

# MATHS

## GROUPEMENTS A ET B

### CORRIGÉ

1<sup>re</sup>  
BAC  
PRO

- Activités, savoir-faire, automatismes, évaluations
  - Algorithmique et programmation avec Python
  - 51 tutoriels vidéo Casio, NumWorks et TI
- + 3 entraînements complets au CCF**



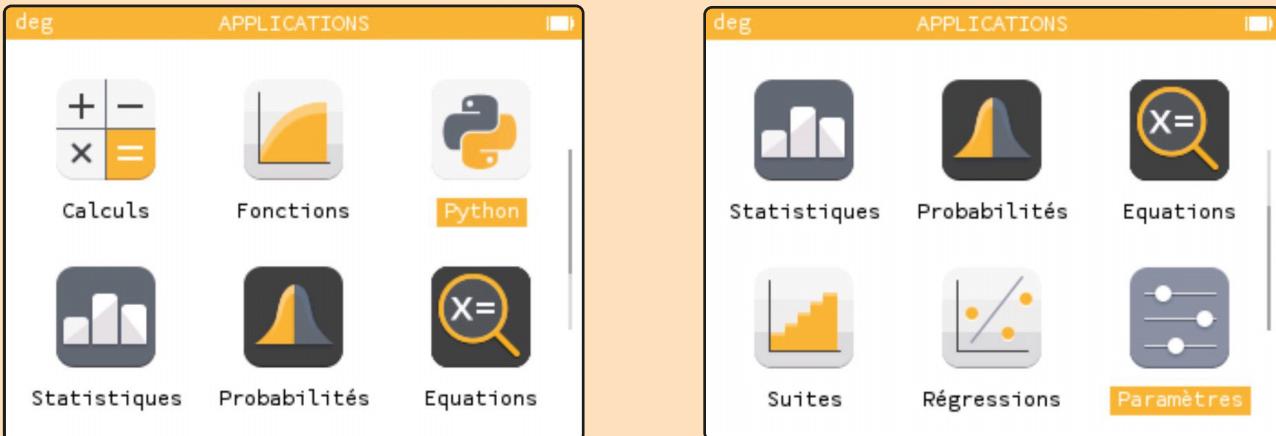
foucherconnect.fr

Dans ce manuel, des ressources en accès direct pour tous

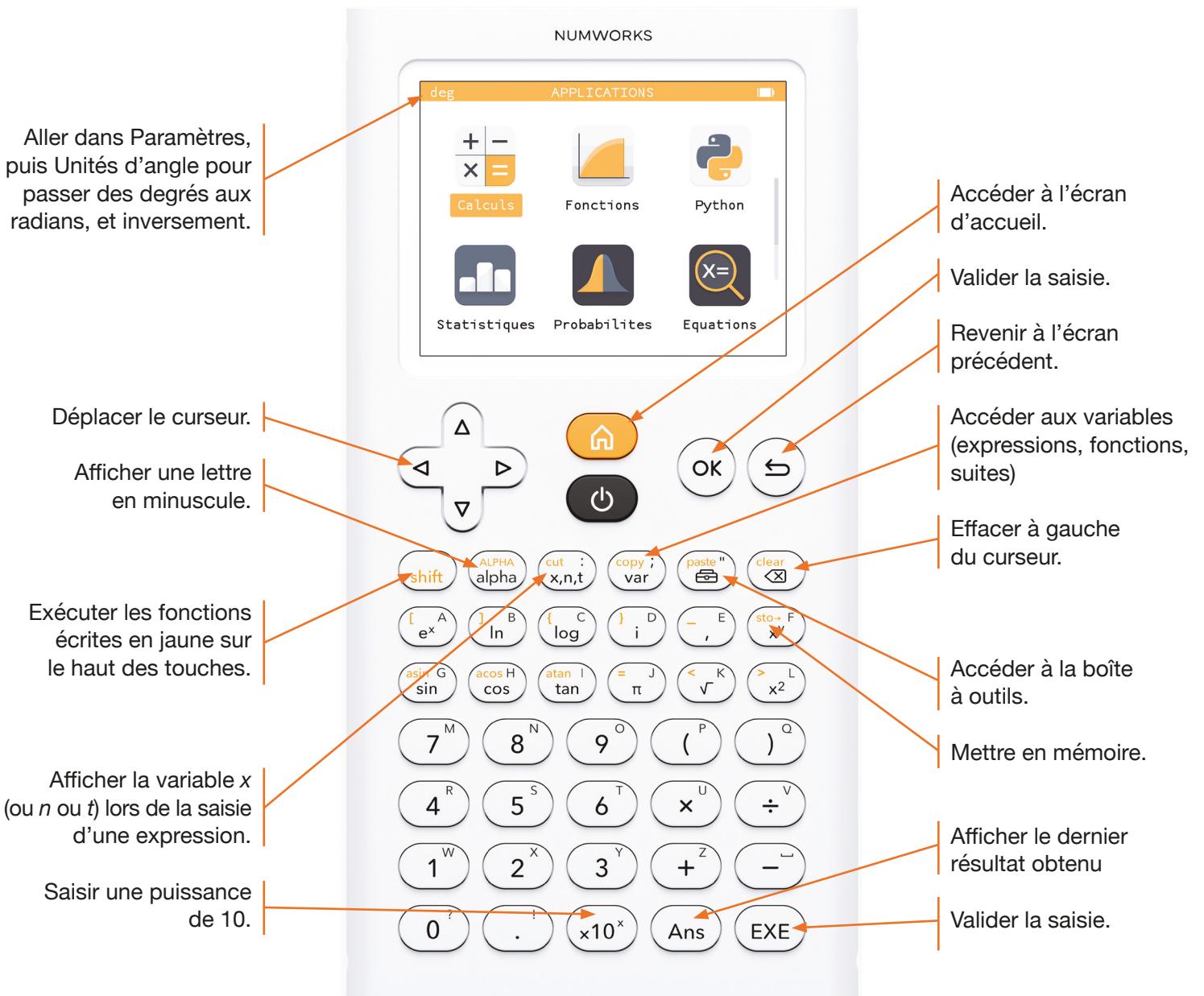
  
FOUCHER

# Calculatrice NumWorks

## Applications



Pour passer d'une application à l'autre, utiliser le pavé fléché. Puis valider avec la touche OK ou EXE.  
Chaque application a son menu particulier.



# MATHS

## GROUPEMENTS A ET B

1<sup>re</sup>  
BAC  
PRO

- Activités, savoir-faire, automatismes, évaluations
  - Algorithmique et programmation avec Python
  - 51 tutoriels vidéo Casio, NumWorks et TI
- + 3 entraînements complets au CCF**

**CORRIGÉ**

Denise Laurent, professeure de mathématiques

Fabien Auchère, PLP Mathématiques/Physique-Chimie, académie de Versailles

Mirana Ballans, PLP Mathématiques/Physique-Chimie, académie de Versailles

Marie-Pierre Bouteiller, PLP Mathématiques/Physique-Chimie, académie de Normandie

Sarah Bouyanzer, PLP Mathématiques/Physique-Chimie, académie de Normandie

Laurent Breitbach, IEN Mathématiques/Physique-Chimie, académie de Normandie

Hervé Gabillot, PLP Mathématiques/Physique-Chimie, académie de Versailles

Ludivine Selle, PLP Mathématiques/Physique-Chimie, académie de Normandie

# Vos ressources numériques

Tous les fichiers nécessaires aux activités sont accessibles directement sur [foucherconnect.fr](https://foucherconnect.fr) : fichiers Excel, GeoGebra, Scratch, Python. De la même façon, vous avez accès à tous les **tutoriels vidéo** suivants :

Représenter graphiquement un nuage de points (calculatrices) .....	p. 8	Résoudre une équation du second degré (calculatrices) .....	p. 64
Tracer une droite d'ajustement affine et obtenir son équation réduite (calculatrices) .....	p. 8 ; 10	Représenter un nuage de points (tableur).....	p. 72 ; 140
Représenter un nuage de points et sa droite d'ajustement affine (tableur) .....	p. 9 ; 18	Résoudre une équation de type $f(x) = c$ (calculatrices) .....	p. 79
Calculer le coefficient de détermination d'une série statistique (calculatrices).....	p. 10	Tracer une tangente à une courbe (calculatrices) .....	p. 85
Exploiter un nuage de points (calculatrices).....	p. 13	Représenter une sphère et exploiter sa représentation (GeoGebra).....	p. 92
Simuler plusieurs lancers d'un dé (calculatrices).....	p. 27 ; 31	Réaliser une section d'un solide (GeoGebra) .....	p. 93 ; 96 ; 99
Afficher le tableau de valeurs d'une suite définie par $u_n = f(n)$ (calculatrices).....	p. 41 ; 44 ; 46	Représenter une pyramide (GeoGebra).....	p. 99
Représenter graphiquement une suite arithmétique (calculatrices) .....	p. 45	Construire le vecteur somme de deux vecteurs (GeoGebra).....	p. 108
Obtenir la courbe représentative d'une fonction (calculatrices) .....	p. 50 ; 54 ; 62 ; 63 ; 67 ; 73 ; 156	Tracer un vecteur dans le plan (GeoGebra).....	p. 117 ; 124 ; 125
Exploiter une représentation graphique de fonctions (calculatrices) .....	p. 50 ; 54 ; 62 ; 63 ; 67 ; 73 ; 156	Calculer des indicateurs statistiques (calculatrices)....	p. 150
Tracer et exploiter des représentations graphiques de fonctions (GeoGebra).....	p. 50 ; 156	Calculer des indicateurs statistiques (tableur) .....	p. 150
Obtenir un tableau de valeurs (calculatrices) .....	p. 63		

Pour travailler sur Python, une console en ligne :



[fr.vittascience.com/cahiers-foucher](http://fr.vittascience.com/cahiers-foucher)

## Nouveau !

Pour les calculatrices, chaque tutoriel propose 3 versions :  
TI, Casio et NumWorks.

Conception graphique : Véronique Lefebvre

Composition : IDT

Infographies : Vincent Landrin

Édition : Clarisse Léon

© Foucher, une marque des Éditions Hatier - Paris, 2022

ISBN 978-2-216-16666-4



« Le photocollage, c'est l'usage abusif et collectif de la photocopie sans autorisation des auteurs et des éditeurs. Largement répandu dans les établissements d'enseignement, le photocollage menace l'avenir du livre, car il met en danger son équilibre économique. Il prive les auteurs d'une juste rémunération. En dehors de l'usage privé du copiste, toute reproduction totale ou partielle de cet ouvrage est interdite. »

« Sous réserve des exceptions légales, toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle, faite, par quelque procédé que ce soit, sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit, est illicite et constitue une contrefaçon sanctionnée par le Code de la Propriété Intellectuelle. Le CFC est le seul habilité à délivrer des autorisations de reproduction par reprographie, sous réserve en cas d'utilisation aux fins de vente, de location, de publicité ou de promotion de l'accord de l'auteur ou des ayants droit. »

## Suivi des automatismes .....

5	Je fais le point : L'essentiel et savoir-faire .....	53
	Accompagnement personnalisé .....	55
	Exercices et problèmes.....	56
	Évaluation .....	60

## Statistique et probabilités

### Chapitre 1 • Statistique à deux variables

7	Activité 1 – Représenter un nuage de points.....
8	Activité 2 – Exploiter un nuage de points.....
9	Activité 3 – Évaluer la pertinence d'un ajustement affine.....
10	AlgoPro – Exploiter l'équation d'une droite d'ajustement .....
11	Je fais le point : L'essentiel et savoir-faire .....
12	Accompagnement personnalisé .....
14	Exercices et problèmes.....
20	Évaluation .....

### Chapitre 2 • Probabilités .....

21	Activité 1 – Calculer la probabilité d'un événement.....
22	Activité 2 – Calculer la probabilité de la réunion et de l'intersection de deux événements.....
23	Activité 3 – Déterminer une probabilité conditionnelle .....
24	AlgoPro – Calculer une probabilité conditionnelle
25	Je fais le point : L'essentiel et savoir-faire .....
26	Accompagnement personnalisé .....
28	Exercices et problèmes.....
34	Évaluation .....

## Algèbre - Analyse

### Chapitre 3 • Suites numériques .....

35	Activité 1 – Définir une suite numérique.....
36	Activité 2 – Étudier une suite arithmétique.....
37	Activité 3 – Représenter graphiquement une suite arithmétique .....
38	AlgoPro – Utiliser une suite pour approcher une valeur.....
39	Je fais le point : L'essentiel et savoir-faire .....
40	Accompagnement personnalisé .....
42	Exercices et problèmes.....
48	Évaluation .....

### Chapitre 4 • Résolution graphique d'équations et d'inéquations

49	Activité 1 – Résoudre graphiquement une équation de la forme $f(x) = g(x)$ .....
50	Activité 2 – Résoudre graphiquement une inéquation de la forme $f(x) \geq g(x)$ .....
51	AlgoPro – Résoudre une équation $f(x) = g(x)$ par balayage .....
52	Je fais le point : L'essentiel et savoir-faire .....

	Accompagnement personnalisé .....	55
	Exercices et problèmes.....	56
	Évaluation .....	60

### Chapitre 5 • Fonctions polynômes de degré 2 .....

61	Activité 1 – Représenter une fonction polynôme de degré 2.....
62	Activité 2 – Déterminer les racines d'un polynôme de degré 2 .....
63	Activité 3 – Déterminer le signe d'un polynôme de degré 2.....
64	AlgoPro – Déterminer une solution d'une équation par balayage .....
65	Je fais le point : L'essentiel et savoir-faire .....
66	Accompagnement personnalisé .....
68	Exercices et problèmes.....
74	Évaluation .....

### Chapitre 6 • Dérivée et variations d'une fonction .....

75	Activité 1 – Déterminer un nombre dérivé.....
76	Activité 2 – Déterminer la fonction dérivée d'une fonction.....
77	Activité 3 – Étudier les variations d'une fonction....
78	Activité 4 – Étudier la fonction inverse .....
79	AlgoPro – Étudier les fonctions polynômes de degré 2.....
80	Je fais le point : L'essentiel et savoir-faire .....
81	Accompagnement personnalisé .....
83	Exercices et problèmes.....
84	Évaluation .....
90	Évaluation .....

## Géométrie

### Chapitre 7 • Géométrie dans l'espace ..

91	Activité 1 – Représenter un solide usuel et exploiter sa représentation.....
92	Activité 2 – Réaliser des sections de solides usuels .....
93	AlgoPro – Déterminer la hauteur maximale d'une calotte sphérique.....
94	Je fais le point : L'essentiel et savoir-faire .....
95	Accompagnement personnalisé .....
97	Exercices et problèmes.....
98	Évaluation .....
102	Évaluation .....

# Sommaire

<b>Chapitre 8 • Construction de vecteurs du plan .....</b>	103	<b>Je fais le point : L'essentiel et savoir-faire .....</b>	120
Activité 1 – Découvrir et construire des vecteurs .....	104	<b>Accompagnement personnalisé .....</b>	122
Activité 2 – Additionner des vecteurs et multiplier un vecteur par un réel .....	105	<b>Exercices et problèmes.....</b>	123
AlgoPro – Étudier la somme de vecteurs-force .....	106	<b>Évaluation .....</b>	128
<b>Chapitre 9 • Calculs relatifs aux vecteurs du plan .....</b>	115	<b>Chapitre 10 • Trigonométrie .....</b>	129
Activité 1 – Déterminer les coordonnées d'un vecteur .....	116	Activité 1 – Découvrir le cercle trigonométrique .....	130
Activité 2 – Utiliser les coordonnées d'un vecteur ..	117	Activité 2 – Utiliser le cercle trigonométrique.....	131
Activité 3 – Calculer la norme d'un vecteur .....	118	Activité 3 – Construire les représentations graphiques des fonctions sinus et cosinus .....	132
AlgoPro – Comparer deux vecteurs.....	119	AlgoPro – Déterminer des valeurs particulières de sinus et cosinus.....	133
<b>Vocabulaire relatif aux ensembles.....</b>		Je fais le point : L'essentiel et savoir-faire .....	134
<b>Raisonnement logique.....</b>		Accompagnement personnalisé .....	136
<b>Automatismes .....</b>		Exercices et problèmes.....	137
<b>Vers le CCF.....</b>		Évaluation .....	142
<b>Programmer en langage Python.....</b>			143
			146
			148
			161
			173

**Ensembles**, **Logique** : Exercices ou problèmes qui font référence au module Vocabulaire ensembliste et logique.

 : Indique un problème qu'il est possible de traiter en Co-intervention.

 : Indique une question ou un exercice dont la réponse est attendue à l'oral.

# Automatismes

NOM : .....

Prénom : .....

Ce tableau vous permettra de suivre votre progression dans la maîtrise des automatismes du programme de 1<sup>re</sup> tout au long de l'année scolaire.

Chaque fois que vous vous entraînez sur un de ces automatismes, vous pouvez cocher la puce correspondant à votre niveau de maîtrise selon le code suivant :

non maîtrisé     insuffisamment maîtrisé     maîtrisé     bien maîtrisé

Automatisme	Page de votre cahier					Bilan
<b>A1.</b> Calcul de la probabilité d'un événement dans le cas d'une situation aléatoire simple.	p. 15 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 29 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 43 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 148 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>		<input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/>
<b>A2.</b> Dénombrément à l'aide de tableaux à double entrée ou d'arbres donnés.	p. 84 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 98 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 110 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 123 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 148 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	<input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/>
<b>A3.</b> Lecture d'un graphique, d'un diagramme en secteurs, en bâtons ou en colonnes, d'un diagramme en boîte à moustaches ou toute autre représentation.	p. 15 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 29 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 43 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 137 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 149 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	<input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/>
<b>A4.</b> Association d'un graphique avec des données et vice-versa.	p. 15 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 56 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 69 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 98 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 149 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	<input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/>
<b>A5.</b> Calcul d'indicateurs de position ou de dispersion à l'aide d'outils numériques.	p. 43 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 56 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 69 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 137 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 150 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	<input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/>
<b>A6.</b> Résolution algébrique d'une équation du premier degré à une inconnue du type $ax + b = c$ où $a$ , $b$ et $c$ sont des entiers relatifs.	p. 15 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 29 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 43 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 137 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 150 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	<input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/>
<b>A7.</b> Résolution algébrique d'une inéquation du premier degré à une inconnue du type $ax + b < c$ où $a$ , $b$ et $c$ sont des entiers relatifs.	p. 29 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 69 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 98 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 151 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>		<input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/>
<b>A8.</b> Reconnaissance d'une situation de proportionnalité et détermination de la fonction linéaire qui la modélise.	p. 15 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 29 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 43 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 137 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 151 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	<input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/>
<b>A9.</b> Reconnaissance de l'allure d'une représentation graphique à partir d'un tableau de variations donné.	p. 29 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 56 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 69 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 152 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>		<input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/>
<b>A10.</b> Établissement du tableau de variations d'une fonction dont la courbe représentative est donnée.	p. 15 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 84 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 123 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 153 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>		<input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/>
<b>A11.</b> Détermination graphique, lorsqu'ils existent, des extrêums globaux d'une fonction sur un intervalle.	p. 84 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 110 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 123 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 154 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>		<input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/>
<b>A12.</b> Calcul de l'ordonnée d'un point de la courbe représentative d'une fonction connaissant son abscisse et l'expression de la fonction.	p. 43 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 123 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 137 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 154 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>		<input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/>
<b>A13.</b> Détermination graphique du coefficient directeur d'une droite non verticale.	p. 29 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 43 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 110 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 137 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 155 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	<input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/>
<b>A14.</b> Reconnaissance du parallélisme de deux droites d'équations réduites données.	p. 29 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 43 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 98 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 137 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 155 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	<input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/>
<b>A15.</b> Résolution graphique d'une équation du type $f(x) = c$ ou d'une inéquation du type $f(x) < c$ , où $c$ est un réel donné et $f$ une fonction dont la représentation graphique est donnée.	p. 84 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 110 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 123 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 156 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>		<input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/>
<b>A16.</b> Calcul du montant d'un intérêt simple et d'une valeur acquise (pour les classes n'ayant pas de physique-chimie).	p. 43 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>	p. 156 <input type="radio"/> <input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/>				<input type="radio"/> <input checked="" type="radio"/> <input type="radio"/> <input type="radio"/>

Automatisme	Page de votre cahier					Bilan
<b>A17.</b> Distinction entre cercle, disque, sphère et boule.	p. 15 	p. 69 	p. 137 	p. 157 		
<b>A18.</b> Reconnaissance du cube, du pavé droit, de la pyramide, du cylindre droit, du cône et de la boule.	p. 56 	p. 98 	p. 137 	p. 158 		
<b>A19.</b> Calcul de l'aire d'un triangle, d'un carré, d'un rectangle, d'un disque.	p. 15 	p. 29 	p. 84 	p. 137 	p. 159 	
<b>A20.</b> Calcul du volume d'un cube, d'un pavé droit et d'un cylindre.	p. 43 	p. 56 	p. 110 	p. 137 	p. 159 	
<b>A21.</b> Factorisation de $x^2 - a^2$ , $a$ étant un entier naturel donné.	p. 29 	p. 43 	p. 56 	p. 98 	p. 160 	
<b>A22.</b> Développement de $a(x + b)$ , où $a$ et $b$ sont des entiers relatifs donnés.	p. 15 	p. 29 	p. 84 	p. 110 	p. 160 	
<b>A23.</b> Développement de $(x + a)(x + b)$ , où $a$ et $b$ sont des entiers relatifs donnés.	p. 43 	p. 69 	p. 123 	p. 137 	p. 160 	

Tableau téléchargeable [foucherconnect.fr/22mc00](https://foucherconnect.fr/22mc00)

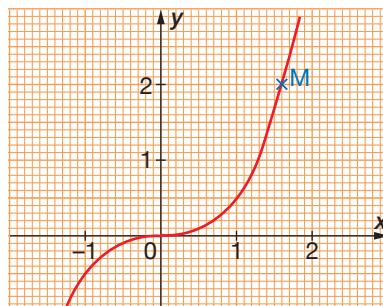
# Statistique à deux variables

1

Capacités	Activités
• Représenter graphiquement à l'aide d'outils numériques un nuage de points associé à une série à deux variables quantitatives.	Activités 1, 2 et 3
• Réaliser un ajustement affine à l'aide des outils numériques.	Activités 1 et 2
• Interpoler ou extrapolier des valeurs inconnues.	Activité 2
• Déterminer l'équation réduite d'une droite d'ajustement à l'aide d'outils numériques.	Activité 2
• Déterminer le coefficient de détermination d'une série statistique à deux variables à l'aide d'outils numériques.	Activité 3
• Évaluer la pertinence d'un ajustement affine.	Activité 3

## Je m'échauffe !

### Activité 1 p. 8



À partir du graphique ci-dessus :

- a. Donnez la valeur de  $y$  correspondant à  $x = 1$ .

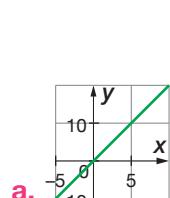
$$y = \underline{0,5}$$

- b. Donnez les coordonnées du point M.

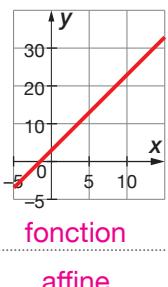
$$M(\underline{1,6}; \underline{2})$$

### Activité 2 p. 9

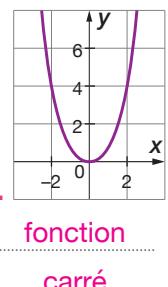
Associez à chacun des graphiques ci-dessous le type de fonction représentée. Choisissez parmi les propositions suivantes : *fonction linéaire*, *fonction carré*, *fonction affine*.



a. **fonction linéaire**



b. **fonction affine**



c. **fonction carré**

### Activité 3 p. 10

- a. Cochez les propositions qui sont des équations de droites :

$y = 2x + 3$  (Proposition 1)     $y = 0,5x^2 + 3$  (Proposition 2)     $y = -3x$  (Proposition 3)

- b. Calculez  $y$  pour  $x = 2$  pour chacune des propositions précédentes.

Proposition 1 :  $y = \underline{7}$  ; Proposition 2 :  $y = \underline{5}$  ; Proposition 3 :  $y = \underline{-6}$

# Activité

1

## Représenter un nuage de points

### SITUATION . Atteindre le record du monde en altitude !

Dans le cadre d'un projet, une classe décide d'envoyer un ballon équipé d'une sonde qui va mesurer la température au cours de la montée.

Dans la troposphère, la température diminue quand l'altitude augmente alors que dans la stratosphère, la température augmente.

Lors de la montée du ballon-sonde, les températures sont relevées au cours du vol et données dans le tableau ci-dessous.



Altitude (en km)	0	2	4	7	10	12	30	35	40	45
Température (en °C)	15	0	-10	-30	-48	-56	-47	-35	-25	-16

Dans la stratosphère, l'avion ayant atteint l'altitude la plus élevée dans l'histoire de l'aviation a vu sa température extérieure remonter à  $-29^{\circ}\text{C}$  avant d'amorcer sa descente.

#### Problématique

À quelle altitude a réussi à voler l'avion détenant le record du monde ?

- 1 **S'approprier Analyser/Raisonneur** D'après le tableau donné dans l'énoncé, recopiez ci-dessous les valeurs d'altitudes et de températures correspondant au vol du ballon-sonde dans la stratosphère.

Altitude (en km)	12	30	35	40	45
Température (en °C)	-56	-47	-35	-25	-16

- 2 a. **S'approprier Réaliser** À partir du tableau obtenu à la question 1, représentez, à l'aide de la calculatrice, l'ensemble des points d'abscisses  $x$  correspondant à l'altitude et d'ordonnées  $y$  correspondant à la température.

- b. **Communiquer** L'ensemble des points ainsi placés forme un **nuage de points**. Décrivez son allure.

Le nuage de points présente des points presque alignés.

- 3 **S'approprier Réaliser** Tracez, à l'aide de la calculatrice, la droite appelée **droite d'ajustement affine**. Cette droite traduit approximativement l'évolution du nuage de points.

- 4 a. **Analyser/Raisonneur Réaliser** À partir de la droite d'ajustement tracée dans la zone de la stratosphère, déterminez la valeur de l'altitude, arrondie au km, pour une température de  $-29^{\circ}\text{C}$ .

Pour cela, utilisez la fonction « *Trace* » ou « *Prédiction sachant Y* » de votre calculatrice pour déterminer  $x$  sachant  $y$ .

$$x = \underline{38} \text{ km}$$

- b. **Valider Communiquer** Répondez à la problématique.

L'avion détenant le record du monde d'altitude est allé jusqu'à une altitude de 38 km.

#### TUTO CALCULATRICE

Représenter graphiquement  
un nuage de points



foucherconnect.fr/22mc01

#### TUTO CALCULATRICE

Tracer une droite  
d'ajustement affine



foucherconnect.fr/22mc02

# Activité 2

## Exploiter un nuage de points

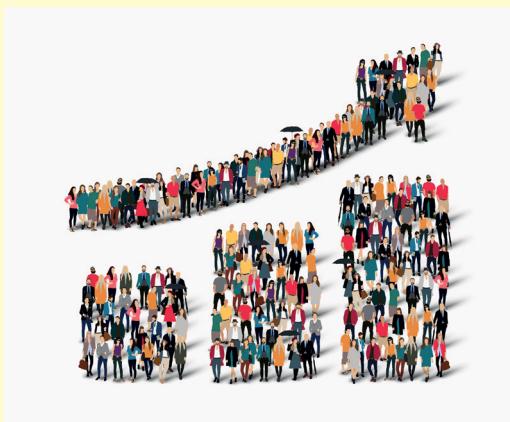
### SITUATION . Évolution de la population mondiale

La population mondiale augmente considérablement depuis les années 1800. Cela représente un défi pour l'humanité dans les années à venir, notamment car cette augmentation engendre une hausse des besoins humains (nourritures, services, etc.).

Le tableau ci-dessous indique l'évolution de la population mondiale de 1927 à 2011.

Année	1927	1960	1974	1987	1999	2011
Nombre d'habitants (en milliards)	2	3	4	5	6	7

Les Nations Unies prévoient que la population continue d'augmenter de la même façon jusqu'en 2050 avant de commencer à se stabiliser.



#### Problématique

Si la tendance se poursuit, quel sera le chiffre de la population mondiale (en milliards d'habitants) en 2050 ? Quel taux d'augmentation de la population entre 2011 et 2050 peut-on prévoir ?

#### 1 a. S'approprier



foucherconnect.fr/22mc03

Ouvrez le fichier « C01\_09\_population.xlsx », puis complétez le tableau en reportant les valeurs données dans la situation.

b. Réaliser



En sélectionnant les cellules A2 à B6, représentez la série statistique à deux variables à l'aide d'un nuage de points.

c. Analyser/Raisonner Communiquer Décrivez l'allure de ce nuage de points.

Les points du nuage sont presque alignés.

#### TUTO LOGICIEL



Représenter un nuage de points et sa droite d'ajustement affine

foucherconnect.fr/22mc04

2 Réaliser



À partir du nuage de points, tracez la droite d'ajustement affine et donnez l'équation de cette droite :  $y = 0,0606x - 115,33$

3 a. Réaliser Utilisez cette équation pour calculer la valeur de  $y$  lorsque  $x = 2050$ . Arrondissez à l'unité.

Calcul :  $y = 0,0606 \times 2050 - 115,33 = 8,9 \approx 9$ .

b. Valider En utilisant le résultat de la question 3a, complétez la phrase suivante : « En 2050, la population mondiale pourrait être égale selon nos prévisions à 9 milliards d'habitants ».

4 Réaliser Calculez le taux d'augmentation de la population entre 2011 et 2050. Arrondissez à l'unité.

$$\frac{V_{\text{finale}} - V_{\text{initiale}}}{V_{\text{initiale}}} \times 100 = \frac{9 - 7}{7} \times 100 \approx 28,57, \text{ soit environ } 29 \%$$

Coup de pouce

Taux d'augmentation :

$$\frac{V_{\text{finale}} - V_{\text{initiale}}}{V_{\text{initiale}}} \times 100$$

5 Communiquer Répondez à la problématique.

La population mondiale atteindra 9 milliards d'habitants en 2050 si la tendance se poursuit

avec un taux d'augmentation de 29 % entre 2011 et 2050.

# Activité

## 3

## Évaluer la pertinence d'un ajustement affine

### SITUATION . De la soupe pour le caméléon d'Hugo !

Hugo a adopté un caméléon à sa naissance il y a deux mois et il aimera connaître la taille que peut espérer atteindre son nouvel animal de compagnie quand il aura l'âge adulte. Il sait qu'un caméléon peut atteindre une taille comprise entre 20 et 50 cm. Le caméléon aura atteint l'âge adulte lorsqu'il aura un an. Hugo a effectué des mesures de la taille de son caméléon et a obtenu les résultats donnés dans le tableau suivant.



Âge du caméléon (en jours) $x_i$	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
Taille (en cm) $y_i$	3,85	4,20	4,55	4,90	5,25	5,60	5,95	6,30	6,65	7,00

#### Problématique

Quelle taille atteindra le caméléon d'Hugo quand il sera adulte s'il continue de grandir à l'identique ?

- 1 a. **Réaliser** À l'aide de la calculatrice, représentez graphiquement le nuage de points associé à cette série statistique.

- b. **Valider** Expliquez s'il vous semble judicieux de faire un ajustement affine compte-tenu de la forme du nuage de points observé.

Les points du nuage sont presque alignés, ce qui permet d'envisager un ajustement affine.

- 2 **Réaliser** À l'aide de la calculatrice, tracez la droite d'ajustement affine et déterminez l'équation réduite de la droite d'ajustement affine de  $y$  en  $x$ . Arrondissez les coefficients obtenus au millième.

$$y = 0,058x + 3,500$$

#### TUTO CALCULATRICE

Tracer une droite d'ajustement affine et obtenir son équation réduite



foucherconnect.fr/22mc02

- 3 a. **Valider** **Communiquer** Observez la droite d'ajustement par rapport aux points du nuage. Peut-on dire que l'ajustement affine est pertinent ? Justifiez.

L'ajustement est pertinent car la droite semble parfaitement passer par les points.

- b. **Réaliser** À l'aide de la calculatrice, donnez la valeur du coefficient de détermination de la série statistique noté  $R^2$  :  $R^2 = 1$

- c. **Valider** **Communiquer** Si les mesures de la taille du caméléon avaient été les suivantes, un ajustement affine aurait-il été adapté ? Justifiez en déterminant le coefficient de détermination.

Âge du caméléon (en jours) $x_i$	6	18	36	48	54	60
Taille (en cm) $y_i$	3,85	4,55	4,6	4,65	4,8	7,00

Les points ne sont pas bien alignés. L'ajustement affine n'est pas adapté ( $R^2 \approx 0,53$ ).

#### Coup de pouce

Le coefficient  $R^2$  donné par la calculatrice est utile pour juger de la pertinence d'un ajustement : plus il est proche de 1, plus l'ajustement affine est pertinent.

- 4 **Réaliser** **Valider** **Communiquer** Répondez à la problématique en utilisant l'équation de la droite d'ajustement obtenue à la question 2 pour déterminer la taille du caméléon au bout d'un an, c'est-à-dire au bout de 365 jours.

$$y = 0,058 \times 365 + 3,500 = 24,67 \text{ donc le caméléon atteindra une taille de } 24,7 \text{ cm à l'âge adulte.}$$



## SITUATION . Vive le vélo électrique !

Le tableau suivant répertorie le nombre de vélos électriques vendus en France entre 2016 et 2020.

Année	2016	2017	2018	2019	2020
Rang $x_i$	1	2	3	4	5
Nombre de vélos électriques vendus (en milliers) $y_i$	77	102	134	278	308



On sait que la droite d'ajustement affine obtenue à partir des valeurs du tableau ci-dessus passe par les points A(3 ; 179,8) et B(5 ; 307,4).

## Problématique

Si la tendance continue, en quelle année franchira-t-on la barre des 500 000 vélos électriques vendus ? Quel sera le nombre de vélos vendus en 2026 ?

- 1 Identifyz les deux variables de la série statistique étudiée.

Les deux variables sont  $x$  et  $y$  : le rang  $x_i$  et le nombre de vélos électriques vendus en milliers  $y_i$ .

- 2 Donnez la valeur de  $x_i$  qui correspond à 2026 :  $x = 11$

LANGAGE PYTHON  python™

- 3 On dispose d'un programme permettant de déterminer l'équation d'une droite d'ajustement à partir des coordonnées de deux points de cette droite. Ouvrez le fichier « C01\_11\_algopro1.py » et exécutez-le en lui indiquant les deux coordonnées des points A et B. Notez l'équation de la droite obtenue en arrondissant les coefficients au dixième :  $y = 63,8x - 11,6$

- 4 Le programme ci-contre est incomplet.

a. Ouvrez le fichier « C01\_11\_algopro2.py ». Complétez le programme afin qu'il puisse déterminer la valeur de  $x_i$  ou de  $y$ ; pour n'importe quelle équation de droite donnée.

b. Utilisez le programme pour répondre à la problématique en arrondissant les valeurs à l'unité.

Pour  $y_i = 500$ , on trouve  $x_i = 8$  et pour  $x_i = 11$ , on trouve  $y_i = 690$ . Donc le nombre de vélos électriques franchira la barre des 500 000 en 2023 et il y aura 690 000 vélos vendus en 2026.

```

1 print ("Equation de la droite y=ax+b")
2 a=float(input("Donnez la valeur de a : "))
3 b=float(input("Donnez la valeur de b : "))
4 inconnue=input("Quelle est l'inconnue dont vous souhaitez déterminer la valeur? ")
5 if (inconnue == 'y'):
6     x=float(input("Donnez la valeur de x : "))
7     print("pour x=",x,"la valeur de y est",a*x+b)
8 elif (inconnue == 'x'):
9     y= float(input("Donnez la valeur de y : "))
10    print("pour y=",y,"la valeur de x est ",(y-b)/a)
```

LEXIQUE  python™

Instruction	Signification
<code>if</code>	Tester la condition et exécuter les instructions suivantes (elles sont en retrait) si la réponse est oui.
<code>elif</code>	Si la réponse à la condition est non, exécuter les instructions (également en retrait) qui suivent « <code>elif</code> ».

## L'essentiel

## Série statistique à deux variables et nuage de points

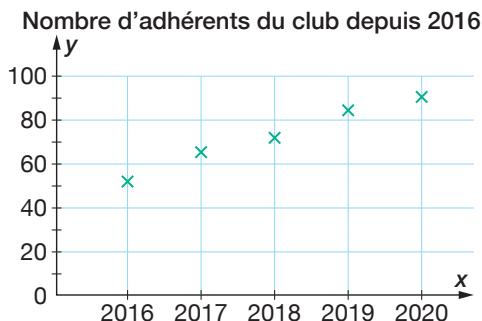
- Une **série statistique à deux variables** est une série statistique pour laquelle on étudie deux caractères simultanément pour une même population. Ces deux caractères sont notés le plus souvent  $x$  et  $y$  et on a alors des couples de valeurs notés  $(x_i ; y_i)$ .
- On peut représenter graphiquement la série statistique par un **nuage de points**.

## Exemple

On étudie l'évolution du nombre d'adhérents d'un club de judo au cours des années, de 2016 à 2020. La variable  $x_i$  représente les années et la variable  $y_i$  le nombre d'adhérents.

Année $x_i$	2016	2017	2018	2019	2020
Nombre d'adhérents $y_i$	52	65	72	84	90

On peut représenter ci-contre cette série statistique par un nuage de points.



## Ajustement affine

- Lorsque les points du nuage sont presque alignés, on peut ajuster le nuage par une droite, la **droite d'ajustement**. Les fonctions affines étant représentées graphiquement par des droites, on parle **d'ajustement affine**.
- L'équation de la droite d'ajustement de  $y$  en  $x$**  est de la forme  $y = ax + b$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$ .
- Par le calcul ou graphiquement, on peut interpoler ou extrapolier des valeurs inconnues selon que la détermination se fait au sein ou en dehors des valeurs observées.

## Exemple

À partir du nuage de points de l'exemple précédent, on peut tracer la droite d'ajustement et obtenir son équation à l'aide de la calculatrice ou d'un tableur.

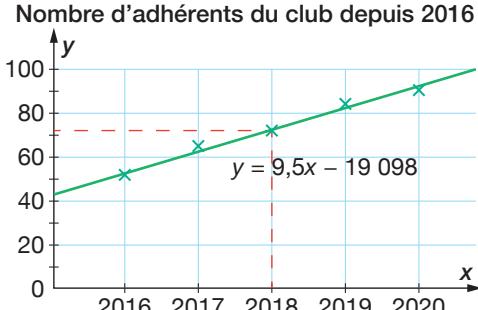
On obtient l'équation :  $y = 9,5x - 19\ 098$ .

On utilise cette équation pour calculer la valeur de  $y$  lorsque  $x = 2022$  pour extrapolier le nombre d'adhérents possible en 2022 si l'évolution reste identique.

$y = 9,5 \times 2\ 022 - 19\ 098 = 111$ . Il y aura donc 111 adhérents en 2022.

En l'appliquant à  $x = 2018$ , on interpole le nombre d'adhérents en 2018.

On a  $y = 9,5 \times 2\ 018 - 19\ 098 = 73$ . Il y avait donc 73 adhérents en 2018 d'après le modèle.



- La méthode, utilisée par les outils numériques tels que la calculatrice ou les tableurs pour réaliser l'ajustement affine, est appelée **méthode des moindres carrés**.

## Pertinence d'un ajustement affine

- Le coefficient de détermination  $R^2$  permet de juger de la pertinence de l'ajustement.

Ce coefficient peut s'obtenir à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel de type tableur.

- $R^2$  est compris entre 0 et 1. Plus il est proche de la valeur 1, plus on peut considérer que l'ajustement affine est pertinent.

## Exemple

Pour l'ajustement affine réalisé précédemment, on obtient  $R^2 = 0,986$ . L'ajustement est donc pertinent.

## Savoir-faire



### Exploiter un nuage de points à l'aide de la calculatrice



TUTO CALCULATRICE

Exploiter un nuage de points



foucherconnect.fr/22mc07

Le tableau ci-contre indique le prix TTC moyen de l'électricité en France en centimes d'euros par kWh entre 2010 et 2021.

On admet que la tendance se poursuivra durant les quatre années suivantes.

Déterminez la valeur du prix moyen en 2025.

Années	2010	2011	2012	2015	2018	2021
Rang $x_i$	1	2	3	6	9	12
Prix moyen (en cts d'€/kWh) $y_i$	12,5	14	14	16	16,5	18,5

#### Pour obtenir le nuage de points

- Identifier les deux variables à étudier dans l'énoncé.

Les deux variables étudiées sont le rang  $x_i$  et le prix moyen  $y_i$ . La variable  $x_i$  est reliée à l'année : l'année 2010 correspond au rang 1.

- Suivre les étapes permettant d'afficher le nuage de points à l'aide de la calculatrice :

Casio	NumWorks	TI
<p>Dans le menu <b>STATS</b>, entrer les valeurs <math>x_i</math> et <math>y_i</math> dans les colonnes <i>List1</i> et <i>List2</i>.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Cliquer sur <b>GRPH</b>, puis sélectionner <b>SET</b> et choisir <b>GraphType : Scatter</b>.</li> <li>Cliquer sur <b>EXE</b>, puis sur <b>GPH1</b>.</li> </ul>	<p>Choisir le menu <b>REGRESSIONS</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Entrer les valeurs <math>x_i</math> et <math>y_i</math> dans les colonnes <i>X1</i> et <i>Y1</i>.</li> <li>Cliquer sur <b>Graphique</b> (OK) pour visualiser le nuage de points.</li> </ul>	<p>Choisir le menu <b>STATS</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Cliquer sur <b>EDIT</b> et entrer les valeurs <math>x_i</math> et <math>y_i</math> dans les colonnes <i>L1</i> et <i>L2</i>.</li> <li>Cliquer sur <b>2nde f(x)</b>, puis paramétrier le graphique en choisissant <b>[•]</b> pour obtenir le nuage de points.</li> <li>Appuyer sur la touche <b>graph</b> pour afficher le nuage de points.</li> </ul>

#### Pour tracer la droite d'ajustement et déterminer le coefficient de détermination $R^2$

Casio	NumWorks	TI
<ul style="list-style-type: none"> <li>Cliquer sur <b>CALC</b> puis sur <b>X</b> et choisir <b>ax+b</b>.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Cliquer sur <b>OK</b> puis choisir <b>Régression</b></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Cliquer sur <b>STATS</b>, puis à l'aide du curseur cliquer sur <b>CALC</b> et sélectionner <b>RegLin(ax+b)</b>, puis <b>Calculs</b>.</li> </ul>

On obtient les résultats suivants :  $R^2 = 0,9577$  et  $y = 0,49x + 12,56$ .

#### Pour exploiter l'équation de la droite d'ajustement

- Repérer la valeur du rang correspondant à la prédiction souhaitée :

$$x = 16 \text{ pour l'année 2025.}$$

- Remplacer cette valeur dans l'équation et calculer :

$$y = 0,49 \times 16 + 12,56 = 20,4.$$

Conclusion :

On obtient  $y = 20,4$  centimes d'euros.

C'est le prix possible du kWh en 2025 si la tendance continue.

Voir exercices 3, 4, 5, 7 et 9

# Accompagnement personnalisé



## J'utilise le vocabulaire approprié

### 1 Complétez le texte avec les mots proposés.

(Certaines propositions peuvent être utilisées plusieurs fois, d'autres jamais.)

nuage de points ● droite d'ajustement ● affine ● équation réduite ● coefficient de détermination  
● ajustement affine ● extrapolation

- En statistiques, un **nuage de points** est une représentation de données dépendant de deux variables.
- Lorsque les points du nuage paraissent presque alignés, il est possible de tracer une **droite d'ajustement** qui passe au plus près des points du nuage.
- Graphiquement, cette droite correspond à la représentation graphique d'une fonction **affine** ; on dit qu'on réalise un **ajustement affine**.
- L' **équation réduite** associée à cette droite est de la forme  $y = ax + b$ .
- Pour évaluer la pertinence d'un ajustement affine, on détermine, à l'aide d'outils numériques, le **coefficient de détermination** de la série statistique.
- L' **extrapolation** est un calcul qui consiste à estimer la valeur inconnue d'une des deux variables étudiées. Contrairement à l'interpolation, ce calcul est réalisé en dehors du domaine d'étude fourni par l'échantillon.



## Je revois des points importants

### 2 Soit l'ajustement affine suivant, réalisé à partir d'une série statistique à deux variables $x$ et $y$ .

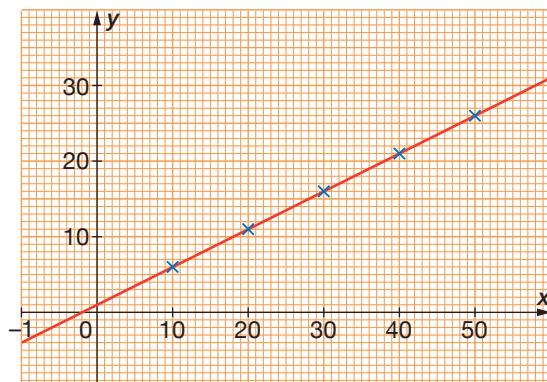
Cochez parmi les propositions celles qui sont exactes.

- D'après la représentation, il semble que le coefficient de détermination est :

- proche de 1.
- éloigné de 1.
- égal à 1.

- L'équation réduite de la droite d'ajustement est :

- $y = 0,5$ .
- $y = 0,5x + 1$ .
- $y = 6x + 1$ .



## Je mémorise

### 3 Dans l'ordre chronologique, numérotez les étapes de la démarche de résolution d'un problème de statistiques à deux variables pouvant être modélisé par une approximation affine et demandant une prévision. L'étape 1 est déjà indiquée.

2	Je construis le nuage de points associé à la série statistique à deux variables.	5	Je détermine l'équation réduite de la droite d'ajustement.
6	J'utilise l'équation réduite pour interpoler ou extrapolier un résultat et répondre à une problématique.	1	<i>Je vérifie que les deux variables sont quantitatives et peuvent être représentées par un nuage de points.</i>
4	Je détermine le coefficient de détermination $R^2$ et vérifie qu'il est proche de 1 pour valider la pertinence de l'ajustement.	3	Je trace la droite d'ajustement.

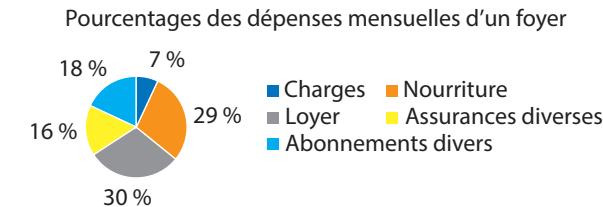
## AUTOMATISMES

Sans calculatrice ni brouillon, répondez aux 3 questions du rituel indiqué par votre professeur.  
Votre réponse est juste ? Bravo ! Cochez la case de l'automatisme correspondant.

### Rituel 1

- A3 Dans le diagramme en secteurs ci-dessous, donnez le pourcentage des dépenses correspondant aux abonnements divers du foyer.

18 %



- A19 Calculez l'aire d'un triangle dont la base mesure 7 cm et la hauteur 5 cm.

$$A = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{7 \times 5}{2}$$

$$A = 17,5 \text{ cm}^2.$$

- A6 Résolvez l'équation suivante :

$$2x + 10 = 34.$$

$$2x = 34 - 10 ; x = \frac{24}{2} = 12.$$

### Rituel 2

- A8 À partir du tableau ci-dessous, vérifiez que la situation est une situation de proportionnalité et déterminez l'expression de la fonction linéaire qui la modélise.

Nombre de séances au cinéma x	1	5	8
Prix à payer (en euros) y	8	40	64

On vérifie que y est proportionnel à x :  $y = 8x$ .

- A17 Représentez schématiquement dans la 2<sup>e</sup> ligne du tableau la figure ou le solide demandé.

Figures / Solides	Cercle	Disque	Sphère	Boule
Repré-sentation				

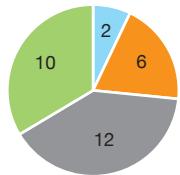
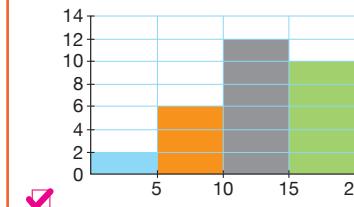
- A1 Calculez la probabilité de l'événement A « obtenir un as dans un jeu de 32 cartes ».

$$p(A) = \frac{4}{32} = 0,125.$$

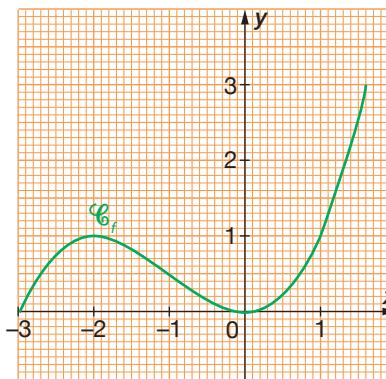
### Rituel 3

- A4 Cochez parmi les deux diagrammes proposés celui qui correspond au tableau suivant.

Caractère	Effectif
[0 ; 5[	2
[5 ; 10[	6
[10 ; 15[	12
[15 ; 20]	10



- A10 Soit  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative d'une fonction f. Complétez le tableau de variations de la fonction f à partir de la représentation graphique de cette courbe.



x	-3	-2	0	1,6
Variations de f	0	1	0	3

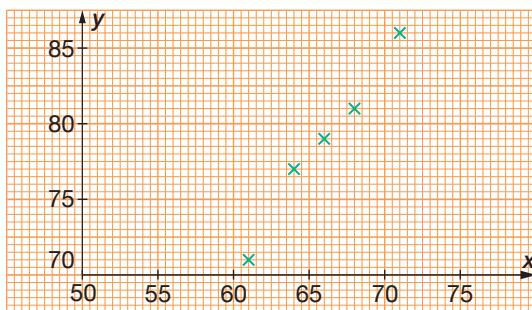
- A22 Développez l'expression  $3(x + 9,5)$ .

$$3x + 28,5$$

# Exercices

## Série statistique à deux variables et nuage de points

- 1** ★ On dispose du nuage de points représenté ci-dessous.



Ainsi que des tableaux suivants.

Tableau A

x <sub>i</sub>	0	1	2	3	4
y <sub>i</sub>	61	64	66	68	71

Tableau B

x <sub>i</sub>	61	64	66	68	71
y <sub>i</sub>	71	77	79	81	86

Tableau C

x <sub>i</sub>	1	2	3	4	5
y <sub>i</sub>	71	77	79	81	86

Quel tableau de valeurs correspond au nuage de points représenté ? C'est le tableau **B**.

- 2** ★ a. Représentez sur le repère donné ci-après le nuage de points associé au tableau suivant.

x <sub>i</sub>	1	2	3	4	5
y <sub>i</sub>	19	32	30	52	55



- b. Décrivez l'allure du nuage de points obtenu.  
On constate que les points du nuage ne sont pas bien alignés.

- 3** ★ À l'aide de la calculatrice, représentez par un nuage de points la série statistique suivante.

x <sub>i</sub>	-10	7	14	18	32
y <sub>i</sub>	3	12	15	45	18

- 4** ★★ a. À l'aide de la calculatrice, représentez par un nuage de points chacune des deux séries statistiques décrites par les tableaux suivants.

Série statistique A

Variable x <sub>i</sub>	1	2	3	4	5
Variable y <sub>i</sub>	2	7	9	14	19

Série statistique B

Variable x <sub>i</sub>	1	2	3	4	5
Variable y <sub>i</sub>	-15	9	-3	-25	-14

- b. Laquelle des deux séries statistiques présente un nuage de points presque alignés ?

C'est la série statistique A qui présente un nuage de points presque alignés.

- 5** ★★ Le tableau ci-dessous représente l'évolution du prix du m<sup>2</sup> d'un appartement à Paris de 2000 à 2019.

Année	2000	2008	2009	2011	2019
Rang x <sub>i</sub>	1	9	10	12	20
Montant y <sub>i</sub> (en euros)	2 740	6 600	6 020	8 370	9 890

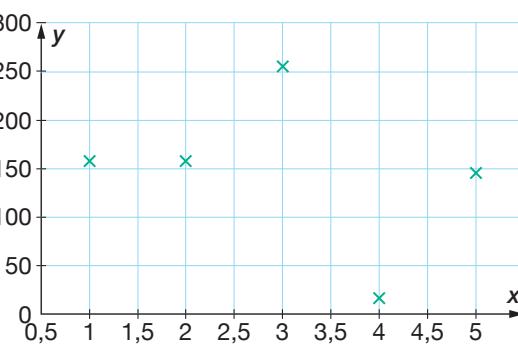
- a. Complétez la ligne du rang dans le tableau.

- b. Représentez la série statistique à deux variables par un nuage de points à l'aide d'un tableur.

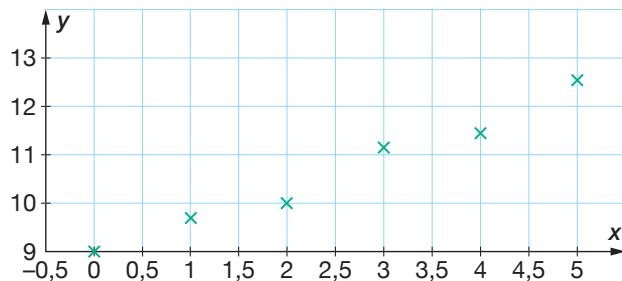
## Ajustement affine

- 6** ★ Parmi les nuages de points suivants, cochez celui qui peut être modélisé par un ajustement affine.

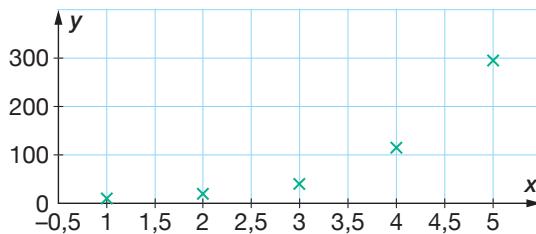
□ Nuage a



Nuage b



Nuage c



- 7 ★★ a. Déterminez, à l'aide de la calculatrice, l'équation de la droite d'ajustement affine associée au tableau donné. Arrondissez les coefficients au millième.

$x_i$	0	1	2	3	4	5	6
$y_i$	3,1	5,8	8,5	11,2	12	16,6	19,3

On obtient l'équation :  $y = 2,632x + 3,032$ .

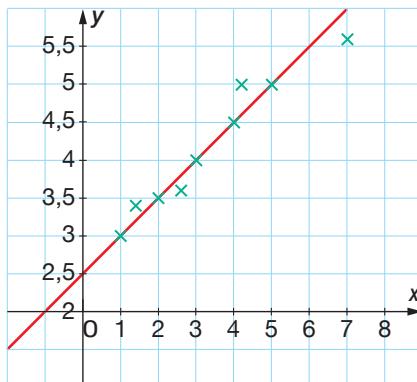
b. Calculez la valeur de  $y$  pour  $x = 8$ .

$$y = 2,632 \times 8 + 3,032 = 24,088.$$

c. Calculez la valeur de  $x$  pour  $y = 25$ . Arrondissez au dixième.

$$x = \frac{y - 3,032}{2,632} = \frac{25 - 3,032}{2,632} \approx 8,3.$$

- 8 ★★ Déterminez l'équation de la droite d'ajustement représentée sur le nuage de points suivant.



L'ordonnée à l'origine vaut  $b = 2,5$  et on calcule le coefficient  $a$  :  $a = \frac{3,5 - 3}{2 - 1} = 0,5$ .

L'équation de la droite est donc :  $y = 0,5x + 2,5$

Pertinence d'un ajustement affine

- 9 ★ a. À l'aide de la calculatrice, représentez les trois nuages de points des tableaux donnés ci-dessous et notez la valeur du coefficient de détermination  $R^2$  en arrondissant au centième.

Tableau A :  $R^2 = 0,17$

Variable $x_i$	10	20	35	40	50
Variable $y_i$	240	760	520	185	980

Tableau B :  $R^2 = 0,95$

Variable $x_i$	1	2	3	4	5
Variable $y_i$	18	18,75	19	19,23	20

Tableau C :  $R^2 = 0,82$

Variable $x_i$	0,5	2	7	9	10
Variable $y_i$	18	18,75	19	19,23	20

b. Rappelez l'intérêt du calcul du coefficient de détermination  $R^2$ .

Le coefficient  $R^2$  permet de vérifier la pertinence d'un ajustement affine. Plus il est proche de 1, plus l'ajustement est pertinent. L'ajustement de la série statistique du tableau B est pertinent par exemple.

- 10 ★ Notez sous chaque ajustement affine la valeur du coefficient  $R^2$  qui lui est associé.

Vous disposez des valeurs suivantes pour  $R^2$  :

$$R^2 = 0,005\ 7 ; R^2 = 1 ; R^2 = 0,965\ 2.$$

Ajustement affine 1	Ajustement affine 2
$R^2 = 0,965\ 2$	$R^2 = 0,005\ 7$
Ajustement affine 3	
$R^2 = 1$	

# Problèmes

## 11 ★★ foucherconnect.fr/22mc08

Romain est infirmier de catégorie A depuis peu et il aimerait connaître le salaire qu'il pourra espérer avoir au bout de 15 ans d'ancienneté dans la profession.

On dispose des salaires en euros des infirmier(e)s de catégorie A selon les années d'ancienneté.

Nombre d'années d'ancienneté $x_i$	1	3	5
Salaire (en €) $y_i$	1 805,8	1 866	1 944,7

Nombre d'années d'ancienneté $x_i$	7	9	12
Salaire (en €) $y_i$	2 037,3	2 129,9	2 236,4

1. Ouvrez le fichier « C01\_18\_salaires.ggb ».

Complétez le tableau et représentez cette série statistique par un nuage de points en sélectionnant l'icône graphique et en choisissant « Statistiques à deux variables ».

2. Notez l'équation de la droite d'ajustement obtenue :  $y = 40,457 \cdot 9x + 1 753,859 \cdot 4$

3. Utilisez l'équation pour estimer le salaire de Romain quand il aura 15 ans d'expérience si la même évolution se poursuit. Pour cela, complétez la valeur de  $x$  sur le logiciel dans la partie « Evaluer ». Arrondissez au dixième.

On trouve  $y = 2 360,728 \cdot 5$  pour  $x = 15$ . Le salaire de Romain après 15 ans d'expérience sera donc de 2 361 euros.

## 12 ★★ Samy s'entraîne à la course, toujours sur le même parcours. Il constate qu'il s'améliore et devient de plus en plus rapide.

Ses temps sont répertoriés ci-dessous.

Série d'entraînements $x_i$	1	2	3	4	5
Temps (en minutes) $y_i$	12	11	10,5	9	7

1. Représentez cette série statistique par un nuage de points à l'aide de la calculatrice.

2. Tracez la droite d'ajustement et notez l'équation de la droite d'ajustement :  $y = -1,2x + 13,5$

3. Utilisez l'équation pour trouver à partir de combien d'entraînements Samy courra la même distance en moins de 5 minutes si l'amélioration de ses temps se poursuit.

$$5 = -1,2x + 13,5$$

$x = \frac{5 - 13,5}{-1,2} \approx 7,08$ . Donc il atteindra un temps de moins de 5 min au bout de son 8<sup>e</sup> entraînement.

## 13 ★★ foucherconnect.fr/22mc09

La ville de Nolwen organise chaque année un festival de musique qui réunit un grand nombre de personnes. Le tableau ci-après donne les nombres de participants (en milliers) au festival depuis 5 ans.

Année	1	2	3	4	5
Nombre de participants (en milliers)	148,7	148,6	150	150,8	151,2

1. Ouvrez le fichier « C01\_18\_festival.xlsx ». Représentez le nuage de points associé à ce tableau.

### TUTO LOGICIEL

Représenter un nuage de points et sa droite d'ajustement affine



foucherconnect.fr/22mc04

2. Réalisez un ajustement affine et obtenez l'équation de la droite d'ajustement à l'aide du tableur. Notez l'équation de la droite d'ajustement obtenue.

$$y = 720x + 147\,700$$

3. En remplaçant  $x$  par la valeur 6 dans l'équation précédente, déterminez le nombre de participants au festival que peut espérer la ville de Nolwen l'an prochain si la tendance se poursuit.

$$y = 720 \cdot 6 + 147\,700 = 152\,020$$

La ville de Nolwen peut donc espérer recevoir 152 020 participants à l'occasion du festival de musique l'an prochain.

## 14 ★★ foucherconnect.fr/22mc10

On dispose des ventes mensuelles réalisées par un concessionnaire automobile au cours de l'année. Celles-ci sont données dans le fichier « C01\_18\_voitures.xlsx ».

1. Ouvrez le fichier « C01\_18\_voitures.xlsx » et représentez le nuage de points associé à la série statistiques à deux variables.

2. Réalisez un ajustement affine et notez la valeur du coefficient de détermination  $R^2$ .

$$R^2 = 0,111\,7$$

3. Peut-on dire que l'ajustement affine est pertinent ? Justifiez votre réponse.

L'ajustement affine n'est pas pertinent. On le constate par le graphique (les points ne sont pas du tout alignés), mais aussi par la valeur du coefficient de détermination très éloignée de 1.

- 15** ★★  Une plate-forme de streaming a relevé son nombre d'abonnés par an de 2016 à 2020 et elle a obtenu le tableau suivant.

Année	2016	2017	2018	2019	2020
Rang $x_i$	1	2	3	4	5
Nombre d'abonnés (en millions) $y_i$	38	46	60	80	110

- À l'aide de la calculatrice, représentez le nuage de points associés à cette série statistiques à deux variables.
- Réalisez un ajustement affine et notez la valeur du coefficient de détermination  $R^2$  en arrondissant au millième.  $R^2 = \underline{0,946}$
- Peut-on dire que l'ajustement affine est pertinent ? Justifiez votre réponse.

$R^2$  a une valeur proche de 1 donc l'ajustement affine est pertinent.

- Donnez l'équation de la droite d'ajustement.

$$y = \underline{17,8} \quad x + \underline{13,4}$$

- À l'aide de cette équation, déterminez le nombre d'abonnés que la plateforme peut espérer avoir en 2025.  $\underline{y = 17,8 \times 10 + 13,4 = 191,4}$

$\underline{\text{Il y aura 191 millions d'abonnés à la plateforme en 2025 si la tendance se poursuit.}}$

- 16** ★★★ On a mis en culture des cellules pour permettre leur division. Emma, responsable de l'expérience, mesure la proportion d'ADN dans une unité arbitraire (UA) afin d'étudier son évolution durant la phase où l'ADN prend la forme de chromosomes entre 6 h et 10 h après le début de l'expérience.

Temps	6	6,5	7	8
Quantité d'ADN (en UA)	2	2,1	2,35	3,2

#### Problématique

Au bout de 10 heures, y aura-t-il au moins 4 UA d'ADN formé ?

Oui, au bout de 10 heures, il y aura 4,35 UA.

- 17** ★★★ Entre l'année de sa sortie en 2007 et la fin des ventes de la Wii, la console de jeu s'est vendue à 100 millions d'exemplaires cumulés. Depuis 2017, Nintendo a lancé sur le marché la Switch dont le tableau ci-après répertorie les ventes par année jusqu'en 2021.

Année	2017	2018	2019	2020	2021
Rang	1	2	3	4	5
Nombre de ventes (en millions)	1,5	14	16,5	20	27

#### Problématique

Les fabricants de la Switch peuvent-ils espérer dépasser en 2022 le nombre de ventes cumulées de la Wii ?



- Proposez une méthode permettant de répondre à la problématique.

On représente à l'aide d'un outil numérique le nuage de points associés à la série statistiques à deux variables avec comme variables  $x$  le rang et  $y$  le nombre de ventes. On réalise un ajustement affine si celui-ci est pertinent et on détermine à l'aide de l'équation de la droite obtenue la valeur de  $y$  pour  $x = 6$ . On additionne ensuite toutes les ventes depuis la sortie de la console et on compare le résultat à 100 millions (ventes cumulées de la Wii).

- Réalisez la méthode proposée et répondez à la problématique.

On obtient l'équation suivante :  $y = 5,7x - 1,3$ .

Pour  $x = 6$  :  $y = 32,9$ .

$$1,5 + 14 + 16,5 + 20 + 27 + 32,9 = 111,9.$$

Donc en 2022, la Switch se sera vendue à 111,9 millions d'exemplaires si la tendance se poursuit. Les fabricants peuvent donc espérer dépasser les ventes de la Wii avec la Switch.

# Évaluation

Compétences	S'approprier				Analyser Raisonner				Réaliser				Valider				Communiquer			
Questions	1a – 2a				1c – 1d – 2b				1b – 1d – 2b				1c – 1d				3			
Niveau d'acquisition	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4

## Situation

Entre 1920 et 1986 la population de tigres dans le monde est passée de 100 000 à 15 000 ! Du fait principalement des braconnages, la population mondiale des tigres aurait disparu si les scientifiques et associations du monde entier n'avaient pas tiré la sonnette d'alarme en 1986 et mis sous protection ces animaux fascinants. Toutefois, des efforts doivent encore être faits car il n'est pas possible de dire aujourd'hui s'il restera des tigres sauvages dans 50 ans.



On dispose des tableaux suivants.

Tableau A : Population mondiale de tigres entre 1921 et 1986

Année	1921	1970	1975	1986
Rang $x_i$	1	50	55	66
Nombre de tigres $y_i$	100 000	38 300	33 000	15 000

Tableau B : Population mondiale de tigres depuis 1986

Année	1986	1991	1996	2001	2011	2021
Rang $x_i$	66	71	76	81	91	101
Nombre de tigres $y_i$	15 000	13 410	12 534	10 640	8 565	3 890

## Problématique

Quel effet ont eu les mesures de protection des tigres mises en place à partir de 1986 sur le nombre de tigres dans le monde ?

1 a. S'approprier Réaliser À l'aide de la calculatrice, représentez graphiquement le nuage de points de coordonnées  $(x_i ; y_i)$  associé à la série statistique du tableau A.

b. Réaliser Réalisez un ajustement affine de cette série et donnez le coefficient de détermination ainsi que l'équation réduite de la droite d'ajustement en arrondissant les coefficients au centième :  $R^2 = 0,99$  et  $y = -1\,283,55 x + 101\,767,56$

c. Analyser/Raisonner Valider L'ajustement affine est-il pertinent ? Justifiez en utilisant la valeur du coefficient  $R^2$ .

L'ajustement affine est pertinent car  $R^2$  est très proche de 1 ( $R^2 \approx 0,99$ ).

d. Analyser/Raisonner Réaliser En utilisant l'équation de la droite d'ajustement, déterminez à partir de quel rang, puis à partir de quelle année aurait dû disparaître les tigres s'ils n'avaient pas été protégés.

$y = 0$  pour  $x \approx 79,29$  donc à partir du rang 80 les tigres auraient totalement disparu, ce qui correspondait à l'année 1999.

2 a. S'approprier Complétez les rangs dans le tableau B de la situation.

b. Analyser/Raisonner Réalisez les mêmes étapes que pour le tableau A avec le tableau B et donnez l'année à partir de laquelle il ne restera plus de tigres sauvages si la tendance actuelle se poursuit.

On trouve  $R^2 = 0,98$  et  $y = -303,91x + 35\,289,54$ . On trouve pour  $y = 0$ ,  $x \approx 116,12$ . À partir du rang 117, les tigres auront totalement disparu selon la tendance actuelle, ce qui correspond à l'année 2037.

3 Communiquer Répondez à la problématique.

La protection des tigres à partir de 1986 a permis de freiner leur disparition en la diminuant mais ils pourraient disparaître d'ici à 2037.

# Probabilités

2

Capacités	Activités
<ul style="list-style-type: none"> <li>Calculer la probabilité d'un événement par addition des probabilités d'événements élémentaires.</li> <li>Calculer la probabilité d'un événement contraire.</li> <li>Calculer la probabilité de la réunion de deux événements incompatibles.</li> </ul>	Activité 1
<ul style="list-style-type: none"> <li>Compléter ou exploiter des représentations : tableaux croisés d'effectifs, diagrammes.</li> <li>Calculer la probabilité de la réunion et de l'intersection de deux événements.</li> <li>Utiliser la relation entre la probabilité de <math>A \cup B</math> et de <math>A \cap B</math>.</li> </ul>	Activité 2
<ul style="list-style-type: none"> <li>Calculer des fréquences conditionnelles à partir de tableaux croisés d'effectifs.</li> <li>Déterminer une probabilité conditionnelle.</li> </ul>	Activité 3

## Je m'échauffe !

### Activité 1 p. 22

On lance un dé, non truqué, à six faces numérotées de 1 à 6.

a. La probabilité d'obtenir un 5 est :

- $\frac{1}{5}$         $\frac{1}{6}$        1,6

b. La probabilité de l'événement « Ne pas obtenir un 5 » est :

- $\frac{1}{5}$        5        $\frac{5}{6}$

c. La probabilité d'obtenir un chiffre strictement plus grand que 4 est :

- $\frac{1}{3}$         $\frac{2}{4}$         $\frac{2}{6}$



### Activité 3 p. 24

Une urne contient quatre jetons rouges numérotés de 1 à 4 et cinq jetons verts numérotés de 1 à 5. On pioche au hasard un jeton.

a. La probabilité d'obtenir un jeton numéroté 3 est :  $\frac{2}{9}$

b. Le jeton tiré est vert, la probabilité qu'il porte le numéro 3 est :  $\frac{1}{5}$

### Activité 2 p. 23

Un jeu de 32 cartes est composé des cartes 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi et as, déclinées en quatre couleurs : trèfle, pique, cœur et carreau.

On tire au hasard une carte dans ce jeu.

a. La probabilité que la carte tirée soit un roi est :  $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

b. La probabilité que la carte tirée soit un roi rouge est :  $\frac{2}{32} = \frac{1}{16}$

c. La probabilité de tirer une dame ou un trèfle est :  $\frac{11}{32}$



# Activité

1

## Calculer la probabilité d'un événement

### SITUATION . Vélo ou pas vélo ?

Un événement sportif est organisé dans un lycée professionnel. Chacun des 90 élèves doit choisir une activité sportive parmi les trois proposées en répondant à un sondage numérique ou papier. Le tiers des élèves a répondu au sondage numérique et a choisi de participer au tournoi de basket. Parmi les élèves ayant répondu au sondage papier, 2 ont choisi le basket.

28 élèves ont choisi l'activité football. Les autres élèves participent à la sortie vélo. Le lycée pourra financer la location de vélos si moins de 30 % des élèves participent à la sortie vélo.



#### Problématique

Le lycée pourra-t-il financer la location des vélos ?

On interroge au hasard un élève du lycée. On considère les événements suivants :  
B : « l'élève a choisi de participer au tournoi de basket » ; F : « l'élève a choisi l'activité football » et  
V : « l'élève participe à la sortie vélo ».

- 1 **S'approprier Réaliser** Donnez le nombre d'élèves ayant choisi le basket, puis calculez  $P(B)$  et  $P(F)$ .

$$\frac{1}{3} \times 90 + 2 = 32 ; 32 \text{ élèves ont choisi le tournoi de basket. } P(B) = \frac{32}{90} \text{ et } P(F) = \frac{28}{90}.$$

- 2 a. **Analyser/Raisonnez** On note  $B \cup F$  l'événement « l'élève a choisi un sport collectif, c'est-à-dire, le basket ou le football ». C'est l'événement **réunion** de B et F. Calculez  $P(B \cup F)$ .

$$P(B \cup F) = \frac{32 + 28}{90} = \frac{60}{90}.$$

- b. **Valider** Les événements B et F sont **incompatibles** (l'élève ne peut pas choisir le basket et le football). Vérifiez que  $P(B \cup F) = P(B) + P(F)$ .

$$P(B) + P(F) = \frac{32}{90} + \frac{28}{90} = \frac{60}{90} = P(B \cup F).$$

- 3 a. **S'approprier** On désigne par  $\bar{V}$  l'événement **contraire** de V. Définissez  $\bar{V}$  par une phrase.

$\bar{V}$  est l'événement : « l'élève ne participe pas à la sortie vélo », c'est donc l'événement  $B \cup F$ , l'élève a choisi le basket ou le football.

- b. **Réaliser** Calculez  $P(V)$  et  $P(\bar{V})$ .

$$P(V) = \frac{90 - 32 - 28}{90} = \frac{30}{90} \text{ et } P(\bar{V}) = \frac{60}{90}.$$

- c. **Valider** Vérifiez que  $P(V) + P(\bar{V}) = 1$ .

$$P(V) + P(\bar{V}) = \frac{30}{90} + \frac{60}{90} = \frac{90}{90} = 1.$$

- 4 **Valider Communiquer** Répondez à la problématique.

$$\frac{30}{90} \approx 33 \% ; 33 \% \text{ des élèves ont choisi la sortie vélo.}$$

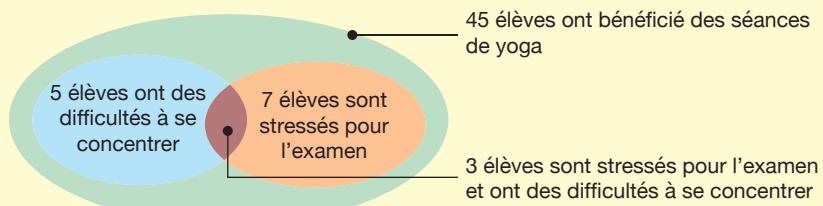
$33 > 30$ . Donc il n'y aura pas de financement pour la location des vélos.

# Activité 2

## Calculer la probabilité de la réunion et de l'intersection de deux événements

### SITUATION . Yoga au lycée

Le proviseur d'un lycée professionnel propose aux élèves volontaires de Terminale des séances hebdomadaires de yoga. Trois mois plus tard, il présente le bilan du dispositif avec le diagramme ci-dessous.



Parmi ceux qui ont refusé de participer aux séances de yoga, il constate que 51 % sont stressés pour l'examen ou ont des difficultés à se concentrer.

### Problématique

Les séances de yoga ont-elles eu un effet positif sur le bien-être des élèves ?

Pour l'ensemble de l'activité, on s'intéresse à la situation d'un élève ayant suivi les séances de yoga, pris au hasard parmi les 45 élèves. On désigne les événements C : « l'élève a des difficultés à se concentrer » et S : « l'élève est stressé pour l'examen ».

- 1** **S'approprier Analyser/Raisonner** En utilisant les quatre données chiffrées du diagramme, complétez le tableau suivant.

	S	$\bar{S}$	Total
C	3	5	8
$\bar{C}$	7	30	37
Total	10	35	45

- 2** **Réaliser** Calculez  $P(C)$  et  $P(S)$ .  $P(C) = \frac{8}{45} \approx 0,178$  et  $P(S) = \frac{10}{45} \approx 0,222$ .

- 3** **Analyser/Raisonner Réaliser** On note  $C \cap S$  l'événement « l'élève a des difficultés à se concentrer et il est stressé ». C'est l'événement **intersection** de C et de S.

Donnez l'effectif correspondant à l'événement  $C \cap S$  et calculez  $P(C \cap S)$ .

L'effectif de cet événement est 3.  $P(C \cap S) = \frac{3}{45} \approx 0,067$ .

- 4** **a. Analyser/Raisonner Réaliser** On note  $C \cup S$  l'événement « l'élève a des difficultés à se concentrer ou il est stressé ». C'est l'événement **réunion** de C et de S.

Donnez l'effectif correspondant à l'événement  $C \cup S$  et calculez  $P(C \cup S)$ .

L'effectif de cet événement est  $3 + 7 + 5 = 15$ .  $P(C \cup S) = \frac{15}{45} \approx 0,333$ .

- b. Valider** Cochez l'égalité vraie :

$P(C \cup S) = P(C) + P(S)$    $P(C \cup S) = P(C) + P(S) - P(C \cap S)$    $P(C \cup S) = P(C) + P(S) + P(C \cap S)$

- 5** **Valider Communiquer** Répondez à la problématique.

Environ 33 % des élèves ayant suivi les séances de yoga ont des difficultés à se concentrer

ou sont stressés pour l'examen contre 51 % chez les élèves n'ayant pas suivi les séances.

On peut donc conclure que les séances de yoga ont permis d'améliorer le bien-être des élèves.

# Activité

## 3

# Déterminer une probabilité conditionnelle

### SITUATION . Tous égaux ?

On parle de mixité dans une catégorie de personnel lorsque celle-ci est composée d'au moins 30 % de femmes ou 30 % d'hommes.

Dans une entreprise, on dispose des données suivantes.

	Administratifs	Techniciens	Total
Hommes	20	49	69
Femmes	29	21	50
Total	49	70	119



### Problématique

Dans quelle(s) catégorie(s) de personnel, la mixité n'est-elle pas respectée ?

On s'intéresse à un employé de l'entreprise choisi au hasard. On considère les événements suivants :

H : « l'employé est un homme » ; T : « l'employé est un technicien » et A : « l'employé est un administratif ».

1 **S'approprier Réaliser** Calculez  $P(A)$  et  $P(T)$ .  $P(A) = \frac{49}{119} \approx 0,412$  et  $P(T) = \frac{70}{119} \approx 0,588$ .

2 a. **S'approprier** Définissez l'événement  $H \cap A$  par une phrase.

$H \cap A$  est l'événement « l'employé est un homme et un administratif ».

b. **Réaliser** Calculez  $P(H \cap A)$ .  $P(H \cap A) = \frac{20}{119} \approx 0,168$ .

c. **S'approprier Réaliser** Calculez  $P(H \cap T)$ .  $P(H \cap T) = \frac{49}{119} \approx 0,412$ .

3 a. **Analyser/Raisonner Réaliser** Calculez la probabilité d'avoir choisi un homme sachant que c'est un administratif. Cette probabilité appelée **probabilité conditionnelle** est notée  $P_A(H)$  et se lit « probabilité de H sachant A ».  $P_A(H) = \frac{20}{49} \approx 0,408$ .

b. **Analyser/Raisonner** Écrivez comment se lit  $P_T(H)$  et définissez cette probabilité par une phrase.

$P_T(H)$  se lit : « probabilité de H sachant T ». C'est la probabilité d'avoir choisi un homme sachant

que c'est un technicien.

c. **Réaliser** Calculez la probabilité  $P_T(H)$ .  $P_T(H) = \frac{49}{70} = 0,7$ .

4 **Valider** Vérifiez que  $P_A(H) = \frac{P(H \cap A)}{P(A)}$  et  $P_T(H) = \frac{P(H \cap T)}{P(T)}$ .

$$\frac{P(H \cap A)}{P(A)} = \frac{20/119}{49/119} = \frac{20}{49} = P_A(H); \frac{P(H \cap T)}{P(T)} = \frac{49/119}{70/119} = \frac{49}{70} = P_T(H).$$

5 **Valider** Déduez des résultats précédents, le pourcentage d'hommes et de femmes dans la catégorie « Administratifs » et dans la catégorie « Techniciens ».

Parmi les administratifs, il y a 40,8 % d'hommes et 59,2 % de femmes.

Parmi les techniciens, il y a 70 % d'hommes et 30 % de femmes.

6 **Communiquer** Répondez à la problématique. Dans les 2 catégories, on constate qu'il y a au moins 30 % d'hommes ou 30 % de femmes. La mixité professionnelle est respectée dans les deux catégories.



## SITUATION . Do you speak English ?

Une entreprise effectue une étude sur la maîtrise de l'anglais de ses employés. On a la répartition suivante.

	Cadres	Techniciens	Ouvriers	Total
Maîtrise l'anglais	12	20	32	64
Ne maîtrise pas l'anglais	12	24	24	60
Total	24	44	56	124



## Problématique

Est-ce parmi les cadres qu'on a le plus de chance de choisir un employé qui maîtrise l'anglais ?

On choisit au hasard un employé de l'entreprise. On considère les événements suivants : C : « l'employé est un cadre » ; T : « l'employé est un technicien » ; O : « l'employé est un ouvrier » et A : « l'employé maîtrise l'anglais ».

- 1 Calculez les probabilités  $P(C)$ ,  $P(T)$  et  $P(O)$ .

$$P(C) = \frac{24}{124} \approx 0,194 ; P(T) = \frac{44}{124} \approx 0,355 ; P(O) = \frac{56}{124} \approx 0,452.$$

- 2 Calculez les probabilités  $P_C(A)$ ,  $P_T(A)$  et  $P_O(A)$ .

$$P_C(A) = \frac{12}{24} = 0,5 ; P_T(A) = \frac{20}{44} \approx 0,455 ; P_O(A) = \frac{32}{56} \approx 0,571.$$

LANGAGE PYTHON 

- 3 Le programme ci-contre est incomplet. Il doit permettre de calculer les probabilités conditionnelles précédentes.

Ouvrez le fichier « C02\_25\_algopro.py ». Ajoutez une nouvelle liste « anglais » en ligne 4 et complétez la ligne 7.

- 4 Exécutez le programme et vérifiez que les résultats sont identiques aux réponses de la question 2.

$P_C(A) = 0,5$  ;  $P_T(A) = 0,455$  ;  $P_O(A) = 0,571$ . Les résultats sont identiques.

- 5 Répondez à la problématique.

On a plus de chance de choisir un employé qui maîtrise l'anglais en choisissant un ouvrier.

```

1 from math import*
2 categorie=['C','T','O']
3 effectifs=[24,44,56]
4 anglais= [12,20,32]
5 for i in range(len(categorie)):
6     print("P(A sachant",categorie[i],"=", round(anglais[i]/ effectifs[i] ,3)))
7

```

LEXIQUE 

Instruction	Signification
categorie=['C','T','O']	Créer une liste appellée « categorie » de 3 éléments . Les éléments d'une liste peuvent être des caractères ou des chiffres.
categorie[i]	Utiliser l'élément de rang i dans la liste « categorie ».
len(categorie)	Renvoie le nombre d'éléments dans la liste « categorie ».
for i in range(3)	Répéter 3 fois les instructions de la boucle (écrites à la suite et en retrait).

## L'essentiel

## Probabilité d'un événement

- Chaque issue d'une expérience aléatoire est un événement **élémentaire**.
- La probabilité d'un événement A est notée **P(A)**. C'est un nombre tel que  $0 \leq P(A) \leq 1$ . Elle est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui constituent A.
- Lorsque des événements élémentaires ont la même probabilité de se réaliser, ils sont **équiprobables**. La **probabilité d'un événement A** se calcule en utilisant la formule :

$$P(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables à } A}{\text{Nombre de cas possibles}}$$

- Lorsque A est un événement,  $\bar{A}$  est l'événement **contraire**. On a :  $P(\bar{A}) + P(A) = 1$ .

**Exemple** Au lancer d'un dé cubique non truqué, l'ensemble des issues est {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}.

Chacune des 6 issues a la même probabilité, c'est une situation d'équiprobabilité.

Soit A l'événement : « obtenir un nombre pair ». On a  $A = \{2 ; 4 ; 6\}$ .  $P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ .

$\bar{A}$  est l'événement : « obtenir un nombre impair » et  $P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ .

## Probabilité de la réunion et de l'intersection de deux événements

- Les **tableaux croisés** et les **diagrammes** rassemblent les données concernant deux caractères d'une population.

	A	$\bar{A}$	Total
B	13	15	28
$\bar{B}$	17	14	31
Total	30	29	59

- L'**intersection** de deux événements A et B est notée **A  $\cap$  B** et se lit : « A inter B ». Elle correspond à l'ensemble des issues réalisant les deux événements A **et** B à la fois (partie violette du tableau).

- La **réunion** de deux événements A et B est notée **A  $\cup$  B** et se lit : « A union B ». Elle correspond à l'ensemble des issues réalisant les événements A **ou** B (au moins un des deux) : cases colorées.

- La **probabilité de la réunion** de deux événements A et B est donnée par la formule :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

**Exemple** Avec les données du tableau,  $P(A) = \frac{30}{59}$  ;  $P(B) = \frac{28}{59}$  ;  $P(A \cap B) = \frac{13}{59}$

donc  $P(A \cup B) = \frac{30}{59} + \frac{28}{59} - \frac{13}{59} = \frac{45}{59}$ .

- Lorsque deux événements A et B sont **incompatibles**, ils n'ont aucune issue en commun  $A \cap B = \emptyset$  (**ensemble vide**). Dans ce cas  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

## Probabilité conditionnelle

- Une **probabilité conditionnelle** est la probabilité qu'un événement se réalise **sachant** qu'un autre événement est déjà réalisé. La probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé, est notée :  $P_A(B)$  et se lit « P de B sachant A ».

Elle se calcule par la relation :  $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ .

**Exemple** Avec les données du tableau, on a :  $P_A(B) = \frac{13/59}{30/59} = \frac{13}{30}$  et  $P_B(A) = \frac{13/59}{28/59} = \frac{13}{28}$ .

## Savoir-faire

### Savoir-faire 1 Construire un tableau croisé pour calculer une probabilité

Une enquête est menée auprès d'un groupe de 180 adolescents. Parmi eux, la moitié sont des garçons, les deux tiers jouent aux jeux vidéo. Parmi les garçons, 65 jouent aux jeux vidéo. On choisit au hasard un adolescent dans le groupe. Calculez la probabilité que l'adolescent soit une fille qui joue aux jeux vidéo.

#### RÉSOLUTION

- On note les événements : J : « l'adolescent joue aux jeux vidéo » et G : « l'adolescent est un garçon ».

	J	$\bar{J}$	Total
G	65	25	90
$\bar{G}$	55	35	90
Total	120	60	180

Détail des calculs :

$$180 \div 2 = 90 ; 180 \times \frac{2}{3} = 120.$$

$$\bullet \text{ Il y a } 55 \text{ filles qui jouent aux jeux vidéo : } P = \frac{55}{180}.$$

#### MÉTHODE

##### Pour construire un tableau croisé

- Nommer les événements par une lettre.
- Tracer le tableau croisé en faisant apparaître les lettres utilisées ainsi qu'une ligne et une colonne « Total ».
- Compléter le tableau avec les données de l'énoncé.
- S'assurer que les totaux de chaque ligne et chaque colonne correspondent.

##### Pour calculer une probabilité

- Identifier dans le tableau le nombre d'éléments correspondant à l'événement.
- Calculer la probabilité.

☛ Voir exercices 5, 13 et 14

### Savoir-faire 2 Simuler plusieurs lancers d'un dé

Simulez 50 lancers d'un dé non truqué à 6 faces, puis tracez un diagramme en bâtons pour présenter les résultats.

#### TUTO CALCULATRICE

Simuler plusieurs lancers d'un dé



foucherconnect.fr/22mc12

#### Pour afficher une liste simulant les 50 lancers de dés

Casio	NumWorks	TI
Taper la séquence : <b>MENU</b> 1 <b>RanInt#(1,6,50)→List 1</b> Pour trouver les instructions dans les menus : <b>OPTN F6 F3 F4 F2</b> (RanInt#) <b>OPTN F1</b> (List)	Choisir le menu <b>Statistiques</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Dans la colonne <b>Effectifs N1</b>, saisir 50 fois la valeur 1.</li> </ul> Déplacer le curseur sur <b>Valeur V1</b> <b>ok</b> , puis <b>Remplir avec une formule</b> <b>ok</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Dans <b>paste</b>, choisir le menu <b>Probabilités</b> <b>ok</b>, puis <b>Aléatoire</b> <b>ok</b>, <b>Randint(a,b)</b> <b>ok</b> pour saisir l'instruction <b>RandInt(1,6)</b>.</li> </ul>	Appuyer sur <b>math</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>Dans l'onglet <b>PROB</b>, choisir l'option <b>5 :nbrAléatEnt()</b>.</li> <li>Saisir les paramètres 1, 6 puis 50.</li> <li>Valider avec la touche <b>entrer</b></li> <li>Stocker les valeurs dans la liste L1 : <b>sto→ 2nde 1 entrer</b></li> </ul>

#### Pour afficher le diagramme en bâtons

Casio	NumWorks	TI
Dans le menu <b>STAT</b> , les données apparaissent dans la liste 1. Régler les paramètres pour afficher un histogramme avec les valeurs de la liste 1. Tracer l'histogramme	Déplacer le curseur sur <b>Histogramme</b> <b>ok</b>	Dans le menu <b>graphstat</b> , <b>2nde f(x) 1</b> , régler les paramètres pour afficher un histogramme avec les valeurs de la liste 1. Puis appuyer sur <b>graphe</b> pour afficher l'histogramme.

☛ Voir exercice 7

# Accompagnement personnalisé



## J'utilise le vocabulaire approprié

- 1 Complétez le texte avec les mots proposés.

élémentaire • tirage aléatoire • probabilité • ensemble des issues • incompatibles

Lors du tirage aléatoire d'une carte dans un jeu de 32 cartes, l'ensemble des issues contient 32 éléments. L'événement A : « La carte tirée est un roi » n'est pas un événement élémentaire car il y a 4 rois dans le jeu : roi de cœur, roi de carreau, roi de pique et roi de trèfle. La probabilité que l'événement A se réalise est notée  $P(A)$  et est égale à  $\frac{4}{32}$ . Soit l'événement B : « la carte tirée est la dame de cœur ». Cet événement est élémentaire. Les événements A et B sont incompatibles car ils ne peuvent pas se réaliser en même temps.



## Je revois des points importants

- 2 On considère le tableau croisé, indiquant les données de 2 caractères M et N d'une population donnée.

Reliez chacune des probabilités à sa notation et effectuez le calcul.

	M	$\bar{M}$	Total
N	11	15	26
$\bar{N}$	21	7	28
Total	32	22	54

Probabilité de l'événement M  $P(M \cup N) = \frac{47}{54}$

Probabilité de l'événement N  $P_M(N) = \frac{11}{32}$

Probabilité de la réunion des événements M et N  $P(\bar{N}) = \frac{28}{54}$

Probabilité de l'événement contraire de N  $P(M) = \frac{32}{54}$

Probabilité de l'intersection des événements M et N  $P(N) = \frac{26}{54}$

Probabilité de l'événement N sachant que M est réalisé  $P_{\bar{N}}(M) = \frac{21}{28}$

Probabilité de l'événement M sachant que  $\bar{N}$  est réalisé  $P(M \cap N) = \frac{11}{54}$

## 3 Vrai ou Faux ?

On s'intéresse à un client pris au hasard dans un magasin qui vend des canapés et des fauteuils. On considère les événements C : « le client a acheté un canapé » et F : « le client a acheté un fauteuil ». Apportez un élément de correction lorsque la proposition est fausse.

$\bar{C}$  est l'événement : « le client a acheté 2 canapés ».

Vrai  Faux

$\bar{C}$  est l'événement : « le client n'a pas acheté de canapé ».

L'événement : « le client a acheté un canapé et un fauteuil » se note  $C \cup F$ .

Vrai  Faux

L'événement : « le client a acheté un canapé et un fauteuil » se note  $C \cap F$ .

La probabilité que le client achète un canapé sachant qu'il achète un fauteuil s'écrit  $P_F(C)$ .

Vrai  Faux

Pas de correction, la proposition est vraie.



## Je mémorise

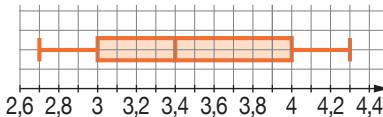
- 4 Réalisez une carte mentale qui reprend le vocabulaire lié aux probabilités et le calcul d'une probabilité.  
[> Je fais le point page 26](#)

## AUTOMATISMES

Sans calculatrice ni brouillon, répondez aux 3 questions du rituel indiqué par votre professeur.  
Votre réponse est juste ? Bravo ! Cochez la case de l'automatisme correspondant.

### Rituel 1

- A3 Une enquête statistique a été menée au sein d'une maternité au cours de l'année 2021 sur la masse en kg des nouveau-nés à leur naissance et a conduit au diagramme suivant.



Donnez les valeurs de la masse médiane et des quartiles. **Médiane = 3,4 ; Q<sub>1</sub> = 3 ; Q<sub>3</sub> = 4.**

- A6 Résolvez l'équation  $2,5x - 8 = -0,5$ .

$$2,5x = 7,5 ; x = \frac{7,5}{2,5} = 3.$$

- A8 Déterminez l'expression littérale de la fonction  $f$  qui modélise la situation de proportionnalité suivante.

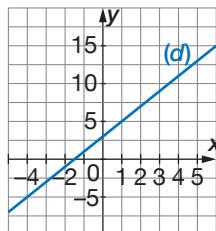
x	-2	0	3
f(x)	1,4	0	-2,1

$$f(x) = -0,7x.$$

### Rituel 2

- A13 Déterminez graphiquement le coefficient directeur de la droite (d).

**Le coefficient directeur de la droite (d) est  $a = 2$ .**



- A22 Développez l'expression  $3(x - 4)$ .

$$3x - 12.$$

- A19 Calculez l'aire d'un carré de 12 cm de côté.

$$12 \times 12 = 144 \text{ cm}^2.$$

## Probabilité d'un événement

- 1 ★ Un sac contient dix jetons, indiscernables au toucher, numérotés de 1 à 10. On choisit au hasard un de ces jetons.
- Donnez le nombre d'issues possibles.  
**Il y a 10 issues possibles.**
  - Pourquoi est-ce une situation d'équiprobabilité ?  
**Chaque jeton a la même probabilité d'être choisi.**

### Rituel 3

- A21 Factorisez l'expression  $x^2 - 5$ .

$$(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}).$$

- A14 Indiquez si les droites ( $d_1$ ) :  $y = 4x - 2$  et ( $d_2$ ) :  $y = 4x + 10$  sont parallèles.

**Oui, les deux droites sont parallèles car leur coefficient directeur sont égaux.**

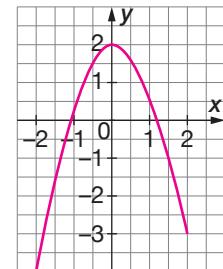
- A1 Calculez la probabilité de tirer une figure (roi, dame ou valet) de pique dans un jeu de 32 cartes.

$$P = \frac{3}{32}.$$

### Rituel 4

- A9 Tracez dans le repère, une des allures possibles de la représentation graphique de la fonction  $f$  dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

x	-2	0	2
f(x)	-4	2	-3



- A7 Résolvez l'inéquation  $2x - 6 > 4$ .

$$2x > 10 \text{ soit } x > 5.$$

- A21 Factorisez l'expression littérale  $x^2 - 9$ .

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3).$$

- c. Soit A l'événement : « le jeton choisi porte le numéro 3 ou un numéro multiple de 3 ».

Écrivez l'événement A sous forme d'un ensemble.

$$A = \{3 ; 6 ; 9\}.$$

- d. Calculez la probabilité de l'événement A.

$$P(A) = P(3) + P(6) + P(9) = 3 \times \frac{1}{10} = \frac{3}{10}.$$

# Exercices

- 2** ★ On lance un dé truqué à 6 faces numérotées de 1 à 6. Les probabilités de tirage de chacune des faces sont données dans le tableau ci-dessous.

Face	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,17	0,2	0,11	0,23	0,14	0,15

a. Soit S l'événement : « obtenir le nombre 6 ».

Définissez par une phrase l'événement  $\bar{S}$ .

$\bar{S}$  est l'événement « obtenir un nombre autre que le 6 ».

b. Calculez  $P(\bar{S})$  de deux manières différentes.

$$P(\bar{S}) = 1 - P(S) = 1 - 0,15 = 0,85.$$

$$P(\bar{S}) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) = 0,85.$$

- 3** ★★ Dans une boutique de matériel informatique d'occasion, 35 souris sont disponibles à la vente.

Parmi elles, 12 sont filaires, 15 sont sans fil Bluetooth, les autres sont sans fil à infrarouge. Un client achète une souris.

On considère les événements F : « le client achète une souris filaire » ; B : « le client achète une souris Bluetooth » et I : « le client achète une souris à infrarouge ».

a. Calculez  $P(B)$ .

$$P(B) = \frac{15}{35} = \frac{3}{7} \approx 0,429.$$

b. Calculez  $P(I)$ .

$$P(I) = \frac{35 - 12 - 15}{35} = \frac{8}{35} \approx 0,229.$$

c. Les événements F et B sont-ils incompatibles ? Justifiez.

Oui les événements F et B sont incompatibles car une souris ne peut être filaire et Bluetooth.

d. Calculez  $P(F)$ .

$$P(F) = \frac{12}{35} \approx 0,343.$$

e. Calculez  $P(\bar{F})$ .

$$P(\bar{F}) = 1 - 0,343 = 0,657.$$

## Probabilité de la réunion et de l'intersection de deux événements

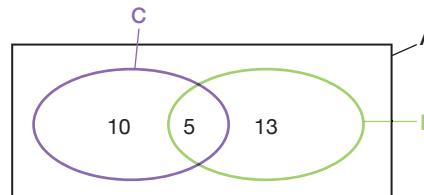
- 4** ★ On considère deux événements A et B, tels que  $P(A) = 0,45$  ;  $P(B) = 0,33$  et  $P(A \cap B) = 0,15$ .

Calculez  $P(A \cup B)$ .

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = 0,45 + 0,33 - 0,15 = 0,63.$$

- 5** ★ Soit C et D deux événements dont les effectifs sont donnés dans le diagramme ci-dessous.



a. Donnez le nombre d'éléments de A.

$$10 + 5 + 13 = 28.$$

b. Calculez la probabilité de l'événement C.

$$P(C) = \frac{10 + 5}{28} = \frac{15}{28} \approx 0,536.$$

c. Calculez la probabilité de l'événement D.

$$P(D) = \frac{13 + 5}{28} = \frac{18}{28} \approx 0,643.$$

d. Calculez la probabilité de l'événement  $C \cap D$ .

$$P(C \cap D) = \frac{5}{28} \approx 0,179.$$

e. Construisez le tableau croisé des effectifs correspondant à cette situation.

	C	$\bar{C}$	Total
D	5	13	18
$\bar{D}$	10	0	10
Total	15	13	28

- 6** ★★ Soit E et F deux événements dont les effectifs sont donnés dans le tableau croisé suivant.

	E	$\bar{E}$	Total
F	12	31	43
$\bar{F}$	37	20	57
Total	49	51	100

a. Complétez les cases vides du tableau.

$$b. \text{ Calculez } P(\bar{F}). \quad P(\bar{F}) = \frac{57}{100} = 0,57.$$

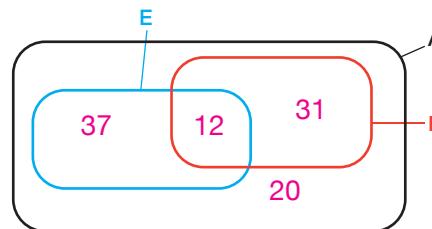
$$c. \text{ Calculez } P(E). \quad P(E) = \frac{49}{100} = 0,49.$$

$$d. \text{ Calculez } P(\bar{F} \cap E). \quad P(\bar{F} \cap E) = \frac{37}{100} = 0,37.$$

e. Calculez  $P(\bar{F} \cup E)$ .

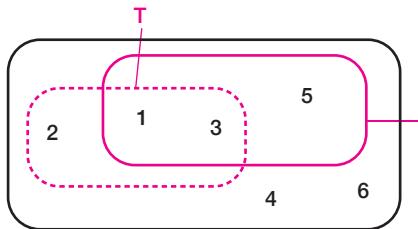
$$P(\bar{F} \cup E) = \frac{57 + 49 - 37}{100} = 0,69.$$

f. Complétez le diagramme des effectifs correspondant au tableau.



- 7** ★★ On lance un dé à 6 faces non truqué. On considère les événements I : « obtenir un nombre impair » et T : « obtenir un nombre inférieur ou égal à 3 ».

a. Identifiez sur le diagramme les éléments appartenant à chacun des événements I et T en utilisant 2 couleurs différentes.



b. Complétez.

$$I = \{1 ; 3 ; 5\} ; T = \{1 ; 2 ; 3\} ; I \cap T = \{1 ; 3\}$$

c. Calculez  $P(I \cap T)$ .

$$P(I \cap T) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

d. Calculez  $P(I \cup T)$ .

$$P(I \cup T) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

e. Simulez 50 lancers sur votre calculatrice et comparez les résultats obtenus avec vos réponses précédentes.

Coup de pouce

Voir savoir-faire 2 p. 27

## Probabilité conditionnelle

- 8** ★ On considère deux événements A et B, tels que  $P(A) = \frac{1}{3}$ ,  $P(B) = \frac{1}{4}$  et  $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ . Calculez  $P_A(B)$ .

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/6}{1/3} = \frac{1}{2}$$

- 9** ★ Un sac contient 10 boules rouges numérotées de 1 à 10 et 5 boules vertes numérotées de 1 à 5. On tire au hasard une boule du sac.

a. Calculez la probabilité de tirer un numéro 3.

$$\frac{2}{15} \approx 0,133$$

b. Sachant que la boule est rouge, déterminez la probabilité de tirer le numéro 3.

$$\frac{1}{10} = 0,1$$

c. Sachant que la boule est verte, déterminez la probabilité de tirer le numéro 3.

$$\frac{1}{5} = 0,2$$

- 10** ★ On considère deux événements C et D, tels que  $P(C) = 0,15$ ,  $P(D) = 0,32$  et  $P(C \cup D) = 0,4$ .

a. Calculez  $P(C \cap D)$ .

$$P(C \cap D) = 0,15 + 0,32 - 0,4 = 0,07$$

b. Calculez  $P_D(C)$ .

$$P_D(C) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{0,07}{0,32} = \frac{7}{32}$$

c. Calculez  $P_C(D)$ .

$$P_C(D) = \frac{P(C \cap D)}{P(C)} = \frac{0,07}{0,15} = \frac{7}{15}$$

- 11** ★★ Une boutique de prêt à porter pour homme propose à la vente différents produits tels que des pantalons, des pulls et des chemises.

Au cours de la semaine, 450 clients n'ont acheté qu'un seul article et ont réglé leur achat en espèces ou carte bancaire.



Voici le tableau de répartition des achats.

	Pantalon	Pull	Chemise
Carte bancaire	89	189	76
Espèces	32	52	12

On choisit un client au hasard parmi les 450.

a. Calculez la probabilité que le client ait acheté un pull.

$$\frac{189 + 52}{450} = \frac{241}{450} \approx 0,536$$

b. Calculez la probabilité que le client ait payé en espèces.

$$\frac{32 + 52 + 12}{450} = \frac{96}{450} \approx 0,213$$

c. Calculez la probabilité que ce client ait acheté un pull sachant qu'il a payé en carte bancaire.

$$\frac{189}{89 + 189 + 76} = \frac{189}{354} \approx 0,534$$

d. Sachant que le client a acheté une chemise, calculez la probabilité qu'il ait payé en espèces.

$$\frac{12}{76 + 12} = \frac{12}{88} \approx 0,136$$

# Problèmes

- 12** ★★ Une étude portant sur la recharge des véhicules électriques indique que 10 % des recharges sont effectuées sur des bornes publiques. Dans les autres cas, la recharge s'effectue chez des particuliers.

Il existe deux types de recharge : la recharge standard et la recharge accélérée. Les recharges standards représentent 25 % des recharges effectuées sur des bornes publiques et 95 % des recharges effectuées chez les particuliers.



On choisit au hasard un véhicule électrique qui vient d'être rechargé et on considère les événements suivants : U : « la recharge a été effectuée sur une borne publique » et S : « la recharge a été effectuée de façon standard ».

1. En utilisant les données de l'énoncé, complétez le tableau croisé ci-dessous.

	S	$\bar{S}$	Total
U	2,5	7,5	10
$\bar{U}$	85,5	4,5	90
Total	88	12	100

2. Définissez par une phrase l'événement  $\bar{S}$ .

$\bar{S}$  est l'événement « la recharge a été effectuée de façon accélérée ».

3. Calculez  $P(\bar{S})$ .

$$P(\bar{S}) = \frac{12}{100} = 12\% = 0,12.$$

4. Le véhicule a été rechargé de façon accélérée, calculez la probabilité que la recharge ait été effectuée sur une borne publique.

$$P_{\bar{S}}(U) = \frac{7,5}{12} = 0,625.$$

5. Le véhicule a été rechargé de façon standard, calculez la probabilité que la recharge ait été effectuée sur une borne publique.

$$P_S(U) = \frac{2,5}{88} \approx 0,028.$$

- 13** ★★ Les 300 employés d'un immeuble à trois étages ont été interrogés sur leur habitude concernant l'utilisation de l'ascenseur.

L'enquête a montré que 225 employés utilisent l'ascenseur. Parmi ceux-ci, 50 vont au 1<sup>er</sup> étage, 75 vont au 2<sup>e</sup> étage, les autres vont au 3<sup>e</sup> étage. Parmi ceux qui utilisent les escaliers, 1/3 va au 2<sup>e</sup> étage, les autres vont au 1<sup>er</sup> étage.

On choisit un employé au hasard dans l'immeuble. Soit les événements

$N_1$  : « l'employé va au 1<sup>er</sup> étage » ;

$N_2$  : « l'employé va au 2<sup>e</sup> étage » ;

$N_3$  : « l'employé va au 3<sup>e</sup> étage » ;

A : « l'employé emprunte l'ascenseur ».

1. Traduisez l'énoncé à l'aide du tableau croisé.

	$N_1$	$N_2$	$N_3$	Total
A	50	75	100	225
$\bar{A}$	50	25	0	75
Total	100	100	100	300

2. Montrez que les événements  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_3$  sont équiprobables.

$$P(N_1) = P(N_2) = P(N_3) = \frac{100}{300} = \frac{1}{3}.$$

Donc les 3 événements sont équiprobables.

3. Déterminez la probabilité que l'employé choisi prenne l'ascenseur sachant qu'il va au 2<sup>e</sup> étage.

$$P_{N_2}(A) = \frac{75}{100}.$$

- 14** ★★ Dans une auto-école, 20 % des personnes qui se sont présentées à l'épreuve du permis de conduire avait suivi la filière « conduite accompagnée ». Parmi ces candidats, 75 % ont été reçus à l'examen. Pour les candidats n'ayant pas suivi la filière « conduite accompagnée », le taux de réussite était de 65 %. On choisit un candidat au hasard.

Déterminez, par la méthode de votre choix, la probabilité que ce candidat soit reçu à l'examen du permis de conduire.

	CA	$\bar{CA}$	Total
R	15	52	67
$\bar{R}$	5	28	33
Total	20	80	100

La probabilité que le candidat soit reçu est

de 67 %.

- 15** ★★★ Une boîte et son couvercle sont fabriqués sur une chaîne de production. Un contrôle qualité a permis de montrer qu'une boîte sur 50 et un couvercle sur 80 sont défectueux.

On choisit au hasard 1 kit complet comprenant une boîte et son couvercle.

On considère les événements B : « la boîte est défectueuse » et C : « le couvercle est défectueux ».

**1.** Ouvrez une feuille de tableur et saisissez dans la case A1 la formule : `=ENT(ALEA() + 1/50)`.

Recopiez la formule jusqu'à la case A10000. Cette formule permet de simuler le contrôle de 10 000 boîtes.

**2.** Saisissez dans la case B1 la formule permettant de simuler le contrôle de 10 000 couvercles.

Recopiez-la jusqu'à la case B10000.

**3.** Dans la case C1, saisissez la formule permettant de déterminer le nombre d'éléments défectueux dans le kit couvercle + boîte.

Recopiez-la jusqu'à la case C10000.

**4.** De E1 à F5, recopiez l'extrait de feuille de calcul ci-dessous.

E	F
Evenement	Effectif
B	=NB.SI(A1:A10000;1)
C	=NB.SI(B1:B10000;1)
B et C	=NB.SI(C1:C10000;2)
B ou C	=F2+F3-F4

### Coup de pouce

`=NB.SI(A1:A10000;1)` affiche le nombre de 1 dans les cellules de A1 à A10000.

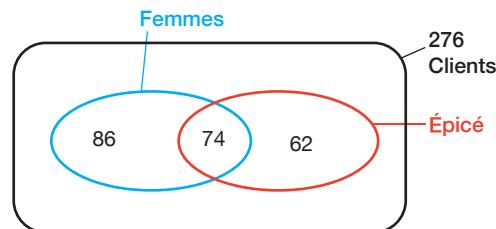
**5.** Simulez différents échantillons en appuyant sur la touche F9 du clavier. Regroupez quelques résultats dans le tableau ci-dessous.

Échantillon	1	2	3	4	5
Effectif de l'événement B U C	358	324	347	336	306

**6.** Déterminez une valeur approximative, arrondie à 0,01 près, de la probabilité de choisir un kit contenant au moins un article défectueux.

La probabilité d'avoir un article défectueux dans le kit est de 0,03 environ.

- 16** ★★★ Dans le restaurant d'application d'un lycée hôtelier, on a mené une étude statistique pendant la semaine asiatique sur les habitudes des clients. L'enquête a mené au diagramme des effectifs suivant.



On choisit un client au hasard et on note les événements F : « le client est une femme » et E : « le client préfère manger épicer ».

### Problématique

Est-il vrai de dire que la majorité des clients qui préfèrent manger épicer sont des hommes ?

$$P_E(F) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{74/276}{(74+62)/276} = \frac{74}{136} \approx 0,544.$$

Environ 54 % des clients qui préfèrent manger épicer sont des femmes. Il est donc faux de dire que la majorité des clients qui préfèrent manger épicer sont des hommes.

- 17** ★★★ Dans un lycée, le taux de réussite à l'examen du baccalauréat est de 92 %. 16 % des élèves ont suivi le cursus section européenne au cours de leur formation. 14 % des candidats ont suivi le cursus section européenne et ont obtenu leur baccalauréat.

### Problématique

Un candidat a-t-il plus de chance de réussir au baccalauréat en suivant le cursus section européenne ?

	E	Ē	Total
B	14	78	92
Ē	2	6	8
Total	16	84	100

$$\frac{14}{16} = 0,875 \text{ et } \frac{78}{84} \approx 0,929.$$

Le taux de réussite est plus élevé chez les candidats n'ayant pas suivi le cursus section européenne.

# Évaluation

Compétences	S'approprier				Analyser Raisonner				Réaliser				Valider				Communiquer			
Questions	1 – 2 – 3 – 4a				2 – 4b				3 – 4c – 5b				6				4b – 5a – 6			
Niveau d'acquisition	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4

## Situation

Au cours d'un contrôle qualité sur une chaîne de conditionnement, on constate que sur 1 000 pots de yaourt, 953 n'ont aucun défaut ; 2 % présentent un défaut d'opercule noté O et 4 % présentent un défaut de datage du pot noté D.

Une intervention de maintenance est nécessaire :

- si plus de 10 % des pots présentent le défaut O ou le défaut D
- ou
- si parmi les pots qui présentent le défaut D, plus de 10 % présentent aussi le défaut O.



## Problématique

Une opération de maintenance est-elle nécessaire après ce contrôle qualité ?

On choisit au hasard un pot de yaourt de cet échantillon de 1 000 pots. On définit les événements suivants : O : « le pot de yaourt présente le défaut O » et D : « le pot de yaourt présente le défaut D ».

- 1** **S'approprier** Déterminez le nombre de pots de yaourt qui présentent le défaut O.

$$2 \times 1\,000 \div 100 = 20.$$

- 2** **S'approprier Analyser/Raisonner** Complétez le tableau croisé suivant.

	O	$\bar{O}$	Total
D	13	27	40
$\bar{D}$	7	953	960
Total	20	980	1 000

- 3** **S'approprier Réaliser** Définissez par une phrase l'événement  $D \cap O$ , puis calculez sa probabilité.

L'événement  $D \cap O$  est l'événement : « le pot de yaourt présente le défaut O et le défaut D ».

$$P(D \cap O) = \frac{13}{1\,000}.$$

- 4** a. **S'approprier** Définissez par une phrase l'événement  $D \cup O$ .

L'événement  $D \cup O$  est l'événement : « le pot de yaourt choisi présente le défaut O ou le défaut D ».

- b. **Analyser/Raisonner Communiquer** Proposez oralement à votre professeur une méthode permettant de calculer la probabilité de cet événement.

- c. **Réaliser** Calculez  $P(D \cup O)$ .

$$P(D \cup O) = P(D) + P(O) - P(D \cap O) = \frac{40}{1\,000} + \frac{20}{1\,000} - \frac{13}{1\,000} = \frac{47}{1\,000} = 4,7\%.$$

- 5** a. **Communiquer** Donnez la notation utilisée pour écrire la probabilité que le pot de yaourt choisi présente le défaut O sachant qu'il présente le défaut D.

$$P_D(O).$$

- b. **Réaliser** Calculez cette probabilité.

$$P_D(O) = \frac{13/1\,000}{40/1\,000} = \frac{13}{40} = 32,5\%.$$

- 6** **Valider Communiquer** Utilisez les réponses données aux questions 4c et 5b pour répondre à la problématique.

La première condition n'est pas vérifiée, la seconde condition est vérifiée. Une opération de maintenance est donc nécessaire.

# Suites numériques

3

Capacités	Activités
• Générer par le calcul ou à l'aide d'un outil numérique, les termes de différentes suites.	Activité 1
• Étudier le sens de variation d'une suite donnée par $u_n = f(n)$ dans des cas simples ou d'une suite arithmétique à l'aide de sa raison.	Activités 2 et 3
• Reconnaître les premiers termes d'une suite arithmétique.	
• Calculer un terme de rang donné d'une suite arithmétique définie par son premier terme et par une relation de récurrence ou par l'expression du terme de rang $n$ .	Activité 2
• Calculer la somme des $n$ premiers termes d'une suite arithmétique avec ou sans outils numériques.	
• Réaliser et exploiter une représentation graphique du nuage de points $(n ; u_n)$ .	Activité 3

## Je m'échauffe !

### Activité 1 p. 36

1. Complétez les suites logiques suivantes :

a. 1 • 3 • 5 • 7 • 9 • ...

La valeur manquante est 11 (nombres impairs).

b. Z • Y • X • W • ...

C'est V qui vient après (alphabet à l'envers).

c. 0 • 1 • 4 • 9 • 16 • ...

La valeur manquante est 25 (carrés parfaits).

d. L • M • M • J • V • ...

C'est S (lundi – mardi – mercredi – ...).

2. Lesquelles sont des suites numériques ?

Les suites a. et c. sont des suites numériques.

### Activité 2 p. 37

Soit la suite définie par  $u_n = f(n) = 3n + 1$ .

a. Calculer  $f(2)$ .

$$f(2) = 3 \times 2 + 1 = 6 + 1 = 7.$$

b. Calculer  $u_6$  et  $u_{10}$ .

$$u_6 = f(6) = 3 \times 6 + 1 = 19.$$

$$u_{10} = f(10) = 3 \times 10 + 1 = 31.$$



### Activité 3 p. 38

Soit  $f$  la fonction affine définie par  $f(x) = -2x + 6$  et  $(D)$  sa droite représentative.

a. Calculez l'image de 3 par la fonction  $f$ .

$$f(3) = -2 \times 3 + 6 = -6 + 6 = 0.$$

b. Le coefficient directeur de  $(D)$  est égal à  $-2$ .

c. Cochez la bonne réponse.

La fonction  $f$  est croissante.

La fonction  $f$  est décroissante.

# Activité

1

## Définir une suite numérique

### SITUATION . Un pari perdu d'avance...

Le 1<sup>er</sup> janvier, Rafaël et Hippolyte filment puis visionnent une vidéo de leurs exploits en VTT et font le pari suivant : ils espèrent qu'au moins 50 000 personnes auront vu leur vidéo au bout de 15 jours.

Pour cela, le lendemain, chacun d'eux va envoyer cette vidéo à deux copains différents et ils demanderont à ce que chaque copain envoie à son tour la vidéo à deux autres copains le jour suivant. Et ainsi de suite...

#### Problématique

Si tous les copains respectent la règle, Rafaël et Hippolyte peuvent-ils gagner leur pari ?



- 1 a. **S'approprier** Donnez le nombre de personnes qui ont vu la vidéo le premier jour (le 1<sup>er</sup> janvier).

Le premier jour (le 1<sup>er</sup> janvier), seuls Hippolyte et Rafaël ont vu la vidéo, donc 2 personnes.

- b. **S'approprier** Donnez le nombre de nouvelles personnes qui auront vu la vidéo le 2 janvier.

Le 2 janvier, il y aura 4 nouvelles personnes qui auront vu la vidéo (les 2 copains d'Hippolyte plus les 2 copains de Rafaël).

- 2 a. **Analyser/Raisonnez** On note  $u_1$  le nombre de personnes qui ont vu la vidéo le premier jour,  $u_2$  le nombre de nouvelles personnes qui ont vu la vidéo le deuxième jour et ainsi de suite.

Complétez le tableau ci-dessous :

$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$	$u_6$
2	4	8	16	32	64

- b. **Réaliser** **Valider** Complétez les égalités suivantes.  $u_1 = 2^1 \dots$ ;  $u_2 = 2^2 \dots$ ;  $u_3 = 2^3 \dots$ ;  $u_4 = 2^4 \dots$

Une **suite numérique** est une suite de nombres notés  $u_1, u_2, u_3, \dots$  appelés **termes**.

- c. **Valider** Cochez la bonne réponse.

Pour cette suite ( $u_n$ ), on peut écrire :   $u_n = 2 \times n$    $u_n = 2^n$    $u_n = 2 + n$

- d. **Valider** Rayez les mots inutiles : lorsque  $n$  augmente, les valeurs de  $u_n$  augmentent/diminuent. On dit alors que la suite ( $u_n$ ) est croissante/décroissante.

- 3 a. **Réaliser** Calculez la valeur de  $u_{15}$  avec votre calculatrice.  $u_{15} = 2^{15} = 32\,768$

- b. **Valider** **Communiquer** Déduisez-en le nombre de nouvelles personnes qui ont vu la vidéo le 15 janvier.

Il y a 32 768 personnes qui ont vu la vidéo le 15 janvier.

- 4 **Réaliser** [foucherconnect.fr/22mc13](http://foucherconnect.fr/22mc13) Ouvrez le fichier « C03\_36\_vidéo.xlsx ».

En utilisant les fonctionnalités du tableur, calculez la somme des personnes qui auront vu la vidéo au bout de 15 jours.

On tape = SOMME(C2 : C16) dans la cellule B17 et on obtient 65 534 personnes.

- 5 **Valider** **Communiquer** Répondez à la problématique.

65 534 > 50 000 donc oui, Hippolyte et Rafaël ont gagné leur pari, plus de 50 000 personnes au total auront vu la vidéo au bout de 15 jours.

# Activité 2

## Étudier une suite arithmétique

### SITUATION . Trouver le bon code pour sortir !!

Sylvie participe à un escape game. Sur la dernière porte on trouve 6 encarts avec les indications suivantes :



Sylvie comprend que les lettres sur les encarts sont des chiffres romains.

Pour déverrouiller cette dernière porte, il faut entrer un code de quatre lettres différentes qui correspond à la somme de toutes les valeurs (dont celles manquantes) qui apparaissent sur les encarts.

#### Problématique

Quel code à quatre lettres doit entrer Sylvie pour déverrouiller la porte ?

- 1** **S'approprier** À quelles valeurs correspondent chacune des lettres présentes sur la porte ?

Ce sont des chiffres romains : L correspond à 50, X correspond à 10, V correspond à 5 et I à 1.

- 2** **Réaliser** Complétez les 4 cases tramées roses de la deuxième ligne du tableau.

Nombres en chiffres romains	LXXXVI	LXXIX	LXXII	LXV	LVIII	LI
Nombres en chiffres arabes	86	79	72	65	58	51
Notation	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$	$u_6$

- 3** Les nombres en chiffres arabes obtenus forment une suite numérique.

- a. **S'approprier** Complétez la troisième ligne du tableau.

- b. **Analyser/Raisonner** **Réaliser** En étudiant  $u_2 - u_1$ ,  $u_3 - u_2$ , ... proposez une méthode pour déterminer  $u_4$  et  $u_5$  puis calculez-les et complétez les cases vides dans le tableau.

$$u_2 - u_1 = 79 - 86 = -7 ; u_3 - u_2 = 72 - 79 = -7 \text{ donc } u_4 = u_3 - 7 = 72 - 7 = 65 \text{ et } u_5 = u_4 - 7 = 65 - 7 = 58.$$

De plus,  $u_6 = u_5 - 7 = 58 - 7 = 51$  est vérifié. On a bien :  $u_4 = 65$  et  $u_5 = 58$ .

Dans une **suite arithmétique**, on obtient un terme en ajoutant au terme précédent une valeur constante (positive ou négative) appelée **raison** (notée  $r$ ). Cela s'écrit :  $u_{n+1} = u_n + r$ .

Une suite arithmétique est définie par son **premier terme** (noté  $u_1$  ou  $u_0$ ) et sa **raison** (notée  $r$ ).

- 4** **Valider** Cochez la bonne réponse.

- a. La suite  $(u_n)$  définie précédemment est une suite arithmétique :  Vrai  Faux  
 b. La raison de cette suite est :   $r = 7$    $r = -7$   
 c. Pour cette suite  $(u_n)$ , on peut écrire :   $u_{n+1} = u_n - 7$  avec  $u_1 = 86$    $u_{n+1} = u_n + 7$  avec  $u_1 = 86$

- 5** **Réaliser** La somme des  $n$  premiers termes d'une suite arithmétique est donnée par  $S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$ .

Calculez  $S_6$  :  $S_6 = \frac{6 \times (86 + 51)}{2} = 411$ . La somme des 6 termes est égale à 411.

On notera qu'en utilisant cette formule, on peut trouver la somme sans avoir trouvé  $u_4$  et  $u_5$ .

- 6** **Valider** **Communiquer** Répondez à la problématique.

La somme est égale à 411. On convertit en chiffres romains et cela donne CDXI.

Pour déverrouiller la porte, Sylvie doit donc entrer le code CDXI.

# Activité

## 3

# Représenter graphiquement une suite arithmétique

### SITUATION . Prêt ou pas ?

Sébastien qui est très sportif s'est lancé comme défi de participer dans 15 semaines à un « Iron Man ». Cette compétition extrêmement difficile associe trois disciplines : 3,8 km de natation, 180,2 km de vélo et 42,195 km de course à pied.



Il doit particulièrement s'entraîner pour l'épreuve de natation qui est son point faible.

Avant de commencer son premier entraînement, il nage 1,2 km sans difficulté. Il envisage alors de rajouter à chaque entraînement 3 longueurs supplémentaires de 25 m chacune et de s'entraîner 2 fois par semaine.

#### Problématique

Avec ce programme d'entraînement, Sébastien sera-t-il prêt à temps pour la compétition ?

- 1** a. **S'approprier** On note  $u_0$  la distance, en kilomètres, que nage facilement Sébastien avant de démarrer son programme d'entraînement. Complétez :  $u_0 = \underline{1,2}$

- b. **Analyser/Raisonner Réaliser** Calculez  $u_1$ , la distance que nagera Sébastien à la fin de sa première semaine d'entraînement.  $u_1 = \underline{1,2 + 2 \times 3 \times 0,025 = 1,2 + 0,15 = 1,35}$

- c. **Analyser/Raisonner Réaliser** De même, on note  $u_2$ , la distance que nagera Sébastien à la fin de sa deuxième semaine d'entraînement et ainsi de suite. Complétez le tableau ci-dessous.

$u_0$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$
1,2	1,35	1,5	1,65	1,8	1,95

- 2** **Réaliser** Représentez graphiquement les 6 premiers termes de la suite  $(u_n)$  dans le repère ci-contre.

- 3** **Valider** Cochez la bonne réponse.

$(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$  forment une suite arithmétique :  Vrai  Faux

Justifiez :  $u_5 - u_4 = 1,95 - 1,8 = 0,15 ; u_4 - u_3 = 1,8 - 1,65 = 0,15 ;$

$u_3 - u_2 = 1,65 - 1,5 = 0,15 ; u_2 - u_1 = 1,5 - 1,35 = 0,15$  et

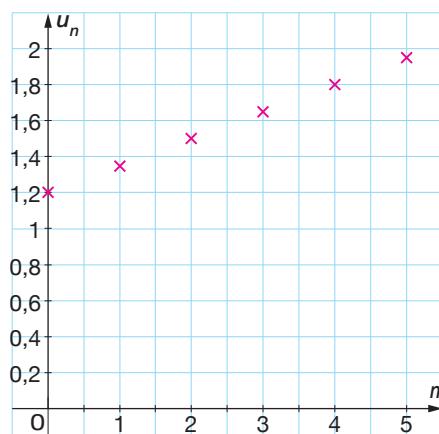
$u_1 - u_0 = 1,35 - 1,2 = 0,15$ . Donc oui,  $(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$  forment une suite

arithmétique  $(u_n)$  de premier terme  $u_0 = 1,2$  et de raison  $r = 0,15$ .

- 4** **Valider** Indiquez le type de fonction qui peut être associé à cette représentation ainsi que son sens de variation.

Les points sont alignés ; donc cette représentation peut être associée à une fonction affine.

Cette fonction affine est croissante (et on remarque que  $r > 0$ ).



- 5** **Analyser/Raisonner Réaliser** Déterminez le coefficient directeur de la droite qui joint les points du graphique.

On choisit 2 points consécutifs et on calcule la différence de leurs ordonnées :  $a = 0,15$ .

- 6** **Valider** Cochez la bonne réponse.

$u_n = 1,2 + n \times 0,075$       $u_n = 1,2 + n \times 0,15$       $u_n = 1,2 + (n - 1) \times 0,15$

- 7** **Réaliser** Calculez  $u_{15}$ .  $u_{15} = 1,2 + 15 \times 0,15 = 1,2 + 2,25 = 3,45$ .

- 8** **Communiquer** Répondez à la problématique.  $3,45 < 3,8$  donc non, Sébastien ne sera pas prêt.

On peut faire calculer aux élèves le nombre de semaines manquantes :  $u_{18} = 3,9 > 3,8$  et  $u_{17} = 3,75 < 3,8$ .



Utiliser l'automatisme  
A15 page 156

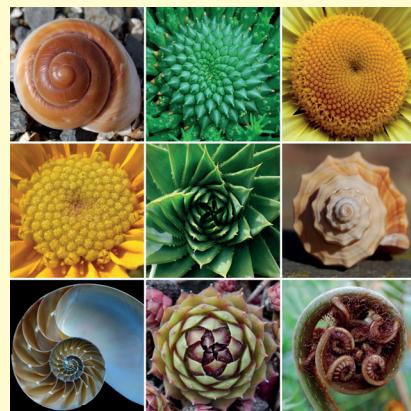


## SITUATION . Suite de Fibonacci et nombre d'or

La suite de Fibonacci est une suite de nombres entiers dont chaque terme représente la somme des deux termes précédents, et dont les deux premiers termes sont 1 puis 1.

Les 10 premiers termes de cette suite sont : 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 et 34.

Cette suite est célèbre car elle est liée au **nombre d'or** qui apparaît tout autour de nous dans la nature, au sein de nombreuses formes biologiques.



## Problématique

Comment trouver une approximation du nombre d'or avec la suite de Fibonacci ?

- 1 On note  $(u_n)$  la suite de Fibonacci. On a alors  $u_0 = 1$  ;  $u_1 = 1$  ;  $u_2 = 2$  ;  $u_3 = 3$  ;  $u_4 = 5$  et ainsi de suite.

On considère ensuite la suite  $(v_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :  $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ .

- a. Calculez  $v_0$  ,  $v_1$  ,  $v_2$  ,  $v_3$  et  $v_4$  (on arrondira à 0,01 lorsque cela sera nécessaire).

$$v_0 = \frac{u_1}{u_0} = \frac{1}{1} = 1 ; v_1 = \frac{u_2}{u_1} = \frac{2}{1} = 2 ; v_2 = \frac{u_3}{u_2} = \frac{3}{2} = 1,5 ; v_3 = \frac{u_4}{u_3} = \frac{5}{3} \approx 1,67 ; v_4 = \frac{u_5}{u_4} = \frac{8}{5} = 1,6.$$

- b. Vers quelle valeur les termes de la suite  $(v_n)$  semblent-ils se rapprocher ? Ils semblent se rapprocher de 1,6.

## LANGAGE PYTHON python™

- 2 On va utiliser le programme ci-contre en langage Python pour calculer les termes suivants de la suite  $(v_n)$ .

- a. Sans lancer le programme, complétez le tableau ci-dessous en indiquant les valeurs des variables a, b, c et v pour les premières valeurs de i.

i	a	b	c	v
	1	1		1
1	1	2	2	2
2	2	3	3	1,5

```

1 N=int(input("N ?"))
2 a=1
3 b=1
4 v=1
5 for i in range (1,N+1):
6     c=a+b
7     a=b
8     b=c
9     v=b/a
10    print("V",i,"=",round(v,5))

```

- b. À quoi correspond N dans ce programme ?

Il correspond au nombre de termes de la suite  $(v_n)$  que nous voulons obtenir.

- c. Ouvrez le fichier « C03\_39\_Fibonacci.py » et testez le programme avec N de plus en plus grand. De quelle valeur le nombre v se rapproche-t-il ? À partir de  $v_{14}$  toutes les valeurs de  $v_n$  sont arrondies à 1,618 03.

- d. Le nombre d'or est exactement égal à  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Proposez une réponse à la problématique.

Avec la calculatrice, on obtient :  $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618\ 03$ , ce qui est proche de la valeur vers laquelle semble se stabiliser la suite  $(v_n)$ . En faisant le quotient d'un terme de la suite de Fibonacci par celui qui le précède, on trouve donc bien une approximation du nombre d'or.

LEXIQUE	Instruction	Signification
python™	round(v,5)	Pour donner le résultat de v arrondi à 5 chiffres après la virgule.

## L'essentiel

## Définition d'une suite numérique

- Les nombres  $u_1, u_2, u_3, \dots$  rangés dans cet ordre constituent une **suite numérique**.
- Ces nombres réels sont les **termes** de la suite  $(u_n)$ . Leur **rang** (ou position) est indiqué en indice. On note  $u_n$  un terme quelconque,  $u_{n-1}$  le terme qui le précède et  $u_{n+1}$  le terme qui le suit.
- On peut définir certaines suites par une fonction de la façon suivante : pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = f(n)$ .
- On définit le **sens de variation** d'une suite  $(u_n)$  de la façon suivante :
  - $(u_n)$  est **croissante** si, pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} > u_n$  ;
  - $(u_n)$  est **décroissante** si, pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} < u_n$  ;
  - $(u_n)$  est **constante** ou **stationnaire** si, pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} = u_n$ .

**Exemple** Les nombres 2 ; -1 ; -4 et -7 forment une suite numérique.

On peut alors écrire  $u_{n+1} = u_n - 3$  avec  $u_0 = 2$  ou bien  $u_n = 2 - 3n$ .

Cette suite  $(u_n)$  est décroissante car  $u_{n+1} < u_n$  pour tout  $n$  (ici  $u_{n+1} - u_n = -3 < 0$ ).

## Étude d'une suite arithmétique

- Une **suite arithmétique** est définie par son premier terme et sa raison. Chaque terme, à partir du deuxième, est obtenu en ajoutant au précédent un même nombre, la **raison**, qui est notée  $r$ .
- Relation de récurrence** :  $u_{n+1} = u_n + r$  (où  $r \in \mathbb{R}$ )
- Expression du terme de rang  $n$**  :  $u_n = u_0 + nr$  ou  $u_n = u_1 + (n-1)r$  avec  $u_0$  ou  $u_1$  premiers termes de la suite.
- La **somme des  $n$  premiers termes** d'une suite arithmétique est donnée par la formule suivante :

$$S_n = \frac{n(u_0 + u_{n-1})}{2} \quad \text{ou} \quad S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$$

**Exemple** Soit la suite de nombres 1 ; 5 ; 9 ; 13 et 17. On note  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = 5$ ,  $u_3 = 9$ , ...

On constate que  $u_2 - u_1 = 5 - 1 = 4$ ,  $u_3 - u_2 = 9 - 5 = 4$ ,  $u_4 - u_3 = 13 - 9 = 4$  et  $u_5 - u_4 = 17 - 13 = 4$ .

Toutes les différences sont égales donc la suite est arithmétique de raison  $r = 4$  et de premier terme  $u_1 = 1$ .

La relation de récurrence s'écrit :  $u_{n+1} = u_n + 4$  et l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  est

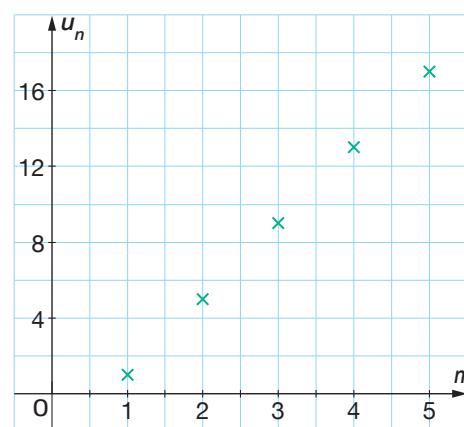
$$u_n = 1 + (n-1) \times 4.$$

$$\text{La somme des 5 premiers termes de cette suite est : } S_5 = \frac{5 \times (u_1 + u_5)}{2} = \frac{5 \times (1 + 17)}{2} = 45.$$

## Représentation graphique d'une suite

- La **représentation graphique** d'une suite est l'ensemble des points de coordonnées  $(n ; u_n)$ .
- Pour une suite arithmétique de raison  $r$ , les points de coordonnées  $(n ; u_n)$  sont alignés sur une droite de coefficient directeur égal à  $r$ .
- Pour déterminer le **sens de variation** d'une suite arithmétique, on s'intéresse au signe de  $r$  :
  - si  $r > 0$ , la suite est **croissante** ;
  - si  $r < 0$ , la suite est **décroissante** ;
  - si  $r = 0$ , la suite est **constante**.

**Exemple** On reprend la suite de nombres 1 ; 5 ; 9 ; 13 et 17. La représentation graphique de cette suite est un ensemble de 5 points alignés sur une droite de coefficient directeur égal à 4. Puisque  $r = 4 > 0$ , alors cette suite arithmétique est croissante.



## Savoir-faire

### Savoir-faire 1 Déterminer si une suite est arithmétique ou pas

Soit une suite  $(u_n)$  constituée des termes suivants dans cet ordre 3,4 ● 5,1 ● 6,8 ● 8,5 ● 10,2.  
Déterminez si cette suite est arithmétique et, si oui, donnez son premier terme et sa raison.

#### RÉSOLUTION

- On a ici  $u_0 = 3,4$ .
- On calcule toutes les différences  $u_{n+1} - u_n$  entre deux termes consécutifs :
 
$$u_1 - u_0 = 5,1 - 3,4 = 1,7 ; u_2 - u_1 = 6,8 - 5,1 = 1,7 ;$$

$$u_3 - u_2 = 8,5 - 6,8 = 1,7 ; u_4 - u_3 = 10,2 - 8,5 = 1,7.$$
- Tous les résultats sont identiques (égaux à 1,7) donc la suite  $(u_n)$  est arithmétique de premier terme  $u_0 = 3,4$  et de raison  $r = 1,7$ .

#### MÉTHODE

- Repérer le premier terme de la suite (on peut le noter  $u_0$  ou  $u_1$ ).
- Calculer toutes les différences  $u_{n+1} - u_n$  entre deux termes consécutifs.
- Comparer les résultats obtenus :
  - si les différences sont toutes identiques (égales à  $r$ ), la suite est arithmétique de raison  $r$  et de premier terme  $u_0$  ou  $u_1$ .
  - si les différences ne sont pas toutes identiques, alors la suite n'est pas arithmétique.

### Savoir-faire 2 Générer des suites numériques à l'aide d'une calculatrice graphique

Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = f(n) = n^2 + 4$ .

Calculez les valeurs des premiers termes de cette suite afin de déterminer à partir de quelle valeur de  $n$  on a  $u_n > 180$ .

#### TUTO CALCULATRICE

Afficher le tableau de valeurs d'une suite définie par  $u_n = f(n)$



foucherconnect.fr / 22mc15

Casio	Numworks	TI
<b>Pour saisir l'expression de la suite définie en fonction de <math>n</math></b>		
		 Entrer 0 comme valeur nMin puis X, T, 0, n, x^2, +, 4, enter
<b>Pour régler les paramètres de la table : début, fin, pas = 1</b>		
<b>F5 SET</b> Start : 0, End : 20, Step : 1	<b>Tableau</b> OK Régler l'intervalle OK Début 0, fin 20, Pas 1	<b>2nde fenêtre</b> DébutTbl = 0, ΔTbl = 1
<b>Pour afficher le tableau de valeurs</b>		
<b>EXE</b> puis <b>F6 TABLE</b>	<b>Valider</b> OK	<b>2nde graphe</b>

Chercher dans la deuxième colonne la première valeur qui dépasse la valeur donnée et relever la valeur du rang correspondant dans la première colonne. Conclure en donnant la valeur de  $n$ .

Conclusion : $u_n > 180$ pour $n > 14$ .		

# Accompagnement personnalisé



## J'utilise le vocabulaire approprié

### 1 Complétez le texte avec les expressions proposées.

(Certaines propositions peuvent ne pas être utilisées ou être utilisées plusieurs fois.)

suite numérique ● suite arithmétique ● alignés ● relation de récurrence ● précédent ● suivant  
● décroissante ● raison ● croissante

- a. La relation  $u_{n+1} = u_n + r$  est une relation de récurrence : chaque terme est défini par rapport au précédent.
- b. Pour déterminer le sens de variation d'une suite arithmétique, on s'intéresse au signe de sa raison :
- si la raison est positive, alors la suite est croissante ;
  - si la raison est négative, alors la suite est décroissante .
- c. Une suite arithmétique est représentée graphiquement par des points alignés .



## Je revois un point important

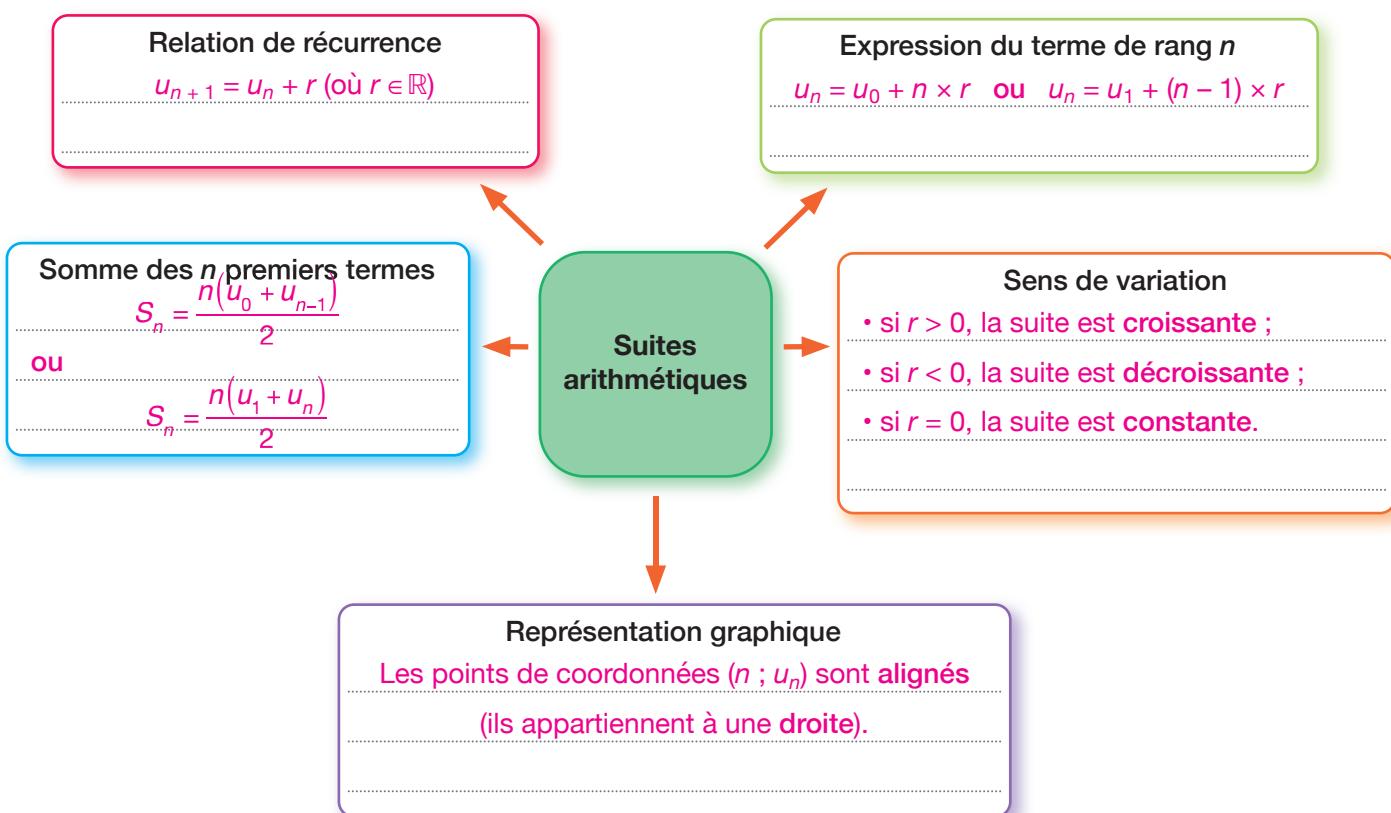
### 2 Calculez le 45<sup>e</sup> terme d'une suite arithmétique de premier terme $u_1 = -4$ et de raison égale à 12.

- On identifie le premier terme et la raison :  $u_1 = -4$  et  $r = 12$
- On détermine l'expression du terme de rang  $n$  :  $u_n = u_1 + (n - 1) \times r = -4 + (n - 1) \times 12$
- On applique cette formule pour le rang cherché :  
ici  $n = 45$  donc  $u_{45} = -4 + (45 - 1) \times 12 = -4 + 44 \times 12 = 524$ .



## Je mémorise

### 3 Complétez ce document de synthèse sur les suites arithmétiques ou construisez votre propre carte mentale. > [Je fais le point page 40](#)



## AUTOMATISMES

Sans calculatrice ni brouillon, répondez aux 3 questions du rituel indiqué par votre professeur.  
Votre réponse est juste ? Bravo ! Cochez la case de l'automatisme correspondant.

### Rituel 1

A20 Calculez le volume d'un cube de 6 cm de côté.  
 $6 \times 6 = 36$  et  $36 \times 6 = 216$  ou bien  $6^3 = 216$ .

Le cube a un volume de 216 cm<sup>3</sup>.

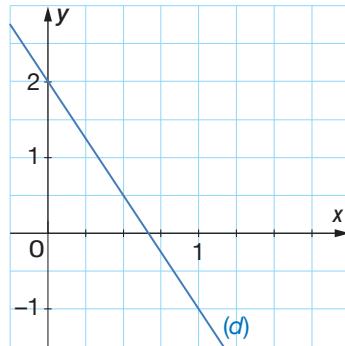
A21 Sachant que  $121 = 11^2$ , factorisez l'expression littérale  $x^2 - 121$ .

$$x^2 - 121 = (x - 11)(x + 11).$$

A13 Déterminez graphiquement le coefficient directeur de la droite ( $d$ ).

Le coefficient directeur de la droite ( $d$ ) est :

$$a = -3.$$



### Rituel 2

A1 Calculez la probabilité de tirer une dame rouge dans un jeu de 32 cartes.

$$p = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}.$$

A8 Déterminez l'expression littérale de la fonction linéaire  $f$  qui modélise la situation de proportionnalité suivante.

$x$	0,2	3	12
$f(x)$	0,15	2,25	9

$$\frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0,75 \text{ donc } f(x) = 0,75x \text{ ou } f(x) = \frac{3}{4}x.$$

A12 Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = 4x - 5$ . Calculez l'ordonnée du point M situé sur la courbe représentative de  $f$  qui a pour abscisse  $x = -8$ .

$$f(-8) = 4 \times (-8) - 5 = -32 - 5 = -37.$$

### Rituel 3

A16 Calculez l'intérêt simple perçu pour le placement d'un capital de 3 000 € au taux annuel de 2 % pendant 6 mois.

$$3\ 000 \times \frac{2}{100} = 60 \text{ et } \frac{60}{2} = 30.$$

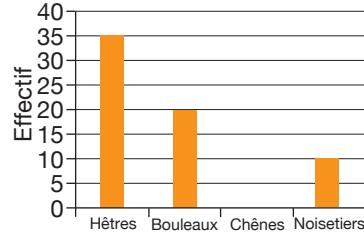
L'intérêt perçu est de 30 €.

A6 Résolvez l'équation  $-2x + 3 = 27$ .

$$-2x = 27 - 3 \Leftrightarrow -2x = 24 \Leftrightarrow x = \frac{24}{-2} \Leftrightarrow x = -12$$

A3 Un petit bois compte 80 arbres.

Complétez le tableau en utilisant le diagramme en bâtons incomplet ci-contre.



Espèces	Hêtres	Bouleaux	Chênes	Noisetiers
Effectifs	35	20	15	10

### Rituel 4

A5 Calculez la moyenne de la série de températures suivantes :

$$13^\circ\text{C} \bullet 7^\circ\text{C} \bullet -3^\circ\text{C} \bullet 5^\circ\text{C} \bullet 8^\circ\text{C}$$

$$13 + 7 + (-3) + 5 + 8 = 30 \text{ et } 30 \div 5 = 6.$$

La température moyenne est de 6 °C.

A23 Développez  $(x + 2)(x - 3)$ .

$$(x + 2)(x - 3) = x \times x - x \times 3 + 2 \times x - 2 \times 3$$

$$\text{donc } (x + 2)(x - 3) = x^2 - 3x + 2x - 6 = x^2 - x - 6.$$

A14 Indiquez si les droites ( $d_1$ ) :  $y = 3x - 2$  et ( $d_2$ ) :  $y = 6x - 2$  sont parallèles.

Les 2 coefficients directeurs ne sont pas égaux

donc les droites ( $d_1$ ) et ( $d_2$ ) ne sont pas parallèles.

## Définition d'une suite numérique

- 1 ★ Les nombres 3 ; 7 ; 11 ; 15 et 19 forment une suite numérique.  
a. Si  $u_1 = 3$ , combien valent  $u_2$  et  $u_3$  ?  
Si  $u_1 = 3$  alors  $u_2 = 7$  et  $u_3 = 11$ .

b. À quel rang correspond la valeur 19 ?

Au rang 5. On note  $u_5 = 19$ .

c. Comment passe-t-on d'un terme au suivant ?  
En ajoutant 4 au terme précédent.

d. Donnez la relation qui lie  $u_{n+1}$  et  $u_n$  pour cette suite. On a donc  $u_{n+1} = u_n + 4$ .

**2** ★ Les nombres 40 ; 20 ; 10 ; 5 et 2,5 forment une suite numérique.

a. Si  $u_0 = 40$ , combien valent  $u_1$  et  $u_2$  ?

Si  $u_0 = 40$  alors  $u_1 = 20$  et  $u_2 = 10$ .

b. À quel rang correspond la valeur 2,5 ?

Au rang 4. On note  $u_4 = 2,5$ .

c. Comment passe-t-on d'un terme au suivant ?

En divisant le terme précédent par 2.

d. Donnez la relation qui lie  $u_{n+1}$  et  $u_n$  pour cette suite.

On a donc  $u_{n+1} = u_n \div 2$ .

**3** ★ Soit  $(u_n)$  une suite définie sur  $\mathbb{N}$  telle que  $u_n = -3n + 1$ .

a. Calculez  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ .

$u_1 = -3 \times 1 + 1 = -2$ ,  $u_2 = -3 \times 2 + 1 = -5$ ,

$u_3 = -3 \times 3 + 1 = -8$ .

b. Calculez  $u_{15}$ .  $u_{15} = -3 \times 15 + 1 = -44$ .



## TUTO CALCULATRICE

Afficher le tableau de valeurs  
d'une suite définie par  $u_n = f(n)$



foucherconnect.fr/22mc15

**4** ★ Soit  $(u_n)$  une suite définie sur  $\mathbb{N}$  telle que  $u_n = 3n^2 - 4n + 8$ .

a. Calculez  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ .

$u_1 = 3 \times 1^2 - 4 \times 1 + 8 = 7$ ,  $u_2 = 3 \times 2^2 - 4 \times 2 + 8$

donc  $u_2 = 12$  et  $u_3 = 3 \times 3^2 - 4 \times 3 + 8 = 23$ .

b. Calculez  $u_7$ .  $u_7 = 3 \times 7^2 - 4 \times 7 + 8 = 127$ .

c. Ouvrez une feuille de calcul dans un tableur et créez une colonne dans laquelle vous entrez les valeurs de  $n$ .

d. Affichez le tableau donnant  $u_n$  en fonction de  $n$  sur l'intervalle  $[1 ; 25]$ .

e. Donnez la valeur de  $u_{23}$ .

On lit  $u_{23} = 1\ 503$  (et  $u_{23} = 3 \times 23^2 - 4 \times 23 + 8$

$= 1\ 503$ .)

**5** ★★ Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_n = -4n + 2,5$ .

a. Donnez l'expression de  $u_{n+1}$  en fonction de  $n$ .

$u_{n+1} = -4(n+1) + 2,5 = -4n - 1,5$ .

b. Donnez l'expression de  $u_{n+1} - u_n$  en fonction de  $n$ .

$u_{n+1} - u_n = -4n - 1,5 - (-4n + 2,5) = -4 < 0$ .

c. Déduisez-en le sens de variation de  $(u_n)$ .

$-4 < 0$  donc pour tout  $n$  on a  $u_{n+1} < u_n$

alors la suite  $(u_n)$  est décroissante.

**6** ★★ Soit  $(v_n)$  la suite définie par  $v_n = 0,2n$ .

a. Donnez l'expression de  $v_{n+1}$  en fonction de  $v_n$ .

$v_{n+1} = 0,2(n+1) = 0,2n + 0,2$ .

b. Donnez l'expression de  $v_{n+1} - v_n$  en fonction de  $n$ .

$v_{n+1} - v_n = 0,2n + 0,2 - 0,2n = 0,2 > 0$ .

c. Déduisez-en le sens de variation de  $(v_n)$ .

$0,2 > 0$  donc la suite  $(v_n)$  est croissante.

## Étude d'une suite arithmétique

**7** ★ Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de raison 3,5 et de premier terme  $u_0 = -4$ .

Complétez le tableau suivant.

$n$	0	1	2	3	4
$u_n$	-4	-0,5	3	6,5	10

**8** ★★ Soit  $(v_n)$  une suite arithmétique de premier terme  $v_1 = 8$  et de raison  $r = 12,6$ .

a. Calculez  $v_2$ ,  $v_3$  et  $v_4$ .

$v_2 = v_1 + r = 8 + 12,6 = 20,6$ .

$v_3 = v_2 + r = 20,6 + 12,6 = 33,2$ .

$v_4 = v_3 + r = 33,2 + 12,6 = 45,8$ .

b. Donnez la relation de récurrence donnant  $v_{n+1}$  en fonction de  $v_n$ .  $v_{n+1} = v_n + 12,6$ .

c. Donnez l'expression de  $v_n$  en fonction de  $n$ .

$v_n = v_1 + (n-1) \times r = 8 + (n-1) \times 12,6$

donc  $v_n = 8 + 12,6n - 12,6 = 12,6n - 4,6$ .

d. Calculez  $v_{17}$ .

$v_{17} = 12,6 \times 17 - 4,6 = 209,6$ .

e. Vérifiez les résultats des questions a et d en utilisant un tableur ou votre calculatrice.

**9** ★★ Défi : parmi les expressions suivantes, soyez le premier à entourer toutes celles qui correspondent à des suites arithmétiques.



a.  $u_n = 4n - 7$

b.  $u_n = 2 - 3n$

c.  $u_n = 3n^2 + 1$

d.  $u_n = 37n$

e.  $u_n = n$

f.  $u_n = -2,5$

g.  $u_n = \frac{n}{10}$

h.  $u_n = \frac{10}{n}$

i.  $u_{n+1} = 0,2u_n$

j.  $u_{n+1} = 0,2 + u_n$

k.  $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$

l.  $u_{n+1} = \frac{1}{2} + u_n$

m.  $u_{n+1} = u_n - 3$

n.  $u_{n+1} = 1 - u_n$

- 10** ★ Parmi les suites suivantes, indiquez celles qui sont arithmétiques. Justifiez.

a.  $1 ; 4 ; 7 ; 10 ; 13$ .

$$4 - 1 = 7 - 4 = 10 - 7 = 13 - 10 = 3.$$

Toutes les différences sont égales

donc la suite est arithmétique de raison  $r = 3$ .

b.  $2 ; 0 ; -2 ; -4 ; -6$ .

$$0 - 2 = -2 - 0 = -4 - (-2) = -6 - (-4) = -2.$$

Toutes les différences sont égales

donc la suite est arithmétique de raison  $r = -2$ .

c.  $3 ; 4,25 ; 5,5 ; 6,75 ; 8$ .

$$4,25 - 3 = 5,5 - 4,25 = 6,75 - 5,5 = 8 - 6,75 = 1,25.$$

Toutes les différences sont égales

donc la suite est arithmétique de raison  $r = 1,25$ .

d.  $0 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16$ .

$$2 - 0 = 4 - 2 = 2 \text{ mais } 8 - 4 = 4.$$

Toutes les différences ne sont pas égales

donc la suite n'est pas arithmétique.

- 11** ★★ Parmi les suites suivantes, indiquez celles qui sont arithmétiques. Justifiez.

a.  $-2 ; -1,7 ; -1,4 ; -1,1 ; -0,7$ .

$$-1,7 - (-2) = 0,3 \text{ mais } -0,7 - (-1,1) = 0,4.$$

Toutes les différences ne sont pas égales donc

la suite n'est pas arithmétique.

b.  $1 ; \frac{3}{2} ; 2 ; \frac{5}{2} ; 3$ .

$$\frac{3}{2} - 1 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} - 2 = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}.$$

Toutes les différences sont égales donc la suite

est arithmétique de raison  $r = \frac{1}{2}$ .

c.  $\frac{1}{2} ; \frac{1}{5} ; \frac{1}{8} ; \frac{1}{11} ; \frac{1}{14}$ .

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{10} \text{ mais } \frac{1}{8} - \frac{1}{5} = -\frac{3}{40}.$$

Toutes les différences ne sont pas égales

donc la suite n'est pas arithmétique.

### Représentation graphique d'une suite

- 12** ★ a. Représentez graphiquement la suite suivante sur votre calculatrice :  $u_n = 35 + 1,25n$ .

### TUTO CALCULATRICE

Représenter graphiquement une suite arithmétique



toucheconnect.fr/22mc16

- b. Quelle est la différence entre cette représentation graphique et celle de la fonction affine  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  et d'expression  $f(x) = 1,25x + 35$  ?

Pour la suite, la représentation graphique

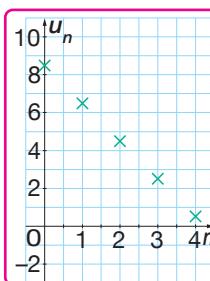
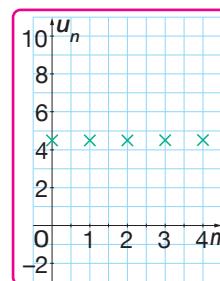
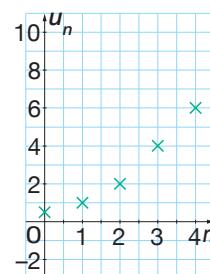
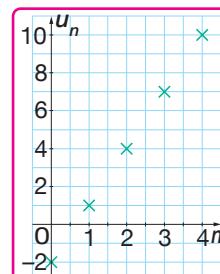
est l'ensemble des points de coordonnées

$(n ; 35 + 1,25n)$  alors que pour la fonction affine,

nous avons la droite en entier.

- 13** ★

Voici 4 représentations graphiques de suites numériques. Entourez celles qui correspondent à des suites arithmétiques et donnez leur raison à l'oral.



- 14** ★ Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de raison  $r = 12$  et de premier terme  $u_0 = -3$ .

a. Donnez le sens de variation de  $(u_n)$ . Justifiez.

La suite est arithmétique de raison  $r = 12 > 0$

donc elle est croissante.

b. Calculez  $u_9$ .

On calcule  $u_9$  :  $u_9 = u_0 + 9 \times r = (-3) + 9 \times 12$

$$u_9 = 105.$$

c. Calculez la somme des 10 premiers termes de cette suite arithmétique.

$$S_{10} = \frac{10 \times (u_0 + u_9)}{2} = \frac{10 \times (-3 + 105)}{2} = \frac{10 \times 102}{2}$$

$$S_{10} = 510.$$

# Problèmes

- 15 ★★ Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique telle que  $u_1 = 8$  et  $u_7 = 24,2$ . Calculez la raison de cette suite.

$$7 - 1 = 6 \text{ et } u_7 - u_1 = 24,2 - 8 = 16,2.$$

$$16,2 \div 6 = 2,7.$$

Donc la raison de  $(u_n)$  est égale à 2,7.

- 16 ★★ Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de raison  $r = -43$  telle que  $u_{30} = -743$ .

Calculez le premier terme  $u_0$  de cette suite.

$$30 \times (-43) = -1\,290 \text{ et } -743 - (-1\,290) = 547.$$

Donc cette suite arithmétique a pour premier terme  $u_0 = 547$ .

- 17 ★★ Au 1<sup>er</sup> janvier de chaque année, l'argent de poche mensuel de Noah augmente de 5 €.

On note  $u_0$  l'argent de poche de Noah l'année de ses 10 ans, puis  $u_1$  l'année de ses 11 ans et ainsi de suite. On a  $u_0 = 25$  €.

## Problématique

Quel sera le montant de l'argent de poche mensuel de Noah l'année de ses 18 ans ?

1. Comment sera noté le montant de l'argent de poche de Noah l'année de ses 18 ans ?

Il sera noté  $u_8$ .

2. Cette suite  $(u_n)$  est-elle arithmétique ? Si oui, donnez son premier terme et sa raison.

Chaque année le montant de l'argent de poche augmente de 5 € donc la suite est arithmétique de premier terme  $u_0 = 25$  et de raison  $r = 5$ .

3. Donnez l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

$$u_n = u_0 + n \times r = 25 + n \times 5.$$

4. Répondez à la problématique.

$$u_8 = 25 + 8 \times 5 = 65.$$

L'année de ses 18 ans, Noah aura 65 € d'argent de poche chaque mois.

- 18 ★★ Le maire d'une petite commune envisage la construction d'une nouvelle école.

En 2021, la commune comptait 853 habitants et sa population augmente chaque année de 35 personnes. La nouvelle école sera nécessaire lorsque la population dépassera les 1 300 habitants. Sa construction prendra 2 années.

## Problématique

En quelle année le maire devra-t-il démarrer les travaux de construction de cette nouvelle école ?



1. On note  $u_1$  la population de la commune en 2021,  $u_2$  la population de la commune en 2022 et ainsi de suite.

Cette suite  $(u_n)$  est-elle arithmétique ? Si oui, donnez son premier terme et sa raison.

Chaque année la population augmente

de 35 habitants donc la suite est arithmétique

de premier terme  $u_1 = 853$  et de raison  $r = 35$ .

2. Donnez l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ , puis calculez la population de la commune les années 2025 et 2030.

$$u_n = u_1 + (n - 1) \times r = 853 + (n - 1) \times 35 = 818 + 35n.$$

$$\text{Pour 2025 : } u_5 = 818 + 5 \times 35 = 993.$$

$$\text{Pour 2030 : } u_{10} = 818 + 10 \times 35 = 1\,168.$$

3. Utilisez les fonctionnalités d'un tableur ou votre calculatrice pour calculer le nombre d'habitants de la commune jusqu'en 2050.

## TUTO CALCULATRICE

Afficher le tableau de valeurs  
d'une suite définie par  $u_n = f(n)$



toucheconnect.fr/22mc15

4. Relevez le premier rang qui correspond à une population supérieure à 1 300 habitants.

$$\text{On a } u_{13} = 1\,273 \text{ et } u_{14} = 1\,308 \text{ donc } n = 14.$$

5. Répondez à la problématique.

$n = 14$  correspond à l'année 2034. On enlève les 2 années de construction, on obtient l'année 2032.

Le maire devra donc lancer la construction de l'école en 2032.

- 19** ★★ Une entreprise a produit 25 000 jeux la première année de fonctionnement.

Cette production a ensuite augmenté de 650 unités chaque année.

On peut modéliser les productions annuelles par une suite numérique ( $u_n$ ).

#### Problématique

Au bout de 5 années va-t-on dépasser les 130 000 jeux produits au total ?

1. Cette suite est-elle arithmétique ? Justifiez.

Chaque année la production augmente de

650 unités donc la suite est arithmétique de

premier terme  $u_1 = 25\ 000$  et de raison  $r = 650$ .

2. Donnez l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

$$u_n = u_1 + (n - 1) \times r = 25\ 000 + (n - 1) \times 650.$$

3. Proposez une méthode et répondez à la problématique.

$$u_5 = 25\ 000 + 4 \times 650 = 27\ 600.$$

$$S_5 = \frac{5 \times (u_1 + u_5)}{2} = \frac{5 \times (25\ 000 + 27\ 600)}{2} = 131\ 500$$

$$131\ 500 > 130\ 000.$$

Donc oui, au bout de 5 années, l'entreprise aura produit au total plus de 130 000 jeux.

- 20** ★★ Elliott a déposé 47 750 € sur le livret A de l'association dont il est le trésorier.

Quand un capital  $C_0$  est placé au taux annuel de  $t \%$ , le capital  $C_n$  disponible sur le compte au bout de  $n$  années est donné par la suite numérique de terme général :  $C_n = C_0 \times (1 + t)^n$  où  $t$  est l'écriture décimale du taux. Le taux d'intérêt annuel d'un livret A est égal à 0,5 %.

#### Problématique

Au bout de 10 années ce placement aura-t-il rapporté 2 500 € à l'association d'Elliott ?

1. Relevez dans l'énoncé les valeurs de  $C_0$  et de  $t$ .

$$C_0 = 47\ 750 \text{ € et } t = 0,5 \text{ \%}.$$

2. Calculez  $C_{10}$  en appliquant la formule donnée ci-dessus pour  $n = 10$ .

$$C_{10} = 47\ 750 \times \left(1 + \frac{0,5}{100}\right)^{10} = 50\ 191,94.$$

3. Répondez à la problématique.

$$50\ 191,94 - 47\ 750 = 2\ 441,94 < 2\ 500.$$

Donc non, le placement n'aura pas rapporté

2 500 € à l'association gérée par Elliott.

- 21** ★★★ Dans le corps humain, une bactérie pathogène peut donner naissance à 4 bactéries au bout d'une heure si les conditions sont favorables à son développement.



On note  $u_1$  le nombre de bactéries pathogènes à 1 h du matin ( $u_1 = 1$ ),  $u_2$  le nombre de nouvelles bactéries à 2 h et ainsi de suite.

#### Problématique

Si on part d'une seule bactérie pathogène à 1 h, est-ce que le nombre total de bactéries peut dépasser 5 000 000 dans notre corps à midi ?

1. Calculez  $u_2$ ,  $u_3$  et  $u_4$ .

$$u_2 = u_1 \times 4 = 1 \times 4 = 4 ; u_3 = u_2 \times 4 = 4 \times 4 = 16 ;$$

$$u_4 = u_3 \times 4 = 16 \times 4 = 64.$$

2. Cette suite est-elle arithmétique ? Justifiez.

$$u_2 - u_1 = 4 - 1 = 3 \text{ et } u_3 - u_2 = 16 - 4 = 12.$$

Toutes les différences ne sont pas égales donc la suite n'est pas arithmétique.

3. Utilisez les fonctionnalités d'un tableur pour calculer le nombre de bactéries au bout de 12 h.

On obtient avec le tableur  $u_{12} = 4\ 194\ 304$ .

4. Avec le tableur, calculez le nombre total de bactéries pathogènes présentes dans le corps au bout de 12 h.

On obtient :  $S_{12} = 5\ 592\ 405$ .

5. Répondez à la problématique.

$5\ 592\ 405 > 5\ 000\ 000$  donc oui, à midi le nombre de bactéries dans le corps dépassera 5 000 000 !

- 22** ★★★ On appelle suite de Syracuse une suite d'entiers naturels définie de la manière suivante : on part d'un nombre strictement positif ; s'il est pair on le divise par 2 ; s'il est impair on le multiplie par 3 et on ajoute 1. Et on répète l'opération.

Par exemple, à partir de 14, on construit la suite de nombres : 14 ; 7 ; 22 ; 11 ; 34 ; 17 ; 52 ; 26 ; ...

C'est la suite de Syracuse du nombre 14.

#### Problématique

Saurez-vous trouver les 8 premiers termes de la suite de Syracuse du nombre 29 ?

$$29 \times 3 + 1 = 88 \text{ puis } 88 \div 2 = 44 \text{ puis } 44 \div 2 = 22$$

$$\text{puis } 22 \div 2 = 11 \text{ puis } 11 \times 3 + 1 = 34 \text{ puis }$$

$$34 \div 2 = 17 \text{ puis } 17 \times 3 + 1 = 52.$$

On obtient : 29 ; 88 ; 44 ; 22 ; 11 ; 34 ; 17 ; 52.

# Évaluation

## Situation

Emie doit perdre un peu de poids avant sa compétition de judo pour rentrer dans la bonne catégorie. Pour cela, elle décide de limiter son apport journalier en calories afin de passer sous la barre des 1 800 kcal par jour (apport qu'elle s'est fixé).

Au bout de quelques jours d'efforts, elle décide de noter sa consommation quotidienne en kilocalories (kcal).

Compétences	S'approprier				Analyser Raisonner				Réaliser				Valider				Communiquer			
Questions	1b – 2c				1a – 2a				1a – 1b – 2a 3 – 5				2b – 2c – 2d – 4				4 – 5			
Niveau d'acquisition	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4

## Problématique

Si elle continue comme cela, à partir de quel jour la consommation quotidienne d'Emie passera-t-elle en dessous de la limite qu'elle s'est fixée ?

13 juillet	14 juillet	15 juillet	16 juillet	17 juillet
2 054 kcal	2 025 kcal	1 996 kcal	1 967 kcal	1 938 kcal

On considère que les consommations en kcal constituent une suite numérique  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$ .

- 1 a. Analyser/Raisonner Réaliser Cette suite est-elle arithmétique ? Justifiez.

$$2\ 025 - 2\ 054 = -29 ; 1\ 996 - 2\ 025 = -29 ; 1\ 967 - 1\ 996 = -29 \text{ et } 1\ 938 - 1\ 967 = -29.$$

Toutes les différences sont égales donc la suite est arithmétique.

- b. S'approprier Réaliser Donnez la raison de cette suite.

$$2\ 025 - 2\ 054 = -29 \text{ donc la suite est arithmétique de raison } r = -29.$$

- 2 Le premier jour de son régime, Emie a consommé 2 199 kcal.

- a. Analyser/Raisonner Réaliser Proposez une méthode pour déterminer la date du premier jour du régime d'Emie, puis mettez en œuvre cette méthode.

On va calculer la différence entre la première valeur et celle du 13 juillet, puis diviser par la raison.

$$2\ 054 - 2\ 199 = -145 \text{ et } -145 \div (-29) = 5 \text{ donc il faut revenir 5 jours en arrière.}$$

La date du 1<sup>er</sup> jour de régime est le 8 juillet.

- b. Valider On note  $u_0 = 2\ 199$ . À quel rang correspond la valeur 2 054 de  $u_n$  ?

Si le rang  $n = 0$  correspond au 8 juillet, alors le 13 juillet correspond à  $n = 5$ . On a donc  $u_5 = 2\ 054$ .

- c. S'approprier Valider Donnez l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

$$u_n = u_0 + n \times r = 2\ 199 + n \times (-29).$$

- d. Valider Donnez le sens de variation de la suite  $(u_n)$ . Justifiez.

On a  $r = -29 < 0$  donc la suite arithmétique  $(u_n)$  est décroissante.

- 3 Réaliser À l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, calculez les valeurs de  $u_n$  pour  $n$  variant de 0 à 20.

- Appelez le professeur pour lui présenter l'écran de votre calculatrice ou du tableur.

On obtient, entre autres...  $u_{12} = 1\ 851 ; u_{13} = 1\ 822 ; u_{14} = 1\ 793 ; u_{15} = 1\ 764$  et  $u_{20} = 1\ 619$ .

- 4 Valider Communiquer Répondre à la problématique.

$n = 14$  correspond au 22 juillet donc Emie sera en-dessous de 1 800 kcal à partir du 22 juillet.

- 5 Réaliser Communiquer Calculez la somme des kilocalories consommées par Emie depuis le 1<sup>er</sup> jour de son régime.

$$S = \frac{15 \times (u_0 + u_{14})}{2} = \frac{15 \times (2\ 199 + 1\ 793)}{2} = 29\ 940 \text{ donc le 22 juillet Emie a consommé 29\ 940 kcal depuis le début de son régime.}$$

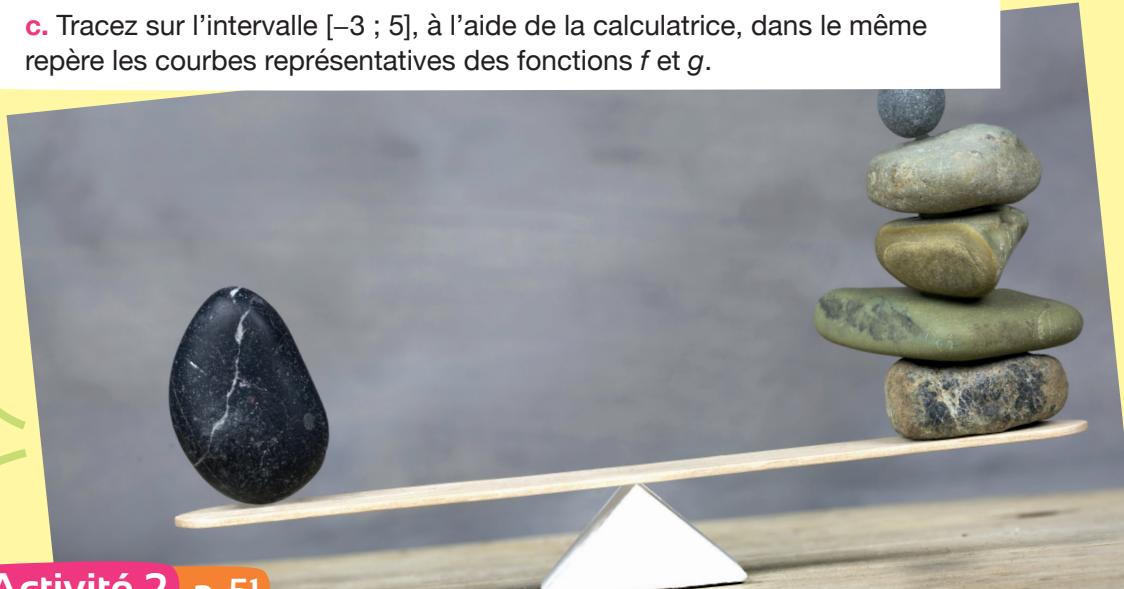
# Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Capacités	Activités
• Résoudre graphiquement, ou à l'aide d'un outil numérique, des équations de la forme $f(x) = g(x)$ où $f$ et $g$ sont des fonctions.	Activité 1
• Résoudre graphiquement, ou à l'aide d'un outil numérique, des inéquations de la forme $f(x) \geq g(x)$ où $f$ et $g$ sont des fonctions.	Activité 2

## Je m'échauffe !

### Activité 1 p. 50

- Calculez  $f(-1)$  sachant que  $f(x) = -2x^2 + 3$ .  $f(-1) = -2 \times (-1)^2 + 3 = 1$ .
- Calculez  $g(3)$  sachant que  $g(x) = 2x - 5$ .  $g(3) = 2 \times 3 - 5 = 1$ .
- Tracez sur l'intervalle  $[-3 ; 5]$ , à l'aide de la calculatrice, dans le même repère les courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$ .



### Activité 2 p. 51

- a. Complétez les phrases suivantes par un intervalle.

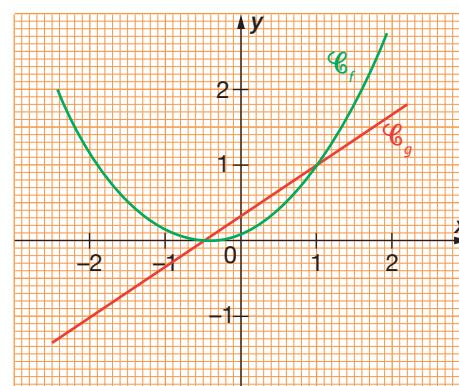
Si  $x < 7$ , alors  $x$  appartient à l'intervalle  $]-\infty ; 7[$

Si  $x \geq -2$ , alors  $x$  appartient à l'intervalle  $[-2 ; +\infty[$

Si  $3 < t \leq 6$ , alors  $t$  appartient à l'intervalle  $]3 ; 6]$

- b. Voici les courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$ . Parmi les propositions suivantes, cochez celles qui sont vraies.

- |                                                        |                                                          |                                             |
|--------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|---------------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> $f(1) = g(1)$      | <input checked="" type="checkbox"/> $f(-0,5) = g(-0,5)$  | <input type="checkbox"/> $f(1) < g(1)$      |
| <input type="checkbox"/> $f(1) > g(1)$                 | <input checked="" type="checkbox"/> $f(1,5) > g(1,5)$    | <input type="checkbox"/> $f(-1) \leq g(-1)$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> $f(-2) \geq g(-2)$ | <input checked="" type="checkbox"/> $f(1,1) \geq g(1,1)$ |                                             |



# Activité

1

## Résoudre graphiquement une équation de la forme $f(x) = g(x)$

### SITUATION . Des disques à bonne distance

Le skeet est une discipline olympique qui consiste à tirer au fusil à canon sur des disques d'argile projetés en l'air par une machine. Il y a impact lorsque le disque est percuté par la balle.

Lucie Anastassiou, membre de l'équipe de France, s'entraîne au skeet et la machine est réglée pour envoyer des disques décrivant une trajectoire bien définie et constante.

Les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur l'intervalle  $[0 ; 80]$  modélisent respectivement les hauteurs en mètres du disque et de la balle lors du tir.

Elles sont définies par :

$$f(x) = -0,01x^2 + 0,91x - 5 \text{ et } g(x) = 0,34x + 1,8$$

où  $x$  représente la distance horizontale en mètres entre Lucie et le disque ou la balle.

On se place dans le cas où il y a un impact.



#### Problématique

Pour valider un impact, celui-ci doit avoir lieu avant que le disque ne franchisse une distance de 55 m et la hauteur du disque d'argile doit être comprise entre 3 et 3,5 m à 10 m de distance horizontale de Lucie. L'impact sera-t-il validé ?

1 **S'approprier** Pourquoi peut-on affirmer que la fonction  $g$  est une fonction affine ?

Par définition car l'expression de la fonction  $g$  est de la forme  $ax + b$ .

2 **Réaliser** Calculez  $f(10)$ .

$$f(10) = -0,01 \times 10^2 + 0,91 \times 10 - 5 = 3,1.$$

3 **Valider Communiquer** Interprétez ces valeurs sous la forme d'une phrase par rapport à la situation étudiée.

À 10 mètres de Lucie, le disque se trouve à une hauteur de 3,1 mètres.

4 **Analyser/Raisonner** Quelle équation faut-il résoudre pour déterminer la distance horizontale entre Lucie et l'impact ?  $f(x) = g(x)$

5 **Réaliser** Tracez dans le même repère les courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$ .

Réglage de la fenêtre d'affichage :

Xmin = 0 ; Xmax = 80 ;

Ymin = 0 ; Ymax = 50.

6 **Réaliser** Déterminez, arrondie au dixième, l'abscisse des points d'intersection des courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$  sur l'intervalle  $[0 ; 80]$ .

Il y a intersection pour  $x = 17$  et pour  $x = 40$ .

7 **Valider Communiquer** Répondez à la problématique.

L'impact est validé car d'après la réponse à la question 6, il a lieu avant les 55 m et d'après la réponse à la question 3, le disque se trouve à une hauteur de 3,1 m à 10 m de Lucie.

#### TUTO CALCULATRICE

Tracer et exploiter des représentations graphiques de fonctions



foucherconnect.fr/22mc17

#### TUTO LOGICIEL

Tracer et exploiter des représentations graphiques de fonctions



foucherconnect.fr/22mc18

# Activité 2

## Résoudre graphiquement une inéquation de la forme $f(x) \geq g(x)$

### SITUATION . D'une entreprise à l'autre !

L'entreprise Prop'plus est spécialisée dans le nettoyage de locaux techniques.

Elle a deux prestations principales dont les coûts de fonctionnement dépendent du nombre de mètres carrés à nettoyer.

Le coût de fonctionnement, en euros, de chaque prestation est représenté sur le graphique ci-après en fonction du nombre  $x$  de mètres carrés à nettoyer.

La courbe  $\mathcal{C}_1$  correspond au coût de fonctionnement de la prestation  $P_1$  et la courbe  $\mathcal{C}_2$  correspond au coût de fonctionnement de la prestation  $P_2$ .

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0 ; 500]$  par :

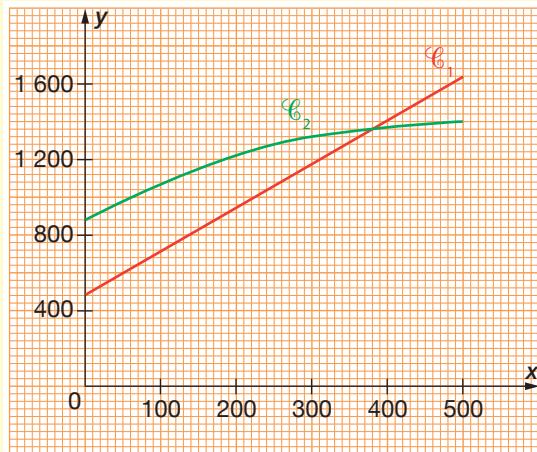
$$f(x) = 2,25x + 500.$$

Elle est représentée par la courbe  $\mathcal{C}_1$ .

Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0 ; 500]$  par :

$$g(x) = -0,002x^2 + 2x + 900.$$

Elle est représentée par la courbe  $\mathcal{C}_2$ .



### Problématique

Pour limiter ses coûts de fonctionnement, à partir de quelle surface Prop'plus doit-elle favoriser une prestation plutôt que l'autre ?

- 1 **Réaliser** Calculez  $f(300)$  et  $g(300)$ .

$$f(300) = 1\,175 \text{ et } g(300) = 1\,320.$$

- 2 **S'approprier** Déterminez si le point de  $\mathcal{C}_1$  d'abscisse 300 est au-dessus ou en dessous du point de  $\mathcal{C}_2$  d'abscisse 300.

Il est en dessous.

- 3 **S'approprier Communiquer** Interprétez la réponse à la question 2 sous la forme d'une phrase par rapport à la situation étudiée.

Pour une surface de 300 m<sup>2</sup>, le coût de la prestation  $P_1$  est inférieur à celui de  $P_2$ .

- 4 **Analyser/Raisonnez** Quelle inéquation faut-il résoudre afin de déterminer pour quelles surfaces la prestation  $P_1$  a un coût de fonctionnement moins élevé que celui de la prestation  $P_2$  ?

$f(x) > g(x)$       $f(x) = g(x)$       $f(x) < g(x)$

- 5 **Réaliser** Déterminez l'abscisse du point d'intersection des courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$  sur l'intervalle  $[0 ; 500]$ .

Il y a intersection pour  $x = 390$  (389 à partir de la calculatrice).

- 6 **Réaliser** Déterminez les abscisses des points de  $\mathcal{C}_1$  situés en-dessous de  $\mathcal{C}_2$ . Donnez le résultat sous la forme d'un intervalle.

Elles se trouvent sur l'intervalle  $[0 ; 390]$  (ou  $[0 ; 389]$ ).

- 7 **Communiquer** Répondez à la problématique.

En dessous de 390 m<sup>2</sup>, Prop'plus doit favoriser la prestation  $P_1$ .

# Activité

Algo  
Pro

## Résoudre une équation $f(x) = g(x)$ par balayage

MES FICHIERS

Python



foucherconnect.fr/22mc19

### SITUATION . Un test pour réfléchir ?

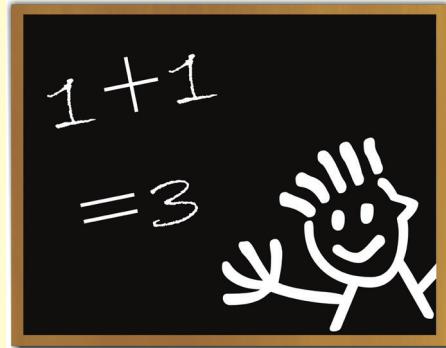
Lors d'un test psychotechnique, il est demandé de répondre à la question suivante en cochant la ou les bonnes réponses :

« Pour les nombres compris entre  $-5$  et  $5$ , combien y-a-t-il de nombres réels dont le cube est égal au triple ?

0     3     5 »

Caroline et Hugo échangent à l'issue du test.

Hugo prétend que seule la réponse «  $0$  » répond à la condition ; quant à Caroline, elle a juste coché la réponse «  $5$  ».



### Problématique

Qui de Hugo ou de Caroline a raison ?

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[-5 ; 5]$  par  $f(x) = x^3$  et soit  $g$  la fonction définie sur  $[-5 ; 5]$  par  $g(x) = 3x$ .

- 1 Quelle équation faut-il résoudre pour répondre à la problématique ?

$f(x) = g(x)$

- 2 Déterminez, arrondie au millième, les abscisses des points d'intersection des courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$  sur l'intervalle  $[-5 ; 5]$ .

Il y a intersection pour les valeurs de  $x$  suivantes :  $-1,732 ; 0 ; 1,732$ .

### LANGAGE PYTHON python™

On dispose d'un programme permettant de déterminer par balayage (la variable  $x$  va « balayer » de façon régulière selon le pas l'intervalle de définition donné) un encadrement d'une solution de l'équation  $f(x) = g(x)$  lorsqu'on sait qu'elle existe dans un intervalle donné.

- 3 Ouvrez le fichier « C04\_52\_equation\_balayage.py ».

Testez le programme avec les fonctions  $f$  et  $g$  pour déterminer un encadrement au millième de la solution donnée par le programme de l'équation  $f(x) = g(x)$  compris entre  $-5$  et  $5$ .

$[-1,733 ; -1,732]$

- 4 La fonction balayage ne permet d'obtenir, si elle existe, qu'un encadrement par intervalle d'étude.

À l'aide de la question 2, modifiez les intervalles d'étude dans le programme afin d'obtenir les trois encadrements des solutions de l'équation  $f(x) = g(x)$ .

$[-1,733 ; -1,732] ; [0 ; 0,001] ; [1,732 ; 1,733]$

- 5 Répondez à la problématique.

Ni Hugo, ni Caroline n'ont raison, car il y a trois solutions sur l'intervalle  $[-5 ; 5]$ .

LEXIQUE

Instruction	Signification
<code>resolution_egalite_par_balayage(f,g,xDebut,xFin,pas)</code>	Fonction qui permet de résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ sur l'intervalle $[xDebut ; xFin]$ avec la précision du pas.

## L'essentiel

Équation de la forme  $f(x) = g(x)$ 

- Résoudre une équation de la forme  $f(x) = g(x)$  où  $f$  et  $g$  sont des fonctions, c'est trouver toutes les valeurs de  $x$  pour lesquelles les valeurs de  $f$  et de  $g$  sont égales.
  - Graphiquement, les solutions de l'équation  $f(x) = g(x)$  sont les **abscisses des points d'intersection** des courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$ .
- On note l'ensemble des solutions entre accolades, les valeurs étant séparées par des points-virgules.
- Vocabulaire Ensembles** ▶ p. 143

## Exemple

Dans le repère ci-contre sont tracées les courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  représentatives des fonctions  $f$  et  $g$  définies sur l'intervalle  $[0 ; 3]$  par :

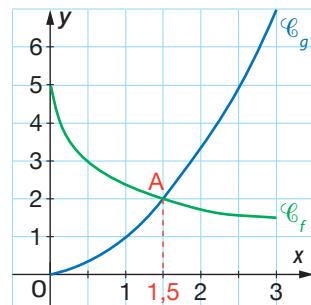
$$f(x) = 1 + \frac{2}{x+0,5} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{8}{9}x^2.$$

A est le point d'intersection de  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ .

La solution de l'équation  $f(x) = g(x)$  est l'abscisse du point A, soit le nombre 1,5.

L'ensemble des solutions est noté  $\{1,5\}$ .

On peut vérifier que  $f(1,5) = g(1,5) = 2$ .



- La plupart des outils numériques qui permettent de tracer les courbes représentatives possèdent également un outil intersection pour obtenir les abscisses des points d'intersection.

Inéquation de la forme  $f(x) \leq g(x)$ 

- Résoudre une inéquation de la forme  $f(x) \leq g(x)$  où  $f$  et  $g$  sont des fonctions, c'est trouver toutes les valeurs de  $x$  pour lesquelles on obtient une **inégalité vraie**.
- Graphiquement, les solutions de l'inéquation  $f(x) \leq g(x)$  sont les **abscisses des points de  $\mathcal{C}_f$  situés en dessous de  $\mathcal{C}_g$** .

L'ensemble des solutions peut être un intervalle ou la réunion de plusieurs intervalles.

**Vocabulaire Ensembles** ▶ p. 143

## Exemple

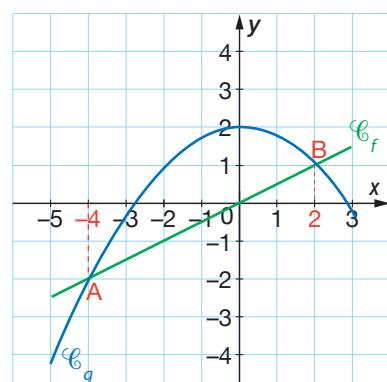
Dans le repère ci-contre sont tracées les courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  représentatives des fonctions  $f$  et  $g$  définies sur l'intervalle  $[-5 ; 3]$  par :

$$f(x) = 0,5x \quad \text{et} \quad g(x) = -0,25x^2 + 2.$$

A et B sont les points d'intersection de  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ .

Les solutions de l'inéquation  $f(x) > g(x)$  sont les abscisses des points de  $\mathcal{C}_f$  situés au-dessus de la courbe  $\mathcal{C}_g$ .

Ce sont donc les abscisses comprises entre  $-5$  et  $x_A$  et entre  $x_B$  et  $3$ , avec les abscisses  $x_A$  et  $x_B$  exclues. Soit l'ensemble  $[-5 ; -4[ \cup ]2 ; 3]$ .



## Savoir-faire

Déterminer graphiquement les solutions d'une inéquation de la forme  $f(x) > g(x)$ 

## TUTO CALCULATRICE

Tracer et exploiter des représentations graphiques de fonctions



foucherconnect.fr/22mc17

Soit deux fonctions  $f$  et  $g$  définies sur l'intervalle  $[-2 ; 2]$  telles que  $f(x) = x^2 - 1$  et  $g(x) = x + 1$ .On souhaite vérifier que l'ensemble des solutions de l'inéquation  $f(x) > g(x)$  est  $[-2 ; -1[$ .Pour tracer dans le même repère les courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$  sur l'intervalle d'étude

Casio	NumWorks	TI
<p>Choisir le menu GRAPH EXE</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Saisir l'expression de <math>f(x)</math> : </li> <li>et saisir l'expression de <math>g(x)</math> : </li> <li>Cliquer sur F6 pour tracer les courbes.</li> </ul>	<p>Choisir le menu Fonctions</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Saisir l'expression de <math>f(x)</math> : </li> <li>Puis Ajouter une fonction ok</li> <li>et saisir l'expression de <math>g(x)</math> : </li> <li>• Tracer le graphique ok</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Cliquer sur f(x)</li> <li>Saisir l'expression de <math>f(x)</math> : </li> <li>Saisir l'expression de <math>g(x)</math> : </li> <li>Cliquer sur graphe pour tracer les courbes.</li> </ul>

Pour lire les abscisses des points d'intersection de  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  sur l'intervalle d'étude en utilisant les fonctions « intersection de courbes »

Casio	NumWorks	TI
<ul style="list-style-type: none"> <li>F1 SHIFT F5 F5 donne la première solution, ► fait apparaître la deuxième solution.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Sur l'écran graphique, appuyer sur ok.</li> <li>Choisir le menu Calculer ok puis Intersection ok</li> <li>Pour passer d'un point à l'autre, utiliser &lt; &gt;.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Cliquer sur trace 2nde 5 entrer (3 fois)</li> <li>Recommencer pour la 2<sup>e</sup> solution.</li> </ul>

• Les courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  se coupent en deux points d'abscisses  $-1$  et  $2$ .

Déterminer l'ensemble des abscisses des points de  $\mathcal{C}_f$  situés au-dessus de  $\mathcal{C}_g$ (Au-dessus pour les symboles  $>$  ou  $\geq$  et en dessous pour les symboles  $<$  ou  $\leq$ .)Les points de la courbe  $\mathcal{C}_f$  sont au-dessus des points de la courbe  $\mathcal{C}_g$  pour les abscisses comprises entre  $-2$  et  $-1$ .Donner l'ensemble des solutions de l'inéquation  $f(x) > g(x)$ (Pour les symboles  $>$  ou  $<$ , on enlève les abscisses des points d'intersection.)Le symbole est «  $>$  ». Donc, on enlève  $-1$  de l'ensemble des solutions.L'ensemble des solutions de l'inéquation  $f(x) > g(x)$  est  $[-2 ; -1[$ .

Voir exercices 5 et 6

Pour résoudre l'équation  $f(x) = g(x)$ , on applique la méthode jusqu'à l'obtention des abscisses des points d'intersection. Pour l'exemple, les solutions de l'équation  $f(x) = g(x)$  sont  $-1$  et  $2$ .

Voir exercices 1, 2 et 3



## J'utilise le vocabulaire approprié

- 1 À l'aide de la calculatrice, on a représenté graphiquement deux fonctions  $f$  (courbe rouge, notée  $\mathcal{C}_f$ ) et  $g$  (courbe bleue, notée  $\mathcal{C}_g$ ), puis on a obtenu l'écran ci-contre.

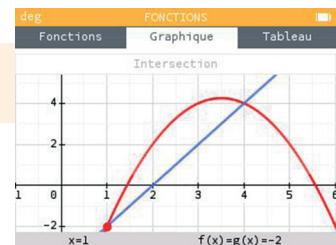
Complétez le texte avec les propositions suivantes.

$f(x) > g(x)$   abscisses  points d'intersection   $f(x) = g(x)$   inéquation   $\mathcal{C}_f$    $\mathcal{C}_g$   
 1 et 4  équation  ]1 ; 4[

a. Les solutions de l'  équation  $f(x) = g(x)$  sont les abscisses des  points d'intersection de  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ .

Soit ici  1 et 4 .

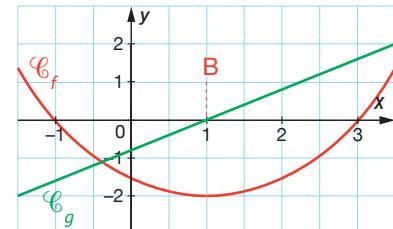
b. Les solutions de l'  inéquation  $f(x) > g(x)$  sont les abscisses comprises entre  1 et 4 (exclus). Soit ici  ]1 ; 4[ .



## Je revois des points importants

- 2 Pour chacun des énoncés suivants, cochez la ou les réponses correctes.

Les fonctions  $f$  et  $g$  sont définies sur l'intervalle  $[-1,5 ; 3,5]$ . Voici ci-contre leur courbe représentative, respectivement  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ .

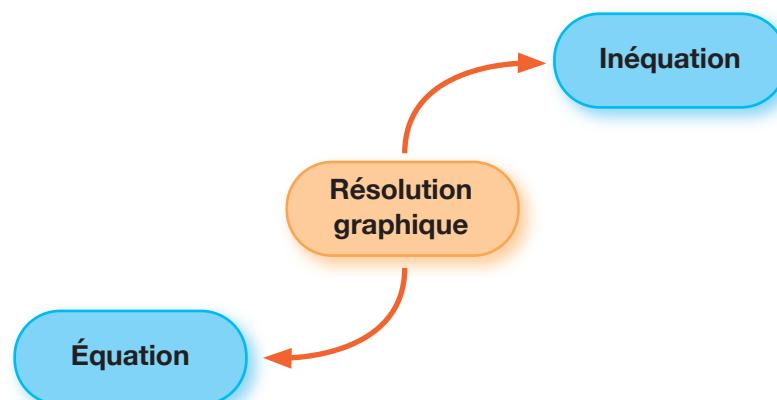


- a. Les solutions de l'équation  $f(x) = 0$  sont :  -1 ; 1 et 3  -1 et 3  1 et 3  
 b. L'équation  $f(x) = g(x)$  a :  3 solutions  2 solutions  1 solution  
 c. Sur l'intervalle  $[0 ; 1]$ , on a :   $f(x) > 0$    $g(x) > 0$    $g(x) > f(x)$   
 d. Sur l'intervalle  $[1 ; 3]$ , on a :   $f(x) \leq 0$    $g(x) \geq 0$    $g(x) \geq f(x)$   
 e. Le nombre 1 est solution de l'équation :   $g(x) = 1$    $g(x) = 0$    $f(x) = g(x)$



## Je mémorise

- 3 Réalisez une carte mentale qui indique la méthode pour la résolution graphique d'équations ou d'inéquations. [> Je fais le point page 53](#)



# Exercices

## AUTOMATISMES

Sans calculatrice ni brouillon, répondez aux 3 questions du rituel indiqué par votre professeur.  
Votre réponse est juste ? Bravo ! Cochez la case de l'automatisme correspondant.

### Rituel 1 2'

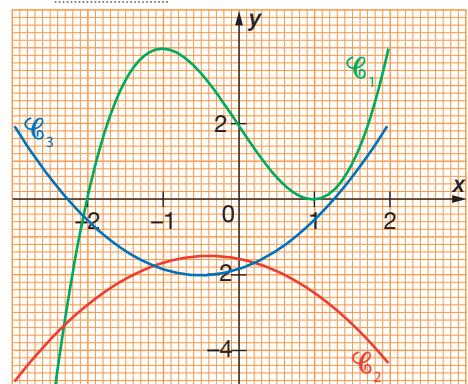
- A21 Factorisez l'expression  $x^2 - 81$ .

$$x^2 - 81 = \underline{(x - 9)(x + 9)}$$

- A9 On donne le tableau de variations d'une fonction définie sur  $[-3 ; 2]$ .

x	-3	-0,4	2
Variations de f	-5	-1,4	-4,3

Parmi les représentations graphiques suivantes, indiquez celle qui correspond à ce tableau de variations :  



- A18 Identifiez les solides usuels principaux qui composent cette image.

Une demi-boule ; un cône.



### Rituel 2 2'

- A4 Le parc automobile d'un concessionnaire est réparti selon la puissance fiscale des véhicules de la manière suivante.

Puissance fiscale	4	5	6	7	8 et plus
Nombre de véhicules	16	19	43	25	12

Pour représenter ces données, parmi les propositions suivantes, cochez le type de diagramme le plus adapté.

en secteurs  en bâtons

en colonnes  à lignes brisées

- A20 Un pavé droit a pour longueur 8,4 m, pour largeur 5 m et pour hauteur 1 m. Calculez son volume.

Volume du pavé droit :  42 m<sup>2</sup>

- A5 Dans une classe de 20 élèves, on obtient la série statistique suivante :

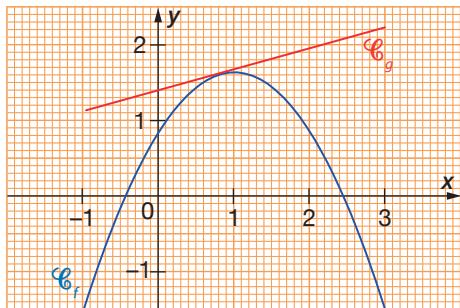
Notes	3	5	10	15	17
Effectifs	1	4	8	6	1

Quels sont la moyenne, le minimum et le premier quartile de cette série ?

$$\bar{x} = \underline{10,5} ; \text{Min} = \underline{3} ; Q_1 = \underline{5}$$

## Résolution graphique d'une équation de la forme $f(x) = g(x)$

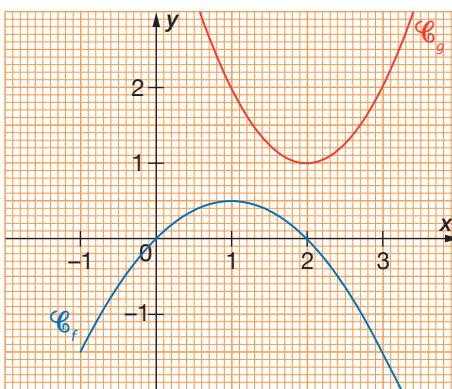
- 1 ★ Voici les courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$  définies sur l'intervalle  $[-1 ; 3]$ .



Résolvez l'équation  $f(x) = g(x)$ .

$$f(x) = g(x) \text{ pour } x = \underline{0,8}$$

- 2 ★ Voici les courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$  définies sur l'intervalle  $[-1 ; 3,5]$ .



Résolvez l'équation  $f(x) = g(x)$ .

$$\text{Il n'y a pas de solution. } S = \emptyset$$

- 3** ★★ Soit les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur l'intervalle  $[0,6 ; 4]$  par :

$$f(x) = \sqrt{x - 0,5} \text{ et } g(x) = x^3 - x^2 + 0,25.$$

Résolvez graphiquement l'équation  $f(x) = g(x)$  à l'aide d'un outil numérique ; arrondissez au millième.  $f(x) = g(x)$  pour  $x = 1,365$  et  $x = 0,515$ .

- 4** ★★ Soit les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur l'intervalle  $[-2 ; 3]$  par :

$$f(x) = \frac{1}{x+2} \text{ et } g(x) = x^2 - x - 1,25.$$

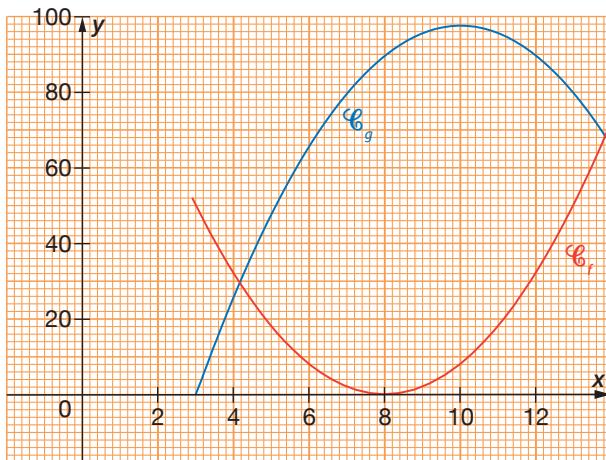
Résolvez graphiquement l'équation  $f(x) = g(x)$  à l'aide d'un outil numérique.

Les solutions arrondies au centième sont :

$-1,70 ; -1,13 ; 1,83$ .

### Résolution graphique d'une inéquation de la forme $f(x) \geq g(x)$

- 5** ★ Voici les courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$  définies sur l'intervalle  $[3 ; 14]$ .



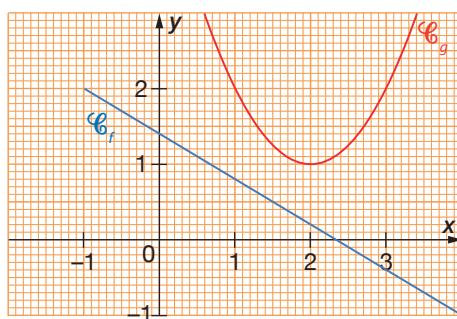
- a. Résolvez l'inéquation  $f(x) > g(x)$ .

$S = [3 ; 4,2[ \cup ]13,8 ; 14]$

- b. Résolvez l'inéquation  $f(x) \leq g(x)$ .

$S = [4,2 ; 13,8]$

- 6** ★★ Voici les courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$  définies sur l'intervalle  $[-1 ; 4]$ .



- a. Résolvez l'inéquation  $f(x) < g(x)$ .  $S = [-1 ; 4]$

- b. Résolvez l'inéquation  $f(x) \geq g(x)$ .  $S = \emptyset$

- 7** ★★ Soit les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur l'intervalle  $[-2 ; 3]$  par :

$$f(x) = 2x^2 - 26x + 102 \text{ et } g(x) = -3x^2 + 42x - 75.$$

Résolvez graphiquement l'inéquation  $f(x) > g(x)$  à l'aide d'un outil numérique.

$S = [-2 ; 3]$

- 8** ★★ Soit les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur l'intervalle  $[-3 ; -0,25]$  par :

$$f(x) = -\frac{1}{x} + 2 \text{ et } g(x) = 0,5x^2.$$

Résolvez graphiquement l'inéquation  $f(x) > g(x)$  à l'aide d'un outil numérique ; arrondissez au centième.

$S = ]-2,21 ; -0,25]$

- 9** ★★ Soit les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur l'intervalle  $[-1 ; 4]$  par :

$$f(x) = x^3 - 3x \text{ et } g(x) = 2x - 1.$$

Résolvez graphiquement l'inéquation  $f(x) \geq g(x)$  à l'aide d'un outil numérique ; arrondissez au dixième.

$S = [-1 ; 0,2[ \cup ]2,1 ; 4]$

- 10** ★★ Soit les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur l'intervalle  $[-1 ; 4]$  par :

$$f(x) = x^3 - 3x \text{ et } g(x) = \sqrt{x+1}.$$

Résolvez graphiquement l'inéquation  $f(x) \leq g(x)$  à l'aide d'un outil numérique ; arrondissez au centième.  $S = [-0,29 ; 1,97]$

- 11** ★★ **Ensembles p. 143** Soit les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur l'intervalle  $[-2 ; 2]$  par :

$$f(x) = x^3 \text{ et } g(x) = 3x.$$

- a. Représentez graphiquement à l'aide d'un outil numérique les fonctions  $f$  et  $g$ .

- b. Donnez l'ensemble des solutions de l'inéquation  $f(x) > g(x)$  parmi les propositions ci-dessous.

$S = [-1,732 ; 0[ \cup ]1,732 ; 2]$

- c. Donnez l'ensemble des solutions de l'inéquation  $f(x) \leq g(x)$  parmi les propositions ci-dessous.

$S = [-2 ; -1,732] \cup [0 ; 1,732]$

#### Propositions :

- $\{-1,732 ; 0\}$
- $\{-1,732 ; 0 ; 1,732\}$
- $] -1,732 ; 0[$
- $] -1,732 ; 0[ \cup ]1,732 ; 2]$
- $] -1,732 ; 0[ \cup [0 ; 1,732]$
- $[-2 ; -1,732] \cup [0 ; 1,732]$
- $] -1,732 ; 0[ \cup ]0 ; 1,732[$
- $\{0 ; 1,732\}$
- $[-1,732 ; 1,732]$
- $]0 ; 1,732[$

# Problèmes

## 12 ★★★ python foucherconnect.fr/22mc20

Soit les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur l'intervalle  $[-1 ; 7]$  par :

$$f(x) = -0,6x + 8 \text{ et } g(x) = -0,25x^2 + 2,475x - 0,625.$$

- Résolvez graphiquement l'équation  $f(x) = g(x)$  à l'aide d'un outil numérique.

Arrondissez au millième la solution.

Sur  $[-1 ; 7]$ ,  $f(x) = g(x)$  pour  $x = 4,327$ .

- Ouvrez le fichier « C04\_58\_Probleme12.py » et observez le script associé. Quel est le but du programme ?

Le programme permet de résoudre l'équation

$f(x) = g(x)$  avec une précision donnée.

- Expliquez oralement ce que réalise ce programme entre les lignes suivantes.

```
9 if f(u)<g(u):
10    while f(u)<g(u):
11        u=round(u+0.01,1)
12    else:
13        while f(u)>g(u):
14            u=round(u+0.01,1)
15
16 if f(u)==g(u):
17    print("La solution de l'équation f(x) =
18 g(x) est : ",u)
19 else:
20    print("La solution de l'équation f(x) =
21 g(x) est comprise entre ",u-0.01, " et
22 ",u,".)")
```

Il réalise une boucle de comparaison des ordonnées de  $f$  et de  $g$  pour une même abscisse avec un pas d'avancement de 0,01.

- Exécutez le programme. Le résultat obtenu est-il cohérent avec la réponse donnée à la question 2 ?

Oui, avec un arrondi au centième.

- Modifiez, puis testez le programme afin d'obtenir un encadrement à 0,001 près de la solution de l'équation  $f(x) = g(x)$  sur l'intervalle  $[-1 ; 7]$ .

On obtient l'encadrement :  $4,327 \leq x \leq 4,328$ .

## 13 ★★★

À l'approche des différentes fêtes printanières, les fonctions d'offre  $f$  et de demande  $g$  de lots de fleurs sont données par :

$f(q) = -0,01q^2 + 9$  et  $g(q) = 0,25q + 1$ , où  $q$  est la quantité de lots de fleurs (en milliers de lots) et  $f(q)$  et  $g(q)$  le prix unitaire du marché d'un millier de lots (en €).



- Représentez graphiquement, à l'aide d'un outil numérique, les fonctions  $f$  et  $g$  pour  $q$  compris entre 0 et 30.

- Déterminez graphiquement, les coordonnées du point d'intersection de ces deux courbes ; arrondissez au millième.

$I(18,423 ; 5,606)$

- Vérifiez par le calcul le résultat obtenu en 2.

$f(18,423) \approx 5,606$  et  $g(18,423) \approx 5,606$ .

On a bien  $f(18,423)$  pratiquement égal à  $g(18,423)$ .

- On dit que le marché offre-demande est à l'équilibre lorsque la quantité offerte par une entreprise est égale à la quantité demandée par les consommateurs.

Déduisez-en la quantité d'équilibre du marché (arrondie à 100 lots près) et le prix d'équilibre d'un millier de lots (arrondi à 0,10 € près).

La quantité d'équilibre est 18 400 lots pour

un prix d'équilibre de 5,6 €.

- Déduisez-en pour quelle quantité l'offre est supérieure à la demande.

L'offre est supérieure à la demande pour

une quantité inférieure à 18 400 lots.

## 14

- ★★★
- Caroline et Hugo échangent sur les nombres et se demandent s'il existe des nombres positifs dont le carré est plus petit que ce nombre. Pour Caroline, c'est oui mais c'est non pour Hugo. Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0 ; 5]$  par  $f(x) = x^2$  et soit  $g$  la fonction définie sur  $[0 ; 5]$  par  $g(x) = x$ .

### Problématique

Qui de Hugo ou de Caroline a raison ?

C'est Caroline qui a raison pour  $x \in [0 ; 1]$ .

Graphiquement on a  $\mathcal{C}_f$  en dessous de  $\mathcal{C}_g$  pour les abscisses comprises entre 0 et 1.

- 15** ★★    Le service maintenance d'une entreprise cherche à améliorer la rapidité de ses interventions. Pour cela, il compare le coût d'arrêt de la production avec le coût des opérations de maintenance préventive en fonction du nombre d'heures  $x$  d'intervention.

On modélise, sur l'intervalle  $[0,5 ; 12]$ , le coût des opérations de maintenance par la fonction  $f$  et le coût d'arrêt de la production par la fonction  $g$  :

$$f(x) = 180x + 95 \text{ et } g(x) = \frac{2\,250}{x}$$

avec  $f(x)$  et  $g(x)$  en euros.

#### Problématique

Pour quelle durée de maintenance le coût de maintenance préventive est-il inférieur au coût d'arrêt ?

1. Représentez graphiquement, à l'aide d'un outil numérique, les fonctions  $f$  et  $g$  pour  $x$  compris entre 0,5 et 12.
2. Déterminez graphiquement, les coordonnées du point d'intersection de ces deux courbes ; arrondissez au dix millième.

I(3,281 5 ; 686)

3. Répondez à la problématique.

Pour toute durée inférieure à 3,281 5 h, soit environ 3 h 17 min, le coût de maintenance est inférieur au coût d'arrêt.

- 16** ★★   Un entrepreneur étudie les modalités d'expédition de ses marchandises en fonction de la rapidité et de la distance. Pour cela, il regarde le coût des deux offres principales de la société de transport avec qui il travaille habituellement pour des distances inférieures à 120 km.

Soit  $x$  le nombre de km parcourus.

#### Offre standard

Modélisée par la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[10 ; 120]$  telle que :

- pour  $x \in [10 ; 50]$ ,  $f(x) = 100 + 0,3x$  ;
- pour  $x \in [50 ; 120]$ ,  $f(x) = 80 + 0,7x$ .

#### Offre prioritaire (plus rapide)

Modélisée par la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $[10 ; 120]$  telle que :  $g(x) = 0,006x^2 + 90$ .

#### Problématique

Pour quelle distance l'offre prioritaire est-elle moins coûteuse que l'offre standard ?

1. Représentez graphiquement, à l'aide d'un outil numérique, les fonctions  $f$  et  $g$  pour  $x$  compris entre 10 et 120.

2. Expliquez votre démarche pour répondre à la problématique.

On cherche graphiquement les valeurs des abscisses des points de la courbe  $\mathcal{C}_g$  en dessous de la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

3. Répondez à la problématique
- L'offre prioritaire est moins coûteuse pour les distances comprises entre 10 et 100 km.

- 17** ★★★  [foucherconnect.fr/22mc22](https://foucherconnect.fr/22mc22)

Une usine automobile a une capacité de production de 100 voitures par jour.



Pour un nombre entier  $x$  de voitures produites et vendues par jour, on modélise :

- le chiffre d'affaires de l'usine (en milliers d'euros) par la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0 ; 100]$  par  $f(x) = 8x$  ;
- le coût de production (en milliers d'euros) par la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $[0 ; 100]$  par  $g(x) = 0,001x^3 - 0,07x^2 + 4,64x + 186$ .

1. Résolvez graphiquement l'inéquation  $f(x) > g(x)$  ; arrondissez au dixième.

S = ]40,9 ; 83,6[.

2. Déduez-en pour quels nombres de voitures produites et vendues par jour, l'usine réalisera un bénéfice.

Elle réalisera un bénéfice pour un nombre de voiture produites et vendues compris entre 41 et 83.

3. Ouvrez le fichier « C04\_59\_Voitures.py ». Complétez les pointillés du script pour que son exécution détermine et affiche l'ensemble des solutions entières de l'inéquation  $f(x) > g(x)$  sur l'intervalle  $[0 ; 100]$ .

# Évaluation

Compétences	S'approprier				Analyser Raisonner				Réaliser				Valider				Communiquer			
Questions	2				4				1 - 5 - 6				3 - 7				2 - 7			
Niveau d'acquisition	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4

## Situation

Une entreprise d'aide à l'insertion par le travail est spécialisée dans la fabrication d'objets artisanaux. La production journalière de l'entreprise varie de 10 à 90 objets.

L'entreprise reçoit une allocation de 60 € par jour à laquelle s'ajoute une subvention de 0,25 € par objet fabriqué.

On note  $x$  le nombre d'objets fabriqués par jour. On modélise la recette quotidienne, en euros, et les charges quotidiennes de fabrication, en euros, respectivement par les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur l'intervalle [10 ; 90] par :

$$f(x) = 0,25x + 60 \quad \text{et} \quad g(x) = x + \frac{900}{x}.$$



## Problématique

Combien d'objets l'entreprise doit-elle fabriquer par jour pour être bénéficiaire ?

- 1** **Réaliser** Calculez  $f(45)$  et  $g(45)$ .

$$f(45) = 0,25 \times 45 + 60 = 71,25$$

$$\text{et } g(45) = 45 + \frac{900}{45} = 65.$$

- 2** **S'approprier Communiquer** Interprétez ces valeurs sous la forme d'une phrase par rapport à la situation étudiée.

Pour 45 objets confectionnés, l'entreprise perçoit 71,25 € mais a des charges de 65 €.

- 3** **Valider** Déterminez si l'entreprise réalise un bénéfice en fabriquant 45 objets par jour.

Oui, elle réalise un bénéfice car  $f(45) > g(45)$  (ou car  $71,25 > 65$ ).

- 4** **Analyser/Raisonner** Quelle inéquation faut-il résoudre pour répondre à la problématique ?

Il faut résoudre l'inéquation  $f(x) > g(x)$ .

- 5** **Réaliser** Tracez dans le même repère les courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$ .

Réglage de la fenêtre d'affichage :

$X_{\min} = 0$  ;  $X_{\max} = 90$  ;

$Y_{\min} = 0$  ;  $Y_{\max} = 100$ .

- 6** **Réaliser** Résolvez graphiquement sur l'intervalle [10 ; 90] l'inéquation de la question 4.

$$S = ]20 ; 60[.$$

- 7** **Valider Communiquer** Répondez à la problématique. Justifiez la réponse.

Pour être bénéficiaire, l'entreprise doit fabriquer entre 20 et 60 objets par jour.

Graphiquement on a  $\mathcal{C}_f$  au-dessus de  $\mathcal{C}_g$  pour les abscisses comprises entre 20 et 60. Ce qui correspond à une recette supérieure aux charges.

# Fonctions polynômes de degré 2

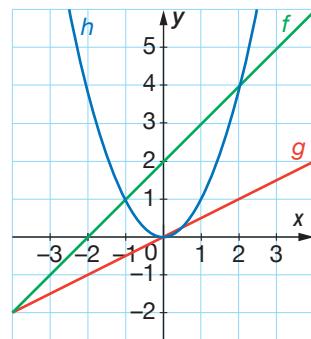
5

Capacités	Activités
<ul style="list-style-type: none"> <li>Visualiser, à partir de la représentation graphique d'une fonction polynôme <math>f</math> de degré 2, le nombre possible de solutions de l'équation <math>f(x) = 0</math>.</li> <li>Donner l'allure de la représentation graphique d'une fonction polynôme de degré 2 donnée sous forme factorisée.</li> <li>Associer une parabole à une expression algébrique de degré 2 donnée.</li> </ul>	Activité 1
<ul style="list-style-type: none"> <li>Tester si un nombre réel est racine d'un polynôme de degré 2.</li> <li>Factoriser un polynôme de degré 2 donné dont les racines réelles sont connues.</li> <li>Déterminer les racines d'un polynôme de degré 2 donné sous forme factorisée.</li> <li>Déterminer la deuxième solution d'une équation du second degré possédant deux solutions dont une solution est connue.</li> </ul>	Activité 2
• Déterminer le signe d'un polynôme de degré 2 donné sous forme factorisée.	Activité 3

## Je m'échauffe !

### Activité 1 p. 62

Pour chacune des fonctions qui sont représentées ci-contre, indiquez s'il s'agit d'une fonction linéaire, affine, ou carré.



- Fonction  $f$  : fonction affine
- Fonction  $g$  : fonction linéaire
- Fonction  $h$  : fonction carré

### Activité 2 p. 63

Factorisez les expressions suivantes en utilisant un facteur commun :

$$A = 5(x + 1) + 2x(x + 1)$$

$$A = (x + 1)(5 + 2x)$$

$$B = (3x + 4)(x - 2) + (x - 2)^2$$

$$B = (x - 2)(3x + 4 + x - 2) = (x - 2)(4x + 2)$$



### Activité 3 p. 64

Résolvez les équations et inéquations suivantes :

a.  $2x + 3 = 10$  ;  $2x = 7$  ;  $x = 3,5$ .      b.  $-4x - 20 \leq 0$  ;  $-4x \leq 20$  ;  $x \geq -5$ .

c.  $0,5x + 2 = 250$  ;  $0,5x = 248$  ;  $x = 496$ .

# Activité

1

## Représenter une fonction polynôme de degré 2

### SITUATION . À l'écoute de son entreprise

L'entreprise Airbuds fabrique des écouteurs sans fils de très haute qualité.

Elle réalise un bénéfice si son chiffre d'affaires est supérieur au coût de fabrication.

La fonction  $g$  modélise la différence entre le chiffre d'affaires de l'entreprise et le coût de fabrication des écouteurs en fonction du nombre de ventes et elle est définie sur l'intervalle  $[0 ; 1\,200]$  par :

$$g(x) = -(x - 942)(x - 8)$$

avec  $g(x)$  exprimée en euros et  $x$  en centaines de ventes.



#### Problématique

Pour quels nombres entiers de ventes l'entreprise réalisera-t-elle un bénéfice ?

Quelle valeur correspond à un bénéfice maximal ?

- 1 **Réaliser** Développez l'expression  $g(x)$ .

$$g(x) = -(x - 942)(x - 8) = -x^2 + 8x + 942x - 7\,536 = -x^2 + 950x - 7\,536.$$

- 2 **S'approprier** L'expression d'une **fonction polynôme  $g$  de degré 2** est de la forme  $g(x) = ax^2 + bx + c$  avec  $a$ ,  $b$  et  $c$  coefficients réels.

Donnez les valeurs des coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$  en utilisant la réponse à la question 1.

$$a = -1 ; b = 950 ; c = -7\,536.$$

- 3 a. **Réaliser** À l'aide de la calculatrice, représentez graphiquement la fonction  $g$  sur l'intervalle  $[0 ; 1\,200]$ .

Réglage de la fenêtre d'affichage :  $X_{\min} = 0$  ;  $X_{\max} = 1\,200$  ;  
 $Y_{\min} = -400\,000$  ;  $Y_{\max} = 300\,000$ .

#### TUTO CALCULATRICE

Tracer et exploiter des représentations graphiques de fonctions



foucherconnect.fr/22mc17

- b. **Communiquer** La courbe obtenue est appelée une **parabole**.

Observez la courbe et entourez les bonnes réponses dans les phrases suivantes.

La fonction  $g$  est **croissante/décroissante** sur l'intervalle  $[0 ; 475]$  et elle est **croissante/décroissante** sur l'intervalle  $[475 ; 1\,200]$ . Les variations de  $g$  dépendent du signe de  $a$ .

Ici on remarque que  $a$  est **négatif/positif**.

- 4 a. **Réaliser** Déterminez la valeur du maximum de la fonction  $g$ .

La valeur du maximum de  $g$  est 218 089.

- b. **Analyser/Raisonner Communiquer** Donnez le bénéfice maximum que peut espérer l'entreprise et le nombre de ventes à réaliser pour atteindre cet objectif.

L'entreprise peut espérer faire un bénéfice maximum de 218 089 euros pour 47 500 ventes.

- 5 a. **Réaliser Analyser/Raisonner** Vérifiez graphiquement que les valeurs de  $x$  pour lesquelles  $g(x) = 0$  correspondent à celles données dans la forme factorisée de  $g$  et déduisez-en les valeurs entières qui encadrent le nombre de ventes pour lequel l'entreprise réalise un bénéfice : **8 et 942**.

- b. **Valider Communiquer** Répondez à la problématique.

L'entreprise aura un bénéfice entre 800 et 94 200 ventes et elle atteindra un bénéfice maximum de 218 089 euros pour 47 500 ventes.

# Activité 2

## Déterminer les racines d'un polynôme de degré 2

### SITUATION . Un but qui rentre dans la légende ?

Lors d'un match de football épique, Olivier réalise un magnifique lob contre le gardien de but adverse, Tom, sorti de sa surface. Le but étant situé à une distance de 30 mètres de lui, Olivier marquera si le ballon arrive à cette distance.

La trajectoire du ballon est modélisée par la fonction  $f$  définie par :

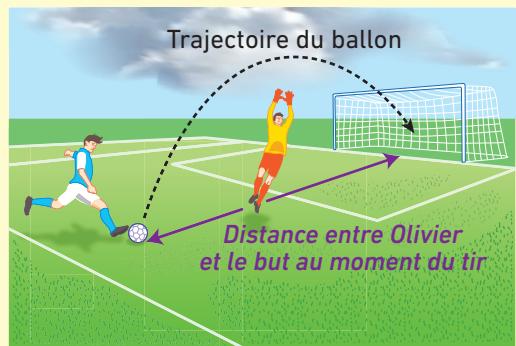
$$f(x) = -0,02x^2 + 0,6x \text{ sur l'intervalle } [0 ; 30].$$

$x$  est la distance, en m, parcourue par le ballon par rapport au sol et  $f(x)$  est la hauteur, en m, du ballon par rapport au sol.

Le suspense est à son comble car Olivier avait déjà tenté dans la même situation un tel tir lors du précédent championnat et avait échoué.

Sa trajectoire à l'époque était définie par la fonction  $g$  telle que :

$$g(x) = -0,019x^2 + 0,532x \text{ sur l'intervalle } [0 ; 30].$$



#### Problématique

Olivier va-t-il marquer un but face à Tom ? Quel était le problème de son précédent tir ?

- 1 a. Réaliser Complétez le tableau de valeurs de la fonction  $f$ .

$x$	0	5	10	20
$f(x)$	0	2,5	4	4

#### TUTO CALCULATRICE

Obtenir un tableau de valeurs



[foucherconnect.fr/22mc23](https://foucherconnect.fr/22mc23)

- b. S'approprier Les solutions de l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  sont appelées **racines** du polynôme  $ax^2 + bx + c$ . Au regard du tableau de valeurs précédent, donnez une racine du polynôme  $-0,02x^2 + 0,6x$ .

On la notera  $x_1$  :  $x_1 = 0$ .

- 2 a. Réaliser À l'aide de la représentation graphique de la fonction  $f$ , déterminez la valeur de la deuxième racine  $x_2$  de cette fonction polynomiale.  
 $x_2 = 30$ .

#### TUTO CALCULATRICE

Tracer et exploiter des représentations de fonctions



[foucherconnect.fr/22mc17](https://foucherconnect.fr/22mc17)

- b. S'approprier Notez la distance à laquelle se trouve le ballon lorsqu'il atteint le sol :  $30$  mètres.

- 3 Réaliser Valider Vérifiez que l'on peut écrire le polynôme  $f(x)$  sous la forme  $f(x) = -0,02(x - 30)$ .  
 $f(x) = -0,02x(x - 30) = -0,02x^2 - 0,02x \times (-30) = -0,02x^2 + 0,6x$ . On retrouve l'expression de  $f(x)$ .

On parle de **forme factorisée** du polynôme  $f(x)$ .

- 4 a. Analyser/Raisonner Comparez les résultats obtenus aux questions 1b et 2a et la forme factorisée de la fonction  $f$  déterminée à la question 3 pour choisir, parmi les propositions suivantes, la forme factorisée d'un polynôme du second degré de racines  $x_1$  et  $x_2$ .

- a.  $a(x - x_1)(x - x_2)$      (x - x<sub>1</sub>)(x - x<sub>2</sub>)     ax - x<sub>1</sub>     ax<sub>2</sub> - x<sub>1</sub>

- b. Valider Sachant que la forme factorisée du polynôme  $g(x)$  est  $g(x) = -0,019(x - 28)$ , déduisez-en les racines du polynôme  $g(x)$ .  $x_1 = 0$  et  $x_2 = 28$ .

- c. Communiquer Répondez à la problématique.

Olivier marque un but car le ballon atterrit à 30 mètres (la bonne distance). Lors du match précédent, il avait atterri seulement à 28 mètres.

# Activité

## 3

# Déterminer le signe d'un polynôme de degré 2

### SITUATION . Sous le soleil

L'indice UV sur la Côte d'Azur en juillet est donné par une fonction  $f$  définie par  $f(x) = -0,4x^2 + 9x - 42,6$  sur l'intervalle  $[6 ; 18]$  où  $f(x)$  est l'indice UV et  $x$  est l'heure de la journée (de 6 h à 18 h). Alice sait que si l'indice UV est supérieur à 6, elle risque des coups de soleil et elle préfèrerait s'en prémunir.



#### Problématique

Quel est l'intervalle de temps dans la journée où Alice doit éviter de s'exposer au soleil ?

- 1 **Réaliser** Montrez que l'inéquation  $f(x) \geq 6$  peut s'écrire :

$$-0,4x^2 + 9x - 48,6 \geq 0.$$

$$\text{On a } f(x) \geq 6 \Leftrightarrow -0,4x^2 + 9x - 42,6 \geq 6$$

$$\Leftrightarrow -0,4x^2 + 9x - 48,6 \geq 0.$$

- 2 **Réaliser** Soit  $P(x)$  le polynôme défini par  $P(x) = -0,4x^2 + 9x - 48,6$ .

À l'aide du solveur d'équation de votre calculatrice, déterminez les deux solutions  $x_1$  et  $x_2$  de l'équation  $-0,4x^2 + 9x - 48,6 = 0$ .

$$x_1 = 9 \text{ et } x_2 = 13,5.$$

#### TUTO CALCULATRICE

Résoudre une équation du second degré



[toucheconnect.fr/22mc24](http://toucheconnect.fr/22mc24)

- 3 **S'approprier**  $P(x)$  est écrit sous la forme  $P(x) = ax^2 + bx + c$ .

Donnez la valeur et le signe de son coefficient  $a$ .

$$a = -0,4 \text{ et } a < 0.$$

- 4 **S'approprier** Factorisez le polynôme  $P(x)$  sous la forme  $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ .

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = -0,4(x - 9)(x - 13,5).$$

- 5 **Réaliser** Un tableau de signes permet d'indiquer le signe d'une expression algébrique factorisée. On indique sur la première ligne l'intervalle d'étude et les racines de  $P(x)$  et sur la deuxième ligne le signe du polynôme sur l'intervalle par un symbole + ou -.

Complétez le tableau de signes du polynôme  $P(x)$ .

#### Coup de pouce

Le polynôme  $a(x - x_1)(x - x_2)$  est du signe de  $-a$  sur l'intervalle  $]x_1 ; x_2[$  et du signe de  $a$  sinon.

$x$	6	9	13,5	18
Signe du polynôme $P(x)$	-	0	+	0

- 6 **Valider** À l'aide du tableau de signes du polynôme  $P(x)$ , résolvez l'inéquation  $P(x) \geq 0$ .

$$P(x) \geq 0 \Leftrightarrow 9 \leq x \leq 13,5.$$

- 7 **Valider Communiquer** Répondez à la problématique.

Entre 9 h et 13 h 30, l'indice sera supérieur ou égal à 6 et il faudra qu'Alice évite de s'exposer au soleil.

# Activité

Algo  
Pro

## Déterminer une solution d'une équation par balayage

MES FICHIERS

Python

foucherconnect.fr/22mc25



### SITUATION . Vol en impesanteur

On considère un vol parabolique en impesanteur de l'Airbus A300 zéro-G dont on étudie les phases de vol à partir de 6 000 mètres d'altitude. On déclenche le chronomètre au moment où l'avion dépasse les 6 000 mètres d'altitude et on sait qu'au-dessus de 7 000 mètres les passagers se retrouvent en impesanteur.

La fonction  $f$  telle que  $f(x) = -1,8x^2 + 125,1x + 6\ 000$  où  $x$  représente le temps en secondes et  $f(x)$  l'altitude en mètres est définie sur l'intervalle  $[0 ; 80]$ .

Elle décrit l'altitude de l'avion en fonction du temps à partir du moment où le chronomètre est déclenché.

Résoudre  $f(x) \geq 7\ 000$  revient à résoudre l'inéquation  $-1,8x^2 + 125,1x - 1\ 000 \geq 0$ .



#### Problématique

Pendant combien de temps va durer le vol en impesanteur ?

- 1** Identifiez les valeurs des coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$  du polynôme de degré 2 :  
 $P(x) = -1,8x^2 + 125,1x - 1\ 000$ .  $a = -1,8$  ;  $b = 125,1$  et  $c = -1\ 000$ .

#### LANGAGE NATUREL

- 2** L'algorigramme ci-contre présente le raisonnement à appliquer pour déterminer par balayage un encadrement de la racine d'un polynôme de degré 2 qui n'est pas donné sous forme factorisée lorsqu'on sait qu'elle existe dans un intervalle donné. Complétez-le.

#### LANGAGE PYTHON



- 3** Ouvrez le fichier « C05\_65\_algopro.py ». Testez le programme sur le polynôme  $P(x)$  pour déterminer les solutions de l'équation  $P(x) = 0$ . Les solutions sont données à l'unité près.  $x_1 = 9$  et  $x_2 = 60$ .

- 4** Modifiez le programme afin d'avoir une précision au millième sur les solutions.  
 $x_1 = 9,216$  et  $x_2 = 60,284$ .

- 5** Vérifiez les solutions obtenues à l'aide de la calculatrice.

- 6** Complétez le tableau de signes suivant :

$x$	0	9,216	60,284	80
Signe de $P(x)$	-	0	+	0

- 7** Déterminez l'intervalle de temps pour lequel  $P(x) \geq 0$  et calculez la durée pendant laquelle les passagers de l'avion seront en impesanteur.

L'intervalle de temps pour lequel  $P(x) \geq 0$  est :  $I = [9,216 ; 60,284]$ .

Donc on a la durée :  $60,284 - 9,216 = 51,068$  secondes.

- 8** Répondez à la problématique.

Les passagers restent en impesanteur pendant environ 51 secondes.

LEXIQUE	Instruction	Signification
python	while	Exécuter la boucle tant que la condition indiquée est vraie.

Début

Saisir les valeurs des coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$  du polynôme, ainsi que la valeur de la borne inférieure de l'intervalle de définition.

$f(x)$  reçoit la valeur 0 et on démarre le balayage à 0

Calculer  $f(0), f(1), f(2)$  jusqu'à ce qu'il y ait deux nombres  $i$  et  $i+1$  tels que  $f(i)$  et  $f(i+1)$  soient de signes opposés :  $x_1$  prend la valeur de  $i+1$

Calculer la solution  $x_2$  en redémarrant le balayage à partir de la valeur de  $x_1$

Afficher les valeurs de  $x_1$  et  $x_2$ .

Fin

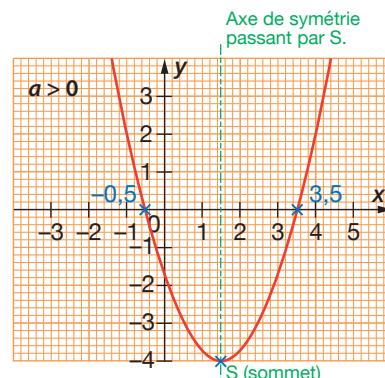
### L'essentiel

#### Représentation d'une fonction polynôme de degré 2

- Une **fondction polynôme de degré 2** est définie pour tout nombre réel  $x$  par  $f(x) = ax^2 + bx + c$  où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des nombres réels et  $a \neq 0$ .
- La courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 2 est une **parabole**.
- Les variations de  $f$  dépendent du signe du coefficient  $a$  :
  - si  $a > 0$ ,  $f$  est décroissante, atteint son minimum puis elle est croissante ;
  - si  $a < 0$ ,  $f$  est croissante, atteint son maximum, puis elle est décroissante.
- Graphiquement les solutions de l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$ , lorsqu'elles existent, sont les abscisses des points d'intersections entre la courbe représentative de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = ax^2 + bx + c$  et l'axe des abscisses.

#### Exemple

- $f(x) = x^2 - 3x - 1,75$  est l'expression d'une fonction polynôme de degré 2 définie sur  $\mathbb{R}$  dont les coefficients réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont  $a = 1$ ,  $b = -3$  et  $c = -1,75$ .
- La courbe représentative de la fonction  $f$  est une parabole.
- L'abscisse du sommet de cette parabole a pour valeur  $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{3}{2} = 1,5$ .
- L'équation  $x^2 - 3x - 1,75 = 0$  admet deux solutions  $x_1 = -0,5$  et  $x_2 = 3,5$ .
- $a > 0$  :  $f$  est décroissante sur  $]-\infty ; 1,5]$  et croissante sur  $[1,5 ; +\infty[$ .



#### Racines d'un polynôme de degré 2

- On appelle **polynôme de degré 2**, l'expression notée  $P(x) = ax^2 + bx + c$ .
- Les solutions de l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  sont appelées **les racines du polynôme**.
- Un polynôme de degré 2 peut s'écrire **sous forme factorisée**  $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$  avec  $x_1$  et  $x_2$  les solutions de l'équation  $P(x) = 0$ .
- L'égalité  $c = a \times x_1 \times x_2$  permet de calculer  $x_2$  connaissant  $x_1$ .

	Le polynôme admet 2 racines $x_1$ et $x_2$	Le polynôme admet 1 racine $x_0$ (appelée racine double)	Le polynôme n'admet aucune racine
Forme factorisée	$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	$P(x) = a(x - x_0)^2$	Pas de factorisation

#### Exemple

$$P(x) = x^2 - 3x - 1,75. \text{ Sachant que } x_1 = -0,5, x_2 = \frac{c}{a \times x_1} = \frac{-1,75}{1 \times (-0,5)} = 3,5.$$

$P(x)$  peut s'écrire sous forme factorisée :  $P(x) = (x + 0,5)(x - 3,5)$ .

#### Signe d'un polynôme de degré 2

- Le polynôme  $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$  admet 2 racines :

$x$	$x_1$	$x_2$	
Signe du polynôme	Signe de $a$	0	Signe de $-a$

- Le polynôme  $P(x) = a(x - x_0)^2$  admet 1 racine double :

$x$	$x_0$	
Signe du polynôme	Signe de $a$	0

- Le polynôme  $P(x) = ax^2 + bx + c$  n'admet aucune racine : il est du signe de  $c$ .

## Savoir-faire

### Savoir-faire 1 Déterminer la deuxième solution d'une équation du second degré connaissant la première

Déterminez la deuxième solution de l'équation  $3x^2 - 3x - 18 = 0$  sachant que la première solution est  $x_1 = -2$ .

#### RÉSOLUTION

- On identifie :  $a = 3$  ;  $b = -3$  ;  $c = -18$  et  $x_1 = -2$ .
- On utilise la relation :  $c = a \times x_1 \times x_2$  en remplaçant  $c$ ,  $a$  et  $x_1$  par leurs valeurs.  
On a :  $-18 = 3 \times (-2) \times x_2$   
On simplifie :  $-18 = -6 \times x_2$ .  
On résout l'équation du premier degré obtenue :  
 $x_2 = \frac{-18}{-6} = 3$ .

#### MÉTHODE

- Identifier les valeurs de  $a$ ,  $b$  et  $c$  dans l'expression du polynôme de degré 2 ainsi que la valeur de la racine  $x_1$  donnée.
- Remplacer dans la relation  $c = a \times x_1 \times x_2$  les coefficients et  $x_1$  par leurs valeurs et résoudre l'équation du premier degré d'inconnue  $x_2$  obtenue.

Voir exercices 6 et 7

### Savoir-faire 2 Déterminer les racines d'un polynôme

Sur l'intervalle  $[-8 ; 4]$ , représentez graphiquement la fonction polynôme  $f(x) = 2x^2 + 4x - 30$  et déterminez les racines du polynôme.

#### TUTO CALCULATRICE

Tracer et exploiter des représentations graphiques de fonctions



[foucherconnect.fr/22mc17](https://foucherconnect.fr/22mc17)

#### Pour afficher la représentation graphique du polynôme sur l'intervalle donné

Casio	NumWorks	TI
<ul style="list-style-type: none"> <li>Dans le menu <b>GRAPH</b>, entrer dans Y1 l'expression de <math>f(x)</math> puis <b>EXE</b>.</li> <li>Régler la fenêtre en cliquant sur <b>SHIFT F3</b> et entrer les valeurs : <math>Xmin = -8</math> et <math>Xmax = 4</math> puis <b>EXE</b></li> <li>Taper <b>F6</b> pour afficher le graphique.</li> <li>Pour régler le Zoom, <b>F2</b>, puis <b>F5</b>.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Dans le menu <b>Fonctions</b>, entrer l'expression de <math>f(x)</math>.</li> <li>Cliquer ensuite sur <b>Graphique</b> <b>OK</b>. La représentation graphique s'affiche alors.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Utiliser la touche <b>f(x)</b> et entrer l'expression de <math>f(x)</math> sur la ligne Y1.</li> <li>Régler la fenêtre sur l'intervalle donné en cliquant sur <b>fenêtre</b> et entrer les valeurs : <math>Xmin = -8</math> et <math>Xmax = 4</math>.</li> <li>Cliquer directement sur la touche <b>graphe</b> pour afficher la représentation graphique.</li> </ul>

#### Pour déterminer les racines du polynôme

Casio	NumWorks	TI
<ul style="list-style-type: none"> <li>Cliquer sur <b>F5</b>, puis sur <b>F1</b>.</li> <li>Avec les flèches du curseur, naviguer entre les 2 racines : <math>x_1 = -5</math> et <math>x_2 = 3</math>.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Cliquer sur la touche <b>OK</b>, puis <b>Calculer</b> et choisir <b>Racines</b>.</li> <li>Avec les flèches du curseur, naviguer entre les 2 racines : <math>x_1 = -5</math> et <math>x_2 = 3</math>.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Cliquer sur les touches <b>2nde trace</b>, puis choisir 2 pour zéro.</li> <li>Avec les flèches du curseur, naviguer entre les 2 racines : <math>x_1 = -5</math> et <math>x_2 = 3</math>.</li> </ul>

Voir exercice 9



## J'utilise le vocabulaire approprié

- 1** Complétez le texte avec les mots proposés.

abscisses ● fonction polynôme de degré 2 ● parabole ● forme factorisée ● signe ● racines

• Une fonction polynôme de degré 2 est définie pour tout nombre  $x$  réel par  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont appelés coefficients de la fonction polynôme. La courbe représentative de  $f$  est une parabole.

Les solutions de l'équation  $f(x) = 0$  sont les abscisses des points d'intersection entre la courbe représentative de la fonction  $f$  et l'axe des abscisses.

• On dit que  $f(x)$  est donnée sous forme factorisée si on peut l'écrire  $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$  où  $a$ ,  $x_1$  et  $x_2$  sont des nombres réels.

Les variations de  $f$  dépendent du signe du coefficient  $a$ .

• Les solutions de l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  sont appelées racines du polynôme  $P(x) = ax^2 + bx + c$ .



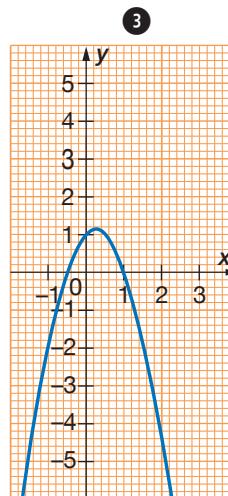
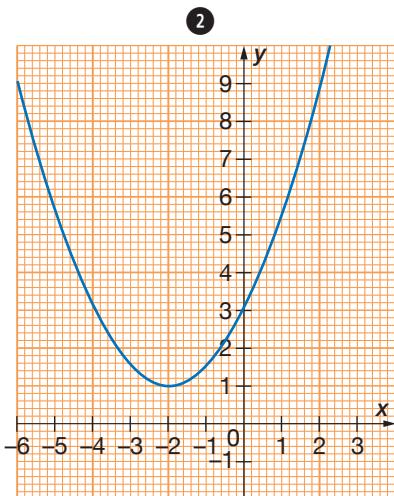
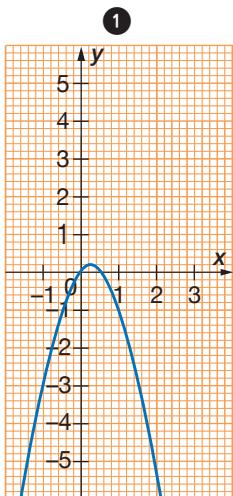
## Je revois des points importants

- 2** Cochez les affirmations exactes.

- 3 est une racine de  $P_1(x) = x^2 - 2x - 3$ .
- 1 est une racine de  $P_2(x) = -3x^2 + 2x + 5$ .
- 1 est une racine de  $P_3(x) = 3x^2 + 2x + 5$ .

- 3** Associez chaque représentation graphique à l'expression de la fonction polynôme du degré 2 qui lui est liée.

- a.  $f_1(x) = 0,5x^2 + 2x + 3$    b.  $f_2(x) = -2x^2 + x + 1$    c.  $f_3(x) = -2x^2 + x$



- La fonction donnée en a. est associée à la représentation graphique 2.
- La fonction donnée en b. est associée à la représentation graphique 3.
- La fonction donnée en c. est associée à la représentation graphique 1.



## Je mémorise

- 4** Réalisez une carte mentale qui reprend le vocabulaire lié aux fonctions de degré 2, leur représentation graphique, les racines et la forme factorisée, ainsi que le signe d'un polynôme du 2<sup>nd</sup> degré.

> Je fais le point page 66

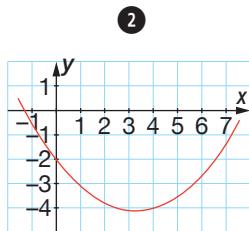
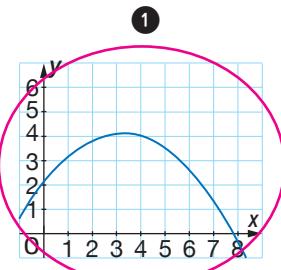
## AUTOMATISMES

Sans calculatrice ni brouillon, répondez aux 3 questions du rituel indiqué par votre professeur.  
Votre réponse est juste ? Bravo ! Cochez la case de l'automatisme correspondant.

### Rituel 1

- A4 Entourez le graphique correspondant aux données du tableau ci-dessous.

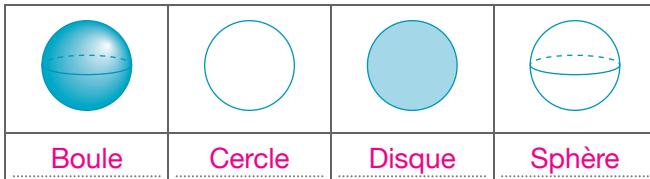
x	0	1	2	3	4
y	2	3,1	3,8	4,1	4



- A7 Résolvez l'inéquation du premier degré suivante :  $-2,5x + 45 > 0$ .

$$-2,5x + 45 > 0 \Leftrightarrow -2,5x > -45 \Leftrightarrow x < 18.$$

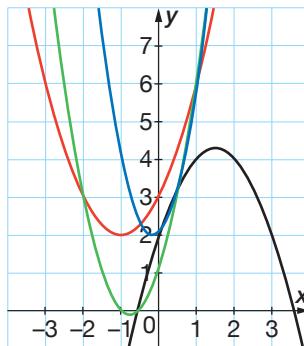
- A17 Donnez le nom de chaque figure représentée. Choisissez ce nom parmi les propositions suivantes : cercle, disque, sphère et boule.



## Représentation d'une fonction polynôme de degré 2

- 1 ★ Parmi les différentes paraboles représentées ci-contre, donnez la couleur de celle qui correspond au polynôme  $P(x) = x^2 + 2x + 3$ .

C'est la courbe rouge.



### Rituel 2

- A5 Déterminez l'étendue de la série statistique suivante.

Caractère	12	15	7	18
Effectif	3	2	3	2

$$e = 18 - 7 = 11.$$

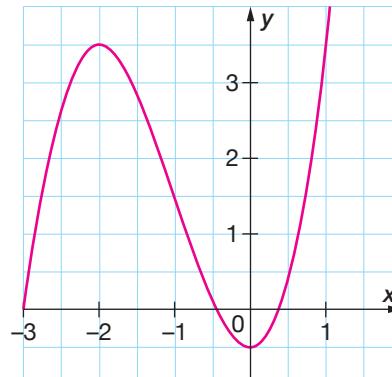
- A23 Développez et réduisez les expressions suivantes.

a.  $(x + 3)(x + 5) = x^2 + 5x + 3x + 15$   
 $= x^2 + 8x + 15$

b.  $(x - 7)(x + 2) = x^2 + 2x - 7x - 14$   
 $= x^2 - 5x - 14$

- A9 Sur l'intervalle  $[-3 ; 1]$ , représentez l'allure de la courbe de la fonction  $f$  dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

x	-3	-2	0	1
Variations de $f$	0	↗ 3,5 ↘ -0,5 ↗ 3,5		



- 2 ★ Pour chacune des fonctions suivantes, déterminez la valeur du coefficient  $a$  et déduisez-en l'allure de la courbe représentative de la fonction.

a.  $f(x) = 3(x^2 - x)$ .

$$f(x) = 3x^2 - 3x$$

Donc :  $a = 3$ .

Allure :



b.  $g(x) = -8(x - 1)(x + 4)$ .

$$g(x) = (-8x + 8)(x + 4)$$

$$g(x) = -8x^2 - 32x + 8x + 32$$

$$g(x) = -8x^2 - 24x + 32$$

Donc :  $a = -8$ .

Allure :



# Exercices

**3** ★ Donnez les coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$  des fonctions de degré 2 suivantes.

a.  $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$ .

$a = 3 ; b = -2 ; c = 4$ .

b.  $g(x) = -4x^2 - 5x + 19$ .

$a = -4 ; b = -5 ; c = 19$ .

**4** ★★ a. À l'aide de la calculatrice, représentez la fonction polynôme de degré 2 définie par  $f(x) = 0,2x^2 + 4x - 3$  sur l'intervalle  $[-15 ; 10]$ .

b. Déterminez l'abscisse du minimum de la fonction sur l'intervalle  $[-15 ; 10]$ .

$x = -10$ .

c. À partir de la courbe obtenue, dressez le tableau de variations de cette fonction sur l'intervalle  $[-15 ; 10]$ .

x	-15	-10	10
Variations de $f$	-18	-23	57

## Racines d'un polynôme de degré 2

**5** ★ Pour chacune des propositions suivantes, testez si le nombre réel donné est racine du polynôme de degré 2.

a.  $P_1(x) = x^2 + x - 2$  et  $x = -2$ .

$P_1(-2) = (-2)^2 + (-2) - 2 = 4 - 4 = 0$ .

Donc  $-2$  est racine du polynôme  $P_1(x)$ .

b.  $P_2(x) = 2x^2 - 3x + 7$  et  $x = 4$ .

$P_2(4) = 2 \times 4^2 - 3 \times 4 + 7 = 32 - 12 + 7 = 27$ .

Donc  $4$  n'est pas racine du polynôme  $P_2(x)$ .

**6** ★★ Soit  $P(x) = -x^2 + 2x + 3$  un polynôme de degré 2. Vérifiez que  $x_1 = -1$  est une racine et déduisez-en sa deuxième racine  $x_2$ .

Vérification de la racine  $x_1$ :

$P(-1) = -(-1)^2 + 2 \times (-1) + 3 = -1 - 2 + 3 = 0$ .

Donc  $-1$  est bien racine de  $P(x)$ .

Détermination de  $x_2$ :

On sait que  $c = a \times x_1 \times x_2$ .

Donc  $x_2 = \frac{c}{a \times x_1} = \frac{3}{-1 \times (-1)} = 3$ .

**7** ★★ Soit  $P_1(x) = 2x^2 - 7x + 3$  un polynôme de degré 2. Vérifiez que  $x_1 = 0,5$  est une racine et déduisez-en sa deuxième racine  $x_2$ .

$P_1(0,5) = 2 \times 0,5^2 - 7 \times 0,5 + 3 = 0$ . La solution est vérifiée.

$c = a \times x_1 \times x_2$  donc  $x_2 = \frac{c}{a \times x_1} = \frac{3}{2 \times 0,5} = 3$ .

**8** ★★ Pour chacun des polynômes suivants, déterminez sa forme factorisée connaissant ses racines  $x_1$  et  $x_2$ .

a.  $P_1(x) = -0,5x^2 - 3x - 2,5$  ;  $x_1 = -1$  et  $x_2 = -5$ .

$P_1(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

$P_1(x) = -0,5(x + 1)(x + 5)$ .

b.  $P_2(x) = 3x^2 - 3x - 18$  ;  $x_1 = -2$  et  $x_2 = 3$ .

$P_2(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

$P_2(x) = 3(x + 2)(x - 3)$ .

**9** ★★ Déterminez, si elles existent, à l'aide de la calculatrice, les racines des polynômes de degré 2 suivants. Arrondissez au dixième.

a.  $P_1(x) = -x^2 - x + 5$ .

Racines :  $x_1 \approx -2,8$  et  $x_2 \approx 1,8$ .

b.  $P_2(x) = 5x^2 + 2x - 3$ .

Racines :  $x_1 = -1,0$  et  $x_2 = 0,6$ .

## Signe d'un polynôme de degré 2

**10** ★ Construisez le tableau de signes du polynôme  $P_1(x) = 4(x - 3)(x + 2)$  de degré 2 sur l'intervalle  $[-4 ; 4]$ .

x	-4	-2	3	4
Signe de $P_1(x)$	+	0	-	0

b. Faites de même pour le polynôme  $P_2(x) = 3(x - 4,2)^2$  sur l'intervalle  $[2 ; 6]$ .

x	2	4,2	6
Signe de $P_2(x)$	+	0	+

**11** ★★ Résolvez à l'aide d'un tableau de signes l'inéquation  $2(x + 3)(x + 0,5) \leqslant 0$  ( $x \in \mathbb{R}$ ).

x	-3	-0,5	
Signe de $2(x + 3)(x + 0,5)$	+	0	-

$2(x + 3)(x + 0,5) \leqslant 0$  si  $-3 \leqslant x \leqslant -0,5$

- 12** ★★ Une entreprise de nettoyage réalise une étude concernant l'évolution du montant de ses recettes.

Soit  $f$  la fonction qui représente ce montant entre 2020 et 2030.

$f$  est définie sur l'intervalle  $[0 ; 10]$ .

$$f(x) = -2000x^2 + 19500x + 110000$$

avec  $f$  le montant des recettes en euros et  $x$  l'année ( $x = 0$  correspond à l'année 2020).

### Problématique

Quel est le montant maximal des recettes de l'entreprise et en quelle année sera-t-il réalisé ?

1. Calculez le montant des recettes pour l'année 2020.

$$f(0) = -2000 \times 0^2 + 19500 \times 0 + 110000$$

$$f(0) = 110000.$$

En 2020, le montant des recettes est donc de 110 000 €.

2. À l'aide de la calculatrice, représentez la fonction  $f$ .

3. Complétez le tableau de variations de la fonction  $f$  donné ci-dessous.

$x$	0	4,875	10
Variations de $f$	110 000	157 530	105 000

4. Donnez la valeur de  $x$  pour laquelle  $f$  est maximale.

$f$  est maximale pour  $x = 4,875$ .

5. Répondez à la problématique.

Le montant maximal des recettes de l'entreprise est de 157 530 euros et il sera atteint au cours de l'année 2024.

- 13** ★★ L'effet Joule est un mode de production de chaleur qui se produit lors du passage du courant électrique dans un conducteur présentant une résistance.

On considère un radiateur électrique de type convecteur équipé d'une résistance électrique, qui, lorsqu'elle est alimentée, chauffe par effet Joule.

On dispose de deux possibilités de résistance pour ce radiateur :

- une résistance de  $22\Omega$  ;
- une résistance de  $180\Omega$ .



La puissance produite par effet Joule dépend de l'intensité  $i$  du courant et de la résistance  $R$  du radiateur, et elle est donnée par la relation  $P = Ri^2$ .

On étudie donc les deux fonctions suivantes définies sur l'intervalle  $[0 ; 0,5]$  :

$$P_1(x) = 22x^2 \text{ et } P_2(x) = 180x^2$$

avec  $P_1$  et  $P_2$  les puissances en watts et  $x$  l'intensité du courant en ampères.

### Problématique

Pour quelles valeurs de résistance et d'intensité, la puissance produite par effet Joule est-elle maximale ?

1. Proposez une méthode permettant de répondre à la problématique.

On doit déterminer les maximums des deux fonctions  $P_1(x)$  et  $P_2(x)$  et on compare leur valeur.

On représente pour cela les deux fonctions à

l'aide de la calculatrice sur l'intervalle  $[0 ; 0,5]$ .

La fonction pour laquelle le maximum est le plus grand est celle qu'on doit retenir. On note alors les valeurs de  $R$  et  $i$  correspondant à cette fonction.

2. Réalisez la méthode proposée et répondez à la problématique.

Les deux fonctions sont croissantes sur  $[0 ; 0,5]$ .

Comme  $180 > 22$  alors c'est la fonction

$$P_2(x) = 180x^2 \text{ qu'il faut retenir.}$$

$$\text{On a pour } x = 0,5, P_2(x) = 45.$$

Donc la valeur de la résistance est  $R = 180\Omega$  et celle de l'intensité est  $i = 0,5\text{ A}$ .

- 14** ★★★ Le musée d'Orsay à Paris est ouvert de 9 h 30 à 18 h le lundi.

Alice et Malick souhaitent se rendre au musée mais ils préfèrent éviter la foule.

La fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[9,5 ; 18]$  indique le nombre moyen  $f$  de visiteurs du musée d'Orsay en fonction de l'heure  $x$  de la journée :

$$f(x) = -156x^2 + 4\,300x - 26\,739.$$

## Problématique

À quel moment de la journée le nombre de personnes dans le musée sera-t-il inférieur à 2 500 visiteurs ?



1. Proposez une méthode permettant de répondre à la problématique.

Il faut résoudre l'inéquation  $f(x) < 2\,500$  en utilisant la calculatrice.

Pour cela, on détermine les racines du polynôme :

$$P(x) = -156x^2 + 4\,300x - 29\,239.$$

2. Réalisez la méthode proposée et répondez à la problématique.

On trouve  $x_1 = 12,196$  et  $x_2 = 15,368$ .

Entre 9 h 30 et 12 h 11 et entre 15 h 22 et 18 h,

le nombre de visiteurs est inférieur à 2 500.

(Calcul pour déterminer 12 h 11 :

on a  $12,196 \text{ h} = 12 \text{ heures} + 0,196 \times 60 \text{ minutes} \approx 12 \text{ h } 11 \text{ minutes.}$ )

- 15** ★★★ Alizée vient d'acheter une toute nouvelle voiture avec laquelle elle peut désormais suivre sa consommation en carburant en fonction de sa vitesse.

Elle obtient les valeurs suivantes pour des vitesses supérieures à 70 km/h.

Vitesse (en km/h)	70	90	110	130	150
Consommation (en L/100 km)	3,1	3,7	4,5	5,3	6

Elle dispose des valeurs de consommation de son ancienne voiture sur un fichier tableur.

## Problématique

Pour quelles vitesses les deux voitures ont-elles la même consommation ?

1. Ouvrez le fichier « C05\_72\_conso.xlsx ».

[foucherconnect.fr/22mc26](http://foucherconnect.fr/22mc26)

2. Donnez le nom de la représentation graphique correspondant à la fonction représentée sur le fichier. **C'est une parabole.**

3. Recopiez ci-dessous l'expression de la fonction  $f$  donnant une approximation de la consommation de carburant en fonction de la vitesse de l'ancienne voiture d'Alizée.

$$f(x) = 0,000\,3x^2 - 0,000\,9x + 1,308\,6.$$

4. Complétez, dans le fichier, le tableau correspondant à la nouvelle voiture d'Alizée afin d'afficher la courbe représentative de la consommation de la nouvelle voiture d'Alizée.



Représenter un nuage de points



[foucherconnect.fr/22mc27](http://foucherconnect.fr/22mc27)

5. Recopiez l'expression de cette nouvelle fonction. On la notera  $g$ .

$$g(x) = 0,000\,04x^2 + 0,029\,1x + 0,853\,6.$$

6. Déterminez l'expression de la fonction  $h$  définie par  $h(x) = f(x) - g(x)$ .

$$\begin{aligned} h(x) = f(x) - g(x) &= (0,000\,3x^2 - 0,000\,9x + 1,308\,6) \\ &\quad - (0,000\,04x^2 + 0,029\,1x + 0,853\,6) \\ &= (0,000\,3 - 0,000\,04)x^2 + (-0,000\,9 - 0,029\,1)x \\ &\quad + (1,308\,6 - 0,853\,6) \end{aligned}$$

$$h(x) = 0,000\,26x^2 - 0,03x + 0,455.$$

On peut également retrouver cette équation à l'aide du tableur en calculant dans une autre colonne  $h(x)$  et en représentant la courbe.

7. Représentez la fonction  $h$  telle que  $h(x) = f(x) - g(x)$  à l'aide de la calculatrice.

8. Déterminez le point d'intersection entre l'axe des abscisses et la courbe de la fonction  $h$  sur l'intervalle  $[70 ; 130]$ . Arrondissez à l'unité.

$$x_1 = 17,963 \approx 18 \text{ et } x_2 = 97,421 \approx 97.$$

9. Répondez à la problématique.

À 18 km/h et 97 km/h les deux voitures ont la même consommation.

- 16** ★★★  Lors d'une rencontre de basketball, nous observons la trajectoire du ballon lancé par un joueur. Le joueur est à 4 m du panier et le ballon doit atteindre au moins une hauteur supérieure à 3,05 m.



La hauteur du ballon est modélisée par la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0 ; 4]$  par :

$$f(x) = -0,75x^2 + 3,075x + 0,575.$$

$x$  est la distance, en m, parcourue par le ballon depuis le moment du tir et  $f(x)$  est la hauteur, en m, du ballon par rapport au sol.

#### Problématique

Le tir est-il un tir réussi ?

1. Montrez que résoudre  $f(x) \geq 3,05$  revient à résoudre l'inéquation  $-0,75x^2 + 3,075x - 2,475 \geq 0$ .

$$f(x) \geq 3,05 \Leftrightarrow -0,75x^2 + 3,075x - 0,575 \geq 3,05$$

$$\Leftrightarrow -0,75x^2 + 3,075x - 2,475 \geq 0.$$

2. Soit  $P$  le polynôme de degré 2 défini par  $P(x) = -0,75x^2 + 3,075x - 2,475$  sur l'intervalle  $[0 ; 4]$ . Donnez les valeurs des coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$ .  
 $a = -0,75$  ;  $b = 3,075$  ;  $c = -2,475$ .

3. Vérifiez que  $x_1 = 1,1$  est une des racines du polynôme  $P(x) = -0,75x^2 + 3,075x - 2,475$ .

$$P(1,1) = -0,75 \times 1,1^2 + 3,075 \times 1,1 - 2,475$$

$P(1,1) = 0$ . La solution est donc vérifiée.

4. Calculez la deuxième solution de l'équation  $P(x) = 0$  connaissant la première solution  $x_1$ .

On sait que  $c = a \times x_1 \times x_2$ .

$$\text{Donc } x_2 = \frac{c}{a \times x_1} = \frac{-2,475}{-0,75 \times 1,1} = 3.$$

5. Déduez-en l'expression factorisée de  $P(x)$ .

On sait que :  $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ .

Donc on obtient l'expression factorisée suivante :

$$P(x) = -0,75(x - 3)(x - 1,1).$$

6. Étudiez le signe du polynôme  $P(x)$  à l'aide d'un tableau de signes.

$x$	0	1,1	3	4
Signe de $P(x)$	-	0	+	0

7. Répondez à la problématique.

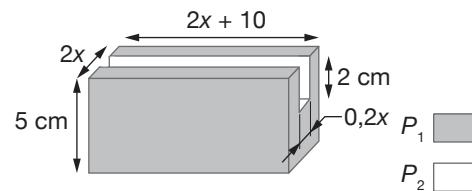
Le panier n'est pas marqué, car le ballon est

au-dessus de 3,05 mètres seulement entre

1,1 mètre parcouru et 3 mètres parcourus.

À 4 mètres, il arrivera en dessous du panier.

- 17** ★★★  Hassan travaille sur l'impression en 3D d'un support de téléphone. Sa pièce est constituée d'un pavé droit  $P_1$  de volume  $V_1$  auquel on enlève un pavé droit  $P_2$  de volume  $V_2$ . Les dimensions, en cm, sont données sur le schéma ci-dessous. Le volume de plastique utilisé ne doit pas excéder 1 000 cm<sup>3</sup>.



#### Problématique

Quelle valeur maximale de  $x$  Hassan doit-il prendre pour imprimer sa pièce ?

1. a. Complétez le tableau pour  $x = 2$  cm.

	$P_1$	$P_2$
Longueur	$2 \times 2 + 10 = 14$	$2 \times 2 + 10 = 14$
Largeur	$2 \times 2 = 4$	$0,2 \times 2 = 0,4$
Hauteur	5	2
Volume (en cm <sup>3</sup> )	$V_1 = 14 \times 4 \times 5 = 280$	$V_2 = 14 \times 0,4 \times 2 = 11,2$

b. Calculez le volume  $V$  de plastique utilisé pour la pièce.

$$V = V_1 - V_2 = 280 - 11,2 = 268,8 \text{ cm}^3.$$

2. Démontrez que le volume  $V$  s'exprime en fonction de  $x$  par  $V(x) = 19,2x^2 + 96x$ .

$$V = V_1 - V_2 = 5(2x + 10)(2x) - 2(2x + 10)(0,2x)$$

$$V = 20x^2 + 100x - 0,8x^2 - 4x = 19,2x^2 + 96x.$$

3. Pour trouver la valeur de  $x$  telle que  $V(x) = 1 000 \text{ cm}^3$ , on résout l'équation :

$$19,2x^2 + 96x - 1 000 = 0.$$

Cette équation admet 2 solutions  $x_1$  et  $x_2$ .

a. Sachant que  $x_1 \approx -10,14$ , déterminez la valeur de  $x_2$ .

Arrondissez au centième.

$$x_2 = \frac{-1 000}{19,2 \times (-10,14)} \approx 5,14.$$

b. Donnez la valeur de  $x$  à rentrer dans la machine. Justifiez.

$x = 5,14$  car cette valeur est positive.

4. Répondez à la problématique.

La valeur maximale de  $x$  est 5,14 cm.

# Évaluation

Compétences	S'approprier				Analyser Raisonner				Réaliser				Valider				Communiquer			
Questions	1a				1c				1a – 1b – 2a – 2b – 2c				2d – 2e				1c – 2e			
Niveau d'acquisition	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4

## Situation

Les comètes sont des petits corps glacés en orbite autour du Soleil qui décrivent une trajectoire elliptique autour de lui. Plus elles sont proches du Soleil, plus elles vont vite, du fait de l'attraction gravitationnelle.

On suit la vitesse d'une comète autour du Soleil sur la période où elle est proche. Celle-ci est donnée par la fonction  $f$  définie sur  $[0 ; 2,6]$  par :

$$f(x) = -24,5x^2 + 63,7x + 0,6$$

avec  $f(x)$  la vitesse en km/s et  $x$  le temps en années (on prend pour  $x = 0$  le moment où on commence l'observation de la comète).



Lors de sa rotation, la chaleur du Soleil va faire perdre de sa masse à la comète lorsqu'elle sera au plus près de notre étoile, c'est-à-dire quand elle atteindra une vitesse supérieure à 30 km/s et on observera alors une traînée blanche dans son sillage.

## Problématique

À quel moment au cours de l'observation de son mouvement, la comète va-t-elle avoir une traînée blanche derrière elle ?

### 1 Étude de la fonction f

a. **S'approprier** **Réaliser** Calculez la vitesse de la comète, en km/s, au bout de 9 mois d'observation (c'est-à-dire pour  $x = 0,75$  année). Arrondissez au dixième.

$$f(0,75) = -24,5 \times 0,75^2 + 63,7 \times 0,75 + 0,6 = 34,6 \text{ km/s.}$$

b. **Réaliser** À l'aide de la calculatrice, représentez graphiquement la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; 2,6]$ .

c. **Analyser/Raisonner** **Communiquer** Décrivez l'allure de la courbe observée et nommez-la.

La courbe observée est celle d'une fonction croissante sur l'intervalle  $[0 ; 1,3]$ , puis décroissante sur  $[1,3 ; 2,6]$ .

C'est une parabole.

### 2 Étude d'un polynôme de degré 2

a. **Réaliser** Montrez que l'inéquation  $f(x) \geq 30$  peut s'écrire :  $-24,5x^2 + 63,7x - 29,4 \geq 0$ .

$$f(x) \geq 30 \Leftrightarrow -24,5x^2 + 63,7x + 0,6 \geq 30 \Leftrightarrow -24,5x^2 + 63,7x + 0,6 - 30 \geq 0 \Leftrightarrow -24,5x^2 + 63,7x - 29,4 \geq 0.$$

b. **Réaliser** Soit  $P(x)$  le polynôme défini par  $P(x) = -24,5x^2 + 63,7x - 29,4$ .

Sachant que ce polynôme a pour racine  $x_1 = 0,6$ , déterminez la deuxième solution  $x_2$  de l'équation  $-24,5x^2 + 63,7x - 29,4 = 0$ .

$$c = a \times x_1 \times x_2 \text{ donc } x_2 = \frac{c}{a \times x_1} = \frac{-29,4}{-24,5 \times 0,6} = 2.$$

c. **Réaliser** Complétez le tableau de signes du polynôme  $P(x)$ .

$x$	0	0,6	2	2,6
Signe de $P(x)$	–	0	+	0 –

d. **Valider** À l'aide du tableau de signes du polynôme  $P(x)$ , résolvez l'inéquation  $P(x) \geq 0$ .

$$P(x) \geq 0 \Leftrightarrow 0,6 \leq x \leq 2.$$

e. **Valider** **Communiquer** Répondez à la problématique.

La comète va perdre de la masse car elle sera proche du Soleil entre 0,6 an (7 mois et 6 jours) et 2 ans après le début de l'observation de la comète. On observera alors une traînée blanche.

# Dérivée et variations d'une fonction

6

## Capacités

- Construire en un point la tangente à la courbe représentative d'une fonction  $f$  connaissant le nombre dérivé en ce point ou à l'aide d'outils numériques.
- Déterminer, par une lecture graphique, lorsqu'il existe, le nombre dérivé d'une fonction  $f$  en l'abscisse d'un point de la courbe représentative de cette fonction.
- Écrire l'équation réduite de la tangente à une courbe en un point lorsqu'elle existe.
- Utiliser les formules et les règles de dérivation pour déterminer la dérivée d'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 2.
- Étudier, sur un intervalle donné, les variations d'une fonction à partir du calcul et de l'étude du signe de sa dérivée. Dresser son tableau de variations.
- Déterminer un extremum d'une fonction sur un intervalle donné à partir de son sens de variation.
- Étudier la fonction inverse : dérivée, variations, représentation graphique. Dresser son tableau de variations.

## Activités

Activité 1

Activité 2

Activité 3

Activité 4

## Je m'échauffe !

### Activité 1 p. 76

- a. Soit  $\mathcal{D}$  la droite d'équation réduite :  $y = 2x - 3$ .  
L'ordonnée à l'origine de  $\mathcal{D}$  est -3.  
Le coefficient directeur de  $\mathcal{D}$  est 2.
- b.  $\mathcal{D}$  est la représentation graphique d'une fonction affine  $f$ . Donnez le sens de variation de  $f$ .  $f$  est croissante

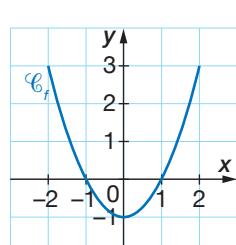


### Activité 2 p. 77

- a. Résolvez l'équation suivante :  $7 = 2x - 5$ .  
Ensemble des solutions : {6}.
- b. Si  $f$  est une fonction décroissante sur  $[-3 ; 5]$  alors :
- $f(-3) < f(5)$      $f(-3) = f(5)$      $f(-3) > f(5)$

### Activité 3 p. 78

- Voici la représentation graphique de la fonction  $f$  définie sur  $[-2 ; 2]$ .  
Complétez les affirmations suivantes.
- $f$  est croissante sur l'intervalle  $[0 ; 2]$ .
  - $f$  est négative sur l'intervalle  $[-1 ; 1]$ .
  - $f$  est nulle pour  $x = -1$  et  $x = 1$ .



### Activité 4 p. 79

- Indiquez le signe des produits ou quotients suivants.
- $1,37 \times 1,89$  : positif
  - $(-1,37) \times 1,89$  : négatif
  - $1,37 \div (-1,89)$  : négatif
  - $(-1,37) \div (-1,89)$  : positif

# Activité

1

## Déterminer un nombre dérivé

### SITUATION . Rien ne sert de courir

José part en vacances avec sa voiture. La distance parcourue au cours des 6 heures de trajet est modélisée par la fonction  $f$  définie sur  $[0 ; 6]$  par :

$$f(x) = -5,5x^3 + 49x^2 + 10x$$

où  $x$  représente le temps, en heures, et  $f(x)$  représente la distance parcourue, en kilomètres.

#### Problématique

José a-t-il respecté la vitesse limite de 130 km/h tout le long du trajet ?



- 1 **S'approprier** Calculez la distance totale parcourue par José.

$$f(6) = -5,5 \times 6^3 + 49 \times 6^2 + 10 \times 6 = 636. \text{ La distance totale est donc de } 636 \text{ km.}$$

- 2 **Réaliser** Analyser/Raisonner [foucherconnect.fr/22mc28](http://foucherconnect.fr/22mc28) Ouvrez le fichier « C06\_76\_Activite1.ggb ».

La courbe représentative de la fonction  $f$  est tracée dans deux fenêtres graphiques. Dans la fenêtre de droite, cochez la case ZOOM pour obtenir un zoom autour du point A de la courbe.

Selectionnez l'outil puis utilisez le curseur « Position de A » pour modifier la position du point A sur la courbe et observez la portion de courbe zoomée autour du point A.

Par quel type de tracé semble-t-on pouvoir toujours remplacer la courbe quand on zoome autour d'un de ses points ?

On peut remplacer la courbe par une droite.

- 3 La droite qui approche le mieux la courbe juste autour du point A est appelée « **Tangente** à la courbe au point A ».

a. **Réaliser** Utilisez le curseur pour positionner le point A sur la courbe de façon à obtenir  $x(A) = 1$ .

Selectionnez l'outil tangente . Dans la fenêtre de gauche, cliquez sur le point A, puis sur la courbe.

Notez l'équation réduite de la tangente ainsi obtenue et déduisez-en son coefficient directeur.

Équation réduite :  $y = 91,5x - 38$  Coefficient directeur : 91,5

- b. **Valider** Le coefficient directeur de la tangente au point A de la courbe représentative de  $f$  est appelé **nombre dérivé** de  $f$  pour l'abscisse  $x_A$ , noté  $f'(x_A)$ .

Dans la situation étudiée,  $f'(x_A)$  représente la vitesse de la voiture, en km/h, après un temps de trajet égal à  $x_A$ , en heures.

Déduisez-en la vitesse de la voiture après 1 heure de trajet.

$$f'(1) = 91,5.$$

Après une heure de trajet, la vitesse de la voiture est égale à 91,5 km/h.

- c. **Réaliser** **Communiquer** Répondez à la problématique. Détaillez la démarche suivie.

En déplaçant le point A sur la courbe, on constate que le coefficient directeur de la tangente (nombre dérivé) varie et qu'il dépasse 130 sur une portion de la courbe. José n'a donc pas respecté la vitesse limite de 130 km/h tout le long du trajet.

# Activité 2

## Déterminer la fonction dérivée d'une fonction

### SITUATION . Sécurité routière

Voici le slogan mis en avant par une association de prévention routière :

« Pour un automobiliste sans ceinture ou pour un piéton, une collision à 50 km/h revient à faire une chute de 10 mètres de hauteur. »

#### Problématique

Le slogan de l'association est-il réaliste ?



La hauteur de chute d'une personne est modélisée par la fonction  $f$  définie sur  $[0 ; 2]$  par :

$$f(x) = 4,9x^2$$

où  $f(x)$  représente la hauteur de chute (en mètres) et  $x$  la durée de la chute (en secondes).

La vitesse de la personne, en m/s, après une durée  $x$  de chute, en s, est donnée par le nombre dérivé  $f'(x)$ .

La fonction, notée  $f'$ , qui à  $x$  associe  $f'(x)$  est appelée **fonction dérivée** de  $f$ .

Dans cette activité, on considère que  $50 \text{ km/h} = 13,9 \text{ m/s}$ .

- 1 a.** Réaliser Analyser/Raisonner [foucherconnect.fr/22mc29](http://foucherconnect.fr/22mc29) Ouvrez le fichier « C06\_77\_Activite2.ggb ».

La courbe représentative de la fonction  $f$  est tracée ainsi que la tangente au point d'abscisse  $x$ .

Utilisez le curseur pour modifier l'abscisse du point de la courbe et complétez la deuxième ligne du tableau ci-dessous avec les valeurs des nombres dérivés  $f'(x)$ .

$x$	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2
Nombre dérivé $f'(x)$	0	3,92	7,84	11,76	15,68	19,6
$\frac{f'(x)}{x}$		9,8	9,8	9,8	9,8	9,8

#### Coup de pouce

$f'(x)$  est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse  $x$  de la courbe.

- b.** Réaliser Complétez la troisième ligne du tableau, puis notez ce que vous constatez pour les rapports  $\frac{f'(x)}{x}$ .  
Les rapports  $\frac{f'(x)}{x}$  sont tous égaux à 9,8.

- c.** Valider Déduisez-en l'expression de la fonction dérivée  $f'$  :  $f'(x) = 9,8x$

- 2 a.** Réaliser Résolvez l'équation  $f'(x) = 13,9$ . Arrondissez au centième.

$$f'(x) = 13,9 \Leftrightarrow 9,8x = 13,9 \Leftrightarrow x = \frac{13,9}{9,8} = 1,42 \text{ au centième près.}$$

- b.** Valider Communiquer D'après l'énoncé de l'activité, la solution obtenue est la durée au bout de laquelle une personne en chute atteint la vitesse de 13,9 m/s soit 50 km/h.

Déduisez-en, à l'aide de la fonction  $f$ , la réponse à la problématique.

La vitesse de 50 km/h est atteinte pour 1,42 seconde de chute.

$f(1,42) = 4,9 \times 1,42^2 \approx 9,88$ . La hauteur de chute qui correspond à cette vitesse est donc égale à 9,88 m  $\approx 10$  m.

Le slogan de l'association est réaliste.

# Activité

## 3

# Étudier les variations d'une fonction

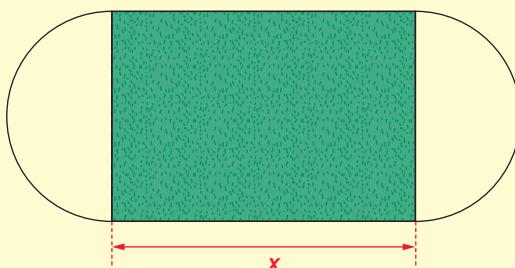
### SITUATION . Optimiser les dimensions du stade

La forme d'une piste d'athlétisme est celle d'un rectangle avec deux demi-cercles aux extrémités.

On souhaite que la surface rectangulaire tramee en vert soit la plus grande possible.

Si la piste d'athlétisme mesure 400 m, alors l'aire de la surface rectangulaire (en  $\text{m}^2$ ) en fonction de sa longueur  $x$  (en m) est modélisée par la fonction  $f$  définie sur  $[0 ; 200]$  par :

$$f(x) = -0,636 \ 6x^2 + 127,32x.$$



#### Problématique

Quelle est l'aire maximale de la surface rectangulaire et quelle est alors sa longueur ?

- 1 a. **S'approprier** Calculez l'aire de la surface rectangulaire si sa longueur mesure 60 m.

$$f(60) = -0,636 \ 6 \times 60^2 + 127,32 \times 60 = 5 \ 347,44.$$

L'aire est donc égale à 5 347,44  $\text{m}^2$ .

- b. **Réaliser** Représentez graphiquement la fonction  $f$ .

Pour la fenêtre d'affichage, réglez  $\text{Ymin} = 0$  et  $\text{Ymax} = 6 \ 400$ .

- c. **Analyser/Raisonner** Indiquez sur quel intervalle la fonction  $f$  est :

croissante : [0 ; 100]      décroissante : [100 ; 200]

- 2 a. **Réaliser** Représentez graphiquement la fonction dérivée  $f'$  de la fonction  $f$ , définie sur  $[0 ; 200]$  par :  $f'(x) = -1,273 \ 2x + 127,32$ .

Pour la fenêtre d'affichage, réglez  $\text{Ymin} = -130$  et  $\text{Ymax} = 130$ .

- b. **Analyser/Raisonner** Dans chacune des phrases suivantes, entourez la proposition correcte pour que la phrase soit exacte.

- Lorsque  $f$  est croissante, sa dérivée  $f'$  est **positive** / **négative** / **égale à 0**.
- Lorsque  $f$  est décroissante, sa dérivée  $f'$  est **positive** / **négative** / **égale à 0**.
- Lorsque  $f$  atteint un extremum, sa dérivée  $f'$  est **positive** / **négative** / **égale à 0**.

- 3 a. **Valider** Utilisez les réponses aux questions 1c et 2 pour compléter le tableau de variations ci-dessous.

$x$	0	100	200
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Variations de $f$	0	6 366	0

$$f(0) = 0 ; f(100) = -0,636 \ 6 \times 100^2 + 127,32 \times 100 = 6 \ 366 ; f(200) = 0.$$

Coup de pouce

Complétez la ligne « Signe de  $f'(x)$  » avec les signes + et - ainsi que la valeur 0.

- b. **Communiquer** Répondez à la problématique.

L'aire maximale de la surface rectangulaire est de 6 366  $\text{m}^2$ . Elle est obtenue pour une longueur égale à 100 m.

# Activité 4 Étudier la fonction inverse

## SITUATION . Liberté, égalité .... fraternité

Avant l'hiver, une association caritative a réalisé des collectes de nourriture qui devaient permettre de nourrir 400 000 personnes pendant les 100 jours d'hiver.

Le nombre de bénéficiaires inscrits n'a cependant pas été de 400 000 et les collectes n'ont permis de nourrir tous les bénéficiaires inscrits que pendant 64 jours. Une nouvelle collecte a donc dû être organisée.



### Problématique

Combien de bénéficiaires étaient inscrits cet hiver ?

- 1 S'approprier** Expliquez si le nombre de bénéficiaires inscrits cet hiver a été supérieur ou inférieur à 400 000.

Les collectes n'ont tenu que 64 jours. Il y a donc eu plus de 400 000 bénéficiaires.

- 2 Réaliser** On modélise le nombre de jours de distribution en fonction du nombre  $x$  de bénéficiaires par la fonction  $f$  définie sur  $[100\ 000 ; 1\ 000\ 000]$  par  $f(x) = 40\ 000\ 000 \times \frac{1}{x}$ .

Complétez le tableau de valeurs de la fonction  $f$ .

$x$	100 000	200 000	400 000	800 000	1 000 000
$f(x)$	400	200	100	50	40

- 3 Analyser/Raisonnez** Quel semble être le sens de variation de la fonction  $f$  ?

La fonction  $f$  semble être décroissante (quand  $x$  augmente,  $f(x)$  diminue).

- 4 Réaliser** La fonction  $g$  d'expression  $g(x) = \frac{1}{x}$  est la fonction **inverse**.

Sa dérivée  $g'$  a pour expression  $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$ .

Déduisez-en l'expression de la fonction dérivée  $f'$  de la fonction  $f$ .

$$f'(x) = 40\ 000\ 000 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-40\ 000\ 000}{x^2}.$$

- 5 Analyser/Raisonnez** Justifiez que la fonction dérivée  $f'$  est négative sur  $[100\ 000 ; 1\ 000\ 000]$ .

Pour tout  $x \in [100\ 000 ; 1\ 000\ 000]$ ,  $x^2 > 0$  donc  $\frac{-40\ 000\ 000}{x^2} < 0$  (règle des signes).

Coup de pouce

Si  $f(x) = c \times w(x)$ , alors  $f'(x) = c \times w'(x)$ .

- 6 Réaliser** Représentez graphiquement la fonction  $f$ .

Pour la fenêtre d'affichage, réglez  $Y_{\min} = 0$  et  $Y_{\max} = 400$ .

- 7 Valider** Indiquez si la représentation graphique est cohérente avec les réponses aux questions 3 et 5.

La courbe « descend », ce qui est cohérent avec la réponse à la question 3. Par ailleurs, «  $f$  est décroissante » est cohérent avec «  $f'$  est négative ».

- 8 Réaliser** Résolvez graphiquement l'équation  $f(x) = 64$ .

On obtient une solution : 625 000.

- 9 Valider Communiquer** Répondez à la problématique

Cet hiver, il y a eu 625 000 bénéficiaires inscrits.

### TUTO CALCULATRICE

Résoudre une équation de type  $f(x) = c$



foucherconnect.fr/22mc30

# Activité

Algo  
Pro

## Étudier les fonctions polynômes de degré 2

MES FICHIERS

Python



foucherconnect.fr/22mc31

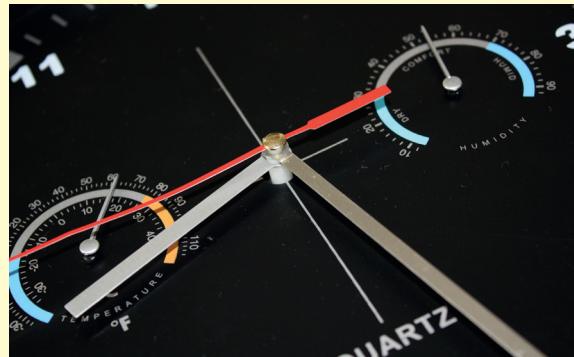
### SITUATION . Ne perdez pas de temps !

Une montre à quartz peut prendre du retard en fonction de la température à laquelle est soumis son quartz.

Pour des températures comprises entre  $5^{\circ}\text{C}$  et  $45^{\circ}\text{C}$ , on peut modéliser ce retard par la fonction  $f$  définie sur  $[5 ; 45]$  par :

$$f(x) = 0,003x^2 - 0,15x + 1,875.$$

$f(x)$  représente le retard (en secondes par jour) et  $x$  représente la température (en degrés Celsius).



#### Problématique

Pour quelle température le retard pris par une montre à quartz est-il minimal ? Quel est ce retard ?

1 On s'intéresse aux fonctions polynômes de degré 2 de la forme  $ax^2 + bx + c$ .

a. Cochez l'expression de la dérivée :   $ax + b$    $2ax + b$    $bx + c$    $2ax + c$

b. Identifiez les valeurs des coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$  pour la fonction  $f$  de la situation étudiée.

Déduisez de la question 1a l'expression de la dérivée  $f'$ , puis calculez  $f'(1)$ .

$a = 0,003$  ;  $b = -0,15$  et  $c = 1,875$  donc  $f'(x) = 0,006x - 0,15$  ;  $f'(1) = -0,144$ .

#### LANGAGE PYTHON

2 a. Éditez et complétez le programme « C06\_80\_AlgoPro.py » sachant que :

- l'utilisateur doit saisir les valeurs des coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$  ;
- nombre\_dérivé( $x$ ) doit renvoyer le nombre dérivé de la fonction pour l'abscisse  $x$ .

b. Vérifiez le bon fonctionnement de votre programme avec la fonction  $f$  de la situation étudiée.

Pour cela, lancez le programme et entrez les valeurs de  $a$ ,  $b$  et  $c$ , puis saisissez nombre\_dérivé(1).

Le résultat obtenu est-il cohérent avec la question 1b ?

On obtient  $-0,144$ . C'est cohérent avec  $f'(1) = -0,144$  obtenu à la question 1b.

3 a. On ajoute au programme précédent les lignes de code ci-contre. Complétez et saisissez ces lignes afin d'obtenir les nombres dérivés pour  $x \in [5 ; 45]$  avec un pas de 1.

```

9   x=5
10  while x< 45  :
11      print("f'", x, ")=", nombre_dérivé(x))
12      x=x+ 1

```

b. Appliquez le programme à la fonction  $f$  de la situation étudiée. Indiquez pour quelle valeur de  $x$  la fonction dérivée  $f'$  change de signe.

La fonction dérivée  $f'$  change de signe pour  $x = 25$ .

c. Répondez à la problématique.

La dérivée est négative pour  $x \in [5 ; 25]$  et positive pour  $x \in [25 ; 45]$ . Donc la fonction atteint un minimum pour  $x = 25$  et  $f(25) = 0,003 \times 25^2 - 0,15 \times 25 + 1,875 = 0$ .

Le retard minimal est donc nul et est obtenu pour une température de  $25^{\circ}\text{C}$ .

LEXIQUE

#### Instruction

#### Signification

`while x<10 :`

Exécute les instructions de la boucle, écrites à la ligne en retrait, tant que (while)  $x < 10$ .

### L'essentiel

#### Tangente et nombre dérivé

On considère une fonction  $f$  et un point  $A(x_A ; y_A)$  de sa courbe représentative  $\mathcal{C}_f$ .

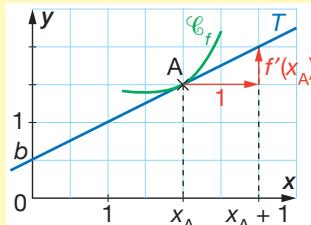
- La tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point  $A$  est la droite ( $T$ ) qui approche le mieux la courbe  $\mathcal{C}_f$  autour du point  $A$ .

Les autres droites passant par le point  $A$  sont des sécantes à la courbe.

- Le coefficient directeur de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point  $A$  est appelé **nombre dérivé** de la fonction  $f$  en  $x_A$ .

Il est noté  $f'(x_A)$  que l'on lit «  $f$  prime de  $x_A$  ».

- L'équation réduite de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point  $A$  est :  $y = f'(x_A) x + b$ .



#### Fonction dérivée

- La **fonction dérivée** d'une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$ , est la fonction notée  $f'$  qui, à chaque valeur  $x$  de l'intervalle  $I$ , associe le nombre dérivé  $f'(x)$ .

- Formules de dérivation ( $a, b$  et  $c$  sont des réels et  $u, v$  et  $w$  sont des fonctions) :

• Si $f(x) = ax + b$	alors $f'(x) = a$	• Si $f(x) = u(x) + v(x)$	alors $f'(x) = u'(x) + v'(x)$
• Si $f(x) = x^2$	alors $f'(x) = 2x$	• Si $f(x) = c \times w(x)$	alors $f'(x) = c \times w'(x)$

**Exemples** Soit  $f$  et  $g$  les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 + 3x - 5$  et  $g(x) = -7x^2$ .

•  $f(x) = u(x) + v(x)$  avec  $u(x) = x^2$  et  $v(x) = 3x - 5$  donc  $f'(x) = u'(x) + v'(x) = 2x + 3$ .

•  $g(x) = c \times w(x)$  avec  $c = -7$  et  $w(x) = x^2$  donc  $g'(x) = c \times w'(x) = -7 \times 2x = -14x$ .

#### Dérivée et variations d'une fonction

- Une fonction  $f$  est **croissante** sur un intervalle  $I \Leftrightarrow$  pour tout  $x$  appartenant à  $I$ ,  $f'(x) > 0$ .

Une fonction  $f$  est **décroissante** sur un intervalle  $I \Leftrightarrow$  pour tout  $x$  appartenant à  $I$ ,  $f'(x) < 0$ .

- Une fonction  $f$  admet un **extremum local** en  $x_0 \Leftrightarrow f'$  s'annule et change de signe pour  $x_0$ .

L'extremum local peut être un maximum ou un minimum et vaut  $f(x_0)$ .

$x$	$x_0$		
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Variations de $f$	↘ $f(x_0)$ ↗		

$x$	$x_0$		
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Variations de $f$	↗ $f(x_0)$		↘

- Les plus petite et plus grande valeurs de  $f(x)$  pour  $x \in I$  sont les **extremums globaux** de  $f$  sur  $I$ .

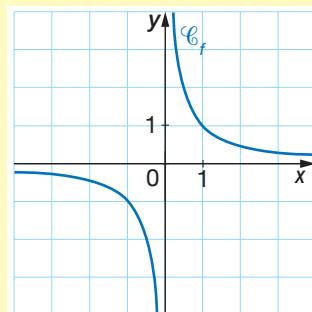
#### Fonction inverse

- La fonction  $f$  définie pour tout nombre réel  $x$  non nul par  $f(x) = \frac{1}{x}$  est la fonction **inverse**.

- Sa courbe représentative est une **hyperbole** d'équation  $y = \frac{1}{x}$ .

- Pour tout nombre réel  $x$  non nul,  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ .

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-		-
Variations de $f$	↗ ↘		↗

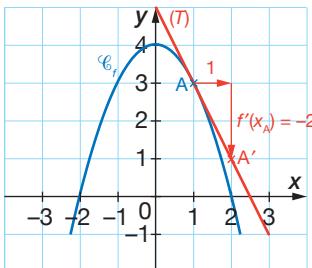


## Savoir-faire

## Savoir-faire 1 Construire une tangente

Construisez la tangente ( $T$ ) à la courbe au point A sachant que  $f'(x_A) = -2$ .

## RÉSOLUTION



## MÉTHODE

- Partir du point A choisi.
- Faire un déplacement horizontal à droite de A de 1 unité, puis vertical de la valeur du nombre dérivé  $f'(x_A)$  (vers le haut s'il est positif et vers le bas s'il est négatif).
- Tracer la tangente entre le point choisi et le point d'arrivée après les décalages.

[Voir exercice 1](#)

## Savoir-faire 2 Écrire l'équation réduite d'une tangente

Écrivez l'équation réduite de la tangente ( $T$ ) à la courbe  $C_f$  au point A(1 ; 3) sachant que  $f'(1) = -2$ .

## RÉSOLUTION

- Tangente ( $T$ ) au point A :  $y = f'(x_A)x + b$ .
- $x_A = 1$  et  $f'(x_A) = f'(1) = -2$ .
- ( $T$ ) :  $y = f'(1)x + b$   
( $T$ ) :  $y = -2x + b$ .
- $x_A = 1$  et  $y_A = 3$ .  
On remplace dans l'équation :  $3 = -2 \times 1 + b$   
soit  $3 = -2 + b$ .  
Donc  $b = 3 + 2 = 5$ .
- ( $T$ ) :  $y = -2x + 5$ .

## MÉTHODE

- Écrire l'équation générale de ( $T$ ) au point choisi.
- Identifier l'abscisse du point A choisi et le nombre dérivé associé  $f'(x_A)$ .
- Remplacer le nombre dérivé par sa valeur dans l'équation de la tangente.
- Remplacer  $x$  et  $y$  dans l'équation par les coordonnées du point choisi et déterminer la valeur de  $b$ .
- Écrire l'équation réduite de la tangente.

[Voir exercices 1, 2 et 5](#)

## Savoir-faire 3 Étudier les variations d'une fonction

Étudiez les variations de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = 3x^2 - 9x + 1$  sur  $[-5 ; 5]$ .

## RÉSOLUTION

- $f(x)$  est de la forme  $u(x) + v(x)$  avec  $u(x) = 3x^2$  et  $v(x) = (-9x + 1)$   
Formule :  $f'(x) = u'(x) + v'(x)$ .
- $u(x)$  est de la forme  $c \times w(x)$  avec  $c = 3$  et  $w(x) = x^2$ .  
Formules :  $u'(x) = c \times w'(x)$  et  $w'(x) = 2x$ . Donc  $u'(x) = 3 \times 2x = 6x$ .
- $v(x)$  est de la forme  $ax + b$  avec  $a = -9$  ; formule :  $v'(x) = a = -9$ .  
Finalement  $f'(x) = u'(x) + v'(x) = 6x - 9$ .
- Graphiquement ou par le calcul  $f'(x) = 0$  pour  $x = 1,5$ .  
 $f'(x)$  possède donc un signe sur  $[-5 ; 1,5[$  et un signe sur  $]1,5 ; 5]$ .  
 $f'(0) = 6 \times 0 - 9 = -9 < 0$  donc  $f'(x) < 0$  pour  $x \in [-5 ; 1,5[$  ;  
 $f'(2) = 6 \times 2 - 9 = 3 > 0$  donc  $f'(x) > 0$  pour  $x \in ]1,5 ; 5]$ .

$f$  est donc décroissante sur l'intervalle  $[-5 ; 1,5[$

et croissante sur l'intervalle  $]1,5 ; 5]$ .

**Remarques :** les variations de la fonction  $f$  sont rassemblées dans un tableau de variations (cf Accompagnement personnalisé page 83).

## MÉTHODE

- Identifier la forme de la fonction, puis utiliser les formules de dérivation pour déterminer l'expression de la dérivée.
- Résoudre l'équation  $f'(x) = 0$  et étudier le signe de  $f'(x)$  pour en déduire les variations de la fonction  $f$ .

[Voir exercices 6 à 14](#)



## J'utilise le vocabulaire approprié

- 1** Complétez les pointillés en choisissant parmi les propositions ci-dessous.

(Certaines propositions peuvent ne pas être utilisées).

le nombre dérivé ● la tangente ● la fonction dérivée ● la fonction inverse ● croissante ● décroissante  
● positive ● négative ● une fonction polynôme de degré 2

- La fonction  $f$  qui a pour expression  $\frac{1}{x}$  est la fonction inverse.

La fonction qui a pour expression  $-\frac{1}{x^2}$  est la fonction dérivée de la fonction  $f$  précédente.

- Si  $g$  est une fonction,  $g'(3)$  est son nombre dérivé pour  $x = 3$ . C'est aussi le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction  $g$  au point d'abscisse 3.

- Lorsque la dérivée d'une fonction  $h$  est positive sur un intervalle  $I$ , alors la fonction  $h$  est croissante sur l'intervalle  $I$ .



## Je revois des points importants

- 2** a. Déterminez la dérivée de la fonction  $f$  définie sur  $[-4 ; 2]$  par  $f(x) = -0,5x^2$ .

$f$  est de la forme  $c \times w(x)$  avec  $c = -0,5$  et  $w(x) = x^2$ . Formule :  $f'(x) = c \times w'(x)$  et  $w'(x) = 2x$ .

Donc  $f'(x) = -0,5 \times 2x = -x$ .

- b. Déterminez la dérivée de la fonction  $g$  définie sur  $[-4 ; 2]$  par  $g(x) = -x + 2,5$ .

$g(x)$  est de la forme  $ax + b$  avec  $a = -1$ . Formule :  $g'(x) = a = -1$ . Donc  $g'(x) = -1$ .

- c. Déterminez la dérivée de la fonction  $h$  définie sur  $[-4 ; 2]$  par  $h(x) = -0,5x^2 - x + 2,5$ .

$h(x)$  est de la forme  $u(x) + v(x)$  avec  $u(x) = f(x) = -0,5x^2$  et  $v(x) = g(x) = -x + 2,5$ .

Formule :  $h'(x) = u'(x) + v'(x) = f'(x) + g'(x) = -x - 1$ .

- d. Résolvez l'équation  $h'(x) = 0$  et étudiez le signe de  $h'(x)$  sur l'intervalle  $[-4 ; 2]$ .

Résolution de l'équation  $h'(x) = 0$  :  $-x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ .

Signe de  $h'(x)$  :  $h'(-2) = -(-2) - 1 = 1 > 0$  donc  $h'(x) > 0$  pour  $x \in [-4 ; -1[$  ;

$h'(0) = 0 - 1 = -1 < 0$  donc  $h'(x) < 0$  pour  $x \in ]-1 ; 2]$ .

- e. Complétez le tableau de variations de la fonction  $h$  sur l'intervalle  $[-4 ; 2]$ .

$h(-4) = -0,5 \times (-4)^2 - (-4) + 2,5 = -1,5$  ;

$h(-1) = -0,5 \times (-1)^2 - (-1) + 2,5 = 3$  ;

$h(2) = -0,5 \times 2^2 - 2 + 2,5 = -1,5$ .

$x$	-4	-1	2
Signe de $h'(x)$	+	0	-
Variations de $h$	-1,5 ↗ 3 ↘ -1,5		

- f. Donnez les extrema locaux et globaux de la fonction  $h$ .

$h$  possède un maximum local égal à 3, obtenu pour  $x = -1$ .

$h$  possède un minimum global égal à -1,5, obtenu pour  $x = -4$  et pour  $x = 2$ .



## Je mémorise

- 3** Réalisez une carte mentale qui reprend le vocabulaire lié aux fonctions dérivées.

> Je fais le point page 81

# Exercices

## AUTOMATISMES

Sans calculatrice ni brouillon, répondez aux 3 questions du rituel indiqué par votre professeur.  
Votre réponse est juste ? Bravo ! Cochez la case de l'automatisme correspondant.

### Rituel 1

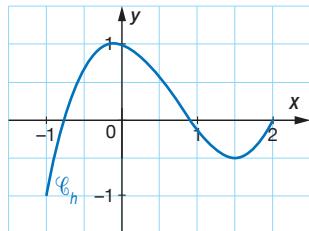
- A22 Développez l'expression suivante :  
 $7(-2 + x) = \underline{-14 + 7x}$
- A2 Un club de volley compte 128 membres. Sur les 36 femmes membres, 22 sont inscrites en loisir (ne font pas de compétition). Par ailleurs, 52 hommes sont inscrits en compétition. On tire au hasard un membre du club. Après avoir complété le tableau d'effectifs, calculez la probabilité  $P$  que le membre soit un homme inscrit en loisir.

	Homme	Femme	Total
Compétition	52	14	66
Loisir	40	22	62
Total	92	36	128

$$P = \frac{40}{128} = \underline{\frac{5}{16}}.$$

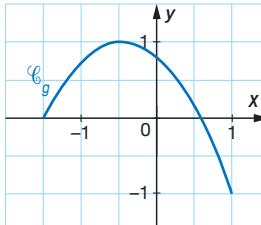
- A11 Déterminez les extréums globaux de la fonction  $h$  représentée ci-contre.

Extremums globaux :  
 Max = 1 ; Min = -1.



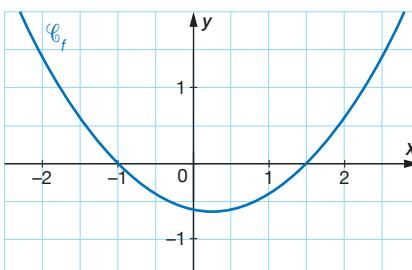
### Rituel 2

- A10 Voici la représentation graphique de la fonction  $g$  définie sur  $[-1,5 ; 1]$ . Dressez le tableau de variations de cette fonction.



x	-1,5	-0,5	1
Variations de $g$	0	↑ 1 ↓ -1	-1

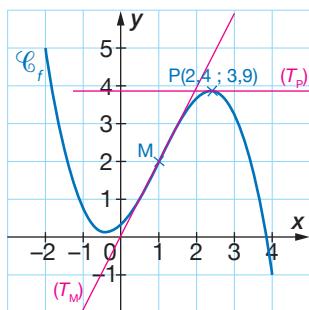
- A15 La courbe représentative de la fonction  $f$  est donnée ci-dessous. Résolvez graphiquement l'équation  $f(x) \leqslant 0$ .  $\underline{[-1 ; 1,5]}$



- A19 Calculez l'aire  $\mathcal{A}$  d'un disque de diamètre  $D = 2$  cm.  $\mathcal{A} = \pi \text{ cm}^2$ .

## Tangente et nombre dérivé

-  Voici la courbe  $\mathcal{C}_f$  représentative de la fonction  $f$  définie sur  $[-2 ; 4]$ .



- a. Déterminez  $f(1)$  :  $f(1) = \underline{2}$   
 b. Tracez la tangente  $(T_M)$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point M sachant que  $f'(1) = 2$ .

- c. Déterminez l'équation réduite de  $(T_M)$ .

L'équation de  $(T_M)$  s'écrit  $y = f'(x_M)x + b$ .

Ici  $x_M = 1$  et  $f'(1) = 2$ , donc  $(T_M)$  :  $y = 2x + b$ .

Pour déterminer  $b$ , on remplace  $x$  et  $y$  par  $x_M = 1$  et  $y_M = 2$ . On obtient :  $2 = 2 \times 1 + b$  soit  $2 = 2 + b$ .

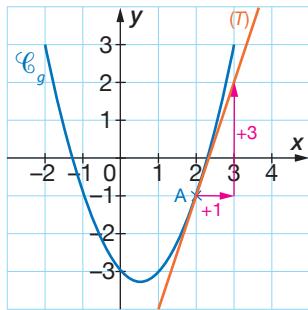
Donc  $b = 0$  et  $(T_M)$  :  $y = 2x$ .

Remarque : le tracé de  $(T_M)$  passant par l'origine, on pouvait directement supposer que  $b = 0$ .

- d. Tracez la tangente  $(T_P)$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point P sachant qu'elle est parallèle à l'axe des abscisses.

- e. Déterminez l'équation réduite de  $(T_P)$ .  
 $(T_P)$  :  $y = \underline{3,9}$ .

- 2** ★★ Voici la courbe  $\mathcal{C}_g$  représentative de la fonction  $g$  définie sur  $[-2 ; 3]$  et la tangente ( $T$ ) à la courbe  $\mathcal{C}_g$  au point A.



a. Déterminez le coefficient directeur de la tangente ( $T$ ). Graphiquement, on lit que le coefficient directeur de la tangente ( $T$ ) est égal à 3.

b. Indiquez ce que représente cette valeur pour la fonction  $g$  et sa notation.

Il s'agit du nombre dérivé de la fonction  $g$  pour

$x = x_A = 2$ . On le note  $g'(2) = 3$ .

c. Déterminez l'équation réduite de ( $T$ ).

D'après le cours, l'équation réduite de ( $T$ ) s'écrit

$y = g'(x_A)x + b$ .

Ici  $x_A = 2$  et  $g'(2) = 3$ , donc ( $T$ ) :  $y = 3x + b$ .

Pour déterminer  $b$ , on remplace  $x$  et  $y$  par  $x_A = 2$  et  $y_A = -1$ . On obtient :  $-1 = 3 \times 2 + b$

soit  $-1 = 6 + b$ . Donc  $b = -7$  et ( $T$ ) :  $y = 3x - 7$ .

- 3** ★ Soit  $f$  la fonction définie sur  $[-1 ; 3]$  par  $f(x) = x^2 - 1,5x + 2$ .

a. Ouvrez un fichier GeoGebra et tracez la courbe  $\mathcal{C}_f$  représentative de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[-1 ; 3]$ .

b. Utilisez l'outil pour tracer la tangente ( $T$ ) à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 0.

c. Donnez l'équation de la tangente ( $T$ ).

$y = -1,5x + 2$ .

d. Donnez les valeurs de  $f(0)$  et de  $f'(0)$ .

$f(0) = 2$  et  $f'(0) = -1,5$ .

e. Vérifiez graphiquement la valeur de  $f'(0)$  avec l'outil .

### TUTO CALCULATRICE

Tracer une tangente à une courbe



foucherconnect.fr/22mc32

- 4** ★ Soit  $f$  la fonction définie sur  $[-5 ; 0] \cup [0 ; 7]$  par  $f(x) = 0,1x^2 + \frac{4}{x}$ .

a. Utilisez l'outil numérique de votre choix pour tracer la courbe  $\mathcal{C}_f$  représentative de la fonction  $f$ .

Réglage de la fenêtre d'affichage :

$X_{\min} = -5$  ;  $X_{\max} = 7$  ;  $Y_{\min} = -5$  ;  $Y_{\max} = 5$ .

b. Tracez la tangente ( $T$ ) à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 4 et notez son équation.

$y = 0,55x + 0,4$ .

c. Donnez les valeurs de  $f(4)$  et de  $f'(4)$ .

$f(4) = 2,6$  et  $f'(4) = 0,55$ .

- 5** ★★ Dans chaque cas, déterminez l'équation de la tangente ( $T$ ) à la courbe représentative de  $f$  au point E.

a. E(2 ; 3) et  $f'(2) = 4$ .

( $T$ ) :  $y = f'(x_E)x + b = f'(2)x + b = 4x + b$ .

$y_E = 4x_E + b$  soit  $3 = 4 \times 2 + b = 8 + b$ .

Donc  $b = 3 - 8 = -5$  et ( $T$ ) :  $y = 4x - 5$ .

b. E(1 ; -3) et  $f'(1) = -2$ .

( $T$ ) :  $y = f'(x_E)x + b = f'(1)x + b = -2x + b$ .

$y_E = -2x_E + b$  soit  $-3 = -2 \times 1 + b = -2 + b$ .

Donc  $b = -3 + 2 = -1$  et ( $T$ ) :  $y = -2x - 1$ .

c. E(-5 ; 3) et  $f'(-5) = 0$ .

( $T$ ) :  $y = f'(x_E)x + b = f'(-5)x + b = 0x + b = b$ .

$y_E = b$  soit  $3 = b$  et ( $T$ ) :  $y = 3$ .

### Fonction dérivée

- 6** ★ Donnez la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes définies sur  $\mathbb{R}$ .

a.  $f_1(x) = -6x^2$ .  $f'_1(x) = -12x$

b.  $f_2(x) = 3x - 2$ .  $f'_2(x) = 3$

c.  $f_3(x) = 4x$ .  $f'_3(x) = 4$

d.  $f_4(x) = \sqrt{2}$ .  $f'_4(x) = 0$

- 7** ★ Donnez la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes définies sur  $\mathbb{R}$ .

a.  $f_1(x) = 7x^2 + 1$ .  $f'_1(x) = 14x$

b.  $f_2(x) = -x^2 - 4x$ .  $f'_2(x) = -2x - 4$

c.  $f_3(x) = \frac{x^2}{2} + \pi x - \sqrt{3}$ .  $f'_3(x) = x + \pi$

**8** ★★ a. Déterminez la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -5x^2 + x + 1\,000$ .

$$f'(x) = -10x + 1.$$

b. Calculez le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction  $f$  au point d'abscisse  $-1$ .

Le coefficient directeur de la tangente est le nombre dérivé de la fonction  $f$  pour  $x = -1$ , c'est-à-dire  $f'(-1)$ .

$$f'(-1) = -10 \times (-1) + 1 = 11.$$

**11** ★★ On considère la fonction  $f$  définie sur  $[-2 ; 6]$  par  $f(x) = 0,4x^2 - 2x + 1$ .

a. Complétez les pointillés :  $f'(x) = 0,8x - 2$

b. Résolvez l'équation  $f'(x) = 0$ .

$$0,8x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2,5.$$

c. Étudiez le signe de  $f'(x)$ .

$$f'(0) = 0,8 \times 0 - 2 = -2 < 0 \text{ donc } f'(x) < 0$$

pour  $x \in [-2 ; 2,5[$ .

$$f'(5) = 0,8 \times 5 - 2 = 2 > 0 \text{ donc } f'(x) > 0$$

pour  $x \in [2,5 ; 6[$ .

d. Complétez le tableau de variations de la fonction  $f$ .

$x$	-2	2,5	6
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Variations de $f$	6,6	-1,5	3,4

$$f(-2) = 0,4 \times (-2)^2 - 2 \times (-2) + 1 = 6,6.$$

$$f(2,5) = 0,4 \times 2,5^2 - 2 \times 2,5 + 1 = -1,5.$$

$$f(6) = 0,4 \times 6^2 - 2 \times 6 + 1 = 3,4.$$

e. Donnez les extremums de la fonction  $f$ .

Maximum : 6,6 ; Minimum : -1,5.

## Dérivée et variations d'une fonction

**9** ★ On considère la fonction  $f$  définie sur  $[-10 ; 10]$  par  $f(x) = 3x - 1$ .

a. Complétez les pointillés :  $f'(x) = 3$

b. Étudiez le signe de  $f(x)$ .

Pour tout  $x \in [-10 ; 10]$ ,  $f'(x) > 0$ .

c. Complétez le tableau de variations de la fonction  $f$ .

$x$	-10	10
Signe de $f'(x)$	+	
Variations de $f$	-31	29

$$f(-10) = 3 \times (-10) - 1 = -31.$$

$$f(10) = 3 \times 10 - 1 = 29.$$

d. Donnez les extremums de la fonction  $f$ .

Maximum : 29 ; Minimum : -31.

**10** ★ Voici le tableau de variations d'une fonction  $f$ .

$x$	-5	-2	4
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Variations de $f$	-1	6	-3

a. Donnez l'intervalle d'étude de la fonction  $f$ .

[-5 ; 4]

b. Indiquez quels sont les extremums de la fonction  $f$ . Précisez pour chaque extremum s'il est local ou global (voir cours).

6 est un maximum local et global de  $f$ .

-3 est un minimum global de  $f$ .

c. Donnez la valeur de  $x$  pour laquelle  $f'$  s'annule.

$f'$  s'annule pour  $x = -2$ .

d. Donnez l'intervalle sur lequel la dérivée de  $f$  est négative. ]-2 ; 4]

**12** ★★ On considère la fonction  $f$  définie sur  $[-2 ; 4]$  par  $f(x) = 0,2x^2 + 1,2x + 1$ .

a. Déterminez la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$ .

$$f'(x) = 0,4x + 1,2.$$

b. Résolvez l'équation  $f'(x) = 0$ .

$$0,4x + 1,2 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \text{ qui n'appartient pas à l'intervalle } [-2 ; 4].$$

c. Étudiez le signe de  $f'(x)$ .

$$f'(0) = 0,4 \times 0 + 1,2 = 1,2 > 0 \text{ donc } f'(x) > 0$$

pour  $x \in [-2 ; 4]$ .

d. Complétez le tableau de variations de la fonction  $f$ .

$x$	-2	4
Signe de $f'(x)$	+	
Variations de $f$	-0,6	9

$$f(-2) = 0,2 \times (-2)^2 + 1,2 \times (-2) + 1 = -0,6.$$

$$f(4) = 0,2 \times 4^2 + 1,2 \times 4 + 1 = 9.$$

e. Donnez les extremums de la fonction  $f$ .

Maximum : 9 ; Minimum : -0,6.

## Fonction inverse

- 13** ★★ a. Complétez le tableau avec la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes définies pour tout nombre  $x$  non nul.

Fonction	Fonction dérivée
$f_1(x) = -2 \times \frac{1}{x}$	$f'_1(x) = \frac{2}{x^2}$
$f_2(x) = 1,5x^2 + \frac{3}{x}$	$f'_2(x) = 3x - \frac{3}{x^2}$
$f_3(x) = 1 + \frac{1}{4x}$	$f'_3(x) = -\frac{1}{4x^2}$
$f_4(x) = -\frac{4}{3x} - 3x + 8$	$f'_4(x) = \frac{4}{3x^2} - 3$
$f_5(x) = x + x^2 - \frac{1}{x} + 7$	$f'_5(x) = 1 + 2x + \frac{1}{x^2}$

- b. Étudiez le signe de  $f'_1(x)$ .

Pour tout nombre  $x$  non nul,  $x^2 > 0$ .

D'après la règle des signes  $f'_1(x) = \frac{2}{x^2} > 0$ .

- c. Complétez le tableau de variations de la fonction  $f_1$ .

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f'_1(x)$	+		+
Variations de $f_1$			

- 14** ★★★ Logique ▶ p. 146 Soit  $f$  une fonction définie pour tout nombre  $x$  négatif et  $f'$  sa dérivée telle que  $f'(x) = \frac{1}{5x^2} - 7x$ .

Montrez, sans utiliser d'outils numériques, que la fonction  $f$  est croissante sur l'ensemble des nombres réels négatifs.

$f$  est croissante sur l'ensemble des nombres réels négatifs si pour tout nombre  $x$  négatif,  $f'(x) > 0$ .

Pour tout nombre  $x$  négatif :

$$-7x > 0 \text{ et } x^2 > 0 \Rightarrow 5x^2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{5x^2} > 0.$$

Donc pour tout nombre  $x$  négatif,

$$f'(x) = \frac{1}{5x^2} - 7x > 0.$$

- 15** ★★★ Soit la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; 1]$  par  $f(x) = -8x + 5 - \frac{1}{2x}$ .

- a. Déterminez la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$ .

$$f'(x) = -8 + \frac{1}{2x^2}.$$

- b. Déterminez l'équation réduite de la tangente ( $T$ ) à la courbe  $\mathcal{C}_f$  représentative de la fonction  $f$ , au point A d'abscisse 0,5.

D'après le cours, l'équation réduite de ( $T$ ) s'écrit

$$y = f'(x_A)x + b.$$

Ici  $x_A = 0,5$  et  $f'(0,5) = -8 + \frac{1}{2 \times 0,5^2} = -6$ , donc ( $T$ ) :  $y = -6x + b$ .

Pour déterminer  $b$ , on remplace  $x$  et  $y$  par  $x_A = 0,5$

et  $y_A = f(x_A) = f(0,5) = 0$ . On obtient :

$$0 = -6 \times 0,5 + b \text{ soit } 0 = -3 + b.$$

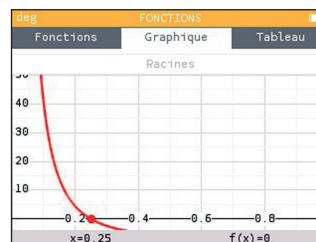
Donc  $b = 3$  et ( $T$ ) :  $y = -6x + 3$ .

- c. Utilisez un outil numérique pour représenter graphiquement la fonction dérivée  $f'$ .

Réglage de la fenêtre d'affichage :

$$Y_{\min} = -10 ; Y_{\max} = 50.$$

- d. Étudiez le signe de  $f'(x)$  en utilisant la représentation graphique de  $f'$  donnée ci-dessous.



$f'(x) > 0$  sur  $]0 ; 0,25[$ .

$f'(x) < 0$  sur  $]0,25 ; 1]$ .

- e. Complétez le tableau de variations de la fonction  $f$ .

$x$	0	0,25	1	
Signe de $f'(x)$	+	0	-	
Variations de $f$		1		-3,5

$$f(0,25) = -8 \times 0,25 + 5 - \frac{1}{2 \times 0,25} = 1 ;$$

$$f(1) = -8 \times 1 + 5 - \frac{1}{2 \times 1} = -3,5.$$

- f. Indiquez, s'il existe, l'extremum local de  $f$ .

La fonction  $f$  admet un maximum local égal à 1.

# Problèmes

16 ★★

 Une entreprise spécialisée dans la production de tablettes numériques a une capacité de production hebdomadaire pouvant aller jusqu'à 300 unités. On note  $x$  le nombre de tablettes fabriquées et vendues par semaine.

Soit la fonction  $f$  définie sur  $[0 ; 300]$  par :

$$f(x) = -x^2 + 450x - 20\,000.$$

Pour des valeurs entières de  $x$ , on modélise le résultat de l'entreprise (en euros) par  $f(x)$ .

## Problématique

Quel nombre de tablettes fabriquées et vendues par semaine permet d'obtenir le résultat maximal ? Quel est ce résultat hebdomadaire ?

1. Calculez  $f(100)$ , puis dites ce que représente concrètement le résultat obtenu dans la situation étudiée.

$$f(100) = -100^2 + 450 \times 100 - 20\,000 = 15\,000.$$

Pour 100 tablettes fabriquées et vendues par semaine, le résultat de l'entreprise est de 15 000 €.

2. Déterminez la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$ .

$$f'(x) = -2x + 450.$$

3. Résolvez l'équation  $f'(x) = 0$ .

$$-2x + 450 = 0 \Leftrightarrow x = 225.$$

4. Étudiez le signe de  $f'(x)$ .

$$f'(1) = -2 \times 1 + 450 = 448 > 0 \text{ donc } f'(x) > 0$$

pour  $x \in [0 ; 225]$ .

$$f'(250) = -2 \times 250 + 450 = -50 < 0 \text{ donc } f'(x) < 0$$

pour  $x \in ]225 ; 300]$ .

5. Complétez le tableau de variations de la fonction  $f$ .

$x$	0	225	300
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Variations de $f$	$-20\,000$	$\rightarrow 30\,625$	$\leftarrow 25\,000$

$$f(0) = -0^2 + 450 \times 0 - 20\,000 = -20\,000.$$

$$f(225) = -225^2 + 450 \times 225 - 20\,000 = 30\,625.$$

$$f(300) = -300^2 + 450 \times 300 - 20\,000 = 25\,000.$$

6. Donnez les extrêmes de la fonction  $f$ .

Maximum : 30 625 ; Minimum : -20 000.

7. Répondez à la problématique.

Le résultat hebdomadaire maximal est de 30 625 € et il est obtenu pour 225 tablettes fabriquées et vendues.

17



Une entreprise doit fabriquer des caisses en plastique pour un producteur de pommes. Le producteur demande que chaque caisse ait un volume de  $0,3 \text{ m}^3$  et une longueur  $L$  fixée à 1,2 m.



Pour des raisons de coût de production, l'entreprise cherche à utiliser un minimum de plastique.

## Problématique

Quelle hauteur  $x$  (en mètres) possède la caisse qui utilise le minimum de plastique ?

On modélise la situation par la fonction  $f$  définie sur  $[0,2 ; 1]$  par :

$$f(x) = 2,4x + 0,5 + \frac{0,3}{x}.$$

$f(x)$  représente l'aire totale (en  $\text{m}^2$ ) des 5 faces d'une caisse.

1. Calculez  $f(0,5)$ , puis dites ce que représente concrètement le résultat obtenu dans la situation étudiée.

$$f(0,5) = 2,4 \times 0,5 + 0,5 + \frac{0,3}{0,5} = 2,3.$$

Pour une hauteur de 0,5 m, l'aire totale

des 5 faces de la caisse est égale à  $2,3 \text{ m}^2$ .

2. Déterminez la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$ .

$$f'(x) = 2,4 - \frac{0,3}{x^2}.$$

3. Déterminez l'équation réduite de la tangente ( $T$ ) à la courbe  $C_f$  représentative de la fonction  $f$ , au point A d'abscisse 0,5.

D'après le cours, l'équation réduite de ( $T$ ) s'écrit

$$y = f'(x_A)x + b.$$

$$\text{Ici } x_A = 0,5 \text{ et } f'(0,5) = 2,4 - \frac{0,3}{0,5^2} = 1,2, \text{ donc}$$

$$(T) : y = 1,2x + b.$$

Pour déterminer  $b$ , on remplace  $x$  et  $y$  par  $x_A = 0,5$

$$\text{et } y_A = f(x_A) = f(0,5) = 2,3.$$

$$\text{On obtient : } 2,3 = 1,2 \times 0,5 + b = 0,6 + b.$$

$$\text{Donc } b = 1,7 \text{ et } (T) : y = 1,2x + 1,7.$$

4. Utilisez l'outil numérique de votre choix pour représenter graphiquement la fonction dérivée  $f'$  sur l'intervalle  $[0,2 ; 1]$ .

Réglage de la fenêtre d'affichage :

$$Y_{\min} = -5 ; Y_{\max} = 2,5.$$

5. Utilisez la représentation graphique pour étudier le signe de  $f'(x)$ . Arrondissez les valeurs au millième.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,354 \text{ au millième près.}$$

$$f'(0,3) = 2,4 - \frac{0,3}{0,3^2} \approx -0,93 < 0$$

donc  $f'(x) < 0$  sur  $[0,2 ; 0,354]$ .

$$f'(0,5) = 2,4 - \frac{0,3}{0,5^2} = 1,2 > 0$$

donc  $f'(x) > 0$  sur  $[0,354 ; 1]$ .

6. Complétez le tableau de variations de la fonction  $f$ . Arrondissez les valeurs de  $f(x)$  au dixième.

$x$	0,2	0,354	1
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Variations de $f$	2,5 ↓ 2,2	2,2 ↑ 3,2	

$$f(0,2) = 2,4 \times 0,2 + 0,5 + \frac{0,3}{0,2} = 2,5.$$

$$f(0,354) = 2,4 \times 0,354 + 0,5 + \frac{0,3}{0,354} = 2,2.$$

$$f(1) = 2,4 \times 1 + 0,5 + \frac{0,3}{1} = 3,2.$$

7. Répondez à la problématique. Arrondissez au millimètre.

La caisse doit avoir une hauteur de 0,354 m pour que sa production minimise la quantité de plastique utilisé.

- 18 ★★★ python Deux tronçons d'un manège à sensations doivent être remplacés. Les profils des tronçons sont modélisés par :
- la fonction  $f$  définie sur  $[2 ; 6,8]$  par  $f(x) = -0,25x^2 + 1,8x + 0,78$  ;
  - la fonction  $g$  définie sur  $[6,8 ; 12]$  par  $g(x) = 0,25x^2 - 5x + 23,9$ .



Pour que la jonction des deux tronçons soit optimale, deux conditions doivent être remplies :

- les deux profils doivent se rejoindre en un point d'assemblage d'abscisse 6,8 ;
- les tangentes à chacun des profils au point d'assemblage doivent avoir le même coefficient directeur.

### Problématique

La jonction des deux tronçons est-elle optimale ?

1. Calculez les images de 6,8 par les fonctions  $f$  et  $g$ .

$$f(6,8) = -0,25 \times 6,8^2 + 1,8 \times 6,8 + 0,78 = 1,46 ;$$

$$g(6,8) = 0,25 \times 6,8^2 - 5 \times 6,8 + 23,9 = 1,46.$$

2. Déterminez les dérivées des fonctions  $f$  et  $g$ .

$$f'(x) = -0,5x + 1,8 ;$$

$$g'(x) = 0,5x - 5.$$

3. Déduez-en les nombres dérivés des fonctions  $f$  et  $g$  pour  $x = 6,8$ .

$$f'(6,8) = -0,5 \times 6,8 + 1,8 = -1,6 ;$$

$$g'(6,8) = 0,5 \times 6,8 - 5 = -1,6.$$

4. Répondez à la problématique.

Les profils se rejoignent en un point d'assemblage de coordonnées  $(6,8 ; 1,46)$  et les tangentes à chacun des profils au point d'assemblage ont le même coefficient directeur égal à  $-1,6$ .

La jonction des deux tronçons est donc optimale.

5. [foucherconnect.fr/22mc33](https://foucherconnect.fr/22mc33)

Éditez le fichier « C06\_89\_Probleme18.py », puis complétez-le afin que son exécution permette de répondre à la problématique. Les lignes de code doivent définir les 4 fonctions utilisées, puis faire vérifier les conditions de jonction optimale.

# Évaluation

Compétences	S'approprier				Analyser Raisonner				Réaliser				Valider				Communiquer			
Questions	1				3				2 – 3 – 4 – 5a				5b – 6 – 7				7			
Niveau d'acquisition	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4

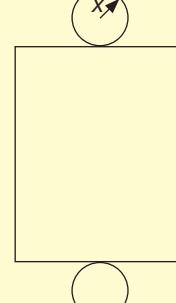
## Situation

Une entreprise fabrique des bouteilles cylindriques en aluminium de contenance 1,5 litre. Elle souhaite minimiser la quantité d'aluminium nécessaire à la fabrication d'une bouteille.

La fabrication se faisant à partir de plaques d'aluminium, l'entreprise veut donc minimiser l'aire du patron d'une bouteille.

Pour un rayon  $x$  (en cm), l'aire (en  $\text{cm}^2$ ) du patron de la bouteille est modélisée par la fonction  $f$  définie sur  $[2 ; 15]$  par :

$$f(x) = 3\,000 \times \frac{1}{x} + 6,28x^2.$$



Patron de la bouteille

## Problématique

Quelle est l'aire minimale pour le patron d'une bouteille ?

Pour quel rayon obtient-on cette aire minimale ?

- 1 **S'approprier** Calculez l'aire du patron de la bouteille si son rayon mesure 5 cm.

$$f(5) = 3\,000 \times \frac{1}{5} + 6,28 \times 5^2 = 757. \text{ L'aire du patron de la bouteille est donc égale à } 757 \text{ cm}^2.$$

- 2 **Réaliser** Déterminez la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$  :  $f'(x) = -\frac{3\,000}{x^2} + 12,56x$ .

- 3 **Réaliser Analyser/Raisonner** Déterminez l'équation réduite de la tangente ( $T$ ) à la courbe représentative de la fonction  $f$ , au point A d'abscisse 5.

$$\text{Équation réduite de } (T) : y = f'(x_A)x + b \quad \text{avec } x_A = 5 \text{ et } f'(5) = -\frac{3\,000}{5^2} + 12,56 \times 5 = -57,2.$$

$$\text{Donc } (T) : y = -57,2x + b.$$

Dans cette écriture, on remplace  $x$  et  $y$  par  $x_A = 5$  et  $y_A = f(5) = 757$ .

On obtient :  $757 = -57,2 \times 5 + b$  soit  $757 = -286 + b$  et donc  $b = 757 + 286 = 1\,043$ .

Équation réduite de  $(T)$  :  $y = -57,2x + 1\,043$ .

- 4 **Réaliser** Représentez graphiquement la fonction dérivée  $f'$ .

Réglage de la fenêtre d'affichage :  $Y_{\min} = -725$  ;  $Y_{\max} = 175$ .

- 5 a. **Réaliser** Résolvez graphiquement l'équation  $f'(x) = 0$ . Arrondissez au dixième.

$x = 6,2$  au dixième près.

- b. **Valider** Étudiez le signe de  $f'(x)$  sur l'intervalle  $[2 ; 15]$ .

$f'(x) < 0$  sur  $[2 ; 6,2[$  et  $f'(x) > 0$  sur  $]6,2 ; 15]$ .

- 6 **Valider Réaliser** Complétez le tableau de variations de la fonction  $f$ . Arrondissez les valeurs de  $f(x)$  à l'unité.

$$f(2) = 3\,000 \times \frac{1}{2} + 6,28 \times 2^2 = 1\,525.$$

$$f(6,2) = 3\,000 \times \frac{1}{6,2} + 6,28 \times 6,2^2 = 725.$$

$$f(15) = 3\,000 \times \frac{1}{15} + 6,28 \times 15^2 = 1\,613.$$

$x$	2	6,2	15
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Variations de $f$	1 525	725	1 613

- 7 **Valider Communiquer** Répondez à la problématique.

L'aire minimale pour le patron d'une bouteille est égale à  $725 \text{ cm}^2$ .

Elle est obtenue pour un rayon mesurant 6,2 cm.

# Géométrie dans l'espace

7

Capacités	Activités
<ul style="list-style-type: none"> <li>Représenter un solide usuel avec un logiciel.</li> <li>Exploiter une représentation d'un solide usuel ou d'un solide constitué d'un assemblage de solides usuels.</li> </ul>	Activité 1
<ul style="list-style-type: none"> <li>En utilisant un logiciel de géométrie dynamique :</li> </ul> <p>Réaliser la section d'un solide usuel par un plan ; Construire la section plane d'un solide passant par des points donnés.</p>	Activité 2

## Je m'échauffe !

### Activité 1 p. 92

Soit le pavé droit ci-contre.

a. Donnez les coordonnées du point C.

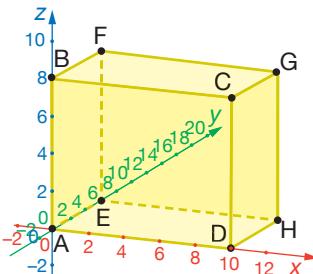
C(10 ; 0 ; 8)

b. Quelle est la nature de la figure FBD ?

FBD est un triangle rectangle en B.

c. Cochez les faces du pavé parallèles à l'arête [GH].

ABCD     ABFE     ADHE



### Activité 2 p. 93

Une canette est partiellement remplie de soda.

a. Nommez le solide usuel qui rappelle au mieux la forme d'une canette.

Le cylindre droit

b. Quel est le nom de la figure usuelle dessinée par la surface du soda vue de dessus dans la position ① ?

un cercle     un disque     une sphère



Position ①    Position ②

c. Quel est le nom de la figure usuelle dessinée par la surface du soda vue de dessus dans la position ② ?

un segment     une ellipse     un rectangle

# Activité

# 1

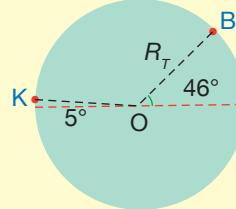
## Représenter un solide usuel et exploiter sa représentation

### SITUATION . La course aux étoiles

Les lanceurs européen, Ariane, et russe, Soyouz, sont situés à Kourou en Guyane et à Baïkonour au Kazakhstan. La Terre est assimilée à une sphère de centre O et de rayon  $R_T = 6,4 \times 10^3$  km. Kourou et Baïkonour sont assimilés à deux points K et B situés respectivement à une latitude de 5° Nord et 46° Nord.

On étudie dans le référentiel géocentrique dont l'origine est le centre de la Terre, le mouvement d'une fusée avant son décollage.

Plus la vitesse de la fusée au sol est grande, plus le décollage est aisé.



### Problématique

Quel site, Kourou ou Baïkonour, est le plus propice au lancement d'une fusée ?

- 1 **S'approprier** Nommez chacun des solides usuels ci-dessous.



Cube



Cône



Cylindre droit



Pavé droit



Pyramide

- 2 **Réaliser** Ouvrez le logiciel GeoGebra 3D et suivez les différentes étapes :

- Supprimez le plan par un clic droit ;
  - Placez le point E(6,4 ; 0 ; 0) en écrivant E=(6.4,0,0) dans le champ de saisie. De même, placez les points F(-6,4 ; 0 ; 0), G(0 ; 0 ; 6,4) et O(0 ; 0 ; 0) ;
  - Construisez la sphère de centre O passant par E avec l'outil ;
  - Tracez le cercle d'axe (Oy) passant par G avec l'outil ;
  - Placez deux points B et K sur ce cercle. Mesurez les angles  $\widehat{EOB}$  et  $\widehat{FOK}$  avec l'outil .
- Déplacez les points B et K pour obtenir  $\widehat{EOB} = 46^\circ$  et  $\widehat{FOK} = 5^\circ$  ;
- Tracez le cercle  $\mathcal{C}_1$  d'axe (Oz) passant par B et le cercle  $\mathcal{C}_2$  d'axe (Oz) passant par K.

**TUTO LOGICIEL**   
Représenter une sphère et exploiter sa représentation

foucherconnect.fr/22mc34

- 3 **Réaliser** Mesurez les périmètres  $P_1$  et  $P_2$  des deux cercles  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  avec l'outil .

Arrondissez à l'unité.  $P_1 = 28$  et  $P_2 = 40$ .

- 4 **Valider** La sphère représente la Terre. Les distances se mesurent en milliers de km. On place une fusée Ariane sur le pas de tir à Kourou et une fusée Soyouz sur le pas de tir à Baïkonour. Déduisez-en, en km, les distances  $d_1$  et  $d_2$  parcourues respectivement par les fusées Ariane et Soyouz au sol, lorsque la Terre fait un tour sur elle-même en 24 h.  $d_1 = 28\ 000$  km et  $d_2 = 40\ 000$  km.

- 5 **Réaliser** Calculez, en km/h, les vitesses  $v_1$  et  $v_2$  de chaque fusée dans le référentiel géocentrique. Arrondissez à l'unité.

$$v_1 = \frac{28\ 000}{24} \approx 1\ 167 \text{ km/h et } v_2 = \frac{40\ 000}{24} \approx 1\ 667 \text{ km/h.}$$

- 6 **Valider Communiquer** Répondez à la problématique. Justifiez.

Kourou est le site le plus propice au lancement d'une fusée, car la vitesse

d'une fusée au sol y est plus grande qu'à Baïkonour.

**Coup de pouce**

Vitesse en km/h :  
 $v = \frac{d}{t}$  où  $d$  est la distance en km et  $t$  le temps en h.

# Activité 2

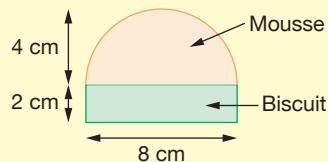
## Réaliser des sections de solides usuels

### SITUATION . Le meilleur entremet

Jade et Medhi participent à un concours de pâtisserie. Lors de la dégustation, le jury coupera chaque gâteau verticalement en deux parts égales et observera la surface obtenue, appelée section.

L'épreuve consiste à réaliser le meilleur entremet dont la section doit avoir la forme ci-contre.

Les deux candidats choisissent quatre moules à gâteau différents parmi les six modèles à leur disposition.



#### Problématique

Lors de la coupe des entremets de Jade et Medhi, le jury observera-t-il la section attendue ?

- 1 **S'approprier** Nommez les deux figures planes qui composent la section.

Un demi-disque et un rectangle.

- 2 **Analyser/Raisonnez** Selon vous, parmi les six moules à leur disposition, quelles formes Jade et Medhi peuvent-ils utiliser pour réaliser leur entremet ? Cochez les bonnes réponses.

- a. Pour la mousse :  demi-boule  demi-cylindre  cône  
b. Pour le biscuit :  cube  pavé droit  cylindre droit

- 3 **Réaliser** foucherconnect.fr/22mc35 • Ouvrez le fichier « C07\_93\_mousse.ggb ».

- Coupez les trois solides par un plan passant par le point O et parallèle à la base du cylindre en sélectionnant l'outil puis en cliquant sur le point O et sur le disque du cylindre droit ;
- Créez l'intersection de ce plan avec les trois solides en utilisant l'outil ;
- Faites un clic droit sur le plan et choisissez « Créer une vue 2D de p ». Faites un clic droit dans la partie 2D, sélectionnez « Recadrer » et choisissez pour « axeX : axeY » « 1 : 1 » pour afficher les trois sections.

#### TUTO LOGICIEL

Réaliser une section d'un solide



foucherconnect.fr/22mc36

- 4 **Valider** Validez l'hypothèse émise à la question 2a.

Les moules en forme de demi-boule et de demi-cylindre permettent d'obtenir une section en forme de demi-disque.

- 5 **Réaliser** foucherconnect.fr/22mc35 • Ouvrez le fichier « C07\_93\_biscuit.ggb ».

- Coupez les trois solides par un plan parallèle à la face ABFE passant par le point O.
- Créez l'intersection de ce plan avec les trois solides.
- Affichez les trois sections verticales.

- 6 **Valider** Validez l'hypothèse émise à la question 2b.

Les moules en forme de pavé droit et de cylindre droit permettent d'obtenir une section en forme de rectangle.

- 7 **Valider Communiquer** Répondez à la problématique sachant que Jade a utilisé les moules en forme de demi-boule et de cylindre droit, et Medhi ceux en forme de demi-cylindre et de pavé droit.

Les choix de Jade et Medhi permettent au jury d'observer la section attendue.

# Activité

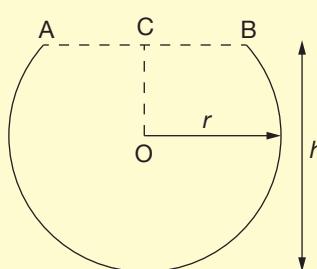
Algo  
Pro

## Déterminer la hauteur maximale d'une calotte sphérique

### SITUATION . Conception d'un bougeoir

Un artisan souhaite fabriquer des bougeoirs en forme de sphère de rayon  $r = 5$  cm, coupée par un plan horizontal. Il y place des bougies de forme cylindrique de diamètre 6 cm. On note  $h$  la hauteur totale du bougeoir telle que  $h \geq r$ .

Le dessin ci-contre est une section verticale de la calotte sphérique passant par le centre O de la sphère.



#### Problématique

À quelle hauteur maximale l'artisan doit-il sectionner la sphère pour parvenir à insérer la bougie ?

- 1 Donnez, en cm, la longueur OB.

$$OB = r = 5 \text{ cm.}$$

- 2 Exprimez la longueur CO en fonction de  $h$ .

$$CO = h - r = h - 5.$$

- 3 Montrez que  $CB = \sqrt{10h - h^2}$  en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle OCB rectangle en C.

D'après le théorème de Pythagore,  $OB^2 = CB^2 + CO^2$ .

$$CB^2 = OB^2 - CO^2 = 5^2 - (h - 5)^2 = 25 - h^2 + 10h - 25 = 10h - h^2$$

$$CB = \sqrt{10h - h^2}.$$

### LANGAGE NATUREL

- 4 L'algorigramme ci-contre est celui du calcul, à 0,1 cm près, de la hauteur maximale  $h_{\max}$  d'une calotte sphérique de rayon 5 cm dont le diamètre d'ouverture est supérieur à 6 cm. Complétez-le.

### LANGAGE PYTHON



- 5 Cochez le programme qui correspond à l'algorigramme.

```

1 from math import*
2 h=5
3 if sqrt(10*h-h**2)>3:
4     h=h+0.1
5 print("h=",h,"cm.")

```



```

1 from math import*
2 h=5
3 while sqrt(10*h-h**2)>3:
4     h=h+0.1
5 print("h=",round(h-0.1,1),"cm.")
```

- 6 Écrivez le programme choisi, puis exécutez-le. Répondez à la problématique.

L'artisan doit couper la sphère à une hauteur maximale de 9 cm.

Instruction	Signification
if	Tester la condition et exécuter l'instruction si (if) la réponse est oui.
while	Exécuter la boucle tant que (while) la condition est remplie.
sqrt	Racine carrée.

## L'essentiel

## Représentation et exploitation de solides usuels

- Les principaux **solides usuels** sont :

Cube	Pavé droit	Cylindre droit	Cône	Pyramide	Boule

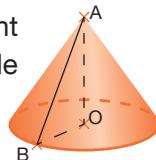
- Une boule est une sphère pleine.
- Certains solides sont constitués d'un assemblage de solides usuels.

**Exemple** Un crayon est constitué d'un cylindre et d'une pointe en forme de cône.



- Lorsque les conditions sont réunies, on peut appliquer dans les représentations d'un solide usuel, les théorèmes de géométrie plane tels que les théorèmes de Pythagore et de Thalès.

**Exemple** Un chapeau pointu a la forme d'un cône. O est le centre du disque de base. Le segment [OA] est la hauteur du cône. [OA] est perpendiculaire à [OB]. On peut donc appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle AOB rectangle en O.



## Section d'un solide

- La **section plane** d'un solide est la figure plane obtenue lorsque l'on coupe un solide par un plan.

Solide	Section plane	
Cube		Section par un plan parallèle à une face : <b>carré</b> .
Pavé droit		Section par un plan parallèle à une face : <b>rectangle</b> .
Cylindre droit		Section par un plan perpendiculaire à l'axe : <b>disque</b> .
Cône et pyramide		Section par un plan parallèle à la base : <b>figure de même nature que la base</b> .
Boule		Section par un plan quelconque : <b>disque</b> .

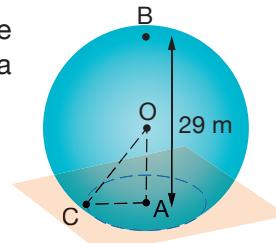
## Savoir-faire

### Savoir-faire 1 Appliquer le théorème de Pythagore dans la représentation d'un solide

La Géode modélisée sur le dessin ci-contre, est une portion de sphère de rayon 18 m, délimitée par un plan perpendiculaire à sa hauteur [AB].

$$AB = 29 \text{ m.}$$

Calculez, en m, la distance AC. Arrondissez à 0,1.



#### RÉSOLUTION

- Le triangle OAC est rectangle en A, car la droite (OA) est perpendiculaire au rayon [AC].
- On applique le théorème de Pythagore dans le triangle OAC rectangle en A :

$$\begin{aligned}AO^2 + AC^2 &= OC^2 \\(29 - 18)^2 + AC^2 &= 18^2 \\AC^2 &= 18^2 - 11^2 = 203 \\AC &= \sqrt{203} \approx 14,2 \text{ m.}\end{aligned}$$

#### MÉTHODE

Pour calculer une longueur dans un solide

- Identifier un triangle rectangle ;
- Appliquer le théorème de Pythagore.

Voir exercice 4 et problèmes 9 à 13

### Savoir-faire 2 Représenter la section d'un solide par un plan

On a fabriqué un vase en verre en coupant un cylindre droit par un plan parallèle à son axe, à 5 cm de l'axe. Le cylindre droit dont est issu le vase est haut de 6 cm et a une base circulaire de rayon 7 cm.

Quelle est la nature de la section obtenue ?



#### TUTO LOGICIEL

Réaliser une section d'un solide



foucherconnect.fr/22mc36

Étapes	Outils	Fenêtres graphiques
<p>① Placer les points O(0 ; 0 ; 0) et A(0 ; 6 ; 0) sur l'axe (Oy).</p> <p>Créer un cylindre droit de rayon 7 cm passant par O et A.</p>	<p><b>Saisie:</b> <b>O=(0,0,0)</b> <b>Saisie:</b> <b>A=(0,6,0)</b></p> <p> Cliquer sur O et A. Rayon : 7</p>	
<p>② Placer le point B(0 ; 0 ; 5).</p> <p>Couper le cylindre droit par un plan parallèle au plan gris passant par B.</p>	<p><b>Saisie:</b> <b>B=(0,0,5)</b></p> <p> Cliquer sur B, puis sur le plan gris.</p>	
<p>③ Créer l'intersection du plan bleu avec le cylindre droit.</p>	<p> Cliquer sur le plan bleu, puis sur le cylindre droit.</p>	
<p>④ Faire un clic droit sur le plan bleu pour créer une vue 2D de la section.</p> <p>Faire un clic droit dans la fenêtre 2D, sélectionner « Recadrer » puis prendre pour « axeX : axeY » « 1 : 1 »</p>	<p><b>Créer une vue 2D de p</b> <b>Recadrer</b> <b>axeX : axeY ✓ 1 : 1</b></p>	<p>La section d'un cylindre droit par un plan parallèle à son axe est un rectangle.</p>

Voir exercice 8 et problèmes 11 et 14



## J'utilise le vocabulaire approprié

- 1 Complétez les phrases en observant les étapes de construction ci-contre et en choisissant parmi les propositions suivantes :

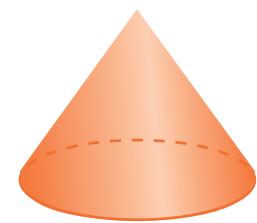
cône • cylindre • disque • section • parallèle • perpendiculaire

Souhir souhaite modéliser l'abat-jour représenté ci-contre sur un logiciel de conception 3D.

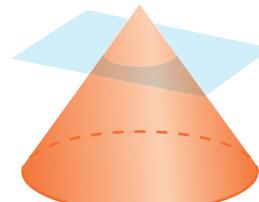
- L'abat-jour a la forme d'un **cône** dont la partie supérieure a été coupée par un plan.
- Le plan qui coupe le solide est **parallèle** à la base du solide.
- L'intersection entre le solide et le plan est une surface plane appelée **section**. La surface obtenue est un **disque**.



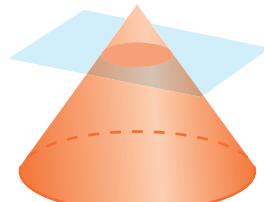
**Abat-jour**



**Étape a.**



**Étape b.**

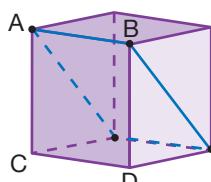


**Étape c.**

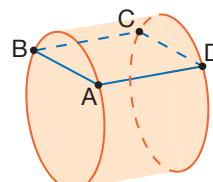


## Je revois des points importants

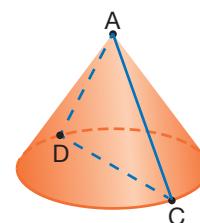
- 2 Les solides 1 à 4 ont été coupés par un plan. Complétez le tableau ci-dessous.



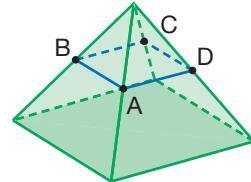
1



2



3



4

Numéro du solide	Nom du solide	Nature de la section plane	Position du plan
1	Cube	Rectangle	Plan parallèle à l'arête [CD] et passant par les points A et B.
3	Cône	Triangle	Plan perpendiculaire à la base et passant par le sommet.
4	Pyramide à base carrée	Carré	Plan parallèle à la base et passant par le point A.
2	Cylindre droit	Rectangle	Plan parallèle à l'axe du solide et passant par le point A.



## Je mémorise

- 3 Réalisez une carte mentale qui reprend la nature des sections obtenues par la coupe de solides usuels par un plan.  
**> Je fais le point page 95**

# Exercices

## AUTOMATISMES

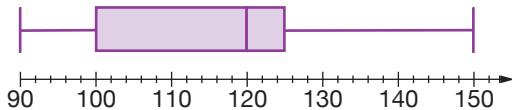
Sans calculatrice ni brouillon, répondez aux 3 questions du rituel indiqué par votre professeur.  
Votre réponse est juste ? Bravo ! Cochez la case de l'automatisme correspondant.

### Rituel 1

A7 Résolvez l'inéquation  $-2x + 9 > 3$ .  
 $-2x > 3 - 9 ; -2x > -6 ; x < \frac{-6}{-2} ; x < 3$ .

A21 Factorisez l'expression suivante :  $x^2 - 100$ .  
 $x^2 - 100 = (x - 10)(x + 10)$ .

A4 Cochez le tableau qui correspond au diagramme en boîte suivant :



Étendue	25
Écart interquartile	60
Médiane	100

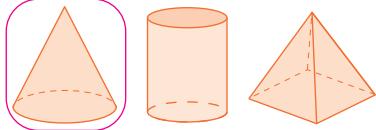
Étendue	60
Écart interquartile	25
Médiane	120

Étendue	150
Écart interquartile	125
Médiane	120



### Rituel 2

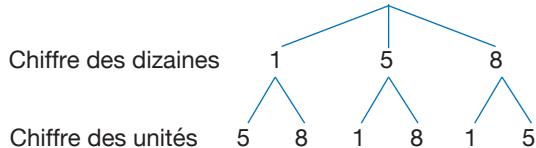
A18 Parmi les solides ci-contre, entourez le cône.



A14 Les deux droites  $D_1$  et  $D_2$  d'équations réduites  $y = 7x - 4$  et  $y = 7x + 4$  sont-elles parallèles ? Justifiez.

Oui, car  $D_1$  et  $D_2$  ont le même coefficient directeur 7.

A2 Déterminez à partir de l'arbre ci-dessous, le nombre de cas possibles d'obtenir « un nombre impair de deux chiffres ».



4 cas possibles : 15 ; 51 ; 81 et 85.

## Représentation et exploitation de solides usuels

1 ★ Donnez les noms des solides usuels qui composent les solides suivants.



Pavé droit



Cube



Cylindre droit



Cylindre droit

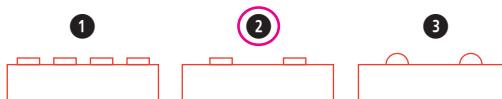
Cône

Boule

b. Quelles figures planes usuelles visualise-t-on si on représente la vue de dessus de la brique ?

Un carré et quatre disques.

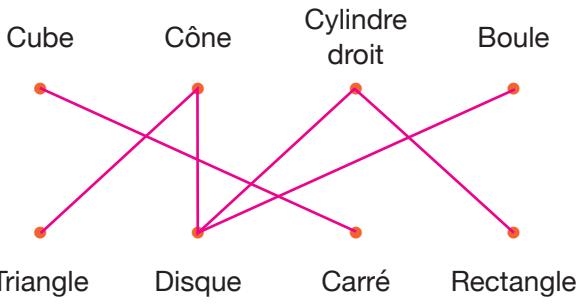
c. Entourez le numéro du dessin qui représente la vue de face de la brique.



3 ★ Un enfant tente de faire passer des solides à travers les trous d'une boîte de jeu. On considère que les solides sont de la forme des trous.

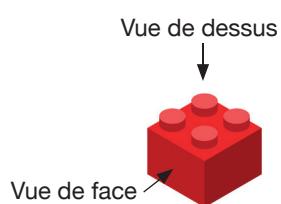


Reliez chaque solide à la forme du trou correspondant.



2 ★ a. Nommez les solides qui composent la brique de jeu ci-contre.

Un pavé droit et quatre cylindres droits.



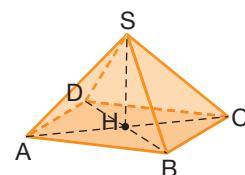
- 4** ★★ Les quatre arêtes latérales de la pyramide du Louvre mesurent 33 m. La base est un carré de 35,4 m de côté.



La pyramide ABCDS ci-dessous représente la pyramide du Louvre.

- a. Quelle est la nature des triangles ABC et ASH ?

ABC et ASH sont des triangles rectangles.



- b. Calculez, en m, la distance AC. Arrondissez à l'unité.  $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2 \times 35,4^2 = 2\,506,32$ .

$$AC = \sqrt{2\,506,32} \approx 50 \text{ m.}$$

- c. Calculez, en m, la hauteur réelle HS de la pyramide du Louvre. Arrondissez au dixième.

$$HS^2 = AS^2 - AH^2 = 33^2 - \left(\frac{50}{2}\right)^2 = 464.$$

$$HS = \sqrt{464} \approx 21,5 \text{ m.}$$

- 5** ★ La base de la pyramide du Louvre est un carré de 35,4 m de côté. Les arêtes latérales mesurent 33 m.

#### TUTO LOGICIEL

Représenter une pyramide



foucherconnect.fr/22mc37

- a. Représentez sur GeoGebra 3D une pyramide dont la base est un carré de côté 3,54 et dont les arêtes latérales mesurent 3,3 avec les outils et .

- b. Mesurez la hauteur  $h$  de la pyramide. Arrondissez au centième.  $h \approx 2,15$ .

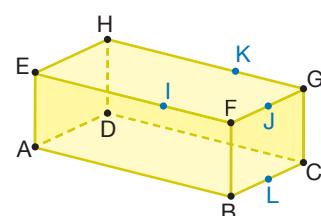
- c. La pyramide représente celle du Louvre. Les distances se mesurent en dizaines de mètres. Déduisez-en, en m, la hauteur de la pyramide du Louvre.

La pyramide du Louvre a une hauteur égale

à 21,5 m.

## Section d'un solide

- 6** ★★ Lynda prépare le petit-déjeuner pour les clients d'un hôtel. Elle coupe d'un coup de couteau une plaquette de beurre.



- a. Nommez le solide usuel qui rappelle au mieux la forme d'une plaquette de beurre. Un pavé droit.

- b. La face BCGF est carrée. La droite (JL) est parallèle à la droite (GC). Lynda coupe la plaquette de beurre par les trois plans suivants :

- $(P_1)$  parallèle à la face BCGF passant par le point I ;
- $(P_2)$  passant par les points I, J, B ;
- $(P_3)$  passant par les points K, J, L.

Reliez chaque plan à la forme de la section obtenue.

$(P_1)$



$(P_2)$



$(P_3)$



**7**

#### TUTO LOGICIEL

foucherconnect.fr/22mc38

- Ensembles ▶ p. 143** À l'aide d'une imprimante 3D, Anatole réalise un solide composé d'un cylindre droit  $S_1$  « exactement » contenu dans un cube  $S_2$  de 8 cm de côté. I est le centre de la base supérieure du cylindre  $S_1$ . On coupe le solide par un plan.

- a. Complétez par un des symboles suivants :  $\in$ ,  $\notin$  ou  $\subset$ .  $S_1 \subset S_2$ ;  $A \notin S_1$ ;  $E \in S_2$ ;  $I \in S_2$ .

- b. Cochez les dessins qui peuvent représenter une section de ce solide.



1 ✓

2 ✓

3 ✓

- c. Indiquez dans chaque cas ①, ② et ③ une position possible du plan.

① : plan parallèle à la face EFGH passant par K.

② : plan parallèle à la face ABFE passant par I.

③ : plan passant par les points A, E, G.

- d. Ouvrez le fichier « C07\_99\_exercice7.ggb ». Vérifiez vos réponses à l'aide des fonctionnalités du logiciel.

#### TUTO LOGICIEL

Réaliser une section d'un solide

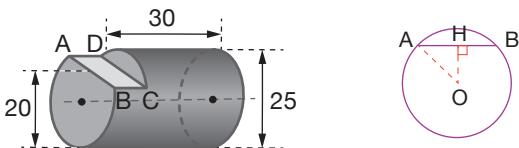


foucherconnect.fr/22mc38

# Problèmes

8 ★★

Karim usine un cylindre droit de 40 cm de hauteur afin d'obtenir une surface plane ABCD appelée méplat.



1. Cochez la bonne réponse. Pour obtenir le rectangle ABCD, Karim a coupé une tige cylindrique :

- parallèlement à son axe ;
- perpendiculairement à son axe.

2. Dans le triangle rectangle OHA, calculez, en cm, la longueur HA.

$$HA^2 = AO^2 - HO^2 = 12,5^2 - (20 - 12,5)^2 = 100.$$

$$HA = \sqrt{100} = 10 \text{ cm.}$$

3. Donnez, en cm, les dimensions du méplat.

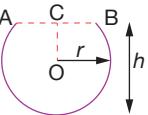
$$AB = 2 \times AH = 20 \text{ cm} ; BC = 40 - 30 = 10 \text{ cm.}$$

9

★★ python [foucherconnect.fr/22mc39](https://foucherconnect.fr/22mc39)

Un traiteur utilise des verrines en forme de sphère de rayon  $r = 3$  cm, coupée par un plan horizontal.

Le dessin ci-contre est une section verticale de la calotte sphérique passant par le centre O de la sphère.  $h = 4,5$  cm.



1. Donnez, en cm, la distance OC.

$$OC = h - r = 4,5 - 3 = 1,5 \text{ cm.}$$

2. Calculez, en cm, le diamètre d'ouverture AB de la verrine. Arrondissez au dixième.

Dans le triangle CBO rectangle en C :

$$CB^2 = OB^2 - OC^2 = 3^2 - 1,5^2 = 6,75$$

$$AB = 2 \times CB = 2 \times \sqrt{6,75} \approx 5,2 \text{ cm.}$$

3. Le programme suivant permet de calculer le volume d'une boule de rayon  $r$ .

```
1  from math import*
2  r=float(input("Donnez, en cm, le rayon."))
3  V=4*pi*r**3/3
4  print("Volume=",V,"cm\u00b3")
```

Le volume  $V'$  d'une calotte sphérique est donné par la formule  $V' = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$ .

Quelle variable supplémentaire faut-il créer à la ligne 3 du programme pour calculer le volume d'une calotte sphérique ? La hauteur  $h$ .

4. Ouvrez le fichier « C07\_100\_verrine.py ». Modifiez le programme et exécutez-le. Quel est, en  $\text{cm}^3$ , le volume  $V'$  de la verrine ? Arrondissez à l'unité.

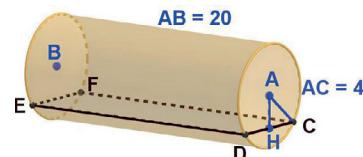
$$V' \approx 95,4 \text{ cm}^3.$$

10

Pour présenter joliment ses bûches de forme cylindrique, un pâtissier réalise une coupe par un plan parallèle à l'axe du cylindre droit.

Le dessin suivant représente la bûche et la section CDEF située à 2,5 cm de l'axe du cylindre.

Les dimensions sont données en cm.



1. Donnez la nature de la section CDEF.

CDEF est un rectangle.

2. Dans le triangle ACH rectangle en H, calculez, en cm, la distance HC. Arrondissez à l'unité.

$$HC^2 = AC^2 - AH^2 = 4^2 - 2,5^2 = 9,75$$

$$HC = \sqrt{9,75} \approx 3 \text{ cm.}$$

3. Quelles sont les dimensions minimales du plateau rectangulaire sur lequel la bûche peut être déposée ?

Le plateau doit avoir une longueur minimale de 20 cm et une largeur minimale de 6 cm.

11

★★  [foucherconnect.fr/22mc40](https://foucherconnect.fr/22mc40)

Un fleuriste commande à un artisan verrier des terrariums en forme de cube dont un sommet de la base a été sectionné pour une présentation originale.



Le modèle figure sur l'image ci-contre.

1. Conjecturez la nature de la section sur laquelle repose le terrarium.

Un triangle.

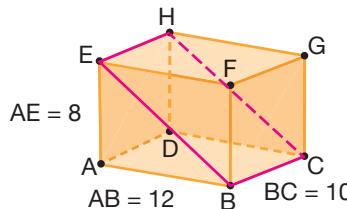
2. Ouvrez le fichier « C07\_100\_terrarium.ggb ». Les dimensions sont données en cm. Coupez le cube par un plan passant par les points I, J et K. Créez l'intersection de ce plan avec le cube. Validez l'hypothèse émise à la question 1.

La section est un triangle équilatéral.

3. À l'aide de l'outil  mesurez, en  $\text{cm}^2$ , l'aire  $\mathcal{A}$  de la section qui sert de base d'appui. Arrondissez au dixième.

$$\mathcal{A} \approx 21,7 \text{ cm}^2.$$

- 12** ★★  Sandra souhaite peindre deux serre-livres identiques fabriqués à partir d'un pavé droit en bois représenté ci-contre.



Les dimensions sont données en centimètres.

Le pavé droit a été coupé par le plan passant par les points E et B et parallèle à l'arête [AD].

1. Dessinez la section obtenue sur la représentation du pavé droit.

2. Quelle est la nature de la section ?

La section est un rectangle.

3. Calculez, en cm, la longueur BE. Arrondissez à 0,1.  $BE^2 = AB^2 + AE^2 = 12^2 + 8^2 = 208$ .

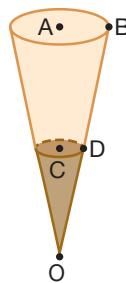
$$BE = \sqrt{208} \approx 14,4 \text{ cm.}$$

4. Calculez, en  $\text{cm}^2$ , l'aire totale  $A$  de la surface à peindre.

$$\begin{aligned} & 2 \times AB \times AE + 2 \times AB \times AD + 2 \times BC \times BF + 2 \times \\ & BE \times BC = 2 \times 12 \times 8 + 2 \times 12 \times 10 + 2 \times 10 \times 8 \\ & + 2 \times 14,4 \times 10 = 880 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

- 13** ★★★ Un industriel fabrique des cônes glacés. Le bord du cornet est un cercle de centre A et de rayon  $AB = 2,6 \text{ cm}$ .  $OB = 13,3 \text{ cm}$ . Le fabricant verse du chocolat sur une hauteur  $OC = 6 \text{ cm}$ . Le volume  $V$  d'un cône de rayon  $R$  et de hauteur  $h$  est :

$$V = \frac{1}{3} \times \pi R^2 \times h.$$



#### Problématique

Quel volume, en mL, de chocolat l'industriel doit-il verser dans le fond du cornet ?

1. Quelle est la nature du triangle AOB ?

AOB est un triangle rectangle en A.

2. Calculez, en cm, la hauteur OA du cornet. Arrondissez à l'unité.

$$OA^2 = OB^2 - AB^2 = 13,3^2 - 2,6^2 = 170,13;$$

$$OA = \sqrt{170,13} \approx 13 \text{ cm.}$$

3. Le cône formé par le chocolat est une réduction du cornet, de rapport  $k = \frac{OC}{OA}$ .

**Coup de pouce**

Lors d'une réduction de rapport  $k$  d'un solide, les longueurs sont multipliées par  $k$ .

Quel est, en cm, le rayon CD de la base du cône formé par le chocolat ?

$$CD = k \times AB = \frac{6}{13} \times 2,6 = 1,2 \text{ cm.}$$

4. Calculez, en  $\text{cm}^3$ , le volume  $V$  du cône en chocolat. Arrondissez à l'unité.

$$V = \frac{1}{3} \times \pi \times 1,2^2 \times 6 \approx 9 \text{ cm}^3.$$

5. Répondez à la problématique.

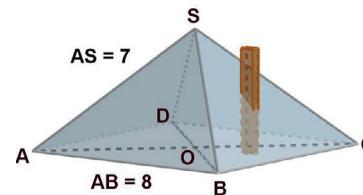
L'industriel doit verser 9 mL de chocolat.

- 14**



foucherconnect.fr/22mc41

Hélio doit prévoir une ouverture pour faire passer un conduit de cheminée en forme de pavé droit à travers une toiture. Le toit est une pyramide à base carrée. Les dimensions ci-dessous sont données en mètres.



#### Problématique

Quelle est, en  $\text{m}^2$ , l'aire minimale à prévoir pour l'ouverture ?

1. Calculez, en m, la distance AC. Arrondissez à 0,1.

Dans le triangle ABC rectangle en B :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2 \times 8^2 = 128;$$

$$AC = \sqrt{128} \approx 11,3 \text{ m.}$$

2. Calculez, en m, la hauteur OS de la pyramide. Arrondissez à 0,1.

Dans le triangle AOS rectangle en O :

$$OS^2 = AS^2 - AO^2 = 7^2 - \left(\frac{11,3}{2}\right)^2 = 17,077 \text{ 5};$$

$$OS = \sqrt{17,077 \text{ 5}} \approx 4,1 \text{ m.}$$

3. Ouvrez le fichier « C07\_101\_cheminee.ggb ». Coupez le pavé droit par la face SBC. Créez l'intersection du plan avec le solide. Indiquez la nature de la figure plane obtenue.

Un rectangle.

4. Répondez à la problématique en utilisant l'outil . Arrondissez au dixième.

Il faut prévoir une ouverture minimale de 0,2  $\text{m}^2$ .

# Évaluation

Compétences	S'approprier				Analyser Raisonner				Réaliser				Valider				Communiquer			
Questions	2				1				3 – 5				4 – 6				6			
Niveau d'acquisition	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4

## Situation

Pour sa prochaine collection, l'entreprise Jolysac souhaite développer un modèle de sac à main de forme cylindrique dont la partie supérieure est coupée par un plan parallèle à l'axe du cylindre.

Cynthia réalise un prototype de diamètre 20 cm et d'épaisseur 8 cm sur un logiciel de conception 3D. Pour valider le projet, l'aire de la section doit être supérieure à 100 cm<sup>2</sup>.



## Problématique

Le modèle conçu par Cynthia peut-il être validé ?

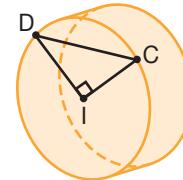
**1 Analyser/Raisonner** Cynthia commence par représenter un cylindre droit sur le logiciel GeoGebra.

a. Quelle est la nature de la section si le cylindre est coupé perpendiculairement à son axe ?

La section obtenue est un disque.

b. Quelle est la nature de la section si le cylindre est coupé parallèlement à son axe ?

La section obtenue est un rectangle.



**2 S'approprier** Donnez, en cm, les longueurs des segments [IC] et [ID].

$$IC = ID = \frac{20}{2} = 10 \text{ cm.}$$

**3 Réaliser** Calculez, en cm, la longueur du segment [CD] sachant que  $\widehat{CID} = 90^\circ$ .

Arrondissez à l'unité.

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ICD rectangle en I :

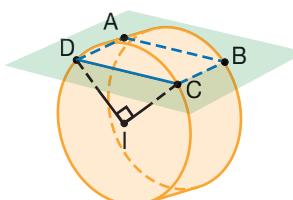
$$CD^2 = IC^2 + ID^2 = 2 \times 10^2 = 200 ;$$

$$CD = \sqrt{200} \approx 14 \text{ cm.}$$

**4 Valider** La partie supérieure du cylindre droit est coupée par un plan parallèle à l'axe du cylindre.

a. Cochez l'outil qui permet de créer l'intersection du plan avec le cylindre droit.

- 



b. Indiquez la nature de la section ABCD.

ABCD est un rectangle.

**5 Réaliser** Calculez, en cm<sup>2</sup>, l'aire  $\mathcal{A}$  de la section ABCD.

$$\mathcal{A} = CD \times CB = 14 \times 8 = 112 \text{ cm}^2.$$

**6 Valider Communiquer** Répondez à la problématique. Justifiez votre réponse.

Le modèle conçu par Cynthia peut être validé car l'aire de la section est supérieure à 100 cm<sup>2</sup>.

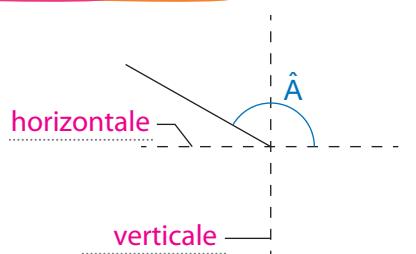
# Construction de vecteurs du plan

8

Capacités	Activités
• Construire un représentant d'un vecteur non nul à partir de ses caractéristiques. • Reconnaître graphiquement des vecteurs égaux, des vecteurs opposés, des vecteurs colinéaires.	Activité 1
• Construire le vecteur obtenu comme somme de deux vecteurs. • Construire le vecteur obtenu comme produit d'un vecteur par un nombre réel non nul.	Activité 2

## Je m'échauffe !

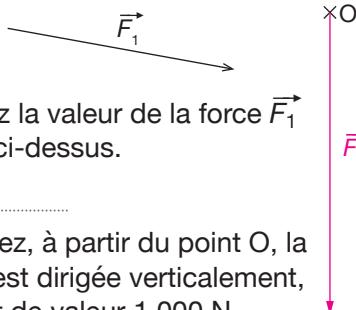
### Activité 1 p. 104



- Complétez les pointillés avec les mots *horizontale* et *verticale*.
- L'instrument de mesure d'un angle est un : *rapporteur*
- Mesurez l'angle  $\hat{A}$  :  $\hat{A} = 150^\circ$

### Activité 2 p. 105

Échelle : 1 cm pour 250 N



- Déterminez la valeur de la force  $\vec{F}_1$  représentée ci-dessus.

$$F_1 = 750 \text{ N}$$

- Représentez, à partir du point O, la force  $\vec{F}_2$  qui est dirigée verticalement, vers le bas et de valeur 1 000 N.



# Activité

1

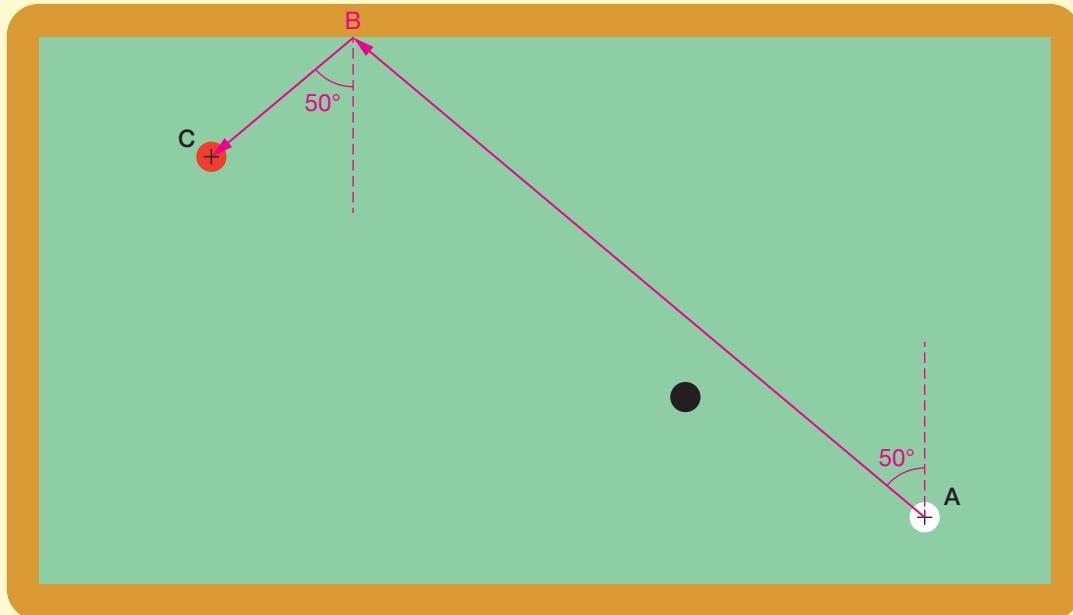
## Découvrir et construire des vecteurs

### SITUATION . Billard

Lors d'une partie de billard, Chléo doit frapper la boule blanche pour atteindre la boule rouge. Pour éviter la boule noire, Chléo fait rebondir la boule blanche (assimilée au point A) sur le bord supérieur du tapis qui vient ensuite heurter la boule rouge (point C).

#### Problématique

Comment dessiner le trajet suivi par la boule blanche frappée par Chléo ?



1 S'approprier Réaliser [foucherconnect.fr/22mc42](http://foucherconnect.fr/22mc42) Ouvrez le fichier « C08\_104\_AB\_Activite1.ggb ».

La direction prise par la boule après son rebond sur le point B est indiquée par les pointillés. Déplacez le point B afin d'obtenir le trajet de la boule blanche, du point A au point C en passant par le point B.

2 Valider Le trajet suivi par la boule est composé de deux déplacements, représentés sur le fichier GeoGebra par deux flèches, appelées **vecteurs** et notées  $\vec{AB}$  et  $\vec{BC}$ .

Les caractéristiques de ces vecteurs sont présentées ci-dessous :

	Caractéristiques		
	Direction	Sens	Norme (longueur)
Vecteur $\vec{AB}$			$\ \vec{AB}\  = 1,56$
Vecteur $\vec{BC}$			$\ \vec{BC}\  = 0,39$

- Cochez à l'écran la case *Direction des vecteurs*, puis la case *Norme des vecteurs*.
- Dans le tableau ci-dessus, complétez les valeurs d'angle et les normes.

3 Analyser/Raisonner Cochez la case *Deuxième trajet possible* et comparez les caractéristiques des vecteurs correspondant aux déplacements de la boule blanche pour les deux trajets.

Les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{GC}$  ont les mêmes caractéristiques ainsi que les vecteurs  $\vec{BC}$  et  $\vec{AG}$ .

4 Réaliser Répondez à la problématique en dessinant les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{BC}$  sur le schéma de la situation en respectant les directions et sens donnés dans le tableau.

# Activité 2

## Additionner des vecteurs et multiplier un vecteur par un réel

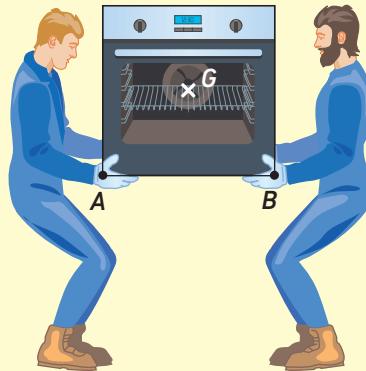
### SITUATION . Attention au dos !

Emiraldo et Lilian sont livreurs et portent ensemble des charges lourdes et encombrantes.

Pour des hommes de 18 à 45 ans, il est recommandé que la valeur de la force exercée par un travailleur ne dépasse pas 300 N lors d'une manutention.

#### Problématique

À l'équilibre, quelle est la valeur maximale du poids de la charge portée si l'on veut respecter la recommandation ?



Les forces appliquées sur la charge sont modélisées par les vecteurs  $\vec{F}_A$ ,  $\vec{F}_B$  et  $\vec{P}$ . Chaque force possède une direction et un sens donnés dans le tableau ci-contre.

**1 a.** S'approprier Réaliser [foucherconnect.fr/22mc43](https://foucherconnect.fr/22mc43) Ouvrez le fichier « C08\_105\_AB\_Activite2.ggb ».

À l'aide des curseurs, réglez la direction et le sens des vecteurs  $\vec{P}$ ,  $\vec{F}_A$  et  $\vec{F}_B$  comme indiqué dans le tableau.

**b.** Réaliser Sélectionnez l'outil .

Construisez la somme  $\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{P}$  à partir du point O en mettant bout à bout des représentants de  $\vec{F}_A$ ,  $\vec{F}_B$  et  $\vec{P}$ . Pour cela :

- cliquez sur le point O, puis sur le vecteur  $\vec{F}_A$  ;
- cliquez sur le point O', puis sur le vecteur  $\vec{F}_B$  ;
- cliquez sur le point O'', puis sur le vecteur  $\vec{P}$ .

**c. Valider** La construction correspond-elle à une situation d'équilibre ?

Cela correspond à un équilibre car les vecteurs mis bout à bout forment un triangle.

**d. Réaliser** Mesurez, avec l'outil , la norme des représentants de  $\vec{F}_A$  et  $\vec{F}_B$  sur le dynamique des forces. Pour cela, cliquez sur les deux extrémités de chaque représentant.

Sachant que la norme est égale à la valeur de la force, en newtons, complétez les égalités.

$$\|\vec{F}_A\| = F_A = \underline{\underline{231}} \text{ N} ; \quad \|\vec{F}_B\| = F_B = \underline{\underline{231}} \text{ N}.$$

**e. Valider** La recommandation de l'énoncé est-elle respectée ? Justifiez la réponse.

Elle est respectée car les forces exercées par les livreurs ont des valeurs inférieures à 300 N.

**2 a. Réaliser Analyser/Raisonner** Cochez la case « Question 2 ». À l'aide du curseur, modifiez la lourdeur de la charge portée. On obtient différents vecteurs  $\vec{P}$  colinéaires.

Cochez la (les) caractéristique(s) qui varie(nt) parmi les vecteurs  $\vec{P}$  colinéaires :

- Direction       Sens       Norme

**b. Réaliser** Déplacez la pointe du vecteur  $\vec{F}_A$  pour que  $\|\vec{F}_A\| = \|\vec{F}_B\| = 300$  N.

**c. Réaliser** Modifiez le poids de la charge à l'aide du curseur de façon que le dynamique des forces corresponde à une situation d'équilibre.

**d. Valider Communiquer** Répondez à la problématique.

La valeur maximale du poids de la charge portée est égale à 520 N.

	Direction	Sens
Poids $\vec{P}$ de la charge		↓
Force $\vec{F}_A$ exercée par le 1 <sup>er</sup> livreur	30°	↗
Force $\vec{F}_B$ exercée par le 2 <sup>nd</sup> livreur	30°	↗



Dans une situation d'équilibre, les vecteurs mis bout à bout (le dynamique des forces) forment un triangle.

# Activité

Algo  
Pro

## Étudier la somme de vecteurs-force

MES FICHIERS

Python



foucherconnect.fr/22mc44

### SITUATION . Équilibre d'un alpiniste soumis à trois forces

L'alpiniste est soumis à son poids  $\vec{P}$ , à la force  $\vec{F}_1$  exercée par la corde et à la force  $\vec{F}_2$  exercée par la paroi rocheuse. Voici les caractéristiques de  $\vec{P}$  et  $\vec{F}_1$  :

	Direction	Sens	Valeur
$\vec{P}$		↓	650 N
$\vec{F}_1$	52°	↗	580 N

#### Problématique

Comment obtenir les caractéristiques de la force  $\vec{F}_2$  et le dynamique des forces appliquées sur l'alpiniste ?



### LANGAGE PYTHON



1 Exécutez le programme du fichier « C08\_106\_AB\_AlgoPro.py ». Indiquez ce que réalise ce programme. **Le programme réalise le tracé des vecteurs  $\vec{P}$  et  $\vec{F}_1$  mis bout à bout.**

2 Éditez le programme, puis détailliez ce que permettent de réaliser les lignes de code 10 à 12 (voir lexique).

**La ligne 10 oriente le crayon dans la direction et le sens du poids, la ligne 11 trace le segment de longueur égale à la valeur du poids et la ligne 12 ajoute une pointe de flèche au bout du segment.**

3 Complétez le programme à l'aide de l'instruction `distance(x,y)` (voir lexique) afin que son exécution affiche la valeur de la force  $\vec{F}_2$ .

Notez la valeur arrondie à l'unité :  $F_2 = 406$  N.

Coup de pouce

Les vecteurs mis bout à bout doivent former un triangle.

4 Complétez le programme à l'aide du lexique pour que son exécution affiche la valeur de l'angle de la force  $\vec{F}_2$ . Notez la valeur arrondie à l'unité :  $152^\circ$ .

5 Complétez le programme à l'aide du lexique pour obtenir le dynamique des forces entièrement construit. Exécutez le programme.

LEXIQUE  
 python™

Instruction	Signification
<code>setheading(valeur de l'angle)</code>	Oriente le crayon selon un angle de valeur donnée.
<code>down() up()</code>	Baisse le crayon Lève le crayon.
<code>forward(nombre de pixels)</code>	Avance le crayon du nombre de pixels.
<code>stamp()</code>	Imprime une pointe de flèche là où se trouve le crayon.
<code>distance(x,y)</code>	Retourne la distance séparant le crayon du point de coordonnées (x ; y).
<code>towards(x,y)</code>	Retourne l'angle que doit avoir le crayon pour aller vers le point de coordonnées (x ; y).
<code>goto(x,y)</code>	Déplace le crayon au point de coordonnées (x ; y).
<code>exitonclick()</code>	Ferme la fenêtre avec un clic gauche.

## L'essentiel

## Caractéristiques d'un vecteur

- Un vecteur est un segment orienté.

Un vecteur (non nul) possède trois **caractéristiques** :

- une **direction** ;

- un **sens** ;

- une **norme** (ou longueur).

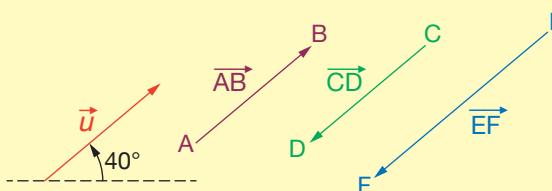
On peut représenter un vecteur à partir de n'importe quel point en respectant ses caractéristiques. On obtient ainsi des **représentants** du vecteur.

- Un vecteur **nul**, noté  $\vec{0}$  est un vecteur dont la norme vaut 0.

- Deux vecteurs sont **égaux** s'ils possèdent même direction, même sens et même norme.

- Deux vecteurs sont **opposés** s'ils possèdent la même direction et la même norme mais des sens opposés.

- Deux vecteurs sont **colinéaires** s'ils possèdent la même direction.



## Exemple

- Le vecteur  $\vec{u}$  ci-dessus possède les caractéristiques suivantes :

- direction :  $40^\circ$  par rapport à l'horizontale en sens inverse des aiguilles d'une montre ;
- sens : indiqué par la pointe du vecteur (vers le haut) ;
- norme, notée  $\|\vec{u}\|$  : 2 cm.

Le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est un représentant d'origine A du vecteur  $\vec{u}$ . B est l'extrémité du vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .

- Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\vec{u}$  sont égaux. On écrit  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ .
- Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont opposés. On écrit  $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ .
- Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{EF}$  sont colinéaires.

## Produit d'un vecteur par un nombre réel non nul et somme de deux vecteurs

- Le produit d'un vecteur  $\vec{v}$  par un nombre réel non nul  $k$  est un vecteur  $\vec{w} = k \times \vec{v}$  qui a la même direction que le vecteur  $\vec{v}$ . Les vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont donc colinéaires.

On distingue deux situations :

- si  $k < 0$ ,  $\vec{w}$  et  $\vec{v}$  ont des **sens opposés** et  $k = -\frac{\|\vec{w}\|}{\|\vec{v}\|}$  ;

- si  $k > 0$ ,  $\vec{w}$  et  $\vec{v}$  ont le **même sens** et  $k = \frac{\|\vec{w}\|}{\|\vec{v}\|}$ .

## Exemple

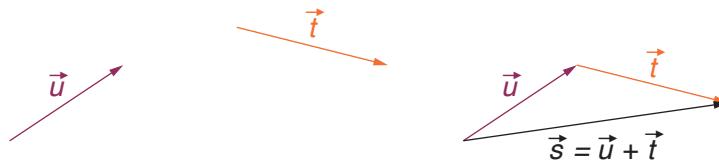
Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{EF}$  du haut de la page ont :

- même direction. Ils sont donc colinéaires et on peut écrire  $\overrightarrow{EF} = k \times \overrightarrow{AB}$  ;

$$\text{des sens opposés donc } k = -\frac{\|\overrightarrow{EF}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = -\frac{3}{2} = -1,5.$$

On en déduit que  $\overrightarrow{EF} = -1,5 \overrightarrow{AB}$ .

- La somme de deux vecteurs est un vecteur. Graphiquement, pour construire le vecteur somme, on met « bout à bout » les vecteurs (ou des représentants de ces vecteurs).

Exemple Construction du vecteur somme  $\vec{s} = \vec{u} + \vec{t}$ 

## Savoir-faire

## Savoir-faire 1 Construire un vecteur à partir de ses caractéristiques

Construisez un représentant du vecteur  $\vec{u}$  à partir de ses caractéristiques données dans le tableau ci-contre :

	Direction	Sens	Norme
$\vec{u}$	50°	Vers le haut	2,5 cm

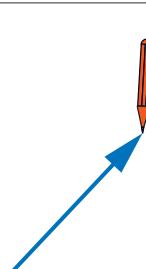
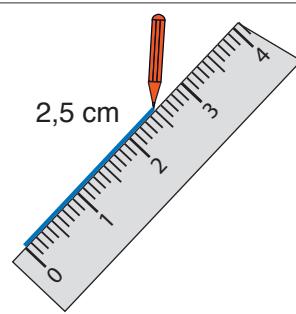
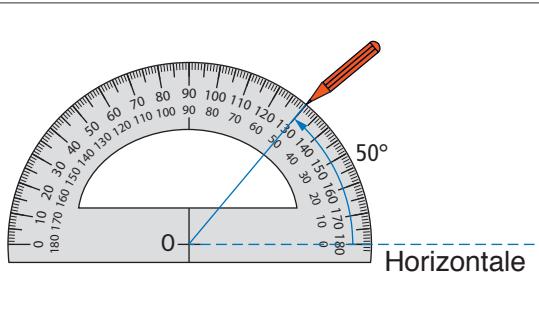
## MÉTHODE

Tracer la direction du vecteur selon la valeur donnée de l'angle.

Prolonger le tracé à la longueur (norme) du vecteur.

Ajouter la pointe correspondant au sens du vecteur.

## RÉSOLUTION

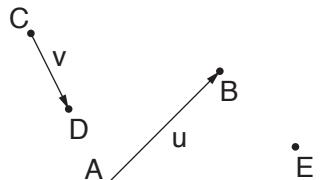


Voir exercices 1 et 5

## Savoir-faire 2 Construire le vecteur somme de deux vecteurs

Construisez le vecteur somme  $\vec{AB} + \vec{CD}$  à partir du point E.

Méthode : mettre « bout à bout » les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{CD}$  à partir du point E.



## TUTO LOGICIEL

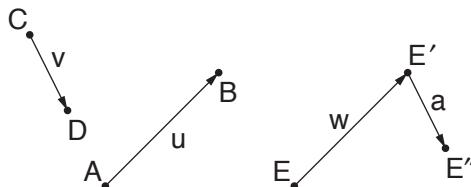
Construire le vecteur somme de deux vecteurs



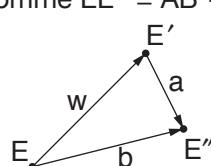
foucherconnect.fr/22mc45

## RÉSOLUTION

- Sélectionner l'outil « Représentant » et cliquer :
  - sur le point E puis sur le vecteur  $\vec{AB}$ .  $\vec{EE'}$  est un représentant du vecteur  $\vec{AB}$ .
  - sur le point E' puis sur le vecteur  $\vec{CD}$ .  $\vec{E'E''}$  est un représentant du vecteur  $\vec{CD}$ .



- Sélectionner l'outil « Vecteur » et cliquer sur le point E puis le point E''. On obtient le vecteur somme  $\vec{EE''} = \vec{AB} + \vec{CD}$ .



## MÉTHODE

Pour tracer un représentant d'un vecteur à partir d'un point donné

- Sélectionner l'outil « Représentant » .
- Cliquer sur le point origine souhaité.
- Cliquer sur le vecteur.

Pour construire un vecteur à partir de 2 points

- Sélectionner l'outil « Vecteur » .
- Cliquer sur l'origine du vecteur, puis cliquer sur l'extrémité du vecteur.

Voir exercice 7 et problème 9



## J'utilise le vocabulaire approprié

### 1 Complétez le texte avec les mots proposés.

(Certaines propositions peuvent être utilisées plusieurs fois.)

**nul** • **opposés** • **direction** • **égaux** • **norme** • **colinéaires** • **sens** • **bout à bout** • **caractéristiques**

- Un vecteur possède trois **caractéristiques** : une **direction**, un **sens** et une **norme**.

- Deux vecteurs **égaux** ont les mêmes caractéristiques.

Deux vecteurs **opposés** ont même **direction** et même **norme** mais des **sens** différents.

Deux vecteurs qui ont la même direction sont **colinéaires**.

Le vecteur noté  $\vec{0}$  est le vecteur **nul**.

- Pour construire un représentant d'un vecteur somme  $\vec{u} + \vec{v}$ , il faut construire un représentant de chacun des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  **bout à bout**.



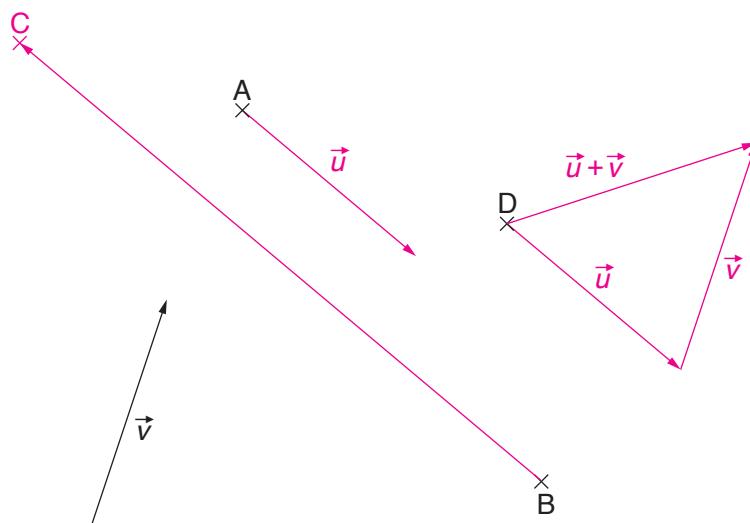
## Je revois des points importants

### 2 a. Construisez un représentant du vecteur $\vec{u}$ à partir du point A.

	Direction	Sens	Norme
$\vec{u}$		Vers le bas	3 cm

b. Construisez le vecteur  $\vec{BC}$  tel que  $\vec{BC} = -3\vec{u}$ .

c. Construisez, à partir du point D, un représentant du vecteur somme  $\vec{u} + \vec{v}$ .



## Je mémorise

### 3 Réalisez une carte mentale qui reprend le vocabulaire lié aux vecteurs.

[> Je fais le point page 107](#)

# Exercices

## AUTOMATISMES

Sans calculatrice ni brouillon, répondez aux 3 questions du rituel indiqué par votre professeur.  
Votre réponse est juste ? Bravo ! Cochez la case de l'automatisme correspondant.

### Rituel 1

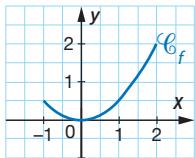
- A22 Développez l'expression suivante :  
 $-3(x - 2) = \underline{-3x + 6}$
- A2 Un artisan nougatier fabrique des barres et bonbons de nougats durs ou tendres. Sur une production de 12 000 nougats, on compte 6 000 bonbons tendres et 1 000 barres dont 300 sont dures. On tire au hasard un nougat dans la production. Après avoir complété le tableau d'effectifs, calculez la probabilité que le nougat soit tendre.

	Dur	Tendre	Total
Bonbon	5 000	6 000	11 000
Barre	300	700	1 000
Total	5 300	6 700	12 000

$$P(\text{tendre}) = \underline{6\ 700/12\ 000} = 67/120$$

- A11 Déterminez les extréums globaux de la fonction  $f$  représentée ci-contre.

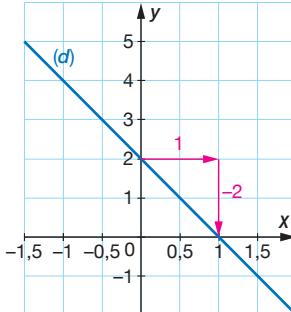
Extremums globaux :  
 Min = 0 ; Max = 2.



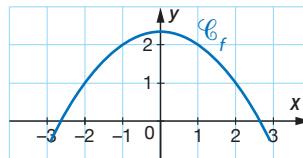
### Rituel 2

- A13 Déterminez le coefficient directeur de la droite ( $d$ ) représentée ci-contre.

Coefficient directeur de la droite ( $d$ ) :  $\underline{-2}$



- A15 La courbe représentative de la fonction  $f$  est donnée ci-dessous. Résolvez graphiquement l'inéquation  $f(x) > 1$ .  $\underline{]-2 ; 2[}$



- A20 Calculez le volume  $V$  d'un cylindre de rayon  $R = 10$  cm et de hauteur  $h = 10$  cm. Vous prendrez  $\pi = 3,14$ .

$$V = \pi \times R^2 \times h = 3,14 \times 10^2 \times 10 = 3\ 140 \text{ cm}^3$$

## Caractéristiques d'un vecteur

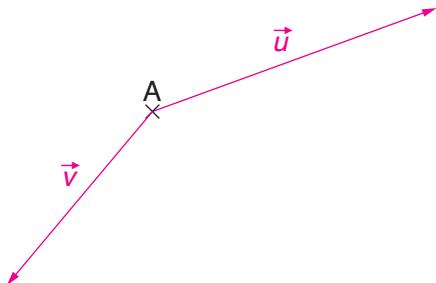
- 1 ★ Construisez, à partir du point A, un représentant des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  dont les caractéristiques sont données ci-dessous.

$\vec{u}$  : – Direction :  $20^\circ$  par rapport à l'horizontale en sens inverse des aiguilles d'une montre.

– Sens : vers la droite – Norme : 4 cm

$\vec{v}$  : – Direction :  $40^\circ$  par rapport à la verticale dans le sens des aiguilles d'une montre.

– Sens : vers le bas – Norme : 3 cm



2

  [foucherconnect.fr/22mc46](https://foucherconnect.fr/22mc46)

- a. Ouvrez le fichier « C08\_110\_AB\_Exo2.ggb ».

Utilisez l'outil « Vecteur »  pour construire un vecteur  $\overrightarrow{AB}$  (nommé u).

- b. Dans la zone de saisie, écrivez la commande  $\text{Angle}(u)$  et validez en appuyant sur Entrée.

De même, écrivez  $\text{Longueur}(u)$  et validez.

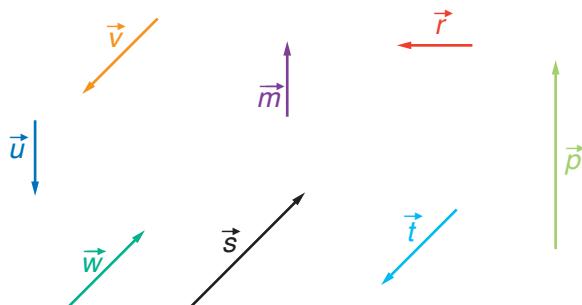
- c. Déduisez-en les caractéristiques du vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .

Direction :  $\underline{\text{les caractéristiques dépendent de la construction du vecteur } \overrightarrow{AB}}$ .

Sens :

Norme :

- 3 ★ Huit vecteurs sont représentés ci-dessous.



- a. Notez les vecteurs égaux :  $\vec{v} = \vec{t}$   
 b. Notez les vecteurs opposés :  $\vec{v}$  et  $\vec{t}$  sont opposés à  $\vec{w}$ ;  $\vec{u}$  et  $\vec{m}$  sont opposés.  
 c. Notez les vecteurs colinéaires :  $\vec{u}, \vec{m}$  et  $\vec{p}$  sont colinéaires ainsi que  $\vec{v}, \vec{w}, \vec{s}$  et  $\vec{t}$ .

- 4 ★ Sur l'image, Jessica est à l'équilibre. Elle subit 2 forces : son poids  $\vec{P}$  et la force  $\vec{R}$  exercée par le sol sur le pied au point A.

Construisez, à partir du point A, le vecteur force  $\vec{R}$  sachant qu'il est opposé au vecteur force  $\vec{P}$ .

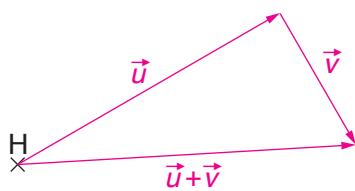


### Produit d'un vecteur par un nombre réel non nul et somme de deux vecteurs

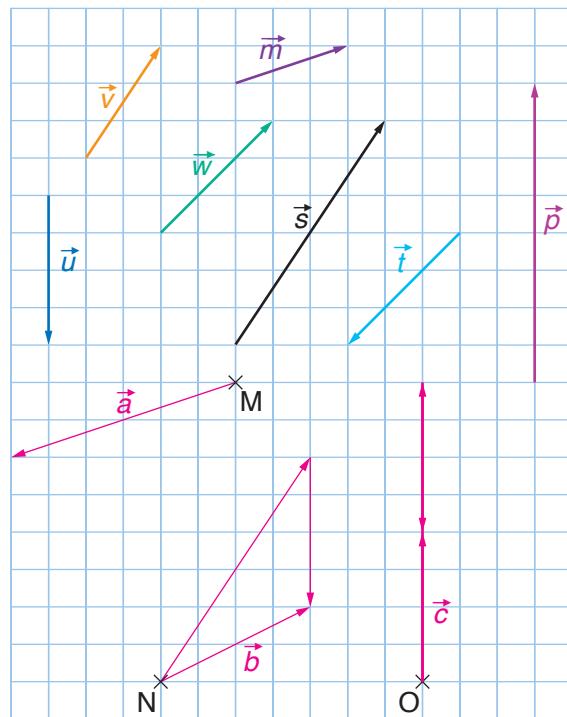
- 5 ★★ Voici les caractéristiques des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

	Direction	Sens	Norme
$\vec{u}$	30°	Vers le haut	4 cm
$\vec{v}$	30°	Vers le bas	2 cm

Construisez, à partir du point H, la somme  $\vec{u} + \vec{v}$ .



- 6 ★★ On considère les vecteurs ci-dessous.



- a. Complétez les égalités suivantes :  
 $\vec{s} = 2 \vec{v}$ ;  $\vec{p} = -2 \vec{u}$ ;  
 $\vec{w} = -\vec{t}$ .  
 b. Construisez, à partir du point M, le vecteur  $\vec{a}$  tel que  $\vec{a} = -2 \times \vec{m}$ .  
 c. Construisez, à partir du point N, le vecteur  $\vec{b}$  tel que  $\vec{b} = \vec{s} + \vec{u}$ .  
 d. Construisez, à partir du point O, le vecteur  $\vec{c}$  tel que  $\vec{c} = \vec{p} + \vec{u}$ .

- 7 ★★ foucherconnect.fr/22mc47

- a. Ouvrez le fichier « C08\_111\_AB\_Exo7.ggb » et utilisez l'outil « Représentant » pour mettre bout à bout les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{CD}$ , en partant du point E.

Si nécessaire, consultez le savoir-faire 2 p. 108.

- b. Utilisez l'outil « Vecteur » pour tracer un représentant du vecteur somme  $\vec{AB} + \vec{CD}$ .

- c. Dans la zone de saisie, utilisez les commandes *Angle*(« vecteur ») et *Longueur*(« vecteur ») pour obtenir les caractéristiques du vecteur somme  $\vec{AB} + \vec{CD}$ .

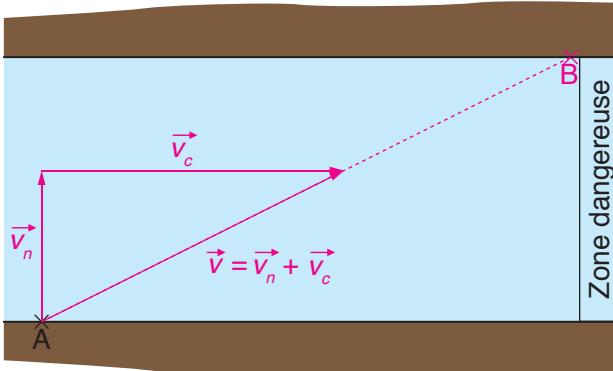
Direction : 80,2° par rapport à l'horizontale  
 dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Sens : vers le haut

Norme : 4,47.

# Problèmes

- 8** ★★ Mamadou décide de traverser à la nage la rivière représentée ci-dessous, en partant du point A situé sur une berge. Il espère pouvoir atteindre l'autre rive avant la zone dangereuse de la rivière.



Lors de la traversée, la vitesse réelle  $\vec{v}$  de Mamadou est la somme de sa vitesse de nage  $\vec{v}_n$  et de la vitesse du courant  $\vec{v}_c$ .

Le tableau ci-dessous donne quelques informations sur la vitesse de nage de Mamadou et sur la vitesse du courant.

	Direction	Sens	Valeur
Vitesse de nage	Perpendiculaire aux berges	Vers le haut	0,5 m/s
Vitesse du courant	Parallèle aux berges	Vers la droite	1 m/s

1. Construisez, à partir du point A, un représentant du vecteur somme  $\vec{v} = \vec{v}_n + \vec{v}_c$ .

Échelle : 1 cm pour 0,25 m/s.

2. Déduisez-en la norme  $\|\vec{v}\|$  et la valeur  $v$  de la vitesse réelle de Mamadou lors de la traversée.

On mesure  $\|\vec{v}\| = 4,5$  cm.

En tenant compte de l'échelle,

la valeur de la vitesse réelle de Mamadou

est donc  $v = 4,5 \times 0,25 = 1,125$  m/s.

3. Lors de la traversée de la rivière, la trajectoire suivie par Mamadou correspond à la direction du représentant du vecteur  $\vec{v}$  construit à la question 1. Déduisez-en par une construction la position du point d'arrivée B de Mamadou sur l'autre berge de la rivière.

4. Indiquez si Mamadou réussira à éviter la zone dangereuse de la rivière.

Oui, d'après la construction, Mamadou arrivera

juste à éviter la zone dangereuse.

- 9** ★★ [foucherconnect.fr/22mc48](#) Alina fait de l'haltérophilie. Sur la photo elle maintient en équilibre la barre (avec les disques).



La barre est soumise à trois forces :

– son poids  $\vec{P}$  ;

– les forces  $\vec{f}_1$  et  $\vec{f}_2$  exercées par les mains d'Alina.

Voici les caractéristiques des vecteurs force  $\vec{f}_1$  et  $\vec{f}_2$  :

	Direction	Sens	Norme
$\vec{f}_1$		Vers le haut	389
$\vec{f}_2$		Vers le haut	389

1. GeoGebra permet de tracer un représentant du vecteur  $\vec{f}_1$  à partir de ses caractéristiques. Pour cela, on écrit dans la zone de saisie  $f1 = (\text{norme} ; \text{angle}^\circ)$ . Ne pas oublier le symbole  $^\circ$  pour l'angle.

Ouvrez le fichier « C08\_112\_AB\_Probleme9.ggb ».

Construisez un représentant des vecteurs force  $\vec{f}_1$  puis  $\vec{f}_2$ .

2. Utilisez l'outil « Représentant » pour mettre bout à bout les représentants de  $\vec{f}_1$  et  $\vec{f}_2$ , à partir du point A.

3. Utilisez l'outil « Vecteur » pour tracer un représentant du vecteur somme  $\vec{f}_1 + \vec{f}_2$ .

4. Utilisez l'outil « Distance » pour déterminer la norme du vecteur somme  $\vec{f}_1 + \vec{f}_2$ .

$$\|\vec{f}_1 + \vec{f}_2\| = \underline{\hspace{2cm}} 550 \text{ unités graphiques}$$

5. Le vecteur somme  $\vec{f}_1 + \vec{f}_2$  est l'opposé du vecteur force  $\vec{P}$ . Déduisez-en la norme  $\|\vec{P}\|$  et la valeur  $P$  du poids de la barre soulevée par Alina. Justifiez la réponse.

$$\|\vec{P}\| = \underline{\hspace{2cm}} 550 \text{ unités} \quad \text{et} \quad P = \underline{\hspace{2cm}} 550 \text{ N}$$

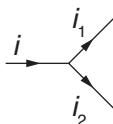
Justification : des vecteurs opposés ont même norme donc  $\|\vec{P}\| = \|\vec{f}_1 + \vec{f}_2\| = 550$  unités.

1 unité représente 1 N donc  $P = 550$  N.

- 10** ★★★ Dans un circuit électrique, en régime sinusoïdal de fréquence fixée, une intensité de courant est caractérisée par une valeur efficace et un angle appelé phase à l'origine.

On peut alors représenter une intensité de courant par un vecteur dont la norme correspond à sa valeur efficace et dont la direction et le sens correspondent à son angle, c'est-à-dire sa phase à l'origine.

Voici le nœud d'un circuit et les intensités des courants arrivant et partant du nœud.



Les caractéristiques des intensités  $i_1$  et  $i_2$  sont données dans le tableau ci-dessous.

Valeur efficace	Phase à l'origine
$i_1$	5 A
$i_2$	-27°

On note  $\vec{i}$ ,  $\vec{i}_1$  et  $\vec{i}_2$  les vecteurs correspondant aux intensités  $i$ ,  $i_1$  et  $i_2$ .

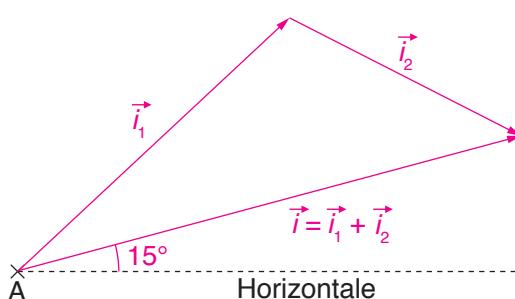
D'après la loi des nœuds, on a :

$$\vec{i} = \vec{i}_1 + \vec{i}_2$$

1. Construisez le vecteur somme  $\vec{i} = \vec{i}_1 + \vec{i}_2$  à partir du point A.

La phase à l'origine est définie par rapport à l'horizontale et le sens positif est le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Échelle : 1 cm correspond à 1 A



2. Mesurez la norme de  $\vec{i}$  :  $\|\vec{i}\| =$  7 cm

3. Déduisez des questions 1 et 2 la valeur efficace de  $i$  (en tenant compte de l'échelle) et sa phase à l'origine.

Valeur efficace : 7 A

Phase à l'origine : 15°

- 11** ★★★ Logique ▶ p. 146

A, B, C et D sont trois points.

Montrez que :

$\vec{AB} = \vec{CD} \Leftrightarrow ABDC$  est un parallélogramme

Il y a deux démonstrations : l'implication et sa réciproque. Aidez-vous d'un schéma !

### Schéma

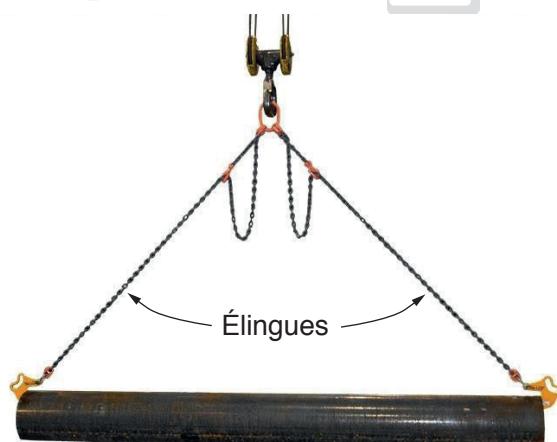


• Si  $\vec{AB} = \vec{CD}$  alors  $AB = CD$  et  $(AB) \parallel (CD)$  (même norme et même direction). Or un quadrilatère ayant deux côtés parallèles et égaux est un parallélogramme.

• Si  $ABDC$  est un parallélogramme alors  $AB = DC$ ,  $(AB) \parallel (DC)$  et  $\vec{AB} = -\vec{DC} = \vec{CD}$

• Finalement  $\vec{AB} = \vec{CD} \Leftrightarrow ABDC$  est un parallélogramme

- 12** ★★★ python™ [foucherconnect.fr/22mc49](http://foucherconnect.fr/22mc49)



Un tronçon de canalisation est soulevé et maintenu en équilibre sous l'action de trois forces : son poids  $\vec{P}$  et les forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  exercées par les élingues. Voici quelques informations sur les forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  rassemblées dans le tableau ci-dessous.

	Direction	Sens	Valeur (N)
$\vec{F}_1$		Vers le haut	855
$\vec{F}_2$		Vers le haut	855

• Utilisez le lexique python page 106 pour compléter le programme « C08\_113\_Probleme12.py » afin que son exécution trace bout à bout  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  et donne la valeur  $P$  du poids de la canalisation.

$$P = 1310 \text{ N}$$

# Évaluation

Compétences	S'approprier		Analyser Raisonner		Réaliser		Valider		Communiquer							
Questions	6		3		1 - 2 - 4 - 5 - 7		8		8							
Niveau d'acquisition	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4

## Situation

Lors d'une course d'orientation d'initiation, Jordy est parti d'un point de départ, noté A. Il est ensuite passé par quatre balises dont les emplacements seront notés B, C, D et E (arrivée du parcours). Les déplacements de Jordy pour rejoindre chaque balise peuvent être représentés par des vecteurs  $\vec{AB}$ ,  $\vec{BC}$ ,  $\vec{CD}$  et  $\vec{DE}$ .

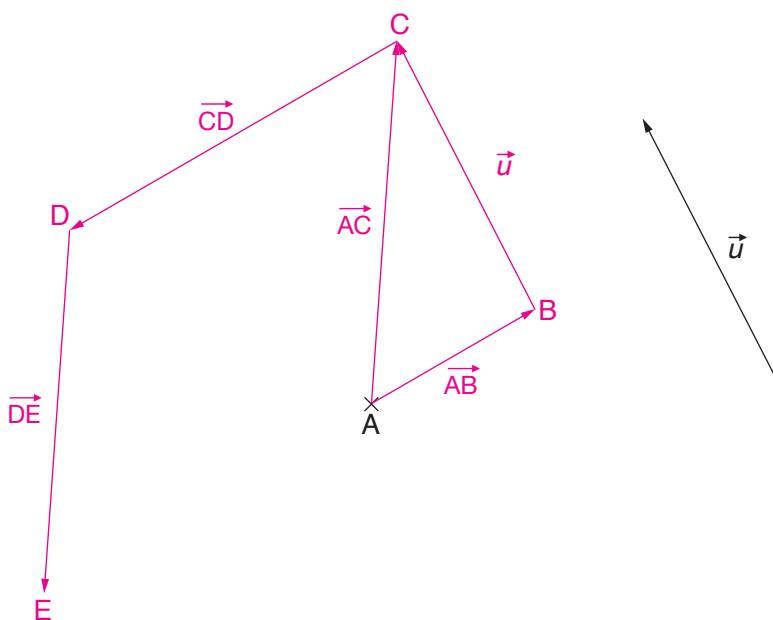


## Problématique

Quelle distance a parcouru Jordy ?

	Direction	Sens	Norme
$\overrightarrow{AB}$		Vers le haut	2,5 cm

Échelle : 1 cm représente 100 m



- 2 Réaliser** Représentez, à partir du point A, le vecteur somme  $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{u}$ .

**3 Analyser/Raisonner** Complétez l'égalité :  $\vec{BC} = \underline{\hspace{2cm}} \vec{u}$

**4 Réaliser**  Représentez le vecteur  $\vec{CD}$  sachant que  $\vec{CD} = -2\vec{AB}$ .

**5 Réaliser** Représentez le vecteur  $\vec{DE}$  sachant que  $\vec{DE}$  et  $\vec{AC}$  sont des vecteurs opposés.

**6 S'approprier** Complétez les pointillés :  $\vec{CD}$  et  $\vec{AB}$  sont des vecteurs **colinéaires** .

**7 Réaliser** Déterminez les normes suivantes :

$\|\vec{AB}\| = \underline{2,5 \text{ cm}}$ ,  $\|\vec{BC}\| = \underline{4 \text{ cm}}$ ,  $\|\vec{CD}\| = \underline{5 \text{ cm}}$  et  $\|\vec{DE}\| = \underline{4,7 \text{ cm}}$

**8 Valider Communiquer** Utilisez l'échelle pour répondre à la problématique.

Détailler la démarche suivie.

$$\|\vec{AB}\| + \|\vec{BC}\| + \|\vec{CD}\| + \|\vec{DE}\| = 16,2 \text{ cm donc Jordy a parcouru } 16,2 \times 100 = 1\,620 \text{ m.}$$

# Calculs relatifs aux vecteurs du plan

9

## Capacités

- Déterminer graphiquement les coordonnées d'un vecteur dans le plan rapporté à un repère orthogonal.
- Représenter, dans le plan rapporté à un repère orthogonal, un vecteur dont les coordonnées sont données.
- Reconnaitre, à l'aide de leurs coordonnées, des vecteurs égaux dans le plan muni d'un repère orthogonal.
- Calculer les coordonnées d'un vecteur connaissant les coordonnées des extrémités d'un de ses représentants.

- Dans le plan muni d'un repère orthogonal, calculer les coordonnées du vecteur obtenu comme :
  - somme de deux vecteurs ;
  - produit d'un vecteur par un nombre réel.
- Reconnaitre, à l'aide de leurs coordonnées, des vecteurs égaux, des vecteurs colinéaires dans le plan muni d'un repère orthogonal.

- Calculer la norme d'un vecteur dans le plan muni d'un repère orthonormé.

## Activités

Activité 1

Activités 1 et 2

Activité 2

Activité 3

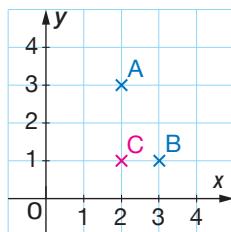
## Je méchaaffe !

### Activité 1 p. 116

Soit le repère ci-contre.

- a. Donnez les coordonnées des points A et B. **A(2 ; 3) ; B(3 ; 1).**

- b. Placez le point C de coordonnées (2 ; 1).

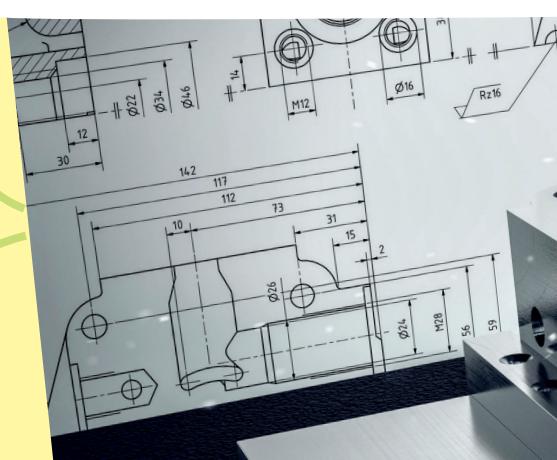
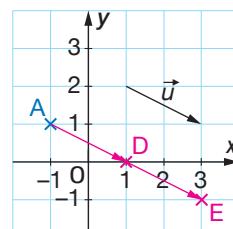


### Activité 2 p. 117

Soit le repère ci-contre.

- a. Placez le point D tel que  $\vec{AD} = \vec{u}$ .

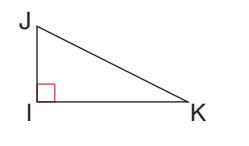
- b. Placez le point E tel que  $\vec{AE} = 2\vec{u}$ .



### Activité 3 p. 118

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle IJK rectangle en I tel que  $IJ = 4 \text{ cm}$  et  $IK = 5 \text{ cm}$ , calculez la longueur JK en cm arrondie à  $10^{-1}$  près.

$$JK = \sqrt{4^2 + 5^2} \approx 6,4 \text{ cm.}$$



# Activité

1

## Déterminer les coordonnées d'un vecteur

### SITUATION . Un nouveau super-héros ?

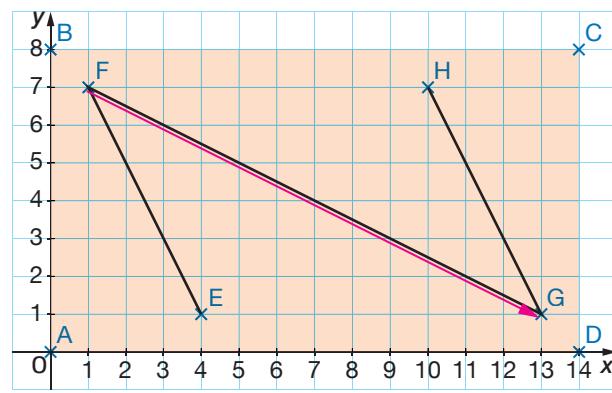
Jessy doit graver sur des plaques métalliques un logo avec un graveur à commande numérique.

Il doit préciser à la machine le point de départ de la gravure et le déplacement à effectuer sous forme d'un vecteur pour chaque segment.

Avant la gravure, la tête du graveur est positionnée au point B. La plaque à graver est assimilée au rectangle ABCD. Le logo est tracé en noir.

#### Problématique

Quelles consignes doit-il envoyer à la machine pour tracer le logo ?



- 1 a. **S'approprier** Donnez le nombre de segments à tracer pour ce logo. 3

- b. **S'approprier** Lisez et écrivez les coordonnées des points E, F, G et H.

$E(4 ; 1) ; F(1 ; 7) ; G(13 ; 1) \text{ et } H(10 ; 7)$ .

- 2 **Analyser/Raisonner** Complétez le texte suivant : Pour se déplacer du point B au point E, la tête du graveur doit se décaler de 4 unités dans le sens positif selon l'axe des **abscisses** et de 7 unités dans le sens négatif selon l'axe des **ordonnées**. Le vecteur  $\vec{BE}$  a donc pour **coordonnées**  $(4 ; -7)$ .

- 3 a. **Réaliser** Tracez sur le repère le vecteur  $\vec{FG}$ .

- b. **Réaliser** Lisez graphiquement les coordonnées du vecteur  $\vec{FG}$ .  $\vec{FG}(12 ; -6)$ .

- c. **Valider** En utilisant les coordonnées des points F et G, vérifiez que le couple  $(x_G - x_F ; y_G - y_F)$  donne les coordonnées du vecteur  $\vec{FG}$ .

$(x_G - x_F ; y_G - y_F) = (13 - 1 ; 1 - 7) = (12 ; -6)$ .

- 4 a. **Réaliser** Calculez les coordonnées des vecteurs  $\vec{EF}$  et  $\vec{GH}$ .

$(x_F - x_E ; y_F - y_E) = (1 - 4 ; 7 - 1) = (-3 ; 6)$ .

$(x_H - x_G ; y_H - y_G) = (10 - 13 ; 7 - 1) = (-3 ; 6)$ .

- b. **Valider** Comparez les coordonnées des vecteurs  $\vec{EF}$  et  $\vec{GH}$ . Que peut-on dire de ces 2 vecteurs ?

Les coordonnées sont égales. Les 2 vecteurs sont donc égaux.

- 5 **Valider** À la fin de la gravure, la tête du graveur retourne à sa position initiale selon le vecteur  $(-10 ; 1)$  à partir du point H. Vérifiez que la tête du graveur retourne bien au point B.

En traçant un vecteur de coordonnées  $(-10 ; 1)$  à partir du point H, on constate que l'extrémité du vecteur est bien le point B.

- 6 **Communiquer** Répondre à la problématique.

Le graveur doit commencer la gravure à partir du point E de coordonnées  $(4 ; 1)$ , puis se déplacer selon les vecteurs  $\vec{EF}(-3 ; 6)$  puis  $\vec{FG}(12 ; -6)$  et enfin  $\vec{GH}(-3 ; 6)$ .



Si deux vecteurs ont les **mêmes coordonnées**, alors les deux vecteurs sont **égaux**.

# Activité 2

## Utiliser les coordonnées d'un vecteur

### SITUATION . Treasure in London

Jules et Louis découvrent quelques monuments de la ville de Londres à travers un jeu de piste. Un plan quadrillé de la ville dans un repère orthogonal leur a été donné au début de la course. Le point de départ est le point D de coordonnées  $D(2 ; 5)$ . Le trajet comporte 3 étapes données par les extrémités des vecteurs  $\vec{u}(2 ; -6)$ ,  $\vec{v}(-6,5 ; 3)$  et  $\vec{w}(-1,5 ; -1)$ .

#### Problématique

Devant quel monument célèbre se terminera le jeu de piste ?



- 1** **Réaliser** [foucherconnect.fr/22mc50](https://foucherconnect.fr/22mc50) Ouvrez le fichier « C09\_117\_Londres.ggb ».

Placez sur la carte le point D correspondant au point de départ.

- 2** **a. Réaliser** À l'aide de l'outil vecteur , tracez à l'écran le représentant  $\overrightarrow{DC}$  du vecteur  $\vec{u}$ .

- b. S'approprier** Donnez les coordonnées du point C, destination de la première étape.  $C(4 ; -1)$ .

- 3** **a. Réaliser** Tracez le représentant  $\overrightarrow{CE}$  du vecteur  $\vec{v}$ .

- b. S'approprier** Donnez les coordonnées du point E, destination de la deuxième étape.  $E(-2,5 ; 2)$ .

- 4** **a. Réaliser** Calculez les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{DE}$ .

$$\overrightarrow{DE}(x_E - x_D ; y_E - y_D) \text{ soit } \overrightarrow{DE}(-2,5 - 2 ; 2 - 5) ; \overrightarrow{DE}(-4,5 ; -3).$$

- b. Valider** Le vecteur  $\overrightarrow{DE}$  est la somme des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

Vérifiez que la première coordonnée du vecteur  $\overrightarrow{DE}$  est égale à la somme des premières coordonnées des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ . Faites de même avec les deuxièmes coordonnées.

$2 + (-6,5) = -4,5$  ; la première coordonnée du vecteur  $\overrightarrow{DE}$  est bien égale à la somme des premières coordonnées des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .  $-6 + 3 = -3$ . Il en est de même pour les deuxièmes coordonnées.

- 5** **a. Réaliser** Tracez le représentant du vecteur  $\vec{w}$  d'origine E et d'extrémité F, puis le vecteur  $\overrightarrow{DE}$ .

- b. Valider** Les vecteurs  $\vec{w}$  et  $\overrightarrow{DE}$  sont-ils colinéaires ?

Les directions des 2 vecteurs sont les mêmes. Ils sont donc colinéaires.

- c. Réaliser** Comparez les coordonnées des vecteurs  $\vec{w}$  et  $\overrightarrow{DE}$ .

Les coordonnées de  $\overrightarrow{DE}$  sont égales à trois fois celles de  $\vec{w}$ .

- d. Analyser/Raisonner** Cochez l'égalité correcte parmi les 3 proposées.

$\overrightarrow{DE} = 3\vec{w}$       $\vec{w} = 3\overrightarrow{DE}$       $\overrightarrow{DE} = 4\vec{w}$

- 6** **Réaliser** Lisez les coordonnées du point F.  $F(-4 ; 1)$ .

- 7** **Valider Communiquer** Répondez à la problématique.

Le jeu de piste se terminera devant Buckingham Palace.

#### TUTO LOGICIEL

Tracer un vecteur dans le plan



[foucherconnect.fr/22mc51](https://foucherconnect.fr/22mc51)

# Activité 3

## Calculer la norme d'un vecteur

### SITUATION . La flèche de Legolas

Dans la trilogie « Le seigneur des anneaux », les elfes sont des êtres immortels dont la précision et la rapidité au tir à l'arc sont considérées comme redoutables.



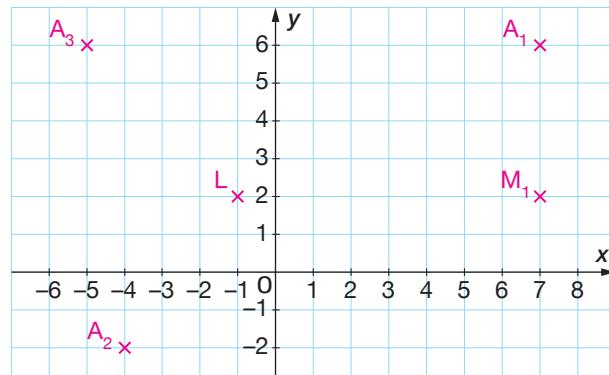
Dans toute l'activité, on se place dans un repère orthonormé dont l'unité est le mètre. Legolas, le représentant des elfes situé au point  $L(-1 ; 2)$  affronte trois Orques placés aux points  $A_1(7 ; 6)$ ,  $A_2(-4 ; -2)$  et  $A_3(-5 ; 6)$ .

Legolas ne manque jamais sa cible dès lors qu'elle est située à moins de 7 mètres.

#### Problématique

Legolas peut-il atteindre ses trois ennemis sans bouger ?

**1 Réaliser** Placez dans le repère orthonormé les points  $L$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  et  $M_1(7 ; 2)$ .



**2 Valider** Donnez la nature du triangle  $LA_1M_1$ . Justifiez.

Le triangle  $LA_1M_1$  est rectangle en  $M_1$ , car  $(LM_1)$  est parallèle à l'axe des abscisses et  $(M_1A_1)$  est parallèle à l'axe des ordonnées, ces deux droites sont donc perpendiculaires.

**3 a. Analyser/Raisonner** Proposez une méthode permettant de déterminer la longueur  $LA_1$ .

Proposition : appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle  $LA_1M_1$ .

**b. Réaliser** Déterminez la longueur  $LA_1$  en utilisant la méthode proposée à la question 3a. Arrondissez au dixième.

$$LA_1 = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} \approx 8,9 \text{ m.}$$

**4 Réaliser Valider** En utilisant les coordonnées des points  $L$  et  $A_1$ , vérifiez que la norme du vecteur  $\overrightarrow{LA_1}$  donnée par la formule  $\|\overrightarrow{LA_1}\| = \sqrt{(x_{A_1} - x_L)^2 + (y_{A_1} - y_L)^2}$  est égale à la longueur du segment  $[LA_1]$  trouvée à la question 3b.

$$\|\overrightarrow{LA_1}\| = \sqrt{(x_{A_1} - x_L)^2 + (y_{A_1} - y_L)^2} = \sqrt{(7 - (-1))^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{80} \approx 8,9 \text{ m. On retrouve bien la même valeur.}$$

**5 Réaliser** En utilisant la formule donnée à la question 4, calculez les normes des vecteurs  $\overrightarrow{LA_2}$  et  $\overrightarrow{LA_3}$ .

$$\|\overrightarrow{LA_2}\| = \sqrt{(x_{A_2} - x_L)^2 + (y_{A_2} - y_L)^2} = \sqrt{(-4 - (-1))^2 + (-2 - 2)^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ m.}$$

$$\|\overrightarrow{LA_3}\| = \sqrt{(x_{A_3} - x_L)^2 + (y_{A_3} - y_L)^2} = \sqrt{(-5 - (-1))^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{32} \approx 5,7 \text{ m.}$$

**6 Valider Communiquer** Répondez à la problématique.

Legolas pourra atteindre les deux Orques situés en  $A_2$  et en  $A_3$ . Il n'est pas assuré d'atteindre l'Orque situé en  $A_1$  car il est situé au-delà des 7 mètres.

# Activité

Algo  
Pro

## Comparer deux vecteurs

MES FICHIERS

Python

foucherconnect.fr/22mc52



### SITUATION . Alignement parfait ?

Le téléphérique de Grenoble est constitué de 5 bulles aux parois translucides qui permettent aux passagers de profiter d'une vue exceptionnelle.

On considère que chacune des 5 bulles est assimilée à un point. Les 5 bulles à l'arrivée en gare, sont situées sur un même plan, et repérées par les points D(-0,2 ; -0,2), E(0,12 ; -0,1), F(0,44 ; 0), G(0,81 ; 0,12) et H(1,25 ; 0,22). Le plan est muni d'un repère orthonormé.



#### Problématique

Lors de l'arrivée en gare, les 5 bulles sont-elles parfaitement alignées ?

- 1** Calculez les coordonnées des vecteurs  $\vec{DE}$ ,  $\vec{DF}$ ,  $\vec{DG}$  et  $\vec{DH}$ .

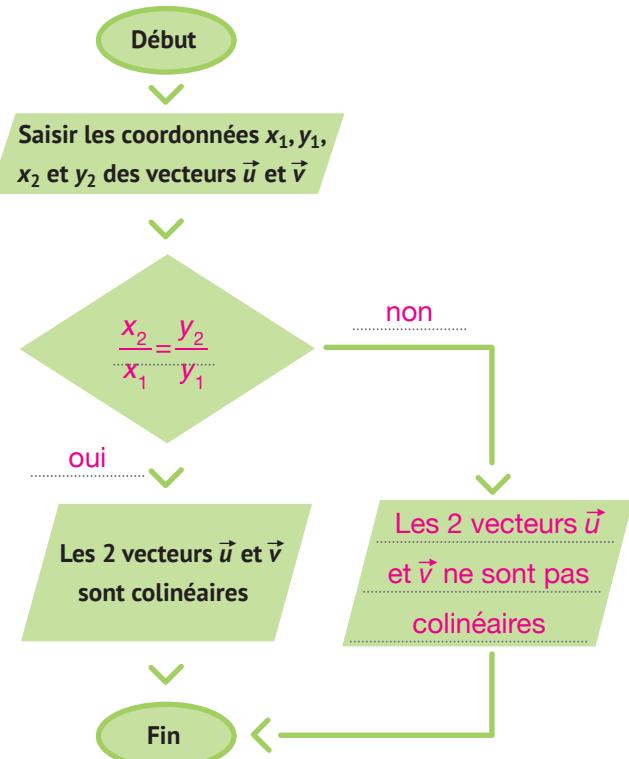
$\vec{DE}(0,32 ; 0,1)$  ;  $\vec{DF}(0,64 ; 0,2)$  ;  $\vec{DG}(1,01 ; 0,32)$   
et  $\vec{DH}(1,45 ; 0,42)$ .

- 2** Écrivez une condition pour que deux vecteurs  $\vec{u}(x_1 ; y_1)$  et  $\vec{v}(x_2 ; y_2)$  soient colinéaires.

Les coordonnées de  $\vec{v}$  doivent être proportionnelles  
à celles de  $\vec{u}$ . Soit  $\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1}$ .

#### LANGAGE NATUREL

- 3** L'algorithme ci-contre permet de déterminer si deux vecteurs  $\vec{u}(x_1 ; y_1)$  et  $\vec{v}(x_2 ; y_2)$  sont colinéaires. Complétez-le.



#### LANGAGE PYTHON



- 4** Ouvrez le fichier « C09\_119\_telepherique.py ».

Complétez-le pour que le programme puisse vérifier la colinéarité de deux vecteurs.

- 5** Exécutez le programme pour comparer les vecteurs  $\vec{DE}$  et  $\vec{DF}$ , puis  $\vec{DE}$  et  $\vec{DG}$  et enfin  $\vec{DE}$  et  $\vec{DH}$ .

$\vec{DE}$  et  $\vec{DF}$  sont colinéaires.  $\vec{DE}$  et  $\vec{DG}$  ne sont pas colinéaires.  $\vec{DE}$  et  $\vec{DH}$  ne sont pas colinéaires.

- 6** Répondez à la problématique.

Seules les trois bulles repérées par les points D, E et F sont alignées.

**LEXIQUE**  
python™

Instruction	Signification
<code>if x2/x1==y2/y1:</code>	Tester la condition et exécuter les instructions suivantes (elles sont en retrait) si la réponse est oui.
<code>else:</code>	Si la réponse à la condition est non, exécuter les instructions (également en retrait) qui suivent « <code>else:</code> »

### L'essentiel

Soit  $A(x_A ; y_A)$  et  $B(x_B ; y_B)$  deux points dans un repère.

#### Coordonnées d'un vecteur

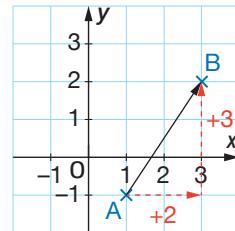
On peut déterminer les  **coordonnées** d'un vecteur  $\vec{AB}$  en utilisant deux méthodes.

- Graphiquement : pour rejoindre  $B$  à partir du point  $A$ , on compte de combien d'unités on se déplace selon chacun des 2 axes ; Il faut prendre en compte le sens positif ou négatif du déplacement.
- Algébriquement : les coordonnées du vecteur  $\vec{AB}$  sont données par la formule

$$\vec{AB} (x_B - x_A ; y_B - y_A).$$

#### Exemple

- Dans un repère orthonormé, on donne  $A(1 ; -1)$  et  $B(3 ; 2)$ . Les pointillés rouges sur le schéma permettent de lire que les coordonnées de  $\vec{AB}$  sont  $(2 ; 3)$ .
- Par le calcul, on obtient :  $\vec{AB}(3 - 1 ; 2 - (-1))$  soit  $\vec{AB}(2 ; 3)$ .



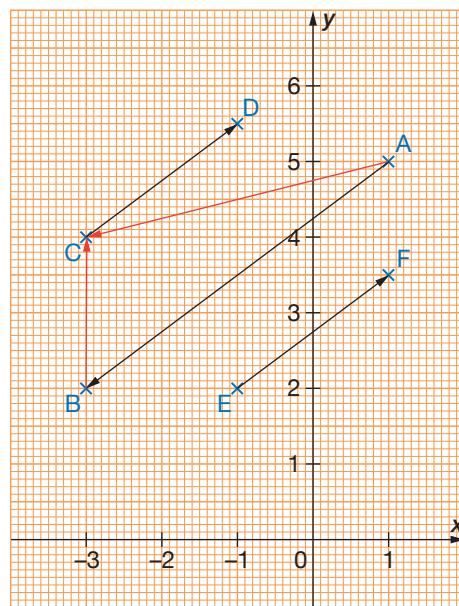
#### Utilisation de coordonnées de vecteurs

- Deux vecteurs sont **égaux** s'ils ont les mêmes coordonnées et réciproquement.
- Deux vecteurs sont **colinéaires** si les coordonnées de l'un sont multiples de celles de l'autre et réciproquement.
- Le **produit d'un vecteur  $\vec{u}$  par un réel  $k$** , est un vecteur  $\vec{v}$  dont les coordonnées s'obtiennent en multipliant celles de  $\vec{u}$  par le réel  $k$ . Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont **colinéaires**.
- Les coordonnées du **vecteur somme  $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$**  s'obtiennent en additionnant les coordonnées de  $\vec{AB}$  et de  $\vec{BC}$ .

#### Exemple

Dans le repère orthonormé ci-contre, les vecteurs représentés ont pour coordonnées  $\vec{AB}(-4 ; -3)$ ,  $\vec{CD}(2 ; 1,5)$ ,  $\vec{BC}(0 ; 2)$ ,  $\vec{AC}(-4 ; -1)$  et  $\vec{EF}(2 ; 1,5)$ .

- Les vecteurs  $\vec{CD}$  et  $\vec{EF}$  sont égaux.
- Les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{CD}$  sont colinéaires car leurs coordonnées sont proportionnelles :  $\vec{AB} = -2\vec{CD}$ .
- Les coordonnées du vecteur  $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$  s'obtiennent en additionnant celles de  $\vec{AB}$  et de  $\vec{BC}$ . Soit  $\vec{AC}(-4 + 0 ; -3 + 2)$  soit  $\vec{AC}(-4 ; -1)$ .



#### Norme d'un vecteur

- Dans un repère orthonormé, la **norme du vecteur  $\vec{AB}$**  est la longueur  $AB$  du segment  $[AB]$ . Elle est notée  $\|\vec{AB}\|$ .

$$AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

- La norme du vecteur  $\vec{u}$  de coordonnées  $(x_{\vec{u}} ; y_{\vec{u}})$  est égale à  $\|\vec{u}\| = \sqrt{x_{\vec{u}}^2 + y_{\vec{u}}^2}$ .

#### Exemple

Dans un repère orthonormé, on donne  $A(1 ; -1)$  et  $B(3 ; 2)$ .

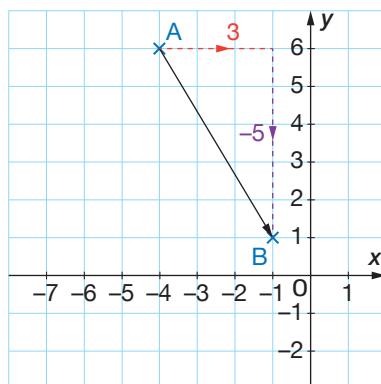
$$AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(3 - 1)^2 + (2 - (-1))^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

## Savoir-faire

### Savoir-faire 1 Tracer un vecteur dont les coordonnées sont données

Dans un repère orthonormé, le point A de coordonnées  $(-4 ; 6)$  est donné.  
Tracez le vecteur  $\vec{AB}$  de coordonnées  $(3 ; -5)$ .

#### RÉSOLUTION



#### MÉTHODE

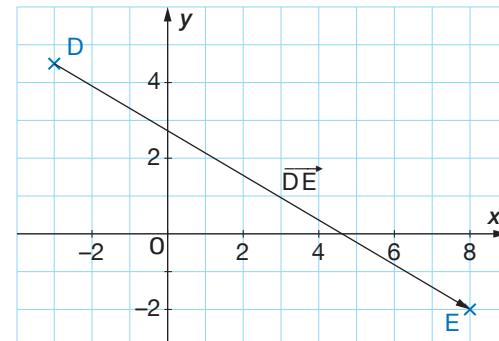
- Placer le point A de coordonnées  $(-4 ; 6)$  dans le repère.
- À partir du point A, se déplacer de **3** unités dans le sens **positif** selon l'axe des abscisses (vers la droite) et de **5** unités dans le sens **négatif** selon l'axe des ordonnées (vers le bas).
- Le point d'arrivée correspond alors au point B.
- Tracer un segment fléché partant du point A vers le point B.

[Voir exercice 1](#)

### Savoir-faire 2 Calculer les coordonnées d'un vecteur

Dans un repère orthonormé, on donne le point D $(-3 ; 4,5)$  et le point E $(8 ; -2)$ .

Calculez les coordonnées du vecteur  $\vec{DE}$ .



#### RÉSOLUTION

- D est l'origine du vecteur  $\vec{DE}$ .  
E est l'extrémité du vecteur  $\vec{DE}$ .

- $x_D = -3$  ;  $x_E = 8$  ;  $y_D = 4,5$  et  $y_E = -2$ .

- $\vec{DE}(8 - (-3) ; -2 - 4,5)$ .

Soit  $\vec{DE}(11 ; -6,5)$ .

#### MÉTHODE

- Repérer l'origine et l'extrémité du vecteur. L'origine est la première lettre et l'extrémité la seconde.
- Relever les valeurs des abscisses et des ordonnées de ces 2 points.
- Calculer les coordonnées du vecteur en utilisant la formule du cours  
 $\vec{AB} (x_B - x_A ; y_B - y_A)$ .

[Voir exercices 3, 4 et 7](#)

# Accompagnement personnalisé



## J'utilise le vocabulaire approprié

- 1 Complétez le texte avec les expressions proposées.

colinéaires • unités • graphiquement • l'origine • coordonnées • proportionnelles • longueur  
• égaux • l'extrémité • norme

a. Pour déterminer graphiquement les coordonnées d'un vecteur  $\vec{AB}$  dans un repère, on compte de combien d'unités on se déplace selon les deux axes pour aller du point A au point B.

Le point A est l'origine et le point B est l'extrémité.

b. Deux vecteurs sont égaux s'ils ont les mêmes coordonnées.

c. Deux vecteurs sont colinéaires si leurs coordonnées sont proportionnelles.

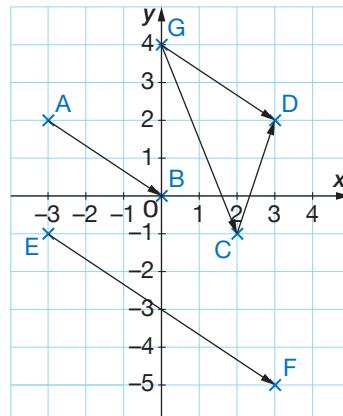
d. La norme du vecteur  $\vec{AB}$  est notée  $\|\vec{AB}\|$  et est égale à la longueur du segment  $[AB]$ .



## Je revois des points importants

- 2 Reliez chacun des vecteurs à ses coordonnées en utilisant le repère ci-contre.

- |            |          |
|------------|----------|
| $\vec{AB}$ | (1 ; 3)  |
| $\vec{CD}$ | (6 ; -4) |
| $\vec{EF}$ | (3 ; -2) |
| $\vec{GC}$ | (2 ; -5) |
| $\vec{GD}$ |          |



- 3 Vrai ou Faux ? (Justifiez en utilisant les réponses ci-dessus).

a. Les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{GD}$  sont égaux.

Vrai, ils ont les mêmes coordonnées.

b. Les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{EF}$  ne sont pas colinéaires.

Faux, ils sont colinéaires car leurs coordonnées sont proportionnelles  $\vec{EF} = 2\vec{AB}$ .

c.  $\vec{AB} = 2\vec{EF}$ .

Faux,  $\vec{EF} = 2\vec{AB}$ .

d. En additionnant les coordonnées de  $\vec{GC}$  et  $\vec{CD}$ , on obtient les coordonnées de  $\vec{DG}$ .

Faux, en additionnant les coordonnées de  $\vec{GC}$  et de  $\vec{CD}$ , on obtient celles de  $\vec{GD}$ .



## Je mémorise

- 4 Donnez la méthode pour :

a. montrer que deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.

Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires si  $\frac{x_v}{x_u} = \frac{y_v}{y_u}$ .

b. calculer la norme d'un vecteur  $\vec{IJ}$ , à partir des coordonnées des points I et J.

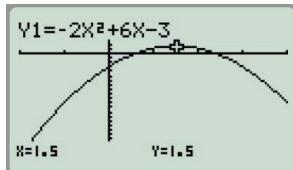
$IJ = \|\vec{IJ}\| = \sqrt{(x_J - x_I)^2 + (y_J - y_I)^2}$ .

## AUTOMATISMES

Sans calculatrice ni brouillon, répondez aux 3 questions du rituel indiqué par votre professeur.  
Votre réponse est juste ? Bravo ! Cochez la case de l'automatisme correspondant.

### Rituel 1

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = -2x^2 + 6x - 3$  sur l'intervalle  $[-2 ; 4]$ . La courbe représentative de cette fonction a été tracée sur la calculatrice.



- A10 Tracez le tableau de variations de la fonction  $f$ .

x	-2	1,5	4
Variations de $f$	-23	↑ 1,5	↓ -11

- A11 Déterminez le(s) extrémum(s) de la fonction  $f$  et précisez s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum. Précisez sa valeur et pour quelle valeur de  $x$  il est atteint.

Sur l'intervalle  $[-2 ; 4]$ , la fonction  $f$  possède un maximum. Il vaut 1,5 et est atteint pour  $x = 1,5$ .

Le minimum vaut -23 et est atteint pour  $x = -2$ .

- A15 Résolvez graphiquement l'inéquation  $f(x) < 1,5$  sur l'intervalle  $[-2 ; 4]$ .

Les valeurs de  $f$  sont strictement inférieures à 1,5 sur l'intervalle  $[-2 ; 4]$  sauf pour  $x = 1,5$ .

$$S = [-2 ; 1,5[ \cup ]1,5 ; 4].$$

### Rituel 2

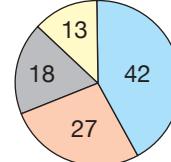
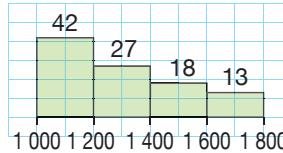
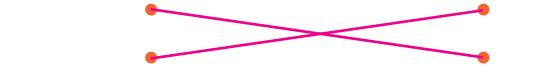
- A2 Un refuge accueille des chiens et des chats, mâles et femelles. Complétez le tableau sachant qu'il y a 230 chiens et 120 chats.

	Mâles	Femelles
Chiens	184	46
Chats	96	24

- A12 Associez chaque graphique au tableau qui lui correspond.

Sport préféré	Répartition en %
Basket	42
Handball	27
Football	18
Tennis	13

Salaire mensuel	Répartition en %
[1 000 ; 1 200[	42
[1 200 ; 1 400[	27
[1 400 ; 1 600[	18
[1 600 ; 1 800[	13

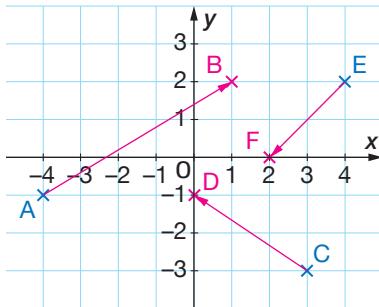


- A23 Développez et réduisez l'expression littérale  $(x - 4)(x + 6)$ .

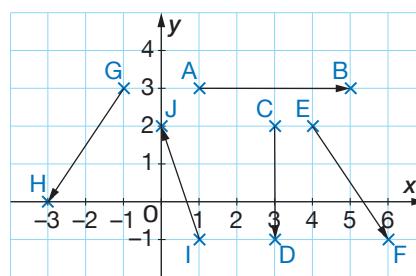
$$(x - 4)(x + 6) = x^2 + 6x - 4x - 24 = x^2 + 2x - 24.$$

## Coordonnées d'un vecteur

- 1 ★ Représentez les vecteurs  $\vec{AB}(5 ; 3)$  ;  $\vec{CD}(-3 ; 2)$  et  $\vec{EF}(-2 ; -2)$ .



- 2 ★ Déterminez graphiquement les coordonnées des vecteurs représentés ci-dessous.



$$\vec{AB}(4 ; 0) ; \vec{CD}(0 ; -3) ; \vec{EF}(2 ; -3) ; \vec{GH}(-2 ; -3) \text{ et } \vec{IJ}(-1 ; 3).$$

# Exercices

- 3** ★ Maëlys doit calculer les coordonnées du vecteur  $\vec{KM}$  avec  $K(-3 ; 7)$  et  $M(4 ; -2)$ . Trouvez l'erreur qu'elle a commise.

Les coordonnées du vecteur  $\vec{KM}$  se calculent avec la formule  $(x_K - x_M ; y_K - y_M)$ . On a donc  $\vec{KM} (-3 - 4 ; 7 - (-2))$  soit  $\vec{KM} (-7 ; 9)$ .

Elle a inversé les points K et M dans la formule.

K est l'origine et M est l'extrémité.

- 4** ★ Dans un repère orthonormé, on a quatre points  $A(1 ; 4)$ ,  $B(6 ; 3)$ ,  $C(5 ; -2)$  et  $D(0 ; -1)$ .

- a. Calculez les coordonnées des vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{DC}$ .

$\vec{AB}(5 ; -1)$  et  $\vec{DC}(5 ; -1)$ .

- b. Ouvrez un fichier GeoGebra. Placez les quatre points A, B, C et D. Tracez les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{DC}$  et vérifiez vos résultats obtenus à la question a dans la fenêtre GeoGebra.



Tracer un vecteur dans le plan



foucherconnect.fr/22mc51

Les résultats sont identiques à ceux obtenus à la question a.

- c. Déduisez-en la nature du quadrilatère ABCD. Justifiez.

Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme car les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{DC}$  sont égaux.

## Utilisation de coordonnées de vecteurs

- 5** ★ Dans un repère orthonormé, on considère deux vecteurs  $\vec{u}(3 ; -2)$  et  $\vec{v}(2 ; 7)$ .

- a. Calculez les coordonnées du vecteur somme  $\vec{u} + \vec{v}$ .

$\vec{u} + \vec{v}(3 + 2 ; -2 + 7)$  soit  $\vec{u} + \vec{v}(5 ; 5)$ .

- b. Calculez les coordonnées du vecteur  $4\vec{u}$ .

$4\vec{u}(4 \times 3 ; 4 \times (-2))$  soit  $4\vec{u}(12 ; -8)$ .

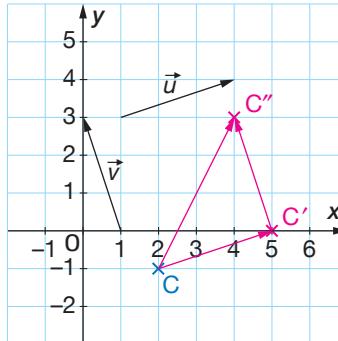
- c. Calculez les coordonnées du vecteur  $-2\vec{v}$ .

$-2\vec{v}(-2 \times 2 ; -2 \times 7)$  soit  $-2\vec{v}(-4 ; -14)$ .

- d. Déduisez-en les coordonnées du vecteur  $4\vec{u} - 2\vec{v}$ .

$4\vec{u} - 2\vec{v}(12 - 4 ; -8 - 14)$  soit  $4\vec{u} - 2\vec{v}(8 ; -22)$ .

- 6** ★ On considère deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , et un point C dans un repère orthonormé.



- a. Lisez les coordonnées des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

$\vec{u}(3 ; 1)$  et  $\vec{v}(-1 ; 3)$ .

- b. Calculez les coordonnées du vecteur  $\vec{u} + \vec{v}$ .

$\vec{u} + \vec{v}(3 + (-1) ; 1 + 3)$  soit  $(2 ; 4)$ .

- c. Tracez sur le repère ci-dessus le vecteur  $\vec{CC''}$  tel que  $\vec{CC''} = \vec{u} + \vec{v}$ .

- d. Lisez graphiquement les coordonnées du vecteur  $\vec{CC''}$  et vérifiez que cette lecture graphique est cohérente avec le calcul effectué à la question b.

$\vec{CC''}(2 ; 4)$ . Les coordonnées sont identiques à celles calculées à la question b.

- 7** ★ Dans un repère orthonormé du plan, on considère les points  $E(-4 ; 7)$ ,  $F(-2 ; 10)$  et  $G(2 ; 16)$ .

- a. Calculez les coordonnées des vecteurs  $\vec{EF}$  et  $\vec{EG}$ .

$\vec{EF}(-2 - (-4) ; 10 - 7)$  soit  $\vec{EF}(2 ; 3)$ .

$\vec{EG}(2 - (-4) ; 16 - 7)$  soit  $\vec{EG}(6 ; 9)$ .

- b. Les vecteurs  $\vec{EF}$  et  $\vec{EG}$  sont-ils colinéaires ? Justifiez votre réponse.

Les vecteurs  $\vec{EF}$  et  $\vec{EG}$  sont colinéaires car

les coordonnées de  $\vec{EG}$  sont le triple de celles de  $\vec{EF}$ .

- c. Écrivez une égalité entre les vecteurs  $\vec{EF}$  et  $\vec{EG}$ .  $\vec{EG} = 3\vec{EF}$ .

- d. Que pouvez-vous dire des trois points E, F et G ?

Les vecteurs  $\vec{EF}$  et  $\vec{EG}$  sont colinéaires donc les points E, F et G sont alignés.

## 8 ★★

a. Lancez le logiciel GeoGebra et placez les points J(1,25 ; -2,75), L(0 ; 0,25) et M(-3,75 ; 9,25) dans un nouveau repère.

b. Calculez les coordonnées des vecteurs  $\vec{JL}$  et  $\vec{JM}$ .

$$\vec{JL}(-1,25 ; 3) \text{ et } \vec{JM}(-5 ; 12).$$

c. Vérifiez vos résultats dans la fenêtre Algèbre du logiciel après avoir tracé les deux vecteurs.

## TUTO LOGICIEL

Tracer un vecteur dans le plan



foucherconnect.fr/22mc51

Les coordonnées calculées sont identiques à celles trouvées sur GeoGebra.

d. Déterminez le réel  $k$  tel que  $\vec{JM} = k \vec{JL}$ .

$$\frac{-5}{-1,25} = 4 \text{ et } \frac{12}{3} = 4. \text{ Donc } k = 4.$$

e. Que pouvez-vous dire des points J, M et L ?

Les vecteurs  $\vec{JL}$  et  $\vec{JM}$  sont colinéaires donc les points J, M et L sont alignés.

f. Vérifiez cette affirmation sur le logiciel en traçant la droite (JL).

Les 3 points sont alignés. M est sur la droite (JL).

## Norme d'un vecteur

9 ★ Soit les points P(3 ; -2) et R(8 ; -6) dans un repère orthonormé d'origine O.

Calculez la norme des vecteurs  $\vec{OP}$ ,  $\vec{PR}$  et  $\vec{OR}$ .

$$\|\vec{OP}\| = \sqrt{(x_P - x_O)^2 + (y_P - y_O)^2}$$

$$\|\vec{OP}\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}.$$

$$\|\vec{PR}\| = \sqrt{(x_R - x_P)^2 + (y_R - y_P)^2}$$

$$\|\vec{PR}\| = \sqrt{(8 - 3)^2 + (-6 + 2)^2} = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}.$$

$$\|\vec{OR}\| = \sqrt{(x_R - x_O)^2 + (y_R - y_O)^2}$$

$$\|\vec{OR}\| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{64 + 36} = 10.$$

## 10 ★★

Dans un repère orthonormé du plan, on a trois points A(2 ; 1), B(2 ; 4) et C(4 ; 1).

a. Calculez les longueurs AB, BC et AC.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$AB = \sqrt{(2 - 2)^2 + (4 - 1)^2} = 3.$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$$

$$BC = \sqrt{(4 - 2)^2 + (1 - 4)^2} = \sqrt{13}.$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$$

$$AC = \sqrt{(4 - 2)^2 + (1 - 1)^2} = 2.$$

b. Donnez la nature du triangle ABC. Justifiez.

$$AB^2 + AC^2 = 13. BC^2 = 13.$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

c. Ouvrez un fichier GeoGebra. Placez les points A, B et C.

d. Tracez les 3 côtés du triangle ABC et vérifiez dans la fenêtre Algèbre les longueurs calculées à la question a.

Les valeurs calculées sont identiques.

e. En utilisant l'outil , vérifiez que l'angle  $\widehat{BAC}$  est bien un angle droit.

L'angle  $\widehat{BAC}$  est bien un angle droit.

## II ★★ Logique ▶ p. 146

Soit deux vecteurs  $\vec{u}(2 ; 4)$  et  $\vec{v}(-3 ; 7)$  du plan muni d'un repère orthonormé. Soit  $\vec{w}$  tel que  $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ .

a. Calculez la norme de ces trois vecteurs.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x_{\vec{u}}^2 + y_{\vec{u}}^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}.$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{x_{\vec{v}}^2 + y_{\vec{v}}^2} = \sqrt{(-3)^2 + 7^2} = \sqrt{58}.$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{x_{\vec{w}}^2 + y_{\vec{w}}^2} = \sqrt{(-1)^2 + 11^2}$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{122} \approx 11,05.$$

b. Justifiez l'affirmation : « La norme du vecteur somme de deux vecteurs n'est pas égale à la somme des normes des deux vecteurs ».

$\|\vec{w}\| \neq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ . L'affirmation est donc vraie.

La norme du vecteur somme de deux vecteurs n'est pas égale à la somme des normes des deux vecteurs.

# Problèmes

## 12 ★★ Python

On dispose d'un programme écrit en langage Python permettant de calculer les coordonnées d'un vecteur  $\vec{AB}$  à partir des coordonnées de son origine A et de son extrémité B.

1. Rappelez comment calculer les coordonnées du vecteur  $\vec{AB}$  à partir des coordonnées de A et B.

Les coordonnées du vecteur  $\vec{AB}$  sont données par la formule  $(x_B - x_A ; y_B - y_A)$ .

2. Calculez les coordonnées du vecteur  $\vec{AB}$  avec A(4 ; -3) et B(2,5 ; 3,7).

$$\vec{AB}(2,5 - 4 ; 3,7 - (-3)) \text{ soit } \vec{AB}(-1,5 ; 6,7).$$

3. On considère le programme écrit en langage Python.

Complétez les lignes 6 et 7 du programme.

```
1 from math import*
2 x_A=float(input("abscisse du point A?"))
3 y_A=float(input("ordonnée du point A?"))
4 x_B=float(input("abscisse du point B?"))
5 y_B=float(input("ordonnée du point B?"))
6 x_AB= x_B-x_A
7 y_AB= y_B-y_A
8 print("les coordonnées du vecteur AB
sont:",x_AB,y_AB)
```

4. Recopiez et exécutez le programme pour vérifier votre calcul à la question 2.

## 13 ★★ Python foucherconnect.fr/22mc53

On dispose d'un programme écrit en langage Python permettant de calculer la norme d'un vecteur  $\vec{AB}$  à partir des coordonnées de son origine A et de son extrémité B.

1. Calculez la norme du vecteur  $\vec{AB}$  avec A(4 ; -3) et B(2,5 ; 3,7).

$$AB = \sqrt{(2,5 - 4)^2 + (3,7 - (-3))^2}$$

$$AB = \sqrt{47,14} \approx 6,87.$$

2. Ouvrez le fichier « C09\_126\_probleme13.py » et recopiez la ligne qui permet le calcul de la norme.

`norme=sqrt(x_AB**2+y_AB**2)`.

3. En comparant avec la formule du cours de la norme d'un vecteur, donnez la signification de la fonction `sqrt()`.

`sqrt()` permet de calculer une racine carrée.

4. Exécutez le programme pour vérifier votre calcul à la question 1.

## 14 ★★ Ensembles p. 143

Dans un repère orthonormé du plan, on note  $\mathcal{C}$  le cercle de centre C(2 ; -4) et de rayon 3 unités et  $\mathcal{D}$  le disque de centre C et de rayon 3 unités.

Soit les points A(2 ; -1), B (3 ; -3), D(0 ; -5) et E(-4 ; -4).

1. Calculez les longueurs AC, BC, DC et EC. Arrondissez au centième.

$$AC = \sqrt{(2 - 2)^2 + (-4 - (-1))^2} = 3.$$

$$BC = \sqrt{(2 - 3)^2 + (-4 - (-3))^2} = \sqrt{2} \approx 1,41.$$

$$DC = \sqrt{(2 - 0)^2 + (-4 - (-5))^2} = \sqrt{5} \approx 2,24.$$

$$EC = \sqrt{(2 - (-4))^2 + (-4 - (-4))^2} = 6.$$

2. En utilisant les longueurs calculées à la question 1, complétez les phrases suivantes par un des symboles  $\in$  ou  $\notin$ .

a. A  $\in$   $\mathcal{C}$  ; A  $\in$   $\mathcal{D}$  ; b. B  $\notin$   $\mathcal{C}$  ; B  $\in$   $\mathcal{D}$  ;

c. D  $\notin$   $\mathcal{C}$  ; D  $\in$   $\mathcal{D}$  ; d. E  $\notin$   $\mathcal{C}$  ; E  $\notin$   $\mathcal{D}$ .

15 ★★  Un solide S est soumis à 3 forces situées dans le même plan, concourantes et représentées par les vecteurs  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  et  $\vec{F}_3$ . Les coordonnées de ces trois vecteurs dans un repère orthonormé sont  $\vec{F}_1(2,5 ; 3,1)$ ,  $\vec{F}_2(-6,4 ; 7,3)$  et  $\vec{F}_3(3,9 ; -7,1)$ .

Le solide S est en équilibre si  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$ .



Le vecteur nul  $\vec{0}$  a pour coordonnées (0 ; 0).

1. Le solide S est-il en équilibre ? Justifiez.

Le vecteur  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$  a pour coordonnées  $(2,5 - 6,4 + 3,9 ; 3,1 + 7,3 - 7,1)$  soit  $(0 ; 3,3)$ .

Le solide S n'est donc pas en équilibre car  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \neq \vec{0}$ .

2. Quelles sont les coordonnées du vecteur  $\vec{F}_4$  représentant une quatrième force à appliquer au solide pour qu'il soit en équilibre ?

La quatrième force à appliquer, pour que le solide S soit en équilibre, sera un vecteur de coordonnées  $\vec{F}_4(0 ; -3,3)$  ainsi on aura

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{0}.$$

16 ★★★

[foucherconnect.fr/22mc54](https://foucherconnect.fr/22mc54)

Enzo qui a une masse de 71 kg souhaite installer un hamac. Trois forces (modélisées par des vecteurs) s'exercent sur le hamac : le poids  $\vec{P}$  de Enzo (représenté par le point C) et les forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  exercées par les mousquetons (représentés par les points A et B pour retenir le hamac). Le but de l'exercice est de représenter ces trois forces dans un repère orthonormé.

L'échelle utilisée est de 1 unité pour 200 N.

1. En utilisant la formule  $P = m \times g$  où  $P$  est le poids en newtons,  $m$  la masse en kilogrammes et  $g = 9,81 \text{ N/kg}$ , calculez le poids en newton de Enzo arrondi à la dizaine.  $P = 71 \times 9,81 \approx 700 \text{ N}$ .

2. Le poids  $\vec{P}$  est une force verticale dirigée vers le bas. En utilisant l'échelle donnée, déterminez les coordonnées de  $\vec{P}$ .

La 1<sup>re</sup> coordonnée de  $\vec{P}$  est nulle car  $\vec{P}$  est une force verticale.  $\frac{700}{200} = 3,5$ .

$\vec{P}$  est vers le bas donc la 2<sup>e</sup> coordonnée de  $\vec{P}$  est  $-3,5$ .  $\vec{P}(0 ; -3,5)$ .

3. a. Ouvrez le fichier « C09\_127\_Hamac.ggb ».

Tracez le vecteur  $\vec{P}$  d'origine C et d'extrémité D.

b. Le vecteur  $\vec{F}_1$  est colinéaire au vecteur  $\vec{CA}$ . Le vecteur  $\vec{F}_2$  est colinéaire au vecteur  $\vec{CB}$ .

Tracez les droites (CA) et (CB).

c. Tracez la parallèle à (CA) passant par D. Placez le point E, intersection de cette parallèle avec la droite (CB).

d. Tracez les vecteurs  $\vec{F}_1 = \vec{DE}$  et  $\vec{F}_2 = \vec{EC}$ .

4. En utilisant les fonctionnalités de GeoGebra, donnez la norme de  $\vec{F}_1$  et celle de  $\vec{F}_2$ .

$\|\vec{F}_1\| = 6,76$  et  $\|\vec{F}_2\| = 6,6$ .

5. Calculez alors la valeur des forces  $F_1$  et  $F_2$ .

$F_1 = 6,76 \times 200 = 1\,352 \text{ N}$  et

$F_2 = 6,6 \times 200 = 1\,320 \text{ N}$ .

6. La charge maximale supportée par chaque mousqueton est de 2 kN. Vérifiez que cette valeur n'est pas dépassée.

$2 \text{ kN} = 2\,000 \text{ N} > 1\,352 \text{ N}$  donc la charge maximale n'est pas dépassée.

7. En déplaçant le point D sur le fichier, déterminez la masse maximale d'un utilisateur supportée par le mousqueton.

$\|\vec{F}_1\| = 10$  lorsque  $\vec{P}$  a pour coordonnées  $(0 ; -5,18)$ .

La masse maximale supportée est donc

$5,18 \times 200 / 9,81 = 106 \text{ kg}$ .

17 ★★★



Une perceuse à commande numérique est programmée pour percer une série de quatre trous dans une plaque de bois.



Les trous sont repérés par des points S, T, U et V placés dans un repère orthonormé du plan.

Chaque point a pour ordonnée  $3x - 5$ , où  $x$  est son abscisse.

1. Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = 3x - 5$ . Donnez l'allure de la représentation graphique de  $f$  et émettez une conjecture sur l'alignement des quatre trous.

$f$  est une fonction affine. Sa représentation graphique est une droite. On peut supposer que les trous sont alignés.

2. Complétez le tableau ci-dessous pour déterminer les coordonnées des 4 points.

Point	S	T	U	V
Abscisse	1,5	6	8,4	10,2
Ordonnée	-0,5	13	20,2	25,6

3. Calculez les coordonnées des vecteurs  $\vec{ST}$ ,  $\vec{SU}$  et  $\vec{SV}$ .

$\vec{ST}(6 - 1,5 ; 13 - (-0,5))$  soit  $(4,5 ; 13,5)$ .

$\vec{SU}(8,4 - 1,5 ; 20,2 - (-0,5))$  soit  $\vec{SU}(6,9 ; 20,7)$ .

$\vec{SV}(10,2 - 1,5 ; 25,6 - (-0,5))$  soit  $\vec{SV}(8,7 ; 26,1)$ .

4. Les vecteurs  $\vec{ST}$ ,  $\vec{SU}$  et  $\vec{SV}$  sont-ils colinéaires ? Justifiez.

$$\frac{20,7}{13,5} = \frac{6,9}{4,5} \text{ et } \frac{26,1}{13,5} = \frac{8,7}{4,5}$$

donc les coordonnées des vecteurs  $\vec{ST}$ ,  $\vec{SU}$  et  $\vec{SV}$  sont proportionnelles.

Les 3 vecteurs sont colinéaires.

5. Validez l'hypothèse émise à la question 1.

Les vecteurs  $\vec{ST}$ ,  $\vec{SU}$  et  $\vec{SV}$  sont colinéaires donc les 4 points S, T, U et V sont alignés.

# Évaluation

## Situation

Hassan, mécanicien poids lourds, doit remplacer l'axe de rotation de la benne. Pour cela, il doit en connaître les caractéristiques mécaniques, c'est-à-dire la force exercée par cet axe sur la benne. La benne a une masse totale de 20 tonnes. Le vérin exerce sur la benne une force de valeur  $F$ , représentée par le vecteur  $\vec{F}$  pour la faire basculer autour de l'axe de rotation. L'étude est réalisée dans un repère orthonormé où 1 unité représente 50 000 N. Dans ce repère, les coordonnées du vecteur  $\vec{F}$  sont  $(-1,4 ; 2,8)$ .



## Problématique

Quelle est la valeur  $R$  de la force exercée par l'axe de rotation sur la benne ?

**1** **S'approprier** Identifiez sur la photo l'axe de rotation de la benne en le marquant d'une croix.

**2 a. Réaliser** En utilisant la formule  $P = m \times g$  où  $P$  est le poids en newtons,  $m$  la masse en kilogrammes et  $g \approx 10 \text{ N/kg}$ , calculez le poids de la benne.

On rappelle que 1 tonne = 1 000 kg.

$$P = 20\ 000 \times 10 = 200\ 000 \text{ N.}$$

**b. Analyser/Raisonner** Le vecteur  $\vec{P}$  représente la force poids de la benne dont la direction est verticale et dirigée vers le bas. Montrez que les coordonnées du vecteur  $\vec{P}$  sont  $\vec{P}(0 ; -4)$ .

$\vec{P}(0 ; -4)$  car le vecteur  $\vec{P}$  est vertical, sa première coordonnée est nulle. La norme du vecteur  $\vec{P}$  est  $\frac{200\ 000}{50\ 000} = 4$ . Le vecteur  $\vec{P}$  est dirigé vers le bas donc la deuxième coordonnée de  $\vec{P}$  est  $-4$ .

**3 a. Réaliser** Placez sur le repère ci-contre le point B tel que  $\overrightarrow{GB} = \vec{P} + \vec{F}$ .

**b. Réaliser** L'ensemble étant en équilibre, on a l'égalité :  $\vec{P} + \vec{F} + \vec{R} = \vec{0}$ .

Tracez le vecteur  $\vec{R}$  tel que  $\vec{P} + \vec{F} + \vec{R} = \vec{0}$ .

**4 a. Réaliser** Exprimez le vecteur  $\vec{R}$  en fonction des vecteurs  $\vec{P}$  et  $\vec{F}$ .

$$\vec{R} = -\vec{P} - \vec{F}.$$

**b. Réaliser** Calculez les coordonnées du vecteur  $\vec{R}$ .

$$\vec{R}(-0 - (-1,4) ; -(-4) - 2,8) \text{ soit } \vec{R}(1,4 ; 1,2).$$

**c. Valider** Vérifiez les coordonnées de  $\vec{R}$  par lecture graphique.

Les coordonnées de  $\vec{R}$  trouvées par le calcul et par lecture graphique

sont cohérentes.

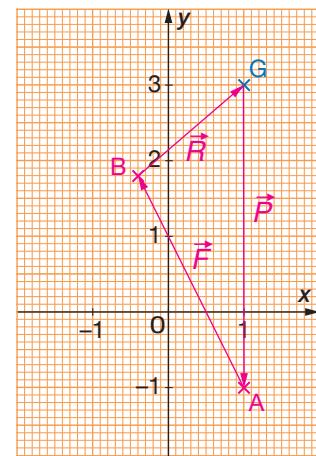
**d. Réaliser** Calculez la norme du vecteur  $\vec{R}$ . Arrondissez au millième.

$$\|\vec{R}\| = \sqrt{1,4^2 + 1,2^2} \approx 1,844.$$

**5 Valider Communiquer** Déterminez la valeur  $R$  de la force exercée par l'axe sur la benne et répondez à la problématique.

$$R = 1,844 \times 50\ 000 = 92\ 195 \text{ N.}$$

L'axe de rotation exerce une force de 92 650 N sur la benne.



# Trigonométrie

# 10

Capacités	Activités
• Placer, sur le cercle trigonométrique, le point M image d'un nombre réel $x$ donné par enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique.	Activité 1
• Effectuer des conversions de degrés en radians, de radians en degrés.	
• Déterminer graphiquement, à l'aide du cercle trigonométrique, le cosinus et le sinus d'un nombre réel donné.	Activité 2
• Placer sur le cercle trigonométrique les points images des réels $-x ; \pi - x ; \pi + x ; \frac{\pi}{2} - x ; \frac{\pi}{2} + x$ . connaissant le point image du réel $x$ .	
• Utiliser le cercle trigonométrique pour écrire les cosinus et sinus des réels $-x, \pi - x, \pi + x, \frac{\pi}{2} - x, \frac{\pi}{2} + x$ en fonction des cosinus et sinus du réel $x$ .	
• Construire et exploiter la représentation graphique de la fonction sinus.	Activité 3
• Construire la courbe représentative de la fonction cosinus par translation à partir de la fonction sinus.	

## Je m'échauffe !

### Activité 1 p. 130

- a. La mesure d'un angle plat est :
- 0°    90°    180°
- b. Donnez la valeur de  $\pi$  arrondie au dixième.

$$\pi \approx 3,1$$

### Activité 2 p. 131

Le point M a pour coordonnées  $(-2 ; 1)$ .

- a. Le point R est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses. Les coordonnées de R sont :

$(-2 ; -1)$      $(2 ; -1)$      $(2 ; 1)$

- b. Le point S est le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées. Les coordonnées de S sont :  $(2 ; 1)$



### Activité 3 p. 132

À l'aide la calculatrice réglée en mode degré, donnez les valeurs arrondies au centième de :  
 $\sin 20^\circ \approx 0,34$  ;  $\cos 70^\circ \approx 0,34$

# Activité

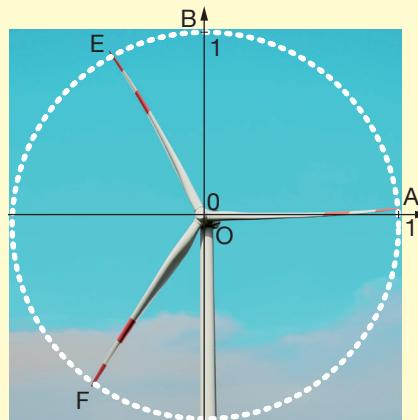
1

## Découvrir le cercle trigonométrique

### SITUATION . L'éolienne

La longueur des trois pales d'une éolienne est de 1 mètre. En tournant, les extrémités des pales décrivent un cercle de 1 mètre de rayon. On admet que si on se place dans un repère orthonormé du plan, chaque point de ce cercle peut être associé à un réel  $x$ .

On donne  $\widehat{AOE} = 120^\circ$  et  $\widehat{AOF} = 240^\circ$ .



#### Problématique

Quel réel, compris entre 0 et  $2\pi$ , a pour point image E ?

Quel réel, compris entre 0 et  $2\pi$ , a pour point image F ?

- 1 a. S'approprier [foucherconnect.fr/22mc55](http://foucherconnect.fr/22mc55)

Ouvrez le fichier « C10\_130\_enroulement.ggb ».

Le cercle de rayon 1 et de centre O est appelé **cercle trigonométrique**.

La droite graduée verticale rouge et verte représente tous les réels.

Déplacez le curseur « positif » pour visualiser l'enroulement des réels positifs sur le cercle trigonométrique.

- b. Réaliser En enroulant cette droite sur le cercle, on associe à chaque réel  $x$  un unique point du cercle appelé **point image** de  $x$ . Par exemple, le réel  $\frac{\pi}{4}$  a pour point image le point C.

Nommez le point image de  $\frac{\pi}{2}$  : B

c. Valider Vérifiez que  $\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4}$ .  $\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}$ .

- d. Analyser/Raisonner En poursuivant à l'écran l'enroulement de la droite, nommez le point image de  $\frac{9\pi}{4}$ . C

Que remarquez-vous ?  $\frac{\pi}{4}$  et  $\frac{9\pi}{4}$  ont le même point image.

- 2 a. S'approprier Déplacez le curseur « négatif » pour visualiser l'enroulement des réels négatifs sur le cercle trigonométrique.

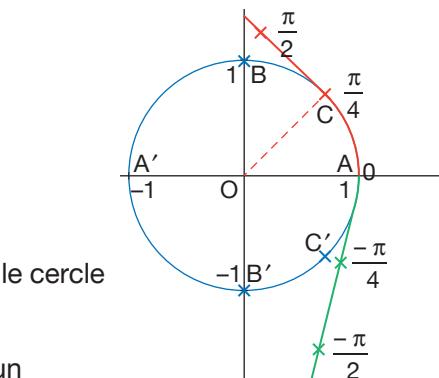
b. Réaliser Nommez le point image de  $-\frac{\pi}{4}$  : C'

- 3 Réaliser Le nombre  $\pi$  utilisé pour graduer la droite des réels permet d'exprimer la mesure des angles dans une nouvelle unité de mesure : le **radian** (rad).

On a par exemple  $\widehat{AOC} = \frac{\pi}{4}$  rad.

On a la correspondance :  **$\pi$  radians =  $180^\circ$** .

Complétez le tableau suivant :



Mesure en degrés	0	30	45	90	120	180	210	270
Mesure en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$

- 4 Communiquer Répondez à la problématique.

$\frac{2\pi}{3}$  a pour point image le point E ;  $\frac{4\pi}{3}$  a pour point image le point F.

Coup de pouce

Les mesures des angles en radians et en degrés sont proportionnelles.

# Activité 2

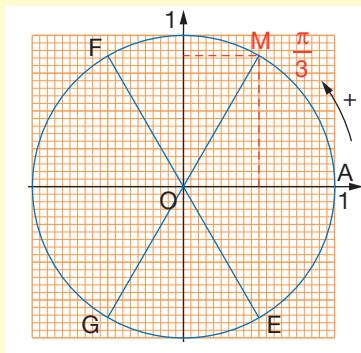
## Utiliser le cercle trigonométrique

### SITUATION . Des sinus et des cosinus à déterminer

Karoline a placé sur le cercle trigonométrique le point M point image du réel  $\frac{\pi}{3}$ , soit  $\widehat{AOM} = \frac{\pi}{3}$  rad. Elle veut déterminer, sans utiliser la calculatrice, une valeur approchée de cosinus  $\frac{\pi}{3}$  et sinus  $\frac{\pi}{3}$ , ainsi que celles des sinus et cosinus des réels  $-\frac{\pi}{3}$ ,  $(\pi - \frac{\pi}{3})$  et  $(\pi + \frac{\pi}{3})$ .

#### Problématique

Quelle méthode pouvez-vous proposer à Karoline pour déterminer ces valeurs approchées ?



- 1 a. S'approprier** Lisez sur le graphique les valeurs arrondies au dixième des coordonnées du point M.

Abscisse de M  $\approx$  0,5 ; ordonnée de M  $\approx$  0,9

- b. S'approprier Réaliser** À la calculatrice, utilisée en mode radian, déterminez  $\cos \frac{\pi}{3}$  et  $\sin \frac{\pi}{3}$ .

$\cos \frac{\pi}{3} = 0,5$  et  $\sin \frac{\pi}{3} \approx 0,87$  (valeur arrondie au centième)

- c. Valider** Comparez les valeurs obtenues en 1a et 1b. Les arrondis au dixième sont les mêmes.

- d. Analyser/Raisonner** Complétez les deux phrases suivantes par « abscisses » ou « ordonnées ».

Le cosinus d'un réel se lit sur l'axe des abscisses

Le sinus d'un réel se lit sur l'axe des ordonnées

#### Coup de pouce

Utiliser pour la question 1d les réponses données aux questions 1a, 1b et 1c.

- 2 a. Réaliser** Le point E, symétrique du point M par rapport à l'axe des abscisses, est le point image du réel  $-\frac{\pi}{3}$ . Les angles  $\frac{\pi}{3}$  rad et  $-\frac{\pi}{3}$  rad sont des angles dits opposés.

Par lecture du cercle trigonométrique, cochez les réponses exactes :

- |                                                                                           |                                                                                            |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$ | <input type="checkbox"/> $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3}$            |
| <input type="checkbox"/> $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3}$            | <input checked="" type="checkbox"/> $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3}$ |

- b. Réaliser** Le point F, symétrique du point M par rapport à l'axe des ordonnées, est le point image du réel  $\pi - \frac{\pi}{3}$ . Les angles  $\frac{\pi}{3}$  rad et  $(\pi - \frac{\pi}{3})$  rad sont des angles dits supplémentaires.

Par lecture du cercle trigonométrique, cochez les réponses exactes :

- |                                                                                                |                                                                                                 |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> $\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$            | <input checked="" type="checkbox"/> $\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3}$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> $\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3}$ | <input type="checkbox"/> $\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3}$            |

- c. Réaliser** Le point G, symétrique du point M par rapport au point O, est le point image du réel  $(\pi + \frac{\pi}{3})$ . Par lecture du cercle trigonométrique, cochez les réponses exactes :

- |                                                                                     |                                                                                                 |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> $\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$ | <input checked="" type="checkbox"/> $\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3}$ |
| <input type="checkbox"/> $\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3}$ | <input checked="" type="checkbox"/> $\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3}$ |

- 3 Communiquer** Répondez à la problématique.

$$\cos \frac{\pi}{3} = 0,5 ; \sin \frac{\pi}{3} \approx 0,9 ; \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 0,5 ; \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \approx -0,9 ; \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -0,5 ;$$

$$\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \approx 0,9 ; \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -0,5 ; \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \approx -0,9.$$

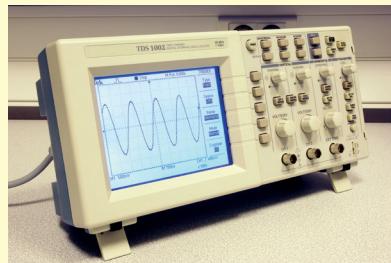
# Activité

## 3

# Construire les représentations graphiques des fonctions sinus et cosinus

### SITUATION . Des courbes qui ondulent...

Arthur a obtenu ci-contre l'enregistrement d'une tension électrique. Il ne connaît pas de fonction mathématique dont la courbe représentative a cette allure.



#### Problématique

Quelles fonctions mathématiques peuvent être représentées par de telles courbes ?

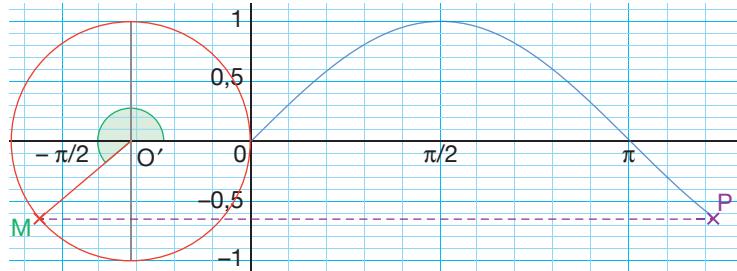
#### 1 a. S'approprier [foucherconnect.fr/22mc56](https://foucherconnect.fr/22mc56)

Ouvrez le fichier « C10\_132\_fonction\_sinus.ggb ».

Déplacez le curseur « a » pour tracer la courbe représentative de la fonction sinus sur l'intervalle  $[0 ; 4\pi]$ .

b. Analyser/Raisonner La fonction sinus sur l'intervalle  $[0 ; \frac{\pi}{2}]$  est :  croissante  décroissante

c. Analyser/Raisonner La fonction sinus sur l'intervalle  $[\frac{\pi}{2} ; \pi]$  est :  croissante  décroissante



d. Valider Indiquez comment vérifier sur la courbe tracée que la période de la fonction sinus est  $2\pi$ .

La courbe tracée sur  $[0 ; 2\pi]$  est la même que celle sur  $[2\pi ; 4\pi]$ .

#### Coup de pouce

La période est le plus petit nombre  $T$  tel que  $\sin x = \sin(x + T)$ .

#### 2 Réaliser Cochez la case *cosinus* à l'écran. On obtient la représentation graphique de la fonction cosinus. Lisez graphiquement la période de la fonction cosinus. $2\pi$

#### 3 a. Réaliser [foucherconnect.fr/22mc56](https://foucherconnect.fr/22mc56)

Ouvrez le fichier « C10\_132\_translation.ggb ». Lisez les coordonnées du vecteur  $\vec{v}$ .  $\vec{v}\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$

b. Réaliser Appliquez à la courbe représentative de la fonction sinus la translation de vecteur  $\vec{v}$ .

Pour cela, cliquez successivement et dans cet ordre sur l'icône , la courbe de  $f$ , le vecteur  $\vec{v}$ .

c. Réaliser Relevez, dans la fenêtre Algèbre, l'expression de la fonction  $f_1$  obtenue :

$f_1(x) = \sin(x + 1,57)$ . On peut aussi l'écrire  $f_1(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ .

d. Réaliser Tapez dans la zone de saisie  $y = \cos(x)$  pour tracer la courbe représentative de la fonction cosinus en pointillés.

e. Analyser/Raisonner Que remarquez-vous ?

Les courbes représentatives des fonctions cosinus et  $f_1$  se superposent.

On en conclut que  $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ .

#### 4 Communiquer Répondez à la problématique.

Les courbes des fonctions sinus, cosinus et  $f_1$  ont la même allure que celles de l'écran. Ce sont des sinusoïdes.

# Activité

Algo  
Pro

## Déterminer des valeurs particulières de sinus et cosinus

MES FICHIERS

Python

foucherconnect.fr/22mc57

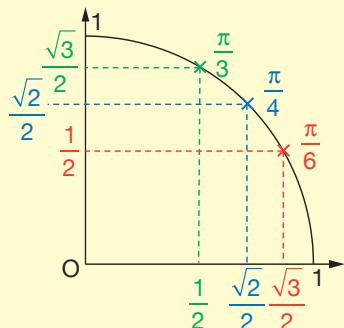


### SITUATION . Le même point image

Malik s'intéresse aux valeurs exactes des sinus et cosinus de certains réels particuliers.

#### Problématique

Quelles sont les valeurs exactes de  $\cos \frac{25\pi}{4}$ ,  $\sin \frac{37\pi}{6}$ ,  $\cos \frac{19\pi}{3}$  ?



- 1 En vous aidant du cercle trigonométrique, complétez (valeurs exactes).

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}; \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}; \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

### LANGAGE NATUREL

L'algorigramme ci-contre permet de conclure si les points images de deux réels  $x_1$  et  $x_2$  sont confondus ou non.

2 Calculez  $z$  si  $x_1 = \frac{\pi}{3}$  et  $x_2 = \frac{19\pi}{3}$ .  $z = \frac{\frac{19\pi}{3} - \frac{\pi}{3}}{\pi} = \frac{18}{3} = 6$

3 Que va afficher l'algorigramme ? Points confondus

4  $\frac{\pi}{3}$  et  $\frac{19\pi}{3}$  ont-ils le même point image ? oui

5 Déduisez-en les valeurs exactes de  $\cos \frac{19\pi}{3}$  et  $\sin \frac{19\pi}{3}$ .

$$\cos \frac{19\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \text{ et } \sin \frac{19\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

### LANGAGE PYTHON

- 6 Ouvrez le fichier « C10\_133\_algopro.py ».

Sur quelle ligne du programme teste-t-on la condition «  $z$  est multiple de 2 » ?

Ligne 4 : « if  $z \% 2 == 0$  : »

- 7 Exécutez le programme avec  $x_1 = \frac{\pi}{4}$  et  $x_2 = \frac{25\pi}{4}$ .

Conclusion : Points confondus

- 8 Exécutez le programme avec  $x_1 = \frac{\pi}{6}$  et  $x_2 = \frac{37\pi}{6}$ .

Conclusion : Points confondus

- 9 Répondez à la problématique.  $\cos \frac{25\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  $\sin \frac{37\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ ;  $\cos \frac{19\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ .

Saisir les réels  $x_1$  et  $x_2$

$$z = \frac{x_2 - x_1}{\pi}$$

$\checkmark$   
z est multiple de 2

oui  
Afficher « Points confondus »

non  
Afficher « Points distincts »

Coup de pouce

Taper dans la console :  
points ( $\pi/4, 25*\pi/4$ ).

Instruction	Signification
<code>z % 2</code>	Calcule le reste de la division euclidienne de $z$ par 2.
<code>def nom (p1,p2)</code>	Pour définir la fonction « nom » de paramètres $p1$ et $p2$ .

## L'essentiel

## Cercle trigonométrique

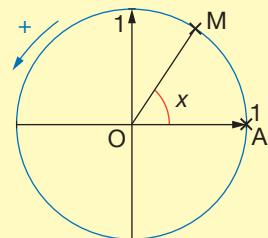
- Le cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1 orienté positivement dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

On associe à chaque réel un unique point du cercle appelé **point image**.

- Soit M le point image du nombre réel x.

On dit que x est une **mesure en radians** (symbole rad) de l'angle  $\widehat{AOM}$ .

- Les mesures en degrés et en radians d'un angle sont proportionnelles :  $\pi \text{ rad} = 180^\circ$ .



**Exemple**  $\frac{\pi}{9} \text{ rad} = \frac{180}{\pi} \times \frac{\pi}{9} = 20^\circ ; 36^\circ = \frac{\pi}{180} \times 36 = \frac{\pi}{5} \text{ rad.}$

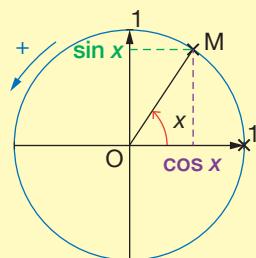
## Cosinus et sinus d'un réel

- x est un nombre réel et M est son point image sur le cercle trigonométrique.

L'abscisse de M est le **cosinus de x**, noté  $\cos x$  et l'ordonnée de M est le **sinus de x**, noté  $\sin x$ . Les coordonnées de M sont  $(\cos x ; \sin x)$ .

- Soit x la mesure d'un angle,  $(\pi - x)$  est la mesure de son angle **supplémentaire** (ou supplément),  $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$  est la mesure de son angle **complémentaire** (ou complément) et  $-x$  est la mesure de son angle **opposé**.

- Quelques valeurs particulières



$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\pi - x) &= -\cos x \\ \sin(\pi - x) &= \sin x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\pi + x) &= -\cos x \\ \sin(\pi + x) &= -\sin x\end{aligned}$$

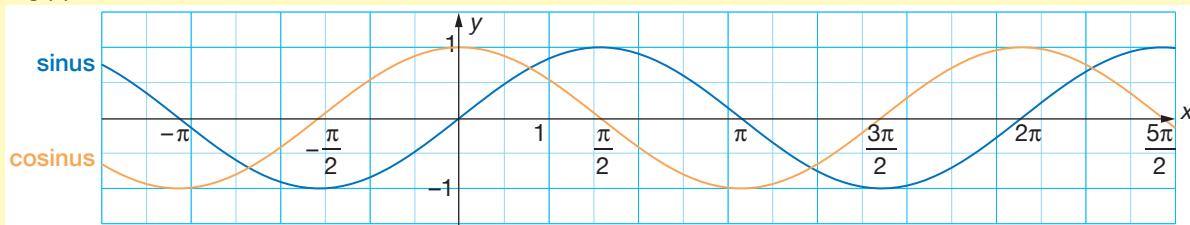
Degrés	0°	30°	45°	60°	90°	180°
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

**Exemple**  $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$  car  $\sin(\pi - x) = \sin x$ .

- Quel que soit le réel x,  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$  ;  $-1 \leq \cos x \leq 1$  ;  $-1 \leq \sin x \leq 1$ .

## Courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus

- La fonction **sinus**, notée **sin**, est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \sin x$  et la fonction **cosinus**, notée **cos**, est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = \cos x$ .



- Si on déplace horizontalement la courbe de la fonction sinus d'une « longueur » égale à  $\frac{\pi}{2}$  vers la gauche, on obtient la courbe de la fonction cosinus. Donc  $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ .

- Les fonctions sinus et cosinus sont **périodiques** de période  $2\pi$ .

On a, quel que soit le réel x,  $\sin(x + 2\pi) = \sin x$  et  $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ .

Graphiquement, la courbe tracée sur l'intervalle  $[0 ; 2\pi]$  « se répète ».

## Savoir-faire

### Savoir-faire 1 Placer un réel $x$ sur le cercle trigonométrique

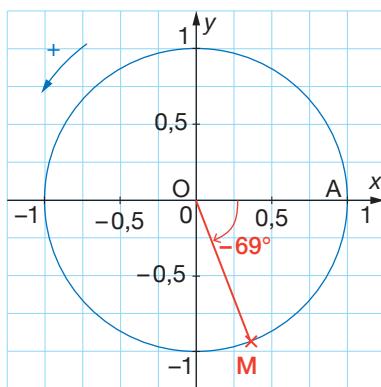
Placez sur le cercle trigonométrique le point image du réel  $-1,2$ .

#### RÉSOLUTION

- Les mesures d'un angle en radians et en degrés sont proportionnelles.

$$d = \frac{180 \times (-1,2)}{\pi} \approx -69^\circ.$$

- Comme  $d$  est négatif, on mesure l'angle de  $69^\circ$  dans le sens des aiguilles d'une montre.



#### MÉTHODE

- Convertir  $x$  rad en degrés sachant que  $\pi$  rad =  $180^\circ$ ; arrondir à l'unité le résultat  $d$  en degrés.

- Après avoir tracé le cercle trigonométrique avec  $O(0 ; 0)$  et  $A(1 ; 0)$ , placer à l'aide du rapporteur le point  $M$  tel que  $\widehat{AOM} = d^\circ$ .
  - si  $x$  est positif, la mesure pour placer le point  $M$  est faite dans le sens inverse de celui des aiguilles d'une montre ;
  - si  $x$  est négatif, la mesure pour placer le point  $M$  est faite dans le sens des aiguilles d'une montre.

**Voir exercice 6**

### Savoir-faire 2 Déterminer graphiquement $\sin(\pi - x)$ et $\cos(\pi - x)$ connaissant $\sin x$ et $\cos x$

Déterminez graphiquement  $\sin \frac{3\pi}{4}$  et  $\cos \frac{3\pi}{4}$  sachant que  $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  et  $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

#### RÉSOLUTION

- $\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$ ;  $\frac{3\pi}{4}$  est le supplément de  $\frac{\pi}{4}$ .

- On place le point  $M$  tel que  $\widehat{AOM} = \frac{\pi}{4}$  rad et le point  $M'$  symétrique du point  $M$  par rapport à l'axe vertical.

On a alors  $\widehat{AOM'} = \frac{3\pi}{4}$  rad.

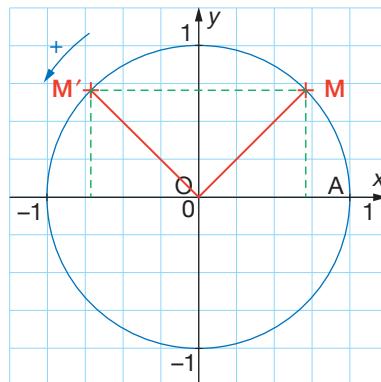
- On trace les pointillés correspondant aux sinus et cosinus de  $\frac{\pi}{4}$  et  $\frac{3\pi}{4}$ .

- On voit que  $\sin \frac{3\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4}$ .

Donc  $\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

$\cos \frac{3\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4}$ .

Donc  $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .



#### MÉTHODE

- Si nécessaire, déterminer l'angle  $x$  dont  $\pi - x$  est le supplément.
- Placer sur le cercle trigonométrique  $M$ , le point image de  $x$  et  $M'$ , le point image de  $\pi - x$ .  $M'$  est le symétrique de  $M$  par rapport à l'axe vertical.

- Tracer les pointillés donnant  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\sin(\pi - x)$  et  $\cos(\pi - x)$ .

- Comparer  $\sin(\pi - x)$  et  $\sin x$ . Comparer  $\cos(\pi - x)$  et  $\cos x$ .

**Voir exercices 7 et 13**

# Accompagnement personnalisé



## J'utilise le vocabulaire approprié

- 1 Complétez le texte avec les mots proposés.

(Certaines propositions peuvent être utilisées plusieurs fois, d'autres jamais.)

supplémentaires  reflet  différence  opposés  point image  complémentaires  période

a. Deux angles de mesure  $x$  rad et  $(\pi - x)$  rad sont des angles  supplémentaires.

b. Deux angles de mesure  $x$  rad et  $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$  rad sont des angles  complémentaires.

c. Deux angles de mesure  $\frac{5\pi}{6}$  rad et  $\frac{\pi}{6}$  rad sont des angles  supplémentaires.

d. Les fonctions sinus et cosinus ont une  période égale à  $2\pi$ .

e. Le point associé à un nombre réel  $x$  sur un cercle trigonométrique est son  point image.



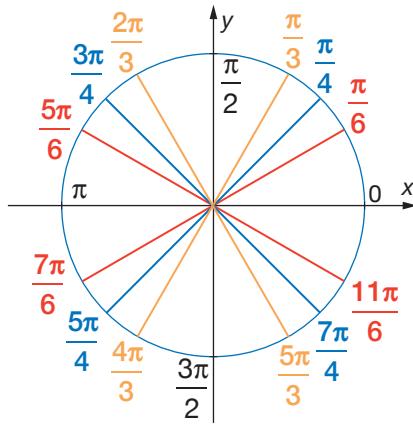
## Je revois des points importants

- 2 Après avoir effectué les calculs au brouillon, cochez les réponses exactes.

a.  $\pi - \frac{\pi}{4} =$    $\frac{1}{4}$    $\frac{3\pi}{4}$    $\frac{2\pi}{4}$

b.  $\pi + \frac{\pi}{4} =$    $\frac{5\pi}{4}$    $\frac{3\pi}{4}$    $\frac{2\pi}{4}$

c.  $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} =$    $\frac{1}{2}$    $\frac{\pi}{4}$    $\frac{\pi}{3}$



- 3 En vous aidant du cercle trigonométrique, cochez les réponses exactes.

a.   $\cos \frac{\pi}{2} = 1$    $\sin \frac{\pi}{2} = 0$    $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4}$

b.   $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$    $\cos \frac{5\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$    $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$

c.   $\cos \frac{2\pi}{3} = \cos \frac{4\pi}{3}$    $\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$    $\cos \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$



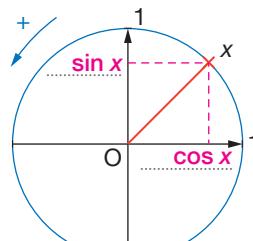
## Je mémorise

- 4 Dans le schéma ci-dessous, complétez les pointillés et cochez les cases exactes.

Le rayon du cercle trigonométrique  
est égal à :   $\pi$   1

Le sens trigonométrique positif  
est le sens :  
 des aiguilles d'une montre.  
 inverse de celui des aiguilles  
d'une montre.

Autour du cercle  
trigonométrique



Les réels  $x$  et  $x + 2\pi$  ont le même  
point image sur le cercle  
trigonométrique.

## AUTOMATISMES

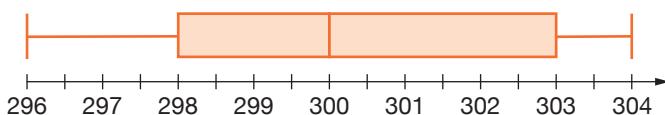
Sans calculatrice ni brouillon, répondez aux 3 questions du rituel indiqué par votre professeur.  
Votre réponse est juste ? Bravo ! Cochez la case de l'automatisme correspondant.

### Rituel 1

- A6 La solution de l'équation  $4 - 3x = 7$  est :

1       -1        $\frac{4}{3}$

- A12 La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ . Soit  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative. M est le point de  $\mathcal{C}_f$  d'abscisse 3. L'ordonnée du point M est égale à :  76       4       22
- A3 On a réalisé la boîte à moustaches d'une série statistique.



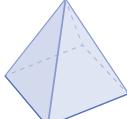
Complétez : étendue =  $304 - 296 = 8$  ;  
médiane =  $300$  ; 3<sup>e</sup> quartile =  $303$

### Rituel 2

- A18 Donnez le nom des deux solides représentés ci-dessous.



Cylindre



Pyramide

- A23 Développez et réduisez l'expression  $(x - 8)(x + 3,5)$ .

$$x^2 + 3,5x - 8x - 28 = x^2 - 4,5x - 28.$$

- A17 O est un point donné.  $\mathcal{B}$  est la boule de centre O et de rayon 4 cm ;  $\mathcal{S}$  est la sphère de centre O et de rayon 4 cm. D, E, F, G sont des points tels que  $OD = 2,8$  cm ;  $OE = 5$  cm ;  $OF = 4$  cm ;  $OG = 3,5$  cm.

Nommez les points qui appartiennent à  $\mathcal{B}$  : **D F G**

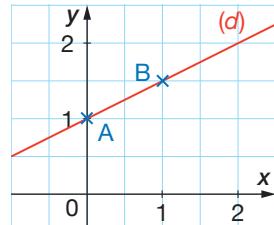
Nommez les points qui appartiennent à  $\mathcal{S}$  : **F**

### Rituel 3

- A13 Déterminez graphiquement le coefficient directeur de la droite  $(d)$ .

$$\frac{0,5}{1} = 0,5.$$

- A5 Voici une liste de notes : 13 • 15 • 9 • 10 • 15 • 14 • 7 • 10 • 11 • 14 • 14. Calculez la note moyenne : **12**  
Déterminez la note médiane : **13**



- A8 Lorsque l'eau liquide se solidifie, son volume augmente d'environ 10 %. Si  $x$  est le volume d'eau liquide et  $f(x)$  le volume de glace, cochez la fonction linéaire  $f$  qui modélise cette situation de proportionnalité.

$f(x) = 0,1x$         $f(x) = 1,1x$         $f(x) = 11x$

### Rituel 4

- A20 Calculez, en  $\text{m}^3$ , le volume d'une pièce en forme de pavé droit, de longueur 5 m, de largeur 4 m et de hauteur 2,5 m.

$$5 \times 4 \times 2,5 = 50 \text{ m}^3.$$

- A19 Calculez l'aire d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 5 cm et 4 cm.  
 $(5 \times 4) \div 2 = 10 \text{ cm}^2$ .

- A14 Les équations réduites respectives des droites  $(d)$  et  $(d')$  sont  $y = 0,25x + 4$  et  $y = \frac{1}{4}x + 0,25$ .

Les droites  $(d)$  et  $(d')$  sont-elles parallèles ? Justifiez.

**Les droites  $(d)$  et  $(d')$  sont parallèles, car leurs coefficients directeurs sont égaux :  $0,25 = \frac{1}{4}$ .**

## Cercle trigonométrique

- 1 ★ Exprimez  $90^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  en radians. Utilisez  $\pi$  dans l'écriture de la réponse.

$$90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad} ; 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad} ; 60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad.}$$

- 2 ★ Complétez le tableau suivant.

Angle en degrés	60	300	180	135
Angle en radians	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{4}$

# Exercices

## 3 ★ python [toucheconnect.fr/22mc58](https://toucheconnect.fr/22mc58)

a. Ouvrez le fichier « C10\_138\_radians.py ». Le programme proposé permet de convertir des degrés en radians.

Expliquez pourquoi on écrit à la ligne 3 du programme :  $y = \pi * x / 180$ .

**Les mesures en degrés et en radians sont proportionnelles et  $\pi \text{ rad} = 180^\circ$ .**

b. Exécutez ce programme pour exprimer  $50^\circ$  en radians.

$$50^\circ \approx 0,873 \text{ rad.}$$

c. Donnez la réponse obtenue pour  $180^\circ$ .

$$180^\circ \approx 3,142 \text{ rad.}$$

Pourquoi ce résultat était-il prévisible ?

**Ce résultat était prévisible car  $180^\circ = \pi \text{ rad}$ .**

## 4 ★ python

Python propose des fonctions intégrées pour gérer les conversions degrés ↔ radians très simplement. La fonction « radians » convertit les degrés en radians (valeurs approchées). La fonction « degrees » convertit les radians en degrés.

Par exemple, dans la console (pas de programme à écrire), on obtient :

```
>>> from math import*
>>> radians (45)
0,7853981633974483
>>> degrees (pi/4)
45.0
```

Utilisez ces fonctions pour répondre aux questions a. et b.

a. Convertissez  $100^\circ$  et  $270^\circ$  en radians.

$$100^\circ \approx 1,745 \text{ rad} ; 270^\circ \approx 4,712 \text{ rad.}$$

b. Convertissez  $\frac{3\pi}{4}$  rad et  $3\pi$  rad en degrés.  
 $\frac{3\pi}{4}$  rad =  $135^\circ$  ;  $3\pi$  rad =  $540^\circ$ .

## 5 ★

a. Convertissez  $72^\circ$  et  $135^\circ$  en radians.

$$72^\circ = \frac{\pi \times 72}{180} \approx 1,26 \text{ rad.}$$

$$135^\circ = \frac{\pi \times 135}{180} \approx 2,36 \text{ rad.}$$

b. Convertissez 1 rad et  $\frac{3\pi}{4}$  rad en degrés.  
 $1 \text{ rad} = \frac{180 \times 1}{\pi} \approx 57,3^\circ$

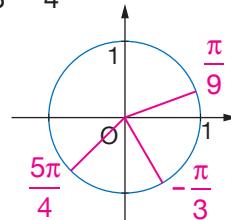
$$\frac{3\pi}{4} \text{ rad} = \frac{180}{\pi} \times \frac{3\pi}{4} = 135^\circ.$$

6 ★★ Placez sur le cercle trigonométrique

les réels  $\frac{\pi}{9}, -\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{4}$ .

**Coup de pouce**

Voir Savoir-faire 1 p. 135.



$$\frac{\pi}{9} = 20^\circ ; -\frac{\pi}{3} = -60^\circ ; \frac{5\pi}{4} = 225^\circ.$$

7 ★★ Parmi les réels suivants, entourez ceux qui ont le même point image sur le cercle trigonométrique.

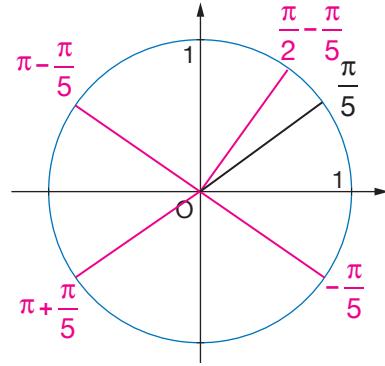
a.  $\frac{\pi}{6}, \frac{8\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + 2\pi, -\frac{5\pi}{6}$

b.  $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{\pi}{4} - 2\pi, \frac{11\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}$

## Cosinus et sinus d'un réel

8 ★ On a placé sur le cercle trigonométrique le réel  $\frac{\pi}{5}$ .

À partir du point image de  $\frac{\pi}{5}$ , placez les réels suivants :  $-\frac{\pi}{5}, \pi - \frac{\pi}{5}, \pi + \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}$ .



9 ★ a. On donne  $\hat{A} = \frac{\pi}{9}$  rad.

Donnez, en radians et en utilisant la lettre  $\pi$  :

• la mesure de l'angle opposé à  $\hat{A}$  :

$$-\frac{\pi}{9}$$

• la mesure du supplément de  $\hat{A}$  :

$$\pi - \frac{\pi}{9} = \frac{8\pi}{9}$$

• la mesure du complément de  $\hat{A}$  :

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{9} = \frac{7\pi}{18}$$

• On donne  $\hat{B} = 25^\circ$ . Donnez, en degrés :

• la mesure de l'angle opposé à  $\hat{B}$  :  $-25^\circ$

• la mesure du supplément de  $\hat{B}$  :  $155^\circ$

• la mesure du complément de  $\hat{B}$  :  $65^\circ$

10 ★   [foucherconnect.fr/22mc59](http://foucherconnect.fr/22mc59)

a. Ouvrez le fichier « C10\_139\_sincos.ggb ».

Rappelez sur quel axe se lit le sinus d'un réel :

axe des ordonnées et sur quel axe se lit son cosinus : axe des abscisses.

b. À l'écran, déplacez le point M sur le cercle trigonométrique. Pour deux réels de votre choix, notez le réel, son cosinus et son sinus.

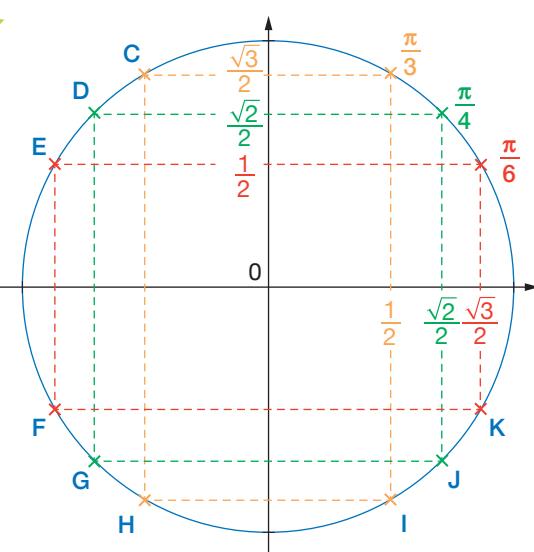
$$x = 0,53 ; \cos x \approx 0,86 ; \sin x \approx 0,51.$$

$$x = 2,48 ; \cos x \approx -0,79 ; \sin x \approx 0,62.$$

c. Vérifiez ces valeurs avec la calculatrice.

Mêmes valeurs.

## 11 ★★



En utilisant le cercle trigonométrique ci-dessus, complétez le tableau.

$x$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$
Point image	D	E	J	H
$\sin x$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos x$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

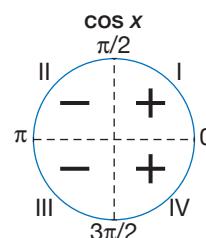
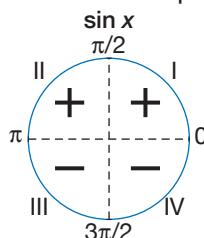
12 ★★ On donne  $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  et  $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Donnez les valeurs exactes de  $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ ;  $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ ;  $\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$ ;  $\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$ .

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

13 ★★  $x$  est un réel qui varie de 0 à  $2\pi$ .



a. Complétez les pointillés par « positif » ou « négatif ».

• Si  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ,  $\sin x$  est positif;  $\cos x$  est positif.

• Si  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ,  $\sin x$  est positif;  $\cos x$  est négatif.

• Si  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ ,  $\sin x$  est négatif;  $\cos x$  est négatif.

• Si  $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ ,  $\sin x$  est négatif;  $\cos x$  est positif.

b. Utilisez la question a pour donner le signe de :

$\sin \frac{\pi}{3}$  positif;  $\cos \frac{\pi}{3}$  positif;

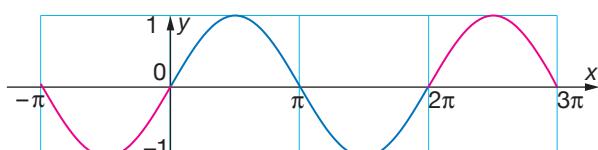
$\sin \frac{4\pi}{3}$  négatif;  $\cos \frac{4\pi}{3}$  négatif;

$\sin \frac{2\pi}{3}$  positif;  $\cos \frac{2\pi}{3}$  négatif;

$\sin \frac{5\pi}{3}$  négatif;  $\cos \frac{5\pi}{3}$  positif.

## Courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus

14 ★★ On donne la courbe représentative de la fonction sinus sur l'intervalle  $[0 ; 2\pi]$ .



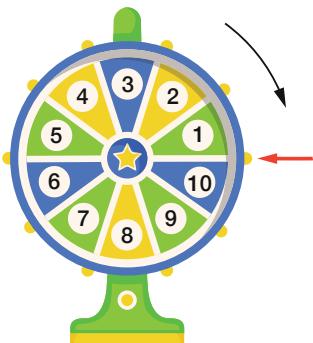
a. Dressez le tableau de variations de la fonction sinus sur cet intervalle.

$x$	$0$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
Variations de la fonction sinus	0 ↗ 1 ↘ 0 ↗ -1 ↘ 0	0 ↗ 1 ↘ 0 ↗ -1 ↘ 0	0 ↗ 1 ↘ 0 ↗ -1 ↘ 0	0 ↗ 1 ↘ 0 ↗ -1 ↘ 0	0 ↗ 1 ↘ 0 ↗ -1 ↘ 0

b. Complétez le graphique donné ci-dessus en traçant la courbe représentative de la fonction sinus sur  $[-\pi ; 0]$  et sur  $[2\pi ; 3\pi]$ .

# Problèmes

- 15** ★★ La roue de la chance ci-dessous est partagée en 10 secteurs égaux. Le point de départ est toujours la flèche rouge. On fait tourner la roue dans le sens des aiguilles d'une montre et on s'intéresse au secteur qui est alors devant la flèche rouge.



1. Donnez en degrés la mesure de l'angle au centre d'un secteur coloré.  $360^\circ \div 10 = 36^\circ$ .

2. Donnez en radians la mesure de l'angle au centre d'un secteur. Utilisez  $\pi$  pour donner cette réponse.  $2\pi \div 10 = \frac{\pi}{5}$  rad.

3. Indiquez quel secteur sera devant la flèche rouge si on fait tourner la roue de :

- $20^\circ$  : secteur 1
- $\frac{\pi}{2}$  : secteur 3
- $135^\circ$  : secteur 4
- $\frac{7\pi}{6}$  : secteur 6

4. Proposez une mesure d'angle (en degrés ou en radians) pour laquelle la roue s'arrêtera devant le secteur indiqué.

- secteur 3 :  $100^\circ$
- secteur 10 :  $-\frac{\pi}{10}$
- secteur 2 :  $60^\circ$
- secteur 5 :  $170^\circ$

- 16** ★★★ X [foucherconnect.fr/22mc60](https://foucherconnect.fr/22mc60) La hauteur d'eau dans le port de Saint-Malo varie avec les marées. On a relevé pendant 24 heures les hauteurs d'eau.

1. Ouvrez le fichier « C10\_140\_maree.xlsx ».

Indiquez quelle est la hauteur d'eau maximale dans le port de Saint-Malo pendant ces 24 heures.

12,8 m à 19 h.

2. Représentez les colonnes A et B du tableau par un nuage de points. Choisissez comme option « Nuage de points avec courbes lissées et marqueurs ».



Représenter un nuage de points



[foucherconnect.fr/22mc27](https://foucherconnect.fr/22mc27)

3. L'allure de cet ensemble de points est proche :

- d'une droite       d'une parabole  
 d'une hyperbole       d'une sinusoïde

4. Une étude plus complète a montré que la hauteur d'eau considérée peut être modélisée par la fonction  $h$  définie sur l'intervalle  $[0 ; 24]$  par :

$$h(t) = 5,9 \sin\left(\frac{\pi}{6}t - 1,97\right) + 6,9.$$

On a saisi la formule  $=5,9*\text{SIN}(\text{PI()}\text{A2}/6-1,97)+6,9$  dans la cellule C2. Recopiez-la jusqu'à la cellule C26.

5. Sélectionnez les cellules A1 à C26 et insérez sur le même graphique les nuages de points représentant les colonnes B et C en fonction de  $t$ .

6. Que constatez-vous ?

Les deux courbes sont très proches.

- 17** ★★ Python [foucherconnect.fr/22mc61](https://foucherconnect.fr/22mc61)

On donne trois fonctions  $f_1, f_2, f_3$  définies sur  $[0 ; 360]$  par  $f_1(x) = \sin x$ ,  $f_2(x) = 2 \sin x$  et  $f_3(x) = \sin(2x)$ .  $x$  est en degrés.

1. Rappelez quelle est la période de la fonction sinus :  $2\pi$  ou  $360^\circ$ .

2. Ouvrez le fichier « C10\_140\_periode.py ».

Exécutez le programme. On obtient trois courbes.

3. On donne les informations suivantes :

- période de  $f_1$  = période de  $f_2$  ;
- période de  $f_3$  =  $\frac{\text{période de } f_1}{2}$ .

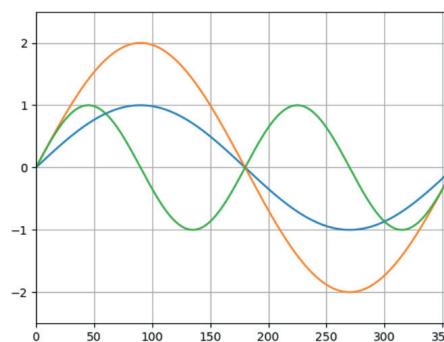
En utilisant ces informations, donnez les valeurs des périodes.

période de  $f_1$  =  $2\pi$  ;

période de  $f_2$  =  $2\pi$  ;

période de  $f_3$  =  $\pi$  .

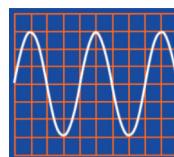
4. Associez chaque courbe à la fonction qu'elle représente.



- |                |   |               |
|----------------|---|---------------|
| fonction $f_1$ | • | courbe verte  |
| fonction $f_2$ | • | courbe bleue  |
| fonction $f_3$ | • | courbe orange |

- 18** ★★ Un générateur de tension alternative est relié aux bornes d'un oscilloscope.

On obtient la courbe ci-contre. Horizontalement, la durée de balayage est de 2 millisecondes par division. Verticalement, la sensibilité verticale est de 5 volts par division.



1. Donnez la période de cette tension en millisecondes.  $4 \times 2 = 8 \text{ ms}$ .

Expliquez comment vous l'avez obtenue.

On compte le nombre de divisions entre deux points hauts.

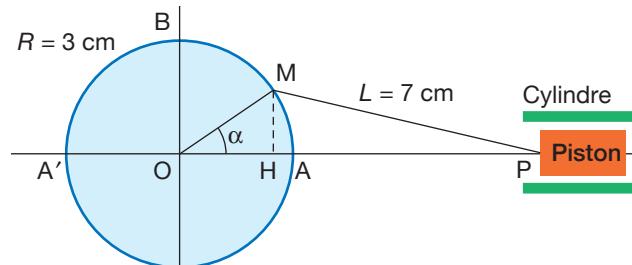
2. Donnez l'amplitude de ce signal.

$$3 \times 5 = 15 \text{ V.}$$

- 19** ★★★

On étudie le déplacement d'un piston actionné par une roue. La roue a un mouvement circulaire et le piston a un mouvement de translation dans un cylindre. La liaison entre la roue et le piston est assurée par une bielle.

Le rayon du cercle est 3 cm. La longueur MP de la bielle est 7 cm.



Les longueurs seront exprimées en cm et arrondies au dixième.

1. Calculez la longueur OP :

• si le point M est en A :

$$3 + 7 = 10 \text{ cm.}$$

• si le point M est en B :

$$OP^2 = 49 - 9 = 40 ; OP = \sqrt{40} \approx 6,32 \text{ cm.}$$

• si le point M est en A' :

$$7 - 3 = 4 \text{ cm.}$$

2. Calculez la course du piston, c'est-à-dire la longueur du segment décrit par le point P.

Les positions extrêmes du piston correspondent

à M en A' et M en A.

$$\text{Course du piston} = 10 - 4 = 6 \text{ cm.}$$

3. Lorsque la position du point M est telle que  $\alpha = 60^\circ$ , calculez OH, HM, puis HP.

$$\cos MOB = \frac{OH}{OM} ;$$

$$\text{d'où } OH = 3 \times \cos 60^\circ = 1,5 \text{ cm ;}$$

$$\sin MOB = \frac{HM}{OM} ; \text{ d'où } HM = 3 \times \sin 60^\circ \approx 2,6 \text{ cm.}$$

On applique le théorème de Pythagore

dans le triangle rectangle MHP.

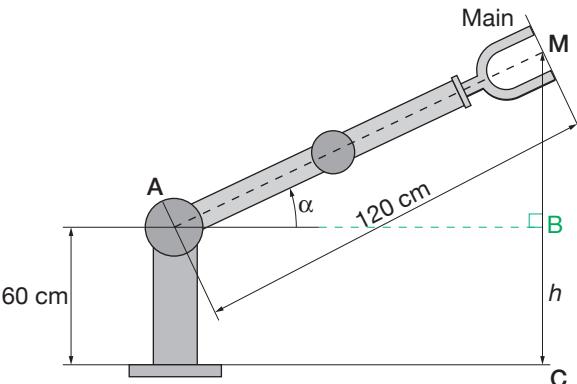
$$HP = \sqrt{7^2 - 2,6^2} \approx 6,5 \text{ cm.}$$

4. Déduisez-en OP pour  $\alpha = 60^\circ$ .

$$OP = OH + HP = 1,5 + 6,5 = 8 \text{ cm.}$$

- 20** ★★★

Le bras articulé d'un robot est motorisé. Le mouvement se fait par rotation autour du point A.



#### Problématique

Quel est le déplacement de la main lorsque l'angle  $\alpha$  varie de  $0$  à  $\frac{\pi}{2}$  ?

1. Montrez que la hauteur  $h$  de la main, en cm, en fonction de  $\alpha$ , est donnée par la relation  $h = 60 + 120 \sin \alpha$ .

$$h = CB + BM$$

$$BC = 60 \text{ cm} ; BM = 120 \times \sin \alpha \text{ car } \sin \alpha = \frac{BM}{AM} .$$

$$\text{D'où } h = 60 + 120 \sin \alpha .$$

2. Calculez la distance totale parcourue par la main lorsque  $\alpha$  varie de  $0$  à  $\frac{\pi}{2}$ .

$$120 \times \frac{2\pi}{4} \approx 188,4 \text{ cm.}$$

#### Coup de pouce

- Longueur d'un cercle de rayon  $R$  :  $2 \times \pi \times R$ .
- Le point M parcourt un quart de cercle de centre A et de rayon 120 cm.

3. Répondez à la problématique.

La main se déplace de 188,4 cm sur un quart de cercle de centre A et de rayon 120 cm.

# Évaluation

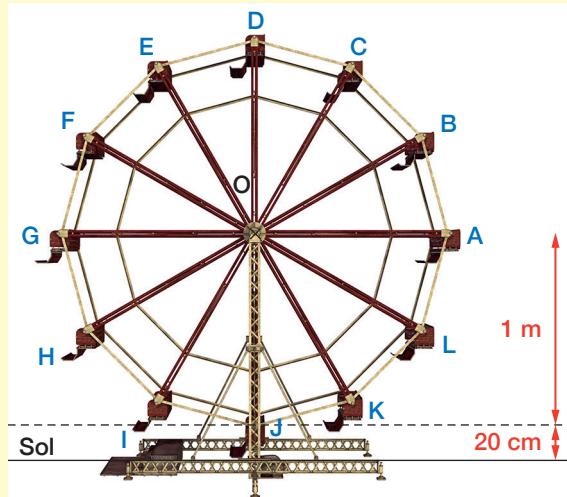
Compétences	S'approprier				Analyser Raisonner				Réaliser				Valider				Communiquer			
Questions	1				2 - 3				4a - 4d - 5				4b - 4c				6			
Niveau d'acquisition	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4

## Situation

Eddy est responsable d'un parc d'attractions miniature. Ce parc possède une « grande roue » de 1 mètre de rayon avec 12 nacelles. On l'assimile à un cercle trigonométrique en prenant comme origine son centre O. Le point A est le point image du réel 0. Le bas de la grande roue est à 20 cm du sol. Les occupants virtuels des nacelles ont une belle vue pour une hauteur au-dessus du sol supérieure à 1,75 m.

## Problématique

Dans quelle(s) position(s) les occupants de la nacelle ont-ils une belle vue ?



1 **S'approprier** Eddy fait tourner la roue d'un quart de tour dans le sens trigonométrique positif.  
Donnez alors la position de la nacelle qui était en A. **Position D**

b. **S'approprier** Eddy fait tourner la roue d'un tiers de tour dans le sens trigonométrique positif.  
Donnez alors la position de la nacelle qui était en A. **position E**

2 a. **Analyser/Raisonner** Donnez un réel qui a pour point image B.  $\frac{\pi}{6}$

b. **Analyser/Raisonner** Donnez un réel qui a pour point image L.  $-\frac{\pi}{6}$

3 a. **Analyser/Raisonner** Donnez le point image de  $\frac{\pi}{3}$ . **Point C**

b. **Analyser/Raisonner** Donnez le point image de  $-\frac{\pi}{3}$ . **Point E**

4 On donne  $\widehat{AOB} = 30^\circ$ .

a. **Réaliser** Donnez la mesure de cet angle en radians. Utilisez la lettre  $\pi$ .

$$30^\circ = \frac{\pi \times 30}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

b. **Valider** En utilisant le quart de cercle trigonométrique ci-contre, cochez la réponse exacte.

Abscisse de B =   $\cos 30^\circ$    $\sin 30^\circ$

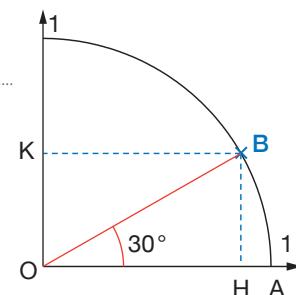
Ordonnée de B =   $\cos 30^\circ$    $\sin 30^\circ$

c. **Valider** Expliquez comment vérifier que  $OK = 0,5 \text{ m}$ .

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = 0,5. \text{ Donc } OK = \sin 30^\circ = 0,5 \text{ m.}$$

d. **Réaliser** Calculez la hauteur du point B au-dessus du sol.

$$BH = OK = 0,5 \text{ m. Hauteur du point B au-dessus du sol} = 0,5 + 1 + 0,2 = 1,7 \text{ m.}$$



5 **Réaliser** Calculez de même la hauteur du point C au-dessus du sol. Arrondissez au cm.

$$C \text{ est le point image du réel } \frac{\pi}{3}. \text{ Hauteur du point C} = \sin \frac{\pi}{3} + 1,2 \approx 2,07 \text{ m.}$$

6 **Communiquer** Répondez à la problématique.  $2,07 > 1,75$

Les occupants des nacelles en position C, D, E ont une belle vue.

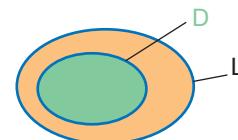
# Vocabulaire relatif aux ensembles

## Notions sur les ensembles

### Définition d'un ensemble

- En mathématiques, un **ensemble** est un regroupement d'objets, de nombres... suivant certaines caractéristiques. Ces objets, nombres... sont les **éléments** de l'ensemble.
- On met souvent une **étiquette** aux ensembles pour les nommer et on peut les représenter par un **diagramme**.

- On peut parler de l'**ensemble** de tous les élèves du lycée. Les élèves sont alors les éléments de cet ensemble.
- Sur le **diagramme** ci-dessous, L est l'ensemble des élèves du lycée et D l'ensemble des élèves demi-pensionnaires.



### Écriture d'un ensemble

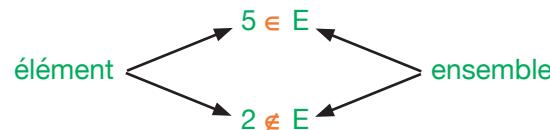
- Si le nombre d'éléments de l'ensemble est limité, on peut écrire ses éléments sous la forme d'une **liste entre accolades**, sans ordre, sans répétition. Les éléments sont séparés par des points-virgules.

V est l'ensemble des voyelles de l'alphabet.  
On écrit :  $V = \{a ; e ; i ; o ; u ; y\}$ .

### Symboles d'appartenance et de non-appartenance

- Pour indiquer qu'un élément appartient à un ensemble, on utilise le symbole  $\in$  qui se lit « **appartient à** ».
- Pour indiquer qu'un élément n'appartient pas à un ensemble, on utilise le symbole  $\notin$  qui se lit « **n'appartient pas à** ».

$$E = \{5 ; -0,185 ; \frac{2}{3} ; \sqrt{15} ; 0\}$$



## Ensembles de nombres

### Certains ensembles de nombres ont des étiquettes particulières

- $\mathbb{N}$  est l'ensemble des **entiers naturels** (entiers positifs).
- $\mathbb{Z}$  est l'ensemble des **entiers relatifs** (entiers positifs ou négatifs).
- $\mathbb{R}$  est l'ensemble des  **nombres réels** (tous les nombres que vous connaissez).

- 8 ; 1 429 ; 0 sont des entiers naturels.  
 $5 \in \mathbb{N}$  ;  $2,7 \notin \mathbb{N}$  ;  $-7 \notin \mathbb{N}$ .
- 5 ; -23 ; 0 ; 4 000 ; -129 sont des entiers relatifs.  
 $-4 \in \mathbb{Z}$  ;  $5,2 \notin \mathbb{Z}$  ;  $48 \in \mathbb{Z}$ .
- 18 ; -30 ; 0 ; 4,18 ;  $\frac{-7}{4}$  ;  $\sqrt{51}$  sont des réels.  
 $10 \in \mathbb{R}$  ;  $-8 \in \mathbb{R}$  ;  $\frac{13}{4} \in \mathbb{R}$ .

### Intervalles de $\mathbb{R}$

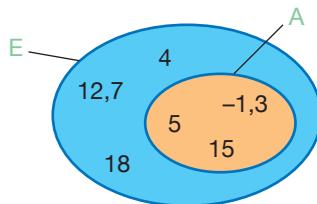
Intervalle	Ensemble des réels $x$ tels que	Représentation graphique	Exemple
$[a ; b]$	$a \leq x \leq b$		Si $I = [-2 ; 3]$ , alors $-2 \in I$ et $3 \in I$ .
$[a ; b[$	$a \leq x < b$		Si $I = [-2 ; 3[,$ alors $-2 \in I$ et $3 \notin I$ .
$]a ; b]$	$a < x \leq b$		Si $I = ]-2 ; 3]$ , alors $-2 \notin I$ et $3 \in I$ .
$]a ; b[$	$a < x < b$		Si $I = ]-2 ; 3[$ , alors $-2 \notin I$ et $3 \notin I$ .
$[a ; +\infty[$	$x \geq a$		Si $x \in [-3 ; +\infty[$ , alors $x \geq -3$ .
$]-\infty ; b[$	$x < b$		Si $x \in ]-\infty ; 10[$ , alors $x < 10$ .

## Inclusion d'un ensemble dans un autre

- Un ensemble A est **inclus** dans un ensemble E (ou est une partie de E) lorsque chaque élément de A est aussi un élément de E. On dit aussi que A est un **sous-ensemble** de E.

On écrit :  $A \subset E$  qui se lit « A **est inclus dans** E ».

- Si l'ensemble A est inclus dans l'ensemble E, le **complémentaire** de A dans E, noté  $\bar{A}$ , est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.



ensemble →  $A \subset E$  ← ensemble

- Si  $E = \{18 ; 5 ; -1,3 ; 4 ; 12,7 ; 15\}$  et  $A = \{5 ; -1,3 ; 15\}$ , alors  $\bar{A} = \{12,7 ; 4 ; 18\}$ .

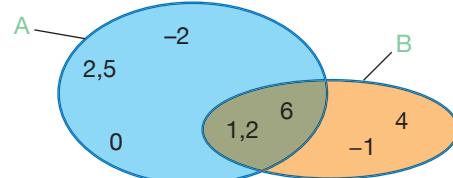
## Intersection et réunion d'ensembles

- L'**intersection de deux ensembles** A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **et** à B.

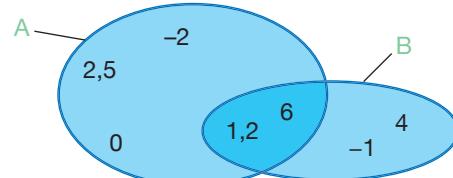
Cet ensemble s'écrit  $A \cap B$  qui se lit « A **inter** B ».

- La **réunion de deux ensembles** A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **ou** à B, c'est-à-dire soit seulement à A, soit seulement à B, soit aux deux.

Cet ensemble s'écrit  $A \cup B$  qui se lit « A **union** B ».



- Si  $A = \{-2 ; 0 ; 1,2 ; 6 ; 2,5\}$  et  $B = \{-1 ; 6 ; 1,2 ; 4\}$ , alors  $A \cap B = \{1,2 ; 6\}$ .



- Si  $A = \{-2 ; 0 ; 1,2 ; 6 ; 2,5\}$  et  $B = \{-1 ; 6 ; 1,2 ; 4\}$ , alors  $A \cup B = \{-2 ; 0 ; 1,2 ; 6 ; 2,5 ; -1 ; 4\}$ .

## J'applique

- 1** a. F est l'ensemble des lettres du mot « donjon ». Cochez les écritures correctes de l'ensemble F.

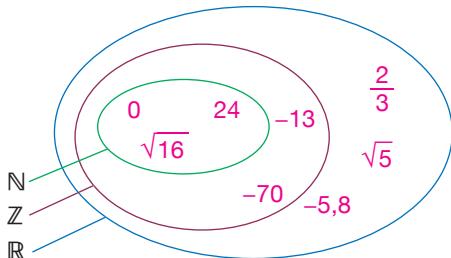
F = {d ; o ; n ; j ; o ; n}     F = {d ; o ; n ; j}  
 F = {j ; o ; d ; n}     F = {d ; j ; o ; n}

- b. Complétez les phrases suivantes par un des symboles  $\in$ ,  $\notin$ ,  $\subset$ .

n  $\in$  F    k  $\notin$  F    j  $\in$  F  
 $\{d ; n\} \subset F$     r  $\notin$  F    s  $\notin$  F

- 2**  $\mathbb{N}$  est l'ensemble des entiers naturels,  $\mathbb{Z}$  est l'ensemble des entiers relatifs,  $\mathbb{R}$  est l'ensemble des réels.

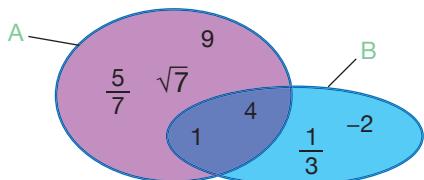
- a. Placez sur le diagramme ci-dessous les nombres suivants :  $-13$  ;  $\sqrt{16}$  ;  $24$  ;  $-5,8$  ;  $\frac{2}{3}$  ;  $\sqrt{5}$  ;  $0$  ;  $-70$ .



- b. Complétez les phrases suivantes par un des symboles  $\in$ ,  $\notin$ ,  $\subset$ .

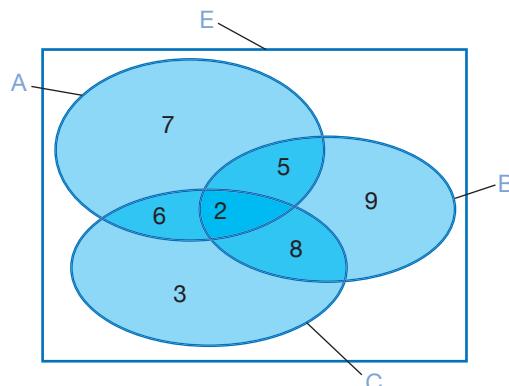
24  $\in$   $\mathbb{N}$      $-13 \notin \mathbb{N}$      $-5,8 \notin \mathbb{N}$   
 $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$     24  $\in \mathbb{Z}$      $-5,8 \notin \mathbb{Z}$   
 $-13 \in \mathbb{R}$      $\sqrt{5} \in \mathbb{R}$     0  $\in \mathbb{R}$

- 3** À l'aide du diagramme donné, complétez les phrases ci-dessous. Si plusieurs réponses sont possibles, n'en donnez qu'une.



- a. Le nombre  $\frac{5}{7}$  appartient à l'ensemble A.  
b. Le nombre 9 n'appartient pas à l'ensemble B.  
c. Les nombres 1 et 4 appartiennent aux ensembles A et B.  
d. Donnez les éléments de l'ensemble A  $\cup$  B.  
A  $\cup$  B =  $\left\{ \frac{5}{7}, 9, \sqrt{7}, 4, 1, \frac{1}{3}, -2 \right\}$

**4**



- a. Donnez le nombre d'éléments de l'ensemble E :

7

- b. Donnez le nombre d'éléments de l'ensemble A :

4

- c. Donnez les éléments de l'ensemble C.

C = {6 ; 2 ; 8 ; 3}

- d. Donnez les éléments de l'ensemble A  $\cap$  B.

A  $\cap$  B = {2 ; 5}

- e. Donnez les éléments de l'ensemble A  $\cup$  C.

A  $\cup$  C = {7 ; 5 ; 6 ; 2 ; 8 ; 3}

- f. Donnez les éléments de l'ensemble  $\bar{A}$ , complément de A dans l'ensemble E.

$\bar{A}$  = {3 ; 8 ; 9}

- 5** On considère les intervalles  $I = [-1 ; 6[$  et  $K = ]-2 ; 4[$ .

- a. Donnez deux éléments de I :  $-0,7 ; \sqrt{2}$

- b. Donnez deux éléments de K :  $-1 ; \pi$

- c. Complétez par  $\in$  ou  $\notin$ .

2,3  $\in$  K ;  $-5 \notin I$  ;  $-1,5 \in K$  ;  $-1,01 \notin I$  ;

4  $\notin$  K ;  $5,99 \in I$  ;  $-1 \in I$  ;  $0 \in K$ .

- 6** a. On donne  $J = [-2 ; 2]$  et  $L = [-0,5 ; 3[$ .

Déterminez  $J \cap L$  :  $[-0,5 ; 2]$

Déterminez  $J \cup L$  :  $[-2 ; 3[$

- b. Coline a écrit « La réunion de deux intervalles est un intervalle. »

Montrez à l'aide d'un contre-exemple que cette phrase est fausse.

Si  $A = [1 ; 2]$  et  $B = [4 ; 5]$ , alors  $A \cup B$  n'est pas

un intervalle car  $A \cup B = [1 ; 2] \cup [4 ; 5]$ .

Il n'y a pas d'autre écriture possible.

# Raisonnement logique

## Deux mots importants : « et », « ou »

« et », « ou » sont deux mots du langage courant (plusieurs sens possibles). Ils sont aussi utilisés en mathématiques (un seul sens possible).

Le mot « **et** » signifie « à la fois ».

Le mot « **ou** » signifie « soit l'un, soit l'autre, soit les deux à la fois ».

- 6 est un nombre pair **et** un multiple de 3.
- 0 ; 3 ; 6 ; 8 sont des nombres pairs **ou** des multiples de 3.

## Les expressions « quel que soit » et « il existe »

Le sens des expressions « **quel que soit** » et « **il existe** » est le même dans le langage courant et en mathématiques.

- « Le carré d'un réel est positif **quel que soit** ce réel. ». Cela signifie que la phrase « Le carré d'un réel est positif. » est vraie pour n'importe quel nombre réel.
- « **Il existe** des réels  $x$  tels que  $x^2 = 9$ . » Cela signifie que la phrase «  $x^2 = 9$  » est vraie seulement pour certaines valeurs de  $x$ , ici 3 et -3.

## Implication et équivalence entre deux propositions

En logique, une **proposition** est une phrase dont on peut affirmer sans ambiguïté si elle est vraie ou fausse.

### Implication

- En mathématiques, on utilise souvent des phrases construites sur le modèle :  
« **Si proposition 1, alors proposition 2** ». La proposition 2 est la conséquence de la proposition 1. On écrit : **proposition 1  $\Rightarrow$  proposition 2**. On appelle cette écriture une implication.
- Le symbole  $\Rightarrow$  est le symbole d'**implication**. Il remplace un verbe. Il se lit « **entraîne** », « **implique** », « **a pour conséquence** ».

Dans la phrase « **Si** un nombre  $x$  est supérieur à 8, **alors**  $x$  est supérieur à 5 », la proposition «  $x$  est supérieur à 5 » est la conséquence de «  $x$  est supérieur à 8 ».

On peut écrire  $(x > 8) \Rightarrow (x > 5)$ .

Cette implication est vraie.

### Réciproque

Lorsqu'on inverse les propositions situées de part et d'autre du symbole  $\Rightarrow$ , on obtient une nouvelle implication appelée **réciproque**. Elle n'est pas toujours vraie.

La réciproque de  $(x > 8) \Rightarrow (x > 5)$  est :  $(x > 5) \Rightarrow (x > 8)$ . Ici, la réciproque est fausse.

### Propositions équivalentes

Lorsqu'une implication entre deux propositions est vraie ainsi que sa réciproque, on dit que les propositions sont **équivalentes**.

On utilise alors le symbole  $\Leftrightarrow$  entre ces deux propositions.

L'implication (le triangle ABC est rectangle en A)  $\Rightarrow$   $(AB^2 + AC^2 = BC^2)$  est vraie, sa réciproque aussi :  $(AB^2 + AC^2 = BC^2) \Rightarrow$  (le triangle ABC est rectangle en A).

On a donc : (le triangle ABC est rectangle en A)  $\Leftrightarrow$   $(AB^2 + AC^2 = BC^2)$ .

## Utilisation d'un contre-exemple

Un **contre-exemple** est un exemple qui contredit une affirmation, un énoncé, une implication ou qui montre qu'une phrase est fausse.

Pour montrer qu'une phrase est fausse, il suffit de donner un seul contre-exemple.

## Raisonnement par l'absurde

Pour montrer qu'une proposition est vraie par un raisonnement par l'absurde, on commence par **supposer que la propriété est fausse** et on cherche une contradiction par rapport aux données.

L'implication  $(x > 5) \Rightarrow (x > 8)$  vue précédemment est fausse car si on prend par exemple  $x = 7$ , on a bien 7 supérieur à 5, mais 7 n'est pas supérieur à 8.

7 est un contre-exemple.

## J'applique

- 1** Complétez soit par « et », soit par « ou ».
- Un nombre qui se termine par 0 est un multiple de 5 et un multiple de 2.
  - Medhi peut effectuer le trajet Orléans-Paris en train ou en voiture.
  - Le nombre  $-1$  est inférieur à 0 et supérieur à  $-2$ .
  - Un élève d'un lycée sans internat peut être externe ou demi-pensionnaire.

- 2** Cochez la case exacte.

- a. Il existe un réel  $x$  tel que  $2x + 1 = 0$ .

Vrai       Faux

- b. Il existe un réel  $x$  tel que  $x^2 = -9$ .

Vrai       Faux

- c. Quel que soit  $x$ ,  $(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$ .

Vrai       Faux

- 3** Montrez à l'aide d'un contre-exemple que l'égalité  $(x + 1)^2 = x^2 + 1$  est fausse.

$\text{Pour } x = 3, (x + 1)^2 = (3 + 1)^2 = 4^2 = 16$

$\text{et } x^2 + 1 = 3^2 + 1 = 9 + 1 = 10.$

Donc l'égalité est fausse.

- 4** Le chat d'Anita s'appelle Roméo.

On donne l'information suivante : « Si Anita caresse Roméo, celui-ci ronronne. »

- a. Traduisez cette phrase par une implication.

Anita caresse Roméo  $\Rightarrow$  Roméo ronronne.

- b. Écrivez la réciproque de cette implication.

Roméo ronronne  $\Rightarrow$  Anita caresse Roméo.

Prouver par un raisonnement par l'absurde que 0 n'a pas d'inverse dans  $\mathbb{R}$ .

- Si 0 avait un inverse, alors il existerait un nombre réel  $x$  tel que  $0 \times x = 1$  (définition de l'inverse).
- Or lorsque 0 est multiplié par un nombre réel quelconque, on obtient 0. On aboutirait donc à l'égalité  $0 = 1$ , ce qui est faux.
- Donc 0 ne peut avoir d'inverse dans l'ensemble des nombres réels.

- c. L'implication initiale est vraie. Dites si la réciproque est vraie.

Ce n'est pas toujours vrai. Roméo peut ronronner sans qu'Anita le caresse.

- 5** On donne l'implication suivante qui est vraie :  $(n \text{ pair}) \Rightarrow (n + 1 \text{ impair})$ .

- a. Donnez un exemple qui vérifie cette implication.  
**8 est pair ; 8 + 1 = 9 qui est impair.**

- b. Peut-on écrire  $n \text{ pair} \Leftrightarrow n + 1 \text{ impair}$ ? Justifiez.

**L'équivalence est vraie car les deux implications  $(n \text{ pair}) \Rightarrow (n + 1 \text{ impair})$  et  $(n + 1 \text{ impair}) \Rightarrow (n \text{ pair})$  sont vraies.**

- 6** On considère la phrase suivante où  $n$  est un entier naturel :

Si  $n$  est un multiple de 6, alors  $n$  est un multiple de 3.

- a. Écrivez cette phrase en utilisant le symbole d'implication  $\Rightarrow$ .

**$(n \text{ est un multiple de 6}) \Rightarrow (n \text{ est un multiple de 3})$ .**

- b. Cette implication est-elle vraie ? **oui**

Si non, donnez un contre-exemple.

**Pas de contre-exemple puisque l'implication est vraie.**

- c. Écrivez la réciproque de cette implication.

**$(n \text{ est un multiple de 3}) \Rightarrow (n \text{ est un multiple de 6})$**

- d. Cette réciproque est-elle vraie ? **non**

Si non, donnez un contre-exemple.

**21 est un multiple de 3, mais ce n'est pas un multiple de 6.**

## A1 Calcul de la probabilité d'un événement dans le cas d'une situation aléatoire simple

- Déterminer le nombre de cas possibles.
- Déterminer le nombre de cas favorables parmi les cas possibles.
- Calculer la valeur de la probabilité  $p$  : 
$$p = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$
.

**1** Pour jouer à son wargame préféré, Myriam a besoin d'un dé équilibré à 12 faces. Pour remporter un objet de son adversaire, elle doit obtenir un nombre compris en 9 et 12. Calculez la probabilité de remporter l'objet.

4 possibilités (9 ; 10 ; 11 ; 12) D'où  $p = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \approx 0,33$ .

**2** On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.

Répondez par « vrai » ou « faux » aux affirmations suivantes et justifiez votre choix.

a. La probabilité d'obtenir un valet de trèfle est de 0,062 5.

Faux car  $p = \frac{1}{32} = 0,031 25$ .

b. La probabilité d'obtenir une dame est de 0,125.

Vrai car  $p = \frac{4}{32} = 0,125$ .

c. La probabilité d'obtenir un roi est supérieure à la probabilité d'obtenir un cœur.

Faux, il y a 8 « Cœur » et seulement 4 « Roi ».

## A2 Dénombrement à l'aide de tableaux à double entrée ou d'arbres donnés

Les tableaux à double entrée ou les arbres permettent de visualiser l'univers des événements aléatoires obtenus par tirages successifs avec ou sans remise.

Compter le nombre de cas possibles.

- Pour un tableau à double entrée : l'ensemble des cases du tableau permet de déterminer par comptage le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles.
- Pour un arbre : l'ensemble des branches de l'arbre permet de visualiser l'ensemble des cas possibles des tirages. Chaque branche de l'arbre représente un cas possible.

**1** Le tableau ci-contre indique les sommes des chiffres obtenus par deux lancers successifs d'un même dé à quatre faces.

a. Complétez le tableau en indiquant les sommes manquantes.

b. Donnez le nombre de possibilités d'obtenir la somme « 6 ».

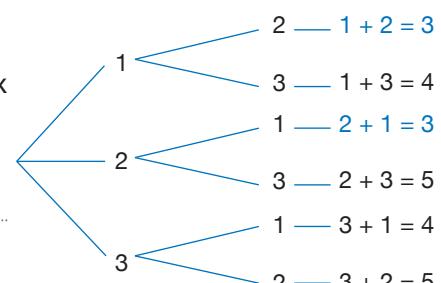
Il y a trois cas possibles d'obtenir une somme égale à 6 (cases tramées en violet).

		Dé n°1			
		1	2	3	4
Dé n°2	1	2	3	4	5
	2	3	4	5	6
	3	4	5	6	7
	4	5	6	7	8

**2** L'arbre ci-contre représente le tirage successif sans remise de deux boules, dans une urne contenant 3 boules numérotées de 1 à 3.

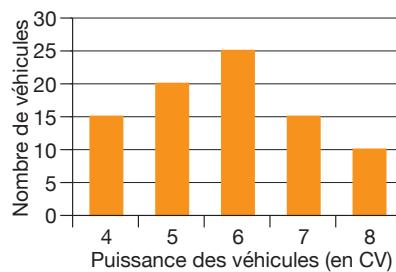
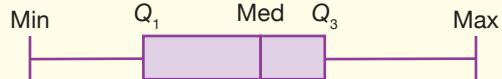
Donnez le nombre de possibilités d'obtenir la somme « 3 ».

Il y a deux cas possibles (en bleu) d'obtenir une somme égale à 3.

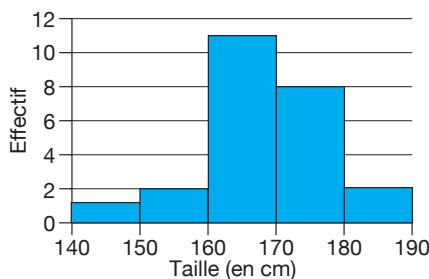


## A3 Lecture de graphique, de diagramme et autre représentation

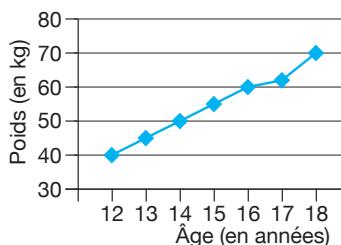
- Lire le titre du graphique, la légende, le nom, la graduation ou échelle sur les axes.
- Lire l'effectif ou la fréquence :
  - Pour un diagramme en bâtons ou colonnes ou pour un graphique, cela se lit sur l'axe des ordonnées (à la hauteur du bâton ou de la colonne, du point de la courbe...);
  - Pour un diagramme en secteurs, c'est proportionnel à la mesure de l'angle du secteur.
- Lire le minimum, le maximum, la médiane, et les quartiles sur une boîte à moustaches.



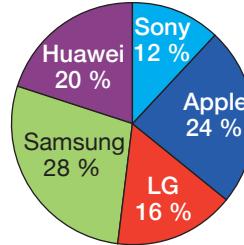
- 1 Les puissances des véhicules du parc automobile d'une entreprise.



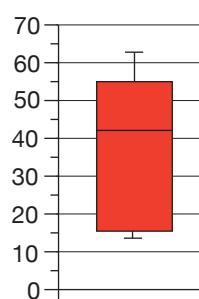
- 2 La taille des élèves d'une classe.



- 3 La courbe d'évolution du poids d'un enfant de 12 à 18 ans.



- 4 Les marques des téléphones des élèves d'une classe.



- 5 L'âge des consommateurs de café en grains.

a. Indiquez le nombre de véhicules du graphique 1 ayant une puissance de 7 CV.

Il y a 15 véhicules.

b. Donnez l'intervalle de taille regroupant le plus grand nombre d'élèves du graphique 2.

C'est l'intervalle [160 ; 170[.

c. Déterminez, à l'aide du graphique 5, l'âge médian des consommateurs de café en grains.

L'âge médian est de 42 ans.

## A4 Association d'un graphique avec des données et vice-versa

- Déterminer si le caractère est **qualitatif** ou **quantitatif**, puis s'il est **discret** ou **continu**.
  - Caractère **qualitatif** : diagrammes en secteurs ou en bâtons
  - Caractère **quantitatif** : **discret** : diagramme en bâtons  
**continu** : diagramme en colonnes ou ligne brisée (fonction du temps)
- On peut aussi utiliser une boîte à moustaches pour des données statistiques correspondant à un caractère **quantitatif**.

Justifiez, pour les graphiques 3 et 4 de l'automatisme A3, le mode de représentation choisi.

Le poids d'un enfant est fonction du temps. Donc, diagramme à ligne brisée.

Le caractère « marques des téléphones » est un caractère qualitatif. Donc, diagramme en secteurs.

## A5 Calculs d'indicateurs de position ou de dispersion à l'aide d'outils numériques

Les indicateurs de position (moyenne, 1<sup>er</sup> et 3<sup>e</sup> quartiles, médiane, valeurs Min et Max) et de dispersion (écart type) sont directement disponibles à partir des outils numériques tels la calculatrice ou le tableur.

[foucherconnect.fr/22mc62](http://foucherconnect.fr/22mc62) et [foucherconnect.fr/22mc63](http://foucherconnect.fr/22mc63)

- Renseigner la série statistique conformément à l'outil numérique utilisé.
- Déterminer les fonctions statistiques souhaitées à l'aide des menus prévus.

- 1 Reliez chaque abréviation statistique à son nom, puis à sa définition.

Med		Minimum		Au moins 75 % des valeurs lui sont inférieures ou égales
$\sigma$		Médiane		Valeur qui sépare les données en deux parties de même effectif
$\bar{x}$		Écart type		Somme des données divisée par le nombre de valeurs
$Q_3$		Moyenne		Valeur de la plus petite donnée
Min		3 <sup>e</sup> quartile		Mesure la dispersion autour de la moyenne

- 2 Dans une classe de 20 élèves, on obtient la série statistique suivante :

Notes	3	7	11	15	19
Effectifs	1	4	8	5	2

Calculez la moyenne, l'écart type, le minimum, le premier quartile et la médiane de cette série.

$$\bar{x} = 11,6 ; \sigma \approx 4,05 ; \text{Min} = 3 ; Q_1 = 7 ; \text{Med} = 11 .$$

## A6 Résolution d'équation du type $ax + b = c$ ( $a, b$ et $c$ entiers relatifs)

Pour résoudre une équation du type  $ax + b = c$ , on la transforme en une équation plus simple qui a les mêmes solutions.

● Isoler l'inconnue  $x$  : soit  $x = \frac{c - b}{a}$  avec  $a$  non nul.

Si  $a = 0$ , alors l'équation n'admet aucune solution unique.

● Donner l'ensemble des solutions.

- 1 Cochez la bonne réponse parmi les propositions suivantes.

- a. Le nombre 5 est la solution de :   $7 + 2x = 12$    $2x + 17 = -7$    $2x + 7 = 17$   
b. La solution de  $4x - 6 = -7$  est :  3,25  -0,25  -3,25  
c. La solution de  $-7x - 8 = -29$  est :  -3  3   $\frac{1}{3}$

- 2 Résolvez les équations suivantes.

$$5x + 3 = 2$$

$$x = \frac{2 - 3}{5} = -\frac{1}{5}$$
$$x = -0,2$$

$$S = \{-0,2\}$$

$$-7x + 13 = 6$$

$$x = \frac{6 - 13}{-7} = \frac{7}{7}$$
$$x = 1$$

$$S = \{1\}$$

$$35x - 7 = -21$$

$$x = \frac{-21 - (-7)}{35} = \frac{-14}{35}$$
$$x = -0,4$$

$$S = \{-0,4\}$$

## A7 Résolution d'inéquation du type $ax + b < c$ ( $a, b$ et $c$ entiers relatifs)

Pour résoudre une inéquation du type  $ax + b < c$ , on la transforme en une inéquation plus simple qui a les mêmes solutions.

- Regarder le signe de  $a$  et isoler l'inconnue  $x$  :

- Si  $a$  est strictement positif, l'inégalité garde le même sens : alors  $x < \frac{c-b}{a}$  ;
- Si  $a$  est strictement négatif, l'inégalité change de sens : alors  $x > \frac{c-b}{a}$ .

- Donner l'ensemble des solutions.

Cochez les solutions de chacune des inéquations.

- |                                 |                                             |                                                     |                                                     |
|---------------------------------|---------------------------------------------|-----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| <b>a.</b> $-2x + 2 > 12$        | <input type="checkbox"/> $x > -5$           | <input checked="" type="checkbox"/> $x < -5$        | <input type="checkbox"/> $x < 5$                    |
| <b>b.</b> $3x - 6 \leqslant 9$  | <input type="checkbox"/> $x \geqslant 5$    | <input type="checkbox"/> $x \leqslant -5$           | <input checked="" type="checkbox"/> $x \leqslant 5$ |
| <b>c.</b> $-x + 6 < -2$         | <input checked="" type="checkbox"/> $x > 8$ | <input type="checkbox"/> $x \geqslant 8$            | <input type="checkbox"/> $x < 8$                    |
| <b>d.</b> $4x + 8 \leqslant 28$ | <input type="checkbox"/> $x > 5$            | <input checked="" type="checkbox"/> $x \leqslant 5$ | <input type="checkbox"/> $x < -5$                   |

## A8 Reconnaissance d'une situation de proportionnalité et détermination de la fonction linéaire qui la modélise

### À partir d'un tableau de valeurs

- Calculer les quotients en divisant les valeurs de la seconde ligne du tableau par ceux de la première ligne.
  - Vérifier que ces quotients sont égaux.
- Si c'est le cas, c'est une situation de proportionnalité ; sinon elle ne l'est pas.
- La valeur du quotient correspond au coefficient de proportionnalité : c'est la valeur de  $a$ . Donc, la fonction linéaire qui modélise la situation a pour expression  $f(x) = ax$ .

### À partir d'un graphique représentant la relation entre deux grandeurs

- Vérifier que les points du graphique sont sur une droite qui passe par l'origine du repère.
- Déterminer le coefficient de proportionnalité  $a$  à partir des coordonnées d'un point de la droite :  $a = \frac{y_A}{x_A}$ .
- À partir de  $a$ , en déduire la fonction linéaire qui modélise la situation : son expression est de la forme  $f(x) = ax$ .

- 1** Le tableau de valeurs ci-dessous donne la masse  $m$  d'un objet en aluminium connaissant son volume  $V$ .

$V$ (en $\text{dm}^3$ )	2	5	6	10
$m$ (en kg)	5,4	13,5	16,2	27
Quotient $\frac{m}{V}$	2,7	2,7	2,7	2,7

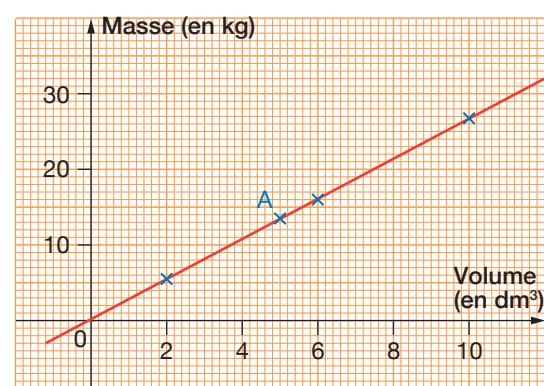
Déterminez si la masse d'un objet en aluminium est proportionnelle à son volume.

Oui, car tous les rapports sont égaux.

- 2** Le tableau permet d'obtenir la représentation graphique ci-contre. Déterminez le coefficient directeur de la droite.

$$a = \frac{y_A}{x_A} = \frac{13,5}{5} = 2,7.$$

- 3** Déduisez-en l'expression de la fonction linéaire qui modélise la situation.  $f(x) = 2,7x$ .

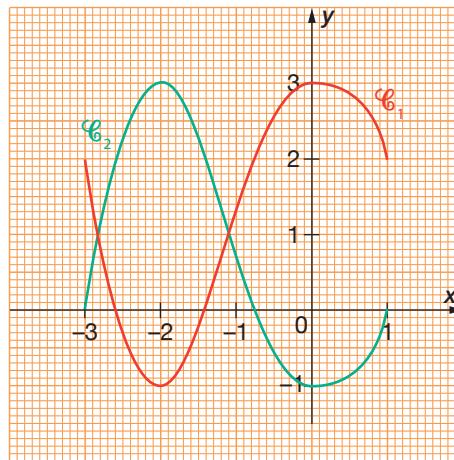


## A9 Reconnaissance de l'allure d'une représentation graphique à partir d'un tableau de variations donné

- Déterminer les points caractéristiques de la courbe à l'aide des abscisses de la première ligne du tableau de variations et de leurs images correspondantes :
  - valeurs de l'intervalle d'étude ;
  - valeurs pour lesquelles la fonction change de sens de variation.
- Identifier les variations de la fonction à partir des flèches du tableau :
  - croissante lorsque la flèche est montante sur l'intervalle correspondant ;
  - décroissante lorsque la flèche est descendante sur l'intervalle correspondant.
- Identifier la ou les courbes présentant ces caractéristiques.

Soit le tableau de variations de la fonction  $f$  définie sur  $[-3 ; 1]$ , ainsi que les courbes représentatives  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  de deux fonctions.

$x$	-3	-2	0	1
Variations de $f$	0 → 3	3 ↘ -1	-1 → 0	



a. Pour chaque phrase, cochez la bonne réponse à partir du tableau de variations de la fonction  $f$ .

- |                                              |                                          |                                          |
|----------------------------------------------|------------------------------------------|------------------------------------------|
| • $f(-3) = -2$                               | <input type="checkbox"/> Vrai            | <input checked="" type="checkbox"/> Faux |
| • $f$ est décroissante sur $[-2 ; 1]$        | <input type="checkbox"/> Vrai            | <input checked="" type="checkbox"/> Faux |
| • L'intervalle d'étude de $f$ est $[-3 ; 1]$ | <input checked="" type="checkbox"/> Vrai | <input type="checkbox"/> Faux            |

b. Identifiez, parmi les courbes  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ , la courbe correspondant à ce tableau de variations.

La courbe qui correspond au tableau de variations est la courbe  $\mathcal{C}_2$ .

## A10 Établissement du tableau de variations d'une fonction dont la courbe représentative est donnée

- Placer sur la première ligne du tableau de variations les valeurs particulières de  $x$  repérées sur le graphique :
  - valeurs  $a$  et  $b$  de l'intervalle d'étude  $[a ; b]$  ;
  - valeurs de  $x$  pour lesquelles la courbe change de sens.
- Lire les images  $f(x)$  des valeurs particulières de  $x$ .
- Représenter, pour chaque intervalle, les variations de la fonction à l'aide de flèches :
  - montante lorsque la fonction est croissante ;
  - descendante lorsque la fonction est décroissante ;
  - horizontale lorsque la fonction est constante.
- Porter aux extrémités des flèches les images  $f(x)$  des valeurs particulières de  $x$ .

$\mathcal{C}_f$  est la représentation graphique d'une fonction  $f$  définie sur  $[0 ; 5]$ .



Établissez le tableau de variations de la fonction  $f$  sur cet intervalle.

$x$	0	1	2,5	3,5	5
Variations de $f$	1,5	0	2,5	2,5	1

## A11 Détermination graphique des extrêmes globaux d'une fonction sur un intervalle

On considère une fonction  $f$  étudiée sur un intervalle  $I$ .

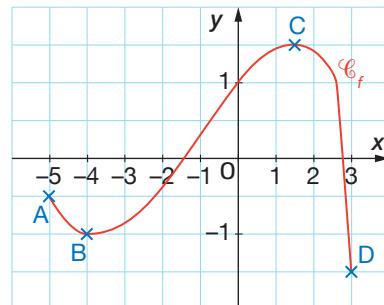
- Vérifier que l'intervalle d'étude est visible graphiquement.
- Sur l'intervalle d'étude, repérer le point de la courbe présentant la plus grande ordonnée et le point présentant la plus petite ordonnée.
  - Si  $M$  est la plus grande valeur de  $f(x)$  sur  $I$ ,  $M$  est le maximum global de  $f$ .
  - Si  $m$  est la plus petite valeur de  $f(x)$  sur  $I$ ,  $m$  est le minimum global de  $f$ .

- 1  $\mathcal{C}_f$  est la courbe représentative d'une fonction  $f$  définie sur  $[-5 ; 3]$ .

Pour chaque phrase, cochez la bonne réponse.

Sur l'intervalle  $I = [-5 ; 3]$  :

- a. L'ordonnée du point A est un extrême global  Vrai  Faux
- b. L'ordonnée du point D est un extrême global  Vrai  Faux
- c. 1,5 est le maximum de  $f$   Vrai  Faux
- d. -1,5 est le minimum de  $f$   Vrai  Faux



- 2 On considère maintenant, sur le graphique, les intervalles  $I_1 = [-4,5 ; -1[$  et  $I_2 = [0,5 ; 2,5]$ .

- a. Déterminez l'extrême global de la fonction  $f$  sur  $I_1$ .

Minimum global  $m = -1$ .

- b. Déterminez l'extrême global de la fonction  $f$  sur  $I_2$ .

Maximum global  $M = 1,5$ .

## A12 Calcul de l'ordonnée d'un point de la courbe représentative d'une fonction

- Remplacer  $x$  dans l'expression de la fonction  $f$  par la valeur de l'abscisse du point considéré.
- Effectuer les calculs en respectant les règles de priorité.
- Donner l'ordonnée du point de la courbe.

- 1 Cochez la bonne réponse.

- a. L'ordonnée du point d'abscisse 2 de la courbe représentative de la fonction  $f$  d'expression  $f(x) = 5x - 4$  est :

$f(2) = 6$         $f(x) = 2$         $f(6) = 2$

- b. L'ordonnée du point d'abscisse 3 de la courbe représentative de la fonction  $g$  d'expression  $g(x) = 2x^2 + 13$  est :

$g(3) = 25$         $g(3) = 31$         $g(3) = 19$

- 2 On considère la fonction  $h$  définie par son expression  $h(x) = x^3 + 3x^2$  sur l'intervalle  $[-6 ; 9]$ .

- a. Calculez l'ordonnée du point A d'abscisse -2 de la courbe représentative de  $h$ .

$y_A = h(x_A) = h(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 = -8 + 12 = 4$ .

- b. Calculez l'ordonnée du point B d'abscisse 5 de la courbe représentative de  $h$ .

$y_B = h(x_B) = h(5) = 5^3 + 3 \times 5^2 = 125 + 75 = 200$ .

## A13 Détermination graphique du coefficient directeur d'une droite non verticale

- Placer deux points A et B sur la droite. Choisir, si possible, des points dont l'une des coordonnées est entière.
- Lire les coordonnées de A( $x_A ; y_A$ ) et B( $x_B ; y_B$ ).
- Calculer le rapport  $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ . Cette valeur est égale au coefficient directeur de la droite.

**1** Déterminez le coefficient directeur de la droite (BC).

$$B(0 ; -2) ; C(3 ; 1,5)$$

$$a_{(BC)} = \frac{1,5 - (-2)}{3 - 0} = \frac{3,5}{3} \approx 1,167.$$

**2** Déterminez le coefficient directeur de la droite (AC).

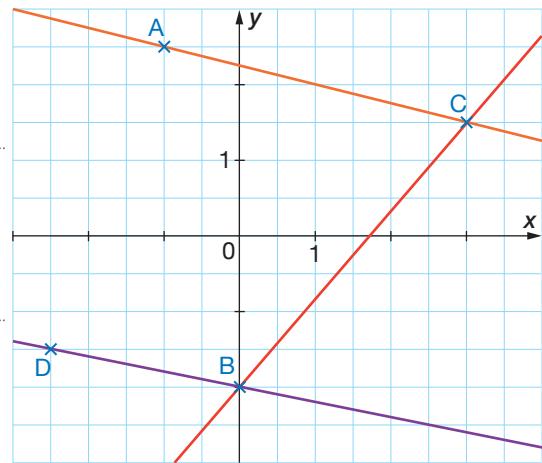
$$A(-1 ; 2,5) ; C(3 ; 1,5)$$

$$a_{(AC)} = \frac{1,5 - 2,5}{3 - (-1)} = \frac{-1}{4} = -0,25.$$

**3** Hugo affirme que le coefficient directeur de la droite (BD) est -4. Justifiez si l'affirmation d'Hugo est vraie ou pas.

$$\text{Faux : } D(-2,5 ; -1,5) \text{ et } a_{(BD)} = \frac{-1,5 - (-2)}{-2,5 - 0} = \frac{0,5}{-2,5} = -0,2.$$

Ce qui est différent de -4.



## A14 Reconnaissance du parallélisme de deux droites d'équations réduites données

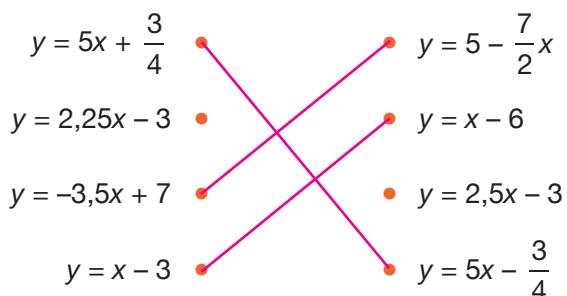
Soit deux droites d'équations réduites  $y = a_1x + b_1$  et  $y = a_2x + b_2$ .

- Identifier les coefficients directeurs  $a_1$  et  $a_2$  de chacune des droites.
- Vérifier si les coefficients directeurs sont égaux ou non.

S'ils sont égaux, les droites sont parallèles.

**1** Soit les droites suivantes et leur équation réduite.

a. Associez les droites parallèles entre elles.



b. Justifiez pourquoi les deux droites restantes ne peuvent pas être parallèles.

Elles n'ont pas le même coefficient directeur :  $2,25 \neq 2,5$ .

**2** À partir des équations réduites suivantes, entourez de la même couleur les droites qui sont parallèles.

$$D_1 : y = 2,25x + 7$$

$$D_2 : y = -\frac{9}{4}x - 7$$

$$D_3 : y = \frac{9}{4}x - 7$$

$$D_4 : y = -1,25x + 7$$

$$D_5 : y = 7x - \frac{5}{4}$$

$$D_6 : y = 2,25x - 5$$

$$D_7 : y = 7x + \frac{9}{4}$$

$$D_8 : y = -2,25x + 7$$

## A15 Résolution graphique d'une équation $f(x) = c$ ou d'une inéquation $f(x) < c$

- Tracer la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  de  $f$  et la droite  $\mathcal{D}$  horizontale d'équation  $y = c$ .
- Lire, si elles existent, les abscisses des points d'intersection de la droite  $\mathcal{D}$  avec la courbe  $\mathcal{C}_f$ .
- Donner l'ensemble des solutions.
  - Les solutions de l'équation du type  $f(x) = c$  sont les abscisses des points d'intersection.
  - Les solutions de l'inéquation du type  $f(x) < c$  sont toutes les abscisses des points de la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  situés en dessous de la droite  $\mathcal{D}$ .

Utiliser les tutos calculatrices et logiciels pour obtenir les abscisses des points d'intersection.

[toucheconnect.fr/22mc17](https://toucheconnect.fr/22mc17) et [toucheconnect.fr/22mc18](https://toucheconnect.fr/22mc18)

Cette courbe est la représentation graphique de la fonction  $f$  qui, à chaque instant  $x$ , associe la température  $f(x)$ . Elle est étudiée sur l'intervalle  $[8 ; 18]$ . Elle a été obtenue par un enregistreur de température installé dans une salle de classe.

- a. Lisez graphiquement la (ou les) heure(s) pour laquelle(s) il fait  $20^{\circ}\text{C}$ . C'est à 10 h, 14 h et 16 h qu'il fait  $20^{\circ}\text{C}$ .

- b. Résolvez l'équation  $f(x) = 20$ .

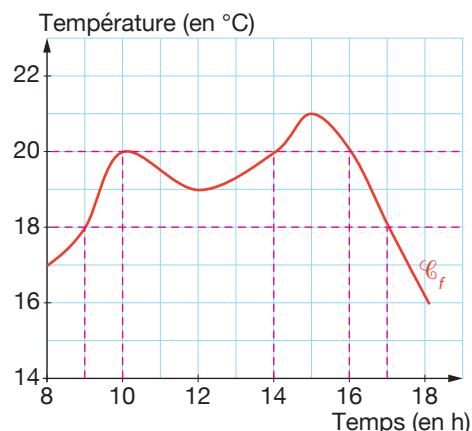
Les solutions de l'équation  $f(x) = 20$  sont 10, 14 et 16.

- c. Déterminez les moments pendant lesquels la température de la classe est supérieure à  $18^{\circ}\text{C}$ .

La température est supérieure à  $18^{\circ}\text{C}$  entre 9 h et 17 h.

- d. Résolvez l'inéquation  $f(x) \geq 18$ .

Les solutions de l'inéquation  $f(x) \geq 18$  sont les valeurs de  $x$  telles que  $x \in [9 ; 17]$ .



## A16 Calcul du montant d'un intérêt simple ou d'une valeur acquise

► Lorsqu'un capital  $C$  est placé à un taux périodique  $t$  pendant une durée de  $n$  périodes, celui-ci produit un intérêt  $I$  s'élevant à :  $I = C \times t \times n$

- Calculer le taux périodique de placement à l'aide de la relation :

$$t = \frac{\text{taux annuel}}{\text{nombre de périodes dans l'année}}.$$

Nombre de périodes dans l'année : 12 pour un placement en mois ; 24 pour un placement en quinzaines ; 360 pour un placement en jours.

- Remplacer les données dans la relation  $I = C \times t \times n$  et calculer.

► La valeur acquise par un capital est la somme de ce capital  $C$  et de l'intérêt  $I$  qu'il a produit pendant la durée du placement.

- Remplacer les données dans la relation : **Valeur acquise =  $C + I$**  et calculer.

Cochez les bonnes réponses.

Caro place un capital de 2 400 € au taux annuel de 1,5 % pendant 13 quinzaines.

- a. Les intérêts s'élèveront à :  19,50 €  36 €  184,62 €  
b. La valeur acquise sera de :  2 584,62 €  2 481,50 €  2 419,50 €

## A17 Distinction entre cercle, disque, sphère et boule

- Identifier s'il s'agit d'une figure plane ou d'un solide de l'espace.
- Identifier si l'on parle des points situés à la distance  $R$  du centre ou si l'on parle de l'ensemble des points de la surface ou du volume.

	Les points sont à une même distance $R$ du centre	Les points sont à une distance inférieure ou égale à $R$ du centre
Figures planes	Cercle 	Disque 
Solides de l'espace	Sphère 	Boule 

Indiquez pour chaque image s'il s'agit d'un cercle, d'un disque, d'une sphère, d'une boule.



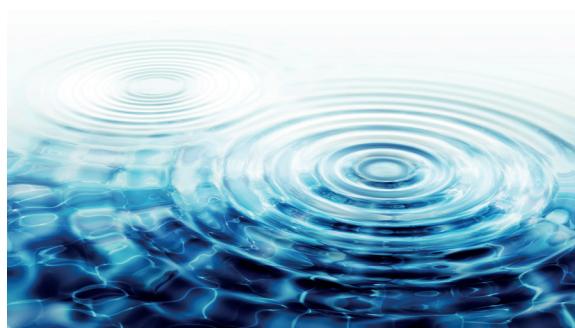
Bulle de savon  
Sphère



Cochonnet  
Boule



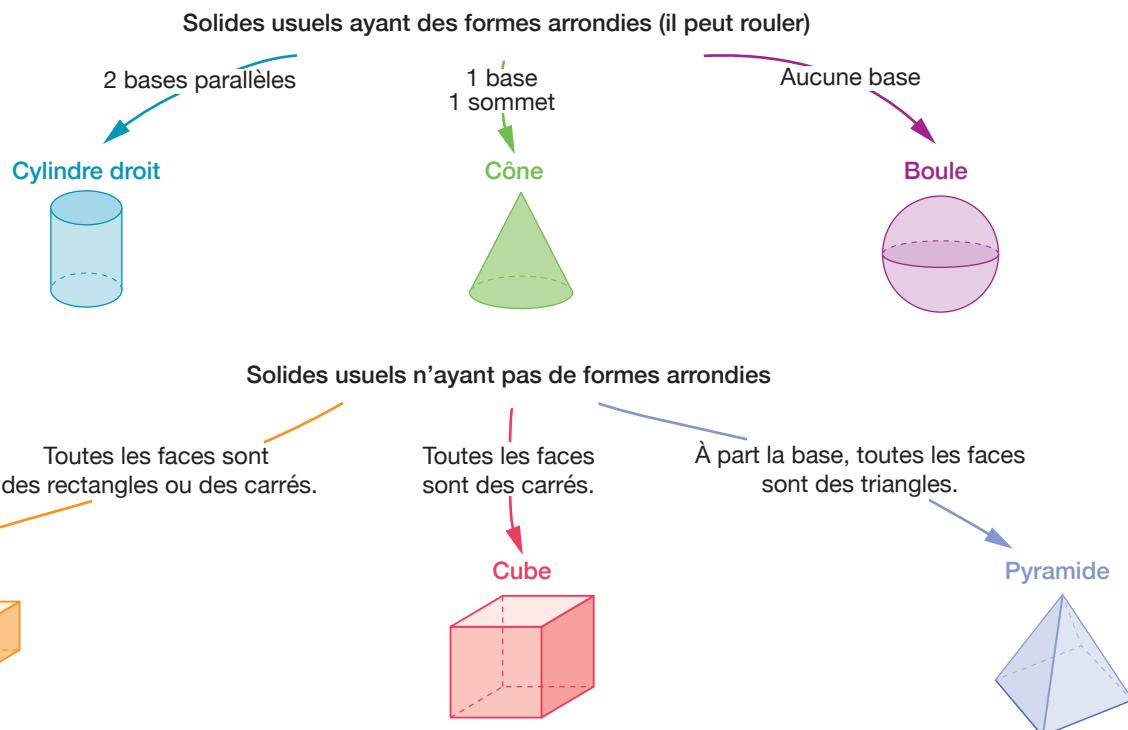
Plaquette de frein  
Disque



Rond dans l'eau  
Cercle

## A18 Reconnaissance du cube, du pavé droit, de la pyramide, du cylindre droit, du cône et de la boule

- Identifier si le solide usuel a toutes ses faces planes ou pas, c'est-à-dire s'il peut rouler dans certaines positions.
- Déterminer le nombre de bases ou la forme des faces des solides.



Identifiez les principaux solides usuels qui composent ces images.



Cube,  
Pyramide.



Pavé droit,  
Cylindre.



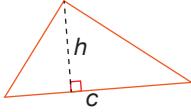
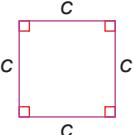
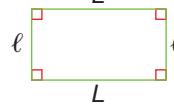
Cône,  
Boule.



Cylindre,  
Boule, Cube.

## A19 Calcul de l'aire d'un triangle, d'un carré, d'un rectangle, d'un disque

● Calculer l'aire de la figure à l'aide des formules du tableau. Faire attention à l'homogénéité des unités de mesure.

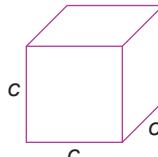
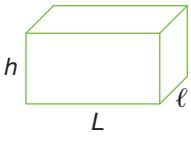
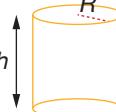
<b>Triangle</b> de côté $c$ et de hauteur associée $h$  $\mathcal{A} = \frac{c \times h}{2}$	<b>Carré</b> de côté $c$  $\mathcal{A} = c \times c = c^2$
<b>Rectangle</b> de longueur $L$ et de largeur $\ell$  $\mathcal{A} = L \times \ell$	<b>Disque</b> de rayon $R$  $\mathcal{A} = \pi \times R^2$

Pour chaque phrase, cochez la bonne réponse.

- a. L'aire d'un terrain de pétanque pour les championnats de 4 m de largeur et de 15 m de longueur est :
- 19 m<sup>2</sup>       38 m       60 m<sup>2</sup>
- b. L'aire d'une tarte saumon-épinard de 6 personnes de 26 cm de diamètre est :
- 169 cm<sup>2</sup>       169π ≈ 531 cm<sup>2</sup>       338π ≈ 1 062 cm<sup>2</sup>
- c. L'aire de la partie triangulaire d'un pignon de maison d'une base de 8 m et de 260 cm de hauteur est :
- 10,4 m<sup>2</sup>       1 040 cm<sup>2</sup>       20,8 m<sup>2</sup>
- d. L'aire d'une parcelle carrée d'un potager de 1,20 m de côté est :
- 1,040 4 m<sup>2</sup>       1,44 m<sup>2</sup>       4,8 m<sup>2</sup>

## A20 Calcul du volume d'un cube, d'un pavé droit, d'un cylindre

● Calculer le volume du solide à l'aide des formules du tableau. Faire attention à l'homogénéité des unités de mesure.

Solide usuel	<b>Cube</b> 	<b>Pavé droit</b> 	<b>Cylindre</b> 
Formule	$V = c^3$	$V = L \times \ell \times h$	$V = \pi \times R^2 \times h$

Pour chaque phrase, cochez la bonne réponse.

- a. Le volume d'un tasseau de bois de 2,50 m de longueur et de section 50 × 28 mm est :
- 3 500 mm<sup>3</sup>       0,003 5 m<sup>3</sup>       3,5 cm<sup>3</sup>
- b. Le volume d'un glaçon cubique de 3,2 cm de côté est :
- 32,768 cm<sup>3</sup>       32 768 cm<sup>3</sup>       9,6 cm<sup>3</sup>
- c. Le volume disponible d'un verre dont l'intérieur est un cylindre de 5,5 cm de hauteur et de 8,2 cm de diamètre est :
- 92,455 cm<sup>3</sup>       92,455π ≈ 290,46 cm<sup>3</sup>       45,1π ≈ 141,69 cm<sup>2</sup>

## A21 Factorisation de $x^2 - a^2$ ( $a$ étant un entier naturel donné)

Factoriser, c'est transformer une somme, ou une différence, en un produit.

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$$

- Identifier  $a^2$ .
- En déduire  $a = \sqrt{a^2}$ .
- Remplacer  $a$  par sa valeur dans  $(x + a)(x - a)$ .

1 Complétez le tableau suivant :

Expression de $x^2 - a^2$	Valeur de $a^2$	Valeur exacte de $a$	Forme factorisée $(x - a)(x + a)$
$x^2 - 25$	25	5	$(x - 5)(x + 5)$
$x^2 - 4$	4	2	$(x - 2)(x + 2)$
$x^2 - 64$	64	8	$(x - 8)(x + 8)$

2 Factorisez les expressions suivantes.

- a.  $x^2 - 49 = (x - 7)(x + 7)$
- b.  $x^2 - 81 = (x - 9)(x + 9)$
- c.  $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$

## A22 Développement de $a(x + b)$ ( $a$ et $b$ sont des entiers relatifs donnés)

Développer, c'est transformer un produit en somme.

$$\text{a } (x + b) = a \times x + a \times b$$

- Identifier  $a$  et  $b$ .
- Remplacer  $a$  et  $b$  par leurs valeurs dans  $a \times x + a \times b$ .

Développez les expressions suivantes.

- a.  $4(x + 3) = 4x + 4 \times 3 = 4x + 12$
- b.  $3(x - 4) = 3x + 3 \times (-4) = 3x - 12$
- c.  $-2(x + 5) = -2x + (-2) \times 5 = -2x - 10$
- d.  $-4(x - 7) = -4x + (-4) \times (-7) = -4x + 28$

## A23 Développement de $(x + a)(x + b)$ ( $a$ et $b$ sont des entiers relatifs donnés)

Développer, c'est transformer un produit en somme.

$$(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + a \times b$$

- Identifier  $a$  et  $b$ .
- Remplacer  $a$  et  $b$  par leurs valeurs dans  $x^2 + ax + bx + a \times b$ . Faire attention aux signes de  $a$  et  $b$ .
- Regrouper et calculer les termes en  $x$ .

Cochez la réponse correspondant au développement de l'expression donnée.

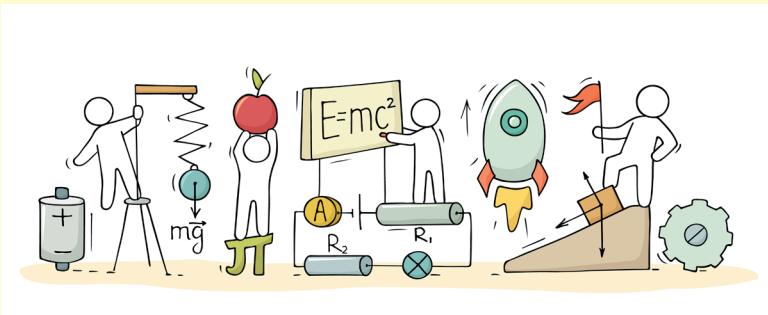
- a.  $(x + 6)(x + 2) =$    $x^2 + 12x + 12$    $x^2 + 8x + 12$    $x^2 + 12x + 8$
- b.  $(x + 5)(x - 3) =$    $x^2 + 2x - 15$    $x^2 - 8x - 15$    $x^2 - 8x + 15$
- c.  $(x - 4)(x - 1) =$    $x^2 + 5x + 4$    $x^2 - 3x + 4$    $x^2 - 5x + 4$

Durée : 45 minutes

Chapitres concernés :

1. Statistiques à deux variables
3. Suites numériques
5. Fonctions polynômes de degré 2

Dans le cadre du chef d'œuvre, un groupe d'élèves de bac professionnel a étudié le lancement d'une fusée. Pour cela, ils ont fait appel à une entreprise qui commercialise du matériel pédagogique.



## Exercice 1

### SITUATION

On s'intéresse à l'évolution du chiffre d'affaires de cette entreprise. Le chiffre d'affaires est de 1 655 000 euros en 2021. Après 2021, le responsable financier envisage deux évolutions possibles du chiffre d'affaires.

### Problématique

Selon l'évolution envisagée, à partir de quelle année le chiffre d'affaires de l'entreprise dépassera-t-il 2 millions d'euros ?

### ÉVOLUTION 1



Le tableau suivant, où  $x_i$  désigne le rang de l'année mesuré à partir de l'année 2016, donne le chiffre d'affaires  $y_i$  (en milliers d'euros) de l'entreprise entre 2016 et 2021.

Année	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Rang $x_i$	0	1	2	3	4	5
Chiffre d'affaires $y_i$ (en milliers d'euros)	1 254	1 317	1 395	1 472	1 575	1 655

On suppose que la tendance d'évolution reste la même après 2021.

- 1 **S'approprier** Représentez les lignes 2 et 3 du tableau ci-dessus par un nuage de points.
- 2 **Analyser/Raisonner** Expliquez pourquoi l'allure du nuage de points permet d'envisager un ajustement affine. *Les points du nuage sont presque alignés.*
- 3 **Réaliser Communiquer** Donnez l'équation de la droite d'ajustement affine du nuage de points.  
Arrondissez les coefficients à l'unité.  $y = 82x + 1 241$
- 4 a. **Réaliser** Donnez le coefficient de détermination  $R^2$ , arrondi au millième, de cette série statistique.  
 $R^2 = 0.995$ .
- b. **Valider** Expliquez pourquoi, au vu de ce coefficient, l'ajustement affine est justifié.  
*Le coefficient de détermination est très proche de 1.*
- 5 a. **S'approprier** Donnez le rang de l'année 2024.  
*Le rang x est égal à 8.*

b. **Réaliser** Calculez, à l'aide de la question 3, le chiffre d'affaires que l'entreprise peut prévoir en 2024.

$$y = 82 \times 8 + 1\ 241 = 1\ 897 \text{ milliers d'euros} = 1\ 897\ 000 \text{ €.}$$

c. **Analyser/Raisonner Communiquer** La résolution de l'inéquation  $82x + 1\ 241 > 2\ 000$  permet de répondre à la problématique. Expliquez pourquoi.

2 millions d'euros = 2 000 milliers d'euros. On cherche les valeurs de  $x$  telles que le chiffre d'affaires soit supérieur à 2 000 milliers d'euros.

d. **Réaliser** Résolvez par la méthode de votre choix l'inéquation  $82x + 1\ 241 > 2\ 000$ .

$$82x > 2\ 000 - 1\ 241 \Leftrightarrow 82x > 759 \Leftrightarrow x > \frac{759}{82} \Leftrightarrow x > 9,26, \text{ soit } x \geq 10.$$

e. **Valider** Déterminez à partir de quelle année le chiffre d'affaires de l'entreprise dépassera 2 millions d'euros.

10 est le rang de l'année 2026. À partir de 2026, le chiffre d'affaires dépassera 2 millions d'euros.

## ÉVOLUTION 2



python

Le responsable financier suppose que le chiffre d'affaires de l'entreprise augmentera chaque année de 80 000 € à partir de 2021.

On note  $u_n$  le chiffre d'affaires de l'entreprise, en milliers d'euros, pour l'année  $2021 + n$ . Ainsi  $u_0 = 1\ 655$ .

6 **Réaliser** Calculez  $u_1$  et  $u_2$ .

$$u_1 = 1\ 655 + 80 = 1\ 735 ; u_2 = 1\ 735 + 80 = 1\ 815.$$

7 **Analyser/Raisonner** Donnez la nature de la suite  $(u_n)$ . Précisez sa raison. Justifiez.

Quel que soit  $n$ ,  $u_{n+1} = u_n + 80$ . Donc  $(u_n)$  est une suite arithmétique de raison 80.

8 **Réaliser** Exprimez pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  en fonction de  $n$ .

$$u_n = u_0 + n \times r = 1\ 655 + n \times 80 = 1\ 655 + 80n.$$

9 **Réaliser** Calculez le chiffre d'affaires que l'on peut prévoir pour l'entreprise en 2024.

$$\text{En 2024, } n = 3 ; u_3 = 1\ 655 + 3 \times 80 = 1\ 895 \text{ milliers d'euros.}$$

10 a. **Réaliser** On donne ci-contre le programme écrit en langage Python qui doit permettre de déterminer à partir de quelle année le chiffre d'affaires dépassera 2 millions d'euros.

Complétez les pointillés de ce programme.

b. **Analyser/Raisonner** Par la méthode de votre choix (Python, algébrique, graphique), déterminez à partir de quelle année le chiffre d'affaires de l'entreprise dépassera 2 millions d'euros.

Le programme Python donne  $a = 2026$ .

$$\text{Résolution algébrique : } 1\ 655 + 80n > 2\ 000 \Leftrightarrow 80n > 345 \Leftrightarrow n > \frac{345}{80} \Leftrightarrow n > 4,3, \text{ soit } n \geq 5.$$

$$2021 + 5 = 2026.$$

```

1  u = 1655
2  a = 2021
3  while u < 2000
4      u = u + 80
5      a = a + 1
6  print (a)

```

## CONCLUSION

11 **Communiquer** Répondez à la problématique.

Pour les deux évolutions envisagées par le responsable financier, le chiffre d'affaires dépassera 2 millions d'euros à partir de 2026.

## Exercice 2

### SITUATION

Dans le cadre de leur chef d'œuvre, des lycéens ont fabriqué une petite fusée qui est lancée à partir d'une plateforme située à 8 m de hauteur.

La hauteur (en mètres) atteinte par la fusée en fonction du temps de vol  $t$  (en dixièmes de seconde) est modélisée par la fonction  $f$  définie par :  $f(t) = -0,5t^2 + 10t + 8$  pour  $t \in [0 ; 20]$ .

On a  $t = 0$  au moment du lancement de la fusée.

L'explosion de la fusée ne peut être déclenchée qu'à une hauteur supérieure à 40 mètres.

### Problématique

Combien de temps après le lancement de la fusée l'explosion peut-elle être déclenchée ?

- 1** a. **S'approprier** Calculez  $f(10)$ .

$$f(10) = -0,5 \times 100 + 10 \times 10 + 8 = 58.$$

- b. **Analyser/Raisonner** Interprétez par une phrase le résultat précédent dans la situation étudiée.

Dix dixièmes de seconde valent 1 seconde.

1 seconde après le lancement, la fusée atteint une hauteur de 58 m.

- 2** On note  $g$  la fonction définie sur  $[0 ; 20]$  par  $g(t) = -0,5t^2 + 10t - 32$ .

- a. **Réaliser** Calculez  $g(4)$  et  $g(16)$ .

$$g(4) = 0 \text{ et } g(16) = 0.$$

- b. **Réaliser** Déduisez de la question 2a la forme factorisée du polynôme  $g(t)$ .

4 et 16 sont les deux racines du polynôme  $g(t)$ . Le coefficient dominant de  $g(t)$  est  $-0,5$ .

Donc  $g(t) = -0,5(t - 4)(t - 6)$ .

- c. **Analyser/Raisonner** **Valider** Montrez que si  $f(t) \geq 40$ , alors  $g(t) \geq 0$ .

$$f(t) \geq 40 \Leftrightarrow -0,5t^2 + 10t + 8 \geq 40$$

$$\Leftrightarrow -0,5t^2 + 10t + 8 - 40 \geq 40 - 40$$

$$\Leftrightarrow -0,5t^2 + 10t - 32 \geq 0 \Leftrightarrow g(t) \geq 0$$

- d. **Réaliser**  Résolvez l'inéquation  $g(t) \geq 0$  par la méthode de votre choix (graphiquement ou algébriquement).

$$g(t) \geq 0 \Leftrightarrow -0,5(t - 4)(t - 6) \geq 0$$

$t$	0	4	6	20
Signe de $g(t)$	-	0	+	0

Les solutions de l'inéquation  $g(t) \geq 0$  sont les nombres  $t$  tels que  $4 \leq t \leq 6$ .

- 3** **Réaliser** **Communiquer** Répondez à la problématique.

4 dixièmes de seconde = 0,4 s ; 6 dixièmes de seconde = 0,6 s.

Le temps de vol doit être compris entre 0,4 s inclus et 0,6 s inclus.

## GRILLE D'ÉVALUATION DU CCF 1

### 1. Liste des capacités et connaissances évaluées

#### Capacités

- Représenter graphiquement à l'aide d'outils numériques un nuage de points.
- Déterminer l'équation réduite d'une droite d'ajustement.
- Interpoler ou extrapolier des valeurs inconnues.
- Déterminer le coefficient de détermination d'une série à deux variables.
- Évaluer la pertinence d'un ajustement affine.
- Générer les termes de différentes suites.
- Calculer un terme de rang donné d'une suite arithmétique.
- Tester si un nombre réel est racine d'un polynôme de degré 2.
- Factoriser un polynôme de degré 2 dont les racines réelles sont connues.
- Traduire des données en instructions conditionnelles et en boucles.

#### Connaissances

- Nuage de points associé à une série statistique à deux variables quantitatives.
- Ajustement affine et coefficient de détermination  $R^2$ .
- Notation indicielle du terme de rang  $n$  de la suite  $(u_n)$ .
- Suites arithmétiques :
  - définition par la relation  $u_{n+1} = u_n + r$  et la donnée du premier terme ;
  - expression du terme de rang  $n$  en fonction du premier terme et de la raison.
- Racines réelles d'un polynôme de degré 2.
- Séquences d'instructions, instructions conditionnelles, boucles.

### 2. Évaluation

Compétences	Capacités	Questions	Appréciation du niveau d'acquisition		
S'approprier	Rechercher, extraire et organiser l'information. Traduire des informations, des codages.	1. 1 1. 5.a 2. 1.a			
Analyser Raisonner	Émettre des conjectures ; proposer, choisir une méthode de résolution ; élaborer un algorithme.	1. 2 1. 5.c 1. 7 1. 10.b 2. 1.b 2. 2.c			
Réaliser	Mettre en œuvre une méthode de résolution, des algorithmes ; utiliser un modèle ; représenter ; calculer ; expérimenter ; faire une simulation.	1. 3 1. 4.a 1. 5.b 1. 5.d 1. 6 1. 8 1. 9 1. 10.a 2. 2.a 2. 2.b 2. 2.c 2. 2.d 2. 3			
Valider	Critiquer un résultat, argumenter ; contrôler la vraisemblance d'une conjecture ; mener un raisonnement logique et établir une conclusion.	1. 4.b 1. 5.e 2. 2.c			
Communiquer	Rendre compte d'une démarche, d'un résultat, à l'oral ou à l'écrit à l'aide d'outils et d'un langage approprié. Expliquer une démarche.	1. 3 1. 5.c 1. 11 2. 3			

Durée : 45 minutes

Chapitres concernés :

4. Résolution graphique d'équations et d'inéquations
6. Étude des variations d'une fonction
7. Géométrie dans l'espace

Tahina est animatrice dans un centre de loisirs. Pour l'anniversaire de Hugo, elle propose un jeu de lancer de balles dans des petits pots qu'elle a réalisés à l'aide d'une imprimante 3D.



## Exercice 1

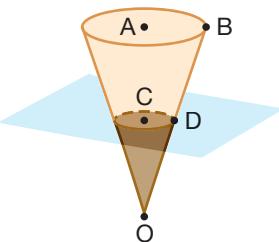
### SITUATION

À l'aide d'un logiciel de conception 3D, Tahina modélise la forme du pot par un cône de hauteur  $[OA]$ , dont la partie inférieure sera coupée par un plan parallèle à sa base (voir le document 1 ci-contre). La base du cône, de centre A, a un diamètre de 8 cm.  $[OB]$  mesure 16,5 cm. Pour une bonne tenue du pot et une utilisation modérée de filaments plastiques nécessaires à l'impression 3D, on considère que l'aire de la section de centre C et de rayon  $[CD]$  doit être comprise entre 18 cm<sup>2</sup> et 20 cm<sup>2</sup>.

### Problématique

Le modèle conçu par Tahina peut-il être validé ?

### Doc 1. Conception du pot



- 1** **S'approprier** Donnez, en cm, les longueurs des segments  $[OB]$  et  $[AB]$ .

$$OB = 16,5 \text{ cm} \text{ et } AB = \frac{8}{2} = 4 \text{ cm.}$$

- 2 a. Analyser/Raisonner** Quelle est la nature du triangle OAB ?

$[OA]$  est la hauteur du cône et  $[AB]$  est un rayon de la base. OAB est donc un triangle rectangle en A.

- b. Réaliser** Calculez, en cm, la hauteur OA du cône. Arrondissez à l'unité.

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle OAB rectangle en A :

$$OA^2 = OB^2 - AB^2 = 16,5^2 - 4^2 = 256,25 \text{ donc } OA = \sqrt{256,25} \approx 16 \text{ cm.}$$

- 3** Tahina représente le cône à l'aide du logiciel GeoGebra (voir le document 1 ci-dessus). Elle place le point C tel que C appartient au segment  $[OA]$  et  $OC = 10$  cm. Elle coupe ensuite le cône au point C par un plan parallèle à sa base. Le point D est l'intersection du segment  $[OB]$  avec la section obtenue par la coupe.

- a. S'approprier** Cochez la bonne réponse.

Les droites (CD) et (AB) sont :

- parallèles       sécantes       perpendiculaires

- b. Analyser/Raisonnez Cochez l'outil qui permet de créer l'intersection du plan avec le cône.



- c. Analyser/Raisonnez Indiquez la nature de la section obtenue.

La section obtenue est un disque.

- 4 Réaliser Communiquer En utilisant la méthode de votre choix (fichier GeoGebra « CCF2\_166\_pot.ggb »

[toucheconnect.fr/22mc64](http://toucheconnect.fr/22mc64) ou théorème de Thalès appliqué au triangle OAB), déterminez, en cm, le rayon CD de la section.

$C \in [OA]$ ,  $D \in [OB]$  et  $(CD) \parallel (AB)$ . D'après le théorème de Thalès appliqué au triangle OAB :  $\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB} = \frac{CD}{AB}$   
donc  $CD = \frac{OC}{OA} \times AB = \frac{10}{16} \times 4 = 2,5 \text{ cm}$ .

- 5 a. Réaliser Calculez, en  $\text{cm}^2$ , l'aire  $\mathcal{A}$  de la section sachant que  $\mathcal{A} = \pi \times R^2$  où  $R$  est le rayon de la section. Arrondissez au dixième.

$$\mathcal{A} = \pi \times CD^2 = \pi \times 2,5^2 \approx 19,6 \text{ cm}^2$$

- b. Valider Communiquer Répondez à la problématique. Justifiez la réponse.

Le modèle conçu par Tahina peut être validé car l'aire de la section est comprise entre 18  $\text{cm}^2$  et 20  $\text{cm}^2$ .

## Exercice 2

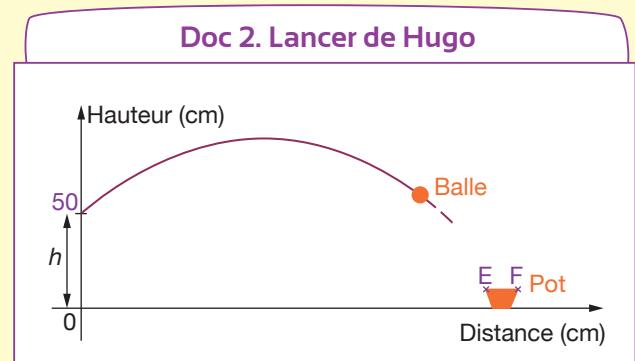
### PARTIE A. Trajectoire

#### SITUATION

Tahina pose le petit pot au sol. Hugo lance une balle depuis la hauteur  $h = 50 \text{ cm}$  de sa main. La situation est représentée sur le schéma du document 2 ci-contre, qui n'est pas à l'échelle. L'ouverture du pot forme un disque de diamètre  $[EF]$  tel que  $E(193,5 ; 6)$  et  $F(201,5 ; 6)$ . La balle est assimilée à un point et le lancer se fait dans le plan formé par le point de départ  $(0 ; 50)$  et l'axe du pot.

#### Problématique

La balle va-t-elle entrer dans le pot ?



- 1 a. S'approprier Quelle est la hauteur du pot ?

L'ordonnée des points E et F indique que le pot a une hauteur de 6 cm.

- b. S'approprier Cochez le bon encadrement de l'abscisse  $x_B$  de la balle, pour qu'elle entre dans le pot lorsqu'elle se trouvera à une hauteur de 6 cm.

$0 < x_B < 6$       $0 < x_B < 193,5$       $193,5 < x_B < 201,5$

- 2 python™ Le programme suivant, en langage Python, fait intervenir une fonction polynôme  $f$  de degré 2 qui modélise la hauteur de la balle durant sa chute : si  $x$  est la distance horizontale de la balle en centimètres, alors  $f(x)$  est la hauteur de la balle en centimètres.

```

1 def f(x):
2     return -0.00625*x**2+x+50
3 x_B=180
4 ..... f(x_B)>6:
5     x_B=x_B+1
6 print("L'équation f(x) = 6 a une solution comprise entre",x_B-1,"et",x_B)

```

- a. **S'approprier** Donnez l'expression de la fonction  $f$  qui intervient dans le programme Python.

$$f(x) = -0,00625x^2 + x + 50$$

- b. **Analysier/Raisonner** À une distance horizontale  $x_B = 180$  cm, la balle se trouve à une hauteur  $f(x_B)$  supérieure à 6 cm. Pour déterminer un encadrement de la solution de l'équation  $f(x) = 6$ , complétez les pointillés de la ligne 4 du programme par une des commandes suivantes : *for* • *if* • *while*.

Ligne 4 : **while**  $f(x_B) > 6$  :

- 3 a. Réaliser Communiquer** Par la méthode de votre choix (Python ou graphique), résolvez l'équation  $f(x) = 6$ . Donnez un encadrement de la solution, au dixième dans le cas d'une résolution graphique.

Le programme Python affiche comme résultat : « L'équation  $f(x) = 6$  a une solution comprise entre 195 et 196 ».

Il en résulte que  $195 < x < 196$ .

En résolvant graphiquement l'équation  $f(x) = 6$ , on en déduit que  $195,9 < x < 196$  au dixième.

- b. **Valider** Répondez à la problématique. Justifiez la réponse.

Les intervalles [195 ; 196] et [195,9 ; 196] étant inclus dans l'intervalle [193,5 ; 201,5], il en résulte que la balle va entrer dans le pot.

## PARTIE B. Hauteur maximale

### SITUATION

La hauteur, en centimètres, de la balle est modélisée par la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0 ; 200]$  par  $f(x) = -0,00625x^2 + x + 50$  où  $x$  est la distance horizontale, en centimètres, de la balle.

### Problématique

Quelle est, en cm, la hauteur maximale atteinte par la balle ?

- 4 Réaliser** On note  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$ . Déterminez  $f''(x)$ .

$$f'(x) = -0,0125x + 1.$$

- 5 Réaliser** Résolvez l'inéquation  $f''(x) \geq 0$ .

$$-0,0125x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow -0,0125x \geq -1 \Leftrightarrow x \leq \frac{-1}{-0,0125} \Leftrightarrow x \leq 80. \text{ Donc } f'(x) \geq 0 \text{ sur } [0 ; 80].$$

- 6 Réaliser** Établissez le tableau de variations de la fonction  $f$ .

$x$	0	80	200
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Variations de $f$	50	90	0

- 7 Valider Communiquer** Répondez à la problématique. Justifiez la réponse.

La hauteur maximale de la balle est donnée par le maximum de la fonction  $f$  atteint en  $x = 80$ .

La hauteur maximale atteinte par la balle de Hugo est 90 cm.

## GRILLE D'ÉVALUATION DU CCF 2

### 1. Liste des capacités et connaissances évaluées

Capacités	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Exploiter une représentation d'un solide usuel.</li> <li>• Réaliser la section d'un solide usuel par un plan.</li> <li>• Construire la section plane d'un solide passant par des points donnés.</li> <li>• Utiliser les formules et les règles de dérivation pour déterminer la dérivée d'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 2.</li> <li>• Étudier, sur un intervalle donné, les variations d'une fonction à partir du calcul et de l'étude du signe de sa dérivée. Dresser son tableau de variations.</li> <li>• Déterminer un extremum d'une fonction sur un intervalle donné à partir de son sens de variation.</li> <li>• Repérer les enchaînements logiques et les traduire en instructions conditionnelles et en boucles.</li> </ul>
Connaissances	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Section d'un solide par un plan.</li> <li>• Notation <math>f'</math>.</li> <li>• Règles de dérivation : dérivée du produit d'une fonction dérivable par une constante, dérivée de la somme de deux fonctions dérивables.</li> <li>• Lien entre signe de la dérivée d'une fonction sur un intervalle et sens de variation de cette fonction sur cet intervalle.</li> <li>• Extremum d'une fonction sur un intervalle donné.</li> <li>• Séquences d'instructions, instructions conditionnelles, boucles bornées (for) et non bornées (while).</li> </ul>

### 2. Évaluation

Compétences	Capacités	Questions	Appréciation du niveau d'acquisition		
S'approprier	Rechercher, extraire et organiser l'information. Traduire des informations, des codages.	<b>1. 1.</b> <b>1. 3.a.</b> <b>2. 1.</b> <b>2. 2.a.</b>			
Analyser Raisonner	Émettre des conjectures ; proposer, choisir, une méthode de résolution ; élaborer un algorithme.	<b>1. 2.a.</b> <b>1. 3.b.</b> <b>1. 3.c.</b> <b>2. 2.b.</b>			
Réaliser	Mettre en œuvre une méthode de résolution, des algorithmes ; utiliser un modèle ; représenter ; calculer ; expérimenter ; faire une simulation.	<b>1. 2.b.</b> <b>1. 4.</b> <b>1. 5.a.</b> <b>2. 3.a.</b> <b>2. 4.</b> <b>2. 5.</b> <b>2. 6.</b>			
Valider	Critiquer un résultat, argumenter ; contrôler la vraisemblance d'une conjecture ; mener un raisonnement logique et établir une conclusion.	<b>1. 5.b.</b> <b>2. 3.b.</b> <b>2. 7.</b>			
Communiquer	Rendre compte d'une démarche, d'un résultat, à l'oral ou à l'écrit à l'aide d'outils et d'un langage approprié. Expliquer une démarche.	(A) <b>1. 4.</b> <b>1. 5.b</b> (W) <b>2. 3.a.</b> <b>2. 7.</b>			

Durée : 45 minutes

Chapitres concernés :

2. Probabilités
6. Dérivée et variations d'une fonction
8. Construction de vecteurs du plan
9. Calculs relatifs aux vecteurs du plan

Tout d'abord utilisés dans le domaine militaire, les drones sont non seulement devenus des objets de loisirs mais ils interviennent aussi dans de nombreux secteurs professionnels tels que la cartographie, la sécurité, la livraison de colis, l'agriculture, l'audiovisuel...



## Exercice 1

### PARTIE A. Décollage du drone

#### SITUATION

Pour suivre l'avancement d'un chantier, Gabriel souhaite réaliser une prise de vue aérienne depuis un drone. Le drone est initialement au sol et sa vitesse est nulle. Lors de son ascension verticale, le drone est soudainement déporté par le vent.

#### Problématique

Quelle est, en newton (N), la valeur de la force exercée par le vent sur le drone ?

- 1 S'approprier** Lors de son décollage vertical, le drone est soumis à deux forces représentées sur le document ci-contre par les vecteurs  $\vec{GA}$  et  $\vec{GB}$  : son poids  $\vec{P}$  et la force de poussée  $\vec{F}$  exercée par les hélices. Déterminez les coordonnées de  $\vec{P}$  et celles de  $\vec{F}$ .

Par lecture graphique ou en utilisant les coordonnées des points G, A et B, on obtient :  $\vec{P}(0 ; -4)$  et  $\vec{F}(0 ; 5,2)$ .

- 2 Réaliser** La somme  $\vec{u}$  du poids et de la force de poussée permet au drone son ascension verticale. Sachant que  $\vec{u} = \vec{P} + \vec{F}$ , calculez les coordonnées du vecteur  $\vec{u}$ .

$\vec{u}(0 + 0 ; -4 + 5,2) ; \vec{u}(0 ; 1,2)$ .

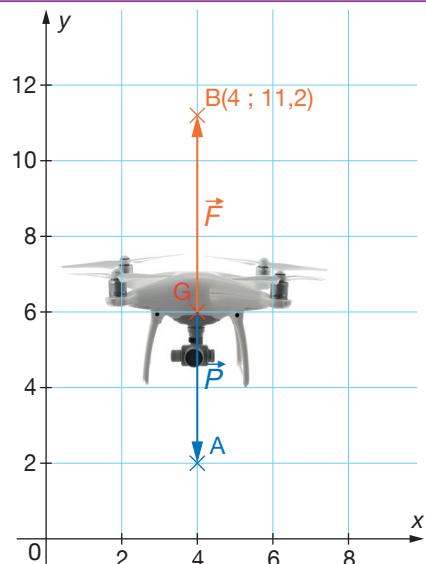
- 3 python** Le vent se lève. À cet instant le drone se trouve dans une position où il est soumis à la force  $\vec{v}$  du vent. Soit  $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ , la somme des forces exercées sur le drone.  $\vec{w} = \vec{IJ}$  où I(4 ; 8) et J(6 ; 10,7). On donne le programme suivant en langage Python.

```

1 x_I=float(input("Donnez l'abscisse de I."))
2 y_I=float(input("Donnez l'ordonnée de I."))
3 x_J=float(input("Donnez l'abscisse de J."))
4 y_J=float(input("Donnez l'ordonnée de J."))
5 x_IJ=
6 y_IJ=
7 print("Les coordonnées du vecteur IJ sont :",x_IJ, "et", y_IJ)

```

Doc. Décollage vertical du drone



Échelle : 1 unité = 20 N

a. **Analyser/Raisonneur** Que permet ce programme ?

Ce programme permet de calculer les coordonnées d'un vecteur connaissant les coordonnées de ses extrémités.

b. **Réaliser** Complétez les lignes 5 et 6 du programme.

ligne 5 :  $x_{IJ} = x_J - x_I$  ;

ligne 6 :  $y_{IJ} = y_J - y_I$

c. **Réaliser** **Communiquer** Par la méthode de votre choix (Python, calcul, graphique), déterminez les coordonnées du vecteur  $\vec{w}$ . Arrondissez au dixième.

Le programme Python affiche : « Les coordonnées du vecteur IJ sont : 2.0 et 2.7 ».

Par le calcul :  $\vec{IJ}(6 - 4 ; 10,7 - 8)$ .

Il en résulte que  $\vec{w}(2 ; 2,7)$ .

4 a. **Réaliser** Déterminez les coordonnées  $(x ; y)$  du vecteur  $\vec{v}$  sachant que  $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ .

$$\begin{cases} 2 = 0 + x \\ 2,7 = 1,2 + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = x \\ 2,7 - 1,2 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1,5 \end{cases} \text{ donc } \vec{v}(2 ; 1,5).$$

b. **Réaliser** Calculez la norme du vecteur  $\vec{v}$ .

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + 1,5^2} = 2,5 \text{ unités.}$$

c. **Valider** **Communiquer** En utilisant l'échelle indiquée sur le document, répondez à la problématique.

$2,5 \times 20 = 50$ . Le vent exerce une force de 50 N sur le drone.

## PARTIE B. Panne moteur

### SITUATION

À 20 m d'altitude, le drone s'immobilise. Soudain, les moteurs s'arrêtent et le drone tombe en chute libre. La distance verticale, en mètres, parcourue par le drone, peut être modélisée par la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0 ; 2]$  par  $f(x) = 5x^2$  où  $x$  est la durée en secondes de la chute libre. On prend  $x = 0$  au moment où les moteurs s'arrêtent. À chaque instant  $x$ , la vitesse du drone, en m/s, est donnée par le nombre dérivé  $f'(x)$ .

### Problématique

Si Gabriel ne rétablit pas la communication avec le drone, quelle sera, en km/h, la vitesse du drone au moment de l'impact avec le sol ?

5 a. **Réaliser** Vérifiez que  $f(2) = 20$ .

$$f(2) = 5 \times 2^2 = 5 \times 4 = 20.$$

b. **Valider** Déduisez-en, en s, le temps dont dispose Gabriel pour rétablir la communication avec le drone avant qu'il n'atteigne le sol.

Gabriel dispose de 2 s pour rétablir la communication avec le drone qui chute de 20 m.

- 6** a. Réaliser Communiquer    Déterminez  $f'(1)$  par la méthode de votre choix (graphique ou calcul).

En représentant graphiquement la tangente ( $T$ ) à la courbe représentative de la fonction  $f$  au point d'abscisse 1, on détermine que ( $T$ ) a pour coefficient directeur  $a = 10$ .

En calculant la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$ , on obtient :  $f'(x) = 10x$  ; d'où  $f'(1) = 10 \times 1 = 10$ .

Il en résulte que  $f'(1) = 10$ .

- b. Valider Déduisez-en, en m/s, la vitesse du drone au bout de 1 s.

Au bout de 1 s, la vitesse du drone est égale à 10 m/s.

- 7** Analyser/Raisonner Communiquer Répondez à la problématique sachant que  $1 \text{ m/s} = 3,6 \text{ km/h}$ .

Justifiez la réponse.

On détermine  $f'(2) = 20$ . Le drone atteint le sol à la vitesse de 20 m/s.

$20 \times 3,6 = 72$ . Le drone atteint le sol à la vitesse de 72 km/h.

## Exercice 2

### SITUATION

Il arrive que les batteries des drones présentent un défaut. Dans ce cas, on dira que le drone est défectueux. Gabriel se rend dans une entreprise qui vérifie l'état des batteries de drones professionnels et de loisir.

Sur les 250 drones présents, 150 sont des drones de loisir dont 2 % sont défectueux.

Parmi les drones professionnels, 96 % ne sont pas défectueux.

Un drone est choisi au hasard parmi les 250. On considère les événements suivants :

L : « le drone est un drone de loisir » ; D : « le drone est défectueux ».

### Problématique

Sachant que le drone est défectueux, quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un drone professionnel ?

- 1** S'approprier Déterminez combien de drones de loisir sont défectueux.

$$150 \times \frac{2}{100} = 3. \text{ Trois drones de loisir sont défectueux.}$$

- 2** Réaliser Complétez le tableau des effectifs suivant.

	D	$\bar{D}$	Total
L	3	$150 - 3 = 147$	150
$\bar{L}$	$100 - 96 = 4$	96	$250 - 150 = 100$
Total	$3 + 4 = 7$	$147 + 96 = 243$	250

- 3** a. S'approprier Définissez l'événement  $D \cap \bar{L}$  par une phrase.

Le drone est défectueux et à usage professionnel.

- b. Réaliser Calculez les probabilités  $P(D)$  et  $P(D \cap \bar{L})$ .

$$P(D) = \frac{7}{250} = 0,028 \text{ et } P(D \cap \bar{L}) = \frac{4}{250} = 0,016.$$

- 4** Analyser/Raisonner Communiquer Répondez à la problématique. Justifiez la réponse.

Arrondissez au centième.

$$P_D(\bar{L}) = \frac{P(D \cap \bar{L})}{P(D)} = \frac{0,016}{0,028} \approx 0,57 \text{ ou à l'aide du tableau, } P_D(\bar{L}) = \frac{4}{7} \approx 0,57.$$

La probabilité de choisir un drone professionnel sachant qu'il est défectueux est égale à 0,57.

## GRILLE D'ÉVALUATION DU CCF 3

### 1. Liste des capacités et connaissances évaluées

#### Capacités

- Compléter ou exploiter des représentations : tableaux croisés d'effectifs, diagrammes.
- Calculer la probabilité de la réunion, de l'intersection de deux événements.
- Déterminer une probabilité conditionnelle.
- Déterminer, par une lecture graphique, lorsqu'il existe, le nombre dérivé d'une fonction  $f$  en l'abscisse d'un point de la courbe représentative de cette fonction.
- Utiliser les formules et les règles de dérivation pour déterminer la dérivée d'une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 2.
- Déterminer les coordonnées d'un vecteur.
- Calculer les coordonnées du vecteur obtenu comme somme de deux vecteurs.
- Calculer la norme d'un vecteur dans le plan muni d'un repère orthonormé.
- Modifier ou compléter un algorithme ou un programme.

#### Connaissances

- Réunion et intersection d'événements.
- Probabilité conditionnelle.
- Nombre dérivé.
- Coordonnées d'un vecteur.
- Coordonnées du vecteur somme.
- Expression de la norme d'un vecteur.

### 2. Évaluation

Compétences	Capacités	Questions	Appréciation du niveau d'acquisition		
S'approprier	Rechercher, extraire et organiser l'information. Traduire des informations, des codages.	1. 1. 2. 1. 2. 3.a.			
Analyser Raisonner	Émettre des conjectures ; proposer, choisir une méthode de résolution ; élaborer un algorithme.	1. 3.a. 1. 7. 2. 4			
Réaliser	Mettre en œuvre une méthode de résolution, des algorithmes ; utiliser un modèle ; représenter ; calculer ; expérimenter ; faire une simulation.	1. 2. 1. 3.b. 1. 3.c. 1. 4.a. 1. 4.b. 1. 5.a. 1. 6.a. 2. 2. 2. 3.b.			
Valider	Critiquer un résultat, argumenter ; contrôler la vraisemblance d'une conjecture ; mener un raisonnement logique et établir une conclusion.	1. 4.c. 1. 5.b. 1. 6.b.			
Communiquer	Rendre compte d'une démarche, d'un résultat, à l'oral ou à l'écrit à l'aide d'outils et d'un langage approprié. Expliquer une démarche.	1. 3.c. 1. 4.c. 1. 6.a. 1. 7. 2. 4.			

# Programmer en langage Python

## Saisir un texte et définir des variables

Syntaxe	Effet
<code>input (" texte ")</code>	Permet de saisir au clavier un texte ou un nombre.
<code>print (" texte ")</code>	Affiche dans la console le texte entre " ".
<code>int(x)</code>	La variable est un nombre entier.
<code>float(x)</code>	La variable est un nombre décimal.
<code>str(x)</code>	La variable est une chaîne de caractères.

## Donner une valeur à une variable

Syntaxe	Effet
<code>x = 14</code>	Stocke la valeur 14 dans la variable x.
<code>x = x + 1</code>	Ajoute 1 à (ou incrémenté de 1) la variable x.
<code>x = y</code>	Stocke la valeur de la variable y dans la variable x.

## Tester et comparer

Syntaxe	Effet
<code>if condition :     instructions</code>	Teste la condition. Si (if) la condition est vérifiée, exécute les instructions.
<code>if condition :     instructions 1 else :     instructions 2</code>	Teste la condition. Si (if) la condition est vérifiée, exécute les instructions 1. Sinon (else), exécute les instructions 2.
<code>x == y</code>	Teste si x est égal à y.
<code>x != y</code>	Teste si x est différent de y.
<code>x &lt;= y</code>	Teste si x est inférieur ou égal à y.

## Répéter des instructions à l'aide de boucles

Syntaxe	Effet
<code>while condition :     instructions</code>	Exécute en boucle les instructions tant que (while) la condition est vérifiée. Le nombre de répétitions n'est pas connu au départ.
<code>for i in range (n) :     instructions</code>	Exécute en boucle les instructions pour i variant de 0 à n – 1 avec un pas de 1. Le nombre de répétitions est connu au départ.
<code>for i in range (m, n) :     instructions</code>	Exécute en boucle les instructions pour i variant de m à n – 1 avec un pas de 1.
<code>for i in range (m, n, k) :     instructions</code>	Exécute en boucle les instructions pour i variant de m à n – 1 avec un pas de k.

## Créer et utiliser des listes

Syntaxe	Effet
<code>L = [x0, x1, x2]</code>	Crée une liste ordonnée nommée L d'éléments x0, x1, x2 qui peuvent être des lettres, des nombres, des mots...
<code>L = []</code>	Indique que la liste L est vide.
<code>L[k]</code>	Donne l'élément numéro k de la liste L, la numérotation des éléments commençant à 0.
<code>L.append (n)</code>	Ajoute l'élément n à la fin de la liste L.
<code>del L[k]</code>	Supprimer l'élément numéro k de la liste L.
<code>len(L)</code>	Donne le nombre d'éléments de la liste L.
<code>L1 + L2</code>	Fusionne les listes L1 et L2 pour donner une nouvelle liste.

## Tracer un graphique

Syntaxe	Effet
<code>import matplotlib.pyplot as plt</code>	Importe les commandes nécessaires au tracé d'un graphique.
<code>plt.axis ([xmin, xmax, ymin, ymax])</code>	Règle la fenêtre d'affichage.
<code>plt.xlabel (" texte1 ") plt.ylabel (" texte2 ")</code>	Ajoute une légende sur les axes.
<code>plt.plot(x, y, " couleur ")</code>	Trace la courbe représentant y en fonction de x. On peut choisir différents paramètres dont la couleur.
<code>plt.grid()</code>	Trace une grille.
<code>plt.show()</code>	Affiche le graphique.

## Utiliser des fonctions et des instructions mathématiques

Syntaxe	Effet
<code>x**n</code>	Calcule $x^n$ .
<code>round (x , 2)</code>	Donne la valeur de x arrondie au centième.
<code>from math import*</code>	Permet l'application des fonctions mathématiques usuelles.
<code>sqrt(x)</code>	Calcule la racine carrée de x.
<code>pi</code>	Donne une valeur approchée de $\pi$ .
<code>from random import*</code>	Permet l'obtention de différents nombres aléatoires.
<code>randint (a , b)</code>	Renvoie un nombre entier aléatoire compris entre deux entiers a et b inclus.
<code>random ()</code>	Renvoie un nombre décimal aléatoire appartenant à l'intervalle [0 ; 1[.

## Créer une fonction

Syntaxe	Effet
<code>def nom_fonction (paramètre 1, paramètre 2) :     instructions     return résultat</code>	Crée un sous-programme que l'on peut appeler dans le programme principal. Renvoie au programme un résultat.

## Crédits photographiques

p. 7 ph © Wiresstock / stock.adobe.com  
 p. 8 ph © tolly65 / stock.adobe.com  
 p. 9 ph © tai111 / stock.adobe.com  
 p. 10 ph © Jan / stock.adobe.com  
 p. 11 ph © mmphoto / stock.adobe.com  
 p. 19 ph © Nicole Lienemann / stock.adobe.com  
 p. 20 ph © bertie10 / stock.adobe.com  
 p. 21 ph © ivector / stock.adobe.com  
 p. 22 ph © Roman King / stock.adobe.com  
 p. 23 ph © Syda Productions / stock.adobe.com  
 p. 24 ph © Andrey Popov / stock.adobe.com  
 p. 25 ph © luismolinero / stock.adobe.com  
 p. 31 ph © Syda Productions / stock.adobe.com  
 p. 32 ph © less.talk / stock.adobe.com  
 p. 34 ph © Belish / stock.adobe.com  
 p. 35 ph © gmg9130 / stock.adobe.com  
 p. 36 ph © pgm / stock.adobe.com  
 p. 37 ph © Ivan / stock.adobe.com  
 p. 38 ph © Maridav / stock.adobe.com  
 p. 39 ph © Dean Marston / stock.adobe.com  
 p. 44 ph © Brad Pict / stock.adobe.com  
 p. 46 ph © Duris Guillaume / stock.adobe.com  
 p. 47 ph © oliverfiction96 / stock.adobe.com  
 p. 48 ph © mumbly / stock.adobe.com  
 p. 49 ph © lucid\_dream / stock.adobe.com  
 p. 50 ph © benjaminjk / stock.adobe.com  
 p. 51 ph © franco lucato / stock.adobe.com  
 p. 52 ph © ALF photo / stock.adobe.com  
 p. 56 ph © baibaz / stock.adobe.com  
 p. 58 ph © dusanpetkovic1 / stock.adobe.com  
 p. 59 ph © Daniel Jędzura / stock.adobe.com  
 p. 60 ph © Rawpixel.com / stock.adobe.com  
 p. 61 ph © 吴 周 / stock.adobe.com  
 p. 62 ph © DedMityay / stock.adobe.com  
 p. 64 ph © Iakov Kalinin / stock.adobe.com  
 p. 65 ph © Sergey Kohl / stock.adobe.com  
 p. 71 ph © Evgen / stock.adobe.com  
 p. 72 ph © Serge Ramelli / stock.adobe.com  
 p. 73 ph © BetterPhoto / stock.adobe.com  
 p. 74 ph © James Thew / stock.adobe.com  
 p. 75 ph © tonyv3112 / stock.adobe.com  
 p. 76 ph © Prod. Numérik / stock.adobe.com  
 p. 77 ph © Patryssia / stock.adobe.com  
 p. 79 ph © Halfpoint / stock.adobe.com  
 p. 80 ph © bat104 / stock.adobe.com  
 p. 88 ph © Pictures news / stock.adobe.com  
 p. 89 ph © Prod. Numérik / stock.adobe.com  
 p. 90 ph © ann\_ounce / stock.adobe.com  
 p. 91 ph © Ian Woolcock / stock.adobe.com (h)  
 p. 91 ph © escioner / stock.adobe.com (b)  
 p. 92 ph © 3dsculptor / stock.adobe.com (h)

p. 92 ph © Farber / stock.adobe.com (b)  
 p. 93 ph © torriphoto / stock.adobe.com  
 p. 94 ph © Unclesam / stock.adobe.com  
 p. 95 ph © luisrftc / stock.adobe.com (h)  
 p. 95 ph © chaiwat / stock.adobe.com (b)  
 p. 96 ph © dbrnjhrj / stock.adobe.com (h)  
 p. 96 ph © Sergey Nivens / stock.adobe.com (b)  
 p. 97 ph © tchebytchev / stock.adobe.com  
 p. 98 ph © savoieleysse / stock.adobe.com (hg)  
 p. 98 ph © robin-clouet.fr / stock.adobe.com (hd)  
 p. 98 ph © travelview / stock.adobe.com (mg)  
 p. 98 ph © C. Aucher / stock.adobe.com (mm))  
 p. 98 ph © kasparart / stock.adobe.com (md)  
 p. 98 ph © martialred / stock.adobe.com (b)  
 p. 99 ph © Richie Chan / stock.adobe.com (h)  
 p. 99 ph © Richard Villalon / stock.adobe.com (b)  
 p. 100 ph © visionarius / stock.adobe.com (h)  
 p. 100 ph © Sergey / stock.adobe.com (b)  
 p. 102 ph © svitlini / stock.adobe.com  
 p. 103 ph © artbalitskiy / stock.adobe.com  
 p. 106 ph © Rémy MASSEGLIA / stock.adobe.com  
 p. 111 ph © eldarnurkovic / stock.adobe.com  
 p. 112 ph © Wollwerth Imagery / stock.adobe.com  
 p. 114 ph © Europhoton / stock.adobe.com  
 p. 115 ph © fotomek / stock.adobe.com  
 p. 117 ph © Sergii Figurnyi / stock.adobe.com  
 p. 117 ph © Dan Marsh / stock.adobe.com (fichier numérique)  
 p. 118 ph © Ralf Kraft / stock.adobe.com  
 p. 119 ph © MurielleB / stock.adobe.com  
 p. 127 ph © Ilshat / stock.adobe.com  
 p. 127 ph © SimpLine / stock.adobe.com (fichier numérique)  
 p. 128 ph © paul\_craft / stock.adobe.com  
 p. 129 ph © helenedevun / stock.adobe.com  
 p. 130 ph © Frank / stock.adobe.com  
 p. 132 ph © Europhoton / stock.adobe.com  
 p. 140 ph © robu\_s / stock.adobe.com  
 p. 142 ph © photosvac / stock.adobe.com  
 p. 157 ph © Lumpinni / stock.adobe.com (hg)  
 p. 157 ph © S. Pradier / stock.adobe.com (hd)  
 p. 157 ph © alexugalek / stock.adobe.com (bg)  
 p. 157 ph © Romolo Tavani / stock.adobe.com (bd)  
 p. 158 ph © DFC / stock.adobe.com (hg)  
 p. 158 ph © ronstik / stock.adobe.com (hd)  
 p. 158 ph © Nikolay / stock.adobe.com (bg)  
 p. 158 ph © Tonis Pan / stock.adobe.com (bd)  
 p. 161 ph © sapunkele / stock.adobe.com  
 p. 163 ph © Sylverarts / stock.adobe.com  
 p. 165 ph © Photographee.eu / stock.adobe.com  
 p. 169 ph © Kadmy / stock.adobe.com (h)  
 p. 169 ph © ValentinValkov / stock.adobe.com (b)

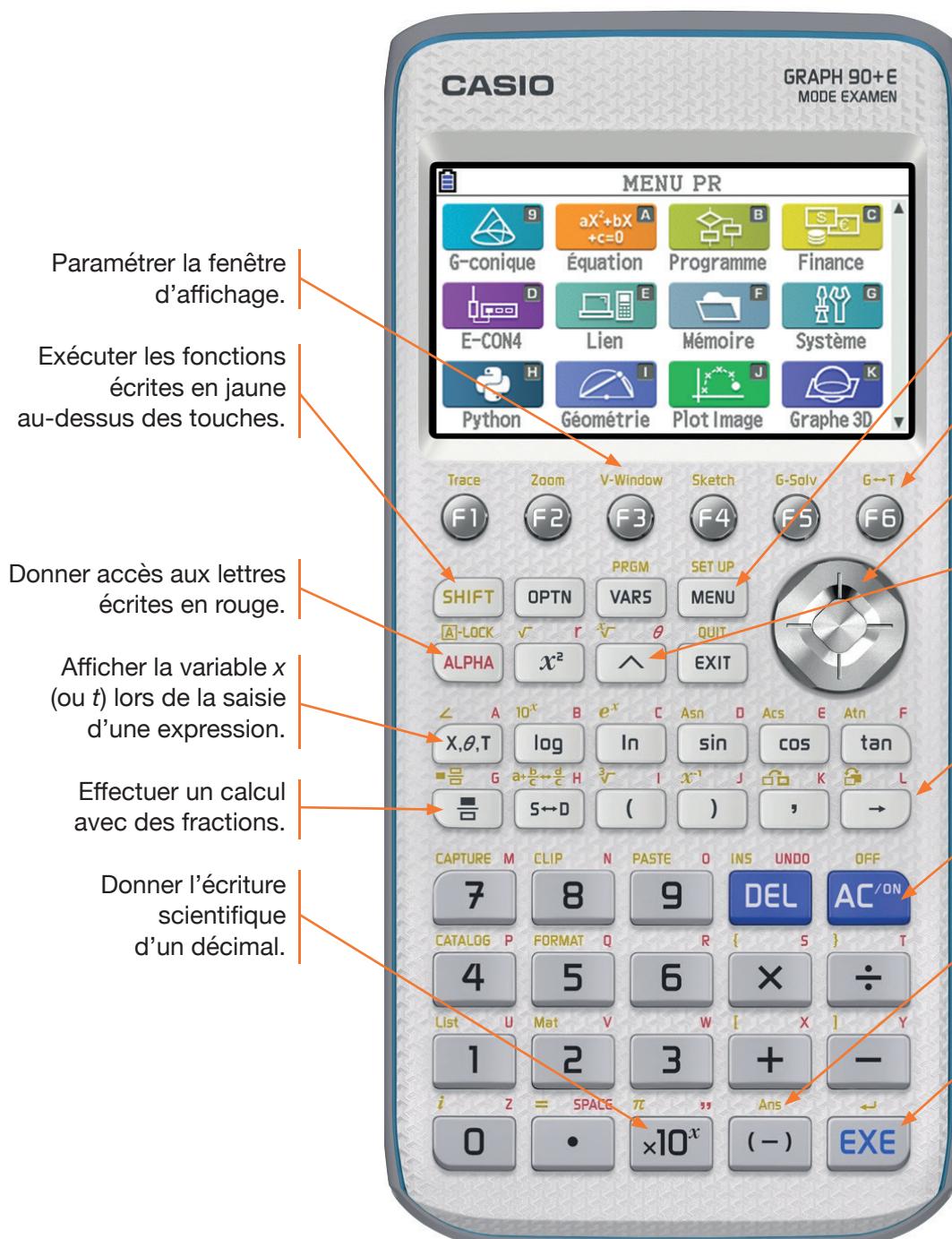
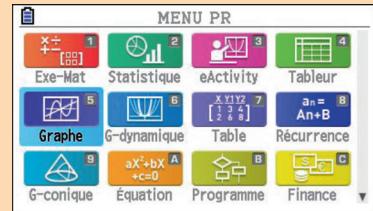
# Calculatrice Casio

## Différents modes

**menu** Pour accéder aux différents modes de la calculatrice.

En particulier :

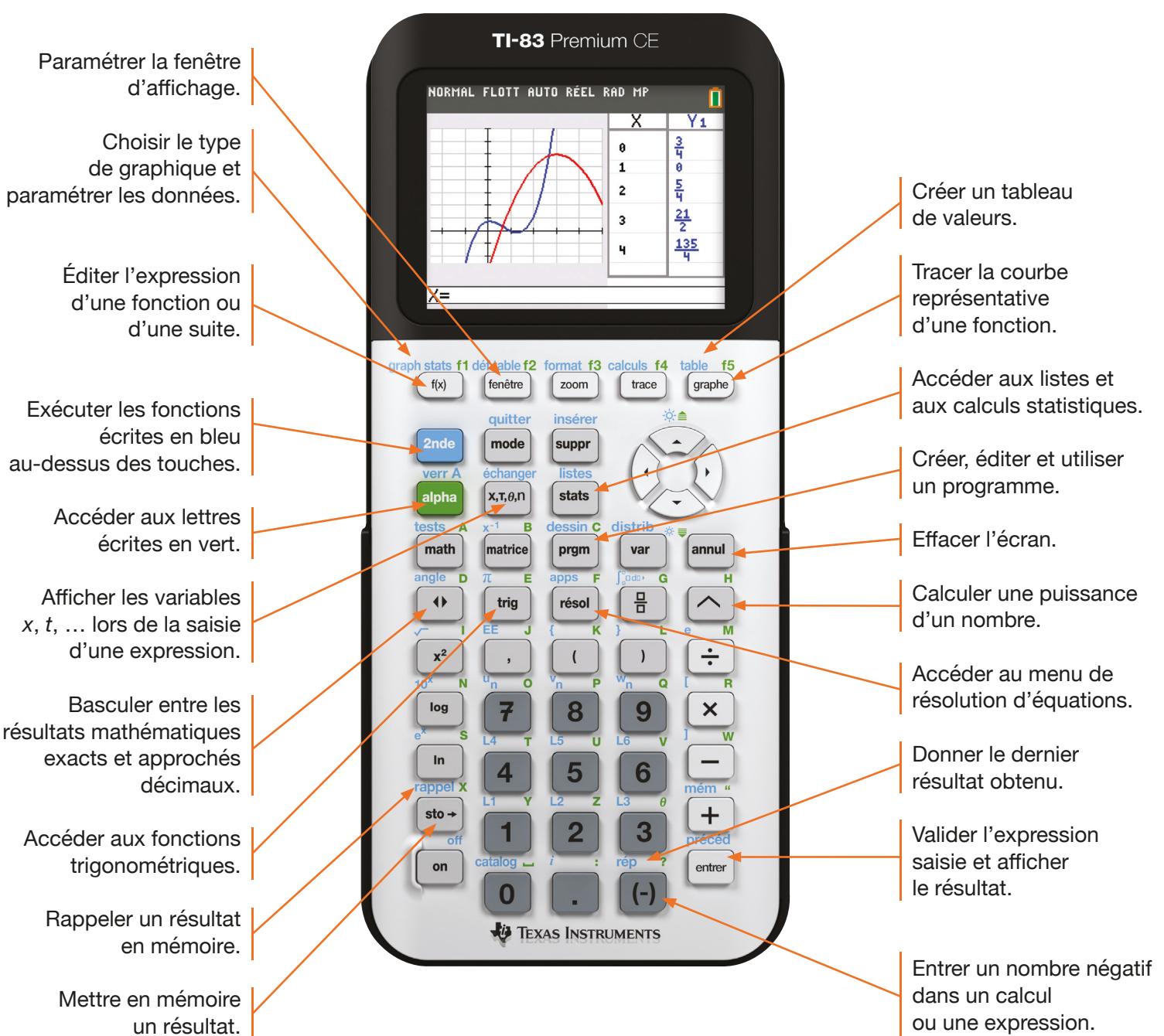
- **Exe-Mat** : effectuer des calculs
- Pour passer des degrés aux radians et inversement : **SHIFT SET UP**, puis Angle, F1 ou F2
- **Statistique** : calculer un indicateur et tracer un graphique statistique
- **Tableur** : afficher une feuille de calcul
- **Graphe** : tracer la courbe représentative d'une fonction
- **Table** : créer un tableau de valeurs d'une fonction
- **Équation** : résoudre une équation ou un système d'équations
- **Python** : programmer dans le langage Python



## Différents modes

**mode** Pour accéder aux différents modes de la calculatrice, en particulier :

- NORMAL SCI ING : choisir entre affichage normal, scientifique ou ingénieur
- FLOTTANT : choisir le nombre de chiffres à afficher après la virgule
- RADIAN DEGRE : choisir l'unité d'angle
- FONCTION PARAMETRIQUE POLAIRE SUITE : choisir un type de fonction ou suite





Profite des ressources numériques  
**GRATUITES** de ce manuel !

Accès en 1 clic sur ↗ [www.foucherconnect.fr/1536584](http://www.foucherconnect.fr/1536584)



**METS TOUTES LES CHANCES DE TON CÔTÉ**

**RÉVISE AVEC**

