

Modelación y simulación del control de temperatura en un panal de abejas

Edgar Andrade-Lotero^{*}

Resumen

En este texto expositivo presentaremos un modelo matemático muy simple del sistema de control de temperatura en un panal de abejas, como un ejercicio de motivación de la modelación matemática en ciencias naturales. Describiremos brevemente este sistema, crearemos un modelo matemático muy fácil de entender, y realizaremos algunas simulaciones computacionales sobre la dinámica de la temperatura. Esto nos permitirá sacar conclusiones que no son obvias a partir de los elementos del sistema.

El propósito de un modelo matemático es ayudarnos a estudiar un fenómeno en el mundo. La manipulación del modelo nos permite comprender la influencia de ciertos factores sobre la dinámica del sistema, que a su vez puede ser utilizada para hacer predicciones sobre los estados futuros del mismo, ganando así conocimiento sobre él (Frigg and Hartmann, 2017; Giordano et al., 2014). Muchos fenómenos del mundo se prestan para ser representados por modelos matemáticos que son intratables analíticamente, ya sea porque no es posible encontrar soluciones precisas o porque su tamaño o escala las hacen intratables de manera práctica. Pero las simulaciones computacionales han llegado al rescate y han permitido que los científicos conozcan estos modelos y, por lo tanto, los fenómenos que representan. El fenómeno que aquí nos interesa es la manera mediante la cual las abejas controlan la temperatura de su panal. Aunque en este texto ciertamente no proporcionaremos nuevos conocimientos sobre los modelos matemáticos, las simulaciones computacionales, o sobre las abejas, sí queremos motivar, mediante este ejemplo muy sencillo, el estudio de fenómenos naturales mediante modelos matemáticos y simulaciones computacionales.

Sobre las abejas se ha hablado mucho: se ha estudiado su estructura social (Michener, 1974; van Honk and Hogeweg, 1981; Whitehead, 1997), la manera

^{*}Departamento de Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación. Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas. Universidad del Rosario. COLOMBIA. Correo electrónico: edgar.andrade@urosario.edu.co

en que buscan recursos (Seeley, 1996), sus medios de comunicación (Seeley, 1996; Rohrseitz and Tautz, 1999; Wenner, 2002; Hailman, 1977; Richter and Waddington, 1993), entre muchas otras cosas. Estas son características asombrosas de las abejas, pero no menos asombrosa es la manera mediante la cual controlan la temperatura de su panal (Underwood, 1990; Fischer, 2004; Staff, 2016). La temperatura en un panal que alberga huevos es muy importante para el desarrollo y la salud de las abejas producidas por esos huevos (Groh et al., 2004; Jones et al., 2005; Medrzycki et al., 2010). Si la temperatura del panal se encuentra por encima o por debajo de los límites óptimos (entre 32 y 35 grados centígrados), los huevos no se desarrollarán bien, y las abejas que nazcan de ellos serán más débiles. Adicionalmente, la estabilidad de la temperatura del panal dentro de los límites óptimos es un indicador fiable de que la abeja reina está poniendo huevos. Es por esto que los apicultores suelen usar termómetros para monitorear el estado del panal sin tener que abrirlo. Mediante el conocimiento de la dinámica de los distintos estados de los enjambres de abejas y el monitoreo constante de la temperatura del panal (entre otros factores), los apicultores pueden establecer el estado del enjambre, determinando si hay o no hay huevos, si hay o no hay reina, o si las abejas se están preparando para pupalar, etc. (Kviesis and Zacepins, 2015).

La temperatura del panal depende de la temperatura del ambiente, del diseño del panal, y de las actividades de las abejas obreras. Las obreras emplean varias estrategias para controlar la temperatura. Cuando la temperatura del panal está por debajo de lo adecuado, algunas obreras sirven como calentadores por un tiempo, generando calor metabólico al contraer y relajar los músculos de las alas. Es como tiritar mucho y muy rápido, de manera tal que no solo se calienta el cuerpo, sino que el cuerpo calienta un poco el ambiente. Ellas se ubican en lugares estratégicos del panal para cumplir esta función, y otras obreras se encargan de alimentarlas con miel de alta calidad. Las demás obreras se juntan entre ellas para preservar el calor. Por otro lado, cuando la temperatura del panal es muy alta, algunas obreras ubicadas a las entradas del panal baten sus alas como abanicos para disipar el calor.

Para crear un modelo matemático de este sistema es necesario hacer una abstracción y simplificación de las funciones de las abejas en el control de la temperatura. ¿Qué es lo que nos interesa de cada abeja en particular? La respuesta es obvia: su contribución a la temperatura del panal. Podemos abstraer su tamaño, color, edad, etc. y concentrarnos sólo en el aspecto anteriormente mencionado. También podemos simplificar la manera en que la

distribución geográfica de las abejas influye en el cambio de temperatura, de tal manera que sólo consideraremos la colección de abejas sin ninguna estructura intrínseca. Así pues, lo que nos interesará de cada abeja es su estado, el cual puede ser: reposo (A_0), calentando (A_1), o enfriando (A_2). También nos interesan las condiciones que determinan cuándo una abeja entra en cuál estado. Esto puede verse como una función, la cual depende de la temperatura del panal. Si T es la temperatura del panal, entonces definimos

$$f(T, \lim_{inf}, \lim_{sup}) = \begin{cases} A_0 & \text{si } \lim_{inf} < T < \lim_{sup} \\ A_1 & \text{si } T < \lim_{inf} \\ A_2 & \text{si } T > \lim_{sup} \end{cases}$$

La función f depende de la temperatura del panal y de los límites inferior (\lim_{inf}) y superior (\lim_{sup}), los cuales controlan si la abeja entra en un estado de calentar o enfriar, respectivamente. No todas las abejas son iguales, lo cual se refleja en que no todas tengan los mismos límites. No obstante, asumiremos que, para cada abeja, la diferencia entre el límite superior y el límite inferior siempre es igual a una cantidad d ; lo que cambia de abeja a abeja es en dónde está ubicado el intervalo formado por estos límites. Describiremos el intervalo mediante un centro, c_i , el cual depende de cada abeja, de tal manera que el límite inferior es $c_i - \frac{d}{2}$ y el superior $c_i + \frac{d}{2}$. Asumiremos que c_i es una variable aleatoria con distribución normal con parámetros μ y σ . Si $T(t)$ es la temperatura del panal en el tiempo t e i es la i -ésima abeja del panal, entonces $f(T(t), c_i - \frac{d}{2}, c_i + \frac{d}{2})$ determina el estado de la i -ésima abeja en el tiempo $t + 1$. Definimos $|A_0|_{t+1}$ como el número de abejas que están en reposo en el tiempo $t + 1$, $|A_1|_{t+1}$ el de las que están calentando, y $|A_2|_{t+1}$ el de las que están enfriando.

La temperatura del panal depende de muchos factores. Nos centraremos solo en los siguientes: la temperatura del ambiente (T_a) y los estados de las abejas que afectan la temperatura (A_1 y A_2). En primer lugar, cuanto mayor sea la diferencia entre la temperatura del panal y la temperatura del ambiente, mayor es la contribución de esta última en el cambio de la primera. Esto se representa matemáticamente incluyendo el término $h(T_a - T(t))$ en la determinación de la temperatura del panal en el tiempo $t + 1$ (donde h es el coeficiente de convección del material del cual está hecho el panal). En segundo lugar, debemos incluir también el término $\alpha|A_1|_{t+1} - \beta|A_2|_{t+1}$, en donde α es el cambio en la temperatura propiciado por el calor metabólico de una abeja en un instante de tiempo y β el cambio producido por el abanicar

de las alas de una abeja en un instante. De esta manera, la temperatura del panel en el instante $t + 1$ queda determinado por:

$$T(t + 1) = T(t) + h(T_a - T(t)) + \alpha|A_1|_{t+1} - \beta|A_2|_{t+1} \quad (1)$$

Para entender la dinámica del sistema, se hace necesario usar simulaciones computacionales, toda vez que la cantidad de operaciones que deben ejecutarse es considerable. En la figura 1 presentamos un diagrama de flujo que nos permite simular el sistema.

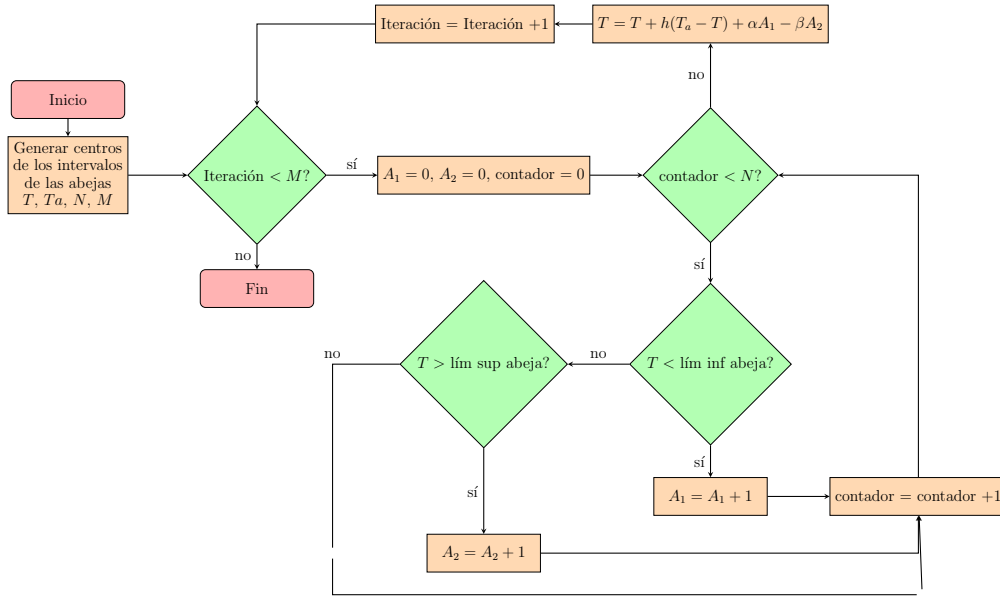


Figura 1: Diagrama de flujo para calcular la temperatura del panel en un número M de iteraciones. En cada iteración se examina la totalidad de las abejas, para clasificarlas en A_1 (calentando) o A_2 (enfriando), y luego determinar la temperatura siguiente mediante la ecuación (1).

Supongamos algunos parámetros arbitrarios y consideremos 10 iteraciones del sistema, obteniendo la gráfica de la figura 2.

¿Por qué en la iteración 6 bajó la temperatura del panel de manera tan drástica? La respuesta es la siguiente. Por un lado, la temperatura del ambiente es de 5 grados centígrados, lo cual tiende a enfriar rápidamente el panel. En segundo lugar, en la iteración 5 la mayoría de abejas está cómoda con la

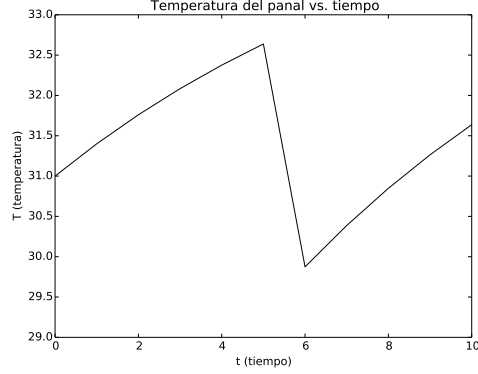


Figura 2: Representación gráfica de diez iteraciones de la temperatura con base en la ecuación (1). Los parámetros son $N = 10,000$, $T = 31$, $Ta = 5$, $h = 0,1$ $\alpha = \beta = 0,0003$.

temperatura del panal, que es superior a 32.6 grados, luego entran en estado de reposo y no van a producir calor. En consecuencia, el ambiente enfriará rápidamente el panal a una temperatura por debajo de los 30 grados. Aquí las abejas se sienten incómodas y comenzarán a producir calor, calentando el panal nuevamente.

Un resultado sorprendente es que los enjambres más heterogéneos controlarán la temperatura de una manera más estable que los enjambres con menor variación. En otras palabras, cuanto mayor es la variación entre abejas respecto a los límites en los cuales sienten calor y frío, mejor será el control de la temperatura del panal. En nuestro modelo, el parámetro σ es el que controla la generación aleatoria de los centros de los intervalos que representan a cada abeja. Cuanto mayor σ , más dispares serán los centros de las abejas y en consecuencia también más dispares serán los límites inferior y superior de las abejas. Como observamos en la figura 3, a medida que σ aumenta, el control de temperatura se hace más eficiente, es decir, la temperatura del panal se mantiene más estable. La razón es que no todas las abejas actúan de la misma manera al mismo tiempo. Un cambio en la temperatura hará que sólo una pequeña proporción de abejas se sientan inconformes, causando un cambio pequeño en la temperatura en la dirección contraria. Como este cambio es pequeño, también la cantidad de abejas que se sentirán inconformes con él es pequeño, generando a su vez un cambio pequeño en la temperatura, y así en adelante. Este resultado fue descubierto empíricamente por Jones *et al.* (2005), quienes encontraron que la temperatura del panal tiende a ser

más estable en colonias con mayor diversidad genética que en colonias más uniformes genéticamente.

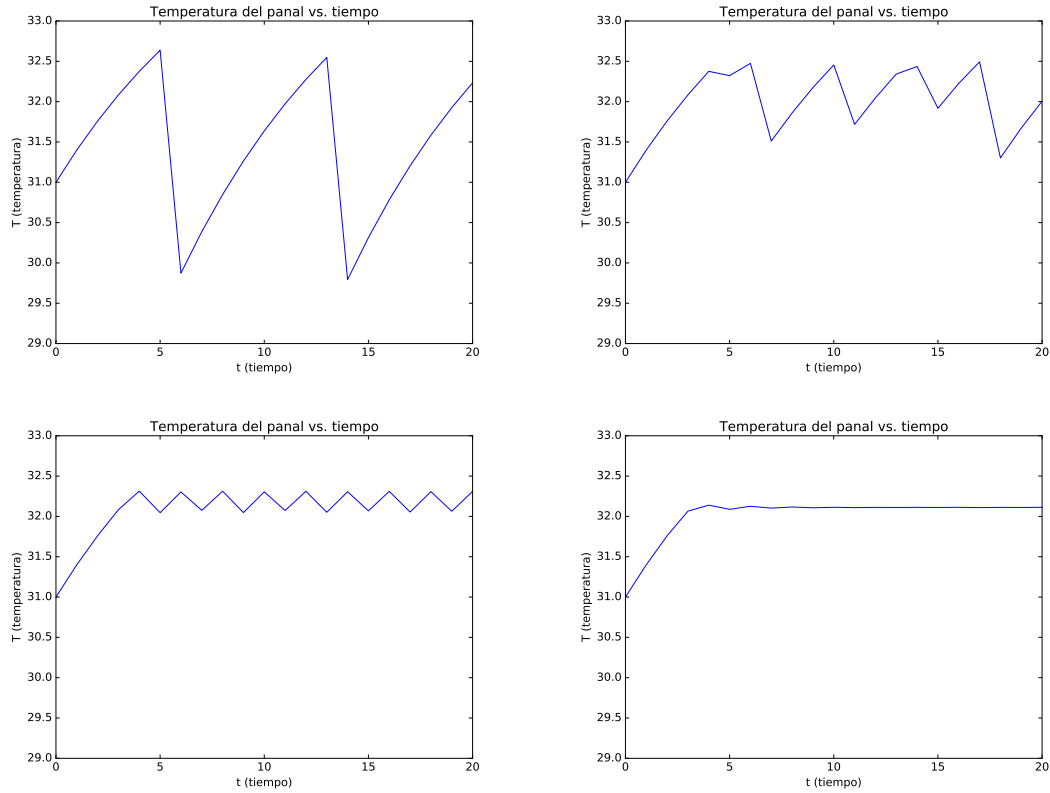


Figura 3: Las cuatro gráficas representan la temperatura del panal en 20 iteraciones del sistema y su dependencia con respecto a la variación de los centros de las abejas. En la parte superior izquierda se muestra el comportamiento de la temperatura cuando $\sigma = 0,01$, en la superior derecha cuando $\sigma = 0,1$, en la inferior izquierda cuando $\sigma = 0,2$ y, finalmente, en la parte inferior derecha cuando $\sigma = 0,3$. Se observa que a mayor desviación estándar, mayor estabilidad en la temperatura del panal.

Referencias

Fischer, S. H. (2004). Bee cool. *Science Now*, page 1.

Frigg, R. and Hartmann, S. (2017). Models in science. In Zalta, E. N., editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, spring 2017 edition.

- Giordano, F. R., Fox, W. P., and Horton, S. B. (2014). *A First Course in Mathematical Modeling*. Cengage, 5th edition.
- Groh, C., Tautz, J., and Rössler, W. (2004). Synaptic organization in the adult honey bee brain is influenced by brood-temperature control during pupal development. *Proceedings Of The National Academy Of Sciences Of The United States Of America*, 101(12):4268 – 4273.
- Hailman, J. P. (1977). Bee dancing and evolutionary epistemology. *The American Naturalist*, 111(977):187–189.
- Jones, J. C., Helliwell, P., Beekman, M., Maleszka, R., and Oldroyd, B. P. (2005). The effects of rearing temperature on developmental stability and learning and memory in the honey bee, *apis mellifera*. *Journal Of Comparative Physiology. A, Neuroethology, Sensory, Neural, And Behavioral Physiology*, 191(12):1121 – 1129.
- Kviesis, A. and Zacepins, A. (2015). System architectures for real-time bee colony temperature monitoring. *Procedia Computer Science*, 43:86–94.
- Medrzycki, P., Sgolastra, F., Bortolotti, L., Bogo, G., Tosi, S., Padovani, E., Porrini, C., and Sabatini, A. G. (2010). Influence of brood rearing temperature on honey bee development and susceptibility to poisoning by pesticides. *Journal of Apicultural Research*, 49(1):52–59.
- Michener, C. D. (1974). *The Social Behavior of the Bees*. Belknap Press.
- Richter, M. R. and Waddington, K. D. (1993). Past foraging experience influences honey bee dance behaviour. *Animal Behaviour*, 46(1):123–128.
- Rohrseitz, K. and Tautz, J. (1999). Honey bee dance communication: waggle run direction coded in antennal contacts? *Journal of Comparative Physiology A*, 184(4):463–470.
- Seeley, T. D. (1996). *The Wisdom of the Hive: The Social Physiology of Honey Bee Colony*. Harvard University Press.
- Staff, E. B.-K. (2016). How do bees work together to cool their hives? *Christian Science Monitor*, page N.PAG.
- Underwood, B. A. (1990). Bee cool. *Natural History*, 99(12):50.
- van Honk, C. and Hogeweg, P. (1981). The ontogeny of the social structure in a captive *bombus terrestris* colony. *Behavioral Ecology and Sociobiology*, 9(2):111–119.
- Wenner, A. M. (2002). The elusive honey bee dance “language” hypothesis. *Journal of Insect Behavior*, 15(6):859–878.
- Whitehead, H. (1997). Analysing animal social structure. *Animal Behaviour*, 53(5):1053–1067.