

Motivación:

- Sistema de control de temperatura de un panal de abejas. Sistema de recolección de alimento de un hormiguero. Interacción entre las acciones de los individuos y un “estado macro” (temperatura, rastros de feromonas en el entorno, etc.).
- Desarrollar un sistema formal sencillo para estudiar la interacción elemental entre el estado micro (p.ej., la colección de los estados de las abejas en un instante determinado), y un estado macro (p.ej., la temperatura del panal) (Elementary Micro Macro Interaction, EMMI).
- Comparación con los autómatas celulares.

Definición de un EMMI:

- Sea  $\mathcal{I} = \{1, \dots, I\}$  un conjunto de agentes. Para cada  $i \in \mathcal{I}$  se define:
  - (a) Umbral  $u_i \in [0, 1]$ .
  - (b) Estado  $x_i[k] \in \{0, 1\}$ , para  $k \in \mathbb{N}$ .
  - (c) Regla  $x_i[k+1] = \begin{cases} 1, & \text{si } \frac{X[k]}{I} \leq u_i \\ 0, & \text{si } u_i < \frac{X[k]}{I} \end{cases}$
- Estado macro:  $X[k] = \sum_{i \in \mathcal{I}} x_i[k]$ , para  $k \in \mathbb{N}$ .
- $\mathbf{u}[k] = (u_1[k], \dots, u_I[k])$
- $\mathbf{x}[k] = (x_1[k], \dots, x_I[k])$  (estado micro)

**Observación 1.** La dinámica del sistema es determinista, es decir, si  $\mathbf{x}[k] = \mathbf{x}[l]$ , entonces  $\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{x}[l+1]$ , para todo  $k, l \in \mathbb{N}$ .

**Observación 2.** Si  $X[k] = X[l]$ , entonces  $X[k+1] = X[l+1]$ , para todo  $k, l \in \mathbb{N}$ .

**Observación 3.**  $X[k+1] = |\{i \in \mathcal{I} : \frac{X[k]}{I} \leq u_i\}|$

**Lema 1** (Mortal). Si  $X[k] \leq X[l]$ , entonces  $X[l+1] \leq X[k+1]$ .

*Demostración.* Supongamos que  $X[k] \leq X[l]$ . Vamos a demostrar primero que para todo  $i \in \mathcal{I}$  se tiene que  $x_i[l+1] \leq x_i[k+1]$ . Sea  $i$  arbitrario y observe que  $x_i[k+1] \in \{0, 1\}$ . Consideremos cada caso por aparte:

- Supongamos que  $x_i[k+1] = 0$ . Luego, por la definición de  $x_i[k+1]$  (ver (c) arriba) y por la hipótesis se tiene que  $u_i < \frac{X[k]}{I} \leq \frac{X[l]}{I}$ . Es decir,  $u_i < \frac{X[l]}{I}$  y, de nuevo por (c) aplicado a  $l+1$ , se tiene que  $x_i[l+1] = 0$ . Por lo tanto  $x_i[l+1] \leq x_i[k+1]$ .
- Supongamos que  $x_i[k+1] = 1$ . Como  $x_i[l+1] \in \{0, 1\}$ , entonces  $x_i[l+1] \leq x_i[k+1]$ .

Como  $i$  es arbitrario, entonces  $x_i[l+1] \leq x_i[k+1]$  para todo  $i \in \mathcal{I}$ . En consecuencia,  $\sum_{i \in \mathcal{I}} x_i[l+1] \leq \sum_{i \in \mathcal{I}} x_i[k+1]$ . Por lo tanto, por la definición de  $X[k]$  se tiene que  $X[l+1] \leq X[k+1]$ .  $\square$

**Corolario 1.** *No puede haber dos transiciones consecutivas a estados de mayor número de individuos. Es decir, si  $X[k] \leq X[k+1]$ , entonces  $X[k+2] \leq X[k+1]$ .*

*Demostración.* Considere el lema mortal con  $l = k + 1$ .  $\square$

**Corolario 2.** *No puede haber dos transiciones consecutivas a estados de menor número de individuos. Es decir, si  $X[k+1] \leq X[k]$ , entonces  $X[k+1] \leq X[k+2]$ .*

*Demostración.* Considere el lema mortal con  $l = k - 1$ .  $\square$

**Teorema 1.** *No existen ciclos de longitud 3. Es decir, no existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $X[k] \neq X[k+1] \neq X[k+2]$  y  $X[k+3] = X[k]$ .*

*Demostración.* Para todo  $k \in \mathbb{N}$  vamos a demostrar que si  $X[k] \neq X[k+1] \neq X[k+2]$ , entonces  $X[k+3] \neq X[k]$ . Sea  $k$  arbitrario y supongamos la hipótesis. Consideremos por aparte los casos  $X[k] < X[k+1]$  y  $X[k] > X[k+1]$ :

- Supongamos que  $X[k] < X[k+1]$ . Por el lema 1 se sigue que  $X[k+2] \leq X[k+1]$ . Tenemos dos casos para comparar  $X[k]$  y  $X[k+2]$  (ya sabemos que, por hipótesis, ellos son distintos):
  - Caso  $X[k+2] < X[k]$ . Supongamos por absurdo que  $X[k+3] = X[k]$ . Por la observación 2 se sigue que  $X[k+4] = X[k+1]$ . Entonces, como arriba supusimos que  $X[k] < X[k+1]$ , se sigue que  $X[k+2] < X[k+3] < X[k+4]$ . Esto contradice el lema 1. Concluimos que  $X[k+3] \neq X[k]$ .
  - Caso  $X[k] < X[k+2]$ . Supongamos por absurdo que  $X[k+3] = X[k]$ . Entonces, como arriba vimos que  $X[k+2] \leq X[k+1]$ , se sigue que  $X[k+3] < X[k+2] \leq X[k+1]$ . Esto contradice el lema 2. Concluimos que  $X[k+3] \neq X[k]$ .

En cualquiera de estos dos casos, se sigue que  $X[k+3] \neq X[k]$ .

- Supongamos que  $X[k+1] < X[k]$ . El razonamiento aquí es similar al caso anterior, para concluir que  $X[k+3] \neq X[k]$ .

En cualquier caso,  $X[k+3] \neq X[k]$ , y como  $k$  es arbitrario, entonces concluimos que si  $X[k] \neq X[k+1] \neq X[k+2]$ , entonces  $X[k+3] \neq X[k]$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Lema 2.** *Si  $X[k] < X[l] < X[l+1]$ , entonces  $X[k] < X[l] < X[l+1] \leq X[k+1]$*

*Demostración.* Como  $X[k] < X[l]$  se sigue por el lema mortal que  $X[l+1] \leq X[k+1]$ , además como  $X[l] < X[l+1]$  entonces  $X[k] < X[l] < X[l+1] \leq X[k+1]$   $\square$

**Teorema 2.** *Si existe un  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $X[k] = X[k+1]$ , entonces existe un  $p \in [0, 1]$  tal que*

$$p * I = |\{i \in \mathcal{I} : p \leq u_i\}| \quad (1)$$

*Demostración.* Supongamos que existe un  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $X[k] = X[k+1]$  y sea  $p = \frac{X[k]}{I}$ . Observe que  $p \in [0, 1]$  y que  $p * I = \frac{X[k]}{I} * I = X[k] = X[k+1]$ . Además, observe que:

$$\begin{aligned} p * I &= X[k+1] \\ &= |\{i \in \mathcal{I} : \frac{X[k]}{I} \leq u_i\}| && \text{(por la observación 3)} \\ &= |\{i \in \mathcal{I} : p \leq u_i\}| && \text{(por definición de } p) \end{aligned}$$

Por lo tanto existe un  $p \in [0, 1]$  que cumple la igualdad (1).  $\square$

**Observación 4.** Si para ningún  $p \in [0, 1]$  se cumple la igualdad (1), entonces el sistema no tiene un estado estable.

**Observación 5.** Si se cumpla la igualdad (1),  $p * I$  debe ser entero, luego  $p = \frac{j}{I}$ , para algún  $j \in \{1, \dots, I\}$ .

A continuación se definirá la función de utilidad de cada agente:

$$U_i(t) = \text{Ingreso}_i(t) - \text{Costo}_i(t) \quad (2)$$

$$\text{Costo}_i[t] = \begin{cases} 1, & \text{si } x_i(t) = 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{Ingreso}_i[t] = \begin{cases} 2, & \text{si } x_i(t) = 1 \text{ y } x_i(t) \leq N \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (4)$$

La respectiva regla de aprendizaje es:

$$\Delta u_i[t] = \begin{cases} 0, & \text{si } U_i(t) = 1 \\ 0, 1(u_i - X[t]), & \text{si } U_i(t) = 0 \\ -0, 1(u_i - X[t]), & \text{si } U_i(t) = -1 \end{cases} \quad (5)$$