

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

Résolution d'une équation aux dérivées
partielles par processus gaussien

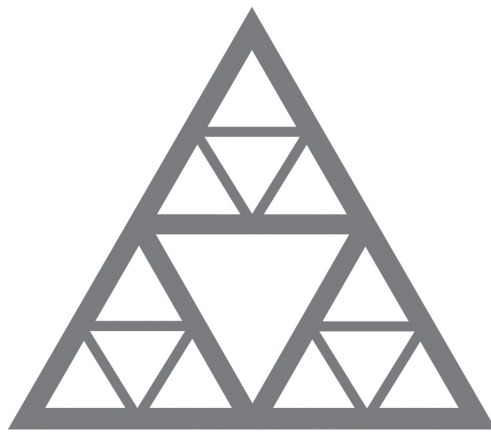
Projet 1A

Par

Nils Baulier, Raphaël Viard, Salma Kably et Simon Weissberg

Supervisé par

Urbain Vaes



École des Ponts

ParisTech

Table des matières

1	Introduction	1
2	Processus gaussien	1
2.1	Définition	1
2.2	Modélisation d'une trajectoire d'un processus gaussien	1

1 Introduction

Historiquement, les processus de régression gaussienne furent introduits par Krige en 1960, cherchant à l'époque à obtenir la distribution d'or dans un milieu, en ne se basant que sur des échantillons. Aujourd'hui, ils permettent par exemple d'étudier la perméabilité radioactive d'un sol. L'approche de résolution d'équations aux dérivées partielles par processus gaussien est une technique d'approximation de la solution par une fonction ayant un caractère aléatoire, permettant par exemple de modéliser l'incertitude sur une donnée du problème. Avant de se lancer dans une telle résolution, il paraît naturel d'abord de simplement essayer d'approcher une fonction connue par un processus gaussien (c'est la régression gaussienne), ce qui sera l'objet principal de ce premier rendu. Cette première étape nous orientera pour ensuite résoudre des équations différentielles linéaires.

2 Processus gaussien

2.1 Définition

Définition 1 *Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires $(X_t)_{t \in T}$ définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ indexée par T et à valeurs dans S . Un processus stochastique peut donc aussi être vu comme une application $X : \Omega \times T \rightarrow S$ tel que pour tout t dans T , $X(., t)$ est une variable aléatoire.*

Un processus gaussien est un processus stochastique $(X_t)_{t \in T}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall (t_1, t_2, \dots, t_n) \in T^n$, $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ est un vecteur gaussien.

Proposition 1 *Soit $(X_t)_{t \in T}$ un processus gaussien. Alors il existe $\bar{m} : T \rightarrow \mathbb{R}$ et $\bar{k} : T \times T \rightarrow \mathbb{R}$ définie positive tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall (t_1, t_2, \dots, t_n) \in T^n$, $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \sim \mathcal{N}((\bar{m}(t_1), \dots, \bar{m}(t_n))^T, K_{t_1, t_2, \dots, t_n})$ où K_{t_1, t_2, \dots, t_n} est la matrice de coefficients $K_{i,j} = \bar{k}(t_i, t_j)$.*

Réciproquement, s'il existe un tel \bar{m} et un tel \bar{k} , alors $(X_t)_{t \in T}$ est un processus gaussien. On note alors $(X_t)_{t \in T} \sim \mathcal{GP}(\bar{m}, \bar{k})$ et on appelle \bar{m} la fonction moyenne et \bar{k} le noyau de covariance du processus gaussien.

2.2 Modélisation d'une trajectoire d'un processus gaussien