Sprawozdanie
Metody numeryczne 2
Temat 3, Zadanie nr 1

Mateusz Śliwakowski, F4

20/11/2018

1 Treść zadania

Obliczanie całek $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, gdzie $D = [a,b] \times [c,d]$ złożonymi kwadraturami trapezów ze względu na każdą zmienną.

2 Opis metody

Zaczniemy od rozpisania ogólnego przypadku liczenia całki na prostokącie, a następnie zastosujemy kwadraturę trapezów ze względu na każdą zmienną.

Mamy dane: $f(x,y)$, $D = [a,b] \times [c,d]$, gdzie $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ oraz $n,m \in \mathbb{R}$ - ilość podziałów wzdłuż osi odpowiednio OX, OY. Zdefiniujmy podziały:

$$x_i = a + h_1 i, \text{ gdzie } h_1 = \frac{b-a}{n},\ i = 0,\dots,n$$

$$_i = a + h_2 j, \text{ gdzie } h_2 = \frac{d-c}{m},\ j = 0,\dots,n$$

Załóżmy, że S_1 i S_2 są danymi kwadraturami dla funkcji jednej zmiennej g.

$$S_1(g) = \Sigma_{I=0}^{n} A_i g(x_i) = \int_a^b g(x)dx$$

$$S_2(g) = \Sigma_{j=0}^{M} B_j g(y_i) = \int_c^d g(y)dy$$

Zastosujemy S_1 do funkcji $f = f(x,y)$, ze względu na x.

$$S_1(f)(y) = \Sigma_{i=0}^{n} A_i f(x_i, y)$$

a następnie S_2, ze względu na y

$$S_2(S_1(f)) = \Sigma_{j=0}^{m} B_j (\Sigma_{i=0}^{n} A_i f(x_i, y_j)) = \Sigma_{i=0}^{n} \Sigma_{j=0}^{m} \underbrace{A_i B_j}_{C_{ij}} f(x_i, y_j)$$

Kwadratura złożona trapezów ma postać:

$$S_1(g) = \frac{h_1}{2}[g(a) + g(b) + 2\Sigma_{i=1}^{n-1} g(x_i)]$$

Stosując kwadraturę trapezów ze względu na każdą ze zmiennych otrzymamy macierz współczynników:

$$\{C_{ij}\} = \{A_i B_j\} = \frac{h_1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{h_2}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{h1h_2}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & \dots & 4 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 4 & 4 & \dots & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \end{bmatrix}$$