

Arkusz 1

ZAD.1. (a) (4p) Oblicz. Wynik podaj w postaci algebraicznej

$$\left(\frac{5i - \sqrt{3}}{2 - i\sqrt{3}} \right)^{103}$$

(b) (4p) Rozwiąż równanie.

$$z^4 - z^3 + (1 - i)z + i - 1 = 0$$

ZAD.2. (4p) Niech D będzie zbiorem macierzy postaci $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ i $a \neq 0$. Czy zbiór D ze zwykłym mnożeniem macierzy tworzy grupę?

Arkusz 2

ZAD.3. (4p) W $\mathbb{Z}_7[x]$ znajdź wartości parametrów A, B tak, aby reszta z dzielenia wielomianu $V(x)$ przez $W(x)$ była równa $3x + 5$.

$$V(x) = 3x^4 + Ax^3 + 2x^2 + Bx + 1, \quad W(x) = 5x^2 + x + 4$$

ZAD.4. (3p) Dla jakich wartości parametru p układ ma dokładnie jedno rozwiązanie? Zbadaj liczbę jego rozwiązań w pozostałych przypadkach.

$$\begin{cases} x + p^2y + z = -p \\ x + y - pz = p^2 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

Arkusz 3

ZAD.5. (a)(3p) Rozwiąż

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} X - \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 7 & -6 \\ -2 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

(b)(3p) Niech A i B będą macierzami kwadratowymi o elementach rzeczywistych. Oblicz $\det(A + B)$ wiedząc, że $\det(B^T A) = 2$ oraz $\det(B^{-1} + A^{-1}) = 3$

ZAD.6. Dane są trzy punkty $A(3, 1, 0)$, $B = (1, 3, 0)$, $C(3, 0, -1)$

- (a) (2p) Oblicz pole trójkąta ABC
- (b) (1p) Znajdź równanie płaszczyzny π_1 zawierającej ten trójkąt
- (c) (1p) Znajdź równanie prostej (w postaci parametrycznej) zawierającej krawędź AB .
- (d) (3p) Znajdź równanie płaszczyzny przechodzącej przez krawędź AB i nachylonej do płaszczyzny π_1 pod kątem $\frac{\pi}{3}$