznę π

(c) *(1p)* Znajdź odległość punktu punktu P od płaszczyzny π

(d) *(1p)* Znajdź rzut prostopadły prostej l na płaszczyznę π