Soit u la solution du pb complet :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = f(t,x) \\ u(0,x) = u_0(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = v_0(x) \end{cases}$$

Cherchons le pb vérifié par $u - \tilde{u}$:

- $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - c\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(u-\tilde{u})(t,x) = f(t,x) - f(t,x)$
$$= 0$$

- $(u-\tilde{u})(0,x) = u(0,x) - \tilde{u}(0,x)$
$$= u_0(x) - 0$$
$$= u_0(x)$$

- $\dfrac{\partial}{\partial t}(u-\tilde{u})(0,x) = v_0(x) - 0 = v_0(x)$

Alors $u-\tilde{u}$ est solution du pb :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}(u-\tilde{u})(t,x) - c^2 \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(u-\tilde{u})(t,x) = 0 \\ (u-\tilde{u})(0,x) = u_0(x) \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(u-\tilde{u})(0,x) = v_0(x) \end{cases}$$

Donc $(u-\tilde{u})(t,x) = \dfrac{u_0(x+ct) + u_0(x-ct)}{2} + \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(y)\,dy$

On en déduit alors que la solution du pb complet :

$$\boxed{u(t,x) = \frac{u_0(x+ct) + u_0(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(y)\,dy + \int_0^t\int_0^y f(s, x-(t+s-2y)c)\,ds\,dy}$$

4. Méthode des séparations des variables

Exercice 10 :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0 & , \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall x \in]0,1[\\ u(t,0) = u(t,1) = 0 & , \forall t \in \mathbb{R}_+^* \\ u(0,x) = u_0(x) & , \forall x \in]0,1[\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = v_0(x) & , \forall x \in]0,1[\end{cases}$$

Du moment où c'est L^2 alors on peut faire ce dvpmt

• On montrer libre + générateur = base

1. $(w_k(x) = \sin(k\pi x))_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne de $L^2([0,1])$ composée des fonctions propres du Laplacien avec conditions de Dirichlet homogène :

$$\begin{cases} w_k''(x) = -k^2\pi^2 w_k(x) & , \forall k \in \mathbb{N}^* \\ w_k(0) = w_k(1) = 0 \end{cases}$$

u_0 et v_0 sont $\mathcal{C}^\infty([0,1])$ donc u_0 et v_0 sont dans $L^2([0,1])$.

On suppose que la solution $\forall t > 0, u(t,.) \in L^2([0,1])$. Alors u, u_0 et v_0 se décomposent dans la base $(w_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$:

$$\begin{cases} u(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k(t) w_k(x) & , \text{où } \forall k \in \mathbb{N}^*, \ \alpha_k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C} \\ u_0(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k w_k(x) & , \text{où } \beta_k \in \mathbb{C}, \ \forall k \in \mathbb{N}^* \\ v_0(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k w_k(x) & , \text{où } \gamma_k \in \mathbb{C}, \ \forall k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

On injecte $u(t,x)$ dans l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k(t) w_k(x)\right) - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k(t) w_k(x)\right) = 0$$

(formellement)

$$\Leftrightarrow \sum_{k\geq 1} \left[\alpha_k''(t) w_k(x) - c^2 \alpha_k(t) w_k''(x)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k\geq 1} \left[\alpha_k''(t) w_k(x) + c^2 k^2 \pi^2 w_k(x)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k\geq 1} \left(\alpha_k''(t) + c^2 k^2 \pi^2 \alpha_k(t)\right) w_k(x) = 0$$

Par unicité de la décomposition dans la base des $(w_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, on obtient que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \alpha_k''(t) + c^2 k^2 \pi^2 \alpha_k(t) = 0 \qquad \boxed{\text{EDO2 ss } 2^{nd} \text{ membre}}$$

La solution s'écrit :

$$\forall k \geq 1, \ \boxed{\alpha_k(t) = A_k \cos(ck\pi t) + B_k \sin(ck\pi t)}$$

Il reste à déterminer A_k et B_k (CI)

Or, on sait que :

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k w_k(x) \qquad \text{et } u(0,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k(0) w_k(x)$$

Par identification, $\alpha_k(0) = \beta_k$, $\forall k \geqslant 1$

Et on a : $v_0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k w_k(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(0,x)$

Or, $\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k'(0) w_k(x)$ (formellement, penser à justifier)

D'où par identification, $\alpha_k'(0) = \gamma_k$, $\forall k \geqslant 1$

On en déduit que pour tout $k \geqslant 1$:

$$\begin{cases} \alpha_k(0) = \beta_k \iff A_k = \beta_k \\ \alpha_k'(0) = \gamma_k \iff ck\pi B_k = \gamma_k \iff B_k = \dfrac{\gamma_k}{ck\pi} \end{cases}$$

Donc $\boxed{\alpha_k(t) = \beta_k \cos(ck\pi t) + \frac{\gamma_k}{ck\pi} \sin(ck\pi t)}$, $\forall k \geqslant 1$

Au final on obtient :

$$\boxed{u(t,x) = \sum_{k\geqslant 1} \left(\beta_k \cos(ck\pi t) + \frac{\gamma_k}{ck\pi} \sin(ck\pi t)\right) \sin(k\pi x)}$$

2. Soit $t > 0$

Rappel : $L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R},\ \|f\|_\infty \in \mathbb{R} \}$ (ens de fct bornées sur Ω)

A retenir : $L^\infty([0,1]) \subset L^2([0,1])$

On va donc chercher une condition sur u_0 et v_0 pour que $u(t,.) \in L^\infty([0,1])$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$,

- $$\left| \sum_{k=1}^{N} \left(\beta_k \cos(ck\pi t) + \frac{\gamma_k}{ck\pi} \sin(ck\pi t)\right) \sin(k\pi x) \right| \leqslant \sum_{k=1}^{N} \underbrace{\left|\beta_k \cos(ck\pi t)\right.}_{\leqslant |\beta_k|} + \underbrace{\left.\frac{\gamma_k}{ck\pi} \sin(ck\pi t)\right|}_{\leqslant \left|\frac{\gamma_k}{ck\pi}\right|} \cdot \underbrace{|\sin(k\pi x)|}_{\leqslant 1}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{N} |\beta_k| . \frac{|\gamma_k|}{ck\pi}$$

→ Σ partielles donc on doit étudier cv à la limite, si réel alors $|u| \leqslant \sum u_n$ donc borné (si indép ϕ de x) donc L^2

On suppose que la série $\left(\sum_{k\geqslant 1} |\beta_k| . \frac{|\gamma_k|}{ck\pi}\right)$ cv, alors on a par passage à la limite : $|u(t,x)| \leqslant \underbrace{\sum_{k\geqslant 1} |\beta_k| . \frac{|\gamma_k|}{ck\pi}}_{= S \in \mathbb{R} \text{ indép de } x}$, $\forall x \in [0,1]$

Donc sous la condition de cv de la série $\left(\sum_{k\geqslant 1} |\beta_k| . \frac{|\gamma_k|}{ck\pi}\right)$, on a $u(t,.) \in L^\infty([0,1])$.

Bilan : $\boxed{\text{si } \sum_{k\geqslant 1} |\beta_k| . \frac{|\gamma_k|}{ck\pi} \text{ cv alors } u(t,.) \in L^2([0,1])}$

3. même question mais on a $u(t,x)$ qui est une série de fct, qui est $\mathcal{C}^2$ (ou $\mathcal{C}^1$) avec le thm de cv uniforme. On doit mq fct soient de classe $\mathcal{C}^2$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} / \partial t^2$ $\mathcal{C}^2$ en tps et espace ⇒ cvu (astuce étudier cvn ⇒ cvu) et trouver condition donc $u \in \mathcal{C}^2$.

Exercice 11 :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = f(t,x) & , \forall (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times [0,1] \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,1) = 0 & , \forall t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x) & , \forall x \in [0,1] \end{cases}$$

1. On cherche les vap et vp dans le cas des cond de Neuman.

Problème à résoudre :

$$\begin{cases} w''(x) = \lambda w(x) \\ w'(0) = w'(1) = 0 \end{cases}$$

1er cas : $\lambda > 0$

On pose $\lambda = r^2$ avec $r \neq 0$.

Donc on a : $w''(x) - r^2 w(x) = 0$ (éq caractéristique : $y^2 - r^2 = 0$)

D'où : $w(x) = Ae^{rx} + Be^{-rx}$

Or $\begin{cases} w'(0) = 0 \\ w'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} rA - rB = 0 \\ rAe^{r} - rBe^{-r} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \quad (\text{car } r \neq 0) \\ \underbrace{r}_{\neq 0} A \underbrace{(e^{r} - e^{-r})}_{\neq 0 \text{ car } r \neq 0} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A = B = 0$

Donc une seule solution : $(\lambda > 0, \cancel{w_R(x) = 0})$

↳ on ne la garde pas, on veut construire une base.

2ème cas : $\lambda = 0$

Alors $w''(x) = 0 \Rightarrow v_0(x) = \alpha x + \beta$.

Or $w'(0) = w'(1) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

Donc les solutions dans ce cas sont $\{(0, \beta), \beta \in \mathbb{R}\}$

3ème cas : $\lambda < 0$

On pose $\lambda = -\omega^2$ ($\omega \neq 0$), alors on a : $w''(x) + \omega^2 w(x) = 0$. (sol de l'éq caract : $\pm i\omega$) partie réelle nulle

Donc $w(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$

Or $\begin{cases} w'(0) = 0 \\ w'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B\omega = 0 \\ -\omega A\sin(\omega) + B\omega\cos(\omega) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ \omega A \sin(\omega) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ \sin(\omega) = 0 \end{cases}$ ($A = 0$ donne la solution qui ne nous intéresse pas)

$\Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ \omega = k\pi, \ k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Donc $w(x) = A\cos(k\pi x)$

Dans ce cas, les solutions sont $(-k^2\pi^2, A\cos(k\pi x))$ (où $k \in \mathbb{N}^*$)

Bilan : les solutions sont : $\{(0,\beta), \beta \in \mathbb{R}^*\} \cup \{-k^2\pi^2, A\cos(k\pi x), k\in\mathbb{N}^*, A\in\mathbb{R}^*\}$

autrement dit :

$$\{(\underbrace{-k^2\pi^2}_{=\lambda}, A\cos(k\pi x)), k\in\mathbb{N}, A\in\mathbb{R}^*\}$$

On pose alors : $v_k(x) = \cos(k\pi x), \forall k \in \mathbb{N}$

2. $S \in \text{Vect}((v_k)_{k\in\mathbb{N}})$ → somme finie ici d'où somme jusqu'à N (mais si L^2, alors somme ∞, on prend les limites)

$u_0 \in S \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}, u_0(x) = \sum_{k=0}^{N} \beta_k v_k(x)$

On cherche alors u sous la forme :

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k(t) v_k(x)$$

Ici on ne décompose pas sur la base donc on de juste cherche la solution.

Ici il manque à prouver que la famille est libre (mais elle est génératrice) pour mq c'est bien une base.

pour avoir unicité avec u_0 !!

On va supposer que $f \in S$ et on a donc :

$$f(t,x) = \sum_{k=0}^{N} \gamma_k(t) v_k(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = f(t,x)$$

Rappel : $\begin{cases} v_k''(x) = -k^2\pi^2 v_k(x) \\ v_k'(0) = v_k'(1) = 0 \end{cases}$

- On injecte dans l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\sum_{k=0}^{N} \alpha_k(t) v_k(x)\right] - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\sum_{k} \alpha_k(t) v_k(x)\right] = \sum_{k=0}^{N} \gamma_k(t) v_k(x)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{N}\left(\alpha_k'(t) v_k(x) - \alpha_k(t) v_k''(x) - \gamma_k(t) v_k(x)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{N}\left(\alpha_k'(t) + k^2\pi^2\alpha_k(t) - \gamma_k(t)\right) v_k(x) = 0$$

Par "unicité" de la décompo dans la base des $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$, on obtient :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \alpha_k'(t) + k^2\pi^2\alpha_k(t) = \gamma_k(t)$$

→ décomposer en solution homogène puis particulière

La solution homogène est de la forme : $\alpha_k^h(t) = C_k e^{-k^2\pi^2 t} + \cancel{\frac{\gamma_k(t)}{k^2\pi^2}}$, $C_k \in \mathbb{R}$

On doit maintenant déterminer A_k avec les CI.

FAUX car var de la cte

On sait que :

$$u_0(x) = \sum_k \beta_k v_k(x) \qquad \text{et} \quad u(0,x) = \sum_k \alpha_k(0) v_k(x)$$

Donc par identification, $\alpha_k(0) = \beta_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$

Or $\alpha_k(0) = C_k + \dfrac{\gamma_k(0)}{k^2\pi^2}$

Donc $C_k + \dfrac{\gamma_k(0)}{k^2\pi^2} = \beta_k \iff C_k = \beta_k - \dfrac{\gamma_k(0)}{k^2\pi^2}$

D'où la solution :

$$\alpha_k(t) = \left(\beta_k - \frac{\gamma_k(0)}{k^2\pi^2}\right) e^{-k^2\pi^2 t} + \frac{\gamma_k(t)}{k^2\pi^2}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Au final, on obtient :

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{N} \left[\left(\beta_k - \frac{\gamma_k(0)}{k^2\pi^2}\right) e^{-k^2\pi^2 t} + \frac{\gamma_k(t)}{k^2\pi^2}\right] \cos(k\pi x)$$

⚠ Ici on a admis que la famille $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre (à faire en exo) afin de s'assurer de l'unicité de la décomposition dans la base des $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$

Correction :

- Solution particulière : variation de la constante

On cherche $\alpha_k^p(t)$ sous la forme : $\alpha_k^p(t) = C_k e^{-k^2\pi^2 t}$ alors on a $C_k'(t) = \dfrac{\gamma_k(t)}{e^{-k^2\pi^2 t}}$

Donc $C_k(t) = \displaystyle\int_0^t \gamma_k(s) e^{k^2\pi^2 s}\, ds$ d'où $\alpha_k^p(t) = \displaystyle\int_0^t \gamma_k(s) e^{k^2\pi^2 (t-s)}\, ds$

On en déduit que $\forall k \geq 0$,

$$\alpha_k(t) = C_k e^{-k^2\pi^2 t} + \int_0^t \gamma_k(s) e^{k^2\pi^2(t-s)}\, ds$$

Or on sait que,

$$\begin{cases} u(0,x) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k(0) v_k(x) \\ u_0(x) = \sum_{k=0}^{N} \beta_k v_k(x) \end{cases}$$

Par identification, $\alpha_k(0) = \beta_k$, $\forall k \geq 0$

Or $\alpha_k(0) = C_k$ donc $C_k = \beta_k$

Au final on obtient :

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{N} \left[\beta_k e^{-k^2\pi^2 t} + \int_0^t \gamma_k(t) e^{k^2\pi^2(t-s)} ds \right] \cos(k\pi x)$$

3. Idem (formellement) en :

- montrant / admettant que $\overline{\text{Vect}((v_k)_{k\in\mathbb{N}})} = L^2([0,1])$
- en remplaçant N par $+\infty$

Résolution par la transformée de Fourier

Exercice 15 :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) + v\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,x) + du = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

1. On introduit la TF par rapport à la variable d'espace :

$$\hat{u}(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(t,x)\, e^{-i\xi t}\, dt$$

Correction prof :

Appliquons formellement la TF (en espace) à l'équation :

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + v\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x}(t,x) + du\right) = \mathcal{F}(0)$$

⚠ uniquement influence sur var d'espace qd on dérive

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(t,\xi) + vi\xi\,\hat{u}(t,\xi) - (-\xi^2)\,\hat{u}(t,\xi) + d\hat{u}(t,\xi) = 0 \quad , \forall t>0 \text{ et } \forall \xi \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t,\xi) + \underbrace{(vi\xi + \xi^2 + d)}_{\text{cst par rapport à } t}\,\hat{u}(t,\xi) = 0$$

Donc $\hat{u}(t,\xi) = C(\xi)e^{-(iv\xi+\xi^2+d)t}$

Or $\hat{u}(0,\xi) = \mathcal{F}(u(0,x))(\xi)$
$= \mathcal{F}(u_0(x))(\xi)$
$= \hat{u}_0(\xi)$

Donc $C(\xi) = \hat{u}_0(\xi)$

Au final on a : $\boxed{\hat{u}(t,\xi) = \hat{u}_0(\xi)\, e^{-(iv\xi+\xi^2+d)t}}$

Or on sait que :

$$\mathcal{F}^{-1}(f(\xi)g(\xi)) = \mathcal{F}^{-1}(f) * \mathcal{F}^{-1}(g)$$

Donc en appliquant la TF inverse, on obtient :

$$u(t,x) = \left(\mathcal{F}^{-1}(\hat{u}_0(\xi)) * \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-(iv\xi+\xi^2+d)t}\right)\right)(t,x)$$

Donc $\boxed{u(t,x) = \left(u_0 * \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-(iv\xi+\xi^2+d)t}\right)\right)(t,x)}$

remplacer uniquement si on sait le calculer sinon expression ou

où $\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-(iv\xi+\xi^2+d)t}\right)(t,x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-i(vt-x)\xi}\, e^{-(\xi^2+d)t}\, d\xi$