អថេរចៃដន្យ និង បំណែងចែកប្រូបាប

(Random Variable and Probability Distribution)

១. ឧទាហរណ៍១:

ឧបមាថា មនុស្សស្រីម្នាក់សំរាលកូន 3 ដង។

ក. ចូរសរសេរលំហសំណាក ហើយករណីអាចស្មើប៉ុន្មាន?

ខ. រកប្រូបាបដែលគាត់សំរាលបានកូនប្រុសម្តង

គ. រកប្រូបាបដែលគាត់សំរាលបានយ៉ាងហោចកូនប្រុសម្តង

ឃ. តាង X ជាចំនួនកូនប្រុសដែលគាត់ទទួលបាន ចូរកំណត់តម្លៃនានារបស់ X

ង. ចូរសង់តារាងបំណែងចែកប្រូបាប៊ីលីតេ

ច. ចូរគណនាមធ្យម រឺ សង្ឃឹមគណិត

ឆ. ចូរគណនា វ៉ារ្យ៉ង់

២. អថេរចៃដន្យ (Random Variable) ៖

ចំពោះ ឧទាហរណ៍១ ខាងលើ យើងតាង X ជាចំនួនកូនប្រុសដែលមនុស្សស្រីទទួលបាន នោះ X អាចយកតម្លៃ 0, 1, 2 ឬ 3 ហើយប្រូបាបដែលត្រូវនឹងតម្លៃនីមួយៗ ត្រូវបានបង្ហាញដូចក្នុងតារាងខាងក្រោម៖

X	0	1	2	3	សរុប
ប្រូបាប	1/8	3/8	3/8	1/8	1

X ត្រូវបានគេហៅថាអថេរចៃដន្យ។

<u>អថេរចៃដន្យ</u>

អថេរចៃដន្យគឺជាអនុគមន៍ពីលំហសំណាក Ω ទៅសំណុំ E។ បើ Ω ជាសំនុំរាប់បាន (infinitely countable set) នោះគេថា X ជាអថេរចៃដន្យដាច់ (Discrete Random Variable) ។ បើ Ω ជាសំនុំរាប់មិនបាន (uncountable set) នោះគេថា ជាអថេរចៃដន្យជាប់ (Continuous Random Variable) ។

ចំពោះអថេរចៃដន្យដាច់ យើងអាចបង្កើតតារាងមួយដើម្បីបង្ហាញពីតម្លៃរបស់វា និង ប្រូបាបដែលត្រូវនឹងតម្លៃនីមួយៗ។ តារាងនេះត្រូវបានគេហៅថាតារាងបំណែងចែកប្រូបាប។

X	$x_1 \quad x_2 \quad \cdots\cdots \quad x_n$	Total
P	$p_1 \quad p_2 \quad \cdots\cdots \quad p_n$	1

ដែល $P(X = x_k) = p_k \geq 0$ ហើយ $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ ។ $P(X = x_k)$ ត្រូវបានគេហៅថា អនុគមន៍ ដង់ស៊ីតេនៃអថេរចៃដន្យ X (Probability Mass Function)។

ឧទាហរណ៍២:

ឧបមាថាក្នុងថង់មួយមាន ប៊ូល ស ៣ និង ប៊ូលខ្មៅ ២។ យើងចាប់យកប៊ូលពីរព្រមគ្នាដោយ ចៃដន្យ។ តាង X ជាចំនួនប៊ូល ស ដែលយើងទាញបាន។

ក. កំណត់តម្លៃរបស់អថេរចៃដន្យ X។

ខ. សង់តារាងបំណែងចែកប្រូបាបរបស់អថេរចៃដន្យ X។

៣. តម្លៃសង្ឃឹម និង វ៉ារ្យ៉ង់នៃអថេរចៃដន្យ (Expected Value and Variance)

ជាមួយនឹងតារាងបំណែងចែកប្រូបាបរបស់អថេរចៃដន្យមួយ យើងអាចទទួលបានព័ត៌មានជា ច្រើនស្តីពីអថេរចៃដន្យនោះ។ ឧទាហរណ៍៖ យើងចង់រកតម្លៃមធ្យម (តម្លៃសង្ឃឹម) របស់អថេរចៃដន្យនោះ ឬ ភាពពង្រាយរបស់វា។

តម្លៃសង្ឃឹម(Expected Value)

តម្លៃសង្ឃឹមរបស់អថេរចៃដន្យ X (អថេរចៃដន្យដាច់) ត្រូវបានគេអោយនិយមន័យដោយ៖

$$\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i}$$

លក្ខណៈនៃតម្លៃសង្ឃឹម(Properties)

ឧបមាថាមានអថេរចៃដន្យ X និង Y ហើយ a និង b ជាចំនួនថេរ។

- $E(a) = a$
- $E(aX) = aE(X)$
- $E(aX + b) = aE(X) + b$
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(XY) = E(X)E(Y)$ បើ X និង Y មិនអាស្រ័យគ្នា

សម្រាយបញ្ជាក់៖

វ៉ារ្យ៉ង់(Variance)

វ៉ារ្យង់របស់អថេរចៃដន្យ X (អថេរចៃដន្យដាច់) ត្រូវបានគេអោយនិយមន័យដោយ៖

$$\boxed{V(X) = E\left[(X - E(X))^2\right]}$$

<u>លក្ខណៈនៃវ៉ារ្យ៉ង់(Properties)</u>

ឧបមាថាមានអថេរចៃដន្យ X និង Y ហើយ a និង b ជាចំនួនថេរ។

- $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
- $V(a) = 0$
- $V(aX) = a^2 V(X)$
- $V(aX + b) = a^2 V(X)$
- $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ បើ X និង Y មិនអាស្រ័យគ្នា

សម្រាយបញ្ជាក់៖

សំគាល់៖

- តម្លៃសង្ឃឹមនិយាយពីតម្លៃមធ្យមរបស់អថេរចៃដន្យ
- វ៉ារ្យង់និយាយពីភាពពង្រាយរបស់អថេរចៃដន្យ

ឧទាហរណ៍៣: ចូរធ្វើឧទាហរណ៍២ម្តងទៀតដោយគណនា E(X), V(X)។

ឧទាហរណ៍៤: ក្នុងថង់មួយមានឃ្លីពណ៌ស ៣ ឃ្លីពណ៌ក្រហម ៣ និង ឃ្លីពណ៌ខ្មៅ ៥។ យើងចាប់យកឃ្លី ៣ ព្រមគ្នាដោយចៃដន្យ។ ឧបមាថាបើយើងចាប់យកឃ្លីពណ៌ស នោះយើងទទួលបាន ១ ដុល្លារ ហើយ បើយើងចាប់យកឃ្លីពណ៌ក្រហម នោះយើងខាត ១ ដុល្លារ។ តាង X ជាប្រាក់ចំណេញ ឬ ខាតដែលយើង ទទួលបាន។

a. ចូររកតម្លៃនានានៃអថេរ X
b. ចូរសង់តារាងបំណែងចែកប្រូបាបនៃអថេរ X
c. ចូរគណនាតំលៃសង្ឃឹម និង វ៉ារ្យ៉ង់

លំហាត់

១. ឧបមាថាយើងបោះគ្រាប់ឡុកឡាក់ពីរក្នុងពេលតែមួយ។ តាង X ជាផលសងនៃលទ្ធផលរបស់គ្រាប់ឡុកឡាក់ទាំងពីរ។

ក. ចូររកបំណែងចែកប្រូបាបនៃ X ។

ខ. ចូរគណនាតម្លៃសង្ឃឹមនៃ X ។

២. ក្នុងថង់មួយមានប៊ូល ៦ ដែលបង់លេខពី ១ ដល់ ៦។ យើងចាប់យកប៊ូលពីរពីក្នុងថង់។ តាង X ជាតម្លៃធំរវាងលេខទាំងពីរដែលនៅលើប៊ូលដែលយើងចាប់បាន។

ក. ចូររកបំណែងចែកប្រូបាបនៃ X ។

ខ. ចូរគណនាតម្លៃសង្ឃឹម និង វ៉ារ្យ៉ង់នៃ X ។

៣. ឧបមាថាយើងបោះកាក់មួយបន្តបន្ទាប់គ្នារហូតដល់មុខផ្ការឡើង។ តាង X ជាចំនួនដងដែលយើងត្រូវបោះដើម្បីបានមុខផ្ការឡើងម្តងនេះ។

ក. ឧបមាថាកាក់ជាកាក់ស្មើសាច់(unbiased coin) ចូររកបំណែងចែកប្រូបាបនៃ X ។

ខ.ឧបមាថាកាក់ជាកាក់មិនស្មើសាច់(biased coin) មានន័យថា ក្នុងការបោះមួយលើកៗ ប្រូបាបដែលចេញមុខគឺ p ចូររកបំណែងចែកប្រូបាបនៃ X ។

គ. ចូរគណនាតម្លៃសង្ឃឹម និង វ៉ារ្យ៉ង់នៃ X ក្នុងសំណួរ ខ. ។

អថេរចៃដន្យដាច់
(Discrete Random Variable)

ក្នុងមេរៀននេះយើងឧបមាថាលំហសំណាក ជាសំណុំរាប់អស់ (finite set) ឬ ជាសំណុំរាប់មិនអស់តែរាប់បាន(infinitely countable set)។

១. បំណែងចែកទ្វេធា (Binomial Distribution):

a. ឧទាហរណ៍១:

ឧបមាថា មនុស្សស្រីម្នាក់សំរាលកូន 3 ដង។

ក. រកប្រូបាបដែលគាត់សំរាលបានកូនប្រុសម្តង

ខ. រកប្រូបាបដែលគាត់សំរាលបានយ៉ាងហោចកូនប្រុសម្តង

គ. ឧបមាថា មនុស្សស្រីនោះសំរាលកូន n ដង ដែល n ធំ ចូរគណនាសំណួរ ក និង សំណួរ ខ ឡើងវិញ។

សំគាល់៖ ចំពោះសំណួរ គ នៃឧទាហរណ៍១ យើងនឹងប្រើបំណែងចែកទ្វេធា។ យើងប្រើបំណែងចែកទ្វេធា ក្នុងករណីដែល៖

- យើងមាន n ការពិសោធ ដែលការពិសោធនីមួយៗមិនអាស្រ័យគ្នា
- ចំពោះការពិសោធនីមួយៗ យើងមានលទ្ធផលតែពីរ គឺ ចាញ់ និង ឈ្នះ
- ចំពោះការពិសោធនីមួយៗ ឪកាស ឬ ប្រូបាបដែលទទួលបានលទ្ធផលឈ្នះនៅថេរ តាងដោយ p
- ក្នុងចំណោម n ការពិសោធ យើងចង់បានលទ្ធផលឈ្នះ k ដង។

b. អនុគមន៍ដង់ស៊ីតេ (Probability Mass Function):

អថេរចៃដន្យ X មានបំណែងចែកទ្វេធា ត្រូវបានគេតាងដោយ $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ ដែល $0 < p < 1$។ p ត្រូវបានគេហៅថាប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបំណែងចែក។

- អនុគមន៍ដង់ស៊ីតេ $P(X = x) = C_n^x p^x (1 - p)^{n-x}$ ដែល $x = 0, 1, 2, \cdots, n$
- តំលៃសង្ឃឹម $E(X) = np$
- វ៉ារ្យង់ $V(X) = np(1 - p)$

សំគាល់ (និយមន័យ)៖ $P(X = x)$ ជាអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេបើ៖

- $P(X = x) \geq 0, \ \forall x$
- $\sum_x P(X = x) = 1$

ឧទាហរណ៍២: ឧបមាថា យើងបោះកាក់ស្មើសាច់ (fair coin) មួយ ១០ ដង។ តាង X ជាចំនួន មុខដែលផ្ការឡើង។

ក. រកប្រូបាបដែលមុខផ្ការឡើង ៦ ដង

ខ. រកប្រូបាបដែលយ៉ាងហោចមុខផ្ការឡើង ២ ដង

គ. គណនា E(X), V(X)

ឧទាហរណ៍៣: សិស្សម្នាក់ត្រូវឆ្លើយសំណួរពហុជ្រើសរើស ១០ សំណួរ។ ក្នុងមួយសំណួរៗ មាន៤ ចម្លើយ ដែលក្នុងនោះមានមួយជាចម្លើយត្រូវ។ ឧបមាថាសំណួរនីមួយៗមិនទាក់ទងគ្នា។ ចូរគណនាប្រូបាបដែលសិស្សនោះឆ្លើយត្រូវ ៦ សំណួរ។

សំគាល់៖ នៅពេលដែលការពិសោធមានតែម្តង មានន័យថា n=1 នោះបំណែងចែកទ្វេធា (Binomial Distribution) ក្លាយជាបំណែងចែកប៊ែរនូយី(Bernoulli Distribution)។

អថេរចៃដន្យ X មានបំណែងចែកប៊ែរនូយី ត្រូវបានគេតាងដោយ X ~ Ber(p) ដែល ០ < p < 1។ p ត្រូវបានគេហៅថាប៉ារ៉ាម៉ែត្រនៃបំណែងចែក។

- អនុគមន៍ដង់ស៊ីតេ $P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x}$ ដែល $x = 0, 1$
- តំលៃសង្ឃឹម $E(X) = p$
- វ៉ារ្យង់ $V(X) = p(1-p)$

លំហាត់

១. ឧបមាថា X មានបំណែងចែកទ្វេធាជាមួយនឹងប៉ារ៉ាម៉ែត្រ n=4 និង p=0.5។ តើ E(X)មានតម្លៃប៉ុន្មាន? រកប្រូបាបដែល X ស្មើ E(X) ។

២. អ្នកលេងបាល់បោះម្នាក់ បោះ បាល់៥គ្រាប់។ យើងដឹងថា ក្នុងការបោះមួយលើកៗ ឪកាសដែលបោះត្រូវគឺ 0.75។ តើយើងសង្ឃឹមថាគាត់នឹងបោះត្រូវប៉ុន្មានគ្រាប់? រកប្រូបាបដែលគាត់នឹងបោះត្រូវពីរគ្រាប់។

៣. បុរសម្នាក់ចង់សិក្សាពីចំនួនមនុស្សស្រីក្នុងទីក្រុងមួយ។ គាត់ឈរត្រង់ផ្លូវកាច់ជ្រុងមួយនៃទីក្រុងនេះ ហើយគាត់បានកត់ត្រាភេទនៃមនុស្ស ១០ នាក់ដែលបានឆ្លងកាត់តំបន់កាច់ជ្រុងនេះ។ ដោយឧបមាថាទីក្រុងនេះមានមនុស្សស្រី 50% និង មនុស្សប្រុស 50% ។

ក. រកប្រូបាបដែលមនុស្សទាំង ១០ នាក់នោះជាមនុស្សស្រី។

ខ. រកប្រូបាបដែលយ៉ាងហោចមនុស្ស២នាក់ក្នុងចំណោមមនុស្សទាំង ១០ នាក់នោះជាមនុស្សស្រី។

គ. រកប្រូបាបដែលយ៉ាងហោចមនុស្ស៨នាក់ក្នុងចំណោមមនុស្សទាំង ១០ នាក់នោះជាមនុស្សស្រី។

ឃ. រកប្រូបាបដែលក្នុងចំណោមមនុស្សទាំង ១០ នាក់នោះមានមនុស្សស្រីពី ៤ ទៅ ៦ នាក់។

ង. គណនា E(x), V(X), σ_X

៤. ក. យើងបោះឡុកឡាក់ស្មើសាច់មួយ ៥ ដង។ រកប្រូបាបដែលមុខ ៦ ចេញ ២ ដង។

ខ. យើងបោះឡុកឡាក់ស្មើសាច់ ពីរគ្រាប់ដំណាលគ្នា។ រកប្រូបាបដែលផលបូកមុខទាំងពីរស្មើនឹង ៦។

គ. យើងបោះឡុកឡាក់ស្មើសាច់ ពីរគ្រាប់ដំណាលគ្នា ចំនួន៣ដង។ រកប្រូបាបដែលផលបូកមុខទាំងពីរស្មើនឹង ៦ ចេញម្តង។

៥. ឧបមាថាអថេរចៃដន្យ X មានបំណែងចែកប៊ែរនូយី។

ក. ចូរបង្ហាញថាផលបូកនៃអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេស្មើមួយ

ខ. ចូរបង្ហាញថា $E(X) = p,\ V(X) = p(1-p)$

៦. ឧបមាថាអថេរចៃដន្យ X មានបំណែងចែកទ្វេធា។

ក. ចូរបង្ហាញថាផលបូកនៃអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេស្មើមួយ

ខ. ចូរបង្ហាញថា $E(X) = np,\ V(X) = np(1-p)$

២. បំណែងចែក Poisson (Poisson Distribution):

ឧបមាថាយើងចង់សិក្សាពីចំនួនគ្រោះថ្នាក់ចរាចរណ៍ដែលកើតឡើងតាមផ្លូវជាតិលេខ ៤ នៅថ្ងៃចូលឆ្នាំសាកល។ តាង X ជាចំនួនគ្រោះថ្នាក់ចរាចរណ៍ដែលកើតឡើងនោះ។ នោះគេថា X ជាអថេរចៃដន្យមានបំណែងចែក **Poisson ។** យក $\lambda \in \mathbb{R}^+$។ X ជាអថេរចៃដន្យមានបំណែងចែក **Poisson** មានប៉ារ៉ាម៉ែត្រ λ ត្រូវបានគេកំណត់សរសេរដោយ $X \sim P(\lambda)$ ។

- អនុគមន៍ដង់ស៊ីតេ $P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$ ដែល $x = 0, 1, 2, \cdots$
- តំលៃសង្ឃឹម $E(X) = \lambda$
- វ៉ារ្យង់ $V(X) = \lambda$

ឧទាហរណ៍៤៖ តាង X ជាចំនួនកំហុសអក្ខរាវិរុទ្ធដែលកើតមានឡើងក្នុងទំព័រនីមួយៗនៃសៀវ ភៅមួយ។ ឧបមាថា X មានបំណែងចែក **Poisson** ជាមួយនឹងប៉ារ៉ាមេត្រ $\lambda = 0.5$។

ក. រកប្រូបាបដែលកំហុសអក្ខរាវិរុទ្ធកើតមានឡើង ៥ ដង

ខ. រកប្រូបាបដែលកំហុសអក្ខរាវិរុទ្ធកើតមានឡើងយ៉ាងតិចម្តង

ឧទាហរណ៍៥៖ តាង X ជាចំនួនដងនៃរំញ្ជួយដីដែលកើតឡើងនៅលើកោះមួយក្នុងរយៈពេល ពីរសប្តាហ៍។ ឧបមាថា X មានបំណែងចែក **Poisson** ជាមួយនឹងប៉ារ៉ាមេត្រ $\lambda = 2$។

ក. រកប្រូបាបដែលរំញ្ជួយដីកើតឡើង៣ ដងក្នុងរយៈពេល ពីរសប្តាហ៍។

ខ. រក probability distribution នៃរយៈពេលចាប់ពីឥឡូវរហូតដល់រំញ្ជួយដីលើកបន្ទាប់។

លំហាត់

១. ឧបមាថា X មានបំណែងចែក **Poisson** ជាមួយនឹងប៉ារ៉ាមេត្រ $\lambda = 2$។ ចូររក $E(X), P(X = 1)$ និង $P(X = 3)$។

២. តាង X ជាចំនួននៃតំណក់ទឹកភ្លៀងដែលស្រក់ចូលពាងក្នុងរយៈពេល ៥ វិនាទី។ ឧបមាថា X មានបំណែងចែក **Poisson** ជាមួយនឹងមធ្យម 20 ។ រកប្រូបាបដែល $P(X = 20)$។

៣. ឧបមាថា X មានបំណែងចែក **Poisson** ដែល $P(X = 4) = P(X = 5)$។ ចូរគណនា $E(X)$។
៤. ឧបមាថា X មានបំណែងចែក **Poisson** ជាមួយនឹងមធ្យម 2។ ចូររក $V(X)$ និង $P(1 \leq X)$។
៥. ឧបមាថា X មានបំណែងចែក **Poisson** ជាមួយនឹងប៉ារ៉ាម៉ែត្រ λ ជាមួយនឹងអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេ $P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$ ដែល $x = 0, 1, 2, \cdots$ ។ ចូរបង្ហាញថា ៖

ក. $\sum_{x=0}^{\infty} P(X = x) = 1$

ខ. តំលៃសង្ឃឹម $E(X) = \lambda$

គ. វ៉ារ្យង់ $V(X) = \lambda$

៦. ឧបមាថាមានអថេរ X ដែល $X \sim Bin(n, p)$។ ឧបមាថា n មានតម្លៃធំ ហើយ p មានតម្លៃតូច ដែល $\lambda = np$។ ចូរបង្ហាញថា $X \to P(\lambda)$។
៧. តាង X_tជាចំនួនដងនៃការហៅចូលរបស់ទូរស័ព្ទក្នុងអំឡុងពេល t ។ X_t មានបំណែង ចែក **Poisson** ជាមួយនឹងប៉ារ៉ាម៉ែត្រ λt ។ ប្រូបាបនៃការទទួលទូរស័ព្ទចំពោះការហៅចូលមួយ លើកៗ គឺ p ដែល $0 \leq p \leq 1$។ តាង Y_tជាចំនួនដងនៃការទទួលទូរស័ព្ទដែលបានហៅចូល។ រកបំណែង ចែកប្រូបាបរបស់ Y_t។

៣. បំណែងចែកធរណីមាត្រ (Geometric Distribution):

ឧបមាថាបុរសម្នាក់ចូលលេងល្បែងក្នុងកាស៊ីណូមួយ ហើយគាត់បានសន្យានឹងខ្លួនគាត់ថា គាត់នឹងបន្តលេង ល្បែងរហូតបានឈ្នះមួយលើកទើបគាត់ឈប់លេង។ តាង X ជាចំនួនដង ដែលគាត់ត្រូវលេងដើម្បី បានឈ្នះម្តង នោះគេថា X មានបំណែងចែកធរណីមាត្រ។ ឧបមាថាក្នុងការលេង មួយលើក ប្រូបាបនៃការឈ្នះគឺ p ដែល $0< p <1$។ X ជាអថេរចៃដន្យមានបំណែងចែកធរណីមាត្រ មានប៉ារ៉ាម៉ែត្រ p ត្រូវបានគេកំណត់សរសេរដោយ $X \sim Geo(p)$ ។

- អនុគមន៍ដង់ស៊ីតេ $P(X = x) = (1 - p)^{x-1}p$ ដែល $x = 1, 2, 3, \cdots$
- តំលៃសង្ឃឹម $E(X) = \frac{1}{p}$
- វ៉ារ្យង់ $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$

ឧទាហរណ៍៥៖ ឧបមាថាចូលលេងល្បែងក្នុងកាស៊ីណូមួយ ហើយគាត់បានសន្យានឹងខ្លួនគាត់ថា គាត់នឹងបន្តលេង ល្បែងរហូតបានឈ្នះមួយលើកទើបគាត់ឈប់លេង។ ឧបមាថាក្នុងការលេង មួយលើកប្រូបាបនៃការឈ្នះគឺ p=0.3។
ក. រកប្រូបាបដែលគាត់ត្រូវលេង ៥ ដង
ខ. រកប្រូបាបដែលគាត់ត្រូវលេងយ៉ាងហោច ៣ ដង
គ. គណនាមធ្យម និង វារ្យ៉ង់
ឧទាហរណ៍៦៖ ឧបមាថាប្តីប្រពន្ធមួយគូទើបរៀបការថ្មីថ្មោង ហើយគាត់បានសន្យានឹងគ្នាថា គាត់នឹងបន្តយកកូនរហូតបានកូនស្រីម្នាក់ទើបគាត់ឈប់យកកូន។ ឧបមាថាក្នុងការសំរាលមួយលើកៗ ប្រូបាបនៃការសំរាលបានកូនប្រុសគឺ 0.65។ រកប្រូបាបដែលគាត់ត្រូវសំរាល ៤ ដង។

លំហាត់

១. កីឡាករបាល់បោះម្នាក់ បោះបាល់រហូតបានចូលមួយគ្រាប់ទើបគាត់ឈប់បោះ។ ឧបមាថាក្នុងការបោះមួយលើកៗ ឪកាសនៃការបោះចូលគឺ 0.4 ហើយឧបមាថាការបោះមួយលើកៗមិនអាស្រ័យគ្នា។ តើយើងសង្ឃឹមថាគាត់បោះចូលប៉ុន្មានគ្រាប់? រកប្រូបាបដែលគាត់បោះតែម្តងហើយចូល។ រកប្រូបាបដែលគាត់បោះយ៉ាងហោច 3 ដង ដើម្បីបានចូលមួយគ្រាប់។

២. ឧបមាថា X មានបំណែងចែកធរណីមាត្រ ជាមួយនឹងប៉ារ៉ាមែត្រ p ជាមួយនឹងអនុគមន៍ដង់ ស៊ីតេ $\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{x})=(1-p)^{x-1}p$ ដែល $\mathrm{x}=1,2,3,\cdots$ ។ ចូរបង្ហាញថា ៖

ក. $\sum_{x=1}^{\infty}\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{x})=1$

ខ. តំលៃសង្ឃឹម $\mathrm{E}(\mathrm{X})=\frac{1}{p}$

គ. វ៉ារ្យង់ $\mathrm{V}(\mathrm{X})=\frac{1-p}{p^2}$

៣. បុរសម្នាក់បោះកាក់មិនស្មើសាច់រហូតដល់ខ្នងផ្ងារឡើង។ ឧបមាថាក្នុង ការបោះមួយលើកៗ ឪកាសនៃការចេញមុខគឺ 0.3។ តើគាត់ត្រូវបោះជាមធ្យមប៉ុន្មានដង? រកប្រូបាបដែលគាត់ត្រូវបោះ ៤ ដង។

៤. Memoryless property នៃបំណែងចែកធរណីមាត្រ។ $\forall\, t,s \in \mathbb{N}$ ចូរបង្ហាញថា
$\mathrm{P}(\mathrm{X}\geq s+t|\mathrm{X}\geq t)=\mathrm{P}(\mathrm{X}\geq s)$ រឺ $\mathrm{P}(\mathrm{X}\geq s+t)=\mathrm{P}(\mathrm{X}\geq s)\mathrm{P}(\mathrm{X}\geq t)$ ។

៤. បំណែងចែក Negative Binomial (Negative Binomial Distribution):

ឧបមាថាបុរសម្នាក់ចូលលេងល្បែងក្នុងកាស៊ីណូមួយ ហើយគាត់បានសន្យានឹងខ្លួនគាត់ថា គាត់នឹងបន្តលេង ល្បែងរហូតបានឈ្នះ 3 លើកទើបគាត់ឈប់លេង(ដែលការឈ្នះលើកទី៣ ជាលើកចុងក្រោយនៃការលេង)។ តាង X ជាចំនួនដងដែលគាត់ត្រូវលេងដើម្បី បានឈ្នះ k=3 លើក នោះគេថាX មានបំណែងចែក **Negative Binomial**។ ឧបមាថាក្នុងការលេងមួយលើក ប្រូបាបនៃការឈ្នះ គឺ p ដែល $0<p<1$។ X ជាអថេរចៃដន្យមានបំណែងចែក **Negative Binomial** មានប៉ារ៉ា មែត្រ p ត្រូវបានគេកំណត់សរសេរដោយ $\mathrm{X}\sim \mathrm{NB}(k,p)$ ។

- អនុគមន៍ដង់ស៊ីតេ $\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{x})=C_{x-1}^{k-1}(1-p)^{x-k}p^k$ ដែល $\mathrm{x}=k,k+1,k+2,\cdots$
- តំលៃសង្ឃឹម $\mathrm{E}(\mathrm{X})=\frac{k}{p}$
- វ៉ារ្យង់ $\mathrm{V}(\mathrm{X})=\frac{k(1-p)}{p^2}$

ឧទាហរណ៍៥៖ ឧបមាថាចូលលេងល្បែងក្នុងកាស៊ីណូមួយ ហើយគាត់បានសន្យានឹងខ្លួនគាត់ថា គាត់នឹងបន្តលេង ល្បែងរហូតបានឈ្នះមួយលើកទើបគាត់ឈប់លេង។ ឧបមាថាក្នុងការលេងមួយលើកប្រូបាបនៃការឈ្នះគឺ p=0.3។

ក. រកប្រូបាបដែលគាត់ត្រូវលេង ៥ ដង

ខ. រកប្រូបាបដែលគាត់ត្រូវលេងយ៉ាងហោច ៣ ដង

គ. គណនាមធ្យម និង វារ្យ៉ង់

លំហាត់

១. ចូរសរសេររូបមន្ត $(a+b)^n$, $(a+b)^{-n}$ ដែល $n \in \mathbb{N}^*$

២. ឧបមាថា X ជាអថេរចៃដន្យមានបំណែងចែក **Negative Binomial** មានប៉ារ៉ាម៉ែត្រ p ដែលមានអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេ $P(X=x) = C_{x-1}^{k-1}\,(1-p)^{x-k}p^k$ ដែល $x = k, k+1, k+2, \cdots$។

ចូរបង្ហាញថា៖

- $\sum_{x=k}^{\infty} P(X=x) = 1$
- តំលៃសង្ឃឹម $E(X) = \frac{k}{p}$
- វ៉ារ្យង់ $V(X) = \frac{k(1-p)}{p^2}$

៣. ឧបមាថា X ជាអថេរចៃដន្យមានបំណែងចែក **Negative Binomial** មានប៉ារ៉ាម៉ែត្រ p។ ចូរគណនា $E(X^r)$។

៥. បំណែងចែក Hypergeometric (Hypergeometric Distribution):

ឧបមាថានៅក្នុងថង់មួយមានឃ្លីពណ៌ ស ៥ និង ឃ្លីពណ៌ខ្មៅ ៦។ យើងចាប់យកឃ្លី៣ ព្រមគ្នាដោយចៃដន្យ។ តាង X ជាចំនួនឃ្លី ស ដែលយើងចាប់បាន។ គេថា X ជាអថេរចៃដន្យមាន បំណែងចែក **Hypergeometric**។

យើងបាន P(ឃ្លី សពីរ និង ឃ្លីខ្មៅមួយ)=$P(X=2) = \frac{C_5^2 C_6^1}{C_{11}^3}$

ករណីទូទៅ៖ ឧបមាថានៅក្នុងថង់មួយមាន N ឃ្លី ដែលក្នុងនោះមាន ឃ្លីពណ៌ ស N_1 ហើយឃ្លីដែលនៅសល់ជាឃ្លីពណ៌ខ្មៅ។ យើងចាប់យកឃ្លី n ព្រមគ្នា ដោយចៃដន្យ។ តាង X ជាចំនួនឃ្លី ស ដែលយើងចាប់បាន។ គេថា X ជាអថេរចៃដន្យមាន បំណែងចែក **Hypergeometric**។ យើងកំណត់សរសេរដោយ $X \sim HG(N, N_1, n)$។

- អនុគមន៍ដង់ស៊ីតេ $P(X=x) = \frac{C_{N_1}^{x} C_{N-N_1}^{n-x}}{C_N^n}$ ដែល $\max(0, n+N_1-N) \le x \le \min(n, N_1)$
- តំលៃសង្ឃឹម $E(X) = n\frac{N_1}{N} = np$ ដែល $p = \frac{N_1}{N}$
- វ៉ារ្យង់ $V(X) = \frac{nN_1(N-N_1)(N-n)}{N^2(N-1)} = np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$

ឧទាហរណ៍៦៖ ឧបមាថានៅក្នុងថង់មួយមានឃ្លីពណ៌ ស ៥ និង ឃ្លីពណ៌ខ្មៅ ៦។ យើងចាប់ យកឃ្លី៣ ព្រមគ្នា ដោយចៃដន្យ។ តាង X ជាចំនួនឃ្លី ស ដែលយើងចាប់បាន។

ក. កំណត់តម្លៃនានារបស់ X

ខ. ចូរសង់តារាងបំណែងចែកប្រូបាប

គ. ចូរគណនា តំលៃសង្ឃឹម និង វ៉ារ្យង់

លំហាត់

១. ក្នុងសង្កាត់មួយមានរៀបចំការបោះឆ្នោតរើសចៅសង្កាត់ ដែលក្នុងនោះមានពីរគណបក្ស A និង B ហើយចំនួនប្រជាជនដែលមានសិទ្ធិទៅបោះឆ្នោតគឺ ១០០០នាក់។ តាមបទពិសោធន៍កន្លងមក មានប្រជាជន ៥៥% ដែលបោះឆ្នោតឲ្យគណបក្ស A។ យើងចង់ស្ទង់លទ្ធផលនៃការបោះឆ្នោត។ ដូចនេះយើងរើសយកមនុស្ស ៥០ នាក់ដោយចៃដន្យរួចសាកសួរថាតើគណបក្សណាដែលម្នាក់ៗចូលចិត្ត។ រកប្រូបាបដែលក្នុងចំណោម៥០ នាក់នេះមាន ២៦ នាក់បោះឆ្នោតឲ្យ គណបក្ស A។

២. ក្នុងក្រុមមួយមានមនុស្ស ប្រុស ៦ នាក់ និង មនុស្សស្រី ៥នាក់។ យើងរើសមនុស្ស៤ នាក់ព្រមគ្នាចេញពីមនុស្សមួយក្រុមនេះ ដើម្បីបង្កើតជាគណៈកម្មការមួយ។ រកប្រូបាបដែលក្នុងគណៈកម្មការនេះមានមនុស្សប្រុស ២ នាក់។ តើយើងសង្ឃឹមថានឹងមានមនុស្សប្រុសប៉ុន្មាននាក់នៅក្នុងគណៈកម្មការនេះ។

៣. គេថា X ជាអថេរចៃដន្យមាន បំណែងចែក **Hypergeometric** ដែលមានអនុគមន៍ដង់ស៊ីតេ

$P(X = x) = \frac{C_{N_1}^{x} C_{N-N_1}^{n-x}}{C_N^n}$ ដែល $0 \leq x \leq n$ ។

- $\sum_{x=k}^{\infty} P(X = x) = 1$
- តំលៃសង្ឃឹម $E(X) = n\frac{N_1}{N}$
- វ៉ារ្យង់ $V(X) = \frac{nN_1(N-N_1)(N-n)}{N^2(N-1)}$