Hoja de trabajo #4

Sliven Macario Antonio Carranza Briones 20181393

Ejercicio #1 (10%)

A continuación se le presentara una serie de definiciones de conjuntos pertenecientes al conjunto $2^{\mathbb{N}}$. Indicar que definiciones corresponden al mismo conjunto, es decir que definiciones definen conjuntos que tienen los mismos elementos.

1. $a := \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$
2. $b := \{n \ \in \mathbb{N} \mid \exists x \in \mathbb{N} \ . \ x = n/5\}$
3. $c := \{n \in \mathbb{N} \mid \exists x \in \mathbb{N} \ . \ n = x * x\}$
4. $d := \{n \in \mathbb{N} \mid \exists i \in \mathbb{N} \ . \ n = 2^i \wedge n < 100\}$
5. $e := \{n \in \mathbb{N} \mid \exists x \in \mathbb{N} \ . \ x = \sqrt{n}\}$
6. $f := \{n \in \mathbb{N} \mid \exists x \in \mathbb{N} \ . \ n = x + x + x + x + x\}$

Respuestas:

1. $(A \equiv D) :\Leftrightarrow (\forall x. x \in A \Leftrightarrow x \in D)$
2. $(C \equiv F) :\Leftrightarrow (\forall x. x \in C \Leftrightarrow x \in F)$
3. $(B \equiv E) :\Leftrightarrow (\forall x. x \in B \Leftrightarrow x \in E)$

Ejercicio #2 (10%)

Utilize la *jerga matematica* para definir los siguientes conjuntos:

1. El conjunto de todos los naturales divisibles dentro de 5
   $C := \{n \ \in \mathbb{N} \mid \exists x \in \mathbb{N} \ . \ x = n/5\}$
2. El conjunto de todos los naturales divisibles dentro de 4 y 5
   $A := \{n \ \in \mathbb{N} \mid \exists x \in \mathbb{N} \ . \ x = n/5\}$
   $B := \{n \ \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} \ . \ y = n/4\}$
   $A \cup B := \{x | x \in A \vee x \in B\}$
3. El conjunto de todos los naturales que son primos
   $B := \{n \ \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} \ . \ d <= n\}$
   $P := \{n \ \in \mathbb{N} \mid \exists x \in \mathbb{N} \ . \ [n/d = 0] = c, c = 2\}$
   $B \cup P := \{x | x \in B \vee x \in P\}$
4. El conjunto de todos los conjuntos de numeros naturales que contienen un numero divisible dentro de 15
   $C := \{n \ \in \mathbb{N} \mid \exists d \in \mathbb{N} \ . \ d <= 15\}$
   $Q := \{n \ \in \mathbb{N} \mid \exists d \in \mathbb{N} \ . \ 15/d = 0\}$
   $C \cup Q := \{x | x \in B \vee x \in P\}$

5. El conjunto de todos los conjuntos de numeros naturales que al ser sumados producen 42 como resultado
   $S := \{n \ \in \mathbb{N} \mid \exists r \in \mathbb{N} \ . \ r <= 42, 42/r = 0\}$
   $W := \{n \ \in \mathbb{N} \mid \exists r \in \mathbb{N} \ . \ r0 + r1 + ...rn = 42\}$
   $S \cup W := \{x | x \in B \vee x \in P\}$

Ejercicio #3 (10%)

Un numero *semi-primo* es el producto de dos numeros primos. Los numeros *semiprimos* tienen la peculiaridad que nada más son divisibles entre 1 y los dos primos de los cuales dicho numero es un producto. Un ejemplo es el numero seis $(6 = 2 * 3)$ el cual se obtiene al multiplicar los primos 2 y 3.
$C := \{n \ \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} \ . \ d <= n\}$
$B1 := \{n \ \in \mathbb{N} \mid \exists x \in \mathbb{N} \ . \ [n/d = 0] = c, c = 2\}$
$B1 * B2 := Semiprimo$

Ejercicio #4 (20%)

Utilize la *jerga matematica* para definir los conjuntos a los que corresponden las siguientes funciónes:

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$; $f(x) = x + x$
   $W := \{n \ \in \mathbb{N} \mid \exists x \in \mathbb{N} \ . \ x + x\}$

2. $g : \mathbb{N} \to \mathbb{B}$; $g(x)$ es verdadero si x es divisible dentro de 5, falso en caso contrario. Nota: $\mathbb{B} = \{\texttt{true}, \texttt{false}\}$, puede definir dos conjuntos separados y definir la función como la union de ambos conjuntos.
   $C := \{n \ \in \mathbb{N} \mid \exists x \in \mathbb{N} \ . \ X/5 = 0, True\}$
   $B := \{n \ \in \mathbb{N} \mid \exists x \in \mathbb{N} \ . \ X/5 = 1, False\}$
   $C \cup B := \{x | x \in A \vee x \in B\}$

3. Indicar el conjunto al que pertenece la función $f \circ g$
   $C := \{n \ \in \mathbb{N} \mid \exists x \in \mathbb{N} \ . \in \}$

4. Definir el conjunto que corresponde a la función $f \circ g$
   $C := \{n \ \in \mathbb{N} \mid \exists x \in \mathbb{N} \ . \times \mathbb{Z}\}$

Ejercicio #5 (20%)

Dadas las siguientes funciones que pertenecen a $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, indique si la función es injectiva, surjectiva o bijectiva.

1. $f(x) = x^2$
   Surjectiva

2. $g(x) = \frac{1}{cos(x-1)}$
   Surjectiva

3. $h(x) = 2x$
   Bijectiva

4. $w(x) = x + 1$
   Bijectiva

Ejercicio #6 (30%)

A continuación se definira una bijección entre los numeros naturales ($\mathbb{N}$) y los numeros enteros ($\mathbb{Z}$). Se utilizaran varios conjuntos intermediariarios para facilitar el proceso.

1. Definir el conjunto $B_1 \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ el cula empareja a los numeros naturales *pares* con todos los naturales mayores a 0. Eg. $B_1 = \{\langle 2, 1\rangle, \langle 4, 2\rangle, \langle 6, 3\rangle \ldots\}$
   $b := \{n \ \in \mathbb{N} \mid \exists x \in \mathbb{N} \ . \ x/2 = 0\}$

2. Definir el conjunto $B_{2a} \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ el cula empareja a los numeros naturales *impares* con todos los naturales mayores a 0. Eg. $B_{2a} = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 5, 3\rangle \ldots\}$
   $c := \{n \ \in \mathbb{N} \mid \exists x \in \mathbb{N} \ . \ x/2 = 1\}$

3. Definir el conjunto $B_2 \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ el cual se definie exactamente igual al conjunto B_{2a} excepto que los valores en el contradominio son negativos
   $d := \{n \ \in \mathbb{N} \mid \exists x \in \mathbb{N} \ . \ n * z\}$

4. El conjutno $B := \{\langle 0, 0\rangle\} \cup B_1 \cup B_2$ es la bijeccion que se intenta definir.