Motivación:

- Sistema de control de temperatura de un panal de abejas. Sistema de recolección de alimento de un hormiguero. Interacción entre las acciones de los individuos y un "estado macro" (temperatura, rastros de feromonas en el entorno, etc.).
- Desarrollar un sistema formal sencillo para estudiar la interacción elemental entre el estado micro (p.ej., la colección de los estados de las abejas en un instante determinado), y un estado macro (p.ej., la temperatura del panal) (Elementary Micro Macro Interaction, EMMI).
- Comparación con los autómatas celulares.

Definición de un EMMI:

- Sea $\mathcal{I} = \{1, \dots, I\}$ un conjunto de agentes. Para cada $i \in \mathcal{I}$ se define:
  (a) Umbral $u_i \in [0, 1]$.
  (b) Estado $x_i[k] \in \{0, 1\}$, para $k \in \mathbb{N}$.
  (c) Regla $x_i[k+1] = \begin{cases} 1, & \text{si } X[k] \leq u_i \\ 0, & \text{si } u_i < X[k] \end{cases}$
- Canal de comunicación: $X[k] = \frac{1}{I} \sum_{i \in \mathcal{I}} x_i[k]$, para $k \in \mathbb{N}$.
- $\boldsymbol{u}[k] = (u_1[k], \dots, u_I[k])$
- $\boldsymbol{x}[k] = (x_1[k], \dots, x_I[k])$ (estado micro)

A continuación se definirá la función de utilidad de cada agente:

$$Ingreso_i[t] = \begin{cases} 1, & \text{si } x_i(t) = 1 \quad \& \quad u_i \leq X[t] \\ -1, & \text{si } x_i(t) = 1 \quad \& \quad u_i > X[t] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{1}$$

La respectiva regla de aprendizaje es:

$$\Delta u_i[t] = \begin{cases} 0, & \text{si } U_i(t) = 1 \\ -0{,}1(u_i - X[t]), & \text{si } U_i(t) = 0 \\ 0{,}1(u_i - X[t]), & \text{si } U_i(t) = -1 \end{cases} \tag{2}$$

Observación 1. *La dinámica del sistema es determinista, es decir, si* $\boldsymbol{x}[k] = \boldsymbol{x}[l]$*, entonces* $\boldsymbol{x}[k+1] = \boldsymbol{x}[l+1]$*, para todo* $k, l \in \mathbb{N}$.

Observación 2. *Si* $X[k] = X[l]$*, entonces* $X[k+1] = X[l+1]$*, para todo* $k, l \in \mathbb{N}$.

Observación 3. $X[k+1] = |\{i \in \mathcal{I} : \frac{X[k]}{I} \leq u_i\}|$

Lema 1 (Mortal)**.** *Si* $X[k] \leq X[l]$*, entonces* $X[l{+}1] \leq X[k{+}1]$*.*

Demostración. Supongamos que $X[k] \leq X[l]$. Vamos a demostrar primero que para todo $i \in \mathcal{I}$ se tiene que $x_i[l{+}1] \leq x_i[k{+}1]$. Sea i arbitrario y observe que $x_i[k{+}1] \in \{0, 1\}$. Consideremos cada caso por aparte:

- Supongamos que $x_i[k{+}1] = 0$. Luego, por la definición de $x_i[k{+}1]$ (ver (c) arriba) y por la hipótesis se tiene que $u_i < \frac{X[k]}{I} \leq \frac{X[l]}{I}$. Es decir, $u_i < \frac{X[l]}{I}$ y, de nuevo por (c) aplicado a $l{+}1$, se tiene que $x_i[l{+}1] = 0$. Por lo tanto $x_i[l{+}1] \leq x_i[k{+}1]$.
- Supongamos que $x_i[k{+}1] = 1$. Como $x_i[l{+}1] \in \{0, 1\}$, entonces $x_i[l{+}1] \leq x_i[k{+}1]$.

Como i es arbitrario, entonces $x_i[l{+}1] \leq x_i[k{+}1]$ para todo $i \in \mathcal{I}$. En consecuencia, $\sum_{i \in \mathcal{I}} x_i[l{+}1] \leq \sum_{i \in \mathcal{I}} x_i[k{+}1]$. Por lo tanto, por la definición de $X[k]$ se tiene que $X[l{+}1] \leq X[k{+}1]$. $\square$

Corolario 1. *No puede haber dos transiciones consecutivas a estados de mayor número de individuos. Es decir, si* $X[k] \leq X[k{+}1]$*, entonces* $X[k{+}2] \leq X[k{+}1]$*.*

Demostración. Considere el lema mortal con $l = k + 1$. $\square$

Corolario 2. *No puede haber dos transiciones consecutivas a estados de menor número de individuos. Es decir, si* $X[k{+}1] \leq X[k]$*, entonces* $X[k{+}1] \leq X[k{+}2]$*.*

Demostración. Considere el lema mortal con $l = k - 1$. $\square$

Teorema 1. *No existen ciclos de longitud 3. Es decir, no existe* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $X[k] \neq X[k{+}1] \neq X[k{+}2]$ *y* $X[k{+}3] = X[k]$*.*

Demostración. Para todo $k \in \mathbb{N}$ vamos a demostrar que si $X[k] \neq X[k{+}1] \neq X[k{+}2]$, entonces $X[k{+}3] \neq X[k]$. Sea k arbitrario y supongamos la hipótesis. Consideremos por aparte los casos $X[k] < X[k{+}1]$ y $X[k] > X[k{+}1]$:

- Supongamos que $X[k] < X[k{+}1]$. Por el lema 1 se sigue que $X[k{+}2] \leq X[k{+}1]$. Tenemos dos casos para comparar $X[k]$ y $X[k{+}2]$ (ya sabemos que, por hipótesis, ellos son distintos):
  - Caso $X[k{+}2] < X[k]$. Supongamos por absurdo que $X[k{+}3] = X[k]$. Por la observación 2 se sigue que $X[k{+}4] = X[k{+}1]$. Entonces, como arriba supusimos que $X[k] < X[k{+}1]$, se sigue que $X[k{+}2] < X[k{+}3] < X[k{+}4]$. Esto contradice el lema 1. Concluimos que $X[k{+}3] \neq X[k]$.
  - Caso $X[k] < X[k{+}2]$. Supongamos por absurdo que $X[k{+}3] = X[k]$. Entonces, como arriba vimos que $X[k{+}2] \leq X[k{+}1]$, se sigue que $X[k{+}3] < X[k{+}2] \leq X[k{+}1]$. Esto contradice el lema 2. Concluimos que $X[k{+}3] \neq X[k]$.

  En cualquiera de estos dos casos, se sigue que $X[k{+}3] \neq X[k]$.

- Supongamos que $X[k{+}1] < X[k]$. El razonamiento aquí es similar al caso anterior, para concluir que $X[k{+}3] \neq X[k]$.

En cualqueir caso, $X[k{+}3] \neq X[k]$, y como k es arbitrario, entonces concluimos que si $X[k] \neq X[k{+}1] \neq X[k{+}2]$, entonces $X[k{+}3] \neq X[k]$, para todo $k \in \mathbb{N}$. □

Lema 2. *Si* $X[k] < X[l] < X[l{+}1]$*, entonces* $X[k] < X[l] < X[l{+}1] \leq X[k{+}1]$

Demostración. Como $X[k] < X[l]$ se sigue por el lema mortal que $X[l{+}1] \leq X[k{+}1]$, ademas como $X[l] < X[l{+}1]$ entonces $X[k] < X[l] < X[l{+}1] \leq X[k{+}1]$ □

Teorema 2. *Si existe un* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $X[k] = X[k{+}1]$*, entonces existe un* $p \in [0,1]$ *tal que*

$$p * I = |\{i \in \mathcal{I} : p \leq u_i\}| \tag{3}$$

Demostración. Supongamos que existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $X[k] = X[k{+}1]$ y sea $p = \frac{X[k]}{I}$. Observe que $p \in [0,1]$ y que $p * I = \frac{X[k]}{I} * I = X[k] = X[k{+}1]$. Además, observe que:

$$\begin{aligned} p * I &= X[k{+}1] \\ &= |\{i \in \mathcal{I} : \frac{X[k]}{I} \leq u_i\}| && \text{(por la observación 3)} \\ &= |\{i \in \mathcal{I} : p \leq u_i\}| && \text{(por definición de } p\text{)} \end{aligned}$$

Por lo tanto existe un $p \in [0,1]$ que cumple la igualdad (3). □

Observación 4. *Si para ningún* $p \in [0,1]$ *se cumple la igualdad (3), entonces el sistema no tiene un estado estable.*

Observación 5. *Si se cumpla la igualdad (3),* $p{*}I$ *debe ser entero, luego* $p = \frac{j}{I}$*, para algún* $j \in \{1, \ldots, I\}$*.*