Лабораторная работа № 3

Практическое применение формул Байеса. Теория полезности

Теоретическая часть

Задача выбора является одной из центральных в экономике (и не только).

Например, одно из основных допущений экономической теории состоит в том, что человек делает рациональный выбор. Рациональный выбор означает предположение, что решение человека является результатом упорядоченного процесса мышления. Слово "упорядоченный" определяется экономистами в строгой математической форме. Вводится ряд предположений о поведении человека, которые называются аксиомами рационального поведения.

При условии, что эти аксиомы справедливы, доказывается теорема о существовании некой функции, устанавливающей человеческий выбор, - функции полезности.

Полезностью называют величину, которую в процессе выбора максимизирует личность с рациональным экономическим мышлением. Можно сказать, что полезность — это воображаемая мера психологической и потребительской ценности различных благ.

С содержательной точки зрения делается предположение, что человек как бы взвешивает на некоторых "внутренних весах " различные альтернативы и выбирает из них ту, полезность которой больше.

Задачи принятия решений с рассмотрением полезностей и вероятностей событий были первыми, которые привлекли внимание исследователей.

Постановка таких задач обычно заключается в следующем:

Человек выбирает какие-то действия в мире, где на получаемый результат (исход) действия влияют случайные события, неподвластные человеку. Но, имея некоторые знания о вероятностях этих событий, человек может рассчитать наиболее выгодную совокупность и очередность своих действий.

Отметим, что в данной постановке задачи варианты действий обычно не оцениваются по многим критериям. Таким образом, используется более простое их описание. Рассматривается не одно, а несколько последовательных действий, что позволяет построить так называемые "деревья решений" (см. далее).

Человек, который следует аксиомам рационального выбора, называется в экономике рациональным человеком.

1. Задача с урнами

Теория полезности экспериментально исследовалась в так называемых задачах с урнами (или вазами).

Задачи с урнами типичны для группы наиболее простых задач принятия решений - задач статистического типа. Для решения этих задач надо знать только элементарные начала теории вероятностей. Человек делает выбор в этих задачах, основываясь на расчетах.

Варианты действий выражены в наиболее простом виде.

Типовая задача для испытуемого может быть представлена следующим образом:

Перед испытуемым ставится урна, которая может быть урной 1-го или 2-го типа.

Дается информация:

- сколько имеется урн 1-го и 2-го типов;
- какие выигрыши ожидают испытуемого, если он угадает, какого типа урна;
- какие проигрыши его ожидают, если он ошибётся.

После получения такой информации испытуемый должен назвать, к какому типу относится поставленная перед ним урна.

Пусть, например, экспериментатор случайно выбирает урну для испытуемого из множества, содержащего 700 урн 1-го типа и 300 урн 2-го типа. Если перед испытуемым находится урна 1-го типа, и он угадает это, то получит выигрыш 350 денежных единиц (д. е.), если не угадает, его проигрыш составит 50 д.е. Если перед ним урна 2-го типа, и он это угадает, то получит выигрыш 500 д.е., если не угадает, его проигрыш составит 100 д.е. Полезность для испытуемого равна качеству денежных единиц.

Испытуемый может предпринять одно из следующих действий:

- d_1 - сказать, что урна 1-го типа;

- d_2 - сказать, что урна 2-го типа.

Условия задачи можно представить в табл. 1.

Таблица 1 - Представление задачи с урнами

Тип урны	Вероятность выбора урны данного типа	d_1	d_2
1	0.7	350	-100
2	0.3	-50	500

Что же делать человеку? Теория полезности отвечает: оценить среднюю (ожидаемую) полезность каждого из действий и выбрать действие с максимальной ожидаемой полезностью. В соответствии с этой рекомендацией мы можем определить среднее значение выигрыша для каждого из действий

$U(d_1) = 0.7*350 – 0.3*50 = 230$ д. е.;

$U(d_2) = 0.3*500 – 0.7*100 = 80$ д. е.

Следовательно, разумный человек выберет действие d_1, а не действие d_2.

Из этого примера следует общий рецепт действий для рационального человека: определить исходы, помножить их на соответствующие вероятности, получить ожидаемую полезность и выбрать действие с наибольшей полезностью.

Задачи с урнами помогут нам познакомиться с построением деревьев решений и принятием решений с их помощью.

2. Деревья решений

Приведенная выше табл. 1 может быть представлена в виде дерева решений (рис. 1). На этом дереве квадрат означает место, где решение принимает человек, а светлый кружок - место, где все решает случай. На ветвях дерева написаны уже знакомые нам значения вероятностей, а справа у конечных ветвей - значения исходов (результаты).

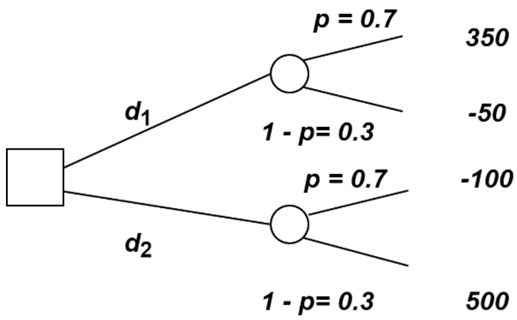

Рис. 1. Дерево решений

Для чего нужно дерево решений? Мы можем использовать его для представления своих возможных действий и для нахождения последовательности правильных решений, ведущих к максимальной ожидаемой полезности.

Чтобы показать это, усложним задачу. Предоставим человеку, выбирающему между действиями $\boldsymbol{d}_1$ и $\boldsymbol{d}_2$, дополнительные возможности.

Тип урны характеризуется количеством шаров в каждом из типов урн, и испытуемому сообщается информация сколько чёрных и белых шаров в урнах 1-го и 2-го типов.

Пусть он может до своего ответа вытащить за определенную плату один шар из урны, причем после вытаскивания шар кладется обратно в урну.

Вот теперь вопрос о том, какое решение следует принимать, стал сложнее: необходимо решить, стоит ли вынимать шар и какой ответ дать после вытаскивания белого или черного шара.

При принятии этих решений нам окажет существенную помощь известный в теории вероятностей (и в теории статистических решений) способ подсчета изменения вероятностей событий после получения дополнительной информации.

Вернемся к новой формулировке задачи.

Пусть в урне 1-го типа, содержится 6 белых шаров и 4 черных. А в урне 2-го типа содержится 3 белых и 7 черных шаров.

Плата за вытаскивание одного шара 60 д. е.

Возможны два исхода: ***W*** – извлечён белый шар, ***Bl*** – извлечён чёрный шар

Имеется две гипотезы:

1. Выбрана урна первого типа - $\boldsymbol{H_1}$.
2. Выбрана урна второго типа - $\boldsymbol{H_2}$.

Вероятность вытащить белый шар из урны 1-го типа равна:

$$P(W|H_1) = 0{,}6.$$

Вероятность вытащить белый шар из урны 2-го типа равна:

$$P(W|H_2) = 0{,}3.$$

Вероятность вытащить черный шар из урны 1-го типа равна:

$$P(Bl|H_1) = 0{,}4.$$

Вероятность вытащить черный шар из урны 2-го типа равна:

$$P(Bl|H_2) = 0{,}7$$

Вероятности выбора урн 1-го и 2-го типа: $P(H_1) = 0.7$ и $P(H_2) = 0.3$ (см. табл. 1).

Зная это, мы можем поставить задать два вопроса.

Первый вопрос: каковы вероятности вытащить белый и черный шары?

Для ответа на этот вопрос воспользуемся формулой полной вероятности.

$$P(A) = \sum_{1}^{n} P(B_i) \cdot P(A|B_i)$$

Вероятность вытащить черный шар:

$$P(W) = P(H_1) \cdot P(W|H_1) + P(H_2) \cdot P(W|H_2) = 0{,}51.$$

Вероятность вытащить белый шар:

$$P(Bl) = P(H_1) \cdot P(Bl|H_1) + P(H_2) \cdot P(Bl|H_2) = 0{,}49.$$

Второй вопрос более сложный.

Пусть вытащенный шар оказался белимым (черным). Какое действие следует выбрать: $\boldsymbol{d_1}$ или $\boldsymbol{d_2}$?

Для ответа на этот вопрос нужно знать вероятности принадлежности урн к 1-му и 2-му типам после получения дополнительной информации.

Эти вероятности позволяет определить ***формула Байеса***, которая позволяет оценить $P(H_i|W)$ и $P(H_i|Bl)$, где i =1, 2, используя все прочие вероятности.

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A|B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i) \cdot P(A|B_i)}{\sum_1^n P(B_i) \cdot P(A|B_i)}.$$

$$P(H_1|W) = \frac{P(H_1)P(W|H_1)}{P(W)} = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}6}{0{,}51} \approx 0{,}824;$$

$$P(H_2|W) = \frac{P(H_2)P(W|H_2)}{P(W)} = \frac{0.3 \cdot 0.3}{0.51} \approx 0{,}176;$$

$$P(H_1|Bl) = \frac{P(H_1)P(Bl|H_1)}{P(Bl)} = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}4}{0.49} \approx 0{,}571;$$

$$P(H_2|Bl) = \frac{P(H_2)P(Bl|H_2)}{P(Bl)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}6}{0{,}49} \approx 0{,}429.$$

Теперь мы имеем всю информацию, необходимую для принятия решений.

На рис. 2 показаны две основные ветви дерева решений, причем верхняя просто повторяет дерево решений на рис. 1.

Квадрат 1 слева соответствует первому решению – вытаскивать шар или нет. Случаю отказа от извлечения шара соответствует верхняя основная ветвь. Решению вытаскивать шар соответствует нижняя ветвь, начинающаяся со случайного события (кружок). В квадратах 2, 3, 4 принимаются решения о выборе одной из двух стратегий: $\boldsymbol{d_1}$ или $\boldsymbol{d_2}$. Далее все решает случай (кружки).

Есть три простых правила выбора оптимальной (по критерию максимума ожидаемой полезности) последовательности решений на основе дерева решений:

1) идти от конечных ветвей дерева к его корню;

2) там, где есть случайность (кружок), находится значение / среднее значение функции полезности;

3) там, где есть этап принятия решений (квадратик), выбирается ветвь с наибольшей ожидаемой полезностью, а другая отсекается двумя черточками.

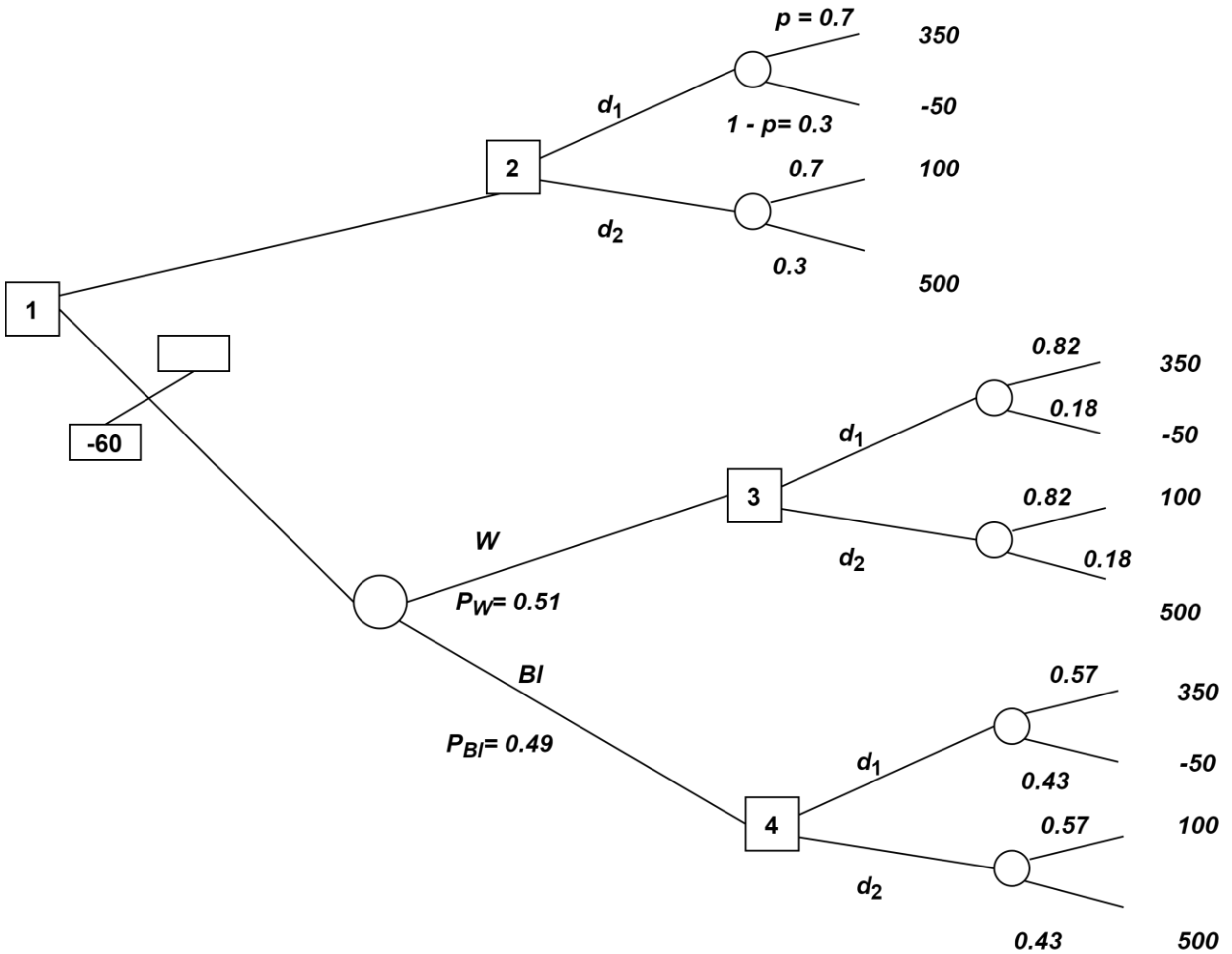

Рис. 2. Дерево решений для задачи с возможностью вытащить шар

Применим эти правила к дереву решений, представленному на рис. 2. В результате получим дерево решений, показанное на рис. 3.

На этом рисунке над кружками указаны значения / средние значения полезности, двумя черточками отсечены ветви с меньшим значением ожидаемой полезности.

Наилучший вариант действий: шар не вытаскивать и выбирать действие $\boldsymbol{d_1}$.

Этот вариант соответствует самому верхнему пути дерева решений на рис. 2.

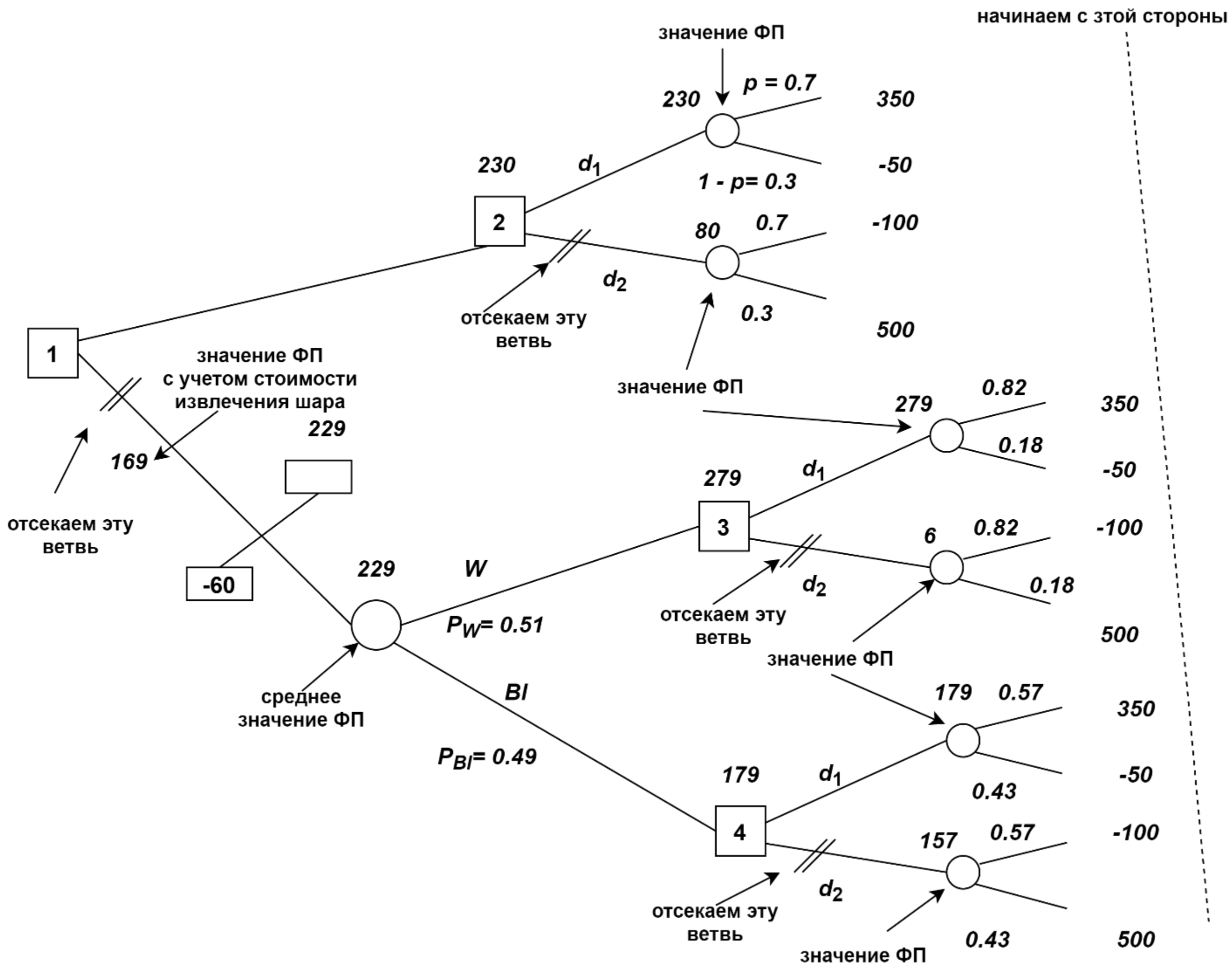

Рис. 5. "Сворачивание" дерева решений

Такая процедура нахождения оптимального пути на деревьях решений получила название ***«сворачивания» дерева решений***.

Деревья решений при заданных числовых значениях вероятностей и исходов позволяют осуществить выбор той стратегии (последовательности действий), при которой достигается наибольший выигрыш, т. е. достигается максимум функции полезности для лица, принимающего решение (ЛПР).

Задание

1. Напишите функцию, которая определяет наилучшее значение функции полезности и дает рекомендации по выбору соответствующей стратегии выбора урны для задачи, когда нет возможности извлечь шар за дополнительную плату.

Входные данные

- Число урн 1-го типа
- Число урн 2-го типа
- Размер выигрыша при угадывании, что урна 1-го типа
- Размер проигрыша при не угадывании, что урна 1-го типа
- Размер выигрыша при угадывании, что урна 2-го типа
- Размер проигрыша при не угадывании, что урна 2-го типа

Выходные данные

- Наилучшее значение функции полезности
- Рекомендация по выбору для этого значения:
"Выбрать урну 1-го типа" / "Выбрать урну 2-го типа"

2. Напишите функцию, которая определяет наилучшее значение функции полезности и дает рекомендации по выбору соответствующей стратегии выбора урны (включая рекомендацию, стоит ли извлекать шар из урны за дополнительную плату) для задачи, когда есть возможности извлечь шар за дополнительную плату.

Обратите внимание на описание процедуры ***«сворачивания» дерева решений.***

Входные данные

- Число урн 1-го типа
- Число урн 2-го типа
- Количество белых шаров в урне 1-го типа
- Количество черных шаров в урне 1-го типа
- Количество белых шаров в урне 2-го типа
- Количество черных шаров в урне 2-го типа
- Плата за извлечение шара
- Размер выигрыша при угадывании, что урна 1-го типа
- Размер проигрыша при не угадывании, что урна 1-го типа
- Размер выигрыша при угадывании, что урна 2-го типа
- Размер проигрыша при не угадывании, что урна 2-го типа

Выходные данные

- Рекомендация стоит ли вынимать шар:
"Вынуть шар" / "Не вынимать шар"
- Наилучшее значение функции полезности
- Рекомендация по выбору для этого значения:
"Выбрать урну 1-го типа" / "Выбрать урну 2-го типа"