Motivación:

- Sistema de control de temperatura de un panal de abejas. Sistema de recolección de alimento de un hormiguero. Interacción entre las acciones de los individuos y un "estado macro" (temperatura, rastros de feromonas en el entorno, etc.).
- Desarrollar un sistema formal sencillo para estudiar la interacción elemental entre el estado micro (p.ej., la colección de los estados de las abejas en un instante determinado), y un estado macro (p.ej., la temperatura del panal) (Elementary Micro Macro Interaction, EMMI).
- Comparación con los autómatas celulares.

Definición de un EMMI:

- Sea $\mathcal{I} = \{1, \ldots, I\}$ un conjunto de agentes. Para cada $i \in \mathcal{I}$ se define:
  (a) Umbral $u_i \in [0, 1]$.
  (b) Estado $x_i[k] \in \{0, 1\}$, para $k \in \mathbb{N}$.
  (c) Regla $x_i[k+1] = \begin{cases} 1, & \text{si } X[k] \leq u_i \\ 0, & \text{si } u_i < X[k] \end{cases}$
- Estado macro: $X[k] = \sum_{i \in \mathcal{I}} x_i[k]$, para $k \in \mathbb{N}$.

Lema 1. *No puede haber dos transiciones consecutivas a estados de mayor número de individuos. Es decir, si $X[k] \leq X[k+1]$, entonces $X[k+2] \leq X[k+1]$.*

Demostración. Supongamos que $X[k] \leq X[k+1]$. Vamos a demostrar primero que para todo $i \in \mathcal{I}$ se tiene que $x_i[k+2] \leq x_i[k+1]$. Sea i arbitrario y observe que $x_i[k+1] \in \{0, 1\}$. Consideremos cada caso por aparte:

- Supongamos que $x_i[k+1] = 0$. Luego, por la definición de $x_i[k+1]$ (ver (c) arriba) y por la hipótesis se tiene que $u_i < X[k] \leq X[k+1]$. Es decir, $u_i < X[k+1]$ y, de nuevo por (c) aplicado a $k+2$, se tiene que $x_i[k+2] = 0$. Por lo tanto $x_i[k+2] \leq x_i[k+1]$.
- Supongamos que $x_i[k+1] = 1$. Como $x_i[k+2] \in \{0, 1\}$, entonces $x_i[k+2] \leq x_i[k+1]$.

Como i es arbitrario, entonces $x_i[k+2] \leq x_i[k+1]$ para todo $i \in \mathcal{I}$. En consecuencia, $\sum_{i \in \mathcal{I}} x_i[k+2] \leq \sum_{i \in \mathcal{I}} x_i[k+1]$. Por lo tanto, por la definición de $X[k]$ se tiene que $X[k+2] \leq X[k+1]$. □

Lema 2. *No puede haber dos transiciones consecutivas a estados de menor número de individuos. Es decir, si $X[k+1] \leq X[k]$, entonces $X[k+1] \leq X[k+2]$.*

Teorema 1. *No existen ciclos de longitud 3. Es decir, no existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $X[k] \neq X[k+1] \neq X[k+2]$ y $X[k+3] = X[k]$.*

Demostración. Para todo $k \in \mathbb{N}$ vamos a demostrar que si $X[k] \neq X[k+1] \neq X[k+2]$, entonces $X[k+3] \neq X[k]$. Sea k arbitrario y supongamos la hipótesis. Consideremos por aparte los casos $X[k] < X[k+1]$ y $X[k] < X[k+1]$:

- Supongamos que $X[k] < X[k+1]$. Por el lema 1 se sigue que $X[k+2] \leq X[k+1]$. Tenemos dos casos para comparar $X[k]$ y $X[k+2]$ (ya sabemos que, por hipótesis, ellos son distintos):

    - Caso $X[k+2] < X[k]$. Supongamos por absurdo que $X[k+3] = X[k]$. Entonces, como arriba supusimos que $X[k] < X[k+1]$, se sigue que $X[k+2] < X[k+3] < X[k+1]$. Esto contradice el lema 1. Concluimos que $X[k+3] \neq X[k]$.
    - Caso $X[k] < X[k+2]$. Supongamos por absurdo que $X[k+3] = X[k]$. Entonces, como arriba vimos que $X[k+2] \leq X[k+1]$, se sigue que $X[k+3] < X[k+2] \leq X[k+1]$. Esto contradice el lema 2. Concluimos que $X[k+3] \neq X[k]$.

  En cualquiera de estos dos casos, se sigue que $X[k+3] \neq X[k]$.

- Supongamos que $X[k+1] < X[k]$. El razonamiento aquí es similar al caso anterior, para concluir que $X[k+3] \neq X[k]$.

En cualqueir caso, $X[k+3] \neq X[k]$, y como k es arbitrario, entonces concluimos que si $X[k] \neq X[k+1] \neq X[k+2]$, entonces $X[k+3] \neq X[k]$, para todo $k \in \mathbb{N}$. $\square$