Arkusz 1

Zad.1. *(2p)* Prawda czy Fałsz ? (podaj tylko odpowiedź, bez uzasadnienia)

(a) Jeżeli macierze A i B są odwracalne to $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

(b) Dla macierzy kwadratowej $A_{n\times n}$ zachodzi równość $\det(2A) = 2^n \det(A)$.

(c) Zbiór $\mathbb{Z}_{n\times m}$ ze zwykłym mnożeniem macierzy jest grupą.

(d) Jeżeli układ 4 równań z 6 niewiadomymi ma nieskończenie wiele rozwiązań, to zależą one od dokładnie dwóch parametrów.

Zad.2. *(4p)* Dany jest układ równań, gdzie $k \in \mathbb{R}$ jest parametrem.

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 3 \\ kx + 2y = k \\ x + kz + t = 3 \\ 2x + y - kz = k \end{cases}$$

Określ liczbę rozwiązań układu w zależności od parametru k. Jeżeli układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, to znajdź te rozwiązania.

Arkusz 2

Zad.3. *(3p)* Znajdź pierwiastki wielomianu

$$W(x) = x^4 - (1+i)x^3 + (3+i)x^2 + (5-3i)x - 5i$$

wiedząc, że jednym z nich jest $x_1 = i$.

Zad.4. (a)*(2p)* Znajdź wzór na macierz X spełniającą równanie

$$(4XA)^{-1} = X^{-1} + B$$

(b)*(3p)* Znajdź macierz X

$$X \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = X + \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Arkusz 3

Zad.5. *(4p)* Rozwiąż równanie. Rozwiązania podaj w postaci algebraicznej,

$$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^4 = 1$$

Zad.6. *(4p)* W pierścieniu $\mathbb{Z}_5[x]$ znajdź takie wartości parametrów a i b aby pierwiastkami reszty z dzielenia $V(x)$ przez $W(x)$ były liczby $x_1 = 1$ i $x_2 = 2$.

$$V(x) = 3x^5 + 4x^4 + ax^2 + bx + 1, \quad W(x) = 2x^3 + 3$$

Arkusz 4

Zad.7. Trzy kolejne wierzchołki deltoidu ("latawca") $ABCD$ są dane, $A(3,-2,1), B(2,1,3), C(-1,2,1)$.

(a) *(1p)* Znajdź równanie płaszczyzny zawierającej ten deltoid.

(b) *(1p)* Znajdź pole powierzchni trójkąta ABC.

(c) *(2p)* Określ czy kąt przy wierzchołku B jest ostry, prosty, czy rozwarty.

(d) *(4p)* Znajdź współrzędne wierzchołka D wiedząc, że pole trójkąta ACD jest dwa razy większe od pola trójkąta ABC.