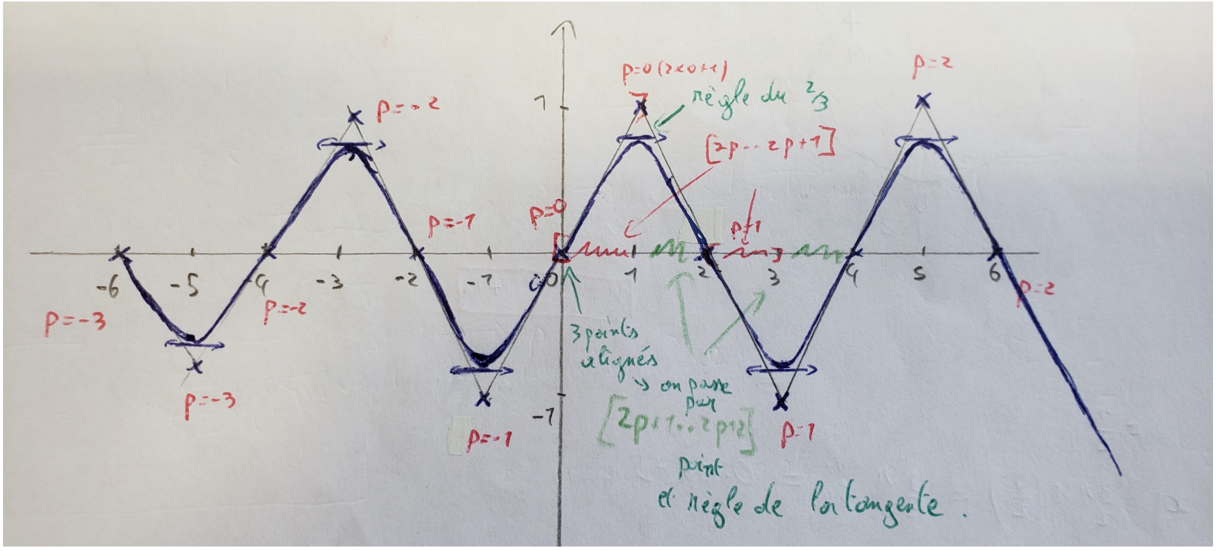
Éléments de Correction TD6

Exercice 1.

1.



2. En utilisant la proposition 5.3 du cours, on obtient les valeurs suivantes :

$\sigma_{2p} = 0$; $\sigma'_{2p} = ((-1)^p - (-1)^{p-1})/2 = (-1)^p$; $\sigma"_{2p} = 0$; $\sigma'''_{2p} = 0 - 3(-1)^p - (-1)^{p-1} = 2\,(-1)^{p-1}$, ainsi que $\sigma_{2p+1} = \frac{2}{3}\,(-1)^p$, $\sigma'_{2p+1} = 0$, $\sigma"_{2p+1} = 2\,(-1)^{p+1}$; $\sigma'''_{2p+1} = 2\,(-1)^p$. Ce qui nous donne maintenant :

$\forall x \in [2p\,..\,2p+1]$, $\sigma(x) = (-1)^p(x-2p) + \frac{(-1)^{p-1}}{3}(x-2p)^3$, et

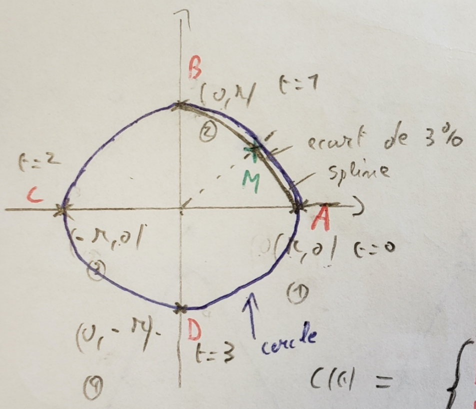
$\forall x \in [2p+1\,..\,2p+2]$, $\sigma(x) = \frac{2}{3}\,(-1)^p + (-1)^{p+1}(x-2p-1)^2 + \frac{(-1)^p}{3}(x-2p-1)^3$

$\forall x \in [6\,..\,+\infty]$, $\sigma(x) = -(x-6)$.

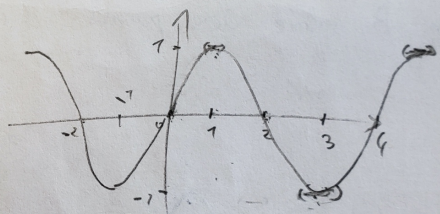
3.

Comme on a $\sigma_i = \frac{2}{3}\,y_i$, la fonction s définie par $s = \frac{3}{2}\sigma$ vérifie $s_i = y_i$ et est donc la spline recherchée, de par l'unicité de la spline cubique naturelle d'interpolation des points $(i, y_i)_{i=1:6}$.

4.



Rappel : la spline s est telle que



$$C(t) = \begin{cases} \boxed{y = r\cdot s(t)} & \text{interpole } (0,0)\ (1,r)\ (2,0)\ (3,-r) \\ \boxed{x = r\cdot s(t+1)} & \text{interpole } (0,r)\ (1,0)\ (2,-r)\ (3,0) \end{cases}$$

$\Rightarrow C$ courbe spline qui interpole $(r,0)\ (0,r)\ (-r,0)\ (0,-r)$

5.

5.

En $t = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} r \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} r \left(\frac{11}{24}\right) = 0.6875\, r \\ y = \frac{3}{2} r \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} r \frac{11}{24} = \frac{11}{16} = 0.6875\, r \quad \text{cf. recto} \end{cases}$$

d'où : $M \begin{cases} x = 0.6875 \\ y = 0.6875 \end{cases}$ sur le cercle $\begin{cases} x_c = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7071 \\ y_c = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7071 \end{cases}$

M à l'intérieur du cercle

d'où erreur $\frac{0.7071 - 0.6875}{0.7071} = 2,77\% \approx 3\%$ d'erreur, spline à l'intérieur.

6. & 7.

Pour approcher de plus près le cercle, on a plusieurs solutions :

1. Dilater un peu la spline d'approximation, de façon à ce que celle-ci se trouve en partie à l'intérieur du cercle et en partie à l'extérieur du cercle. il suffit pour cela de dilater la position des points de controle de moitié de l'écart entre le cercle et la spline d'approximation, c'est à dire changer le coefficient $3/2$ en $(3/2) * (\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{33}{48})$. Ceci va diviser par 2 la distance maximale entre le cercle et l'approximant, la rendre donc en valeur relative à 1,39% , ce qui, pour une approximation d'un cercle avec 5 points n'est pas mal !

2. On peut ajouter des points à interpoler sur le cercle de départ : sigma interpole non seulement les points indiqués, mais aussi les points $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ et les trois autres points similaires sur le cercle. Vous remarquerez qu'alors la courbe B-spline en $t = 0$ est au point $((4 + \sqrt{2})/6\,, 0)$, et qu'il faut donc remplacer le coefficient $3/2$ du sujet par $\frac{6}{4+\sqrt{2}}$. Par raison de symétrie, le point le plus éloigné du cercle est encore obtenu pour $t = \frac{1}{2}$ et se trouve être à $\sigma_x(\frac{1}{2}) = \frac{11\sqrt{2}+1}{48} \frac{6}{4+\sqrt{2}} = \frac{43\sqrt{2}-18}{112} \simeq 0{,}38224$ et $\sigma_y(\frac{1}{2}) = \frac{12\sqrt{2}+23}{48} \frac{6}{4+\sqrt{2}} = \frac{25\sqrt{2}+68}{112} \simeq 0{,}38224$. Ce qui donne maintenant $\sqrt{\sigma(\frac{3}{2})^2 + \sigma_y(\frac{3}{2})^2} \simeq 0{,}99884$, soit une distance radiale maximale d'environ 0,00116, donc de 0,116%. Donc une approximation du cercle avec 9 points et avec une erreur relative d'environ 1,16 pour mille (divisable par 2 via le même système qu'en 1. ci-dessus).

A noter cependant qu'une telle erreur, si elle est certainement admissible pour la visualisation humaine (films d'animation, jeux videos...) n'est pas acceptable pour usiner des pièces qui doivent tourner, pour lesquelles une reproduction exacte du cercle est indispensable. Ceci sera réalisé par les « Non Uniform Rational B-splines » (« NURBS»), qui sont des fractions rationnelles de splines cubiques, et qui sortent du cadre de ce cours.