第七章 Z变换

(第二章回顾)

$H(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n}$ — Z变换.

记作 $h[n] \xrightarrow{Z} H(z)$. $Z[h[n]]=H(z)$

那么,我们有:

$a^n \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow H(a)\cdot a^n$

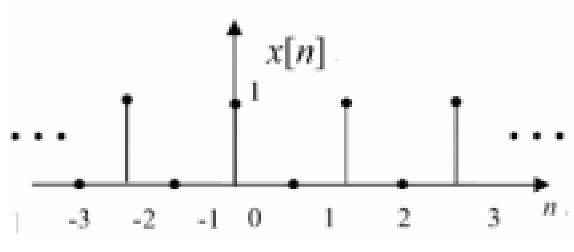
$a^n \xrightarrow{LTI} H(a)\cdot a^n$

证: $y[n]=a^n * h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]a^{n-k} = a^n\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]a^{-k} = H(a)\cdot a^n$

特例:

若 $a=e^{jw_0n}$, 那么 $e^{jw_0n} \xrightarrow{LTI} H(e^{jw_0})\cdot e^{jw_0n}$

特例: $1=1^n \xrightarrow{LTI} H(1)1^n = H(1)$



$$=\frac{1^n+(-1)^n}{2} \xrightarrow{LTI} \frac{1}{2}H(1)+\frac{1}{2}H(-1)(-1)^n$$

正式定义:

$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$.

设 $z=re^{jw}$,

那么 $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x[n]r^{-n})e^{-jwn} = F[x[n]r^{-n}]$

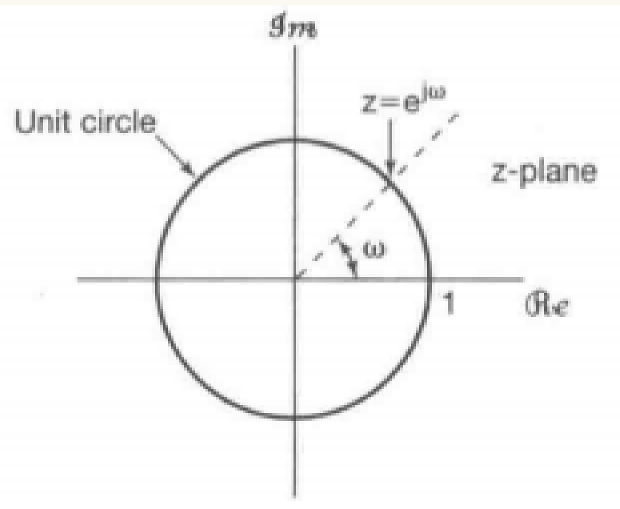


Figure 10.1 Complex z-plane. The z-transform reduces to the Fourier transform for values of z on the unit circle.

离散傅里叶变换 (DFT) 是Z变换在单位圆上的一个特例,即$r=1$,或$z=e^{j\omega}$

Z逆变换

∵ $X(z)=F[x[n]r^{-n}]$

∴ $x[n]r^{-n}=F^{-1}[X(z)]$

$= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(z)\cdot e^{jwn}dw$

由 $z=re^{jw}$ ∴ $dz=jre^{jw}\cdot dw$. 代入:

$x[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}dz$

例7.1:

$$x[n]=a^nu[n]\xrightarrow{Z}X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z|>|a|$$

解: $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] z^{-n}$

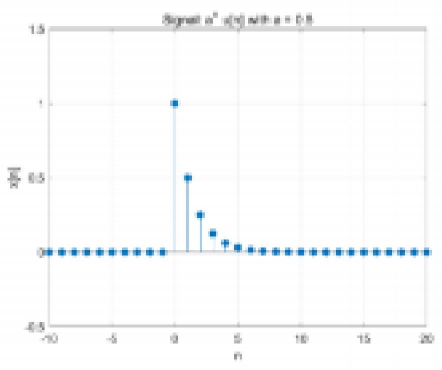
$= \sum_{n=0}^{+\infty}(az^{-1})^n = \lim_{N\to+\infty}\frac{1-(az^{-1})^N}{1-az^{-1}}$

讨论:

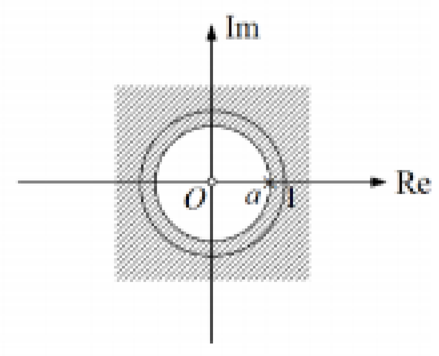
(1) 当$|az^{-1}|>1$时,或$|z|<|a|$时, $\lim_{N\to+\infty}\frac{1-(az^{-1})^N}{1-az^{-1}}$不收敛。

(2) 当$|az^{-1}|=1$时,或$|z|=|a|$时, $\lim_{N\to+\infty}\frac{1-(az^{-1})^N}{1-az^{-1}} = \frac{1-e^{j(\omega_a-\omega_z)N}}{1-az^{-1}}$。当 $\omega_z\neq\omega_a$ 以上极限也不收敛。

(3) 当$|az^{-1}|<1$时,或$|z|>|a|$时, $X(z)=\lim_{N\to+\infty}\frac{1-(az^{-1})^N}{1-az^{-1}} = \frac{1}{1-az^{-1}}$。



(a) $x[n]=a^nu[n]$的图像



(b) $X(z)$的收敛域和零极点

例 7.2:

$$x[n]=-a^nu[-n-1]\xrightarrow{Z}X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z|<|a|$$

推导:

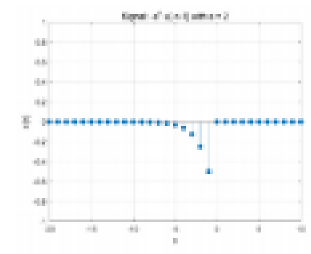
$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} -a^nu[-n-1]z^{-n}=-\sum_{n=-\infty}^{-1}(az^{-1})^n$$

$$=-\sum_{n=1}^{+\infty}(a^{-1}z)^n=-\lim_{N\to+\infty}\frac{a^{-1}z-(a^{-1}z)^N}{1-a^{-1}z}$$

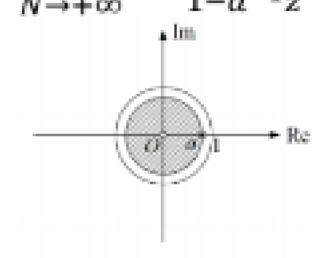
(1) 当$|a^{-1}z|>1$时,或$|z|>|a|$时, $-\lim_{N\to+\infty}\frac{a^{-1}z-(a^{-1}z)^N}{1-a^{-1}z}$不收敛。

(2) 当$|a^{-1}z|=1$,或$|z|=|a|$时, 如果$\omega_z\neq\omega_a$, $-\lim_{N\to+\infty}\frac{a^{-1}z-(a^{-1}z)^N}{1-a^{-1}z}$不收敛。

(3) 当$|a^{-1}z|<1$时,或$|z|<|a|$时, $X(z)=-\lim_{N\to+\infty}\frac{a^{-1}z-(a^{-1}z)^N}{1-a^{-1}z}=-\frac{a^{-1}z}{1-a^{-1}z}=\frac{1}{1-az^{-1}}$。



(a) $x[n]=-a^nu[-n-1]$的图像



(b) $X(z)$的收敛域和零极点

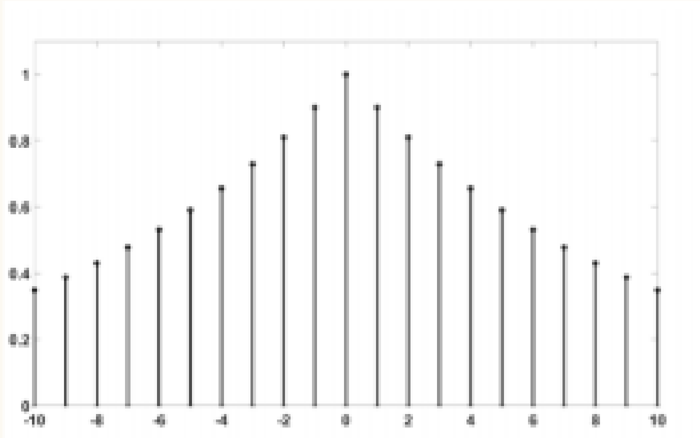
Tips: $z=e^{jw}$. $a^nu[n]\xrightarrow{F}\frac{1}{1-ae^{-jw}}$ ($|a|<1$)

因此,有了如下公式:

$$x[n]=u[n]\xrightarrow{Z}X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}, \quad |z|>1$$

$$x[n]=-u[-n-1]\xrightarrow{Z}X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}, |z|<1$$

例: $x[n]=b^{|n|}$, $0<b<1$.



(a) $x[n]=b^{|n|}$的图像

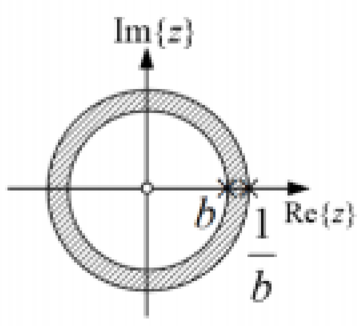
解: $x[n]=b^{|n|}=b^nu[n]+b^{-n}u[-n-1]$

$\downarrow Z \qquad \downarrow Z$

$\frac{1}{1-bz^{-1}} - \frac{1}{1-b^{-1}z^{-1}}$

$|z|>|b|$, $|z|<|b^{-1}|$

∴ $X(z)=\frac{1}{1-bz^{-1}}-\frac{1}{1-b^{-1}z^{-1}}$, $b<|z|<b^{-1}$



(b) $X(z)$的收敛域和零极点

例: $x[n]=a^n\cos(w_0n)u[n]$

解: $x[n]=a^nu[n]\cdot\frac{1}{2}(e^{jw_0n}+e^{-jw_0n})$

$=\frac{1}{2}(ae^{jw_0})^nu[n]+\frac{1}{2}(ae^{-jw_0})^nu[n]$

∴ $X(z)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1-ae^{jw_0}z^{-1}}+\frac{1}{1-ae^{-jw_0}z^{-1}}\right)$, $|z|>|a|$

推导: $|z|>|ae^{jw_0}|=|a|$

同理，

例： 如果

$$x[n] = a^n \sin(\omega_0 n)\, u[n]$$

计算$X(z)$。

解：

$$x[n] = \frac{1}{2j}(ae^{j\omega_0})^n u[n] - \frac{1}{2j}(ae^{-j\omega_0})^n u[n]$$

所以

$$X(z) = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{1-ae^{j\omega_0}z^{-1}} - \frac{1}{1-ae^{-j\omega_0}z^{-1}}\right), \qquad |z| > |a|$$

例：$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) u[n]$

解：$a = \frac{1}{3}$，$w_0 = \frac{\pi}{4}$

$\therefore X(z) = \frac{1}{2j}\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{j\frac{\pi}{4}}z^{-1}} - \frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{4}}z^{-1}}\right)$，$|z| > \frac{1}{3}$

例 7.4：

$$x[n] = \delta[n] \xrightarrow{Z} X(z) = 1, \text{收敛域为整个Z平面}$$

证明：$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] z^{-n} = 1 \cdot z^{-0} = 1$

z变换的收敛域

性质 1： $X(z)$的收敛域由以原点为中心的z平面中的环组成。

This property is illustrated in Figure 10.6 and follows from the fact that the ROC consists of those values of $z = re^{j\omega}$ for which $x[n]r^{-n}$ has a Fourier transform that converges. That is, the ROC of the z-transform of $x[n]$ consists of the values of z for which $x[n]r^{-n}$ is absolutely summable:[2]

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|r^{-n} < \infty. \qquad (10.21)$$

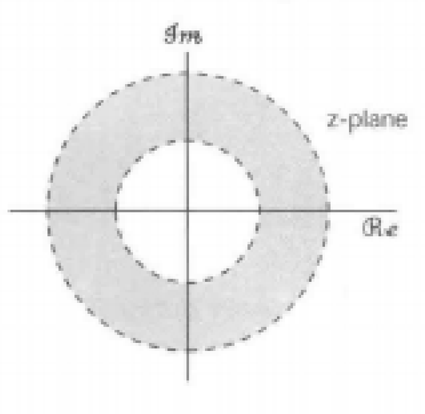


Figure 10.6 ROC as a ring in the z-plane. In some cases, the inner boundary can extend inward to the origin, in which case the ROC becomes a disc. In other cases, the outer boundary can extend outward to infinity.

[2]For a thorough treatment of the mathematical properties of z-transforms, see R.V. Churchill and J.W. Brown, *Complex Variables and Applications* (5th ed.) (New York: McGraw–Hill, 1990), and E. I. Jury, *Theory and Application of the z-Transform Method* (Malabar, FL: R. E. Krieger Pub. Co., 1982).

换句话讲：$X(z)$收敛仅与r有关。

性质 2： $X(z)$的收敛域不包含任何极点。

这是因为，极点是在Z平面上Z变换不收敛的点，因此Z变换的收敛域（ROC）不包含极点。

性质 3: 如果$x[n]$是有限长序列，那么 $X(z)$ 的收敛域是整个z平面。

证明： 假设$x[n]$从$N_1 \sim N_2$有值。那么

$$|X(z)| = \left|\sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]z^{-n}\right| < +\infty$$

有限持续时间信号及其收敛域示例

$$x[n] = \delta[n] \xrightarrow{Z} X(z) = 1, \text{ 收敛域整个Z平面}$$

性质 4: 如果$x[n]$是右边序列，那么$X(z)$的收敛域是某个圆的外面。

右边序列是值有始无终的序列，即当$n < n_1$时，$x[n] = 0$。此时Z变换为:

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{+\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=n_1}^{-1} x[n]z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

上式右端第一项为有限长序列的Z变换，按前面的讨论可知，它的收敛域为整个Z平面。接下来，我们要证明，上式第二项的收敛域为某个圆的外面。也就是说，如果$X(z)$在某个半径为r_0的圆上收敛，即:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}|x[n]|r_0^{-n} < +\infty$$

那么需要证明，对于$\forall r_1 > r_0$，都有

$$\sum_{n=0}^{+\infty}|x[n]|r_1^{-n} < +\infty$$

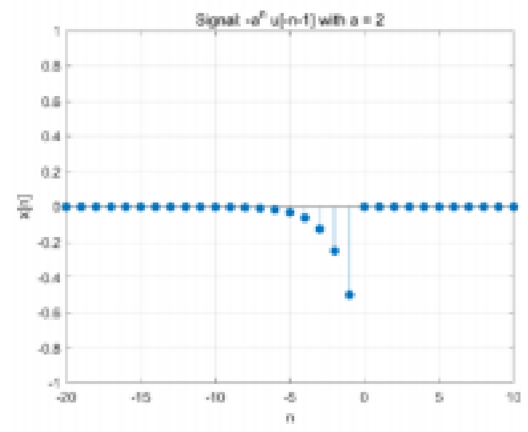
这是因为，如果$r_1 > r_0$，那么对上式每一项都有$|x[n]|r_1^{-n} \le |x[n]|r_0^{-n}$，所以有:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}|x[n]|r_1^{-n} \le \sum_{n=0}^{+\infty}|x[n]|r_0^{-n} < +\infty$$

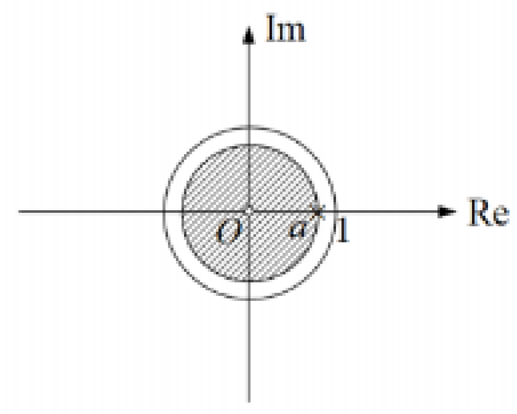
性质 5: 如果$x[n]$是左边序列，那么$X(z)$的收敛域是某个圆的里面。

$$x[n] = -a^n u[-n-1] \xrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, \qquad |z| < |a|$$

以上$x[n]$是左边序列，因此收敛域是某个圆的里面。



(a) $x[n] = -a^n u[-n-1]$的图像



(b) $X(z)$的收敛域和零极点

性质 6: 如果$x[n]$ 是双边序列，那么$X(z)$ 的收敛域为圆环。

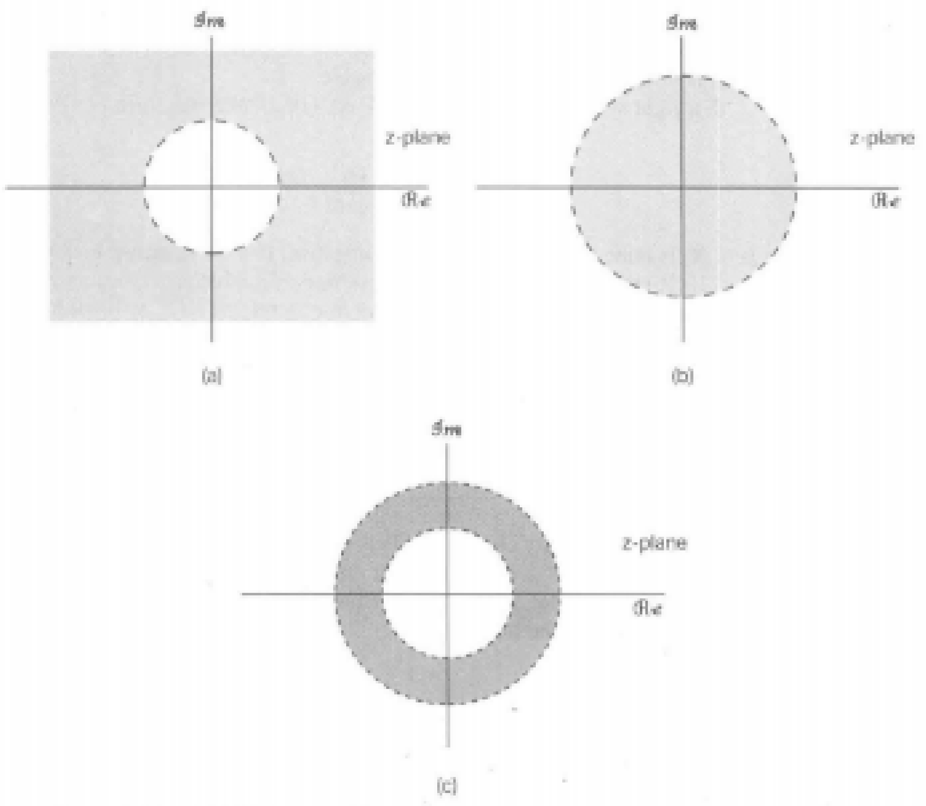


Figure 10.8 (a) ROC for right-sided sequence; (b) ROC for left-sided sequence; (c) intersection of the ROCs in (a) and (b), representing the ROC for a two-sided sequence that is the sum of the right-sided and the left-sided sequence.

性质 7: 如果 $x[n]$是稳定信号，即:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]| < +\infty$$

那么$X(z)$的收敛域包含单位圆。

证明： 因为序列$x[n]$的Z变换$X(z)$在半径为r的圆上收敛的充要条件是:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]|\,r^{-n} < +\infty$$

对比以上两式可知，**一个序列$x[n]$是稳定序列的充要条件是其Z变换$X(z)$在半径$r = 1$的圆上收敛，即单位圆上收敛。**

推论：
(1) 因果信号 -> 右边信号 -> 收敛域是某个圆的外面。
注意，右边信号不能保证系统是因果系统。

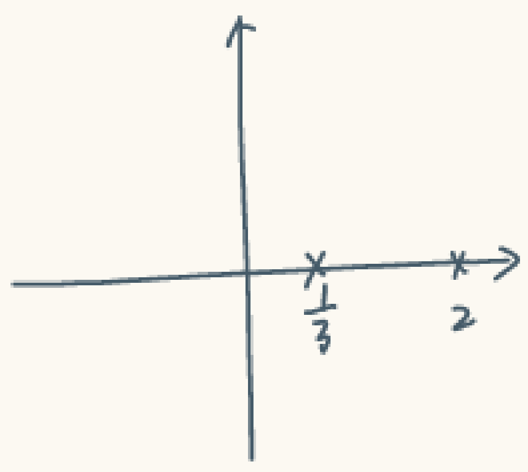
(2) 稳定LTI系统 <-> $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h[n]| < +\infty$ <-> $H(z)$ 的收敛域包含单位圆。

例题：若 $X(z) = \frac{1}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-2z^{-1})}$，求$x[n]$

解：先分解 $X(z) = \frac{-\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{\frac{6}{5}}{1-2z^{-1}}$

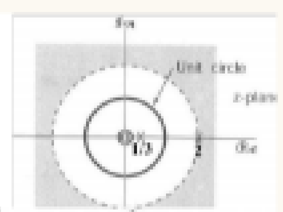
画零极点图：

$X(z) = \frac{z^2}{(z-\frac{1}{3})(z-2)}$

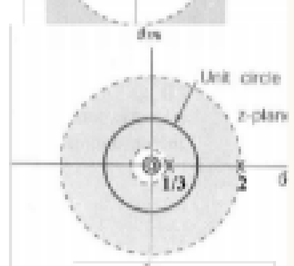


下面需要讨论：

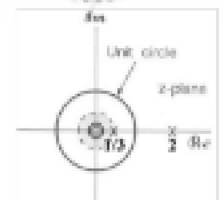
(1) 当$|z| > 2$时， $x[n] = -\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + \frac{6}{5}2^n u[n]$



(2) 当$\frac{1}{3} < |z| < 2$时， $x[n] = -\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - \frac{6}{5}2^n u[-n-1]$



(3) 当$|z| < \frac{1}{3}$时， $x[n] = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1] - \frac{6}{5}2^n u[-n-1]$



变式：
(这里与拉氏变换太类似，略写了).

例：如果

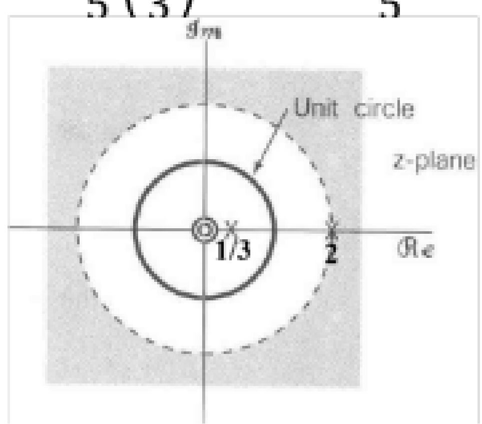
$$X(z)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)(1-2z^{-1})}$$

计算该因果信号$x[n]$。
解：

$$X(z)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)(1-2z^{-1})}=\frac{-\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}+\frac{\frac{6}{5}}{1-2z^{-1}}$$

因为$x[n]$是因果信号，收敛域为$|z|>2$，所以

$$x[n]=-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]+\frac{6}{5}2^n u[n]$$



例：如果

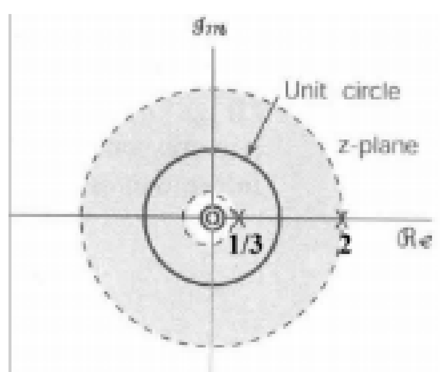
$$X(z)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)(1-2z^{-1})}$$

计算该稳定信号$x[n]$。
解：

$$X(z)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)(1-2z^{-1})}=\frac{-\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}+\frac{\frac{6}{5}}{1-2z^{-1}}$$

(1) 因为$x[n]$是稳定的，收敛域应包含单位圆，即$\frac{1}{3}<|z|<2$，所以

$$x[n]=-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]-\frac{6}{5}2^n u[-n-1]$$



★例：

例：如果

$X(z)=4z^2+2+3z^{-1}$，　收敛域整个Z平面

计算$x[n]$。

解：利用定义，$X(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}x[n]z^{-n}$ (本质：z的幂级数)

$= x[-2]z^2+x[0]z^0+x[1]z^{-1}$

其余 $x[n]=0$

$\therefore\ x[n]=4\delta[n+2]+2\delta[n]+3\delta[n-1]$

例：$X(z)=\log(1+az^{-1})$，$|z|>|a|$，求$x[n]$.

解：可以用泰勒展开，

$\because \log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$

$\therefore X(z)=az^{-1}-\frac{1}{2}a^2z^{-2}+\frac{1}{3}a^3z^{-3}-\frac{1}{4}a^4z^{-4}$

$\therefore\ x[1]=a$

$x[2]=-\frac{1}{2}a^2$　　$\Rightarrow$　　$x[n]=(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}\cdot a^n\cdot u[n-1]$

$x[3]=\frac{1}{3}a^3$

$\vdots$

Z变换的性质

(1) 线性性质：如果 $x_1[n]\xrightarrow{Z}X_1(z)$ $ROC=R_1$，$x_2[n]\xrightarrow{Z}X_2(z)$ $ROC=R_2$，则：

$$ax_1[n]+bx_2[n]\xrightarrow{L}aX_1(z)+bX_2(z),\qquad ROC=\text{至少}R_1\cap R_2$$

2 时移性质

若 $x[n]\xrightarrow{Z}X(z)$，$ROC=R$，那么 $x[n-n_0]\xrightarrow{Z}X(z)z^{-n_0}$.
(ROC=R.)

3 序列指数加权性质

若 $x[n]\xrightarrow{Z}X(z)$，$ROC=R$.

$\Rightarrow z_0^n x[n]\xrightarrow{Z}X\left(\frac{z}{z_0}\right)$，$ROC=|z_0|R$　　记法：$X(\cdot)$内一致.

证明:

$$Z(z_0^n x[n])=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]\left(\frac{z}{z_0}\right)^{-n}=X\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

特例: If $x[n]\xrightarrow{Z}X(z)$, $ROC=R$, then:

$$e^{j\omega_0 n}x[n]\xrightarrow{Z}X(e^{-j\omega_0 n}z),\qquad ROC=R$$

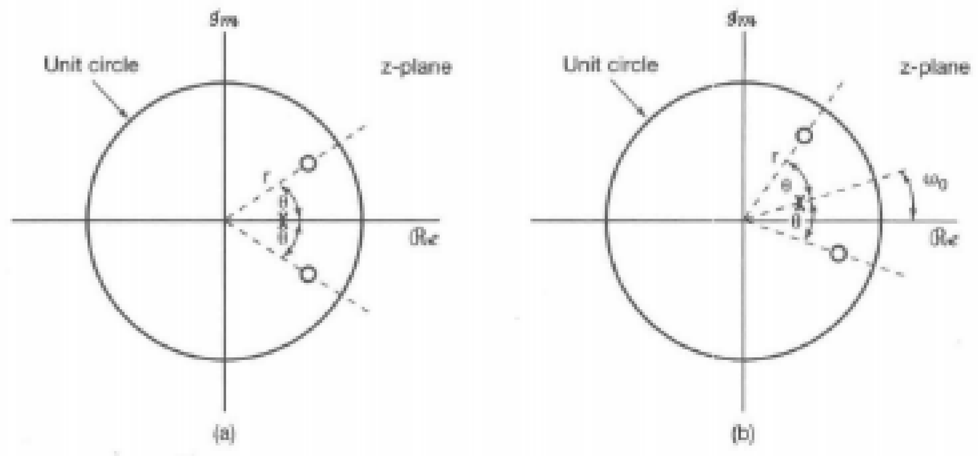


Figure 10.15 Effect on the pole-zero plot of time-domain multiplication by a complex exponential sequence $e^{j\omega_0 n}$: (a) pole-zero pattern for the z-transform for a signal $x[n]$; (b) pole-zero pattern for the z-transform of $x[n]e^{j\omega_0 n}$.

1 对应离散傅立叶变换中的频域平移：

$x[n]\xrightarrow{F}X(e^{jw})$，$e^{jw_0 n}x[n]\xrightarrow{F}X(e^{j(w-w_0)})$

4 时域反转

若 $x[n]\xrightarrow{Z}X(z)$，$ROC=R$，

那么 $x[-n]\xrightarrow{Z}X\left(\frac{1}{z}\right)$，$ROC=\frac{1}{R}$

证明:

$$Z(x[-n])=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[-n]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]z^{n}=X(z^{-1})$$

(离散傅立叶变换中时域翻转：

时域翻转：如果 $x[n]\xrightarrow{F}X(e^{j\omega})$，那么

$$x[-n]\xrightarrow{F}X(e^{-j\omega})$$

推导:

$$F[x[-n]]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[-n]e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{j\omega n}=X(e^{-j\omega})$$

定理：
(1) 如果$x[n]$是偶函数，则其傅里叶变换$X(e^{j\omega})$也是偶函数。
(2) 如果$x[n]$是奇函数，则其傅里叶变换$X(e^{j\omega})$也是奇函数。

以上定理的逆命题也成立：
(1) 如果$X(e^{j\omega})$是偶函数，则其傅里叶反变换$x[n]$也是偶函数。
(2) 如果$X(e^{j\omega})$是奇函数，则其傅里叶反变换$x[n]$也是奇函数。

5 时域扩展

(5) 时域扩展: 如果 $x[n]\xrightarrow{Z}X(z)$，$ROC=R$，假设

$$x_{(k)}[n]=\begin{cases}x\left[\frac{n}{k}\right], & \text{if } n \text{ is a multiple of } k\\ 0, & \text{if } n \text{ is not a multiple of } k\end{cases}$$

那么

$$x_{(k)}[n]\xrightarrow{Z}X(z^k),\qquad ROC=R^{1/k}$$

证明:

$$Z(x_{(k)}[n])=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_{(k)}[n]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]z^{-nk}=X(z^k)$$

6 共轭性质

若 $x[n] \xrightarrow{Z} X(z)$, ROC=R.

$x^*[n] \xrightarrow{Z} X^*(z^*)$, ROC=R.

证：

$$Z(x^*[n]) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*[n]z^{-n} = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n](z^*)^{-n}\right)^* = X^*(z^*)$$

7 卷积性质

若 $x[n] \xrightarrow{Z} X(z)$, ROC=$R_1$.

$h[n] \xrightarrow{Z} H(z)$, ROC=$R_2$

则 $x[n]*h[n] \xrightarrow{Z} X(z)H(z)$, ROC至少包含 $R_1 \cap R_2$.

证明:

$$Z(x[n]*h[n]) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x[n]*h[n])\,z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]\right)z^{-n}$$
$$= \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]z^{-k}\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n-k]\,z^{n-k}\right)$$
$$= X(z)H(z)$$

ROC扩大的例子：

$x[n]=u[n] \xrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$, $|z|>1$.

$h[n]=\delta[n]-\delta[n-1] \xrightarrow{Z} H(z)=1-z^{-1}$ 整个z平面

此时 $R_1 \cap R_2$ 为 $|z|<1$.

$\therefore x[n]*h[n] \xrightarrow{Z} X(z)H(z)=1$. 整个z平面.（ROC扩大）

例:

$$w[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] = x[n]*u[n]$$

$$w[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \xrightarrow{Z} W(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}X(z),$$

ROC 至少包含$\{ROC\ of\ X(z)\} \cap \{|z|>1\}$

例7-9: 设$x[n]=a^n u[n]$, $y[n]=b^n u[n]-ab^{n-1}u[n-1]$，求$x[n]*y[n]$。

解: $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$, $|z|>|a|$

$Y(z) = \frac{1}{1-bz^{-1}} - a\cdot\frac{1}{1-bz^{-1}}\cdot z^{-1} = \frac{1-az^{-1}}{1-bz^{-1}}$, $|z|>|b|$

$\therefore Z(z) = X(z)Y(z) = \frac{1}{1-bz^{-1}}$, $|z|>|b|$

$\therefore x[n]*y[n] = b^n u[n]$

8 Z域微分性质

若 $x[n] \xrightarrow{Z} X(z)$, ROC=R.

那么 $nx[n] \xrightarrow{Z} -z\cdot\frac{dX(z)}{dz}$

推导: 因为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

两边同时对Z求导可得:

$$\frac{dX(z)}{dz} = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} nx[n]z^{-n-1}$$

所以

$$-z\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(nx[n])z^{-n}$$

所以

$$nx[n] \xrightarrow{Z} -z\frac{dX(z)}{dz}$$

例：因为

$$a^n u[n] \xrightarrow{Z} \frac{1}{1-az^{-1}}, \qquad |z|>|a|$$

应用Z域微分性质，有:

$$na^n u[n] \xrightarrow{Z} -z\frac{d\left(\frac{1}{1-az^{-1}}\right)}{dz} = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \qquad |z|>|a|$$

所以,

$$(n+1)a^n u[n] \xrightarrow{Z} \frac{1}{1-az^{-1}} + \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} = \frac{1}{(1-az^{-1})^2}, \qquad |z|>|a|$$

推论:

$$na^n u[n] \xrightarrow{Z} \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \qquad |z|>|a|$$
$$(n+1)a^n u[n] \xrightarrow{Z} \frac{1}{(1-az^{-1})^2}, \qquad |z|>|a|$$

应用类似推导，可得:

$$\frac{(n+r-1)!}{n!\,(r-1)!}a^n u[n] \xrightarrow{z} \frac{1}{(1-az^{-1})^r}$$

9 初值定理（不要求）

(9) 初值定理: 如果$x[n]$是因果信号，即$x[n]=0$当$n<0$时，那么有:

$$x[0] = \lim_{z\to+\infty} X(z)$$

证明:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n]z^{-n} = x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \cdots$$

所以

$$\lim_{z\to+\infty} X(z) = \lim_{z\to+\infty} x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \cdots = x[0]$$

10 终值定理

(9) 终值定理: 如果$x[n]$是因果信号，即$x[n]=0$当$n<0$时，那么有:

$$\lim_{n\to+\infty} x[n] = \lim_{z\to1}(z-1)X(z)$$

证明:

$$(z-1)X(z) = (z-1)\sum_{n=0}^{+\infty} x[n]z^{-n} = (z-1)[x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \cdots]$$
$$= zx[0] + (x[1]-x[0]) + z^{-1}(x[2]-x[1]) + \cdots + z^{-(n-1)}(x[n]-x[n-1]) + \cdots$$

所以

$$\lim_{z\to1}(z-1)X(z)$$
$$= x[0] + (x[1]-x[0]) + (x[2]-x[1]) + \cdots + (x[n]-x[n-1]) + \cdots$$
$$= \lim_{n\to+\infty} x[n]$$

一种推导因果信号的方式

$\because \delta[n+1] \xrightarrow{Z} z$. $\delta[n+2] \xrightarrow{Z} z^2 \cdots$

$\therefore$ 若z变换中出现 z^n $(n\geq1)$. 那么一定不是因果信号.

例: $H(z) = \dfrac{z(2z^2-\frac{3}{2}z)}{z^2-\frac{3}{2}z+\frac{1}{2}}$ 为非因果.（分母>分子，会产生z'）

Z反变换

例1: $X(z) = \dfrac{10z}{z^2-3z+2}$, $|z|>2$.

① 变成以 z^{-1} 为基准:

$$X(z) = \frac{10z^{-1}}{2(z^{-1})^2-3z^{-1}+1} = \frac{10z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-2z^{-1})}$$
$$= \frac{-10}{1-z^{-1}} + \frac{10}{1-2z^{-1}}$$
$$= -10u[n] + 10\cdot2^n u[n]$$

其它例题解法类似（略？）

利用Z变换解差分方程

差分方程的三种表示:

(1) 直接形式

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{N} b_k x[n-k]$$

(2) 系统函数形式

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

(3) 框图形式

例: $y[n]+\frac{1}{6}y[n-1]+\frac{1}{6}y[n-2]=5x[n]-x[n-2]$

由时移性质,

$Y(z)\cdot(1+\frac{1}{6}\cdot z^{-1}+\frac{1}{6}\cdot z^{-2})=X(z)\cdot(5-z^{-2})$

$\therefore H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{5-z^{-2}}{1+\frac{1}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}$

例2: $y[n]+y[n-1]-6y[n-2]=x[n]$

$\therefore H(z)=\frac{1}{1+z^{-1}-6z^{-2}}$

例3: $H(z)=\frac{z}{(z-1)^2}$, 求差分方程

解: $H(z)=\frac{z^{-1}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}$

$\therefore y[n]-2y[n-1]+y[n-2]=x[n-1]$

回顾: 梅森公式

梅森公式（简化版）：如果一个框图满足以下两个条件：
(1) 任何两条环路至少有一个共同的节点。
(2) 任何前向通路与任何环路都至少有一个共同的节点。
那么，我们有：

$$H(s)=\frac{\text{所有前向通路的增益和}}{1-\text{所有环路的增益和}}$$

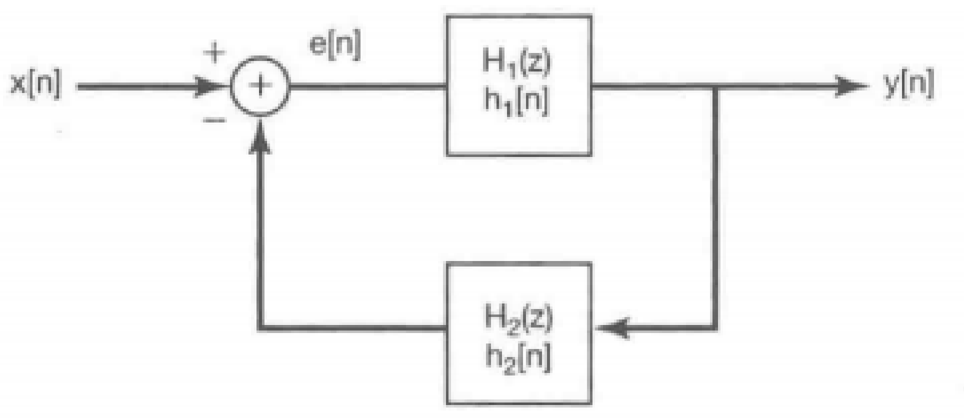


Figure 10.17 Feedback interconnection of two systems.

$$\frac{Y(z)}{X(z)}=H(z)=\frac{H_1(z)}{1+H_1(z)H_2(z)}.$$

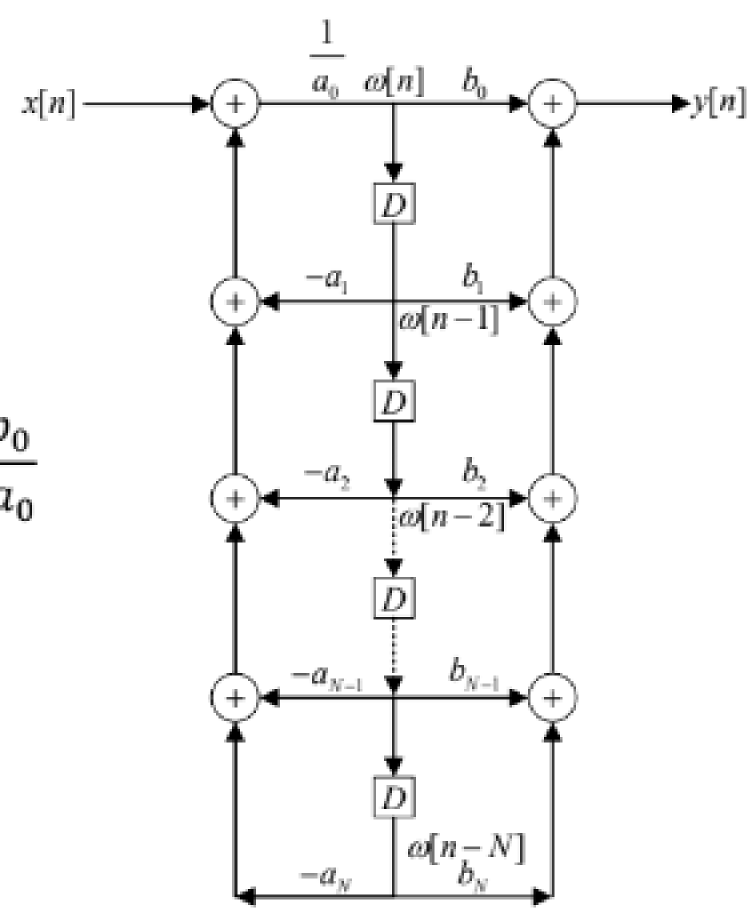
相应的系统框图:

系统函数:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\frac{b_0}{a_0}+\frac{b_1}{a_0}z^{-1}+\frac{b_2}{a_0}z^{-2}+\cdots+\frac{b_N}{a_0}z^{-N}}{1+\frac{a_1}{a_0}z^{-1}+\frac{a_2}{a_0}z^{-2}+\cdots+\frac{a_N}{a_0}z^{-N}}=\frac{b_Nz^{-N}+b_{N-1}z^{-(N-1)}+\cdots+b_1z^{-1}+b_0}{a_Nz^{-N}+a_{N-1}z^{-(N-1)}+\cdots+a_1z^{-1}+a_0}$$

差分方程:

$$\sum_{k=0}^{N}a_ky[n-k]=\sum_{k=0}^{N}b_kx[n-k]$$



直接II型框图

例:

例： 对于以下差分方程，请画系统框图

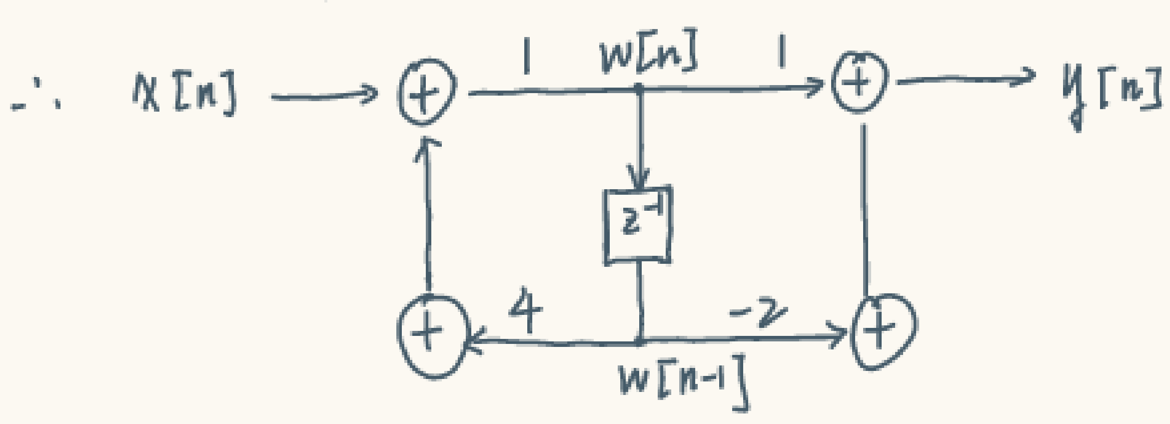
$$y[n]-\frac{1}{4}y[n-1]=x[n]-2x[n-1]$$

或

$$H(z)=\frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

$a_0=1,\ a_1=-\frac{1}{4}\qquad b_0=1\quad b_1=-2$

$\therefore$



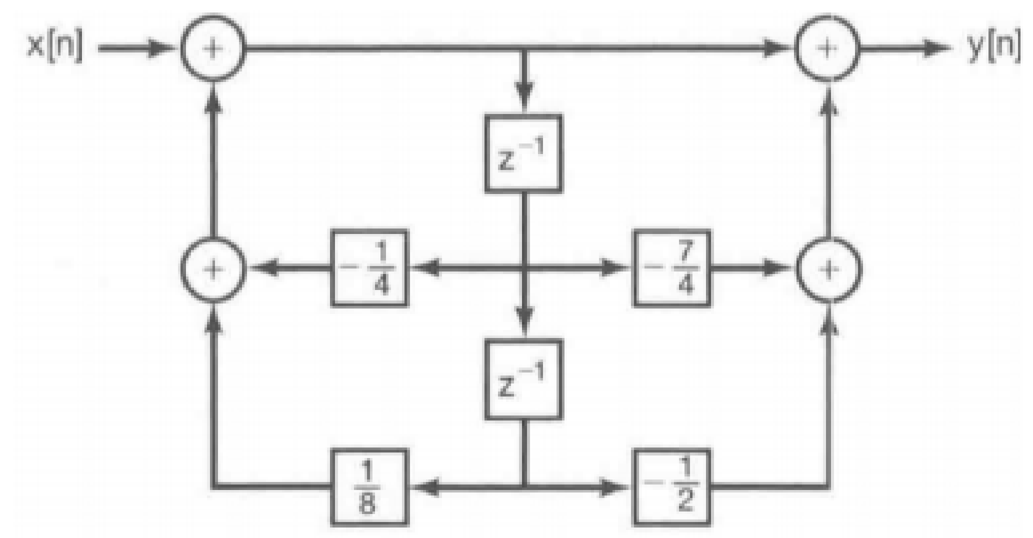
例: 请画以下差分方程的直接II型框图

$$y[n]+\frac{1}{4}y[n-1]-\frac{1}{8}y[n-2]=x[n]-\frac{7}{4}x[n-1]-\frac{1}{2}x[n-2]$$

或

$$H(z)=\frac{1-\frac{7}{4}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}}$$

解:



可以拆成串联/并联型

例7-22: 已知描述LTI系统的二阶后向差分方程为:

$$y[n]+y[n-1]-6y[n-2]=x[n-1]$$

（1）求该系统的系统函数和单位样值响应。
（2）当$x[n]=(-1)^nu[n]$时，求$y[n]$。

解: （2）

$$Y(z)=X(z)H(z)=\frac{z^{-1}}{1+z^{-1}-6z^{-1}}\cdot\frac{1}{1+z^{-1}}=\frac{z^{-1}}{(1+3z^{-1})(1-2z^{-1})(1+z^{-1})}$$
$$=\frac{-\frac{3}{10}}{1+3z^{-1}}+\frac{\frac{2}{15}}{1-2z^{-1}}+\frac{\frac{1}{6}}{1+z^{-1}}$$

所以有:

$$y[n]=-\frac{3}{10}(-3)^nu[n]+\frac{2}{15}\times2^nu[n]+\frac{1}{6}\times(-1)^n$$

例: 已知一个二阶离散时间LTI系统的系统函数

$$H(z)=\frac{1-z^{-1}}{(1-0.5z^{-1})(1-2z^{-1})}$$

其单位脉冲响应$h[n]$满足$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h[n]|<+\infty$。试求:
（1）系统的单位脉冲响应$h[n]$，并判断是否稳定。
（2）已知输入信号$x[n]=3u[-n-1]+2u[n]$，求系统的输出$y[n]$。

(1) 解: 由稳定信号 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|<+\infty$.

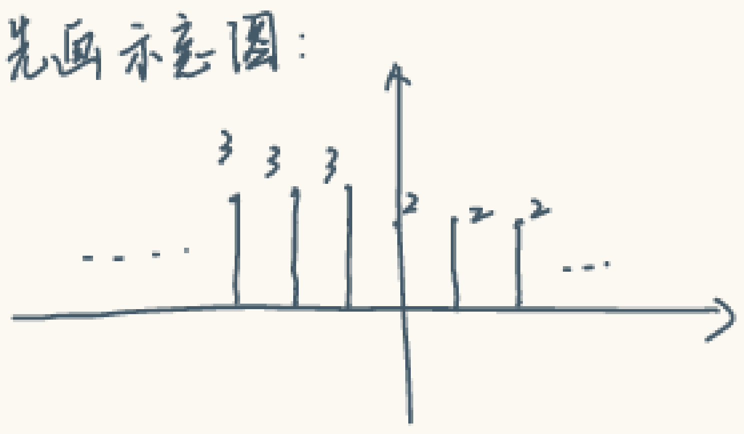
$\therefore$ 收敛域包含单位圆

$H(z)=\frac{1-z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})}=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{\frac{2}{3}}{1-2z^{-1}}$, 收敛域$[\frac{1}{2},2]$

$\therefore h[n]=\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{2})^nu[n]-\frac{2}{3}\cdot2^nu[-n-1]$

(2) $x[n]=3u[-n-1]+2u[n]$

先画示意图:



$\therefore x[n]=3-u[n]$

$x[n]=3\ \xrightarrow{LTI}\ 3H(1)=0\quad\therefore y_1[n]=0$

$u[n]\ \xrightarrow{LTI}\ Y(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}\cdot\frac{1-z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})}$

$=\frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})}=\frac{-\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{\frac{4}{3}}{1-2z^{-1}}$

$\therefore y_2[n]=-\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{2})^n\cdot u[n]+\frac{4}{3}\cdot2^nu[n]$

$\therefore y[n]=y_1[n]-y_2[n]$

$=[\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{2})^n-\frac{4}{3}\cdot2^n]\cdot u[n]$

单边Z变换

定义：$\widetilde{X}(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}x[n]z^{-n}$.

表示：$x[n]\xrightarrow{uZ}\widetilde{X}(z)$ ，$uZ[x[n]]=\widetilde{X}(z)$

请注意： 对于因果信号$x[n]$，即$x[n]=0$当$n<0$时，它的Z变换和单边Z变换是一样的。

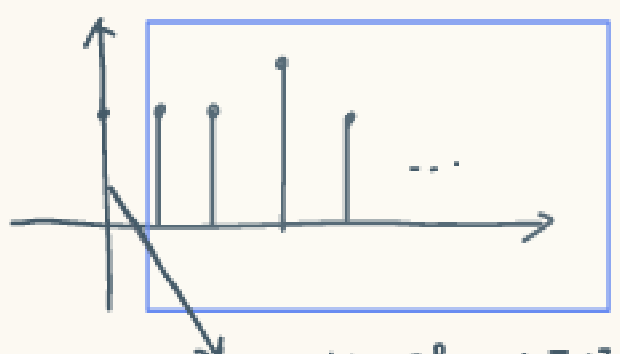
例：

$$a^nu[n]\xrightarrow{Z}\frac{1}{1-az^{-1}},\qquad |z|>|a|$$

$$a^nu[n]\xrightarrow{uZ}\frac{1}{1-az^{-1}},\qquad |z|>|a|$$

单边Z变换时域平移性质

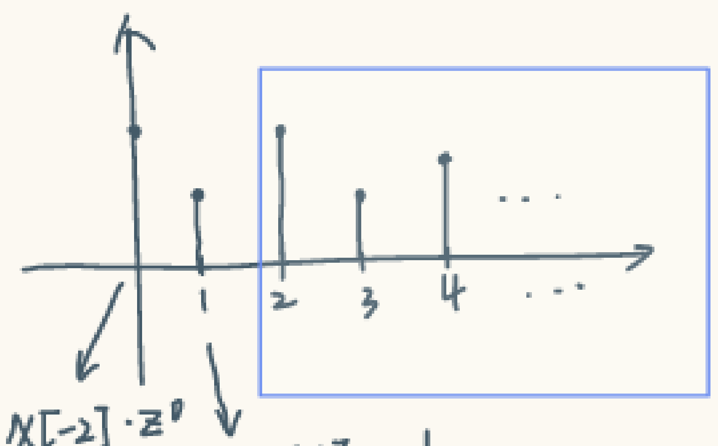
· $x[n-1]\xrightarrow{uZ}z^{-1}\widetilde{X}(z)+x[-1]$



原先的$\widetilde{X}(z)$右移一个单位.

$x[-1]\cdot z^0=x[-1]$

· $x[n-2]\xrightarrow{uZ}z^{-2}\widetilde{X}(z)+x[-1]\cdot z^{-1}+x[-2]$



右移2个单位

$x[-2]\cdot z^0$

$\underbrace{x[-1]}_{值}\ \underbrace{z^{-1}}_{幂}$

同理. $x[n+1]\xrightarrow{uZ}z\widetilde{X}(z)-x[0]z$

$x[n+2]\xrightarrow{uZ}z^2\widetilde{X}(z)\underline{-x[0]z^2-x[1]z}$

0→+∞求和. -1. -2上没有值.

第三类差分方程的解法

例7-24： 已知描述离散时间系统的二阶前向差分方程为

$$y[n+2]-5y[n+1]+6y[n]=x[n+1]-3x[n]$$

初始条件$y[0]=2$，$y[1]=3$，试求系统的系统的零输入响应。

解：对方程左右做单边Z变换

$\therefore\ z^2\widetilde{Y}(z)-y[0]z^2-y[1]z-5(z\widetilde{Y}(z)-y[0]z)$

$+6\widetilde{Y}(z)=z\widetilde{X}(z)-x[0]z-3\widetilde{X}(z)$

零输入响应 $\because x[n]=0$ 把$y[0]=2$, $y[1]=3$代入.

$\therefore\ z^2\widetilde{Y}(z)-2z^2-3z-5z\widetilde{Y}(z)+10z+6\widetilde{Y}(z)=0$

$\therefore\ \widetilde{Y}(z)=\frac{2z^2-7z}{z^2-5z+6}=\frac{2-7z^{-1}}{1-5z^{-1}+6z^{-2}}=\frac{2-7z^{-1}}{(1-2z^{-1})(1-3z^{-1})}$

$=\frac{3}{1-2z^{-1}}-\frac{1}{1-3z^{-1}}$

$\therefore\ y[n]=3\times2^nu[n]-3^nu[n]$