Sprawozdanie

Metody numeryczne 2

Temat 4, Zadanie nr 12

Mateusz Śliwakowski, F4

4/12/2018

1 Treść zadania

Wzory empiryczne. Baza: $1, x, y, x^2y^2$. Tablicowanie błędów w punktach pomiarowych oraz obliczanie błędu średniokwadratowego. Punkty pomiarowe wybieramy z prostokąta $[a, b] \times [c, d]$.

2 Opis metody

Dana jest baza funkcji: $1, x, y, x^2y^2$, nazwijmy je g_1, g_2, g_3, g_4. Za ich pomocą chcemy aproksymować daną funkcję f funkcją $f^* = \sum_{j=1}^{4} a_j g_j$ w taki sposób, aby $H = \sum_{i=1}^{N} (f(x_i) - f^*(x_i))^2 \longrightarrow min$. Zadanie sprowadza się do znalezienia współczynników $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$. N to liczba punktów pomiarowych. Najczęściej powyższej metody używa się, gdy do danych zebranych doświadczalnie chcemy jak najlepiej dopasować krzywą.

Chcemy znaleźć minimum lokalne funkcji H:

$$\frac{\partial H}{\partial a_k}(a_1, \ldots, a_4) \sum_{i=1}^{N} 2(f(x_i) - \sum_{j=1}^{4} a_j g_j(x_i))(0 - g_k(x_i)) = 0$$

$$-\sum_{i=1}^{N} f(x_i) g_k(x_i) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{4} a_j g_j(x_i) g_k(x_i) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{4} a_j \sum_{i=1}^{N} g_j(x_i) g_k(x_i) = \sum_{i=1}^{N} f(x_i) g_k(x_i), \text{ gdzie } k = 1, \ldots, 4$$

Otrzymaliśmy układ równań normalnych:

$$\sum_{j=1}^{4} a_j < g_j, g_k > = < f, g_k > , \text{ gdzie } k = 1, \ldots, 4$$

Układ ten można zapisać jako $Ga = d$, gdzie:

- G jest macierzą Gramma ($G_{jk} = < g_j, g_k >, j, k = 1, \ldots, n$)
- $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$
- $d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}$, $d_k = < f, g_k >, k = 1, \ldots, 4$

Macierz Grama można zapisać jako $G = M^T M$, gdzie

$$M = \begin{bmatrix} g_1(x_1) & g_2(x_1) & g_3(x_1) & g_4(x_1) \\ g_1(x_2) & g_2(x_2) & g_3(x_2) & g_4(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_1(x_n) & g_2(x_n) & g_3(x_n) & g_4(x_n) \end{bmatrix}$$

A wektor $d = M^T F$, gdzie $F = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$.

3 Warunki i założenia

1. Punkty pomiarowe są generowane losowo z prostokąta $[a, b] \times [c, d]$.
2. Dane a, b, c, d, n są podane prawidłowo.
3. f jest ograniczona na danym obszarze.

4 Implementacja

Funkcja realizująca założenia zadania to *lsfApproximation*.

```
function [fApprox, tab, err] = lsfApproximation(f,n,a,
    b,c,d)
```

Parametry wejściowe:

- f - uchwyt do aproksymowanej funkcji dwóch zmiennych,
- n - ilość punktów pomiarowych,
- a, b, c, d - liczby rzeczywiste, definiujące prostokąt $[a, b] \times [c, d]$.

Parametry wyjściowe:

- *fApprox* - uchwyt wynikowej funkcji (f^*),
- *tab* - tablica wynikowa zawierająca w kolumnach kolejno: współrzędne x oraz y punktu, wartość funkcji aproksymowanej w tym punkcie, wartość funkcji wynikowej, błąd,
- *err* - wartość błędu średniokwadratowego.

W implementacji postępujemy zgodnie z algorytmem przedstawionym w punkcie *Opis metody*. Najpierw definiujemy funkcje z bazy i losujemy punkty pomiarowe. Potem przechodzimy do wyznaczenia macierzy kolejno: M, G, F, d, a korzystając z operatorów Matlaba. Na koniec wszystkie wyniki tablicujemy oraz obliczamy błąd średniokwadratowy.

5 Przykłady i wnioski

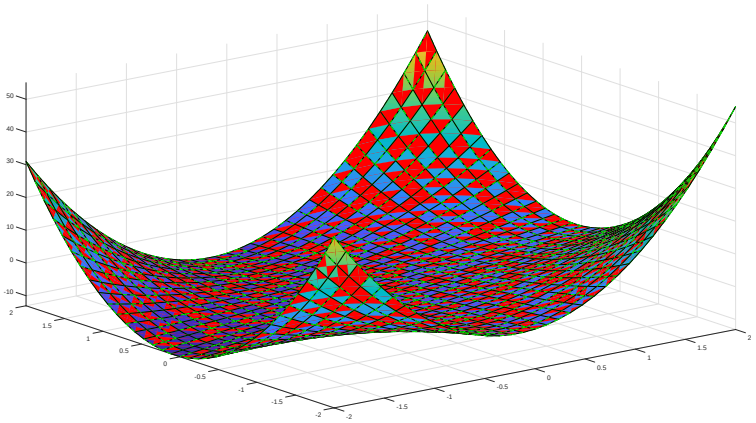
Na potrzeby prezentacji przykładów posłużymy się pomocniczą funkcją *presentResult*, która wyświetla funkcje aproksymowaną i wynikową na jednym wykresie oraz konstruuje tablicę wynikową w przystępnym formacie.

5.1 Funkcja z bazy

Rozpocznijmy od sprawdzenia aproksymacji dla funkcji z bazy.

```
f = @(x,y) -5 + 4.*x - 2.*y + 3.*y.*y.*y.*y.*x.*x.*x.*
    x;
presentResult(f,10,-2,2,-2,2);
```

Otrzymujemy wynik z dokładnością maszynową. Na wykresie funkcja aproksymowana i wynikowa pokrywają się.



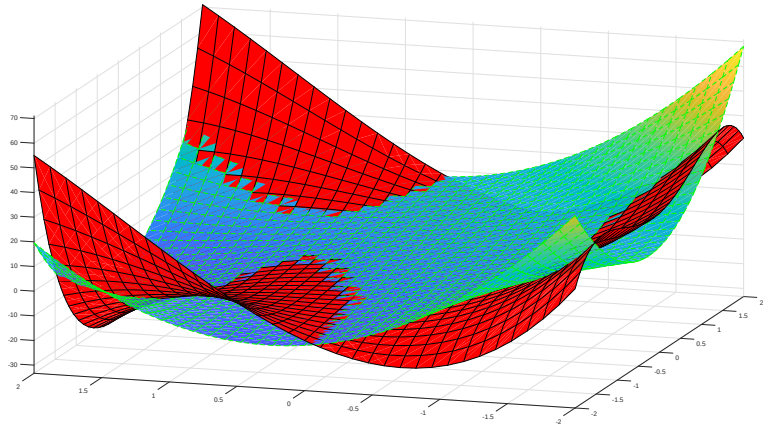
Wartość błędu średniokwadratowego wynosi $2.0583e-15$. Porównywalne rezultaty otrzymujemy dla innych funkcji z bazy.

5.2 Funkcja wielomianowa wyższego stopnia

Następnie sprawdzimy działanie dla funkcji wielomianowej wyższego stopnia.

```
f = @(x,y) -5 + 4.*x - 2.*y + 3.*y.*y.*x.*x + 1.5.*x.*
    x.*x.*x.*y - 3.*y.*y.*y;
presentResult(f,10,-2,2,-2,2);
```

Kolorem czerwonym zaznaczona jest funkcja aproksymowana, zielonym - wynikowa.

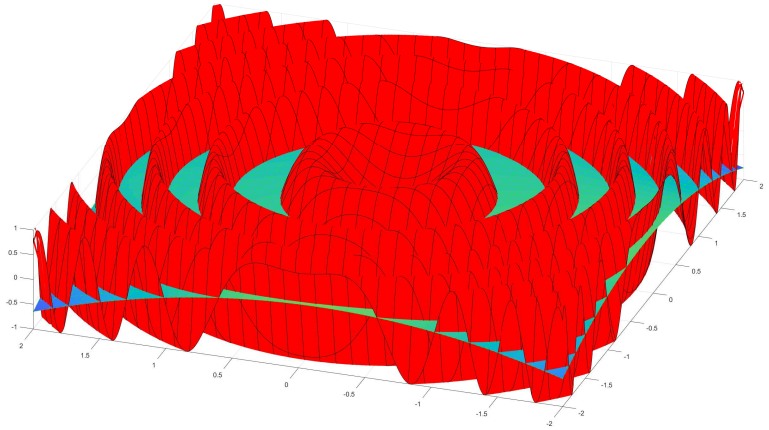


Błąd średniokwadratowy wynosi 1.5181 - funkcje z bazy nie pozwalają oddać kształtu danej funkcji, zwłaszcza gdy jej pochodna osiąga duże wartości.

5.3 Funkcja trygonometryczna, silnie oscylująca

```
f = @(x,y) sin(5.*(x.*x+y.*y));
presentResult(f,40,-2,2,-2,2);
```

Za pomocą danej bazy nie jest możliwe dokładnie odwzorować kształtu tego typu funkcji. Funkcja przyjmuje intuicyjnie oczekiwany kształt - przechodzi w przybliżeniu przez średnią wartość funkcji.



Błąd średniokwadratowy w tym przypadku wynosi 0.76338.

5.4 Badanie wpływu ilości punktów pomiarowych na błąd średniokwadratowy

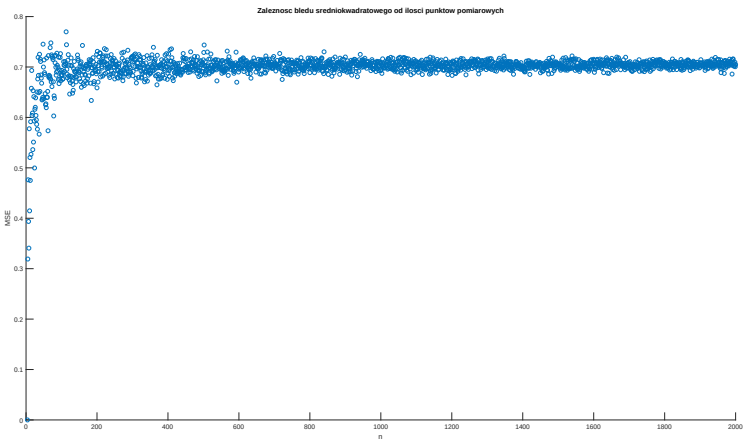
Weźmy funkcję f:

```
f = @(x,y) sin(5.*(x.*x+y.*y));
```

Wykonamy poniższy skrypt i na podstawie wynikowej tabeli utworzymy wykres.

```
errors = zeros(1,1996);
for i = 4:1:2000
[~, ~, errors(i-3)] = lsfApproximation(f,i,-2,2,-2,2);
end
```

Wykres wygląda następująco:



Można zauważyć, że wartości błędu kwadratowego zbiegają do pewnej wartości - jest to wartość błędu dla aproksymacji średniokwadratowej ciągłej. Dla $n = 4$ wartość błędu średniokwadratowego wynosi 0 - mamy wtedy faktycznie doczynienia z zadaniem interpolacji, czyli funkcja wynikowa w punktach pomiarowych przyjmuje wartości dokładne.

5.5 Wnioski końcowe

- Dokładność maszynową osiągamy tylko dla funkcji z bazy.
- Dla złożonych funkcji nie jesteśmy w stanie oddać dokładnego kształtu za pomocą danej bazy.
- Funkcja wynikowa przyjmuje intuicyjnie oczekiwany kształt.
- Wraz ze wzrostem ilości punktów pomiarowych wartość błędu średniokwadratowego zbliża się do wartości błędu dla aproksymacji średniokwadratowej ciągłej.