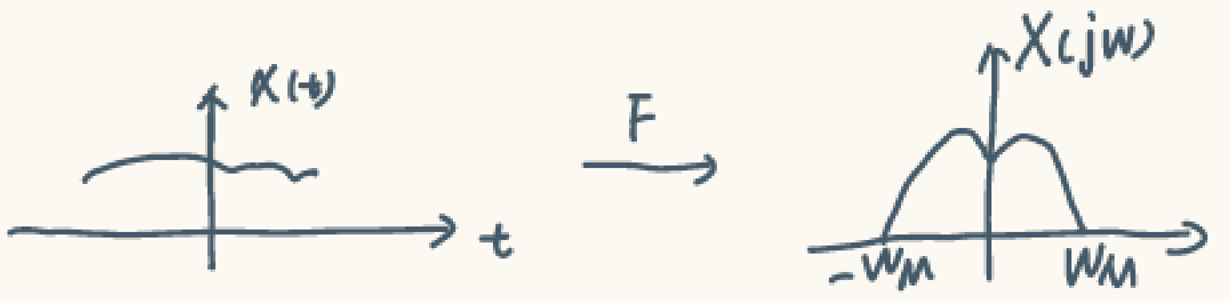
第五章 采样定理

采样定理：设$x(t)$是某一带限信号，即$X(j\omega)=0$当$|\omega|>\omega_M$时。如果采样频率$\omega_s>2\omega_M$，其中

$$\omega_s=\frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow T<\frac{\pi}{w_M}$$

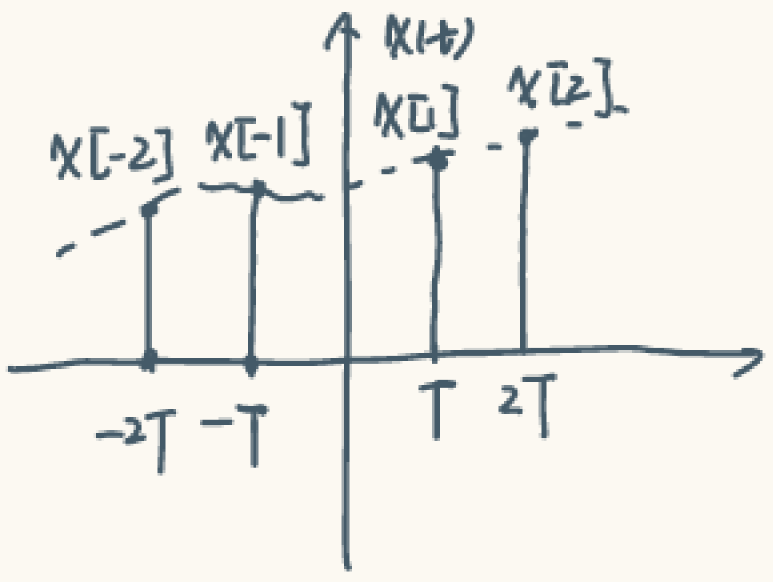
这里T为采样周期。那么$x(t)$就唯一地由其样本值序列$x[n]=x(nT)$, $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$所确定。



带限信号

对 $x(t)$ 进行采样： $x[n]=x(nT)$，其中 T 为采样周期

$n=0,\pm1,\pm2\cdots$



$x[0]=x(0T)$

$x[1]=x(1T)$

$\vdots$

$x[-1]=x(-T)$

$\vdots$

■ 一些简单的推导

(1) 如果时钟以恒定速度旋转，角频率为ω_M 弧度/秒，然后在一个采样周期内T，时钟总共走$\omega_M T$ 弧度。但通过观察采样图片，我们无法分辨时钟移动了以下哪个弧度。

$$\omega_M T+2k\pi \quad (k\in Z)$$

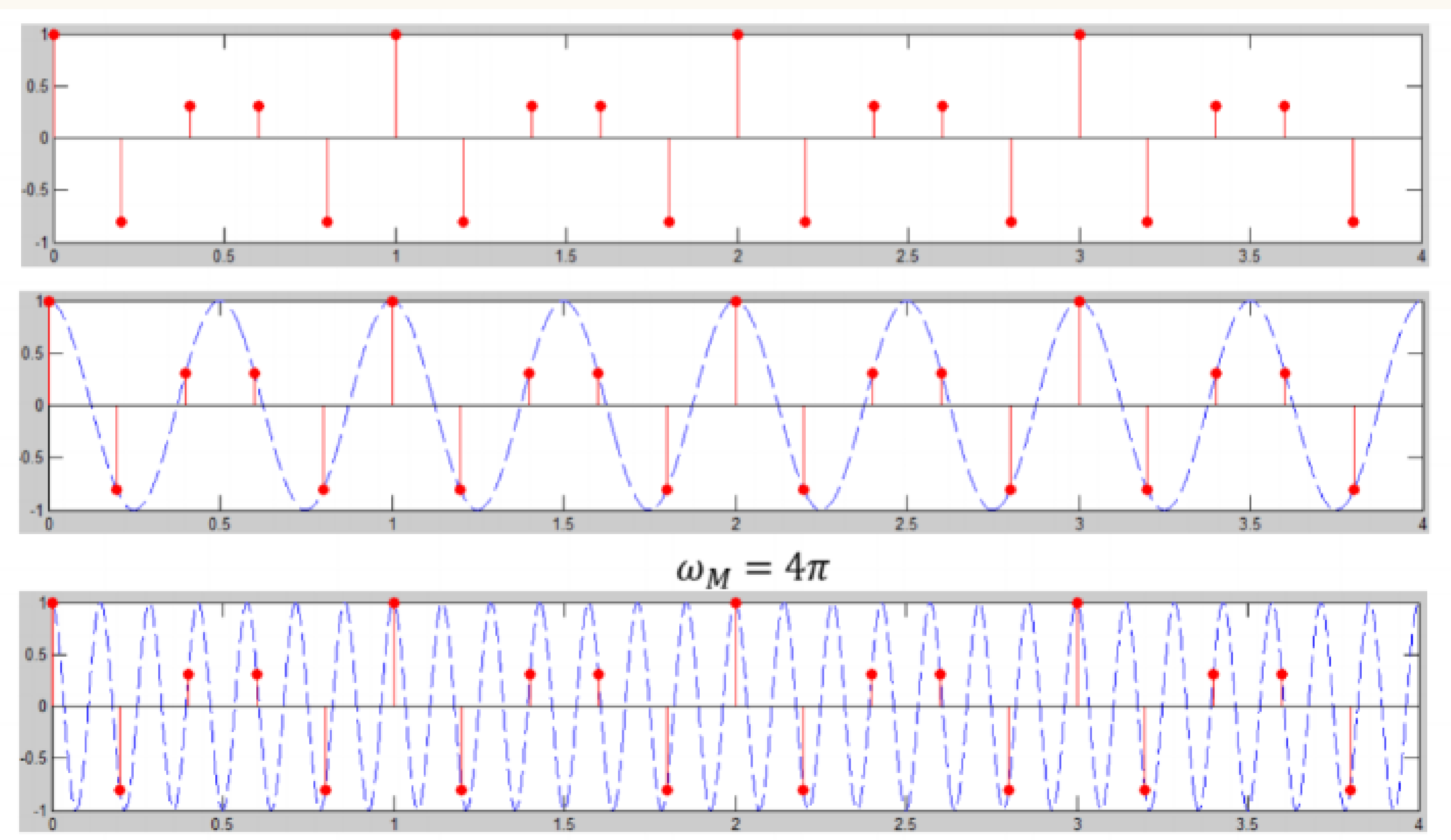
(2) 因此，如果采样周期为T，我们无法区分以下角频率：

$$\frac{\omega_M T+2k\pi}{T}=\omega_M+k\frac{2\pi}{T} \qquad (k\in Z)$$

如果我们定义$\omega_s=\frac{2\pi}{T}$，那么我们就无法区分ω_M从$\omega_M+k\omega_s$ $(k\in Z)$

(3) 从另一个角度来看，如果我们知道$\omega_M\in[-\frac{\omega_s}{2},\frac{\omega_s}{2})$，那么我们就可以唯一地决定$\omega_M$。

例如：



$\omega_M=4\pi$

$\omega_M=14\pi$

$x(t)=\cos(W_M t)$

$x[n]=x(nT)$

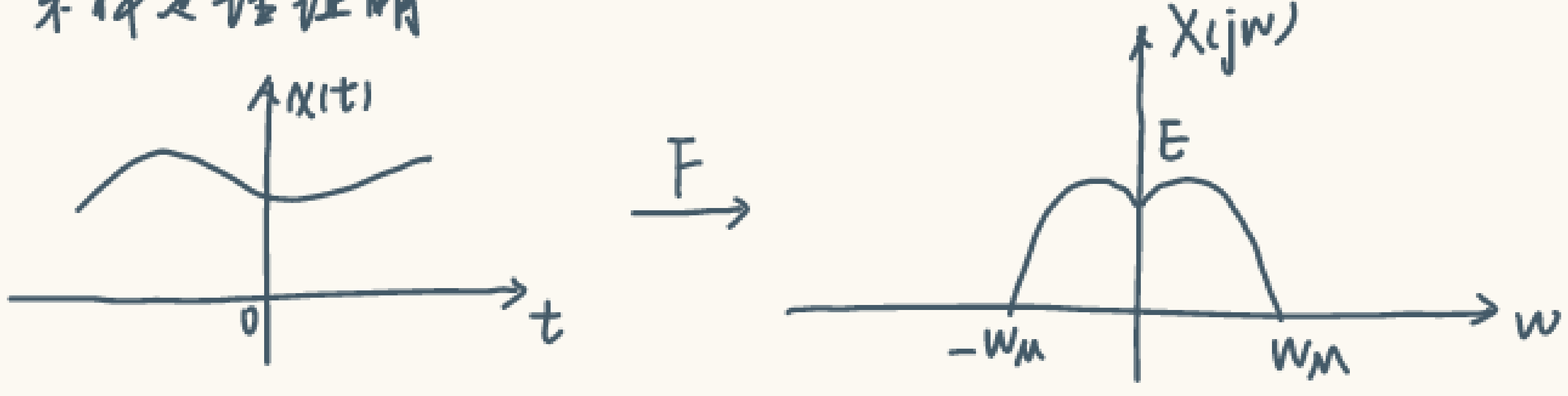
$=\cos(W_M nT) \quad (n\in Z)$

$=\cos(W_M nT+2kn\pi)$

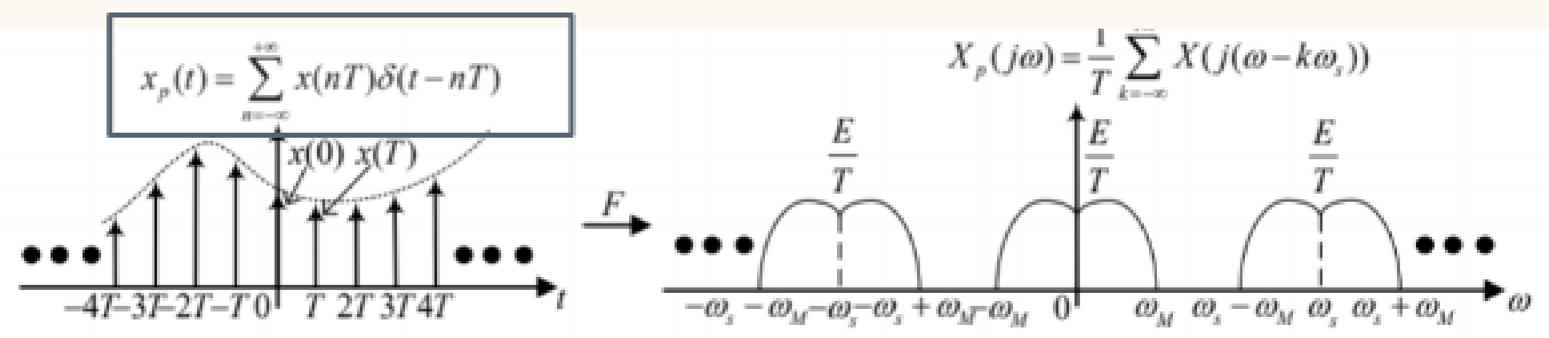
$=\cos((W_M+\frac{2k\pi}{T})nT)$

因此，无法区分 W_M 与 $W_M+\frac{2k\pi}{T}$

采样定理证明



(a) 带限信号 $x(t)$. $|w|>W_M$, $X(jw)=0$



(b) 脉冲串采样$x(t)$获得$x_p(t)$. 它的傅里叶变换是：

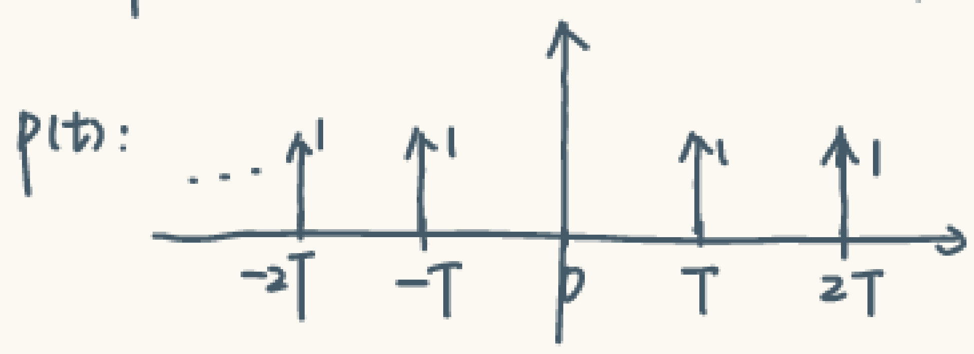
$$X_p(j\omega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(j(\omega-k\omega_s))$$

$$X(e^{j\omega})=X_p\left(j\frac{\omega}{T}\right)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X\left(j\frac{\omega-2k\pi}{T}\right)$$

先证：$X_p(jw)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(j(w-kw_s))$

$x_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(nT)\delta(t-nT) = x(t)p(t)$

p(t):



调制性质：$X_p(jw)=\frac{1}{2\pi}X(jw)*P(jw)$

$P(jw)$：由周期冲激串傅立叶变换

$P(jw)=\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(w-kW_s)$, $W_s=\frac{2\pi}{T}$

$\therefore X_p(jw)=\frac{1}{2\pi}X(jw)*\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(w-kW_s)$

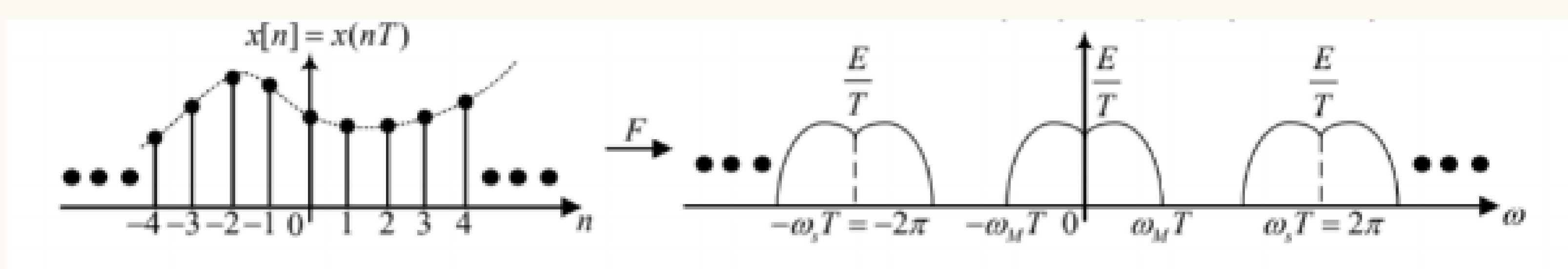
利用 $x(w)*\delta(w-w_0)=x(w-w_0)*\delta(w)$

$=x(w-w_0)$

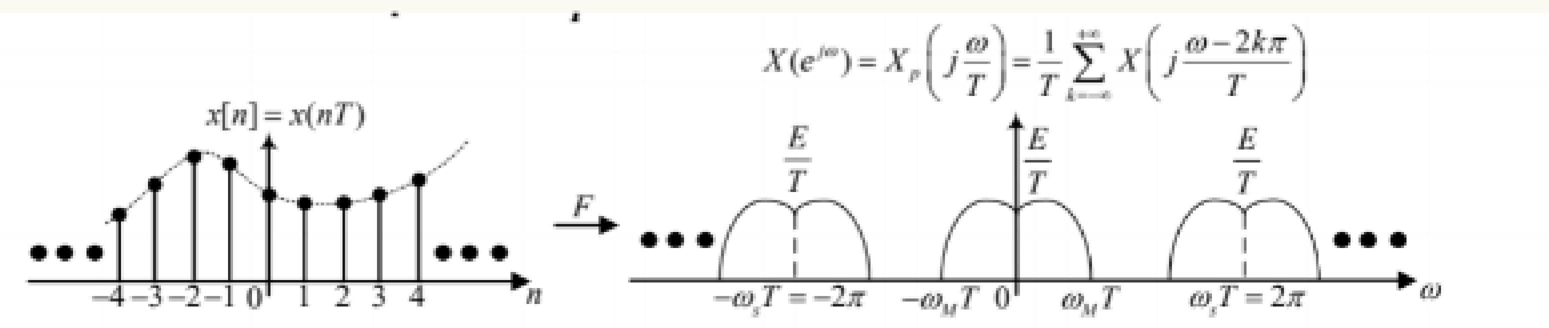
$X_p(jw)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(j(w-kw_s))$

$=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(j\frac{w-2k\pi}{T})$

$X_p(jw)$ 图示如下：



最后证明:



(c) 离散化$x(t)$获得$x[n]=x(nT)$。其离散傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})=X_p\left(j\frac{\omega}{T}\right)$

即证: $X(e^{jw})=X_p(j\frac{w}{T})=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(j\frac{w-2k\pi}{T})$

$X(e^{jw})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-jwn}$

$=\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(nT)e^{-jwn}}$ a.

而 $x_p(t)=x(t)p(t)$ 的傅立叶变换

$X_p(jw)=\int_{-\infty}^{+\infty}x_p(t)e^{-jwt}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}[\sum_{-\infty}^{+\infty}x(nT)\delta(t-nT)]e^{-jwt}dt$

$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(nT)\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-jwt}\delta(t-nT)dt$

$=\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(nT)e^{-jwnT}}$ b.

比较a式与b式 ⇒ $X(e^{jw})=X_p(j\frac{w}{T})$

又∵ $X_p(jw)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(j(w-kw_s))$

∴ $w_s=\frac{2\pi}{T}$

总结:

① 条件: 带限信号 $x(t)\xrightarrow{F}X(jw)$, $|w|>w_M$ 时取0.

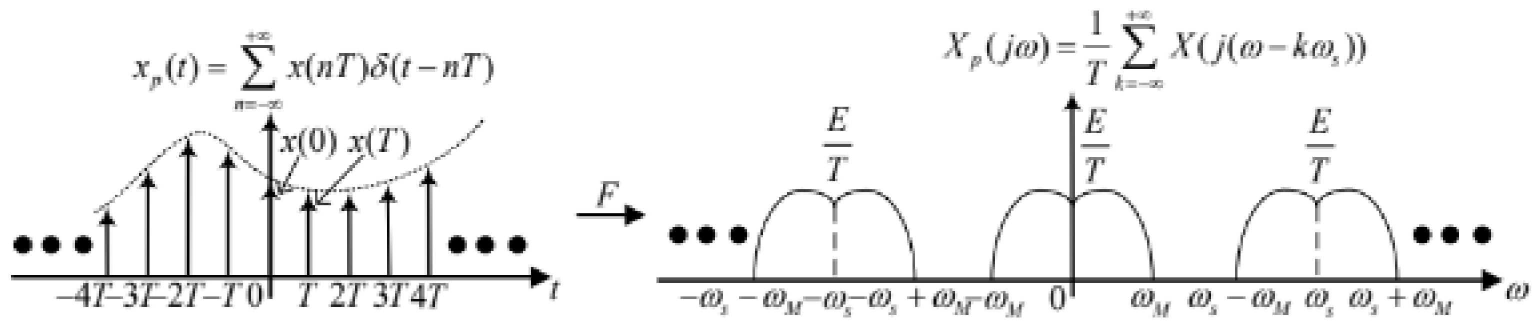
② $X(e^{jw})=X_p(j\frac{w}{T})=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(j\frac{w-2k\pi}{T})=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(j(\frac{w}{T}-kw_s))$

$X(e^{jwT})=X_p(jw)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(j(w-kw_s))$

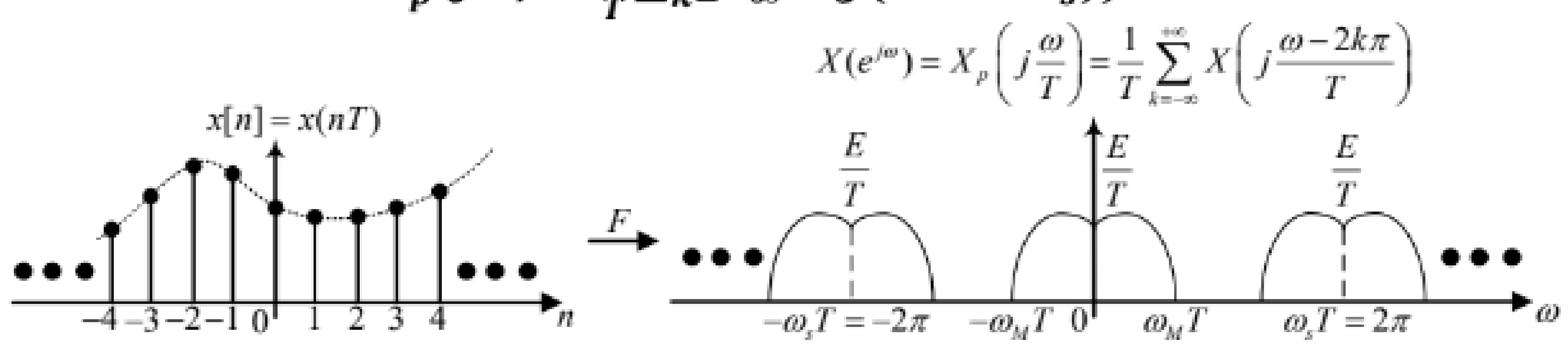
$w_s=\frac{2\pi}{T}$ ← 采样周期

③示意图:

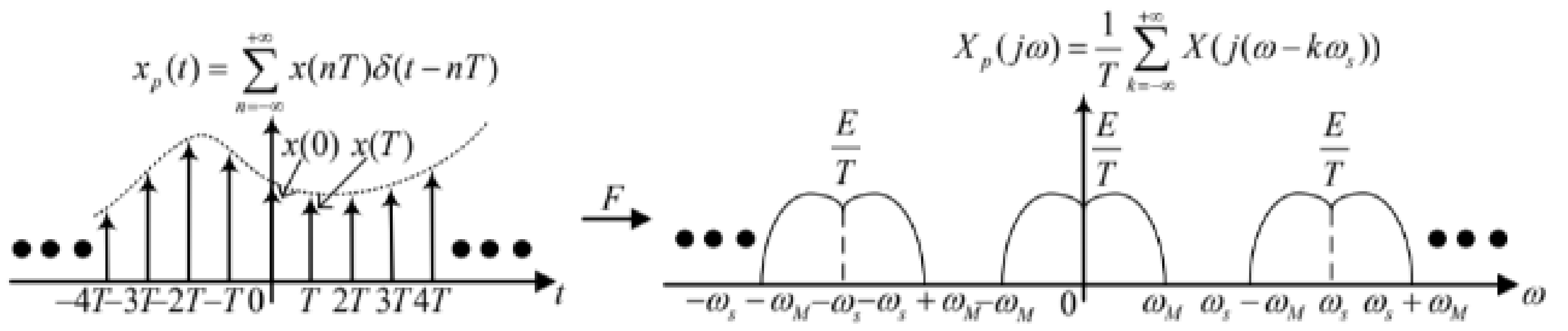
(a) 带限信号$x(t)$。它的傅里叶变换是 $X(j\omega)=0$当$|\omega|>\omega_M$时。



(b) 脉冲串采样$x(t)$获得$x_p(t)$. 它的傅里叶变换是:
$X_p(j\omega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(j(\omega-k\omega_s))$



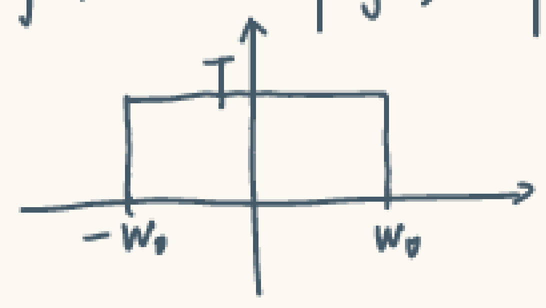
(c) 离散化$x(t)$获得$x[n]=x(nT)$。其离散傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})=X_p\left(j\frac{\omega}{T}\right)$



重建连续时间信号:

已知$X_p(jw)$, 还原$X(jw)$: 由 $X_p(jw)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(j(w-kw_s))$

$X(jw)=X_p(jw)\cdot$



∴两边变换 F^{-1}

$x(t)=x_p(t)*T\cdot\frac{\sin(W_0t)}{\pi t}$

$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(nT)\delta(t-nT)*T\cdot\frac{\sin(W_0t)}{\pi t}$

利用 $x(t)*\delta(t-t_0)=x(t_0)$.

得 $x(t)=\frac{W_0T}{\pi}\cdot\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(nT)\cdot\frac{\sin(W_0(t-nT))}{W_0(t-nT)}$

$=\frac{W_0T}{\pi}\cdot\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(nT)Sa[W_0(t-nT)]$

奈奎斯特采样率:

$W_s>2W_M$. $W_s=\frac{2\pi}{T}$

奈奎斯特采样率:对于带限信号$x(t)$具有极限频率ω_M,我们称$2\omega_M$作为其奈奎斯特速率,即能够完全重建信号的最小采样频率。

例题:

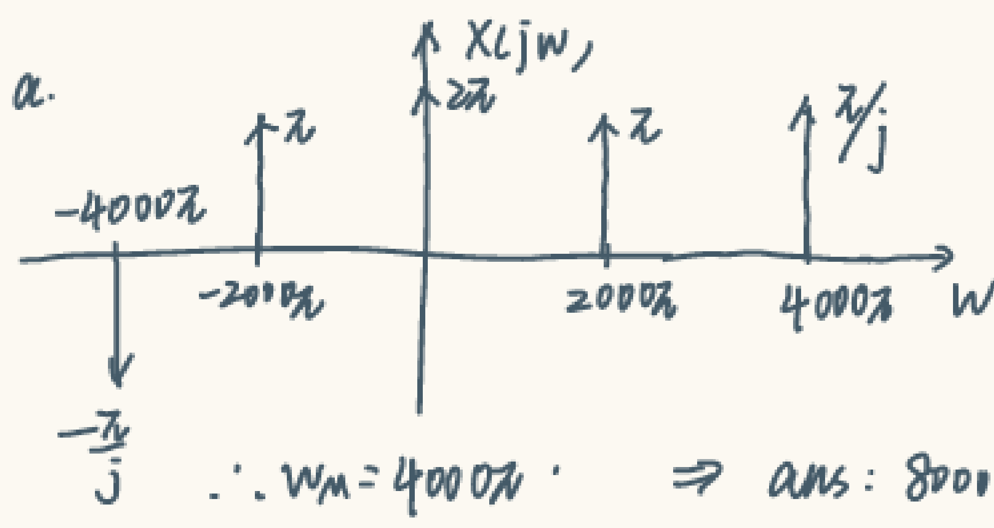
问题:确定以下信号的奈奎斯特采样率:

(a) $x(t)=1+\cos(2{,}000\pi t)+\sin(4{,}000\pi t)$

(b) $x(t)=\frac{\sin(4{,}000\pi t)}{\pi t}$

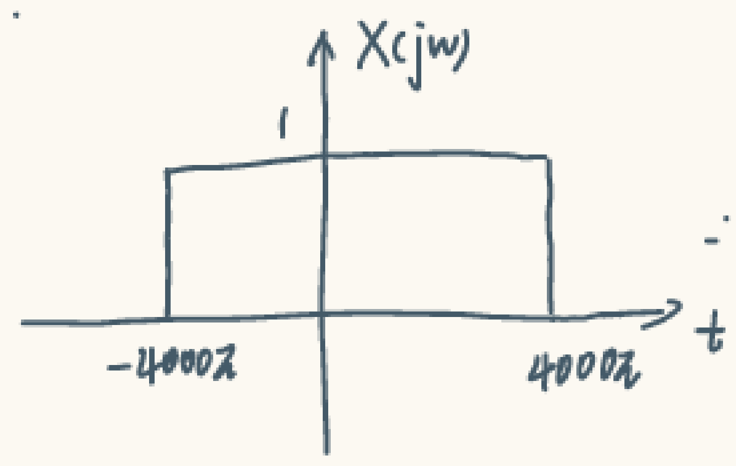
(c) $x(t)=\left(\frac{\sin(4{,}000\pi t)}{\pi t}\right)^2$

a.



∴ $W_M=4000\pi$ ⇒ ans: 8000π

b.



∴ ans = 8000π

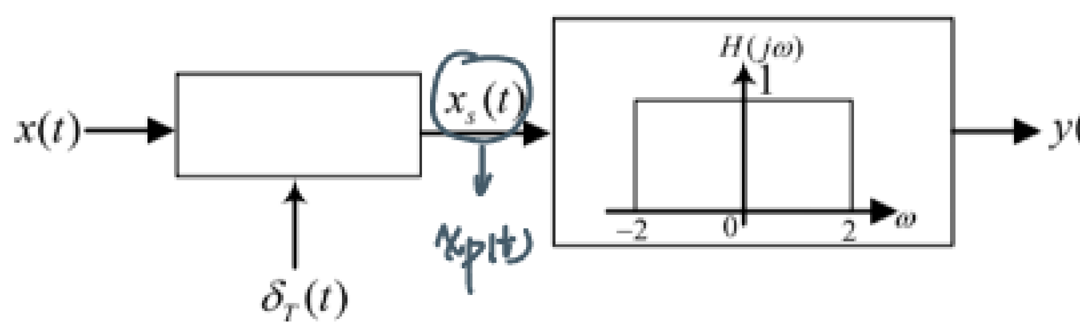
c 三角波. $W_M=8000\pi$ ∴ ans: 16000π.

例:如下图所示,如果输入信号

$$x(t)=1+\cos(t)$$

如果我们采样$x(t)$使用以下脉冲序列:

$$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta\left(t-\frac{\pi}{3}n\right)$$



(1) 计算$x_s(t)$的傅里叶变换$X_s(j\omega)$。
(2) 如果采样离散信号是$x[n]=x(nT)$,计算它的傅里叶变换$X(e^{j\omega})$。
(3) 如图所示,如果我们将$x_s(t)$送入低通滤波器$H(j\omega)$,计算输出$y(t)$。

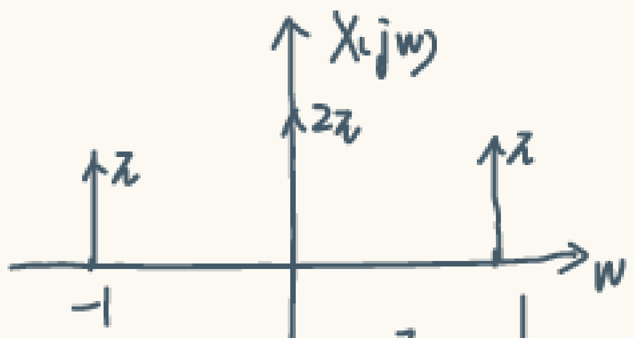
解: 由 $\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-\frac{\pi}{3}n)$. 可知采样周期 $T=\frac{\pi}{3}$

即 $p(t)$

∴ $W_s=\frac{2\pi}{T}=6$

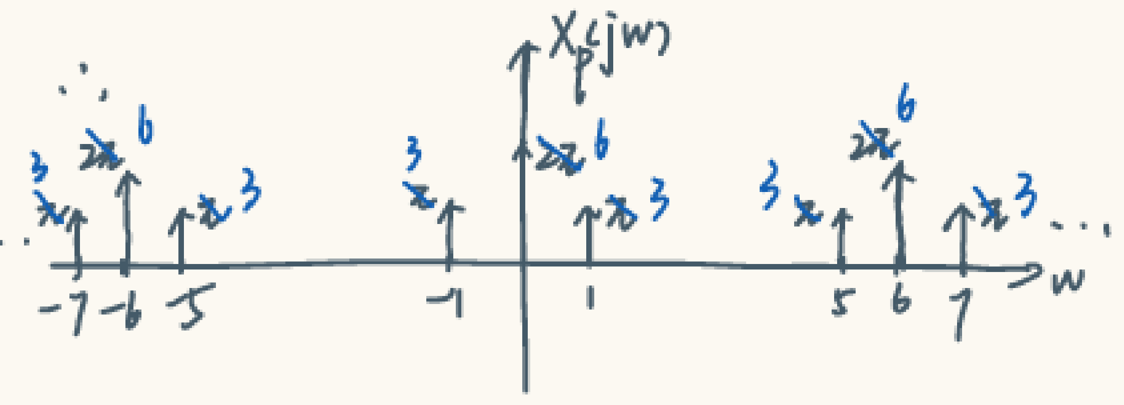
(1) 即求采样过程中的 $X_p(jw)$.

由 $x(t)=1+\cos(t)$，我们有 $X(jw)$:



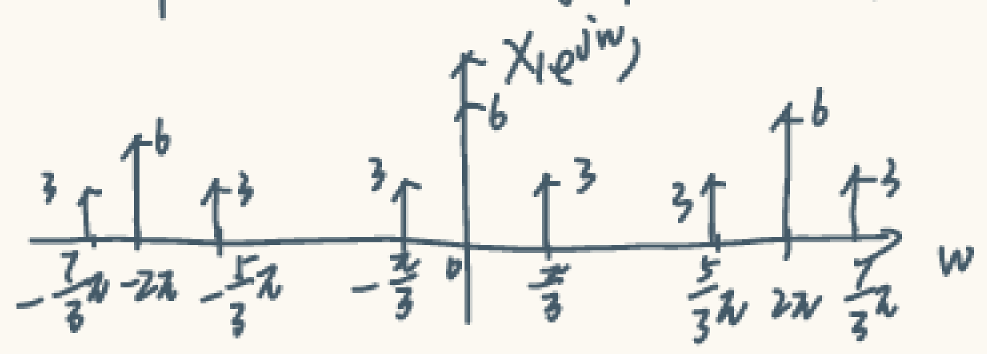
$X_p(jw)=\frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{+\infty}X(j(w-kw_0))$，即 $X(jw)$ 朝右/左以 $\frac{2\pi}{T}$ 为周期重复

∴



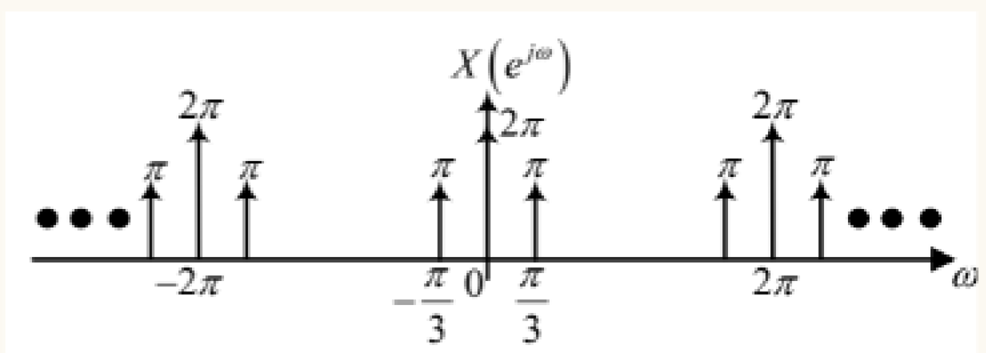
峰值: $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$

(2) 计算 $X(e^{jw})=X_s(j\cdot\frac{w}{T})$. 所有下标 ×T



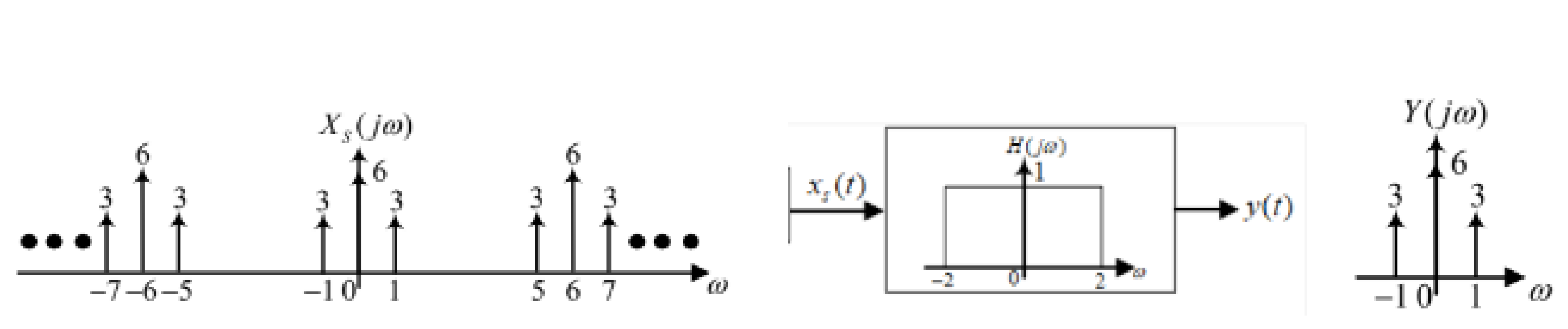
△ δ(t)中坐标变换需考虑幅值变化, $\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t) \Rightarrow \delta(t)=|a|\cdot\delta(at)$

∴最终结果:



(3)

（3）如图所示，如果我们将$x_s(t)$送入低通滤波器$H(j\omega)$，计算输出$y(t)$。



$$y(t)=\frac{3}{\pi}[1+\cos(t)]$$

$X(jw)\to X(e^{jw})$:

当满足采样定理时，即$\omega_s>2\omega_M$，我们可以从$x[n]$的频谱$X(e^{j\omega})$推断$x(t)$的频谱$X(j\omega)$。

因为

$$X(e^{j\omega})=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X\left(j\left(\frac{\omega}{T}-k\omega_s\right)\right)$$

我们有

$$X(e^{j\omega})=\frac{1}{T}X\left(j\frac{\omega}{T}\right),\qquad \omega\in[-\pi,\pi)$$

因此我们有：

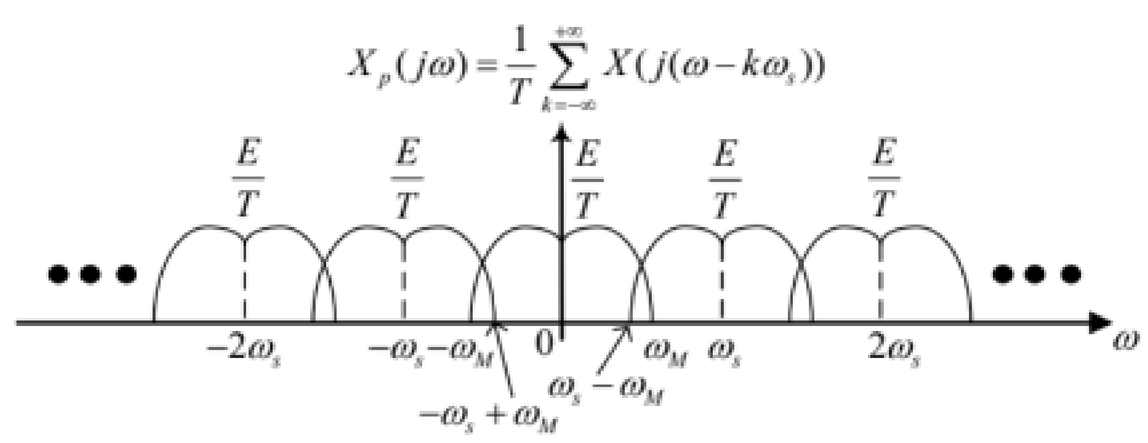
$$X(j\omega)=TX(e^{j\omega T})\quad \omega\in\left[-\frac{\pi}{T},\frac{\pi}{T}\right)$$

上式仅当满足采样定理时成立，即$\omega_s>2\omega_M$。

信号的欠采样:

定义:

当采样过程不满足采样定理时，即$\omega_s<2\omega_M$，我们称之为**混叠**，或者**欠采样**在混叠情况下，$X_p(j\omega)$会重叠，所以我们无法完全重建$X(j\omega)$从$X_p(j\omega)$。



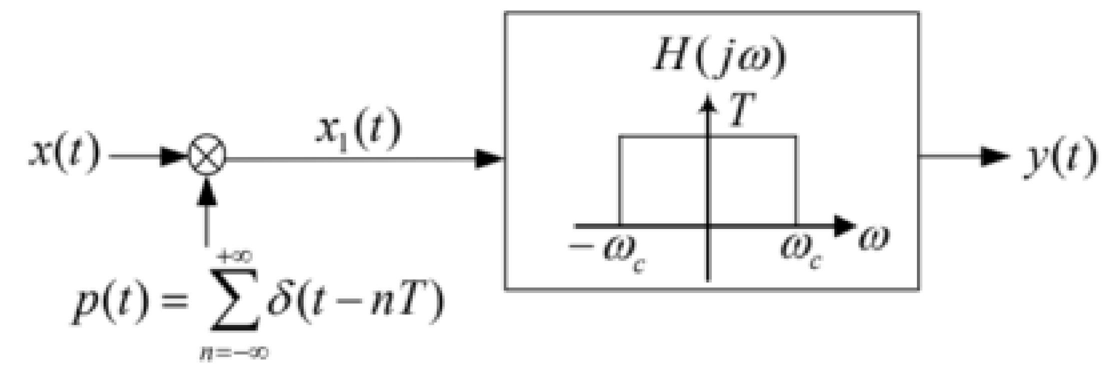
欠采样导致频谱混叠

例题:

例：采样系统如下图所示，若输入

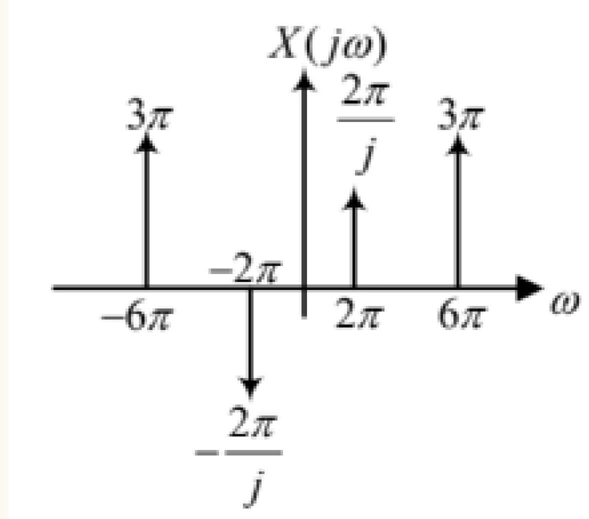
$$x(t)=2\sin(2\pi t)+3\cos(6\pi t)\quad \left(T=\frac{1}{3}\right)$$

$H(j\omega)$是理想的低通滤波器，其幅度T和截止频率$\omega_C=13\pi$。



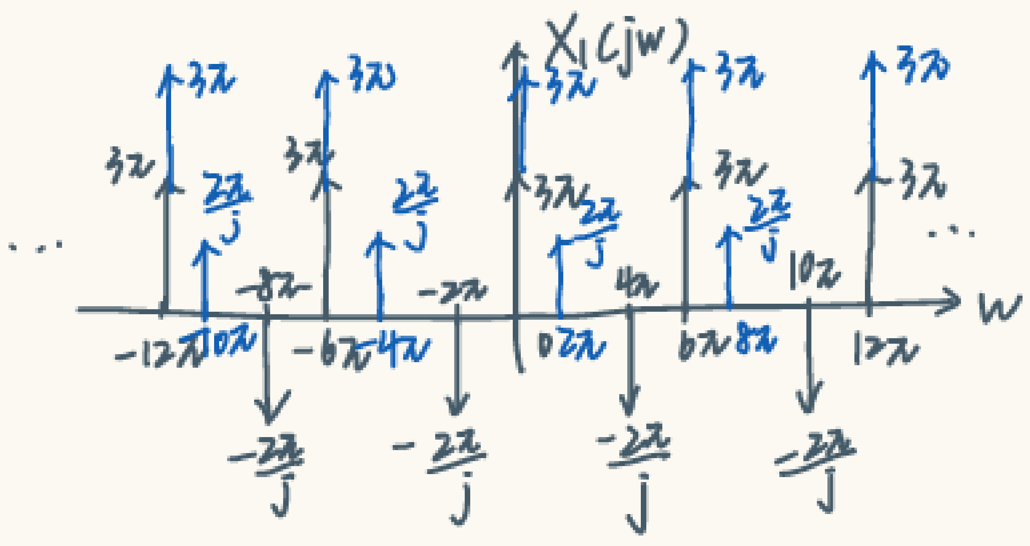
(1) 计算 $x(t)$的频谱$X(j\omega)$。
(2) 计算$X_1(j\omega)$ 的频谱$x_1(t)$。
(3) 计算输出$y(t)$。

解:

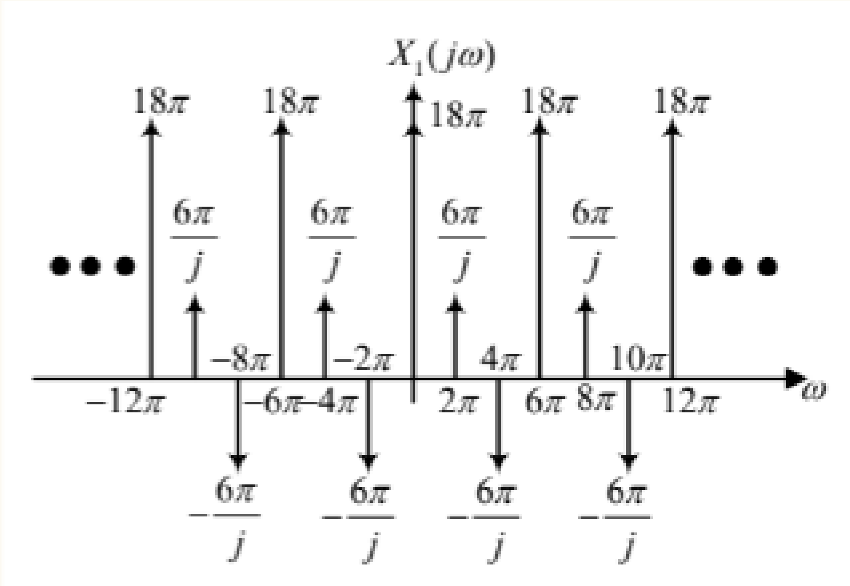


$T=\frac{1}{3}$

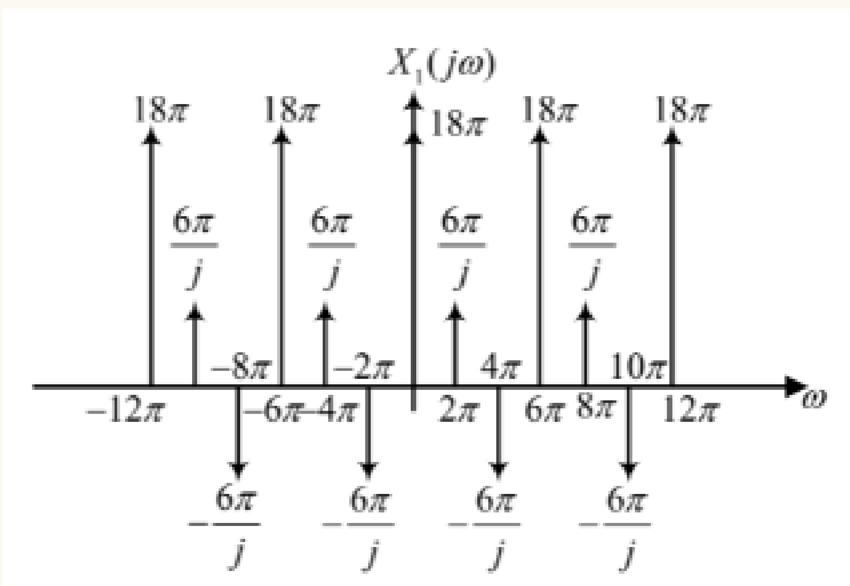
$w_s=\frac{2\pi}{T}=6\pi$



再调整一下幅值 (/T)

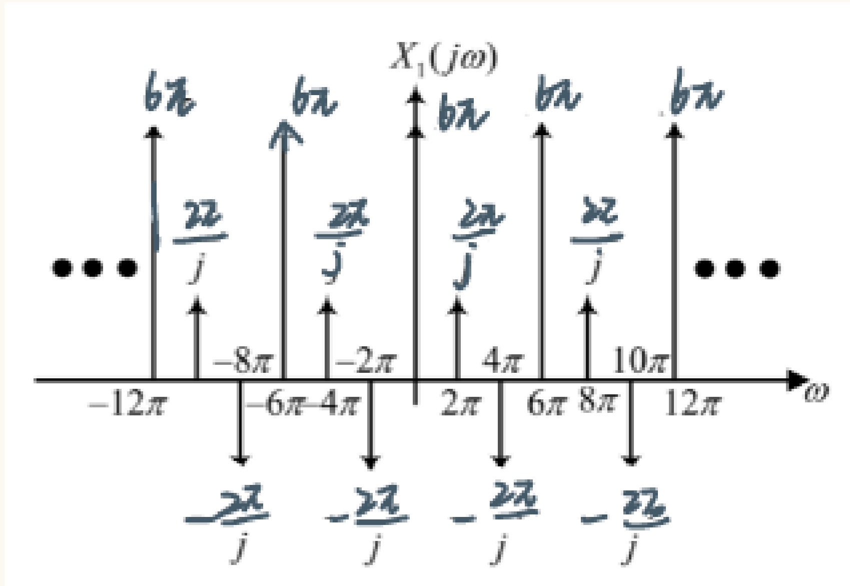


(3) 低通滤波:



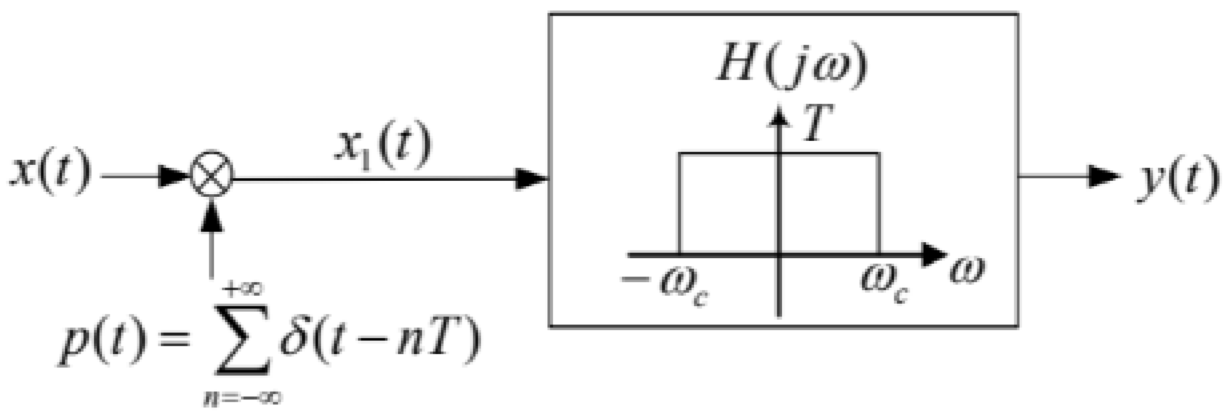
由于 $T=\frac{1}{3}$,

⇓



$$y(t)=6\cos(12\pi t)-2\sin(10\pi t)+2\sin(8\pi t)+6\cos(6\pi t)-2\sin(4\pi t)+2\sin(2\pi t)+3$$

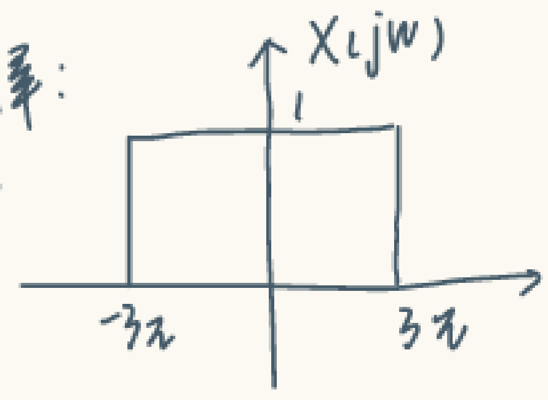
例：采样系统如下图所示，若输入
$$x(t)=\frac{\sin(3\pi t)}{\pi t}$$
$H(j\omega)$是理想的低通滤波器，其幅度T和截止频率$\omega_C=4\pi$。



(1) 计算的$x(t)$的频谱$X(j\omega)$。
(2) 如果$T=0.25$，计算$x_1(t)$的频谱$X_1(j\omega)$和输出$y(t)$。
(3) 如果$T=0.5$， 计算$x_1(t)$的频谱$X_1(j\omega)$和输出$y(t)$。

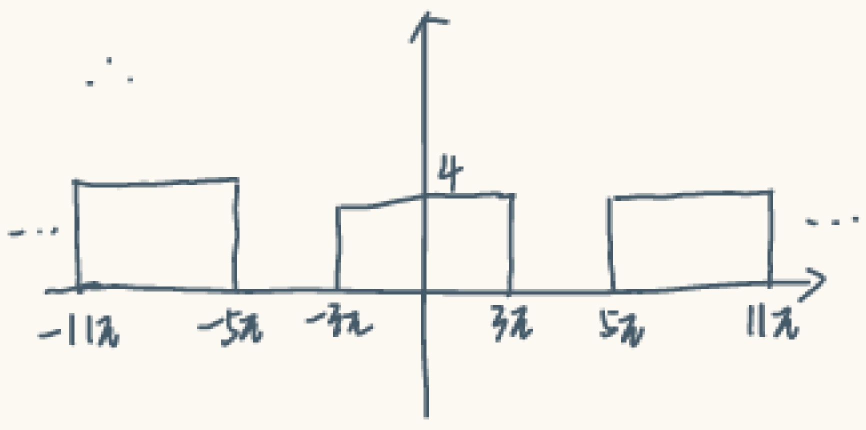
解:

(1)

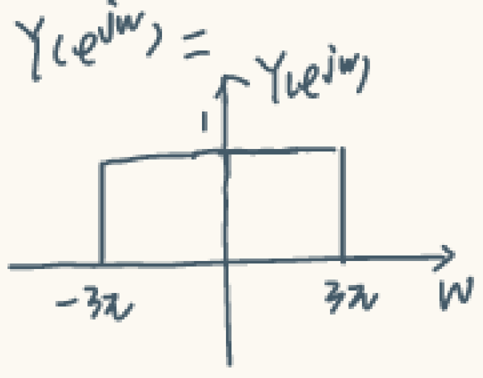


(2) $T=\frac{1}{4}$ $\quad w_s=2\pi/T=8\pi$ $\quad$ 幅值=4

∴

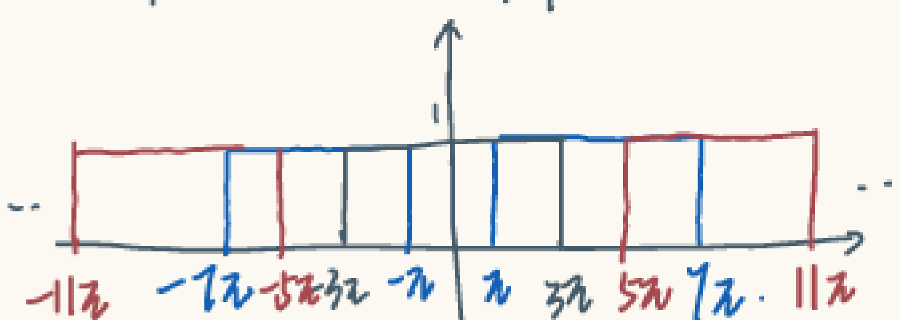


∴ $Y(e^{jw})=$

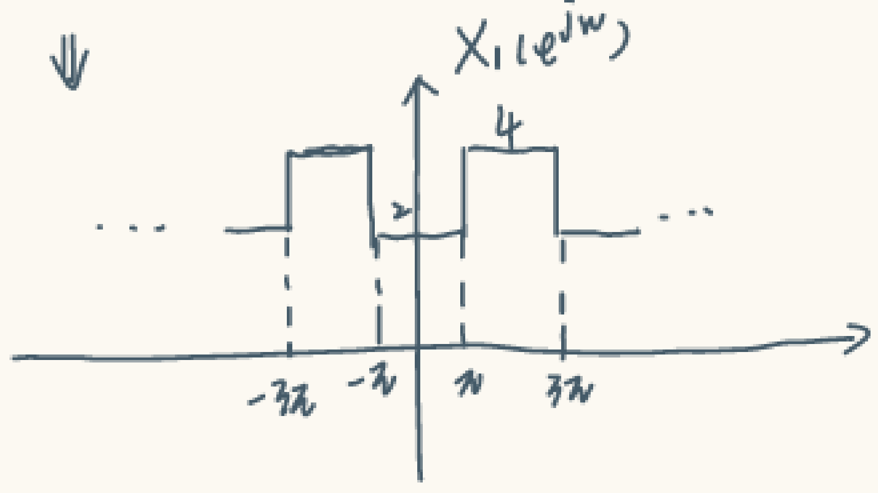


$y(t)=\frac{\sin(3\pi t)}{\pi t}$

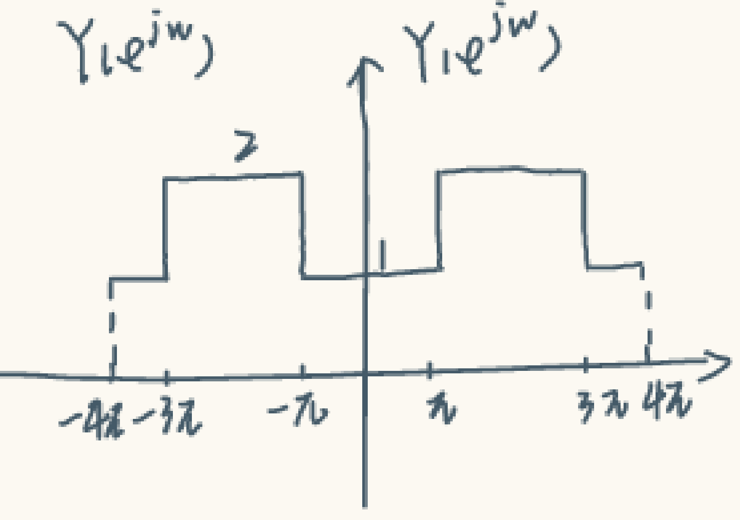
(3) $T=0.5$, $\quad w_s=2\pi/T=4\pi$. 混叠. 幅值×2



⇓

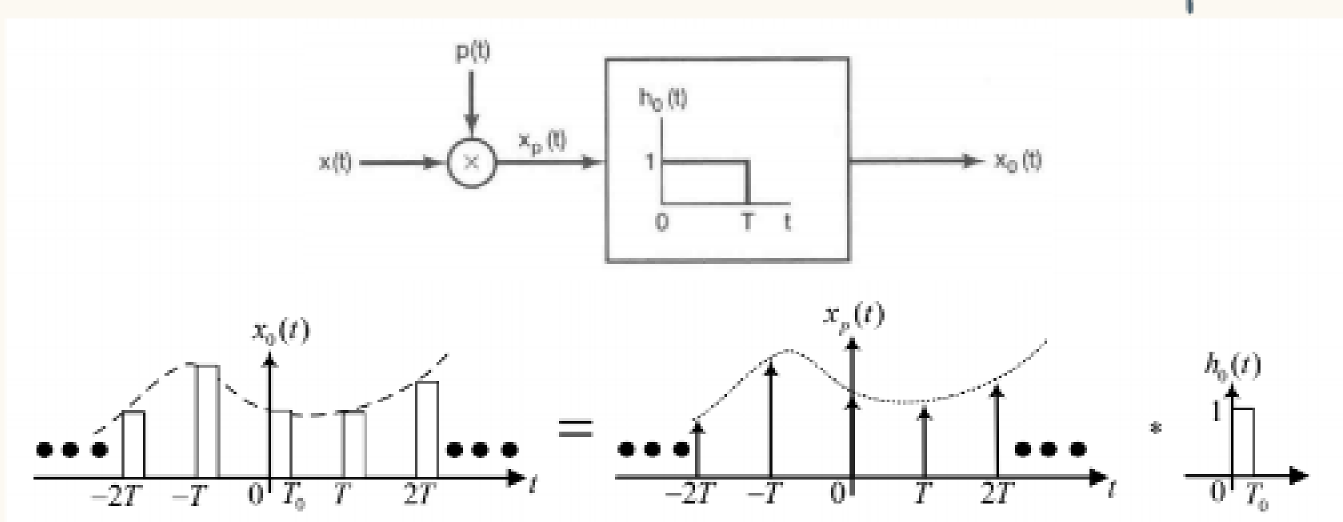


∴ $Y(e^{jw})$



$$\therefore y(t)=\frac{\sin(4\pi t)+\sin(3\pi t)-\sin(\pi t)}{\pi t}$$

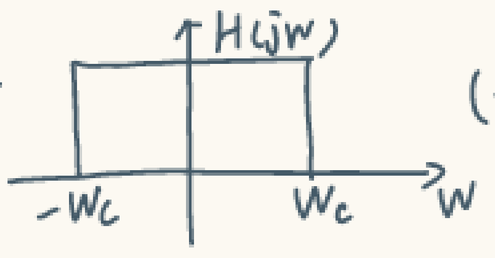
连续信号的零阶保持/一阶保持 (希望用$X_p(jw)$恢复$X(jw)$)



$X_0(jw)=X_p(jw)H_0(jw)=X_p(jw)\,T_0\cdot Sa(\frac{T_0}{2}w)$

$H_0(jw)=\frac{2\sin(\frac{T_0}{2}w)}{w}\cdot e^{-j\cdot\frac{T_0}{2}w}$ $\quad\therefore X_p(jw)=\frac{X_0(jw)}{H_0(jw)}$

$\therefore X(jw)=X_p(jw)\cdot$



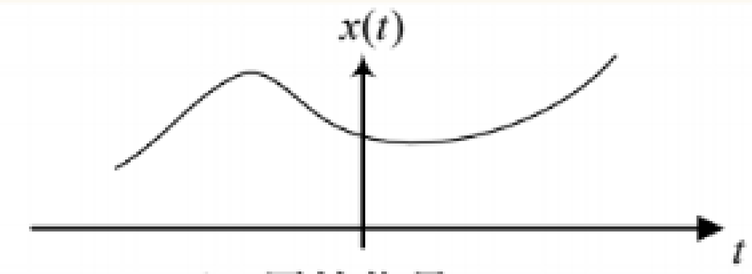
(低通滤波)

即 $X(jw)=\left[\frac{H(jw)}{H_0(jw)}\right]X_p(jw)$

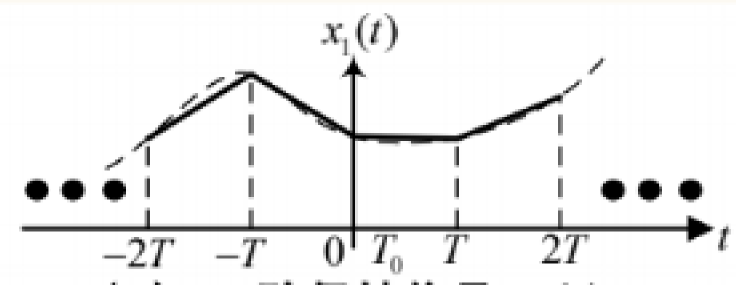
⇓

令 $H_r(j\omega)=\frac{1}{H_0(j\omega)}H(j\omega)=\frac{\omega}{2\sin\left(\frac{T_0}{2}\omega\right)}e^{j\frac{T_0}{2}\omega}H(j\omega)$

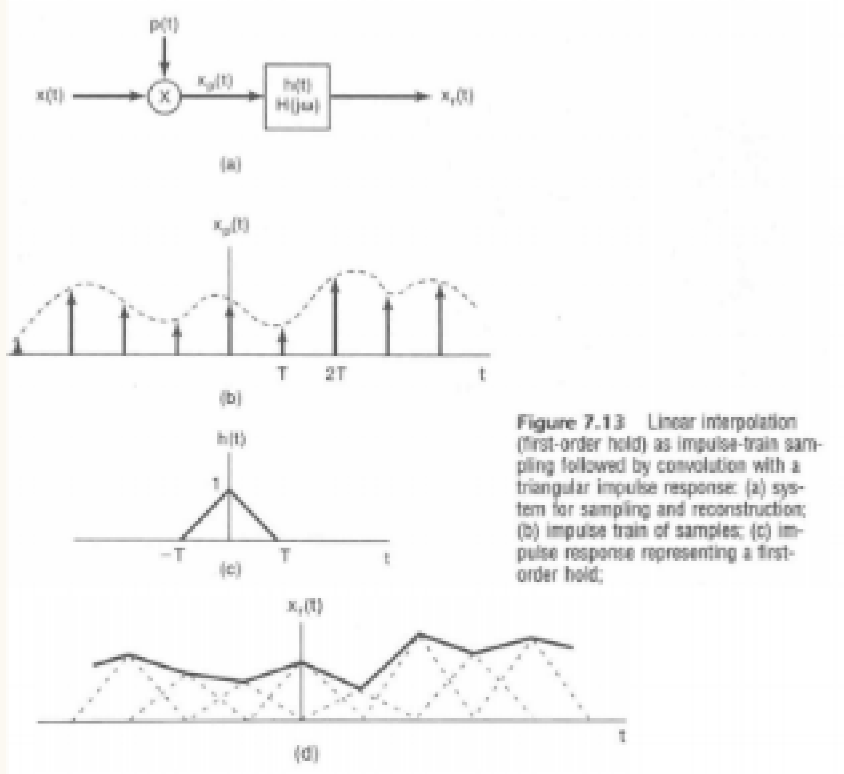
一阶保持(线性插值).

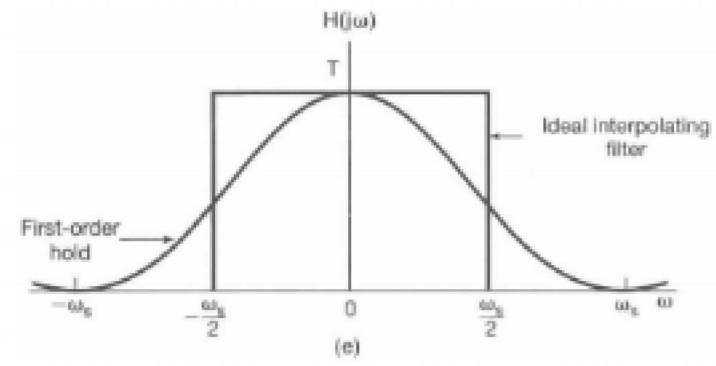


（a） 原始信号$x(t)$



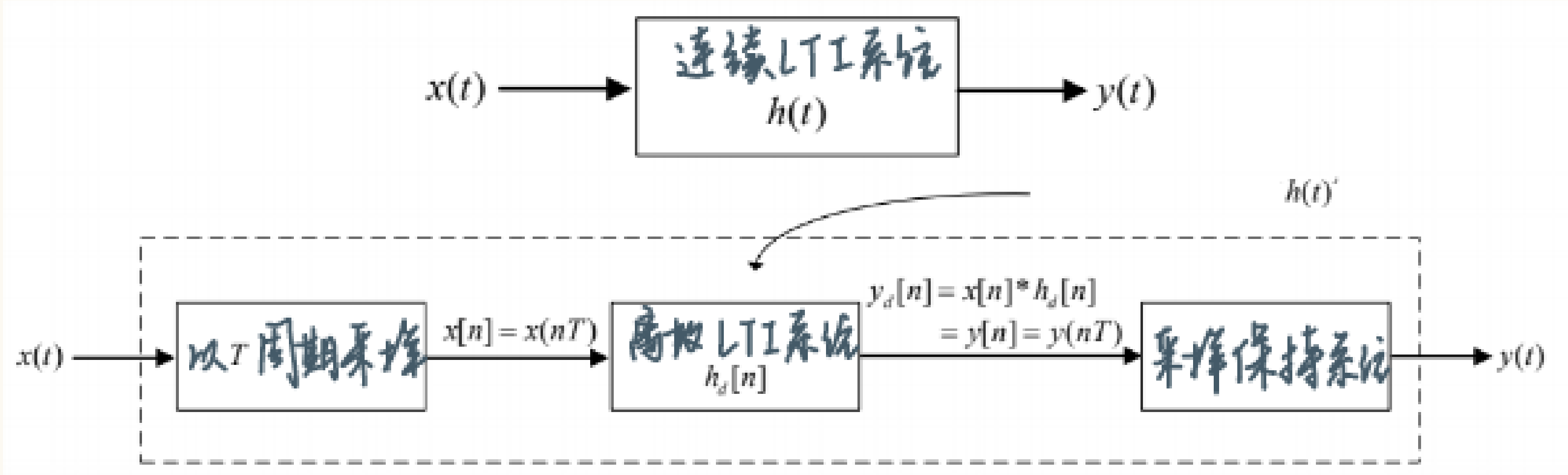
（b） 一阶保持信号$x_1(t)$





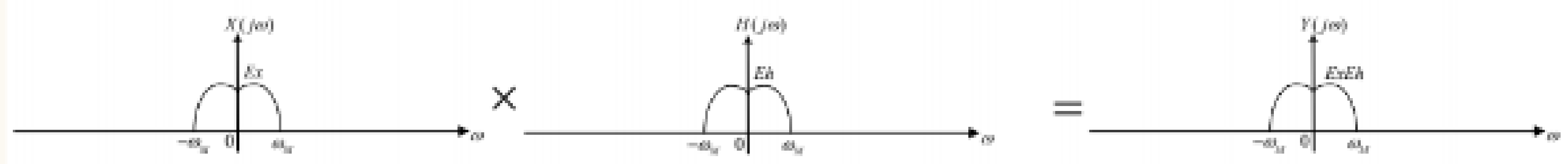
$$x_1(t)=x_p(t)*h(t)$$
$$X_1(j\omega)=X_p(j\omega)H(j\omega)$$
$$H(j\omega)=\frac{1}{T}\left[\frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega}{2}}\right]^2$$

连续时间系统的离散实现.

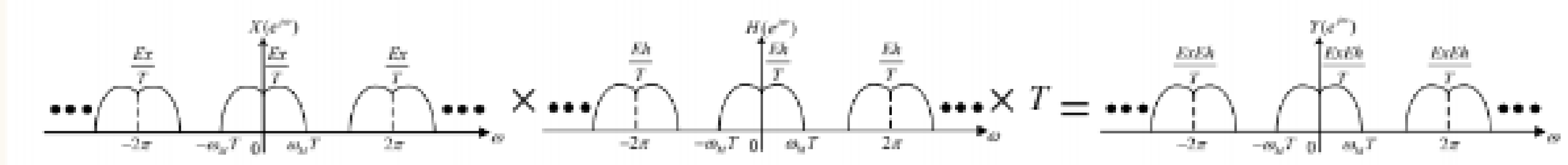


定理：如果$x(t)$和$h(t)$是带限信号，满足采样定理，即$X(j\omega)=H(j\omega)=0$当$|\omega|>\omega_M$时，而且$\omega_s>2\omega_M$，那么当
$$h_d[n]=Th[n]=Th(nT)$$
或者
$$H_d(e^{j\omega})=TH(e^{j\omega})=H\left(j\frac{\omega}{T}\right),\qquad \omega\in(-\pi,\pi)$$
上述离散 LTI 系统的输出$y_d[n]$是上述连续系统的输出$y(t)$:
$$y_d[n]=y(nT)$$

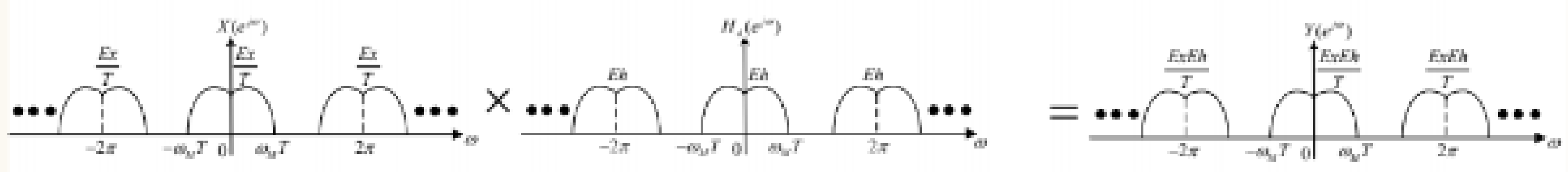
证明:



（a） $Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)$



（b） $Y(e^{j\omega})=TX(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$



（c） $Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})H_d(e^{j\omega})$

比较（b）和（c），我们可以得到:
$$H_d(e^{j\omega})=TH(e^{j\omega})$$
所以:
$$h_d[n]=Th[n]=Th(nT)$$

实际使用时如此代换

$H(e^{jw})=H(j\cdot\frac{w}{T})$

有点看不懂…但可以代公式

例：数字微分器 $x(t)*h(t)=\frac{dx(t)}{dt}$，即
$H(jw)=\begin{cases}jw, & |w|<w_c\\ 0, & |w|>w_c\end{cases}$. 求$h_d[n]$

解：$H_d(e^{jw})=H(j\frac{w}{T})=j\cdot\frac{w}{T}$.

$$h_d[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}j\cdot\frac{w}{T}e^{jwn}dw=\begin{cases}\frac{(-1)^n}{nT}, & n\neq0\\ 0, & n=0\end{cases}$$

例2：单采样延迟．$y(t)=x(t-\Delta)$ $\therefore Y(jw)=e^{-jw\cdot\Delta}\cdot X(jw)$

$\therefore H(jw)=e^{-jw\cdot\Delta}$

$\therefore H_d(jw)=H(j\cdot\frac{w}{T})=e^{-j\cdot\frac{w}{T}\cdot\Delta}$, $|w|<\pi$

$\therefore h_d[n]=\delta[n-\frac{\Delta}{T}]$ 若 $\Delta=kT$．则 $h_d[n]=\delta[n-k]$

如果Δ不是T的整数倍，那么有：

$$h_d[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-j\frac{\omega}{T}\Delta}e^{j\omega n}d\omega=\frac{\sin\left[\pi\left(n-\frac{\Delta}{T}\right)\right]}{\pi\left(n-\frac{\Delta}{T}\right)}$$ （定义式）

例：$\Delta=\frac{T}{2}$．

$$h_d[n]=\frac{\sin\left[\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]}{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}$$