

Motivación:

- Sistema de control de temperatura de un panal de abejas. Sistema de recolección de alimento de un hormiguero. Interacción entre las acciones de los individuos y un “estado macro” (temperatura, rastros de feromonas en el entorno, etc.).
- Desarrollar un sistema formal sencillo para estudiar la interacción elemental entre el estado micro (p.ej., la colección de los estados de las abejas en un instante determinado), y un estado macro (p.ej., la temperatura del panal) (Elementary Micro Macro Interaction, EMMI).
- Comparación con los autómatas celulares.

Definición de un EMMI:

- Sea $\mathcal{I} = \{1, \dots, I\}$ un conjunto de agentes. Para cada $i \in \mathcal{I}$ se define:
 - (a) Umbral $u_i \in [0, 1]$.
 - (b) Estado $x_i[k] \in \{0, 1\}$, para $k \in \mathbb{N}$.
 - (c) Regla $x_i[k+1] = \begin{cases} 1, & \text{si } \frac{X[k]}{I} \leq u_i \\ 0, & \text{si } u_i < \frac{X[k]}{I} \end{cases}$
- Estado macro: $X[k] = \sum_{i \in \mathcal{I}} x_i[k]$, para $k \in \mathbb{N}$.
- $\mathbf{u}[k] = (u_1[k], \dots, u_I[k])$
- $\mathbf{x}[k] = (x_1[k], \dots, x_I[k])$ (estado micro)

Observación 1. La dinámica del sistema es determinista, es decir, si $\mathbf{x}[k] = \mathbf{x}[l]$, entonces $\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{x}[l+1]$, para todo $k, l \in \mathbb{N}$.

Observación 2. Si $X[k] = X[l]$, entonces $X[k+1] = X[l+1]$, para todo $k, l \in \mathbb{N}$.

Observación 3. $X[k+1] = |\{i \in \mathcal{I} : \frac{X[k]}{I} \leq u_i\}|$

Lema 1 (Mortal). Si $X[k] \leq X[l]$, entonces $X[l+1] \leq X[k+1]$.

Demostración. Supongamos que $X[k] \leq X[l]$. Vamos a demostrar primero que para todo $i \in \mathcal{I}$ se tiene que $x_i[l+1] \leq x_i[k+1]$. Sea i arbitrario y observe que $x_i[k+1] \in \{0, 1\}$. Consideremos cada caso por aparte:

- Supongamos que $x_i[k+1] = 0$. Luego, por la definición de $x_i[k+1]$ (ver (c) arriba) y por la hipótesis se tiene que $u_i < \frac{X[k]}{I} \leq \frac{X[l]}{I}$. Es decir, $u_i < \frac{X[l]}{I}$ y, de nuevo por (c) aplicado a $l+1$, se tiene que $x_i[l+1] = 0$. Por lo tanto $x_i[l+1] \leq x_i[k+1]$.
- Supongamos que $x_i[k+1] = 1$. Como $x_i[l+1] \in \{0, 1\}$, entonces $x_i[l+1] \leq x_i[k+1]$.

Como i es arbitrario, entonces $x_i[l+1] \leq x_i[k+1]$ para todo $i \in \mathcal{I}$. En consecuencia, $\sum_{i \in \mathcal{I}} x_i[l+1] \leq \sum_{i \in \mathcal{I}} x_i[k+1]$. Por lo tanto, por la definición de $X[k]$ se tiene que $X[l+1] \leq X[k+1]$. \square

Corolario 1. *No puede haber dos transiciones consecutivas a estados de mayor número de individuos. Es decir, si $X[k] \leq X[k+1]$, entonces $X[k+2] \leq X[k+1]$.*

Demostración. Considere el lema mortal con $l = k + 1$. \square

Corolario 2. *No puede haber dos transiciones consecutivas a estados de menor número de individuos. Es decir, si $X[k+1] \leq X[k]$, entonces $X[k+1] \leq X[k+2]$.*

Demostración. Considere el lema mortal con $l = k - 1$. \square

Teorema 1. *No existen ciclos de longitud 3. Es decir, no existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $X[k] \neq X[k+1] \neq X[k+2]$ y $X[k+3] = X[k]$.*

Demostración. Para todo $k \in \mathbb{N}$ vamos a demostrar que si $X[k] \neq X[k+1] \neq X[k+2]$, entonces $X[k+3] \neq X[k]$. Sea k arbitrario y supongamos la hipótesis. Consideremos por aparte los casos $X[k] < X[k+1]$ y $X[k] > X[k+1]$:

- Supongamos que $X[k] < X[k+1]$. Por el lema 1 se sigue que $X[k+2] \leq X[k+1]$. Tenemos dos casos para comparar $X[k]$ y $X[k+2]$ (ya sabemos que, por hipótesis, ellos son distintos):
 - Caso $X[k+2] < X[k]$. Supongamos por absurdo que $X[k+3] = X[k]$. Por la observación 2 se sigue que $X[k+4] = X[k+1]$. Entonces, como arriba supusimos que $X[k] < X[k+1]$, se sigue que $X[k+2] < X[k+3] < X[k+4]$. Esto contradice el lema 1. Concluimos que $X[k+3] \neq X[k]$.
 - Caso $X[k] < X[k+2]$. Supongamos por absurdo que $X[k+3] = X[k]$. Entonces, como arriba vimos que $X[k+2] \leq X[k+1]$, se sigue que $X[k+3] < X[k+2] \leq X[k+1]$. Esto contradice el lema 2. Concluimos que $X[k+3] \neq X[k]$.

En cualquiera de estos dos casos, se sigue que $X[k+3] \neq X[k]$.

- Supongamos que $X[k+1] < X[k]$. El razonamiento aquí es similar al caso anterior, para concluir que $X[k+3] \neq X[k]$.

En cualquier caso, $X[k+3] \neq X[k]$, y como k es arbitrario, entonces concluimos que si $X[k] \neq X[k+1] \neq X[k+2]$, entonces $X[k+3] \neq X[k]$, para todo $k \in \mathbb{N}$. \square

Lema 2. *Si $X[k] < X[l] < X[l+1]$, entonces $X[k] < X[l] < X[l+1] \leq X[k+1]$*

Demostración. Como $X[k] < X[l]$ se sigue por el lema mortal que $X[l+1] \leq X[k+1]$, además como $X[l] < X[l+1]$ entonces $X[k] < X[l] < X[l+1] \leq X[k+1]$ \square

Teorema 2. *Si existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $X[k] = X[k+1]$, entonces existe un $p \in [0, 1]$ tal que*

$$p * I = |\{i \in \mathcal{I} : p \leq u_i\}| \quad (1)$$

Demostración. Supongamos que existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $X[k] = X[k+1]$ y sea $p = \frac{X[k]}{I}$. Observe que $p \in [0, 1]$ y que $p * I = \frac{X[k]}{I} * I = X[k] = X[k+1]$. Además, observe que:

$$\begin{aligned} p * I &= X[k+1] \\ &= |\{i \in \mathcal{I} : \frac{X[k]}{I} \leq u_i\}| && \text{(por la observación 3)} \\ &= |\{i \in \mathcal{I} : p \leq u_i\}| && \text{(por definición de } p\text{)} \end{aligned}$$

Por lo tanto existe un $p \in [0, 1]$ que cumple la igualdad (1). \square

Observación 4. Si para ningún $p \in [0, 1]$ se cumple la igualdad (1), entonces el sistema no tiene un estado estable.

Observación 5. Si se cumple la igualdad (1), $p * I$ debe ser entero, luego $p = \frac{j}{I}$, para algún $j \in \{1, \dots, I\}$.