

第六章 拉普拉斯变换

回顾: Chap 2 中. LTI 对复指数响应

如果我们定义:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-st} dt \quad (\text{拉普拉斯变换})$$

$$h(t) \xrightarrow{L} H(s) \text{ 或者 } L[h(t)] = H(s) \text{ 或者 } L^{-1}[H(s)] = h(t)$$

那么有:

$$e^{s_0 t} \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow H(s_0) e^{s_0 t}$$

$$e^{s_0 t} \xrightarrow{LTI} H(s_0) e^{s_0 t}$$

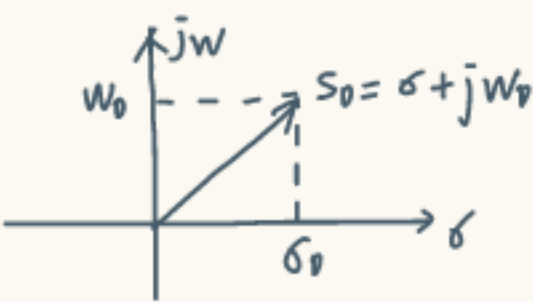
将原先的 $h(t)$ 换成 $x(t)$:

拉普拉斯变换-定义: $X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$, 记作 $x(t) \xrightarrow{L} X(s)$.

$$L[x(t)] = X(s).$$

这里 $s = \sigma + j\omega$ 为复数;

$$\therefore X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t) e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt = \underline{F[x(t) e^{-\sigma t}]}$$



\therefore 傅立叶变换是拉普拉斯变换在 $j\omega$ 轴上特例.

逆变换: $\therefore X(s) = F[x(t) e^{-\sigma t}]$

$$\therefore x(t) e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(s) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(s) e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(s) e^{st} d\omega$$

由于 $s = \sigma + j\omega$ \therefore 当 $\sigma = 0$ 时, $ds = j d\omega$

$$\therefore x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) e^{st} ds$$

同时, $x(t) = -e^{-at} u(-t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+a}, \text{Re}\{s\} < -a$.

例6.1 $x(t) = e^{-at} u(t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+a}, \text{Re}\{s\} > -a$, 设 $a \in \mathbb{R}, s = \sigma + j\omega$.

解: $X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} u(t) \cdot e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s+a)t} dt = \left[-\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \right]_0^{+\infty}$

$$= -\frac{1}{s+a} [e^{-(s+a)\cdot\infty} - 1]$$

△ Tip: a 为复数时也可代

$$\therefore e^{-(s+a)\cdot\infty} = e^{-(\sigma+a)\cdot\infty} \cdot e^{-j\omega\cdot\infty}$$

$$\therefore \textcircled{1} \sigma + a > 0, e^{-(\sigma+a)\cdot\infty} = e^{-\infty} = 0 \therefore X(s) = \frac{1}{s+a}$$

$$\textcircled{2} \sigma + a < 0, e^{-(\sigma+a)\cdot\infty} \rightarrow \infty, \text{不收敛}.$$

$$\textcircled{3} \sigma + a = 0, e^{-(\sigma+a)\cdot\infty} = 1, e^{-j\omega\cdot\infty} = \cos[\omega\cdot(+\infty)] - j\sin[\omega\cdot(+\infty)].$$

若 $\omega \neq 0$, ③ 也不收敛.

例2:

$$u(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{s}, \text{Re}\{s\} > 0$$

$$-u(-t) \xrightarrow{L} \frac{1}{s}, \text{Re}\{s\} < 0$$

令 $a=0$ 即可.

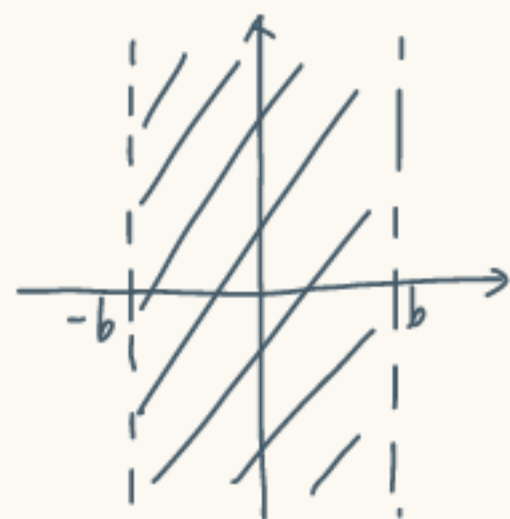
例3: $e^{-b|t|} \xrightarrow{L} \frac{-2b}{s^2 - b^2}, -b < \text{Re}\{s\} < b$

解: $e^{-b|t|} = e^{-bt} u(t) + e^{bt} u(-t)$

$$\therefore e^{-bt} u(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{s+b}, \text{Re}\{s\} > -b$$

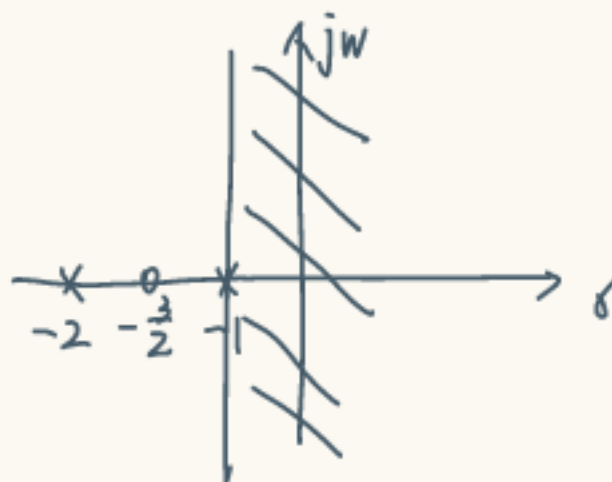
$$e^{bt} u(-t) \xrightarrow{L} -\frac{1}{s-b}, \text{Re}\{s\} < b.$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{1}{s+b} - \frac{1}{s-b} = \frac{-2b}{s^2 - b^2}, -b < \text{Re}\{s\} < b.$$



零点极点图:

$$X(s) = \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)}, \text{Re}\{s\} > -1$$



例:

$$\delta(t) \xrightarrow{L} 1, \text{收敛域整个S平面}$$

解: 由于 $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t) dt = x(0)$

$$\therefore X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1$$

由此可推导一系列变换:

例1: $e^{-at} \sin(\omega_0 t) u(t) \xrightarrow{L} \frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}, \text{Re}\{s\} > -a$

解: $e^{-at} \sin(\omega_0 t) u(t)$

$$= \frac{1}{2j} e^{-at} e^{j\omega_0 t} u(t) - \frac{1}{2j} e^{-at} e^{-j\omega_0 t} u(t)$$

$$\therefore L[e^{-at} \sin(\omega_0 t) u(t)]$$

$$= \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{s+a-j\omega_0} - \frac{1}{s+a+j\omega_0} \right], \text{Re}\{s\} > -a$$

通分后, $e^{-at} \sin(\omega_0 t) u(t) \xrightarrow{L} \frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}, \text{Re}\{s\} > -a$

例2:

例:

$$e^{-at} \cos(\omega_0 t) u(t) \xrightarrow{L} \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}, \text{Re}\{s\} > -a$$

推导:

$$e^{-at} \cos(\omega_0 t) u(t) = \frac{1}{2} e^{-at} e^{j\omega_0 t} u(t) + \frac{1}{2} e^{-at} e^{-j\omega_0 t} u(t)$$

所以,

$$L[e^{-at} \cos(\omega_0 t) u(t)] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s+a-j\omega_0} + \frac{1}{s+a+j\omega_0} \right], \text{Re}\{s\} > -a$$

所以,

$$e^{-at} \cos(\omega_0 t) u(t) \xrightarrow{L} \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$$

例3: $x(t) = e^{-2t} u(t) + e^{-t} \cos(3t) u(t)$

解: $X(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{s+1}{(s+1)^2 + 3^2} = \frac{2s^2 + 5s + 12}{(s+2)(s^2 + 2s + 10)}, \text{Re}\{s\} > -1.$

$$(\text{Re}\{s\} > -2) \quad (\text{Re}\{s\} > -1)$$

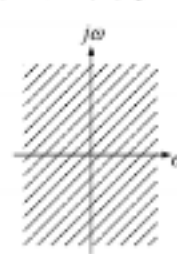
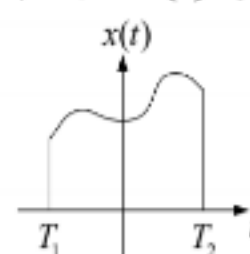
时域特性与拉氏变换收敛域的关系

性质1: $X(s)$ 的收敛域在 S 平面内由平行于 $j\omega$ 轴 (虚轴) 的带状区域所组成。

性质2: 对于有理函数的拉氏变换 $X(s)$ 来说, 收敛域内不包含任何极点。

性质3: 如果 $x(t)$ 是有限时间信号 (时限信号), 即 $x(t)$ 只在有限的时间区间内有值,

且 $x(t)$ 绝对可积, 那么 $x(t)$ 的拉氏变换收敛域为整个 S 平面。



证明: 由 $x(t)$ 时限且绝对可积知:

$\int_{T_1}^{T_2} |x(t)| dt < +\infty$ 则有:

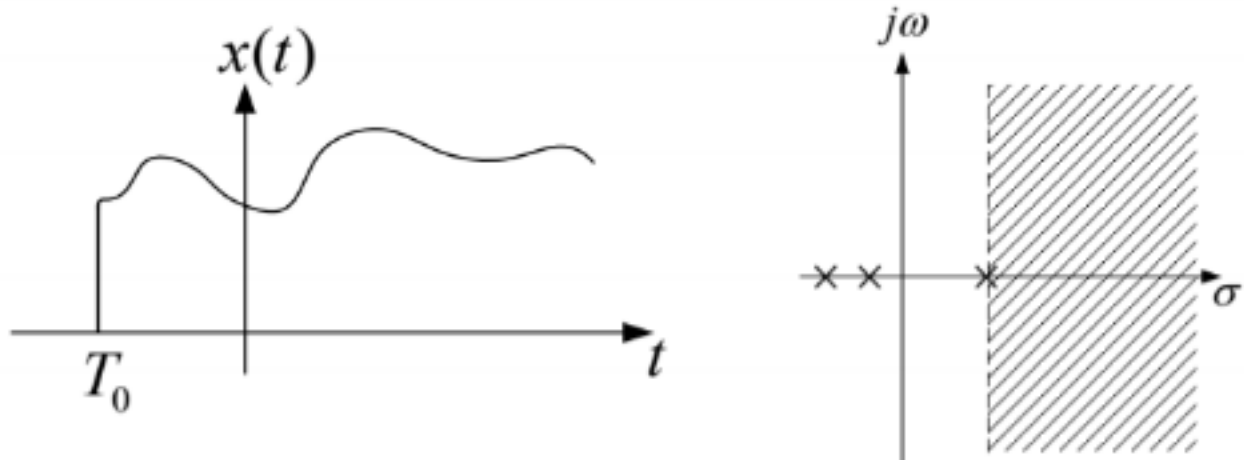
$$|X(s)| = \left| \int_{T_1}^{T_2} x(t) e^{-st} dt \right|$$

$$\leq \int_{T_1}^{T_2} |x(t)| |e^{-\sigma t}| |e^{-j\omega t}| dt \leq \max\{e^{-\sigma T_1}, e^{-\sigma T_2}\} \int_{T_1}^{T_2} |x(t)| dt < +\infty$$

不收敛点
(时限+绝对可积)
⇒ 收敛

性质4: 如果 $x(t)$ 是右边信号, 即 $x(t)$ 只在区间 $[T_0, +\infty)$ 有值,

$$\begin{cases} x(t) \neq 0, & \text{当 } t \in [T_0, +\infty) \text{ 时} \\ x(t) = 0, & \text{当 } t \in (-\infty, T_0) \text{ 时} \end{cases}$$
 且它的拉氏变换 $X(s)$ 存在, 则 $X(s)$ 的收敛域在其最右边极点的右边。



(a) 右边信号 $x(t)$ (b) $X(s)$ 的收敛域为最右边极点的右边

推论: 因果信号也是右边信号, 它的拉氏变换收敛域在其最右边极点的右边。

证明: 我们需要证明, 如果 $x(t)$ 仅在 $[T_0, +\infty)$ 有值, 且它的拉氏变换 $X(s)$ 对 σ_1 收敛, 则 $X(s)$ 对任意 $\sigma > \sigma_1$ 都收敛。
 设 $\sigma > \sigma_1$, 那么当 $t \geq 0$ 时, 有 $e^{-\sigma t} \leq e^{-\sigma_1 t}$ 。我们分两种情况讨论:

(1) 若 $T_0 \geq 0$, 则有:

$$\int_{T_0}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt \leq \int_{T_0}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma_1 t} dt < +\infty$$

命题成立。

(2) 若 $T_0 < 0$, 则有:

$$\int_{T_0}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt = \int_{T_0}^0 |x(t)| e^{-\sigma t} dt + \int_0^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt$$

分别对以上两项进行分析。第一项 $\int_{T_0}^0 |x(t)| e^{-\sigma t} dt$, 我们可以将其看成是一个仅在 $[T_0, 0]$ 有值的时限信号, 那么根据性质3, 其收敛域为整个S平面, 所以有 $\int_{T_0}^0 |x(t)| e^{-\sigma t} dt < +\infty$ 。

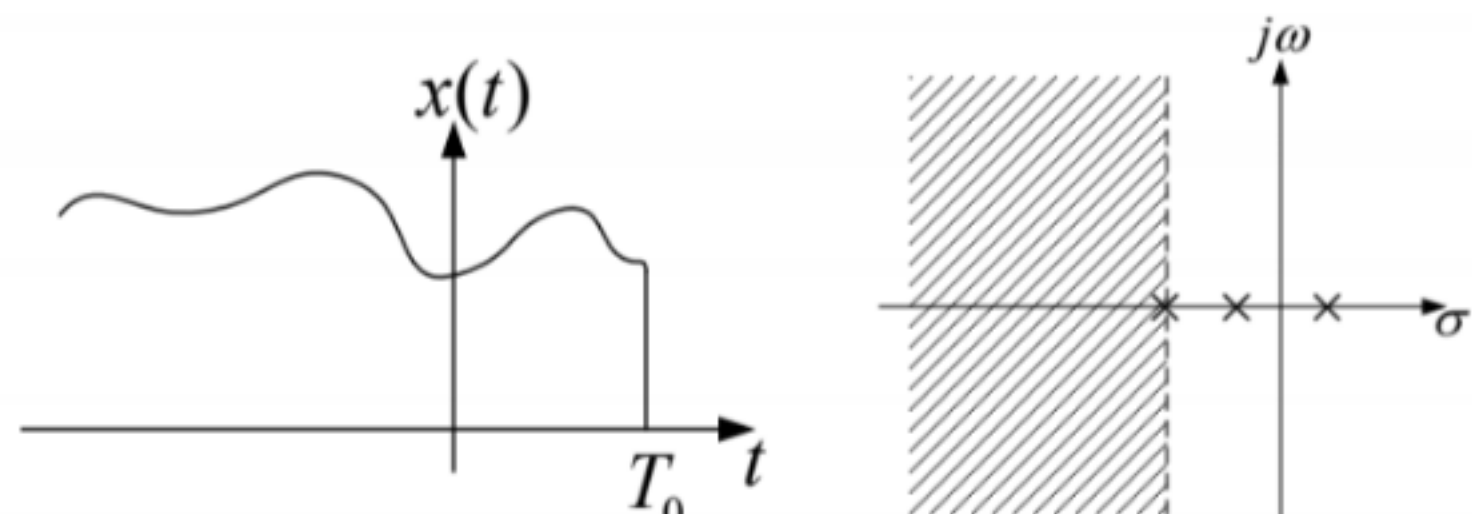
再看第二项:

$$\int_0^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt \leq \int_0^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma_1 t} dt < +\infty$$

命题成立。

性质5: 如果 $x(t)$ 是左边信号, 即 $x(t)$ 只在区间 $(-\infty, T_0]$ 有值,

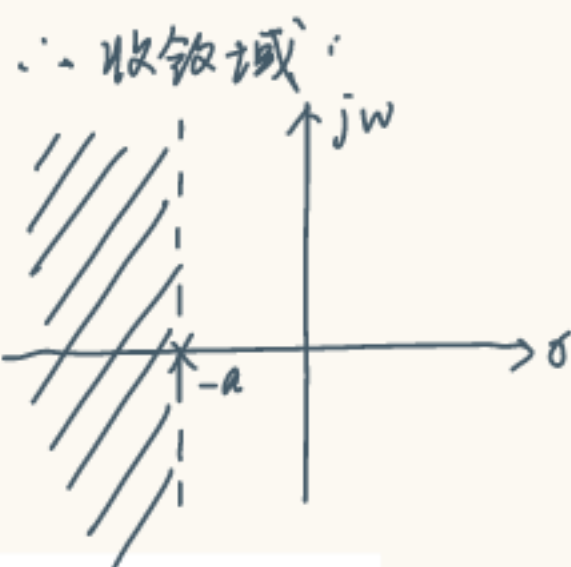
$$\begin{cases} x(t) \neq 0, & \text{当 } t \in (-\infty, T_0] \text{ 时} \\ x(t) = 0, & \text{当 } t \in (T_0, +\infty) \text{ 时} \end{cases}$$
 且它的拉氏变换 $X(s)$ 存在, 则 $X(s)$ 的收敛域在其最左边极点的左边。



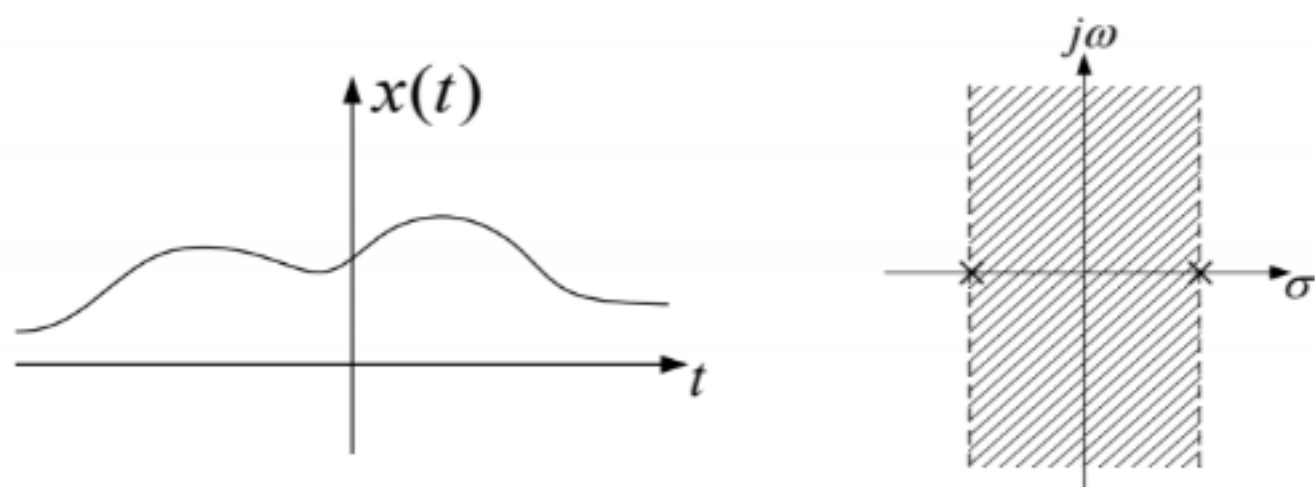
(a) 左边信号 $x(t)$ (b) $X(s)$ 的收敛域为最左边极点的左边

例: $x(t) = -e^{-at} u(-t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = \frac{1}{s+a}$

$x(t)$ 为左边信号, 极点 $s = -a$



性质6: 如果 $x(t)$ 是双边信号, 且它的拉氏变换 $X(s)$ 存在, 则 $X(s)$ 的收敛域是S平面的带状区域。

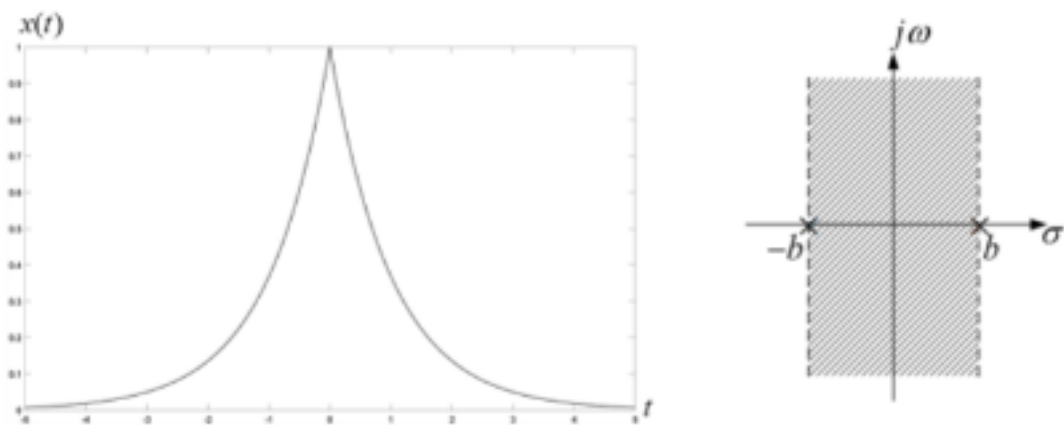


(a) 双边信号 $x(t)$ (b) $X(s)$ 的收敛域为带状区域

例:

$$x(t) = e^{-b|t|} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{-2b}{s^2 - b^2}, \quad (-b < \text{Re}\{s\} < b)$$

$x(t)$ 是双边信号, 因此它的收敛域是带状区域。



(a) $x(t) = e^{-b|t|}$ 的时域波形 (b) $X(s) = \frac{-2b}{s^2 - b^2}$ 的收敛域

性质7 $x(t)$ 稳定信号 + 拉氏变换 $X(s)$ 存在 \Rightarrow 收敛域包含 $j\omega$ 轴。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < +\infty$$

证明: $X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$ 在 $j\omega$ 轴上, $\sigma = 0$

$$\therefore X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\begin{aligned} \therefore |X(s)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| \cdot |e^{-j\omega t}| dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| \cdot dt < +\infty \end{aligned}$$

$\therefore X(s)$ 在 $j\omega$ 轴上始终收敛. (收敛域包含 $j\omega$ 轴)

反过来也对: 若 $X(s)$ 在 $j\omega$ 轴上始终收敛, 则 $X(s)$ 为稳定信号。

需要记住:

(1) 因果信号 \Rightarrow 右边信号 \Rightarrow 收敛域是最右边极点的右边。
 请注意, 右边信号并不能保证系统是因果的。

(2) 稳定的LTI系统 $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty \Leftrightarrow$ 收敛域包含 $j\omega$ 轴。

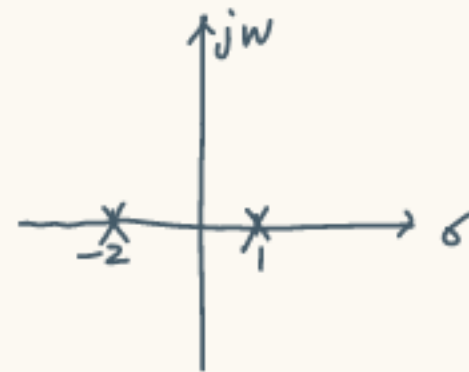
例题:

例1: 如果一个信号 $x(t)$ 的拉氏变换为:

$$X(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)}$$

求该信号的表达式。

解: 先拆 $X(s)$.
$$X(s) = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+2} = \frac{\frac{1}{3}}{s-1} - \frac{\frac{1}{3}}{s+2}$$



极点: 1, -2. 有三种可能:

① 利用: $x(t) = e^{-at} u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = \frac{1}{s+a}, \text{Re}\{s\} > -a$.
 有: $x(t) = \frac{1}{3} e^t u(t) - \frac{1}{3} e^{-2t} u(t)$

② 左边信号: $x(t) = -e^{-at} u(-t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) = \frac{1}{s+a}$
 $\therefore x(t) = -\frac{1}{3} e^t u(-t) - \frac{1}{3} e^{-2t} u(-t)$

③ $x(t) = -\frac{1}{3} e^t u(-t) + \frac{2}{3} e^{-2t} u(-t)$

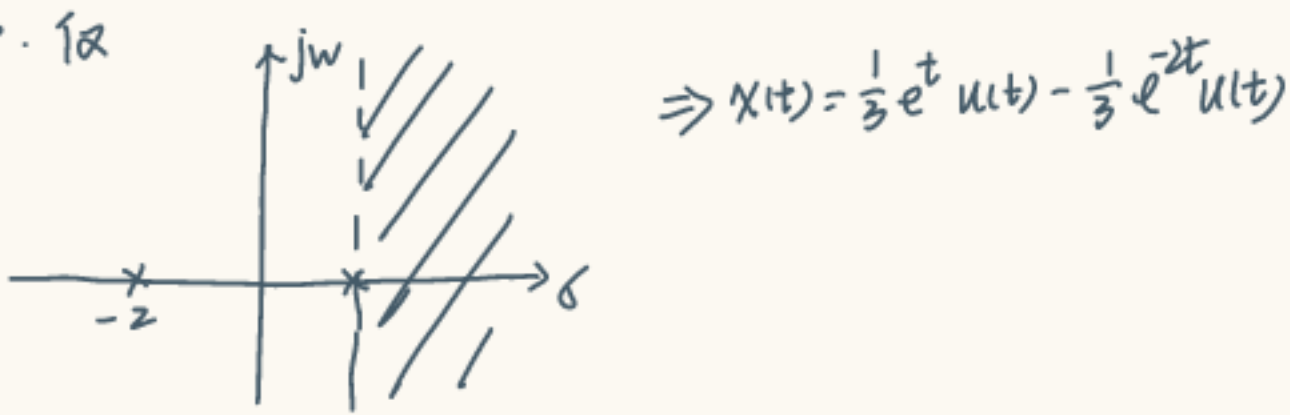


例2: 如果一个因果信号 $x(t)$ 的拉氏变换为:

$$X(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)}$$

求该信号的表达式。

解: 因果信号 \Rightarrow 右边信号 \Rightarrow 收敛域是最右侧极点。

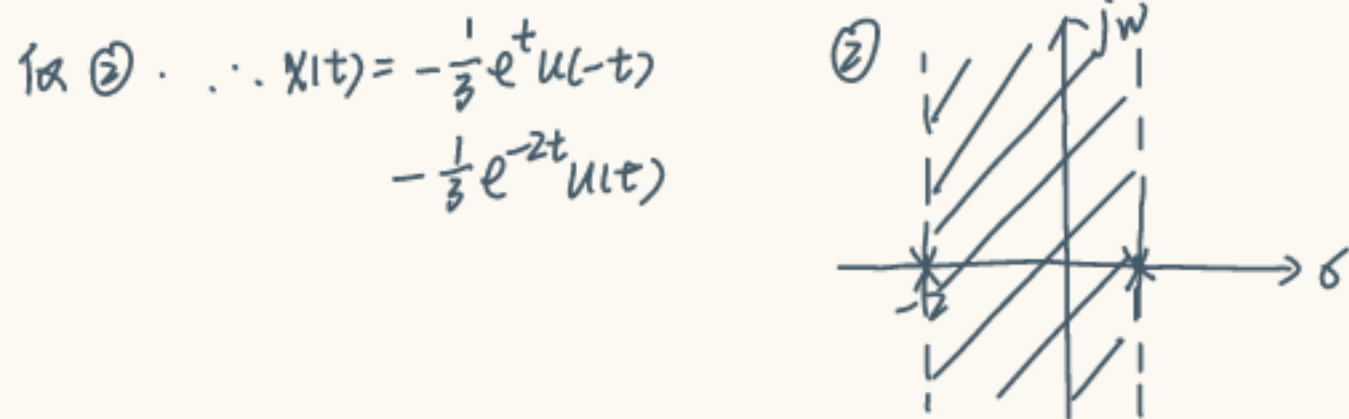


例3: 如果一个稳定信号 $x(t)$ 的拉氏变换为:

$$X(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)}$$

求该信号的表达式。

解: 利用稳定信号 \Rightarrow 收敛域包含 jw 轴:



拉普拉斯变换的性质

1 线性性质:

如果

$$\begin{aligned} x_1(t) &\xrightarrow{L} X_1(s), & ROC = R_1 \\ x_2(t) &\xrightarrow{L} X_2(s), & ROC = R_2 \end{aligned}$$

则有:

$$ax_1(t) + bx_2(t) \xrightarrow{L} aX_1(s) + bX_2(s)$$

ROC至少包含 $R_1 \cap R_2$ 。

收敛域可能扩大。

一个线性求和后收敛域扩大的例子如下。若 $x_1(t) = e^{-t}u(t)$, 其拉氏变换收敛域为 $Re\{s\} > -1$; $x_2(t) = -e^{-t}u(t)$, 其拉氏变换收敛域也为 $Re\{s\} > -1$ 。但 $x_1(t) + x_2(t) = 0$, 其拉氏变换收敛域却是整个S平面。

2 时域平移性质

若 $x(t) \xrightarrow{L} X(s)$, $ROC=R$, 则 $x(t-t_0) \xrightarrow{L} X(s)e^{-st_0}$, $ROC=R$ 。

对比傅里叶变换: ($s=jw$ 时特例)
若 $x(t) \xrightarrow{F} X(jw)$, 则 $x(t-t_0) \xrightarrow{F} X(jw)e^{-jw t_0}$

证明: $L[x(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0)e^{-st}dt$ 换元, 令 $t' = t-t_0$

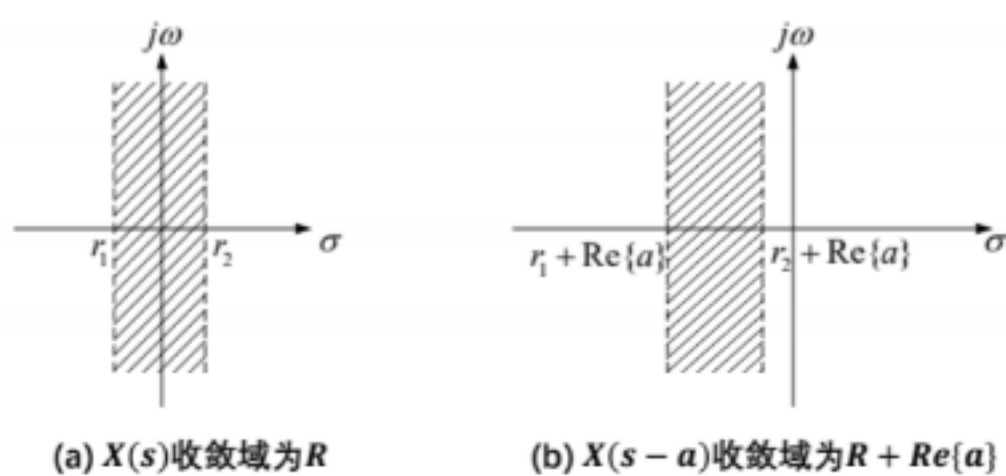
$$\therefore \text{原式} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')e^{-st'}e^{-st_0}dt' = e^{-st_0}X(s)$$

3 s域平移性质

若 $x(t) \xrightarrow{L} X(s)$, $ROC=R$, 则有 $e^{at}x(t) \xrightarrow{L} X(s-a)$, $ROC=R+Re\{a\}$

证明:

$$L[e^{at}x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{at}x(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-(s-a)t}dt = X(s-a)$$



4 尺度变换特性

若 $x(t) \xrightarrow{L} X(s)$, 那么 $x(at) \xrightarrow{L} \frac{1}{|a|}X(\frac{s}{a})$

$ROC=R$

$ROC=Ra$

5 时域微分性质

若 $x(t) \xrightarrow{L} X(s)$, $ROC=R$, 那么 $\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{L} sX(s)$, ROC 至少包含 R 。

(Tips: 收敛域扩大的例外: \leftarrow 原因: $sX(s)$ 过程中将 $s=0$ 的极点删掉。
 $u(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{s}$, $Re\{s\} > 0$ 。

$$\delta(t) = \frac{d[u(t)]}{dt} \xrightarrow{L} s \cdot \frac{1}{s} = 1. \text{ 收敛域为整个平面。}$$

推论: 重复微分, 有:

$$\frac{d^k x(t)}{dt^k} \xrightarrow{L} s^k X(s). \text{ (ROC至少包含R)}$$

推论2:

$$\begin{aligned} \delta(t) &\xrightarrow{L} 1, & \text{收敛域整个S平面} \\ \frac{d^k[\delta(t)]}{dt^k} &\xrightarrow{L} s^k, & \text{收敛域整个S平面} \end{aligned}$$

6 s域微分性质

若 $x(t) \xrightarrow{L} X(s)$, $ROC=R$, 则 $t x(t) \xrightarrow{L} -\frac{dX(s)}{ds}$

(对比傅里叶: $t x(t) \xrightarrow{F} j \frac{d(X(jw))}{dw} = -\frac{d(X(jw))}{d(jw)}$)

例1: 求 $te^{-at}u(t)$ 的拉氏变换

解: $\therefore e^{-at}u(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{s+a}$, ($Re\{s\} > -a$)

$$\therefore te^{-at}u(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{(s+a)^2}, (Re\{s\} > -a)$$

$$\therefore t^2 e^{-at}u(t) \xrightarrow{L} \frac{2}{(s+a)^3}, (Re\{s\} > -a)$$

进一步, 我们可以利用S域平移性质得到如下公式:

$$\begin{aligned} te^{-at}u(t) &\xrightarrow{L} \frac{1}{(s+a)^2}, & Re\{s\} > -a \\ t^2 e^{-at}u(t) &\xrightarrow{L} \frac{2}{(s+a)^3}, & Re\{s\} > -a \\ \frac{1}{n!} t^n e^{-at}u(t) &\xrightarrow{L} \frac{1}{(s+a)^{n+1}}, & Re\{s\} > -a \end{aligned}$$

7 卷积性质

若 $x_1(t) \xrightarrow{L} X_1(s)$, $x_2(t) \xrightarrow{L} X_2(s)$
 $ROC=R_1$, $ROC=R_2$ 。

那么 $x_1(t) * x_2(t) \xrightarrow{L} X_1(s)X_2(s)$, ROC 至少包含 $R_1 \cap R_2$ 。

Tips: 收敛域扩大: 奇点和极点相消:

如果 $x_1(t) = u(t)$, 则有 $X_1(s) = \frac{1}{s}$, 收敛域为 $Re\{s\} > 0$;
如果 $x_2(t) = \delta'(t)$, 则有 $X_2(s) = s$, 收敛域为整个S平面。
此时有:

$$x_1(t) * x_2(t) = u(t) * \delta'(t) = \delta(t)$$

所以有:

$$L[x_1(t) * x_2(t)] = L[\delta(t)] = 1, \text{ 收敛域为整个S平面}$$

8 时域积分性质

若 $x(t) \xrightarrow{L} X(s)$, $ROC=R$, 那么 $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xrightarrow{L} \frac{1}{s} X(s)$ 。

收敛域至少包含 $R \cap \{Re\{s\} > 0\}$

证明: $\therefore \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = x(t) * u(t)$

$$\therefore L[\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau] = L[x(t) * u(t)] = X(s) \cdot L[u(t)] = \frac{1}{s} X(s)$$

另一方面, 由于 $u(t)$ 拉氏变换收敛域为 $Re\{s\} > 0$, 所以 $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ 拉氏变换的收敛域至少包含 $R \cap \{Re\{s\} > 0\}$ 。

9 初值定理

初值定理： 如果 $x(t)$ 是一个因果信号，且在原点处不包含脉冲或高阶奇点，那么可以直接通过拉普拉斯变换计算出初始值 $x(0^+)$ 如下：

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sX(s)$$

证明： 首先，我们把 $x(t)$ 进行泰勒展开：

$$x(t) = x(0^+) + x'(0^+)t + \frac{x''(0^+)}{2!}t^2 + \frac{x'''(0^+)}{3!}t^3 + \dots$$

因为 $x(t)$ 是一个因果信号，所以我们有 $x(t) = x(t)u(t)$ ， 所以

$$x(t) = x(t)u(t) = x(0^+)u(t) + x'(0^+)tu(t) + \frac{x''(0^+)}{2!}t^2u(t) + \frac{x'''(0^+)}{3!}t^3u(t) + \dots$$

对等式两边进行拉普拉斯变换，可得：

$$X(s) = \frac{x(0^+)}{s} + \frac{x'(0^+)}{s^2} + \frac{x''(0^+)}{s^3} + \frac{x'''(0^+)}{s^4} + \dots$$

以上公式两边同时乘以 s ，可得：

$$sX(s) = x(0^+) + \frac{x'(0^+)}{s} + \frac{x''(0^+)}{s^2} + \frac{x'''(0^+)}{s^3} + \dots$$

如果 $x(0)$ 的所有导数都是有限的，则有：

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} sX(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \left[x(0^+) + \frac{x'(0^+)}{s} + \frac{x''(0^+)}{s^2} + \frac{x'''(0^+)}{s^3} + \dots \right] = x(0^+)$$

10 终值定理

终值定理： 如果 $x(t)$ 是一个因果信号，且在原点处不包含脉冲或高阶奇点，那么可以直接从拉普拉斯变换计算出 $x(t)$ ：

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

证明： 考虑积分 $\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} x'(t)e^{-st}dt$

我们使用两种方法来计算这个积分。

(1)

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} x'(t)e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} x'(t)dt = \int_0^{+\infty} d[x(t)] = \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) - x(0)$$

(2)

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} x'(t)e^{-st}dt &= \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} e^{-st}d[x(t)] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} x(t)e^{-st} \Big|_{t=0}^{+\infty} - \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} x(t)d[e^{-st}] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} x(+\infty)e^{-s \cdot (+\infty)} - x(0) + \lim_{s \rightarrow 0} s \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st}dt \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) - x(0) \end{aligned}$$

比较（1）和（2），我们得到：

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

例： $x_1(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-t}\cos(3t)u(t)$. 求 $x(0^+)$. 及 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t)$.

解：

根据例 9.4，我们有

$$X(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{s+1}{(s+1)^2+9} = \frac{2s^2+5s+12}{(s+2)(s^2+2s+10)}, Re\{s\} > -1$$

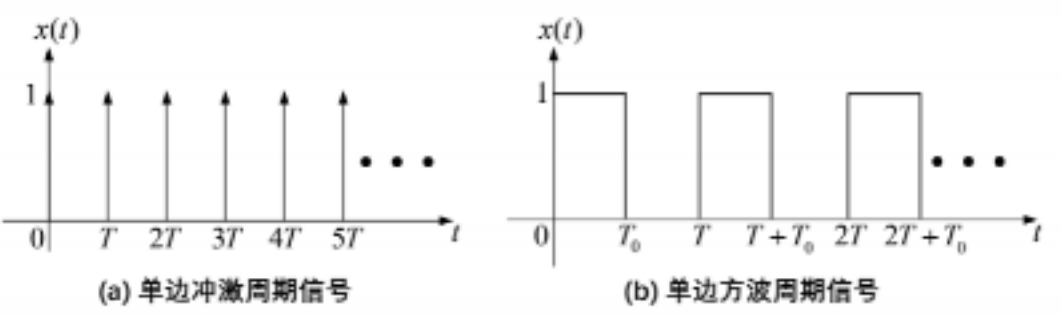
因此根据初值和终值定理，我们有：

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sX(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{2s^3+5s^2+12s}{(s+2)(s^2+2s+10)} = 2$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2s^3+5s^2+12s}{(s+2)(s^2+2s+10)} = 0$$

周期信号的拉普拉斯变换

• 单边周期信号：



• 设单边周期信号的第一个周期的时间函数为 $x_1(t)$,

$$\text{那么 } x(t) = x_1(t) + x_1(t-T) + x_1(t-2T) + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} x_1(t-kT)$$

$$\therefore X(s) = X_1(s) + X_1(s) \cdot e^{-sT} + X_1(s) \cdot e^{-2sT} \dots = X_1(s) \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k \cdot sT}$$

利用等比数列求和公式可得：

$$X(s) = X_1(s) \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-ksT} = X_1(s) \frac{1 - \lim_{k \rightarrow +\infty} e^{-ksT}}{1 - e^{-sT}}$$

当 $Re\{s\} > 0$ 时, $\lim_{k \rightarrow +\infty} e^{-ksT} = 0$, 因此可得：

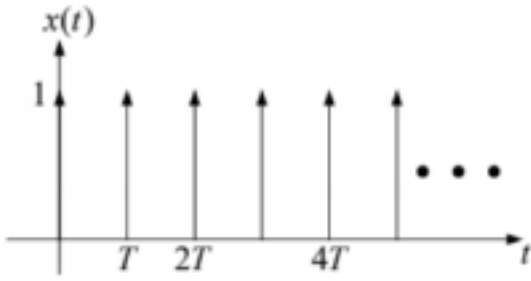
$$X(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} X_1(s), \quad Re\{s\} > 0$$

例题：

例6.9： 求单边冲激周期信号

$$x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

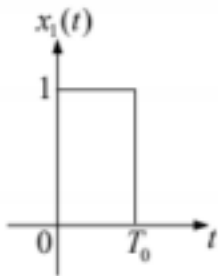
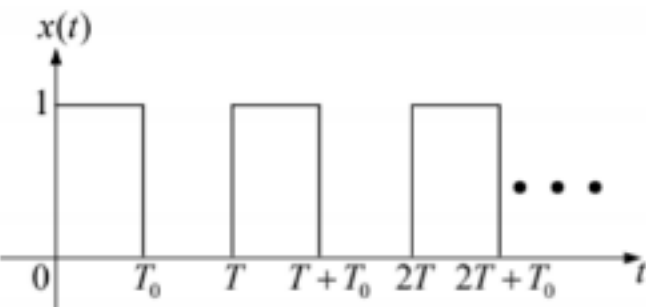
的拉氏变换 $X(s)$ 。



$$\text{解： } x_1(t) = \delta(t) \xrightarrow{s} X_1(s) = 1$$

$$\therefore X(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \quad Re\{s\} > 0$$

例6.9： 求单边方波周期信号的拉氏变换 $X(s)$ 。



$$\text{解： } X_1(s) = \frac{1}{s} (1 - e^{-sT_0})$$

$$\therefore X(s) = \frac{1 - e^{-sT_0}}{s(1 - e^{-sT})}$$

拉氏反变换习题

$$\text{例1： } X(s) = \frac{10(s+2)(s+5)}{s(s+1)(s+3)} \quad Re\{s\} > 0.$$

$$\begin{aligned} \text{解： } X(s) &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+3} \\ &= \frac{100}{s} + \frac{-20}{s+1} + \frac{-\frac{10}{3}}{s+3} \end{aligned}$$

收敛域：



$$\therefore \text{都用 } e^{-at}u(t) \cdot \xrightarrow{s} \frac{1}{s+a}$$

$$\therefore x(t) = (100 - 20 \cdot e^{-t} - \frac{10}{3} e^{-3t}) u(t)$$

例2： 求下列函数的反变换。

$$X(s) = \frac{s^3 + 5s^2 + 9s + 7}{(s+1)(s+2)}, \quad Re\{s\} > -1$$

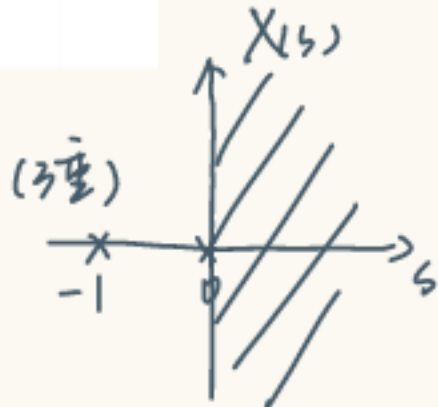
分子次数 > 分母次数，不能直接拆。

$$\begin{aligned} s^2 + 3s + 2 & \overline{\sqrt{s^3 + 5s^2 + 9s + 7}} \quad \therefore X(s) = s + 2 + \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \\ & \frac{s^3 + 3s^2 + 2s}{2s^2 + 7s + 7} \\ & \frac{2s^2 + 6s + 4}{s+3} \quad x(t) = \delta'(t) + 2\delta(t) \\ & \quad + 2e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t). \end{aligned}$$

例3： 求下列函数的反变换。

$$X(s) = \frac{s-2}{s(s+1)^3}, \quad Re\{s\} > 0$$

$$\begin{aligned} \text{解： } X(s) &= \frac{A}{(s+1)^3} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{s} \\ &= \frac{3}{(s+1)^3} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{s+1} - \frac{2}{s} \end{aligned}$$



B.C 求解：代零点。

$$X(s) = 0 = -1 + \frac{C}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{1}{s+1}$$

$$X(s) = -\frac{1}{s} = \frac{3}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+1} - 2$$

$$\therefore \begin{aligned} B+3C &= 8 & C &= 2 \\ B+2C &= 6 & B &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore X(s) &= \frac{3}{(s+1)^3} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s} \\ &= \frac{3}{2} t^2 e^{-t} u(t) + 2 \cdot t e^{-t} u(t) \\ &\quad + 2 \cdot e^{-t} u(t) - 2 u(t). \end{aligned}$$

例4:

例6.14: 求下列函数的反变换。
$$X(s) = \frac{s+3}{s^3+3s^2+7s+5}, \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

$-1+3-7+5=0$
$$\therefore X(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s^2+2s+5)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+5}$$

下面求待定系数: $-\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}$

$$\therefore X(s) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{s+1} - \frac{s-1}{s^2+2s+5} \right)$$

由 $e^{-at} \cos(\omega_0 t) u(t) \xrightarrow{L} \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$, $e^{-at} \sin(\omega_0 t) u(t) \xrightarrow{L} \frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$
$$\therefore \frac{s+1}{s^2+2s+5} \xrightarrow{L^{-1}} e^{-t} \cos(2t) u(t)$$

$$\frac{2}{s^2+2s+5} \xrightarrow{L^{-1}} e^{-t} \sin(2t) u(t)$$

$$\therefore x(t) = \frac{1}{2} [e^{-t} u(t) - e^{-t} \cos(2t) u(t) + e^{-t} \sin(2t) u(t)]$$

利用拉氏变换求解常系数微分方程。

微分方程: $\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$

对方程两侧拉氏变换: (时域微分性质)

$$Y(s) \cdot \sum_{k=0}^n a_k s^k = X(s) \cdot \sum_{k=0}^m b_k s^k$$

$$\therefore H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k s^k}{\sum_{k=0}^n a_k s^k}$$

例1: 已知 $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$

解: $(s^2+4s+2)Y(s) = (2s^2+s+3)X(s)$

$$\therefore H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2s^2+s+3}{s^2+4s+2}$$

例2: 已知 $H(s) = \frac{s}{s^2+4}$, 求微分方程。

$$y'' + 4y = x'$$

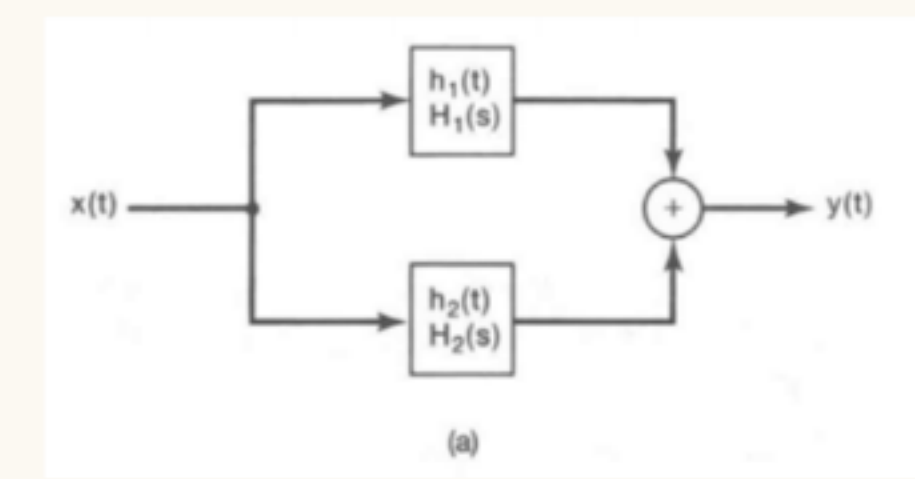
例3: 已知 $H(s) = \frac{s^2}{s^2+2s+1}$, 求微分方程。

$$y'' + 2y' + y = x''$$

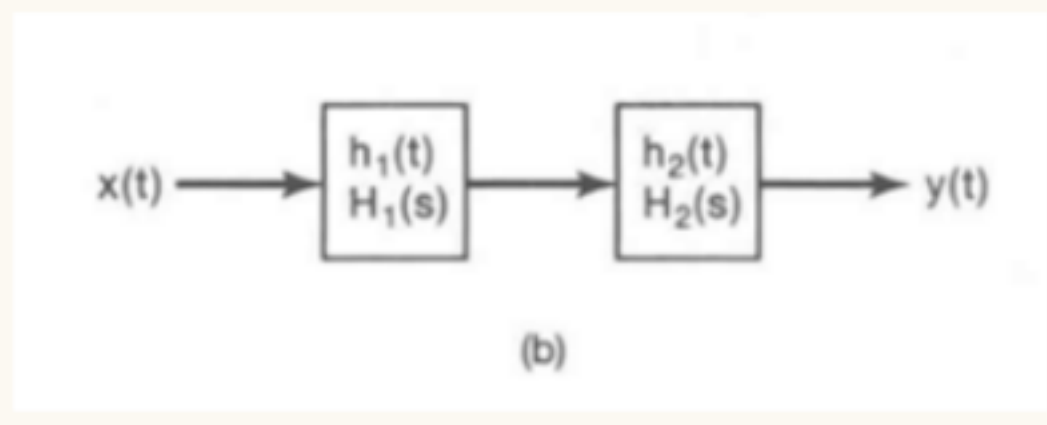
微分方程的框图表示

系统并联:

$y(t) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$ 或者 $Y(s) = X(s)H_1(s) + X(s)H_2(s)$

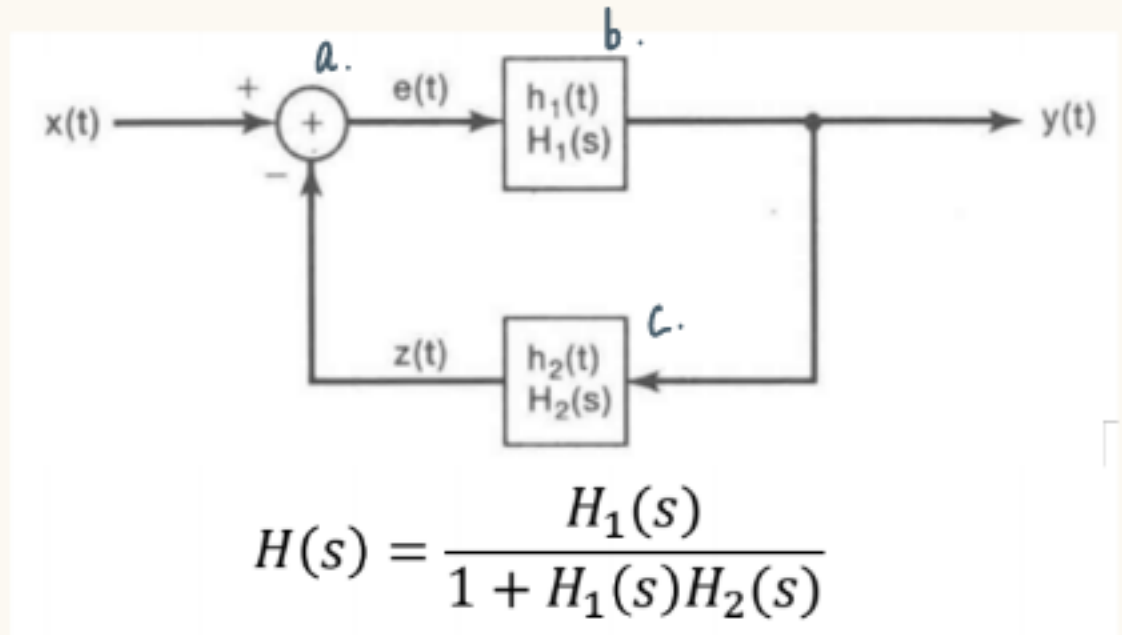


系统串联



$y(t) = x(t) * h_1(t) * h_2(t)$ 或者 $Y(s) = X(s)H_1(s)H_2(s)$

存在环路:



证明:

a. $E(s) = X(s) - Z(s)$
b. $Y(s) = E(s)H_1(s)$
c. $Z(s) = Y(s)H_2(s)$

\therefore b, c 代入 a, 消 $E(s)$, $Z(s)$. 有

$$\frac{Y(s)}{H_1(s)} = X(s) - Y(s) \cdot H_2(s)$$

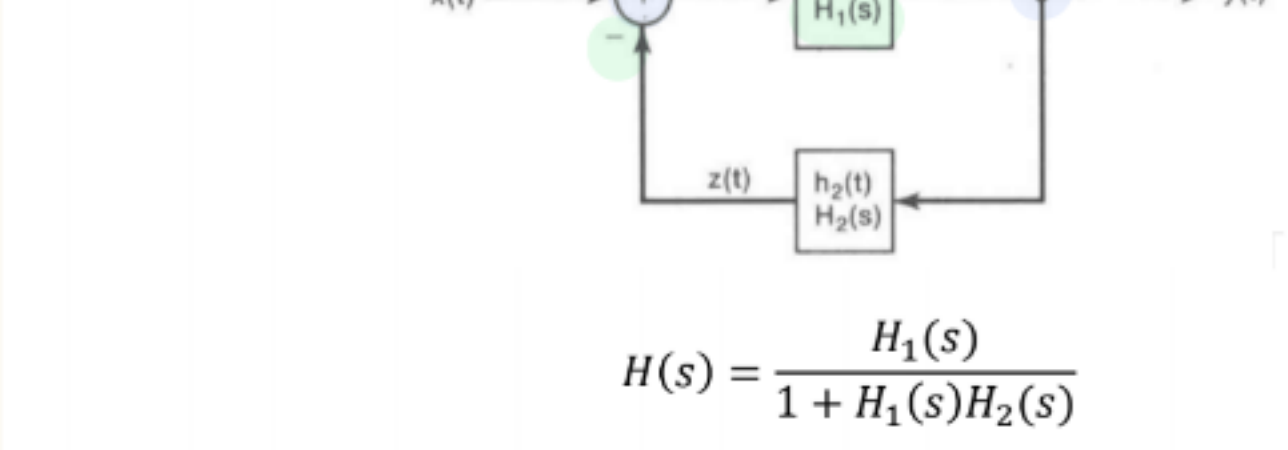
$$\therefore \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{\frac{1}{H_1(s)} + H_2(s)} = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)} = H(s)$$

梅森公式(简化)

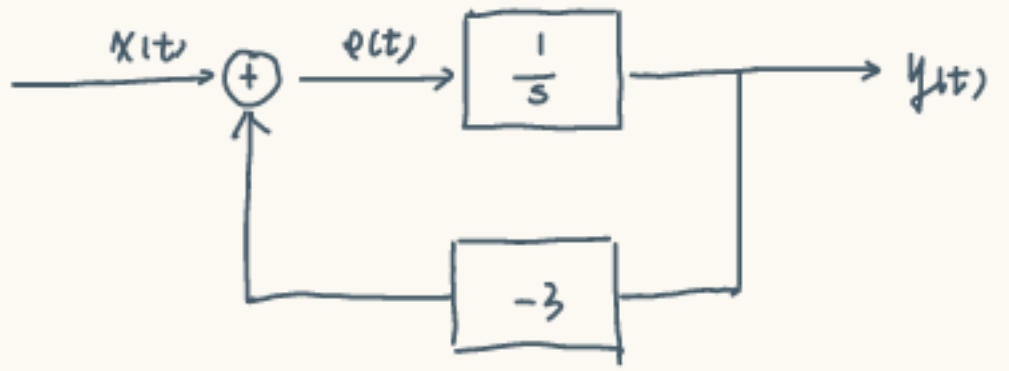
梅森公式(简化版): 如果一个框图满足以下两个条件:
(1) 任何两条环路至少有一个共同的节点。
(2) 任何前向通路与任何环路都至少有一个共同的节点。
那么, 我们有: $x(t) \rightarrow y(t)$.

$$H(s) = \frac{\text{所有前向通路的增益和}}{1 - \text{所有环路的增益和}} \rightarrow \frac{H_1(s)}{1 - (-1) \cdot H_2(s)H_1(s)}$$

例:



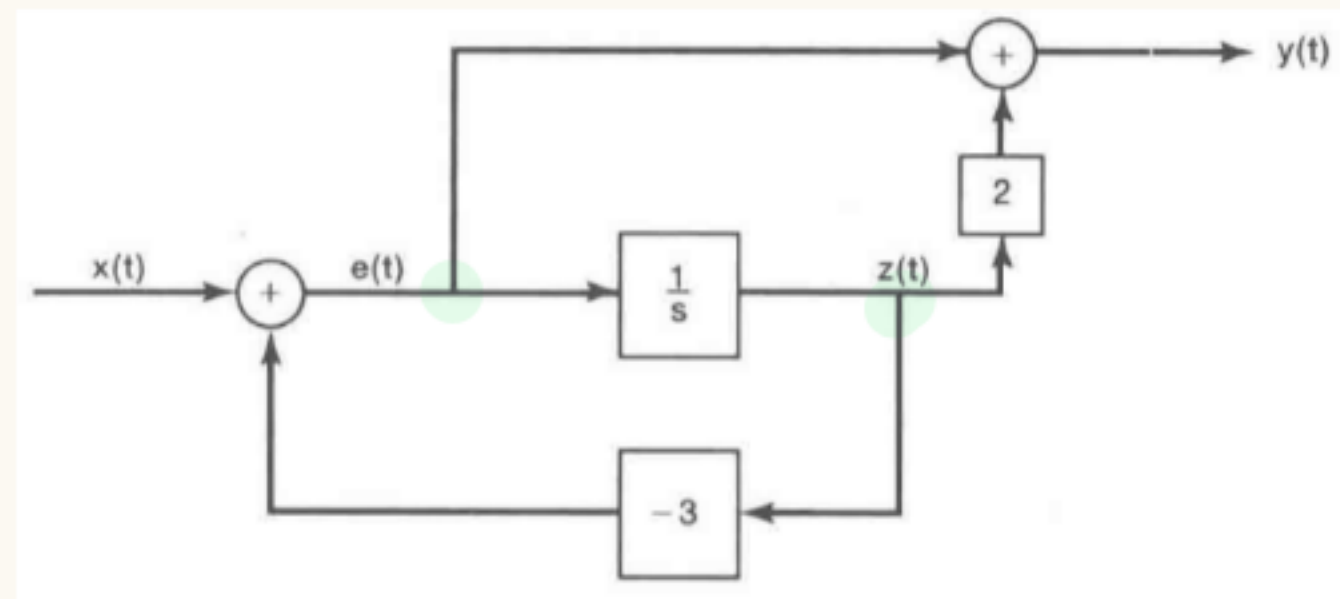
例: 求 $H(s)$.



解: 符合梅森公式

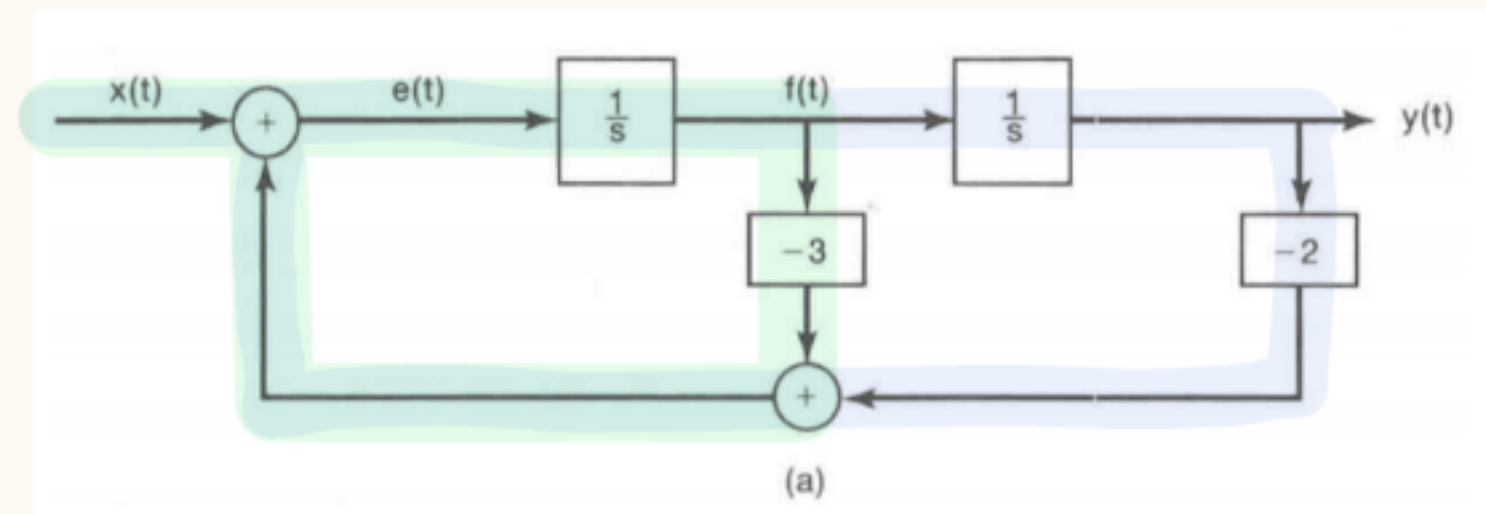
$$H(s) = \frac{\frac{1}{s}}{1 - \frac{1}{s} \cdot (-3)} = \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{3}{s}}$$

变式:



符合条件✓

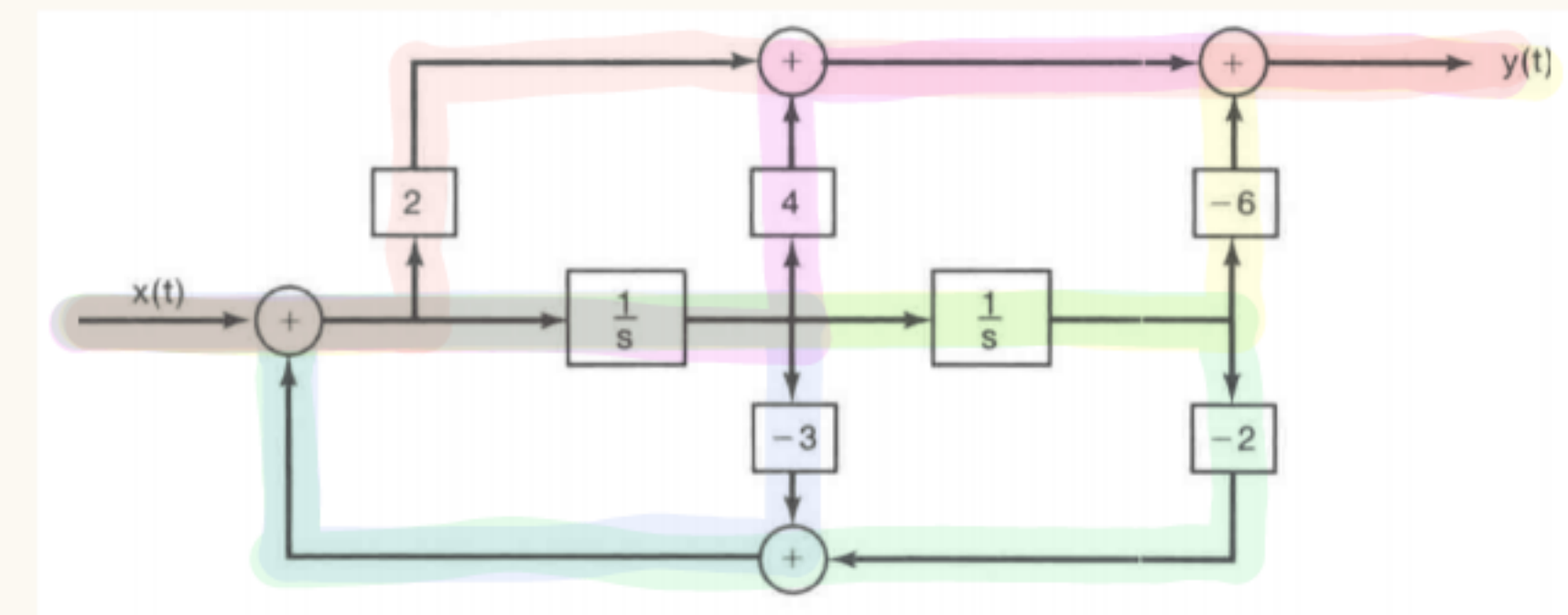
$$H(s) = \frac{1 + \frac{2}{s}}{1 - \frac{1}{s} \cdot (-3)} = \frac{s+2}{s+3}$$



$$H(s) = \frac{\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s}}{1 - \left[\frac{1}{s} \cdot (-3) + \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} \cdot (-2) \right]} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

微分方程表示:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$



解: $H(s) = \frac{2 + \frac{4}{s} - \frac{6}{s^2}}{1 - \left[(-\frac{3}{s}) + \frac{-2}{s^2} \right]} = \frac{2s^2 + 4s - 6}{s^2 + 3s + 2}$

∴ 微分方程表示:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 4 \frac{dx(t)}{dt} - 6x(t)$$

通用的微分方程的框图表示

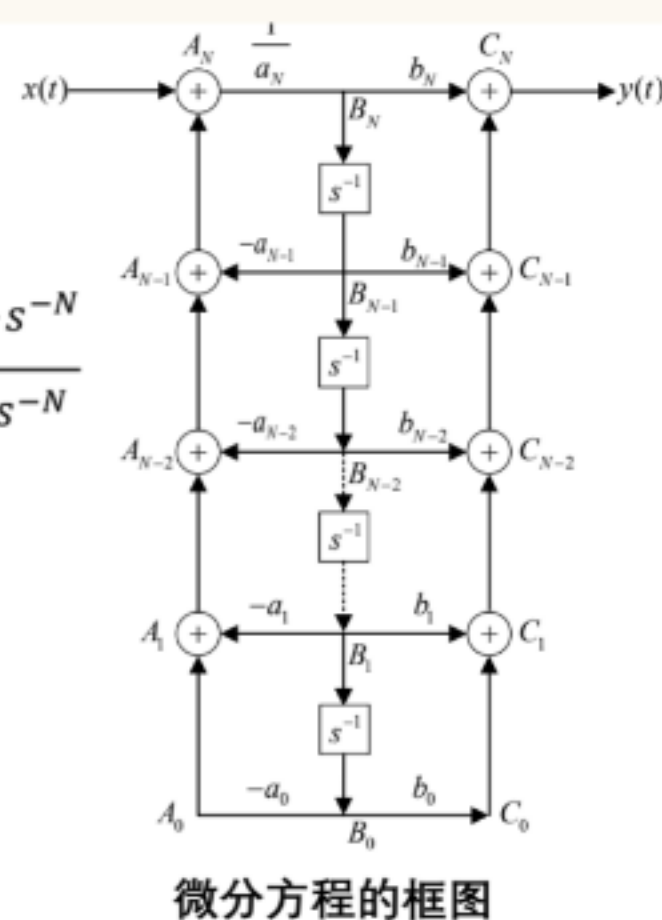
传递函数:

$$H(s) = \frac{\text{所有前向通路的增益和}}{1 - \text{所有环路的增益和}}$$

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{\frac{b_N}{a_N} + \frac{b_{N-1}}{a_N} s^{-1} + \frac{b_{N-2}}{a_N} s^{-2} + \dots + \frac{b_1}{a_N} s^{-(N-1)} + \frac{b_0}{a_N} s^{-N}}{1 + \frac{a_{N-1}}{a_N} s^{-1} + \frac{a_{N-2}}{a_N} s^{-2} + \dots + \frac{a_1}{a_N} s^{-(N-1)} + \frac{a_0}{a_N} s^{-N}} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^N b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} \end{aligned}$$

微分方程:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^N b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$



微分方程的框图

例题:

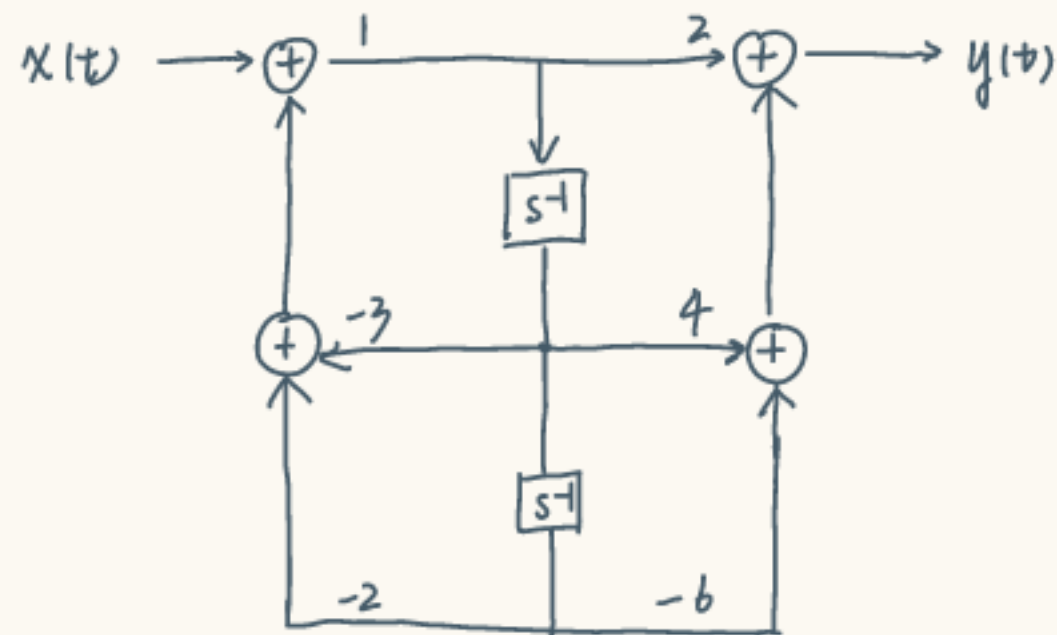
例 9.31: 请画出下列微分方程的框图

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 4 \frac{dx(t)}{dt} - 6x(t)$$

或者: $a_2 \quad a_1 \quad a_0 \quad b_2 \quad b_1 \quad b_0$

$$H(s) = \frac{2s^2 + 4s - 6}{s^2 + 3s + 2}$$

解: 几所部几层



直接 II 型 (共用 1/s)

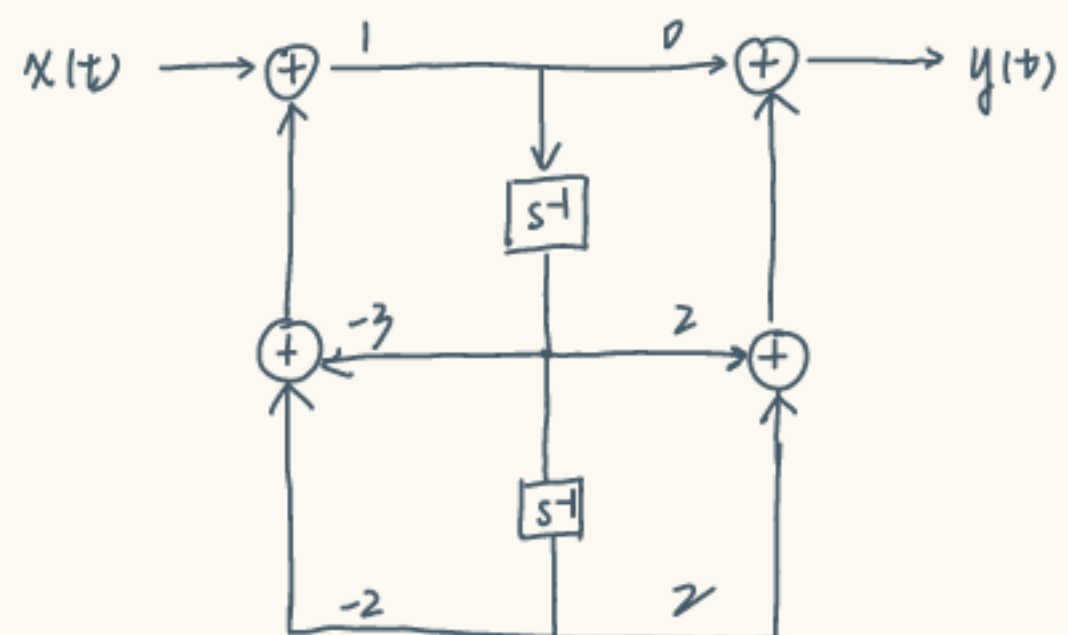
例: 请画出下列微分方程的框图

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 2 \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

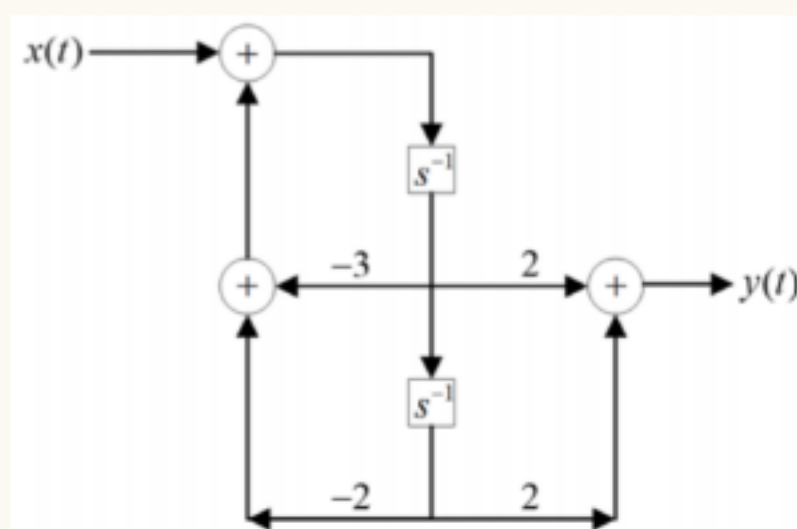
或者

$$H(s) = \frac{2s + 2}{s^2 + 3s + 2}$$

$$a_2 = 1, \quad a_1 = 3, \quad a_0 = 2, \quad b_2 = 0, \quad b_1 = 2, \quad b_0 = 2$$



可简化为:

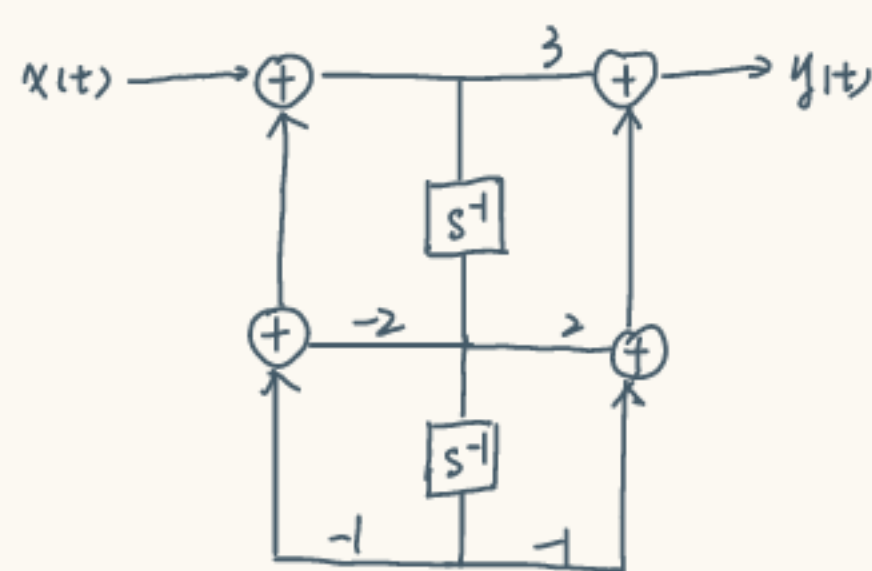


(b) 简化版本的系统模拟框图

注意: 系数为1可以不写, 系数为0可以不画。

例:

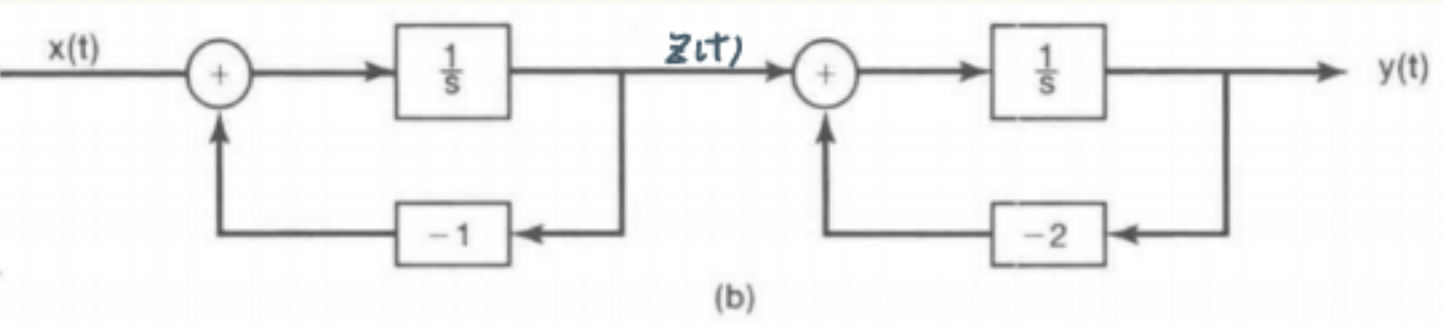
已知:



解: $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + \frac{dy(t)}{dt} = 2 \cdot \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2 \cdot \frac{dx(t)}{dt} - \frac{dx(t)}{dt}$

串联框图:

例如:



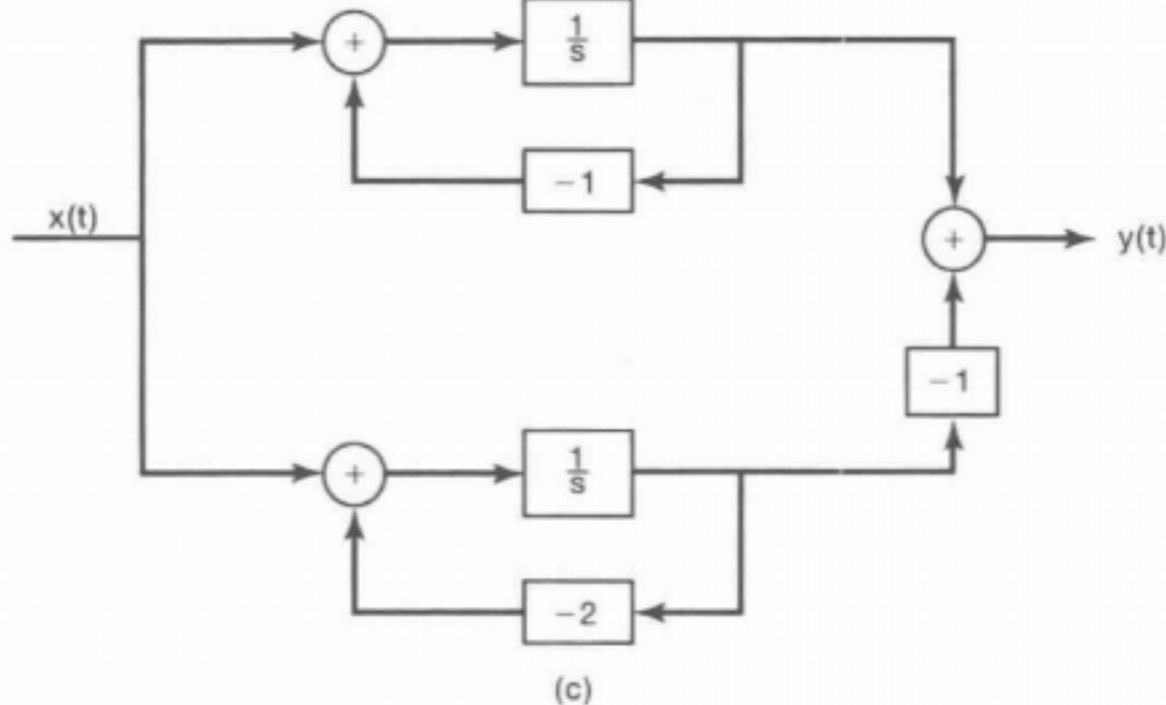
环路间没有交点, 不满足梅森公式

$$H_1(s) = \frac{Z(s)}{X(s)} = \frac{\frac{1}{s}}{1 - (-1) \cdot \frac{1}{s}} = \frac{1}{s+1}$$

$$H_2(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$\therefore H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s+2}$$

并联框图(方法类似)



并联框图

$$H(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s^2+3s+2}$$

微分方程表示:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

第一类微分方程的求解

例: 已知微分方程

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

试求当 $x(t) = e^{-t}u(t)$ 时, 系统的零状态响应 $y(t)$ 。

解: (利用 拉普拉斯变换)

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+2}{s^2+4s+3} = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)}$$

另外有:

$$X(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

所以有:

$$Y(s) = X(s)H(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2(s+3)} = \frac{\frac{1}{2}}{(s+1)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{s+1} - \frac{\frac{1}{4}}{s+3}$$

所以有:

$$y(t) = \frac{1}{2}te^{-t}u(t) + \frac{1}{4}e^{-t}u(t) - \frac{1}{4}e^{-3t}u(t)$$

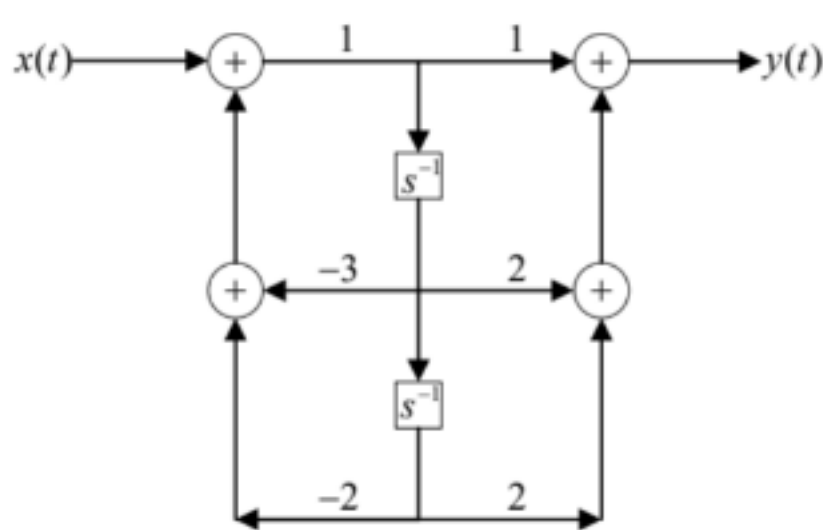
有时会给框图:

例: 一个因果LTI系统的系统框图如例6.35图所示。

(1) 求该系统的系统函数 $h(t)$ 和 $H(s)$ 。

(2) 写出该系统的微分方程。

(3) 当输入 $x(t) = e^{-3t}u(t)$ 时, 求输出 $y(t)$ 。



解:
$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 3\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t)$$

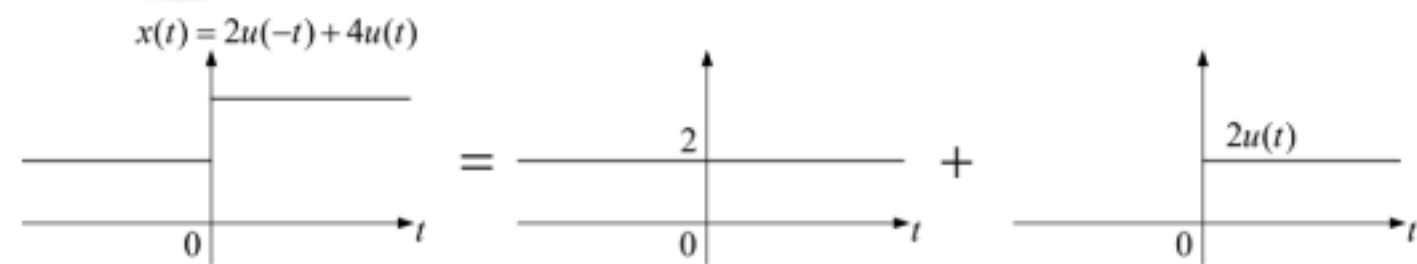
$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2+3s+2}{s^2+2s+2}$$

第二类微分方程求解

例2.14 设某因果LTI系统的微分方程如下:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} + 3x(t)$$

当输入 $x(t) = 2u(-t) + 4u(t)$ 时, 如下图所示, 求输出 $y(t)$ 。



解: $x(t) = 2 + 2u(t)$

利用 $e^{s_0 t} \rightarrow [H(s)] \rightarrow H(s_0)e^{s_0 t}$

有 $2 \rightarrow 2H(s)$

$$H(s) = \frac{s^2+3}{s^2+4s+3} \quad \therefore y_1(t) = 2$$

$$x_2 = 2u(t) \quad X_2(s) = \frac{2}{s}$$

$$\therefore Y_2(s) = \frac{2(s^2+3)}{s(s^2+4s+3)} = \frac{2}{s} - \frac{4}{s+1} + \frac{4}{s+3}$$

$$y_2(t) = 2u(t) - 4e^{-t}u(t) + 4e^{-3t}u(t)$$

$$\therefore y = y_1(t) + y_2(t) = 2 + 2u(t) - 4e^{-t}u(t) + 4e^{-3t}u(t)$$

单边拉氏变换:

仅在 $t \geq 0$ 时的拉普拉斯变换:

$$\widetilde{X}(s) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st} dt$$

记作: $x(t) \xrightarrow{uL} \widetilde{X}(s)$, $uL[x(t)] = \widetilde{X}(s)$

由单边拉氏变换的定义可知, 如果 $x(t)$ 为因果信号, 即 $x(t) = 0$ 当 $t < 0$ 时, 则 $x(t)$ 的单边拉氏变换等于其双边拉氏变换, 即 $\widetilde{X}(s) = X(s)$ 。根据这一性质, 可得:

$$e^{-at}u(t) \xrightarrow{uL} \frac{1}{s+a}, \quad \text{Re}\{s\} > -a$$

例: 求 $x(t) = e^{-a(t+1)}u(t+1)$ 的双边拉氏变换 $X(s)$ 及单边拉氏变换。

解:

双边: $x_1(t) = e^{-at}u(t) \rightarrow \frac{1}{s+a}$

由时移性质: $\frac{e^s}{s+a}, \quad \text{Re}\{s\} > -a$

单边: $\widetilde{X}(s) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-a(t+1)}u(t+1)e^{-st} dt$

$$= e^{-a} \int_0^{+\infty} e^{-(s+a)t} dt = \frac{e^{-a}}{s+a}, \quad \text{Re}\{s\} > -a$$

单边拉氏变换的时域微分性质

若 $x(t) \xrightarrow{uL} \widetilde{X}(s)$, 那么 $\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{uL} s\widetilde{X}(s) - x(0)$

证明: 由单边拉氏变换定义,

$$uL\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = \int_0^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} \cdot e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} d[x(t)]$$

分部积分:
$$= \left[e^{-st}x(t)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x(t) d[e^{-st}]$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\widetilde{X}(s) = 0 \quad = 0 - x(0) + s \cdot \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st} dt$$

$$= s\widetilde{X}(s) - x(0)$$

由此，有下列一系列公式：

$$uL\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]=s\widetilde{X(s)}-x(0)$$

$$uL\left[\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right]=s^2\widetilde{X(s)}-sx(0)-x'(0)$$

$$uL\left[\frac{d^3x(t)}{dt^3}\right]=s^3\widetilde{X(s)}-s^2x(0)-sx'(0)-x''(0)$$

$$uL\left[\frac{d^nx(t)}{dt^n}\right]=s^n\widetilde{X(s)}-s^{n-1}x(0)-s^{n-2}x'(0)-\cdots-sx^{(n-2)}(0)-x^{(n-1)}(0)$$

由此，我们可以求解第三类微分方程：

第三类微分方程求解：

例6.22： 设LTI系统的输入与输出可用如下微分方程描述：
$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{3}{2}\frac{dy(t)}{dt}+\frac{1}{2}y(t)=5e^{-3t}u(t)$$

已知 $y(0)=1$ ， $y'(0)=0$ ，计算系统的零状态响应 $y_{zs}(t)$ ，零输入响应 $y_{zi}(t)$ 和全响应 $y(t)$ 。

解：对两边分别进行单边拉普拉斯变换：

$$\therefore s^2\widetilde{Y(s)}-sy(0)-y'(0)+\frac{3}{2}(s\widetilde{Y(s)}-y(0))+\frac{1}{2}\widetilde{Y(s)}=5\cdot\frac{1}{s+3}, y(0), y'(0)代入$$

$$(s^2+\frac{3}{2}s+\frac{1}{2})\widetilde{Y(s)}=\underbrace{\frac{5}{s+3}}_{y_{zs}}+\underbrace{s+\frac{3}{2}}_{y_{zi}}$$

$$\therefore \widetilde{Y(s)}=\frac{5}{\underbrace{(s+1)(s+3)}_{y_{zs}(t)}}+\frac{s+\frac{3}{2}}{\underbrace{(s+1)(s+\frac{1}{2})}_{y_{zi}(t)}}$$

最终我们得到：

$$y_{zs}(t)=(-5e^{-t}+e^{-3t}+4e^{-\frac{1}{2}t})u(t), \quad y_{zi}(t)=(-e^{-t}+2e^{-\frac{1}{2}t})u(t)$$

$$y(t)=y_{zs}(t)+y_{zi}(t)=(-6e^{-t}+6e^{-\frac{1}{2}t}+e^{-3t})u(t)$$

利用拉氏变换作频域分析

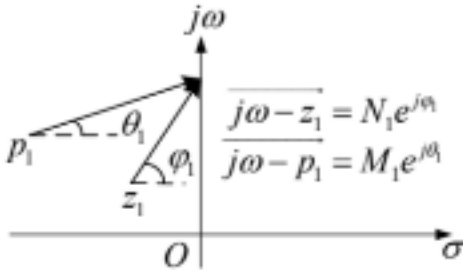
没有懂...

根据系统函数 $H(s)$ 在S平面上的零极点分布，可以在S域上求出系统的频率响应 $H(j\omega)$ 。因为：

$$H(s)=A\frac{\prod_{i=1}^m\overline{s-z_i}}{\prod_{l=1}^n\overline{s-p_l}}$$

分母中任一因子 $s-p_l$ 相当于由极点 p_l 引向某点 s 的一个矢量，称为极点矢量；分子中任一因子 $s-z_i$ 相当于由零点 z_i 引向某点 s 的一个矢量，称为零点矢量。上式中，用 $j\omega$ 代入，即表示系统的频率响应：

$$H(j\omega)=A\frac{\prod_{i=1}^m\overline{j\omega-z_i}}{\prod_{l=1}^n\overline{j\omega-p_l}}$$



$$H(j\omega)=A\frac{\prod_{i=1}^m\overline{j\omega-z_i}}{\prod_{l=1}^n\overline{j\omega-p_l}}$$

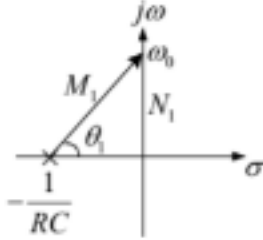
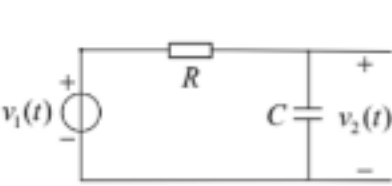
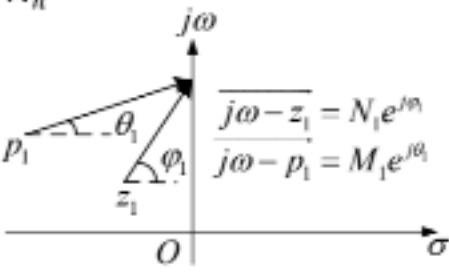
假设 N_l 为零点矢量 z_l 的模， M_l 为极点矢量 p_l 的模，而 φ_l 和 θ_l 分别表示它们与实轴 σ 正方向之间的夹角，即表示两个矢量的辐角，则以上矢量可以表示为：

$$\overline{j\omega-z_i}=N_ie^{j\varphi_i} \quad \overline{j\omega-p_l}=M_le^{j\theta_l}$$

$$H(j\omega)=A\frac{N_1N_2\cdots N_m}{M_1M_2\cdots M_n}e^{j[(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_m)-(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)]}=|H(j\omega)|e^{j\rho(\omega)}$$

其中：

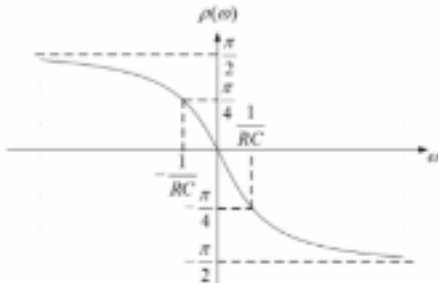
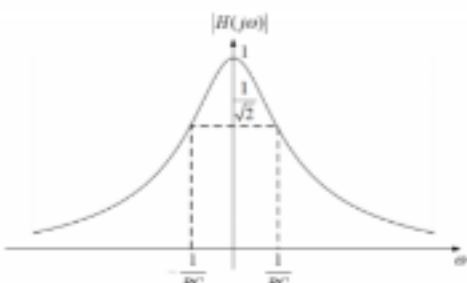
$$|H(j\omega)|=A\frac{N_1N_2\cdots N_m}{M_1M_2\cdots M_n} \quad \rho(\omega)=(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_m)-(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)$$



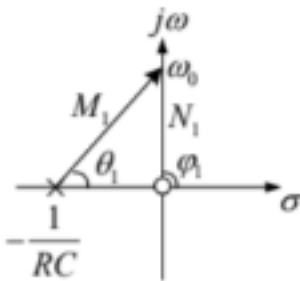
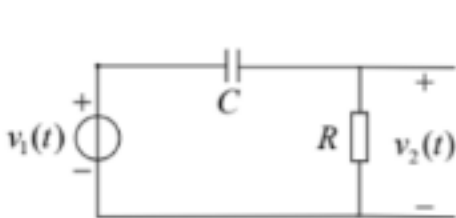
如上图所示的RC低通滤波器频响特性，该系统的系统函数可以写成：

$$H(s)=\frac{V_2(s)}{V_1(s)}=\frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{1}{sC}}=\frac{1}{1+sRC}$$

$H(s)$ 有一个极点在 $-\frac{1}{RC}$ 处，



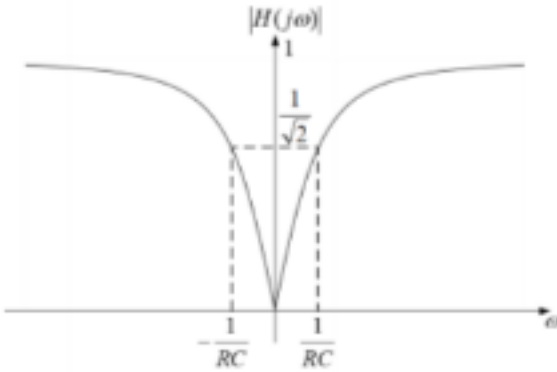
(a) 幅度谱 (b) 相位谱
RC低通滤波器的幅度谱和相位谱 ($R=C=1$)



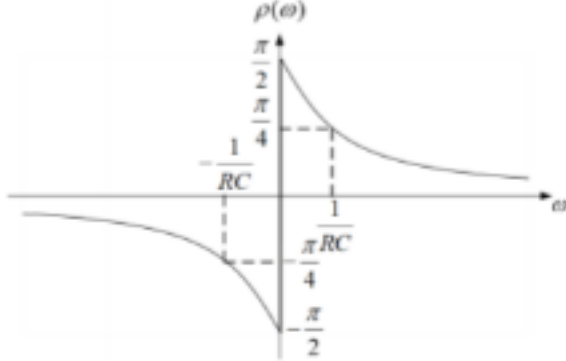
如上图所示的RC高通滤波器频响特性，该系统的系统函数可以写成：

$$H(s)=\frac{V_2(s)}{V_1(s)}=\frac{R}{R+\frac{1}{sC}}=\frac{sRC}{1+sRC}$$

$H(s)$ 有一个极点在 $-\frac{1}{RC}$ 处，有一个零点在0处。



(a) 幅度谱



(b) 相位谱

RC高通滤波器的幅度谱和相位谱 ($R=C=1$)