Co-Graphen, Splitgraphen, Schwellwertgraphen

Pascal Braband

Institut für Informatik
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

5. Dezember 2019

2019-12-05

Co-Graphen, Splitgraphen, Schwellwertgraphen

Co-Graphen, Splitgraphen, Schwellwertgraphen

Pascal Braband

Institut für Informatik
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

5. Dezember 2019

Gliederung

1. Co-Graphen
   - Grundlagen
   - Algorithmus zur Erkennung
   - Algorithmen auf Co-Graphen
2. Splitgraphen
   - Grundlagen
   - Splittance
3. Schwellwertgraphen
   - Grundlagen

Gliederung

1 Co-Graphen
Grundlagen
Algorithmus zur Erkennung
Algorithmen auf Co-Graphen
2 Splitgraphen
Grundlagen
Splittance
3 Schwellwertgraphen
Grundlagen

ZIEL:

- Grundlagen
- Definition
- Eigenschaften
- Verbindungen

der 3 Graphenklassen zeigen

Definition

Seien $G_1 = (V, E)$ und $G_2 = (V, E)$ zwei Graphen

1. Die *disunkte Vereinigung* von G_1 und G_2 ist definiert durch

$$G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$$

2. Die *disjunkte Summe* von G_1 und G_2 ist definiert durch

$$G_1 \times G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{\{v_1, v_2\} | v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\})$$

2019-12-05

Co-Graphen

Definition

Seien $G_1 = (V, E)$ und $G_2 = (V, E)$ zwei Graphen

1. Die *disunkte Vereinigung* von G_1 und G_2 ist definiert durch

$$G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$$

2. Die *disjunkte Summe* von G_1 und G_2 ist definiert durch

$$G_1 \times G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{\{v_1, v_2\} | v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\})$$

Co-Graphen

Definition Co-Graphen [GRRW10]

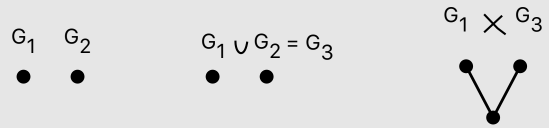
Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ ist ein Co-Graph, falls er konstruiert werden kann über:

1. Graph mit genau einem Knoten ($G = \bullet$) ist ein Co-Graph.
2. *Disjunkte Vereinigung* $G_1 \cup G_2$ der Co-Graphen G_1, G_2 ist Co-Graph.
3. *Disjunkte Summe* $G_1 \times G_2$ der Co-Graphen G_1, G_2 ist Co-Graph.

Co-Graphen
Definition Co-Graphen [GRRW10]
Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ ist ein Co-Graph, falls er konstruiert werden kann über:
1. Graph mit genau einem Knoten ($G = \bullet$) ist ein Co-Graph.
2. *Disjunkte Vereinigung* $G_1 \cup G_2$ der Co-Graphen G_1, G_2 ist Co-Graph.
3. *Disjunkte Summe* $G_1 \times G_2$ der Co-Graphen G_1, G_2 ist Co-Graph.

Ungerichteter Graph, gibt **aber** auch gerichtete
Entdeckt in den 1970er Jahren von mehreren Autoren

Kurzes Beispiel für Co-Graph an der TAFEL



Co-Baum

Definition Co-Baum [GRRW10]

Seien G_1, G_2 Co-Graphen mit entsprechenden Co-Bäumen T_1, T_2.

Der Co-Baum T zum Graphen G wird konstruiert mit:

1. Co-Baum T für Co-Graph $G = \bullet$ hat genau einen Knoten markiert mit $\bullet$
2. Co-Baum T zu $G_1 \cup G_2$ hat Wurzel w markiert mit $\cup$ und die Kinder T_1, T_2
3. Co-Baum T zu $G_1 \times G_2$ hat Wurzel w markiert mit $\times$ und die Kinder T_1, T_2

Co-Baum

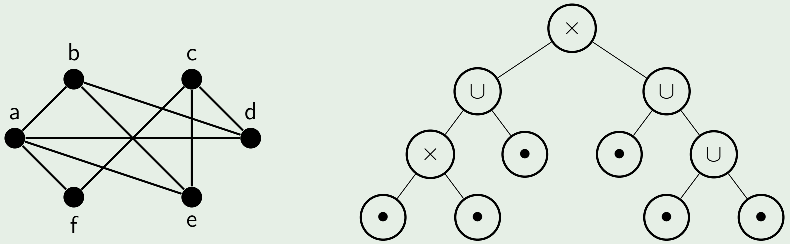
Definition Co-Baum [GRRW10]
Seien G_1, G_2 Co-Graphen mit entsprechenden Co-Bäumen T_1, T_2.
Der Co-Baum T zum Graphen G wird konstruiert mit:
1. Co-Baum T für Co-Graph $G = \bullet$ hat genau einen Knoten markiert mit $\bullet$
2. Co-Baum T zu $G_1 \cup G_2$ hat Wurzel w markiert mit $\cup$ und die Kinder T_1, T_2
3. Co-Baum T zu $G_1 \times G_2$ hat Wurzel w markiert mit $\times$ und die Kinder T_1, T_2

Jede Operation wird durch einen Knoten dargestellt.

Co-Graph mit Co-Baum JETZT anzeichnen

Co-Baum

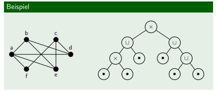
Beispiel



2019-12-05

Co-Graphen, Splitgraphen, Schwellwertgraphen
└Co-Graphen
  └Grundlagen
    └Co-Baum

Co-Baum



Co-Graph und Co-Baum parallel aufbauen, an der TAFEL

Co-Graph Eigenschaften

Eigenschaften von Co-Graphen [CLSB81]

Sei G ein Co-Graph

- G ist abgeschlossen unter induzierter Teilgraphenbildung
- G enthält keinen P_4 als induzierten Teilgraphen

Co-Graph Eigenschaften
Eigenschaften von Co-Graphen [CLSB81]
Sei G ein Co-Graph
G ist abgeschlossen unter induzierter Teilgraphenbildung
G enthält keinen P_4 als induzierten Teilgraphen

DEUTLICH SAGEN: Co-Graphen $\Leftrightarrow$ P_4-freie Graphen

Erkennung von Co-Graphen

Algorithmus Co-Graphen Erkennung [CPS85]

Der Algorithmus bestimmt für einen Graphen G, ob dieser ein Co-Graph ist. Falls ja, so gibt er den entsprechenden Co-Baum zurück.

- *Grundlage:* Induzierte Teilgraphenbildung über Co-Graphen
- *Idee:* Den Graphen G schrittweise aufbauen
- G ist ein Co-Graph $\Rightarrow$ der Graph ist nach jedem Schritt ein Co-Graph

Erkennung von Co-Graphen

Algorithmus Co-Graphen Erkennung [CPS85]

Der Algorithmus bestimmt für einen Graphen G, ob dieser ein Co-Graph ist. Falls ja, so gibt er den entsprechenden Co-Baum zurück.

- *Grundlage:* Induzierte Teilgraphenbildung über Co-Graphen
- *Idee:* Den Graphen G schrittweise aufbauen
- G ist ein Co-Graph $\Rightarrow$ der Graph ist nach jedem Schritt ein Co-Graph

- NUR die Idee $\rightarrow$ zu wenig Zeit
- Wenn der Graph ein Co-Graph ist
  - $\rightarrow$ Nach jedem Schritt muss G ein Co-Graph sein
  - $\rightarrow$ Nach jedem Schritt prüfen, ob aufgebauter Graph noch Co-Graph ist

Erkennung von Co-Graphen

Gegeben Graph $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$

- Füge iterativ jedes $x \in V$ zu anfangs leerem Graphen hinzu
- Markiere bisherigen Co-Baum, abhängig von den zu x adjazenten Knoten
- Mit Markierungen:
  - $\rightarrow$ Überprüfe, ob $G + x$ noch ein Co-Graph ist
  - $\rightarrow$ Füge x zu Co-Baum hinzu

Erkennung von Co-Graphen
Gegeben Graph $G = (V, E)$ mit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$
- Füge iterativ jedes $x \in V$ zu anfangs leerem Graphen hinzu
- Markiere bisherigen Co-Baum, abhängig von den zu x adjazenten Knoten
- Mit Markierungen:
  - $\rightarrow$ Überprüfe, ob $G + x$ noch ein Co-Graph ist
  - $\rightarrow$ Füge x zu Co-Baum hinzu

- Knoten beliebig mit $\{v_1, \ldots, v_n\}$ nummeriert
- Man weiß ja, mit welchen Knoten x adjazent ist

Algorithmen auf Co-Graphen

- Lösung von NP-schweren Problemen auf Co-Graphen oft einfach
- Algorithmen benutzen den Co-Baum
- Einschränkung auf P_4-frei oft möglich in Praxis

Algorithmen auf Co-Graphen

- Lösung von NP-schweren Problemen auf Co-Graphen oft einfach
- Algorithmen benutzen den Co-Baum
- Einschränkung auf P_4-frei oft möglich in Praxis

- Vorteil: Darstellung durch Baumstruktur, ermöglicht schnelle Algorithmen
- Praktische, da bei vielen Anwendungen von Graphen ausgeschlossen werden kann, dass sie einen P_4 enthalten

Algorithmen auf Co-Graphen

Problem	Laufzeit
Unabhängigkeitszahl $\alpha(G)$	$O(\|V\| + \|E\|)$
Knotenüberdeckungszahl $\tau(G)$	$O(\|V\| + \|E\|)$
Cliquenzahl $\omega(G)$	$O(\|V\| + \|E\|)$
Färbungszahl $\chi(G)$	$O(\|V\| + \|E\|)$
Cliquenpartitionszahl $\theta(G)$	$O(\|V\| + \|E\|)$
Hamiltonpfad/-kreis	$O(\|V\|)$
Isomorphie	$O(\|V\| + \|E\|)$
Baumweite	$O(\|V_T\|)$

Tabelle: Laufzeiten für Probleme auf Co-Graphen $G = (V, E)$ mit Co-Baum $T = (V_T, E_T)$

Algorithmen auf Co-Graphen

Problem	Laufzeit
Unabhängigkeitszahl $\alpha(G)$	$O(\|V\| + \|E\|)$
Knotenüberdeckungszahl $\tau(G)$	$O(\|V\| + \|E\|)$
Cliquenzahl $\omega(G)$	$O(\|V\| + \|E\|)$
Färbungszahl $\chi(G)$	$O(\|V\| + \|E\|)$
Cliquenpartitionszahl $\theta(G)$	$O(\|V\| + \|E\|)$
Hamiltonpfad/-kreis	$O(\|V\|)$
Isomorphie	$O(\|V\| + \|E\|)$
Baumweite	$O(\|V_T\|)$

Tabelle: Laufzeiten für Probleme auf Co-Graphen $G = (V, E)$ mit Co-Baum $T = (V_T, E_T)$

Übersicht über Laufzeiten einiger Algorithmen

Splitgraphen

Definition Splitgraph [FH77]

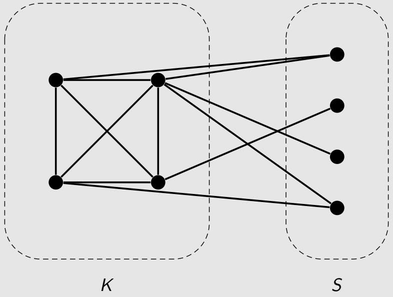
Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ ist ein Splitgraph, falls die Knotenmenge V partitioniert werden kann in zwei Knotenmengen K und S, wobei K eine Clique ist und S eine unabhängige Menge.

Eigenschaften von Splitgraphen

- K oder S können leer sein
- Partition muss nicht eindeutig sein

Splitgraphen
Definition Splitgraph [FH77]
Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ ist ein Splitgraph, falls die Knotenmenge V partitioniert werden kann in zwei Knotenmengen K und S, wobei K eine Clique ist und S eine unabhängige Menge.
Eigenschaften von Splitgraphen
- K oder S können leer sein
- Partition muss nicht eindeutig sein

Beispiel an TAFEL anzeichnen:



S leer $\Rightarrow$ K_4 ist zB ein Splitgraph
P_3 als Beispiel für verschiedene Partitionen
Partitionen: $K = \{a, b\}$, $S = \{c\}$ oder $K = \{b, c\}$, $S = \{a\}$

Splittance

Definition Splittance [HS81]

Die *Splittance* $\sigma(G)$ eines beliebigen Graphen $G = (V, E)$ ist die *minimale* Anzahl an Kanten, die entfernt oder hinzugefügt werden muss, damit G ein Splitgraph ist.

Eigenschaften der Splittance

- $\sigma(G) = 0$, falls G ein Splitgraph ist
- $\sigma(G) = \sigma(\overline{G})$

2019-12-05

Splittance

Definition Splittance [HS81]
Die *Splittance* $\sigma(G)$ eines beliebigen Graphen $G = (V, E)$ ist die *minimale* Anzahl an Kanten, die entfernt oder hinzugefügt werden muss, damit G ein Splitgraph ist.

Eigenschaften der Splittance
- $\sigma(G) = 0$, falls G ein Splitgraph ist
- $\sigma(G) = \sigma(\overline{G})$

Splittance

Splittance Berechnung

Splittance kann eindeutig durch die Gradfolge $d_{1,\ldots,n}$ von G bestimmt werden.

$$m = \max\{i | 1 \leq i \leq n, d_i \geq i - 1\}$$

Die Splittance $\sigma(G) = \sigma_m(G)$ ist

$$\sigma_m(d) = \frac{1}{2}\left(m(m-1) - \sum_{i=1}^{m} d_i + \sum_{i=m+1}^{n} d_i\right)$$

Splittance

Splittance Berechnung

Splittance kann eindeutig durch die Gradfolge $d_{1,\ldots,n}$ von G bestimmt werden.

$$m = \max\{i | 1 \leq i \leq n, d_i \geq i - 1\}$$

Die Splittance $\sigma(G) = \sigma_m(G)$ ist

$$\sigma_m(d) = \frac{1}{2}\left(m(m-1) - \sum_{i=1}^{m} d_i + \sum_{i=m+1}^{n} d_i\right)$$

Gradfolge (absteigend) des Graphen anzeichnen:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$i-1$	0	1	2	3	4	5	6	7
d_i	6	4	4	4	2	2	1	1

$$m = \max\{1,2,3,4\} = 4$$

$$m(m-1) = 4 \cdot 3 = 12$$

$$\sum_{i=1}^{m} d_i = 6 + 4 + 4 + 4 = 18$$

$$\sum_{i=m+1}^{n} d_i = 1 + 1 + 2 + 2 = 6$$

$$\sigma_m(d) = \frac{1}{2}\left(12 - 18 + 6\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

Splittance

Splitgraph Erkennung

G ist ein Splitgraph, falls gilt

$$\sum_{i=1}^{m} d_i = m(m-1) + \sum_{i=m+1}^{n} d_i$$

Splittance
Splitgraph Erkennung
G ist ein Splitgraph, falls gilt
$$\sum_{i=1}^{m} d_i = m(m-1) + \sum_{i=m+1}^{n} d_i$$

Offensichtlich gültig für Beispiel
VORRECHNEN

$$\sum_{i=1}^{m} d_i = m(m-1) + \sum_{i=m+1}^{n} d_i$$
$$\Leftrightarrow 18 = 12 + 6$$
$$\Leftrightarrow 18 = 18$$

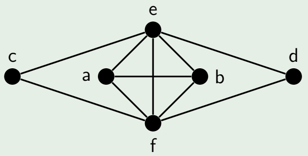
Schwellwertgraphen

Definition Schwellwertgraph

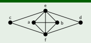
Ein Graph $G = (V, E)$ ist ein Schwellwertgraph, falls Werte $w_v \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ für $v \in V$ und $T \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ existieren, sodass für zwei Knoten $x, y \in V$ gilt

$$\{x, y\} \in E \Leftrightarrow w_x + w_y > T$$

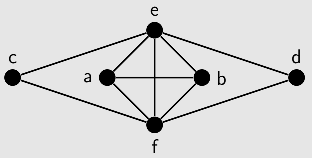
Beispiel



Schwellwertgraphen
Definition Schwellwertgraph
Ein Graph $G = (V, E)$ ist ein Schwellwertgraph, falls Werte $w_v \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ für $v \in V$ und $T \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ existieren, sodass für zwei Knoten $x, y \in V$ gilt
$\{x, y\} \in E \Leftrightarrow w_x + w_y > T$
Beispiel



- Beispiel Graphen ANZEICHEN + WERTE ANGEBEN T und w_v
- *TRICK:* wähle $w_v = \deg(v)$
- *TRICK:* wähle T = max aller deg's



$T = 5,$

v	a	b	c	d	e	f
w_v	3	3	2	2	5	5

Schwellwertgraphen

Definition Schwellwertgraph (konstruktiv)

Ein Graph $G = (V, E)$ ist ein Schwellwertgraph, falls er über die folgenden Vorschriften konstruiert werden kann.

1. Hinzufügen eines einzelnen *isolierten* Knotens
2. Hinzufügen eines einzelnen *dominierenden* Knotens

Schwellwertgraphen
Definition Schwellwertgraph (konstruktiv)
Ein Graph $G = (V, E)$ ist ein Schwellwertgraph, falls er über die folgenden Vorschriften konstruiert werden kann.
1. Hinzufügen eines einzelnen *isolierten* Knotens
2. Hinzufügen eines einzelnen *dominierenden* Knotens

- **Isolierter Knoten**: Knoten der keine Verknüpfung zu einem anderen Knoten hat
- **Dominierender Knoten**: Knoten der mit allen anderen Knoten verknüpft wird
- Beispiel nochmal aufbauen
- **Erzeugungssequenz**: 110011
- Erzeugungssequenz kurz erklären

Schwellwertgraphen

Schwellwertgraphen Eigenschaft

Schwellwertgraphen = Co-Graphen $\cap$ Splitgraphen

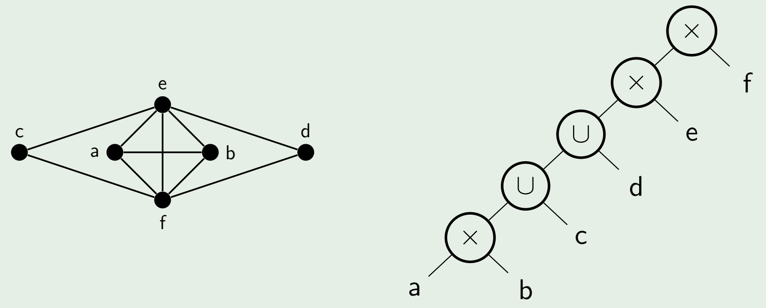
Schwellwertgraphen

Schwellwertgraphen Eigenschaft
Schwellwertgraphen = Co-Graphen ∩ Splitgraphen

- Schwellwertgraph ist Co-Graph
- Schwellwertgraph is Splitgraph
- Zu jedem Schwellwertgraphen lässt sich
  - ein **Co-Baum** finden
  - eine **Partition** finden

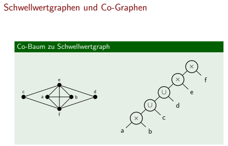
Schwellwertgraphen und Co-Graphen

Co-Baum zu Schwellwertgraph



2019-12-05

Co-Graphen, Splitgraphen, Schwellwertgraphen
└Schwellwertgraphen
└Grundlagen
└Schwellwertgraphen und Co-Graphen



Aus Erzeugungssequenz wird leicht ein Co-Baum

Schwellwertgraphen und Splitgraphen

- Splitgraph (Partition K, S) aus Schwellwertgraph
- Unabhängige Menge S immer gegeben durch isolierte Knoten

2019-12-05

Schwellwertgraphen und Splitgraphen

- Splitgraph (Partition K, S) aus Schwellwertgraph
- Unabhängige Menge S immer gegeben durch isolierte Knoten

BEISPIEL:

- Die dominierenden Knoten sind immer in einer Clique
- Die isolierten Knoten werden nicht untereinander verbunden
- BEISPIEL:

$$K = \{a, b, e, f\}$$
$$S = \{c, d\}$$

- Dominierenden Knoten auf jeden Fall miteinander verknüpft
- Isolierte Knoten gerade nicht untereinander verknüpft

Literatur I

- D.G. Corneil, H. Lerchs, and L. Stewart Burlingham, *Complement reducible graphs*, Discrete Applied Mathematics **3** (1981), no. 3, 163–174.
- D. G. Corneil, Y. Perl, and L. K. Stewart, *A linear recognition algorithm for cographs*, SIAM Journal on Computing **14** (1985), no. 4, 926–934.
- S. Földes and P. L. Hammer, *Split graphs*, 311–315.
- Frank Gurski, Irene Rothe, Jörg Rothe, and Egon Wanke, *Exakte algorithmen für schwere graphenprobleme*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2010.
- Peter L. Hammer and Bruno Simeone, *The splittance of a graph*, no. 3, 275–284.

Literatur I

- D.G. Corneil, H. Lerchs, and L. Stewart Burlingham, *Complement reducible graphs*, Discrete Applied Mathematics **3** (1981), no. 3, 163–174.
- D. G. Corneil, Y. Perl, and L. K. Stewart, *A linear recognition algorithm for cographs*, SIAM Journal on Computing **14** (1985), no. 4, 926–934.
- S. Földes and P. L. Hammer, *Split graphs*, 311–315.
- Frank Gurski, Irene Rothe, Jörg Rothe, and Egon Wanke, *Exakte algorithmen für schwere graphenprobleme*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2010.
- Peter L. Hammer and Bruno Simeone, *The splittance of a graph*, no. 3, 275–284.