Motivación:

- Interacción entre las acciones de los individuos y un "estado macro" (temperatura, rastros de feromonas en el entorno, etc.). Ejemplos: sistema de control de temperatura de un panal de abejas; sistema de recolección de alimento de un hormiguero.
- Ontología del estado macro: sencillamente otro estado de cosas (se abstrae su naturaleza y se considera sólo su función).
- Desarrollar un sistema formal sencillo para estudiar la interacción elemental entre el estado micro (p.ej., la colección de los estados de las abejas en un instante determinado), y un estado macro (p.ej., la temperatura del panal) (Elementary Micro Macro Interaction, EMMI).
- Comparación con los autómatas celulares.

Definición de un EMMI:

- Sea $\mathcal{I} = \{1, \ldots, I\}$ un conjunto de agentes. Para cada $i \in \mathcal{I}$ se define:
  (a) Umbral $u_i \in [0, 1]$.
  (b) Estado $x_i[k] \in \{0, 1\}$, para $k \in \mathbb{N}$.
  (c) Regla $x_i[k+1] = \begin{cases} 1, & \text{si } \frac{X[k]}{I} \leq u_i \\ 0, & \text{si } u_i < \frac{X[k]}{I} \end{cases}$
- Estado macro: $X[k] = \sum_{i \in \mathcal{I}} x_i[k]$, para $k \in \mathbb{N}$.
- $\boldsymbol{u}[k] = (u_1[k], \ldots, u_I[k])$
- $\boldsymbol{x}[k] = (x_1[k], \ldots, x_I[k])$ (estado micro)

2 EJEMPLOS CON POCOS AGENTES

Observación 1. *La dinámica de los estados micro es determinista, es decir, si* $\boldsymbol{x}[k] = \boldsymbol{x}[l]$*, entonces* $\boldsymbol{x}[k+1] = \boldsymbol{x}[l+1]$*, para todo* $k, l \in \mathbb{N}$*.*

Observación 2. *La dinámica de los estados macro es determinista, es decir, si* $X[k] = X[l]$*, entonces* $X[k+1] = X[l+1]$*, para todo* $k, l \in \mathbb{N}$*.*

Observación 3. $X[k+1] = |\{i \in \mathcal{I} : \frac{X[k]}{I} \leq u_i\}|$

Lema 1 (Dinámica fundamental)**.** *Si* $X[k] \leq X[l]$*, entonces* $X[l+1] \leq X[k+1]$*.*

Demostración. Supongamos que $X[k] \leq X[l]$. Vamos a demostrar primero que para todo $i \in \mathcal{I}$ se tiene que $x_i[l+1] \leq x_i[k+1]$. Sea i arbitrario y observe que $x_i[k+1] \in \{0, 1\}$. Consideremos cada caso por aparte:

- Supongamos que $x_i[k+1] = 0$. Luego, por la definición de $x_i[k+1]$ (ver (c) arriba) y por la hipótesis se tiene que $u_i < \frac{X[k]}{I} \leq \frac{X[l]}{I}$. Es decir, $u_i < \frac{X[l]}{I}$ y, de nuevo por (c) aplicado a $l+1$, se tiene que $x_i[l+1] = 0$. Por lo tanto $x_i[l+1] \leq x_i[k+1]$.
- Supongamos que $x_i[k+1] = 1$. Como $x_i[l+1] \in \{0, 1\}$, entonces $x_i[l+1] \leq x_i[k+1]$.

Como i es arbitrario, entonces $x_i[l+1] \leq x_i[k+1]$ para todo $i \in \mathcal{I}$. En consecuencia, $\sum_{i\in\mathcal{I}} x_i[l+1] \leq \sum_{i\in\mathcal{I}} x_i[k+1]$. Por lo tanto, por la definición de $X[k]$ se tiene que $X[l+1] \leq X[k+1]$. $\square$

Corolario 1. *No puede haber dos transiciones consecutivas a estados de mayor número de individuos. Es decir, si $X[k] \leq X[k+1]$, entonces $X[k+2] \leq X[k+1]$.*

Demostración. Considere el lema 1 con $l = k + 1$. $\square$

Corolario 2. *No puede haber dos transiciones consecutivas a estados de menor número de individuos. Es decir, si $X[k+1] \leq X[k]$, entonces $X[k+1] \leq X[k+2]$.*

Demostración. Considere el lema 1 con $l = k - 1$. $\square$

Teorema 1. *No existen ciclos de longitud 3. Es decir, no existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $X[k] \neq X[k+1] \neq X[k+2]$ y $X[k+3] = X[k]$.*

Demostración. Para todo $k \in \mathbb{N}$ vamos a demostrar que si $X[k] \neq X[k+1] \neq X[k+2]$, entonces $X[k+3] \neq X[k]$. Sea k arbitrario y supongamos la hipótesis. Consideremos por aparte los casos $X[k] < X[k+1]$ y $X[k] > X[k+1]$:

- Supongamos que $X[k] < X[k+1]$. Por el lema 1 se sigue que $X[k+2] \leq X[k+1]$. Tenemos dos casos para comparar $X[k]$ y $X[k+2]$ (ya sabemos que, por hipótesis, ellos son distintos):
  - Caso $X[k+2] < X[k]$. Supongamos por absurdo que $X[k+3] = X[k]$. Por la observación 2 se sigue que $X[k+4] = X[k+1]$. Entonces, como arriba supusimos que $X[k] < X[k+1]$, se sigue que $X[k+2] < X[k+3] < X[k+4]$. Esto contradice el corolario 1. Concluimos que $X[k+3] \neq X[k]$.
  - Caso $X[k] < X[k+2]$. Supongamos por absurdo que $X[k+3] = X[k]$. Entonces, como arriba vimos que $X[k+2] \leq X[k+1]$, se sigue que $X[k+3] < X[k+2] \leq X[k+1]$. Esto contradice el corolario 2. Concluimos que $X[k+3] \neq X[k]$.

  En cualquiera de estos dos casos, se sigue que $X[k+3] \neq X[k]$.
- Ahora supongamos que $X[k+1] < X[k]$. Por el lema 1 se sigue que $X[k+1] \leq X[k+2]$. Tenemos dos casos para comparar $X[k]$ y $X[k+2]$ (ya sabemos que, por hipótesis, ellos son distintos):
  - Caso $X[k+2] < X[k]$. Supongamos por absurdo que $X[k+3] = X[k]$. Entonces como arriba vimos que $X[k+1] \leq X[k+2]$, se sigue que $X[k+1] \leq X[k+2] < X[k+3]$. Esto contradice el corolario 2. Concluimos que $X[k+3] \neq X[k]$.

- Caso $X[k] < X[k+2]$. Supongamos por absurdo que $X[k+3] = X[k]$. Por la observación 2 se sigue que $X[k+4] = X[k+1]$. Entonces, como arriba supusimos que $X[k+1] < X[k]$, se sigue que $X[k+4] < X[k+3] < X[k+2]$. Esto contradice el corolario 2. Concluimos que $X[k+3] \neq X[k]$.

En cualquier caso, $X[k+3] \neq X[k]$, y como k es arbitrario, entonces concluimos que si $X[k] \neq X[k+1] \neq X[k+2]$, entonces $X[k+3] \neq X[k]$, para todo $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Lema 2. *Si $X[k] < X[l] < X[l+1]$, entonces $X[k] < X[l] < X[l+1] \leq X[k+1]$*

Demostración. Como $X[k] < X[l]$ se sigue por el lema 1 que $X[l+1] \leq X[k+1]$, ademas como $X[l] < X[l+1]$ entonces $X[k] < X[l] < X[l+1] \leq X[k+1]$ $\square$

SI EL REBOTE SE CIERRA, SE SIGUE CERRANDO
SI EL REBOTE SE ABRE, SE SIGUE ABRIENDO

Corolario 3. *No existen ciclos de longitud mayor o igual a 3.*

Teorema 2 (Punto fijo)**.** *Si existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $X[k] = X[k+1]$, entonces existe un $p \in [0,1]$ tal que*

$$p * I = |\{i \in \mathcal{I} : p \leq u_i\}| \tag{1}$$

Demostración. Supongamos que existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $X[k] = X[k+1]$ y sea $p = \frac{X[k]}{I}$. Observe que $p \in [0,1]$ y que $p * I = \frac{X[k]}{I} * I = X[k] = X[k+1]$. Además, observe que:

$$\begin{aligned} p * I &= X[k+1] \\ &= |\{i \in \mathcal{I} : \frac{X[k]}{I} \leq u_i\}| && \text{(por la observación 3)} \\ &= |\{i \in \mathcal{I} : p \leq u_i\}| && \text{(por definición de } p\text{)} \end{aligned}$$

Por lo tanto existe un $p \in [0,1]$ que cumple la igualdad (1). $\square$

Teorema 3 (Unicidad del punto fijo)**.** *Si $p_1, p_2 \in [0,1]$ y ambos cumplen la ecuación 1, entonces $p_1 = p_2$.*

Demostración. Supongamos que $p_1, p_2 \in [0,1]$ y que ambos cumplen la ecuación 1. Supongamos por absurdo que $p_1 < p_2$. Sea $i \in \{i \in \mathcal{I} : p_2 \leq u_i\}$, entonces $p_2 \leq u_i$ y por hipótesis se sigue que $p_1 \leq u_i$. Luego $i \in \{i \in \mathcal{I} : p_1 \leq u_i\}$ y en consecuencia, $\{i \in \mathcal{I} : p_2 \leq u_i\} \subseteq \{i \in \mathcal{I} : p_1 \leq u_i\}$. Por lo tanto, $|\{i \in \mathcal{I} : p_2 \leq u_i\}| \leq |\{i \in \mathcal{I} : p_1 \leq u_i\}|$. Por la ecuación 1 se sigue que $p_2 * I \leq p_1 * I$ y luego $p_2 \leq p_1$ ($\rightarrow\leftarrow$). Por reducción al absurdo hemos demostrado que si $p_1, p_2 \in [0,1]$ y ambos cumplen la ecuación 1, entonces $p_1 = p_2$. $\square$

Observación 4. *Si para ningún $p \in [0,1]$ se cumple la igualdad (1), entonces el sistema no tiene un estado estable.*

Observación 5. *Si se cumpla la igualdad (1), $p*I$ debe ser entero, luego $p = \frac{j}{I}$, para algún $j \in \{1, \ldots, I\}$.*