第二次技术文档

刘畅 15061183

2018 年 4 月 30 日

1 程序说明

使用语言： JAVA

编程环境： Windows 8.1 + Eclipse Neon.3 Release (4.6.3)

相关库：

java.awt

java.io

java.util

javax.imageio

主要方法：

方法名	作用
double[][] DCTProcessor::CosineTransformation(String outputLabel) ..	离散余弦变换DCT
FourierComplex[][] FFTProcessor::fourierTransformation(String outputlabel) ..	快速傅里叶变换FFT
BufferedImage FFTProcessor::fourierInverse(String outputLabel, FourierComplex[][] sigs) ..	快速傅里叶逆变换IFFT
FourierComplex[][] FrequencyFilter::filter(FourierComplex[][] sigs, int radius, int mode) ..	高\低频滤波，sigs为原信号，redius为滤波范围，mode值取0或1表示滤波类型

2 任务一：快速傅里叶变换FFT

2.1 一阶FFT

根据DFT，设原离散信号为x，转变后的信号为X，信号的长度为N，则有

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j} \frac{2\pi k}{N} n,\ k = 0, 1, \ldots, N-1$$

假定$N \geq 2$，令$W_N^l = e^{-j\frac{2\pi l}{N}}$，则上公式可以表示成

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^n k$$

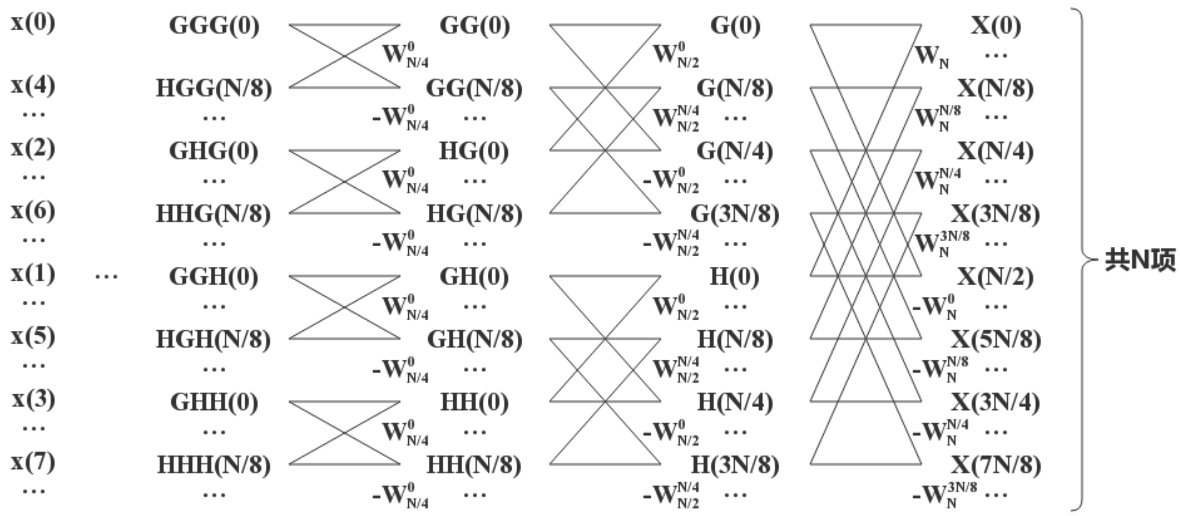


图 1: FFT蝶形结构

将上公式进行奇偶拆分，用$2r$表示偶数，$2r+1$表示奇数，$r=0,1,\ldots,N/2-1$，则有

$$X(k)=\sum_{r=0}^{N/2-1}x(2r)W_{N/2}^{rk}+W_N^k\sum_{r=0}^{N/2-1}x(2r+1)W_{N/2}^{rk}$$

令 $G(k)=\sum_{r=0}^{N/2-1}x(2r)W_{N/2}^{rk}$，$H(k)=\sum_{r=0}^{N/2-1}x(2r+1)W_{N/2}^{rk}$，则

$$X(k)=G(k)+W_N^kH(k)$$

由于$G(k)$与$H(k)$周期皆为$N/2$，因此有

$$X(k)=\begin{cases}G(k)+W_N^kH(k) & ,0\le k<N/2\\ G(k-N/2)-W_N^{k-N/2}H(k-N/2) & ,N/2\le k<N\end{cases}$$

以$G(k)$为例，假定$N\ge 4$，同样可以进行类似的拆分，转化为由$GG(k)$和$GH(k)$组成的表达式

$$\begin{aligned}G(k)&=\sum_{r=0}^{N/4-1}x(4r)W_{N/4}^{rk}+\sum_{r=0}^{N/4-1}x(4r+2)W_{N/4}^{rk}\\&=GG(k)+W_{N/2}^{rk}GH(k)\\&=\begin{cases}GG(k)+W_{N/2}^kGH(k) & ,0\le k<N/4\\ GG(k-N/4)-W_{N/2}^{k-N/4}GH(k-N/4) & ,N/4\le k<N/2\end{cases}\end{aligned}$$

以此类推，通过不断的奇偶拆分，最终可以形成由x至X的蝶形结构，如图1所示，这里假定$N\ge 8$：

2.2 图像FFT

由于需要处理的图像是一种二维数字信号，因此上述FFT算法需要扩展到二维。这里采用的方法是将图像看成一个二维矩阵，首先对各行进行FFT处理，之后再对各列进行FFT处理，这样就将一维FFT扩展到了

二维。而且需要注意的是，FFT算法能够进行的前提是信号长度N为2的正整数幂，因此图像需要进行周期延拓，最终处理后矩阵长、宽皆变为2的正整数幂。

2.3 生成频域图像

处理后的矩阵为复数矩阵，根据以下公式求出幅度谱$|F(u,v)|$和相位谱$\phi(u,v)$:

$$|F(u,v)| = \sqrt{R^2(u,v) + I^2(u,v)}$$

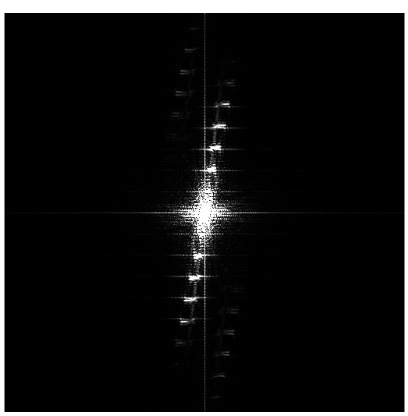
$$\phi(u,v) = \tan^{-1}\frac{I(u,v)}{R(u,v)}$$

计算后矩阵上各个元素的幅度差异较大，存在少量高幅信号和大量低幅信号，若将幅度线性映射至灰度，生成的幅度谱信息量较少。为解决该问题，同时保证滤波后频谱图像效果的一致性，这里对幅度设定了阈值T，对于大于T的幅度，其映射后的灰度为255；对于小于T的，部分在$[0,255]$范围内做线性映射，这里用$f(u,v)$表示灰度，假设最低幅度为$F_{\min}$，最高幅度为$F_{\max}$，则有

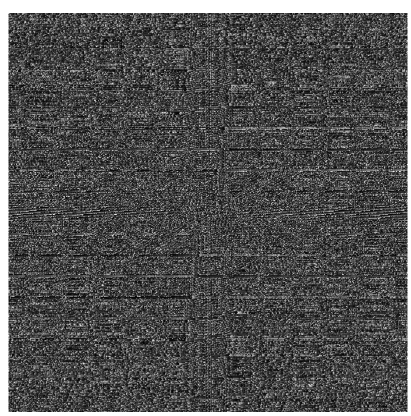
$$f(u,v) = \begin{cases} \frac{255(|F(u,v)|-F_{\min})}{\min\{F_{\max},T\}-F_{\min}} & ,|F(u,v)| \le T \\ 255 & ,|F(u,v)| > t \end{cases}$$

在不对相位谱进行平移的情况下，亮点主要集中于四角，为了便于观察，需要将亮点移动至图像中心。

(a) 原图



(b) 幅度谱



(c) 相位谱

图 2: 某24岁学生FFT变换后效果

2.4 逆变换IFFT

离散傅里叶反变换IDFT公式为：

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi k}{N}n}$$

与DFT不同的是IDFT需要额外乘以常量$\frac{e^{-1}}{N}$，因此对于IFFT可以复用上述蝶形求解方式，无需额外实现。

由于逆变换前的矩阵为延拓后的结果，因此需要根据图像实际大小，对逆变换后的结果进行截取。同时，理论上逆变换后矩阵的元素应为实数，但由于在浮点数计算的过程中存在精度丢失的情况，可能会导致元素虚部不为0，或者实部大小不在$[0, 255]$范围内，此时应当将实部线性压缩，保证灰度的合法性。

2.5 滤波

对于平移后的频谱，设图像中央为原点，截止频率D_0，则理想低通滤波器转移函数为：

$$H(u,v) = \begin{cases} 1 & ,\sqrt{u^2+v^2} < D_0 \\ 0 & ,\sqrt{u^2+v^2} \geq D_0 \end{cases}$$

理想高通滤波器转移函数为：

$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & ,\sqrt{u^2+v^2} < D_0 \\ 1 & ,\sqrt{u^2+v^2} \geq D_0 \end{cases}$$

3 任务二：离散余弦变换DCT

3.1 一维DCT

设$k = 1, 2, \ldots, N-1$一维DCT定义如下：

$$X(k) = C(k)\sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{n=0}^{N-1}\cos\frac{(2n+1)k\pi}{2N},\ C(k) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & ,u=0 \\ 1 & ,\text{other} \end{cases}$$

3.2 图像DCT

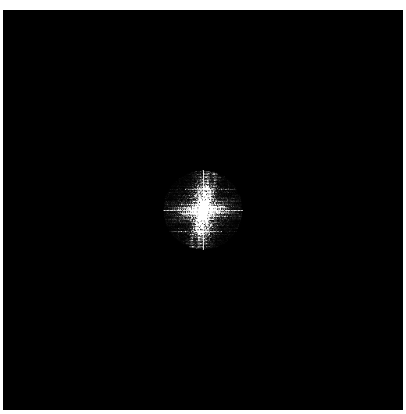
同FFT一样，二维DCT同样可以通过横纵两次一维DCT来完成，和FFT不同的是无需对信号进行延拓，且结果为实数，因此最终得到的是一个和原信号大小相同的实数矩阵。　　最终的结果主要信息集中在画面的左上角，为了显示更多信息，这里同样设置了一个阈值T，采用和FFT同样的方法进行从信号到灰度的线性映射。

(a) 原图

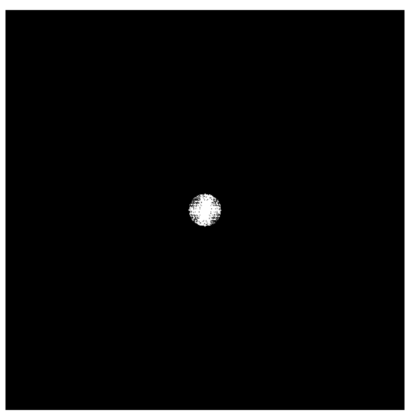
(b) $D_0 = 50$图像

(c) $D_0 = 20$图像

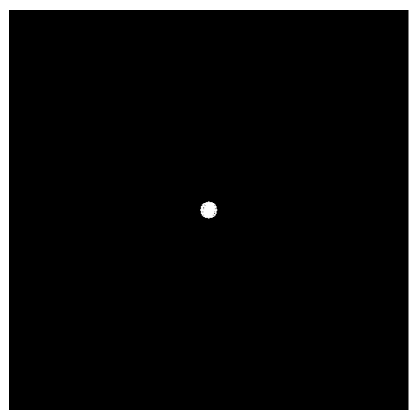
(d) $D_0 = 10$图像



(e) $D_0 = 50$幅度谱



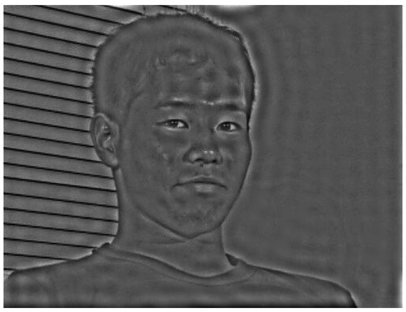
(f) $D_0 = 20$幅度谱



(g) $D_0 = 10$幅度谱

图 3: 低通滤波后效果

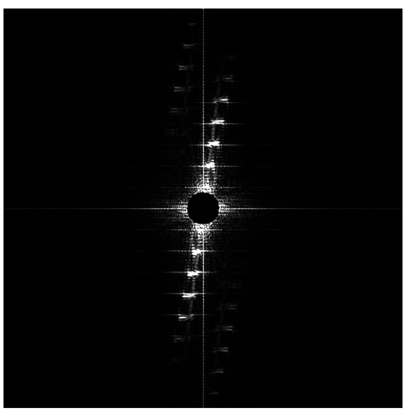
(a) 原图



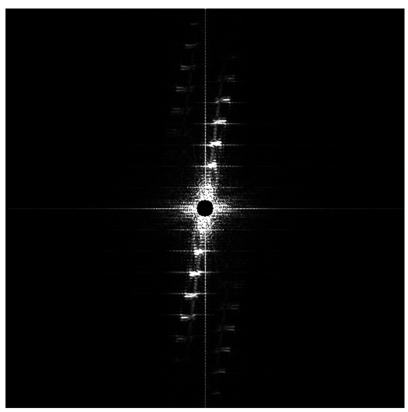
(b) $D_0 = 20$图像

(c) $D_0 = 10$图像

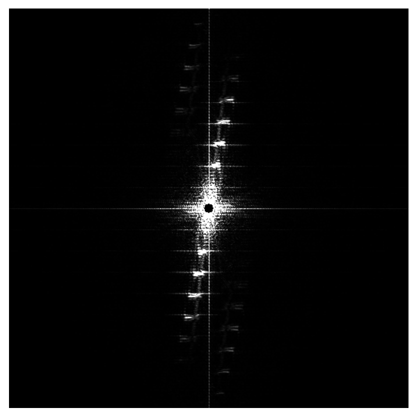
(d) $D_0 = 5$图像



(e) $D_0 = 20$幅度谱



(f) $D_0 = 10$幅度谱



(g) $D_0 = 5$幅度谱

图 4: 高通滤波后效果

(a) 原图

(b) DCT频域图

图 5: DCT变换后效果