Sprawozdanie

Metody numeryczne 2

# Temat 6, Zadanie nr 5

Mateusz Śliwakowski, F4

08/01/2019

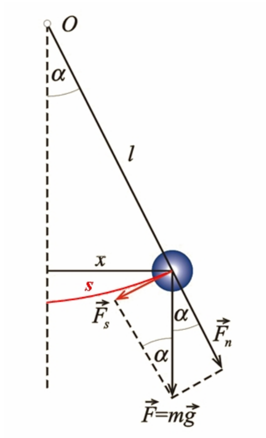
# 1 Treść zadania

Wahadło matematyczne. Zastosować wybraną metodę Rungego-Kutty rzędu 2-go dla układu dwóch równań. Patrz "Ćwiczenia laboratoryjne z metod numerycznych"pod redakcją J. Wąsowskiego, OWPW, podrozdział 7.6.

# 2 Opis metody

## 2.1 Wahadło matematyczne

Równanie wahadła matematycznego (punkt materialny, zawieszony na nici o długości $l$) to klasyczny przykład równania rzędu 2.




Niech $\alpha = y(t)$ - wychylenie wahadła względem pionu.

$$\vec{F} = ma$$

$$a = \frac{\vec{F}}{m}$$

Jedyną siłą czynną w tym układzie jest $\vec{F}_s$ ($\vec{F}_n$ odpowiada wyłącznie za naciąg nici.

$$a = \frac{mg\sin\alpha}{m}$$

$$a = g\sin\alpha$$

$$a = \epsilon \cdot l$$

$$\epsilon = -\frac{g}{l}\sin\alpha$$

$$\omega = \frac{d\epsilon}{dt}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$
$$\frac{d^2\alpha}{dt} = -\frac{g}{l}\sin\alpha$$
$$y'' = -k\sin y$$

gdzie $k = \frac{g}{l}$.

### 2.2 Metoda Rungego-Kutty rzędu 2

Do rozwiązania zadania wykorzystałem metodę Rungego-Kutty rzędu drugiego (metodę Heuna). Każdy krok obliczany był według następujących wzorów.

$$\begin{cases} y_{1,i+1} = y_{1,i} + h(f_{1,i} + f_1(x_{i+1}, y_{1,i} + hf_{1,i}, y_{2,i} + hf_{2,i}))/2, \\ y_{2,i+1} = y_{2,i} + h(f_{2,i} + f_2(x_{i+1}, y_{1,i} + hf_{1,i}, y_{2,i} + hf_{2,i}))/2 \end{cases}$$

Mamy określone warunki początkowe:

- $y_{1,0} = \alpha_0$ - początkowy kat wychylenia wahadła,
- $y_{2,0} = \omega_0$ - początkowa prędkość kątowa.

Zgodnie z teorią wahadła matematycznego nasze funkcje przyjmują postać:

- $f_{1,i} = f_1(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}) = y_{2,i}$,
- $f_{2,i} = f_2(x_i, y_{1,i}, y_{2,i}) = -k \cdot sin(y_{1,i})$

## 3 Warunki i zalozenia

1. Parametry wejściowe są podane poprawnie ($l, t > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha$, $\epsilon \in \mathbb{R}$).

## 4 Implementacja

Funkcja symulująca ruch wahadła nosi nazwę *wahadlo*, a jej sygnatura wygląda nstępująco:

```
function [t, y1, y2] = wahadlo(l, t, n, alfa0, omega0)
```

Parametry wejściowe:

- $l$ - długość wahadła (w metrach),
- $t$ - czas symulacji (w sekundach),
- $n$ - liczba iteracji, jaka ma wykonać algorytm,

- $alfa0$ - początkowe wychylenie wahadła,
- $omega0$ - początkowa prędkość kątowa.

Parametry wyjściowe:

- $t$ - wektor zawierający tablicę argumentów,
- $f1$ - wektor zawierający wychylenia wahadła dla odpowiadających argumentów,
- $f2$ - wektor zawierający prędkości kątowe dla odpowiadających argumentów.

Na początku ustalamy początkowe parametry zmiennych pomocniczych, oraz wzory funkcji używanych przez metodę. Następnie wykonujemy w pętli kolejne kroki metody Rungego-Kutty, zapisując wyniki do wektorów.

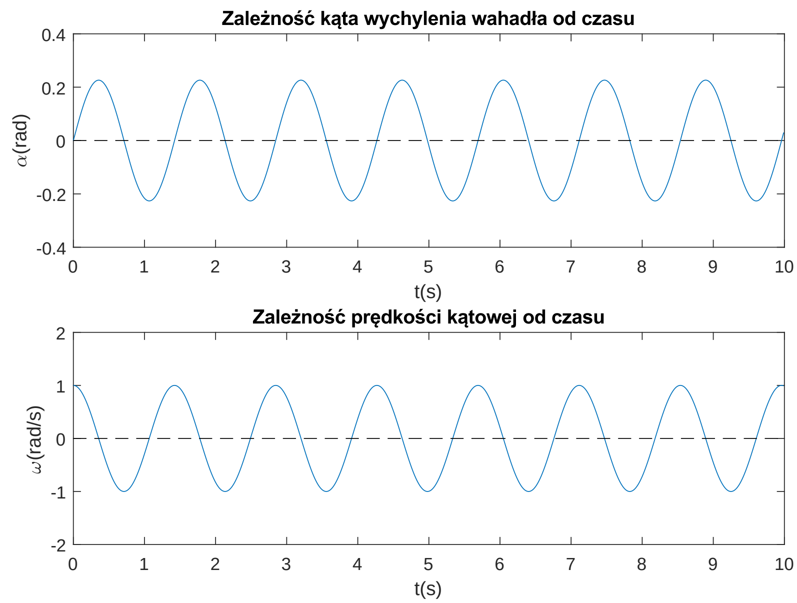
Dodatkowo, w celach prezentacyjnych napisałem funkcję *drawPlots*, która przyjmuje te same parametry co funkcja *wahadlo* i rysuje zależności wychylenia oraz prędkości kątowej od czasu.

## 5 Przykłady i wnioski

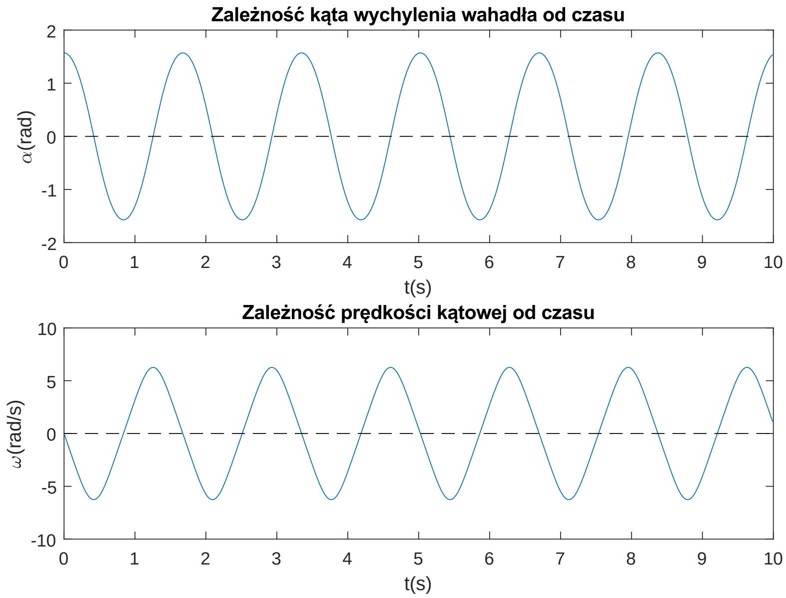
### 5.1 Działanie dla przykładowych danych

Sprawdźmy, czy funkcja zwróci wyniki zgodne z oczekiwaniami. Weźmy:

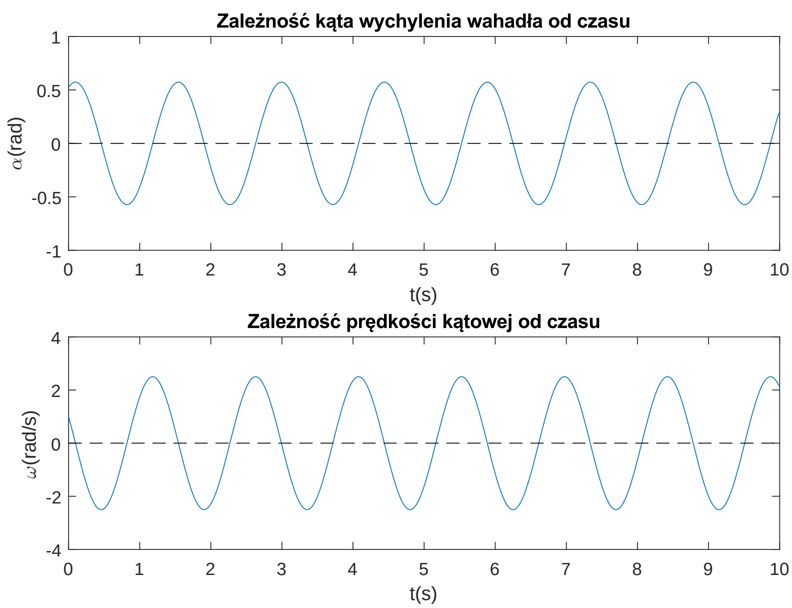
- $l = 0.5m$, $t = 10s$, $n = 1000$, $\alpha_0 = 0$, $\omega_0 = 1\frac{rad}{s}$




- $l = 0.5m$, $t = 10s$, $n = 1000$, $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$, $\omega_0 = 0\frac{rad}{s}$



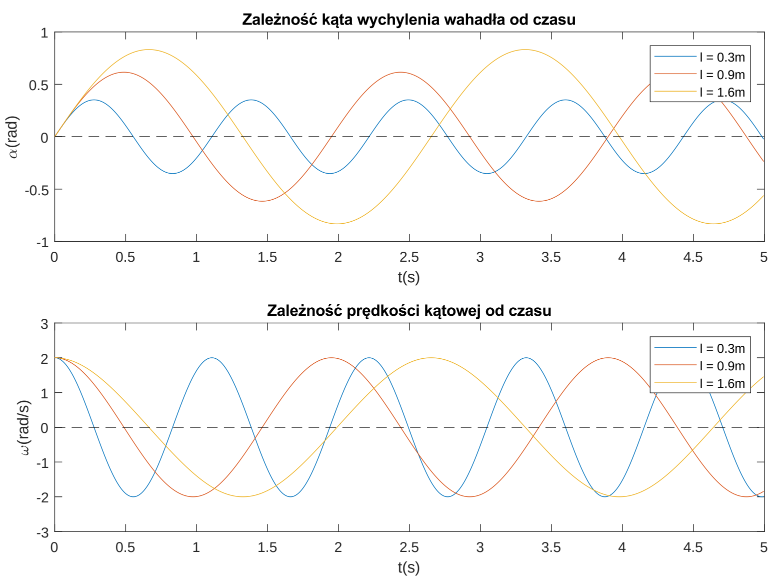

- $l = 0.5m$, $t = 10s$, $n = 1000$, $\alpha_0 = \frac{\pi}{6}$, $\omega_0 = 0.5\frac{rad}{s}$



Otrzymujemy wyniki zgodne z oczekiwaniami - wahadło osiąga prędkość maksymalna dla wychylenia równego 0; przy maksymalnym wychyleniu prędkość wynosi 0. Ruch jest okresowy - $t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, w naszym przypadku $t \simeq 1.41$. Wartość ta pokrywa się z wartością wyznaczoną poprzez obserwację wykresów.

## 5.2 Wpływ zmiany długości nici na ruch wahadła

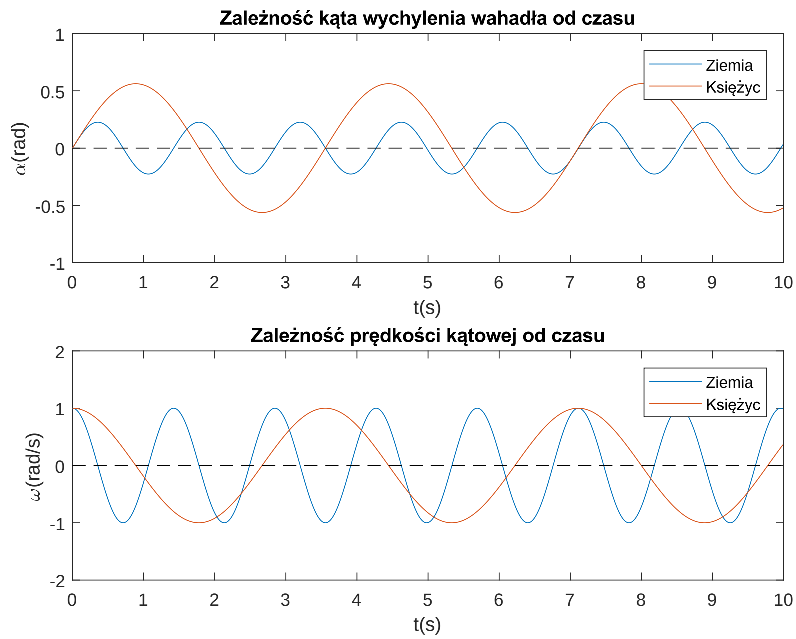
Sprawdzimy jak zwiększanie długości wahadła wpłynie na zachowanie. Weźmy 3 długości - $0.3m$, $0.9m$ i $1.6m$.




Obserwujemy, że wraz ze wzrostem długości wahadła wydłuża się jego okres. Wzrasta również jego maksymalne wychylenie.

## 5.3 Wahadło na Księżycu

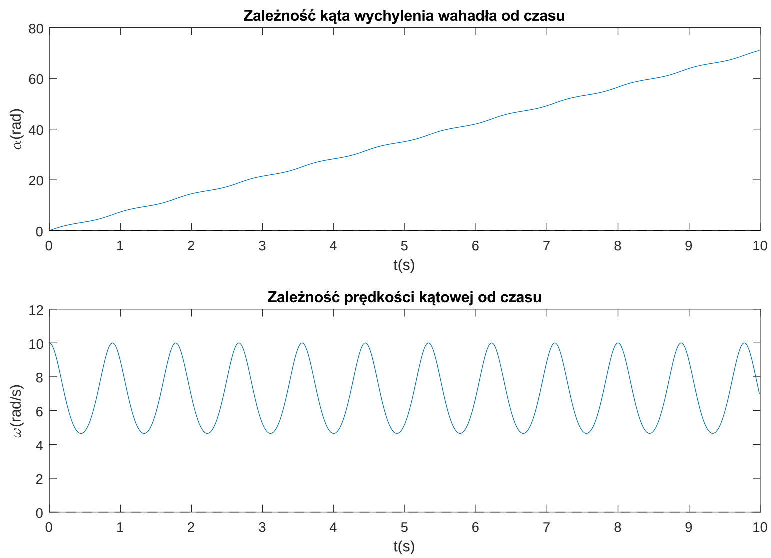
Na Księżycu stała grawitacji $g$ jest mniejsza niż na Ziemi - wynosi około 1.625. Porównajmy zachowania wahadła na Ziemi i Księżycu. Weźmy parametry wahadła z sekcji 5.1.




Jak widać okres wahadła na Księżycu jest znacznie większy niż na Ziemi - wynosi około $3.4853s$. Również maksymalny kat wychylenia wahadła zwiększa się znacząco dla warunku początkowego podanego dla wychylenia 0.

## 5.4 Duża prędkość początkowa

Na koniec ustalmy wysoką prędkość początkową - $\omega = 10\frac{rad}{s}$.




Obserwujemy obracanie się wahadła dookoła punktu zaczepienia. Sytuacja ta jest możliwa wyłącznie dlatego, ze nie bierzemy pod uwagę oporów ruchu - w rzeczywistości takie obroty zostałyby szybko stłumione.