Sprawozdanie
Metody numeryczne 2
Temat 3, Zadanie nr 1

Mateusz Śliwakowski, F4

20/11/2018

1 Treść zadania

Obliczanie całek $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, gdzie $D = [a,b] \times [c,d]$ złożonymi kwadraturami trapezów ze względu na każdą zmienną.

2 Opis metody

Zaczniemy od rozpisania ogólnego przypadku liczenia całki na prostokącie, a następnie zastosujemy kwadraturę trapezów ze względu na każdą zmienną.

Mamy dane: $f(x,y)$, $D = [a,b] \times [c,d]$, gdzie $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ oraz $n,m \in \mathbb{N}$ - ilość podziałów wzdłuż osi odpowiednio OX, OY. Zdefiniujmy podziały:

$$x_i = a + h_1 i, \text{ gdzie } h_1 = \frac{b-a}{n},\ i = 0,\ldots,n$$

$$y_j = c + h_2 j, \text{ gdzie } h_2 = \frac{d-c}{m},\ j = 0,\ldots,m$$

Załóżmy, że S_1 i S_2 są danymi kwadraturami dla funkcji jednej zmiennej g.

$$S_1(g) = \Sigma_{I=i=0}^{n} A_i g(x_i) = \int_a^b g(x)dx$$

$$S_2(g) = \Sigma_{j=0}^{m} B_j g(y_j) = \int_c^d g(y)dy$$

Zastosujemy S_1 do funkcji $f = f(x,y)$, ze względu na x.

$$S_1(f)(y) = \Sigma_{i=0}^{n} A_i f(x_i, y)$$

a następnie S_2, ze względu na y

$$S_2(S_1(f)) = \Sigma_{j=0}^{m} B_j (\Sigma_{i=0}^{n} A_i f(x_i, y_j)) = \Sigma_{i=0}^{n} \Sigma_{j=0}^{m} \underbrace{A_i B_j}_{C_{ij}} f(x_i, y_j)$$

Kwadratura złożona trapezów ma postać:

$$S_1(g) = \frac{h_1}{2}[g(a) + g(b) + 2\Sigma_{i=1}^{n-1} g(x_i)]$$

Stosując kwadraturę trapezów ze względu na każdą ze zmiennych otrzymamy macierz współczynników:

$$\{C_{ij}\} = \{A_i B_j\} = \frac{h_1}{h_2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{h_2}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{h1h_2}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & \ldots & 4 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 4 & 4 & \ldots & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

3 Warunki i założenia

1. $f(x, y)$ jest całkowalna na obszarze D.
2. Podany obszar D jest poprawny, tj. $a < b$ oraz $c < d$.
3. Liczba podziałów jest poprawna, tj. $n > 0$ oraz $m > 0$, liczby te są całkowite.

4 Implementacja metody

```
function result = trapezeInterpolation(fun, a, b, c, d
    , n, m)
```

Parametry wejściowe:

- fun - Uchwyt do funkcji dwóch zmiennych, z której ma być policzona całka,
- a, b, c, d - liczby rzeczywiste, definiujące obszar D,
- n, m - ilość podziałów odpowiednio wzdłuż osi OX i OY.

Parametry wyjściowe:

- $result$ - zadana całka.

Na początku definiujemy szerokości pojedynczych podziałów, oraz wyznaczamy wektory punktów podziału. Obliczenie całki następuje w podwójnej pętli *for*, jak w rozdziale *Opis metody*. Jako że macierz C nie ma skomplikowanej postaci, to poszczególne elementy dostajemy przy użyciu pomocniczej funkcji *getCoefficient*, przyjmującej indeksy x, y oraz liczbę podziałów wzdłuż osi OX oraz OY.

5 Przykłady i wnioski

Testy zdefiniowane są w pliku *test.m*. Prezentowane ramki będą zawierały sformatowane wyjście funkcji *compareMatlab*. Funkcja ta porównuje działanie programu z obliczeniami uzyskanymi za pomocą wbudowanej funkcji Matlaba *integral2* oraz z wynikiem działania pakietu symbolicznego.

1. Rozpocznijmy testy od funkcji stałej, która powinna dać wynik dokładny.

$@(x, y)1$
$D = [1, 3] \times [1, 3]$
$n = 10, m = 10$
$result = 4$
$Matlab = 4$
$Symbolic = 4$

2. Kolejna funkcja, która powinna dać wynik dokładny to funkcja liniowa.

$@(x, y)2x + 3y$
$D = [1, 3] \times [1, 3]$
$n = 10, m = 10$
$result = 40$
$Matlab = 40$
$Symbolic = 40$

3. Przybliżając całkę z funkcji kwadratowej powinniśmy otrzymać pierwsze błędy.

$@(x, y) - 3. * x. * x + 2. * y. * y + 3. * x. * y - 8$
$D = [1, 3] \times [1, 3]$
$n = 10, m = 10$
$result = 1.36$
$Matlab = -1.333333333$
$Symbolic = -1.333333333$

4. Sprawdźmy funkcję trygonometryczną. Tym razem podzielimy obszar na więcej części.

$@(x, y)sin(x). * cos(y)$
$D = [1, 3] \times [1, 3]$
$n = 500, m = 500$
$result = -1.071740602$
$Matlab = -1.07174346$
$Symbolic = -1.07174346$

Błąd obliczeń nie jest duży, lecz podział obszaru był gesty oraz wykonanie funkcji zajmuje więcej czasu niż wykonanie *integral2*.

5. Następnie zbadamy współczynnik zbieżności metody trapezów. Weźmy $f(x, y) = 2. * x. * x. * y - 3. * cos(x. * y) + 3$ - złożenie funkcji wielomianowej i trygonometrycznej. Zaczynając od 10 będziemy zwiększać gęstość

obszaru cztery razy w każdej iteracji.

$n = 10$; $error = 0.062626$
$n = 20$; $error = 0.015669$
$n = 40$; $error = 0.0039181$
$n = 80$; $error = 0.00097956$
$n = 160$; $error = 0.00024489$
$n = 320$; $error = 6.1224e-05$
$n = 640$; $error = 1.5306e-05$
$n = 1280$; $error = 3.8265e-06$

Stosunki kolejnych błędów:
3.9968
3.9992
3.9998
4.0000
4.0000
4.0000
4.0000

Za każdym razem, gdy zwiększamy gęstość obszaru cztery razy, błąd zmniejsza się cztery razy, zatem współczynnik zbieżności metody wynosi 1 - nie jest to zbyt wysoka wartość.

6. Na koniec zobaczmy jak program zachowa się dla funkcji niecałkowalnej na danym obszarze.

$@(x, y)tan(x./y)$
$D = [-1, 1] \times [-1, 1]$
$n = 5000, m = 5000$
$result = NaN$
$Matlab = -0.0007325434555$
Symbolic function cannot compute result

Jak widzimy wynik działania naszego programu nie jest liczbą. Pakiet symboliczny również nie zwrócił wyniku. Co ciekawe, wynik będący liczbą otrzymaliśmy przy użyciu funkcji *integral2*. Nierozważny użytkownik, bez analizy wyglądu funkcji mógłby uznać go za poprawny.

Analizując powyższe przykłady można dojść do wniosku, że złożona kwadratura trapezów nie jest najlepszą metoda obliczania całki z funkcji dwóch zmiennych. Jednak warto zauważyć, że jest ona bardzo prosta w założeniach oraz implementacji, także może posłużyć jako punkt wyjścia dla bardziej skomplikowanych metod.