随过公式

零. 概统公式

1 $\phi(x)$ 是正态的分布函数

2 $F_X(x) = P(X \le x)$ $\quad F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv$

一、基本概念

- 均值函数: $\mu_X(t) = E[X(t)]$
- 方差函数: $\sigma_X^2(t) = D[X(t)] = E[X^2(t)] - (E[X(t)])^2$

- 自相关: $R_X(t,s) = E(X(t)X(s)),$
- 自协方差: $C_X(t,s) = \mathrm{Cov}(X(t), X(s)) = R_X(t,s) - \mu_X(t)\mu_X(s)$
- 互相关: $R_{XY}(t,s) = E(X(t)Y(s))$
- 互协方差: $C_{XY}(t,s) = \mathrm{Cov}(X(t), Y(s))$
  $= R_{XY}(t,s) - \mu_X(t)\mu_Y(s)$

二、Markov → $P(X_{n+1}=j \mid X_1=\cdots, X_n=i)$ 与 $i_0, i_1, \cdots i_{n-1}$ 无关.

一、一步转移矩阵

$P_{ij} = P(X_{n+1}=j \mid X_n=i) = P_{n,n+1}(i,j)$

→ $P_{ij}(n,n+1)$ 与n无关, 时齐 / 有关, 非时齐

二、有限维分布

若采用 $p_{ij}^{(k)}$ 表示 k 步转移概率，则 C-K 方程为:

$$p_{ij}^{(m+l)} = \sum_k p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(l)}$$

由此还可以推出: (假定时齐, P 为一步转移概率矩阵)

$$P^{(m+n)} = P^{(m)}P^{(n)}$$

特别有 $P^{(n)} = P^n$

三、常返与暂留

2. 常返与暂留

- f_{ii} 是从状态 i 出发，在有限步内首次返回 i 的概率。
- 常返态 (Recurrent): 若 $f_{ii} = 1$。
- 暂留态 (Transient): 若 $f_{ii} < 1$。
- 判别法: 状态 i 是常返的 $\iff$ $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty。}$ 状态 i 是暂留的 $\iff$ $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} < \infty$ 。
- 正常返与零常返: 对于常返态 i，其 $\boxed{\text{平均返回时间 } \mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}\text{。若 } \mu_i < \infty}$，则为正常返；若 $\mu_i = \infty$，则为零常返。

互达 等价:

① $\boxed{\text{互达}}$: 定义

② $\forall i,j$ 互达: $\boxed{\text{不可约}}$

③ $\boxed{d(i)}$: 从i返回自身的步数n的最大公约数.

④ $d(i)=1$. $\boxed{\text{非周期}}$

$\forall i$ 非周期 ⇒ 非周期Markov链

⑤ 状态i常返 + 非周期 ⇒ $\boxed{\text{遍历}}$

⑥ 不可约 非周期 正常返 ⇒ $\boxed{\text{遍历的马尔可夫链}}$

四、平稳分布

1. 定义:

$\pi_j = \sum_{i=1}^{N} \pi_i P_{ij}, \forall j \in N$

$\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_n)$ 代表稳态时各个状态的含量。满足 ① $\underbrace{\pi = \mathbf{P}\pi}_{\text{平稳性}}$ （$\mathbf{P}$ 为一步转移矩阵）② $\underbrace{\sum \pi_i = 1}_{\text{分布律}}$

△例: 求平稳分布

例 3.1.5 (图上的简单随机游动) 设 V 是一个简单图的顶点集合, 对任何 $i, j \in V$, 如果 i, j 有边相连, 则称 j 是 i 的邻居. 假设每个顶点至少有一个邻居. 现在有一个粒子在 V 上跳动, 如果第 n 步在顶点 i, 则下一步等可能地到达 i 的邻居. 以 X_n 表示 n 步后粒子所在的顶点, 则 $\{X_n\}$ 是时齐马尔可夫链, 状态空间 $I = V$. 若 j 不是 i 的邻居, 则 $p_{ij} = 0$; 若 j 是 i 的邻居, 则 $p_{ij} = \frac{1}{d_i}$, 这里 d_i 表示 i 的邻居数.

图 3.1.6 上的简单随机游动对应的状态空间 $I = \{0, 1, 2, 3\}$,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

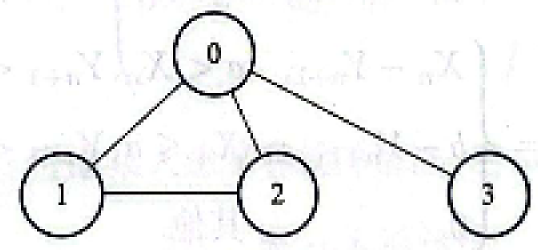


图 3.1.6

例 3.4.1 求例 3.1.5 中 $\{X_n\}$ 的所有平稳分布.

解 设平稳分布为 $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$, 则

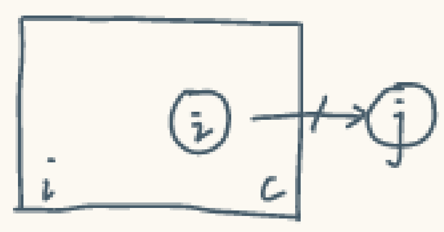
Tips: P_{ij}. 从i→j.
∴ 纵向求和

$$\begin{cases} \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1, \\ \pi_1 = \frac{1}{3}\pi_0 + \frac{1}{2}\pi_2, \\ \pi_2 = \frac{1}{3}\pi_0 + \frac{1}{2}\pi_1, \\ \pi_3 = \frac{1}{3}\pi_0, \end{cases}$$

有唯一解 $\pi = \left(\frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$.

五、一些性质

闭集:



$P_{ij} = 0$, $i \in C$, $j \notin C$

不可约 *Markov* 链的性质

① 若 $\{X_n\}$ 正常返，则 π 存在且唯一，$\boxed{\pi_i = \frac{1}{\mu_i}\text{。}}$

② 若 $\{X_n\}$ 遍历，则 $\forall\, i\, j$ $\boxed{\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}} = \pi_j$ → $\lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = \pi_j$ 。 (极限分布)

③ 若状态空间有限，则 $\{X_n\}$ $\boxed{\text{正常返。}}$

可约 *Markov* 链的性质

① i 的互达等价类不闭 → i 暂留， i 常返 → i 的互达等价类关闭。

② i 的互达等价类是有限闭集 → i 正常返。

③ 若 j 暂留或零常返，则 $\forall\, i$ $\boxed{\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0}$

有限 *Markov* 链的状态分解

可将状态空间分解为所有不交的互达等价类 C_i 与余下状态 T 的并集，则 C_i 中各状态正常返，T 中各状态暂留。则将 $\{X_n\}$ 限制在 C_i 上得到一个不可约正常返的 *Markov* 链，其满足 $\pi_i = \frac{1}{\mu_i}$ 。

放一道历年卷题:

✓ 答案与解析 >

(3) 平均回转时

正常返态为 $\{1,2,3,4\}$，分布在两个闭的等价类 $C_1=\{1,2\}$ 和 $C_2=\{3,4\}$。我们需要分别计算在这两个子链上的平稳分布。

- 对于 $C_1=\{1,2\}$:

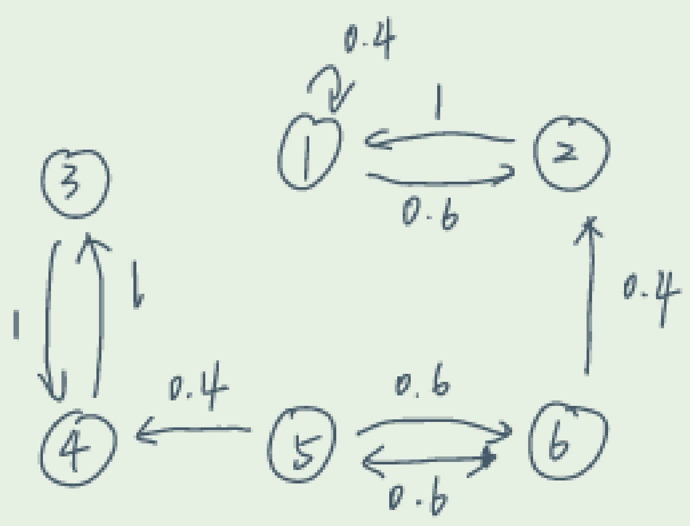
  转移矩阵为 $P_1=\begin{pmatrix}0.4 & 0.6\\ 1 & 0\end{pmatrix}$。

  设平稳分布为 (π_1,π_2)。

  $\begin{cases}\pi_1=0.4\pi_1+1\pi_2\\ \pi_2=0.6\pi_1+0\pi_2\\ \pi_1+\pi_2=1\end{cases}\implies\begin{cases}0.6\pi_1=\pi_2\\ \pi_1+\pi_2=1\end{cases}$

  解得 $\pi_1=5/8,\pi_2=3/8$。

  平均回转时: $\mu_1=1/\pi_1=8/5,\mu_2=1/\pi_2=8/3$。



- 对于 $C_2=\{3,4\}$:

  转移矩阵为 $P_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$。

  设平稳分布为 (π_3,π_4)。

  $\begin{cases}\pi_3=\pi_4\\ \pi_4=\pi_3\\ \pi_3+\pi_4=1\end{cases}$

  解得 $\pi_3=1/2,\pi_4=1/2$。

  平均回转时: $\mu_3=1/\pi_3=2,\mu_4=1/\pi_4=2$。

(4) 极限概率

- 求 $\lim_{n\to\infty}P_{12}^{(n)}$:

  状态 1 和 2 属于闭的等价类 $C_1=\{1,2\}$。这个子链是不可约、正常返的。

  周期 $d(1)=d(2)=1$，所以是非周期的。

  因此，极限分布存在且等于平稳分布。

  $\lim_{n\to\infty}P_{12}^{(n)}=\pi_2=3/8$。

☆. 求 $\lim_{n\to\infty}P_{53}^{(n)}$:

$$\lim_{n\to\infty}P_{ij}^{(n)}=f_{iC(j)}\cdot\pi_j$$

这时用吸收概率的知识:

$$\begin{cases}h_2=0\\ h_4=1.\\ h_5=0.4+h_4+0.6h_6\\ h_6=0.6h_5\end{cases}$$

$\therefore\ h_5=0.4+0.3h_5$

$h_5=\frac{4}{7}$

$\therefore$ 原式 $=\frac{4}{7}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{7}$

六、吸收概率 & 平均吸收时间

△ 一步分析法:

注 (方法一: 计算吸收概率) 设 $h_i=P$(从状态 i 出发, 最终被吸收集 A_{target} 吸收)。1. 定义变量与边界条件:

- 对于 $k\in A_{\text{target}}$: $\boxed{h_k=1。}$ (写一步转移矩阵)
- 对于 $k\in A_{\text{other}}$ (其他吸收集, 无法到达 A_{target}): $h_k=0$。
- 对于所有其他暂留状态 i: h_i 是待求未知数。

2. 建立方程 (一步分析): 对于每个非吸收暂留态 i:

$$h_i=\sum_{j\in I}p_{ij}h_j$$

3. 求解方程组。

注 (方法二: 计算平均吸收时间) 设 $m_i=E$(从状态 i 出发, 首次进入吸收集 C 的时间)。1. 定义变量与边界条件:

- 对于 $k\in C$: $m_k=0$。
- 对于所有其他暂留状态 i: m_i 是待求未知数。

2. 建立方程 (一步分析): 对于每个非吸收暂留态 i:

$$m_i=1+\sum_{j\in I}p_{ij}m_j$$

3. 求解方程组。

例题:

ⓘ (2016-2017 秋学期补考 第四题)

甲乙两人玩游戏，每局甲赢一元的概率为 0.4，输一元的概率为 0.3，平局的概率为 0.3。假设一开始甲有1元，乙有2元，游戏直到某人输光为止。

(1) 建立一步转移矩阵P;

(2) 求甲输的概率。

✓ 答案与解析 >

(1) 一步转移矩阵

状态是甲拥有的钱数。总钱数为 $1+2=3$ 元。状态空间 $I=\{0,1,2,3\}$。

状态 0 (甲输光) 和 3 (乙输光) 是吸收态。

- $P_{00}=1,P_{33}=1$。
- 从状态 1: 赢1元到2 (概率0.4)，输1元到0 (概率0.3)，平局留1 (概率0.3)。

  $P_{10}=0.3,P_{11}=0.3,P_{12}=0.4$。
- 从状态 2: 赢1元到3 (概率0.4)，输1元到1 (概率0.3)，平局留2 (概率0.3)。

  $P_{21}=0.3,P_{22}=0.3,P_{23}=0.4$。

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0.3 & 0.3 & 0.4 & 0\\ 0 & 0.3 & 0.3 & 0.4\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

(2) 甲输的概率

我们要求从状态 1 开始，最终被吸收态 0 吸收的概率。设 h_i 为甲有 i 元时，最终输光的概率。

- 边界条件: $h_0=1,h_3=0$。
- 递推方程:

$$h_1=0.3h_0+0.3h_1+0.4h_2\implies h_1=0.3(1)+0.3h_1+0.4h_2\implies 0.7h_1=0.3+0$$

$$h_2=0.3h_1+0.3h_2+0.4h_3\implies h_2=0.3h_1+0.3h_2+0.4(0)\implies 0.7h_2=0.3h_1$$

- 解方程:

  从第二个方程得 $h_2=\frac{3}{7}h_1$。

  代入第一个方程:

  $0.7h_1=0.3+0.4(\frac{3}{7}h_1)$

  $0.7h_1=0.3+\frac{1.2}{7}h_1$

  $4.9h_1=2.1+1.2h_1$

  $3.7h_1=2.1$

  $h_1=\frac{2.1}{3.7}=\frac{21}{37}$

甲一开始有1元，所以甲输的概率是 $h_1=\frac{21}{37}$。

ⓘ (17.md 第三题)

一个非均匀的硬币，出现head(H)的概率 P(H)=0.4。

a) 求出现HH的平均等待时间;

b) 求HH比TTT先出现的概率。

(a) 解: 设 m_0 是从 0 开始的平均等待时间

$\therefore\ m_0=1+P(H)m_H+P(T)m_0$

$m_H=1+P(H)\cdot 0+P(T)m_0$

解得 $m_0=\frac{35}{4}$

(b) 设吸收态: HH; TTT

h_i: 从当前状态出发, 到HH的概率

0: HH	2: H	4: TT
1: 空	3: T	5: TTT

$\therefore\ h_0=1.\quad h_5=0$

$$\begin{cases}h_1=0.4h_2+0.6h_3\\ h_2=0.4h_0+0.6h_1\\ h_3=0.4h_1+0.6h_4\\ h_4=0.4h_1+0.6h_5\end{cases}$$

$\therefore$ 令 $h_1=5t$. $h_4=2t$

$h_3=3.2t$

$h_2=0.4+3t$

$\therefore\ h_1=5t=0.16+1.2t+0.6\times3.2t$

$1.88t=0.16\quad t=\frac{4}{47}\quad h_1=\frac{20}{47}.$

好像算错了. 可能是 $\frac{50}{77}$

第三章. 泊松过程与布朗运动

U4 Summarize： $N(t)$：$(0,t]$内事件个数

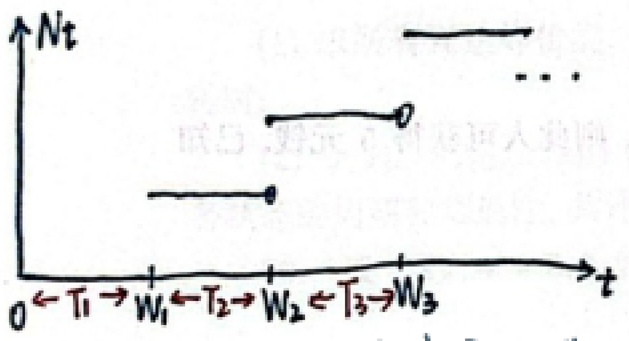
$\{N_t, t\geq 0\}$ 是强度为λ的泊松过程

① $N_0=0$

② 独立增量

③ $N(t)-N(s)\sim \pi(\lambda(t-s))$ (λ↑,事件越密集)

$$P(N(t)-N(s)=k)=\frac{[\lambda(t-s)]^k e^{-\lambda(t-s)}}{k!}$$



另一个定义： 求概率密度函数：$\lambda e^{-\lambda t}$

当且仅当 $T_1, T_2 \cdots T_n$ 独立同分布，且 $\boxed{T_i \sim Exp(\lambda)}$

物理意义：单位时间内发生λ个件事.

$E(T_i)=\frac{1}{\lambda}$

$\{W_n\leq t\}=\{N_t\geq n\}$

性质1：

$\{N_1(t)\}$，均值λ_1

独立

$\{N_2(t)\}$，均值λ_2

泊松过程 ⇒ $\{N_1(t)+N_2(t)\}$ 均值 $\lambda_1+\lambda_2$

性质2： 概率p是类型一，(1-p)是类型2

0 8 0 ⇒ $\begin{cases}\{N_1(t)\}: \pi(\lambda p)\\ \{N_2(t)\}: \pi(\lambda(1-p))\end{cases}$

例：

设 $\left.\begin{matrix}\{N_1(t)\}, \lambda_1\\ \{N_2(t)\}\ \lambda_2\end{matrix}\right\}$ 独立，类型1比2先发生的概率？

解：用 W_1, S_1 分别表示1.2先发生的概率，有：

$W_1\sim Exp(\lambda_1)$， $S_1\sim Exp(\lambda_2)$

即求 $P(W_1<S_1)$： … 联合密度函数 在 $W_1<S_1$ 区域积分

$$P(W_1<S_1)=\iint_{0<x<y}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}dxdy$$

$$=\int_0^{\infty}dx\cdot\int_x^{\infty}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\cdot\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}dy=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

$\{N(t), t\geq 0\}$： 强度 $\lambda(t)$ 的 $\boxed{\text{非齐次泊松过程}}$

① $N(0)=0$

② 独立增量

③ $\forall t>s\geq 0$, $N(t)-N(s)\sim\pi(\int_s^t\lambda(h)dh)$

$\{B(t), t\geq 0\}$ 标准布朗运动

① $B(0)=0$

② 独立增量

③ $\forall t>s\geq 0$, $\boxed{B(t)-B(s)\sim N(0,t-s)}$

④ 样本轨道连续

$\boxed{\text{△等价定义：}\{X_t; t\geq 0\}\text{ 正态过程，}EX_t=0,\ R_X(t,s)=\min\{t,s\}}$

✓ 自相似性，$\forall a\neq 0$ $\frac{1}{a}B(a^2t)$ ✓ ($-B(t)$ ✓)

✓ 马尔科夫，$\forall u>0$, $X(t)=B(u+t)-B(u)$ ✓

✓ 时间对称：(逆转时间，计算过去→计算将来)

$$\tilde{B}(t)=\begin{cases}tB(\frac{1}{t}), & t\neq 0.\\ 0, & t=0\end{cases}$$

例题：

一个路口有三种汽车经过，红色，绿色，蓝色，速率分别为 $\lambda_R, \lambda_G, \lambda_B$，互相独立。

a） 求到达汽车的时间间隔的概率密度；

b） 在t0时刻一辆红车经过，分别求下一辆为红车，蓝车，非红车的概率；

c） 在t0时刻一辆红车经过，求下三辆为红车，第四辆非红车的概率；

(a) 令 $\lambda=\lambda_R+\lambda_G+\lambda_B$

$f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$

(b)

不完全是？需要逆着看.

b) 下一辆车的颜色概率

这可以看作是泊松过程的分解。任意一辆到达的汽车，它是红色的概率为 $p_R=\frac{\lambda_R}{\lambda_R+\lambda_G+\lambda_B}$，是蓝色的概率为 $p_B=\frac{\lambda_B}{\lambda_R+\lambda_G+\lambda_B}$，是绿色的概率为 $p_G=\frac{\lambda_G}{\lambda_R+\lambda_G+\lambda_B}$。

泊松过程的无记忆性意味着，不管上一辆是什么车，下一辆车的颜色分布都是一样的。

- 下一辆为红车的概率: $P(红)=\frac{\lambda_R}{\lambda_R+\lambda_G+\lambda_B}$
- 下一辆为蓝车的概率: $P(蓝)=\frac{\lambda_B}{\lambda_R+\lambda_G+\lambda_B}$
- 下一辆为非红车的概率: $1-P(红)=\frac{\lambda_G+\lambda_B}{\lambda_R+\lambda_G+\lambda_B}$

c) 下三辆红，第四辆非红的概率

由于每次到达的车辆颜色是独立的，这相当于一个伯努利试验。

$P(红,红,红,非红)=P(红)^3\cdot P(非红)^1$

$=\left(\frac{\lambda_R}{\lambda_R+\lambda_G+\lambda_B}\right)^3\left(\frac{\lambda_G+\lambda_B}{\lambda_R+\lambda_G+\lambda_B}\right)$

ⓘ **知识点**

1. 定义 (标准布朗运动)

一个随机过程 $\{B(t), t\geq 0\}$ 是标准布朗运动，如果:

- $B(0)=0$。
- 具有独立增量。
- 具有平稳增量: $B(t)-B(s)\sim N(0,t-s)$ for $t>s$。
- 样本轨道几乎处处连续。

2. 重要性质

- 分布: $B(t)\sim N(0,t)$。
- 协方差: $Cov(B(s),B(t))=\min(s,t)$。
- 高斯过程: 布朗运动是高斯过程，其任意有限维分布都是多元正态分布。
- 首次击中时间 $T_a=\inf\{t>0: B(t)=a\}$:

  $\boxed{P(T_a\leq t)=P(\max_{0\leq s\leq t}B(s)\geq a)}=\boxed{2P(B(t)\geq a)}=2(1-\Phi(\frac{a}{\sqrt{t}}))$ for $a>0$。

- 布朗桥 $X(t)=B(t)-tB(1), 0\leq t\leq 1$:

  $X(0)=X(1)=0$。

  $Cov(X(s),X(t))=s(1-t)$ for $s\leq t$。

均值：$E(B(t)\mid B(1)=0)=0$

方差：$D(B(t)\mid B(1)=0)=t(1-t)$

1. **核心是正态分布**： 所有计算都围绕正态分布的性质展开。
2. **独立增量是关键**： 处理协方差和条件概率时，务必将表达式凑成独立增量的形式。例如，$Cov(B(3)-2B(1),B(2))$ 可以分解为 $Cov(B(3)-B(2)+B(2)-B(1)-B(1),B(2))$。
3. **记住公式**： $Cov(B(s),B(t))=\min(s,t)$ 和首次击中时间的概率公式是高频考点。
4. **条件概率**： $P(B(t_2)>b\mid B(t_1)=a)$ (其中 $t_2>t_1$) 等价于 $P(B(t_2)-B(t_1)>b-a)$，这是一个关于 $N(0,t_2-t_1)$ 的无条件概率。

第四章. 平稳过程

一. 定义

1. 严平稳 (Strict-Sense Stationary, SSS)

过程的任意有限维分布不随时间推移而改变。即 $(X(t_1),\ldots,X(t_n))$ 与 $(X(t_1+h),\ldots,X(t_n+h))$ 同分布。

2. 宽平稳 (Wide-Sense Stationary, WSS)

过程的二阶矩存在，且:

- 均值函数为常数: $E[X(t)]=\mu_X$。
- 自相关函数只与时间差有关: $R_X(t_1,t_2)=R_X(t_2-t_1)=R_X(\tau)$。

3. 关系

- 严平稳 $\Longrightarrow$ 宽平稳 (如果二阶矩存在)。
- 宽平稳 + 高斯过程 $\Longrightarrow$ 严平稳。
- 通常说的"平稳过程"指宽平稳过程。

二. 各态历经性

ⓘ **知识点**

1. 定义

各态历经性描述了随机过程的时间平均与统计平均（集合平均）之间的关系。

- **时间平均**: 对单个样本轨道在时间上求平均。

  均值: $\langle x(t)\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)dt$

  自相关: $\langle x(t)x(t+\tau)\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)x(t+\tau)dt$

- **统计平均**: 对所有样本轨道在某个时刻求平均（即期望）。

  均值: $\mu_X=E[X(t)]$

  自相关: $R_X(\tau)=E[X(t)X(t+\tau)]$

2. 均值各态历经性

如果一个平稳过程的时间均值等于其统计均值（以概率1成立），即 $P(\langle X(t)\rangle=\mu_X)=1$，则称该过程是均值各态历经的。

3. 判据

对于一个宽平稳过程 $\{X(t)\}$，其均值具有各态历经性的一个充要条件是:

$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}(1-\frac{|\tau|}{2T})C_X(\tau)d\tau=0$

一个更常用、更简单的推论（判据）：

如果 $\lim_{\tau\to\infty}C_X(\tau)=0$ (即自协方差函数在无穷远处趋于0)，则过程是均值各态历经的。

等价地，如果 $\boxed{\lim_{\tau\to\infty}R_X(\tau)=\mu_X^2}$，则过程是均值各态历经的。

一般只用这个

♨ **应试技巧**

1. **判断各态历经性**通常是判断**均值各态历经性**。
2. **首选判据**： 计算自相关函数 $R_X(\tau)$，然后求其在 $\tau\to\infty$ 时的极限。
3. **计算 μ_X^2**： 计算均值 μ_X 并平方。
4. **比较**：
   - 如果 $\lim_{\tau\to\infty}R_X(\tau)=\mu_X^2$，则**具有**均值各态历经性。
   - 如果不等，则**不具有**均值各态历经性。
5. **注意**： 对于包含周期分量（如 $\cos(\omega_0\tau)$）的 $R_X(\tau)$，其极限通常不存在，因此一般不~~具有~~各态历经性。对于包含常数项的 $R_X(\tau)$，要特别小心。

能这么判断 → 应去计算 $\langle X(t)\rangle$!!

三. 功率谱密度

1. 定义 (Wiener-Khinchin 定理)

宽平稳过程的功率谱密度 (PSD) $S_X(\omega)$ 是其自相关函数 $R_X(\tau)$ 的傅里叶变换。

- $S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_X(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$
- $R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega$

2. 性质

- $S_X(\omega)$ 是实函数且为偶函数 ($S_X(\omega)=S_X(-\omega)$)。
- $S_X(\omega)\geq 0$ (非负性)。
- 平均功率: $E[X^2(t)]=R_X(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_X(\omega)d\omega$。

傅立叶变换对:

常用 $Fourier$ 变换对

① $e^{-a|\tau|} \xleftrightarrow{F} \frac{2a}{a^2+\omega^2}$

② $\begin{cases} 1-\frac{|\tau|}{T} & |\tau| \le T \\ 0 & |\tau| > T \end{cases} \xleftrightarrow{F} (\frac{sin(\omega T/2)}{\omega T/2})^2$

③ $\frac{sin\omega_0\tau}{\pi\tau} \xleftrightarrow{F} \begin{cases} 1 & |\omega| \le \omega_0 \\ 0 & |\omega| > \omega_0 \end{cases}$

④ $1 \xleftrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega)$

⑤ $\delta(\tau) \xleftrightarrow{F} 1$

⑥ $cos\omega_0\tau \xleftrightarrow{F} \pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$

⑦ $R_X(\tau)cos\omega_0\tau \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2}[S_X(\omega+\omega_0)+S_X(\omega-\omega_0)]$

6、解题方式

① 证明是宽平稳过程，只需证 $E[X(t)]$ 为常数且 R_X 为只和 τ 有关的函数。

② 证明是各态历经过程，只需证 $< X(t) > \equiv \mu_X$ 且 $< X(t)X(t+\tau) > \equiv R_X(\tau)$

③ 在 $\lim\limits_{\tau\to+\infty} R_X(\tau)$ 存在的条件下，证明均值具有各态历经性，也可转而证 $\lim\limits_{\tau\to+\infty} R_X(\tau) = \mu_X^2$