复变函数与积分变换

Slowist

Tel: 18806802132

2024年9月-2024年11月

No.
Date

【第二章 解析函数】

2.1 求曲线在变换下的像集

【P18 Ex.3.1】圆周 $|z-1|=1$ 在变换 $w=iz$ 下的像集为____

A. $|w-i|=1$　B. $|w+i|=1$　C. $|w+1|=1$　D. $|w-1|=1$

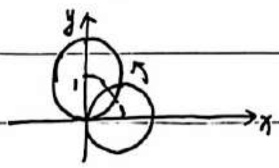
解：解法一：利用指数形式

设 $z=re^{i\theta}$　$w=\rho e^{i\varphi}$

$\because w=iz$　$\therefore \rho e^{i\varphi}=i\cdot re^{i\theta}=r\cdot e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$

$\therefore \rho=r,\ \varphi=\theta+\frac{\pi}{2}$

故在几何意义上，w 将 z 平面逆时针转了 $\frac{\pi}{2}$



即 $|w-i|=1$

解法二：代入圆周方程

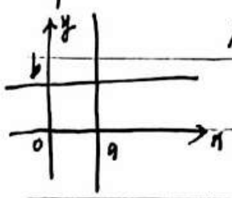
$\because w=iz$ $\therefore z=\frac{w}{i}$，代入

$\therefore \left|\frac{w}{i}-1\right|=1$　$\left|\frac{w}{i}-1\right||i|=1 \Rightarrow |w-i|=1$

故选 A

【P19. Ex.3.3】在变换 $w=z^2$ 下，z 平面上的 $x=a$，$y=b$ 映射成为 w 平面上什么图形了？并画出草图.

解：不能按照一个点的逻辑去解，如果单纯认为 $z=a+bi$，那么 z 就是一个点了，而事实上 z 为两条直线！



不过运用指数形式较难表示，设 $z=x+iy$，$w=u+iv$

$\therefore$ 联立 $w=z^2$，有 $x^2-y^2+2xy\cdot i=u+iv$，

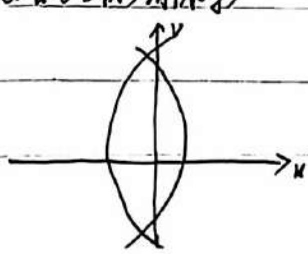
即 $\begin{cases}u=x^2-y^2\\ v=2xy\end{cases}$

$\therefore$ 将 $x=a$ 和 $y=b$ 分别进行映射，有 $x=a$，对应 $\begin{cases}u=a^2-y^2\\ v=2ay\end{cases} \Rightarrow u=a^2-\left(\frac{v}{2a}\right)^2$，为抛物线

(tips: u-v 坐标，消除 y)

另有 $y=b$，对应 $\begin{cases}u=x^2-b^2\\ v=2bx\end{cases} \Rightarrow u=\left(\frac{v}{2b}\right)^2-b^2$，也是抛物线

大致图象 →



No.

Date

2.2 判断复变函数极限存在性

[P.20. Ex. 3.4 (1)] 判断 $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\mathrm{Re}\,z}{z}$ 极限存在性

解：令 $z=x+iy$，则 $\frac{\mathrm{Re}\,z}{z}=\frac{x}{x+iy}$.

从而当 $\frac{\mathrm{Re}\,z}{z}$ 沿直线 $y=mx$，$x\to 0$ 时，$\lim\limits_{z\to 0}\frac{\mathrm{Re}\,z}{z}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x+imx}=\frac{1}{im+1}$

显然m取不同值时，极限不同

$\therefore$ 极限不存在.

[P20 Ex. 3.4 (3)] 判断 $\lim\limits_{z\to 1}\frac{z\cdot\bar{z}+2z-\bar{z}-2}{z^2-1}$ 极限存在性

解：复杂式子：先进行因式分解等化简！

$$\lim_{z\to 1}\frac{z\cdot\bar{z}+2z-\bar{z}-2}{z^2-1}=\lim_{z\to 1}\frac{\bar{z}\cdot(z-1)+2(z-1)}{(z+1)\cdot(z-1)}=\lim_{z\to 1}\frac{\bar{z}+2}{z+1}=\frac{3}{2}$$

2.3 复变函数连续性

[P21 Ex. 3.6] $f(z)=\begin{cases}\frac{x^3y}{x^4+y^2}, & z\neq 0\\ 0, & z=0\end{cases}$ 在原点连续性？

解：若令 $y=kx^2$ 的话：$\frac{kx^5}{x^4+k^2x^4}=\frac{k}{k^2+1}\cdot x$，太高阶了

若 $y=kx \Rightarrow \frac{kx^4}{x^4+k^2x^2}$，不太对（极限是k？因为 $x\to\infty$！）

$\therefore$ 会不会是有极限呢？联想夹逼定理 $\Rightarrow$

当 $z\neq 0$ 时，$f(z)=\frac{x^3y}{x^4+y^2}\leq\frac{x^3y}{2|x^2||y|}=\frac{1}{2}x$　$x\to 0$ 时，~~$f(z)$~~ $\frac{1}{2}x\to 0$

$\therefore$ 有极限且均为0，$f(z)$ 连续

[P21 Ex. 3.8] 求证：$f(z)=\frac{1}{1-z}$ 在 $|z|<1$ 连续，但不一致连续

证明：(法一) 利用定义：

这里默写一下连续的定义：当 $|z-z_0|<\delta$ 时，$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$

在 $|z|<1$ 连续，即有所取的 $|z_0|<1$

$\therefore |f(z)-f(z_0)|=\left|\frac{1}{1-z}-\frac{1}{1-z_0}\right|=\left|\frac{z-z_0}{(1-z)\cdot(1-z_0)}\right|$

取 $|z-z_0|<\delta_1=\frac{1-|z_0|}{2}$

$\therefore |f(z)-f(z_0)|=\left|\frac{z-z_0}{(1-z)\cdot(1-z_0)}\right|\leq\frac{|z-z_0|}{\delta_1^2}$

($|1-z_0|\geq 1-|z_0|>\frac{1-|z_0|}{2}=\delta_1$，$|1-z|\geq|1-z_0|-|z-z_0|\geq(1-|z_0|)-\delta_1=\delta_1$

故对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon\delta_1^2$，当 $|z-z_0|<\delta$ 时，有 $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$，由 z_0 任意性，$f(z)$ 在 $|z|<1$ 上连续

~~[illegible]~~

(法二) $\because \varphi(z)=1-z$ 连续，当 $|z|<1$ 时，$\varphi(z)\neq 0$

$\therefore f(z)=\frac{1}{\varphi(z)}=\frac{1}{1-z}$ 在 $|z|<1$ 时连续

2.4 判断可微性与解析性, C-R 条件

· 可导：$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$

· 可微：$\Delta w=f'(z_0)\Delta z+o(|\Delta z|)$ $(\Delta z\to 0)$　　$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 $z=x+iy$ 可微 ⇔ 易：$u(x,y)$, $v(x,y)$ 在 (x,y) 可微；~~$u(x,y)$, $v(x,y)$~~ 满足 C-R 方程：

· 解析：$w=f(z)$ 在区域 D 内可微　　判定类似，扩大到 D 上

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\end{cases}$$

⇒ u, v 为一对共轭调和函数 ⇒ 即 $\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0\end{cases}$ 若不满足一定不调和/解析

[P30, Ex. 1-2] 设 $f(z)=\begin{cases}\frac{x(x^2+y^2)(y-ix)}{x^2+y^4}, & z\neq 0\\ 0, & z=0\end{cases}$ $(z=x+iy)$　试证：$f(z)$ 在 $z=0$ 处不可微

证明：用微积分的方法!!! 不同路径

问题就和上次一样，上下凑不到齐次

① 若 $y=mx$：则 $\lim\limits_{z\to 0}\frac{f(z)-0}{z}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4\cancel{(1+m^2)}(m-i)}{x^3\cancel{(1+m^2)}\cdot(1+mi)}=0$

② 若 $x=y^2$：

则 $\lim\limits_{z\to 0}\frac{f(z)-0}{z}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y^5(1+y^2)(1-iy)}{2y^4\cdot y\cdot(y+i)}=\lim\limits_{y\to 0}(y-i)(1-iy)$

$=-i$

$\therefore \lim\limits_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z}$ 不存在，故 $f(z)$ 在 $z=0$ 处不可微

2.5 初等解析函数

① 指数函数：$e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$

② 对数函数：$w=\mathrm{Ln}\, z=\ln|z|+i\,\mathrm{Arg}\, z=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)$

③ 幂函数：$z^\mu=e^{\mu\mathrm{Ln} z}=e^{\mu(\ln|z|+i\arg z+i\cdot 2k\pi)}=e^{\mu\ln z}\cdot e^{2k\pi\mu i}$

· μ 为整数，z 是单值

· μ 为有理数，z 有限多值

· μ 为无理数/复数，z 无穷多值.

No.

Date

④ 三角函数和双曲函数

· 正弦：$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

· 余弦：$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

· 双曲正弦：$\mathrm{sh} z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$

· 双曲余弦：$\mathrm{ch} z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$

[P36. Ex.2.1] 设 $z=x+iy$，则 $|e^{e^z}|=$ ____，$\mathrm{Re}(e^{e^z})=$ ____

解：最基本的化简：$e^z=e^x\cdot e^{iy}=e^x\cdot(\cos y+i\sin y)$

$\therefore e^{e^z}=e^{e^x(\cos y+i\sin y)}=e^{e^x\cos y}\cdot e^{ie^x\sin y}$

又 $\because |e^{i\theta}|=1$ $\quad\therefore |e^{e^z}|=|e^{e^x\cos y}|\cdot 1=e^{e^x\cos y}$

$\mathrm{Re}(e^{e^z})$：$e^{e^z}=e^{e^x\cos y}\cdot[\cos(e^x\sin y)+i\sin(e^x\sin y)]$

故 $\mathrm{Re}(e^{e^z})=e^{e^x\cos y}\cos(e^x\sin y)$

[P36 Ex.2.3] 分析 $f(z)=e^{\bar z}$ 是不是 z 的解析函数。

解：记住：分析解析性：① 写 $u(x,y)$，$v(x,y)$
② C-R条件

设 $z=x+iy$ $\quad\therefore e^{\bar z}=e^{x-iy}=e^x(\cos y-i\sin y)$

$\therefore u(x,y)=e^x\cos y$，$v(x,y)=-e^x\sin y$

验证C-R条件：$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y$ $\quad\frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\cos y$ $\quad\frac{\partial v}{\partial x}=-e^x\sin y$ $\quad\frac{\partial v}{\partial y}=-e^x\cos y$

而 $\frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y}$，已不成立 $\therefore$ 无法满足C-R条件，不解析

· 历年卷中 U2 及以前部分

☆[2023-2024 秋 Ex.1] 求 $(1+i)^{1+i}$ 辐角主值和模

解：直接在原式子基础上开始化！

$(1+i)^{1+i}=e^{(1+i)\mathrm{Ln}(1+i)}=e^{(1+i)\mathrm{Ln}\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}}=e^{(1+i)\cdot(\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}i)}=e^{\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}+(\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4})i}$

$\therefore$ 主值：$\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}$

模：$e^{\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$

No.
Date

☆ [2023-2024 秋 Ex.2.]

解：设 $u(x,y) = x^2+axy+by^2$，$v(x,y) = y^2-x^2+2xy$

列 C-R 条件方程：

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x+ay$，　$\frac{\partial u}{\partial y} = ax+2by$

$\frac{\partial v}{\partial x} = -2x+2y$　$\frac{\partial v}{\partial y} = 2y+2x$

$\therefore \begin{cases} 2x+ay = 2y+2x & \text{实部} \\ ax+2by = 2x-2y & \text{虚部} \end{cases}$

∴ ① $a=2$，$b=-1$，则 $f(z)$ 每点都可导

$\therefore f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\cdot i = (2x+2y)+i\cdot(2x+2y)$

② 若 $a=2$，$b\neq-1$，则 $\begin{cases} 2x+2y = 2y+2x \\ 2x+2by = 2x-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \text{ 取任意值} \\ y=0 \end{cases}$

∴ $f(z)$ 实轴上的点可导，$f'(z) = 2x+2x\cdot i$

③ 若 $a\neq2$，$b\neq-1$，则 $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$，仅在原点可导

$\therefore \underline{f'(z) = 0}$　[代入 $(2x+ay)+i(2y+2x)$]

[2022-2023 秋 Ex.1]

$z=(1-i)^5 = (\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}})^5 = 4\sqrt{2}\,e^{-\frac{5}{4}\pi}$

$|z| = 4\sqrt{2}$.　$\arg z = \frac{3}{4}\pi$.

☆ [2022-2023 秋 Ex.2] 求 3^i

$3^i = e^{i\ln3} = \cos(\ln3)+i\sin(\ln3)$

☆ [2021-2022 Ex.1] 求 $(\sqrt{3}+i)^i$ 的实部和虚部.

· 不要落下 $2k\pi$！

解：$(\sqrt{3}+i)^i = e^{i\,\mathrm{Ln}(\sqrt{3}+i)}$

$\because \sqrt{3}+i = 2\cdot e^{i(\frac{\pi}{6}+2k\pi)}$　$\therefore \mathrm{Ln}(\sqrt{3}+i) = i\cdot(\frac{\pi}{6}+2k\pi)+\ln2$

$\therefore$ 原式 $= e^{-(\frac{\pi}{6}+2k\pi)+i\ln2} = e^{-(\frac{\pi}{6}+2k\pi)}[\cos(\ln2)+i\sin(\ln2)]$

实部：$e^{-(\frac{\pi}{6}+2k\pi)}\cdot\cos(\ln2)$　虚部：$e^{-(\frac{\pi}{6}+2k\pi)}\cdot\sin(\ln2)$

No.

Date

※[2021-2022 EX.2] 求 $\cos^3 z = 3\cos z + 2$ 的复数解.

解：先令 $t = \cos z$　$t^3 = 3t + 2$

$\therefore (t+1)^2(t-2) = 0$　$t = -1$ 或 $t = 2$　$\boxed{\text{注意}}$ 不要会 $\cos z = 2$，而直接代 $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

① 当 $t=-1$ 时，$\cos z = -1$　$z = \pi + 2k\pi$.

② 当 $t=2$ 时，$\cos z = 2$

$\therefore e^{iz} + e^{-iz} = 4$.　先令 $e^{iz} = x$

$x + \frac{1}{x} = 4$　$x^2 - 4x + 1 = 0$　$(x-2)^2 = 3$　$x = \pm\sqrt{3} + 2$

$x_1 = \sqrt{3} + 2$　$\therefore e^{iz} = \sqrt{3} + 2$　$Ln(\sqrt{3}+2) =$

$iz = \ln(\sqrt{3}+2) + 2k\pi i$, $z_1 = -i\ln(\sqrt{3}+2) - 2k\pi$

同理，$z_2 = -i\ln(2-\sqrt{3}) - 2k\pi = i\ln(\sqrt{3}+2) - 2k\pi$

$\therefore z = 2k\pi \pm i\ln(\sqrt{3}+2)$

综上，$z = \pi + 2k\pi$ 或 $z = 2k\pi \pm i\ln(\sqrt{3}+2)$

[2018-2019 EX.3] 若 $u - v = e^y(\cos x + \sin x) + 4xy$ 且 $f(0) = 1$，求 $f(z)$

解：通过联立会得到

$$\begin{cases} u_x = v_y = -e^y \sin x + 2y - 2x \\ u_y = -v_x = e^y \cos x + 2x + 2y \end{cases}$$

不要急着积分，计算 $f' = u_x + iv_x = -e^y \sin x + 2y - 2x + i\cdot(e^y\cos x + 2x - 2y)$

$= e^y(-\sin x + i\cos x) + (2y - 2x)(1-i)$　… (后面咋算??)

$\therefore f = e^{-iz} - (1+i)z^2 + c$　$f(0) = 1$ $\Rightarrow$ $f = e^{-iz} - (1+i)z^2$

No.
Date

[第三章 复变函数积分]

△ 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 C 上连续，则

$\int_C f(z)dz=\int_C udx-vdy+i\int_C(vdx+udy)$ （第二类曲线积分）

△ 定理：若 $C: z(t)=x(t)+iy(t)$，$z'(t)=x'(t)+iy'(t)$.

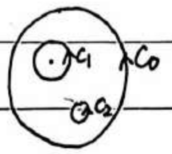
则 $\int_C f(z)dz=\int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt$

△ 柯西积分定理：

定理：$f(z)$ 在 C 上及包围区域 D 内解析 $\Rightarrow \oint_C f(z)dz=0$

推论：多连通区域，$C=C_0+C_1^-+C_2^-+\cdots+C_n^-$

$\Rightarrow \oint_{C_0}f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\oint_{C_k}f(z)dz$



△ 重要积分：$\int_C \frac{dz}{z}=2\pi i$（包含奇点）

[P49 Ex 2.3 A] 判断对错：若 $f(z)$ 在 D 内处处解析，C 为 D 内任意一条正向简单闭曲线，则 $\int_C[\mathrm{Re}(f(z))]dz=0$，$\int_C[\mathrm{Im}f(z)]dz=0$

解：不对. 标答给的特例如下.

设 $f(z)=z$，而 $C: |z|<1$

$\therefore C$ 的参数方程 $z=e^{it}=\cos t+i\sin t$

$\therefore dz=ie^{it}dt$，$\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$

故 $\int_C[\mathrm{Re}f(z)]dz=\int_0\cos t\cdot ie^{it}dt$，化成三角来积分

$\int_C[\mathrm{Re}f(z)]dz=\int_C\cos t\cdot i\cdot(\cos t+i\sin t)dt$

$=i\cdot\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt-\int_0^{2\pi}\cos t\sin t\,dt=i\cdot\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}\cdot dt-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin 2t\,dt=\pi i\neq 0$

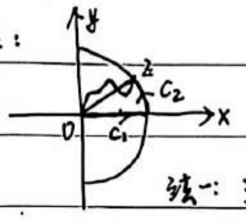
而 $\int_C[\mathrm{Im}f(z)]dz=\int_0^{2\pi}\sin t\cdot i\cdot(\cos t+i\sin t)dt$

$=i\cdot\int_0^{2\pi}\sin t\cos t\,dt-\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt=\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2t-1}{2}\cdot dt=-\pi\neq 0$

$\therefore$ 不成立.

【P51. Ex.2.7】设在区域 $D=\{z \mid |\arg z|<\frac{\pi}{2}\}$ 内的单位圆周 $|z|=1$ 上任取一点 z，用 D 内的曲线 C 连接 0 与 z，则 $\mathrm{Re}\int_C \frac{dz}{1+z^2}$ 为 ____

解：



$\because \frac{1}{1+z^2}$ 在单连通区域内解析

$\therefore$ 积分与路径无关！

法一：选择 $C_1 \to C_2$　　设 C_2 上：$z=e^{i\theta}$

原式 $=\int_{C_1}\frac{dz}{1+z^2}+\int_{C_2}\frac{dz}{1+z^2}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}+\int_0^\theta \frac{i\cdot e^{i\theta}}{1+e^{2i\theta}}d\theta$

$\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$

$\int_0^\theta \frac{ie^{i\theta}}{1+e^{2i\theta}}d\theta = i\cdot\int_0^\theta \frac{e^{i\theta}}{1+e^{2i\theta}} = i\cdot\int_0^\theta \frac{1}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}d\theta$

又 $\because \cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-\theta}}{2}$ (欧) 三角形式转换！

$\therefore$ 原式 $=i\cdot\int_0^\theta \frac{2}{\cos\theta}d\theta = 2i\cdot\int_0^\theta \sec\theta\, d\theta$ ……

原题只求实部，故 $\mathrm{Re}\int_C\frac{dz}{1+z^2}=\frac{\pi}{4}$

法二：复积分牛顿-莱布尼兹公式

$\int_C\frac{dz}{1+z^2}=\int_C\frac{1}{(z+i)(z-i)}dz=\frac{1}{2i}\cdot\int_C\left(\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right)dz=\frac{1}{2i}\ln\frac{z-i}{z+i}=\frac{1}{2i}\left[\ln\left|\frac{z-i}{z+i}\right|+i\arg\left(\frac{z-i}{z+i}\right)\right]$

$=\frac{1}{2i}\ln\left|\frac{1+iz}{1-iz}\right|+\frac{1}{2}\arg\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$

化简 $\frac{1+iz}{1-iz}=i\cdot\frac{2\mathrm{Re}z}{|1-iz|^2}$　$\because \mathrm{Re}z>0$　$\therefore \frac{1+iz}{1-iz}$ 是正的纯虚数

$\therefore \arg\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)=\frac{\pi}{2}$ (正的虚半轴)　$\therefore \mathrm{Re}\int_C\frac{dz}{1+z^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$.

△柯西积分公式：$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz$，若 $f(z)=1$，则 $\oint_C\frac{1}{z-z_0}dz=2\pi i$.

推论：C 是圆周 $z=z_0+Re^{i\theta}$ 时，$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+Re^{i\theta})d\theta$

△高阶柯西公式：$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$

【P57. Ex.3.3】设 C 为正向单位圆周，求积分 $\int_C\frac{e^z}{z}dz$，从而证明 $\int_0^{\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta=\pi$

证明：先由柯西积分公式，$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz$.

这里 $f(z)=e^z$，在 $|z|<1$ 内解析. $\therefore 1=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{e^z}{z-0}dz \Rightarrow \oint_C\frac{e^z}{z-0}dz=2\pi i$

分析所求式子：$e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)$，由此联想到 $e^{\cos\theta+i\sin\theta}=e^{\cos\theta}\cdot[\cos(\sin\theta)+i\sin(\sin\theta)]$

$\therefore$ 设 $z=\cos\theta+i\sin\theta$　但这样又和 $\frac{e^z}{z}$ 太难联系起来了　$\therefore$ 指数形式表示：$z=e^{i\theta}$，代回式子里

$\therefore \int_C \frac{e^z}{z}dz = \int_C \frac{e^{e^{i\theta}}}{e^{i\theta}} ie^{i\theta}d\theta = i\cdot\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta+i\sin\theta}d\theta = 2\pi i$

又$\because \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cdot i\cdot\sin(\sin\theta) = -\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\cos\theta} i\sin(\sin\theta) = 0$

$\therefore \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta+i\sin\theta}d\theta = 2\pi$, $\int_0^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)d\theta = \pi$. (由偶函数)

Ex.3.5 设$f(z)$与$g(z)$在D内解析，C为D内任意一条简单闭曲线，内部包含于D. 若$f(z)=g(z)$在C上均成立，求证C内所有点$f(z)=g(z)$成立.

证明：柯西积分公式 $f(z_0)-g(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)-g(z)}{z-z_0}$，$f(z)-g(z)$在C内均解析，$z_0$为C内任意点

又$\because$ C上 $f(z)-g(z)=0$，代入，$f(z_0)-g(z_0)=0$，即有$f(z_0)=g(z_0)$，由z_0任意性，有原结论成立.

Ex 3.6 证明 $\int_C \frac{|dz|}{|z-a|^2} = \begin{cases} \frac{2\pi\rho}{\rho^2-|a|^2}, & 若|a|<\rho \\ \frac{2\pi\rho}{|a|^2-\rho^2}, & 若|a|>\rho \end{cases}$ 其中C为正向圆周$|z|=\rho$

证明：主要是$|dz|$的形式并不符合日常表达，所以令$z=\rho e^{i\theta}$

$\therefore dz = i\cdot\rho e^{i\theta} = i\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$ $\therefore |dz| = -\rho\sin\theta$

Ex 3.8 若$f(z)$在$|z|\le 1$内解析，C为正向单位圆周，试证明 $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\overline{f(\zeta)}}{\zeta-z}d\zeta = \begin{cases} \overline{f(0)}, & 当|z|<1 \\ \overline{f(0)}-\overline{f(\frac{1}{\bar{z}})}, & 当|z|>1 \end{cases}$

证明：

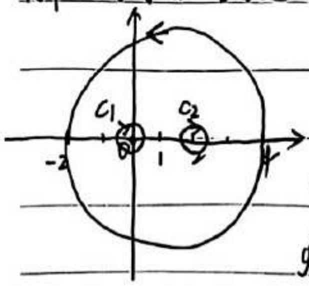
No.

Date

高阶求导公式

Ex.3.10. 设 c 为正向圆周 $|z-1|=3$，则 $\int_C \frac{dz}{(z-2)^2z^3}$ 的值为____

解：请掌握［复连通区域］!!!



如图，C内包含两个奇点 $z=0$ && $z=2$，作两个互不包含的小圆

$\therefore \int_C \frac{dz}{(z-2)^2z^3} = \oint_{C_1^-} \frac{dz}{(z-2)^2z^3} + \oint_{C_2^-} \frac{dz}{(z-2)^2z^3}$

下面开始构造：

$\oint_{C_1^-} \frac{dz}{(z-2)^2z^3} = \oint_{C_1^-} \frac{\frac{dz}{(z-2)^2}}{z^3}$，有 $z_0=0$，$n=2$，$f(z)=\left[\frac{1}{(z-2)^2}\right]''$ $\therefore f(z_0)=\cancel{\frac{1}{4}}\ \frac{3}{8}=\frac{2!}{2\pi i}\cdot\oint_{C_1^-}\frac{\frac{dz}{(z-2)^2}}{z^3}$

原式 $=\cancel{\frac{\pi}{4}i}\ \frac{3}{8}\pi i$　　$f(z)=\frac{(-2)(-3)}{(z-2)^4}$

$\oint_{C_2^-} \frac{dz}{(z-2)^2z^3} = \oint_{C_2^-} \frac{\frac{dz}{z^3}}{(z-2)^2}$，有 $z_0=2$，$n=1$，$\cancel{f(z)=\frac{1}{z^3}}$　　$\therefore f(z_0)=\cancel{\frac{1}{8}}\ -\frac{3}{8}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2^-}\frac{\frac{dz}{z^3}}{(z-2)^2}$

原式 $=\cancel{\frac{\pi}{4}i}\ -\frac{3}{8}\pi i$　　$f(z)=\frac{-3}{z^4}$

$\therefore$ 答案是 $\cancel{\frac{\pi}{2}i}$ 0

刘维尔定理

- 柯西不等式，$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!}{R^n}\cdot M$

证明：$|f^{(n)}(z_0)| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=R}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz\right| \le \frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{M}{R^{n+1}}\cdot 2\pi R = \frac{n!}{R^n}\cdot M$

- 有界整函数必为常数

$|f'(z_0)| \le \frac{M}{R}$，令 $R\to+\infty$ $\therefore |f'(z_0)|=0$，$f(z_0)$ 为常数

[yht 23-24 Ex.4.] 若 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 为整函数，且 $v(x,y)\ge c>0$，求证：$f(z)$ 为常数.

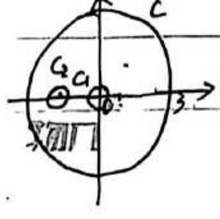
证明：设 $g(z)=e^{if(z)}=e^{iu(x,y)-v(x,y)}$　故 $|g(z)|=|e^{-v(x,y)}|\le|e^{-c}|=M$

又 $\because g(z)$ 一定是整函数，由刘维尔定理，有界整函数必为常数 $\therefore g(z)\equiv C_0$.

[yht 23-24 Ex.3] $\oint_{|z|=3}\left(\frac{e^z}{(z-1)^2(2+\frac{3|z|}{z})}+\ln^{2023}(z+4)\right)dz$

解：易知 $\oint_{|z|=3}\ln^{2023}(z+4)dz$

$\therefore$ 原式 $=\oint_{|z|=3}\frac{e^z}{(z-1)^2(2+3z)}dz=\oint_{C_2}\frac{\frac{e^z}{2+3z}}{(z-1)^2}dz+\oint_{C_1}\frac{\frac{e^z}{(z-1)^2}}{2+3z}$



$\oint_{C_2}\frac{\frac{e^z}{2+3z}}{(z-1)^2}dz$ 中：$n=1$，$f(z)=\frac{e^z}{2+3z}$，$z_0=1$，$f'(z)=\frac{e^z(2+3z)-3e^z}{(3z+2)^2}=\frac{e^z(3z-1)}{(3z+2)^2}$

No.
Date

$\therefore$ 原式 $= 2\pi i f(1) = 2\pi i \cdot \frac{e\cdot 2}{25} = \frac{4}{25}e\pi i$

而另一个 $\oint_{C_1} \frac{\frac{e^z}{(z-1)^2}}{3z+2} = \frac{1}{3}\oint_{C_1} \frac{\frac{e^z}{(z-1)^2}}{z-(-\frac{2}{3})}$ $\quad z_0 = -\frac{2}{3}$

$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{\frac{e^z}{(z-1)^2}}{z-(-\frac{2}{3})} = \frac{9e^{-\frac{2}{3}}}{25}$ $\quad$ 故原式 $= \frac{18}{25}e^{-\frac{2}{3}}\pi i$

综上，原式 $= \frac{4}{25}e\pi i + \frac{18}{25}e^{-\frac{2}{3}}\pi i$

历年卷积分题

结论: $\int_c \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i \cdot f(z_0)$

$\int_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0)$

$\int_c f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} Res[f(z); z_k]$

15-16:

二.(1) $\oint_{|z|=1}\left[\frac{\sin z}{z^6} - \frac{\ln(z+3)}{z^3+4}\right]dz$

解: 原式 $= \oint_{|z|=1}\frac{\sin z}{z^6}dz = \oint_{|z|=1}\frac{\sin z}{(z-0)^6} = \cancel{2\pi i}\ \frac{2\pi i}{5!}\cancel{f^{(5)}}[\sin z]^{5}\Big|_{z=0}$

$= \frac{1}{60}\pi i$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{2-2x+x^2}dx$

解: 利用函数:

$\int_{-\infty}^{+\infty}\oint_{|z|=1}\frac{e^{iz}}{2-2z+z^2}dz = 2\pi i\, Res[f(z); z_k]$ $\quad$ 其中 z_k 是上半平面 ..

$(z-1)^2 = -1 \quad z = 1\pm i \quad$ 取 $z_1 = 1+i$

$\therefore \cancel{Res}\ \frac{e^{iz}}{(\cancel{z-1+i})(z-1-i)}\cdot(\cancel{z-1+i})$

$\frac{e^{i(1+i)}}{-2i} = \frac{e^{1+i}}{-2i} = \frac{e\cdot(\cos 1+i\sin 1)}{-2i}$ $\quad -\pi e^{-1}\cdot(\cos 1+i\sin 1)$

故原式 $= \cancel{\pi e\cos 1}\ \frac{\pi\cos 1}{e}$

No.

Date

(3) $\int_{|z|=2} \frac{z}{(1-z^2)(\cos z-1)} dz$

奇点 $z=2k\pi$. $z^2=1$ $z=1, 0, -1$

~~记 $F(z)=\frac{(1-z^2)(\cos z-1)}{z}$~~

~~$F'(z)=\frac{[(-2z)(\cos z-1)+(1-z^2)(-\sin z)]z-(1-z^2)(\cos z-1)}{z^2} = \frac{(-z^2-1)(\cos z-1)+z(z^2-1)\sin z}{z^2}$~~

~~$F'(1)\neq 0$ $F'(-1)\neq 0$~~ $\mathrm{Res}[f;0]=\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{(1-z^2)(\cos z-1)}=\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{(1-z^2)\cdot\frac{-1}{2}z^2}=-2$.

$\mathrm{Res}[f;1]=\lim_{z\to 1}\frac{z^2}{-(z+1)(\cos z-1)}=\frac{-1}{2(\cos 1-1)}$

$\mathrm{Res}[f;-1]=\lim_{z\to -1}\frac{z^2}{(z-1)(\cos z-1)}=-\frac{1}{2(\cos 1-1)}$

$\therefore$ 原式 $=-2\pi i\cdot\left(-2-\frac{1}{\cos 1-1}\right)=4\pi i+\pi i\cdot\frac{1}{\cos 1-1}$

17-18年 Ex.3 $\int_c \bar{z}\,dz$.

解: ~~$\int_c (x-iy)$~~ $\int_1^2(-iy)\,dy=-i\cdot\frac{1}{2}(2^2-1^2)=-\frac{3}{2}i$

不要乱做!!! $\because$ $y=-x+2$. $-y=x-2$ $-iy=ix-2i$

令 $z=x+iy$ $\therefore \int_c (x-iy)\,d(x+iy)$

$=\int_c[(1+i)x-2i]\,d[(1-i)x+2i]$

$=(1-i)\int_1^0[(1+i)x-2i]\,dx$

$=(1-i)\cdot\left[(1+i)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+2i\right]=-1+2i+2=1+2i$

☆ 把 $f(z)=u+iv$ $dz=dx+idy$ 代入, 算两个第二类曲线积分

Ex.5. 求 $\oint_{|z|=4}\frac{|z|}{\sin z}dz$:

原式 $=\oint_{|z|=4}\frac{4}{\sin z}dz$

$\mathrm{Res}\left[\frac{4}{\sin z};0\right]=\lim_{z\to 0}\frac{4z}{\sin z}=4$.

~~$\therefore$ 原式~~

$\mathrm{Res}\left[\frac{4}{\sin z};\pi\right]=\lim_{z\to\pi}\frac{4(z-\pi)}{\sin z}=-\lim_{z\to\pi}\frac{4(z-\pi)}{\sin(z-\pi)}=-4$

$\mathrm{Res}\left[\frac{4}{\sin z};-\pi\right]=-4$

$\therefore$ 原式 $=2\pi i\cdot(-4)=-8\pi i$

[illegible]

No.
Date

21-22:

1. $\oint_{|z|=2} \frac{e^{\frac{1}{z}}\sin(z-1)}{z^2-1}\,dz$

解: $z_1=1$. $\lim_{z\to 1} f(z)$ 存在,可去,留数为零

$z_2=-1$ $\quad Res[f;-1]=\lim_{z\to -1}\frac{e^{\frac{1}{z}}\sin(z-1)}{z-1}=\frac{e^{-1}\sin 2}{2}=\frac{\sin 2}{2e}$

$z_3=0$ 可去奇点, ∴展开,

$e^{\frac{1}{z}}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(z^{-1})^k}{k!}$

$\sin(z-1)=\sin z\cos 1-\cos z\sin 1=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cdot z^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\cos 1-\sin 1\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cdot z^{2n}}{(2n)!}$

$\frac{1}{z^2-1}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left[(-1)\cdot\sum_{m=0}^{+\infty}z^m+(-1)\cdot\sum_{m=0}^{+\infty}(-z)^m\right]$ ...(算不下去了,本性奇点你着不好算了)

2. $\oint_{|z|=3}\left(\frac{1}{\sin z}+\frac{1}{(z-2)^2}\right)dz$

解: $\oint_{|z|=3}\frac{1}{\sin z}dz=2\pi i$

$\oint_{|z|=3}\frac{1}{(z-2)^2}dz$: $\quad Res[f;2]=\lim_{z\to 2}\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dz}\cdot 1=0$.

记住 $\int_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0)$

以及 $Res[f(z);z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-z_0)^m f(z)$

∴原式 $=0+2\pi i=2\pi i$

3. $\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta\,d\theta}{5-4\cos\theta}$

$\cos\theta=\frac{z^2+1}{2z}$, $\quad\sin\theta=\frac{z^2-1}{2zi}$

∴原函数 $=\frac{(z^2-1)^2}{z\left(-4z^2\cdot\left(5-4\cdot\frac{z^2+1}{2z}\right)\right)}=\frac{(z^2-1)^2}{z\left(-20z^2+8z\cdot(z^2+1)\right)}=\frac{(z^2-1)^2}{z\,4z\cdot(2z^2+2-5z)}=\frac{(z^2-1)^2}{4z^2(z-2)(2z-1)}$

单位圆周

$\cancel{Res[f;0]=\frac{1}{4\cdot(-2)\cdot(-1)}=\frac{1}{8}}$ $\quad\cancel{Res[f;2]=\frac{9}{8\cdot 3}}=\frac{3}{8}$ $\quad Res[f;\frac{1}{2}]=\frac{\frac{9}{16}}{2\cdot(-\frac{3}{2})\cdot\frac{1}{2}}=\cancel{-\frac{3}{16}}-\frac{3}{8}$

$d\theta=\frac{1}{iz}dz$

$Res[f;0]=\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{(z^2-1)^2}{(z-2)(2z-1)}\right]'=\frac{5}{16}$ $\quad$ ∴原式 $=2\pi i\cdot\left(\frac{5}{16}-\frac{3}{8}\right)\cdot\frac{1}{i}=2\pi\cdot\left(-\frac{1}{16}\right)=-\frac{1}{8}\pi$

算错了,不想管了

No.

Date

历年卷证明题：（纯抄的）

$\boxed{\text{理论基础}}$ 留数定理：（比值经常先化成 $f(z)=(z-z_0)^m\phi(z)$ ！）

柯西不等式：$|f^{(n)}(z_0)|\le\frac{n!}{R^n}\cdot M$，有界整函数必为常数　柯西积分公式 $f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=r<R}\frac{f(z)}{z-z_0}\cdot dz$

2021-2022 设 $f(z)$ 在 C 及其内部解析，在 C 上不取零值，证 $f(z)$ 在 C 内零点个数 $\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz$

解：设 z_0 是 $f(z)$ 在 C 内零点，（m 重）

∴ 在 z_0 附近．~~$(z-z_0)^m f(z)$ 解~~ $f(z)=(z-z_0)^m\phi(z)$，$\phi(z)$ 解析．

∴ 在 z_0 附近，$f'(z)=m\cdot(z-z_0)^{m-1}\phi(z)+(z-z_0)^m\phi'(z)$　$f(z)=(z-z_0)^m\phi(z)$

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{m}{z-z_0}+\frac{\phi'(z)}{\phi(z)}$$

△思路就是用留数定理正常地求积分．$\mathrm{Res}\left[\frac{m}{z-z_0}+\frac{\phi'(z)}{\phi(z)};z_0\right]=\lim_{z\to z_0}\left[m+(z-z_0)\cdot\frac{\phi'(z)}{\phi(z)}\right]=m$．

∴在 z_0 附近，$\oint_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz=2\pi i\cdot m$，其他相同 ∴ 为零点个数之和

2017-2018 $f(z)$ 在闭区域 $\bar{D}=\{z\,|\,|z-z_0|\le R\}$ 上解析，且 $|f(z_0)|=\max|f(z)|$，求证在 D 内 $|f(z)|$ 恒为常数．

解：$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=r<R}\frac{f(z)}{z-z_0}dz\Rightarrow|f(z_0)|\le\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=r<R}\left|\frac{f(z)}{z-z_0}\right|\cdot dz=\frac{1}{2\pi r}\oint_{|z-z_0|=r<R}|f(z)|dz$

$$\le\frac{1}{2\pi r}\cdot|f(z)|\cdot2\pi r=|f(z)|$$

同时 $|f(z_0)|=\max|f(z)|\Rightarrow|f(z_0)|\ge|f(z)|$　∴ $|f(z_0)|=f(z)=C$，证毕．

2015-16· $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

解：$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$　$|f'(z)|^2=\left|\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2=C$　故 $|f'(z)|$ 为常数，

∴原题即证明，若有 $g(z)=u+iv$，且 $|g(z)|=M$，$\sqrt{u^2+v^2}=M$．，~~并~~ 则 $g(z)$ 是否为常数

∴ 对 M 分类讨论：

① 若 $M=0$，则 $u=0$，$v=0$，∴ $g(z)=0$，满足题意

② 若 $M>0$，∴ 对 $u^2+v^2=M^2$ 的两边对 x 求偏导　$u\cdot u_x+v\cdot v_x=0$

对 y 求偏导：$u\cdot u_y+v\cdot v_y=0$

又由 C-R 条件：$\begin{cases}u_x=v_y\\u_y=-v_x\end{cases}$　∴ $-u\cdot v_x+v\cdot u_x=0$

$(u-v)u_x=(v-u)v_x$　$(u-v)(u_x-v_x)=0$ 对 $\forall u,v$ 都成立，

$\Rightarrow u_x=v_x\Rightarrow u_x=v_x=0$　∴ 可推得四个偏导均为0．即 $f(z)=C_1+C_2i=C$

No.
Date

23-24 证：设 $f(z)$ 是整函数，若 $\exists a>0, b>0$, s.t. 对于 $\forall z\in\mathbb{C}$, $|f(z)|\le a\sqrt{|z|}+b$，则 $f(z)$ 为常值.

证明：利用柯西积分公式，

$\because f'(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=R}\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$

$\therefore |f'(z_0)|=\frac{1}{2\pi}\left|\oint_{|z|=R}\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz\right|\le\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{|z|=R}\frac{|f(z)|}{|z-z_0|^2}ds\le\frac{1}{2\pi}(a\sqrt{R}+b)\int_{|z|=R}\frac{1}{(|z|-|z_0|)^2}ds$

$=\frac{a\sqrt{R}+b}{2\pi}\int_{|z|=R}\frac{1}{(R-|z_0|)^2}\cdot ds=\frac{a\sqrt{R}+b}{2\pi}\cdot\frac{2\pi R}{(R-|z_0|)^2}=\frac{R\cdot(a\sqrt{R}+b)}{(R-|z_0|)^2}$

$R\to+\infty$, $\frac{R(a\sqrt{R}+b)}{(R-|z_0|)^2}\to 0$

$\therefore f'(z_0)=0$，故 $f(z)$ 为常数

18-19 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 是整函数，且 $v(x,y)\ge c$，求证 $f(z)$ 为常数

证明：~~$\because f'(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=R}\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$~~ X

给定 $u+iv$ 的话：构造 e^{if}

$|e^{iu-v}|\le\frac{1}{c}$ $\therefore e^{if}$ 为常数，f 为常数

13-14

物门

[第四章 解析函数的幂级数表示法]

·级数敛散性 + 收敛半径.

<u>敛散性判别</u>：正项级数：①有公因式，比值判别

vif ②次方，根式判别

③比较判别法极限形式 $= \begin{cases} c \neq 0 & \text{同收同敛} \\ 0 & \text{同收} \\ +\infty & \text{同敛} \end{cases}$

④比较：不等式放缩

⑤线性运算法则 ⑥ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 是 a_n 收敛必要条件.

...

<u>一般级数</u>：绝对收敛
↓
条件收敛

△Remember: $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \frac{1}{e}$

Ex.1.1(4) 判断敛散性：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$

解：$\left|\frac{i^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$ 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散

看 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$ 本身：特殊之处在于可分类求和（因为虚数性质?）

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n} = i - \frac{1}{2} - \frac{i}{3} + \frac{1}{4} + \frac{i}{5} - \frac{1}{6} - \frac{i}{7} + \frac{1}{8} + \cdots$

$= \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n} + i\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)}$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 均收敛，故原式收敛

$\therefore$ 综上，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$ 条件收敛

Ex.1.1(3) 判断敛散性：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{in}$

解：$\because \lim\limits_{n\to\infty} e^{in} \neq 0$ 不符合收敛的必要条件，故发散

Ex.1.3.D. 判断敛散性：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{2^{\frac{n}{2}}\cos in}$

解：$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

$\therefore \cos in = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$

$\therefore$ 取模，即判断 $\left|\frac{2}{e^{z}+e^{-z}}\right| < \frac{2}{e^{z}}$ 而 $\frac{2}{e^{z}}$ 收敛

故原式绝对收敛

·收敛半径的计算：$R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|C_n|}}$

No.
Date

Ex.2.11. 试求满足微分方程 $f'(z)+cf(z)=0$（c是复常数）的中心为0的幂级数 $f(z)$，并求其收敛半径 $R>0$.

解：注意求导之后，"Σ"上下标的变化：

我们设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n z^n$

$\therefore f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}nC_n z^{n-1}$（因为 $n=0$ 时，$f(z)=C_n$，那么这项求导后变为0，故我们 $f'(z)$ 下标从 $n=1$ 记起）

$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)C_{n+1}z^n$ （统一下标，才能加减）

$\therefore$ 原方程：$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)C_{n+1}+c\cdot C_n\right]\cdot z^n=0$

$\therefore (n+1)C_{n+1}=-c\cdot C_n$

$\therefore \frac{C_{n+1}}{C_n}=-\frac{c}{n+1}$

$\frac{C_n}{C_{n-1}}\cdot\frac{C_{n-1}}{C_{n-2}}\cdots\frac{C_2}{C_1}\cdot\frac{C_1}{C_0}\cdot C_0=\frac{(-c)^n}{n!}\cdot C_0$

$\therefore f(z)=C_0\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-c)^n}{n!}z^n\right)$

若 $c=0$，则 $f(z)=C_0$. 收敛，$R=+\infty$

若 $c\neq 0$，$R=\lim_{n\to\infty}\frac{C_n}{C_{n+1}}=\frac{n+1}{c}$，$n\to+\infty$，$R\to+\infty$

4.2 Taylor 级数

一. Taylor 定理：设 $f(z)$ 在 $|z-z_0|<R$ 内解析，则 $f(z)$ 在圆内可展开成幂级数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$，$(|z-z_0|<R)$

特别：当 $z_0=0$ 时，$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$，$(|z|<R)$ 麦克劳林级数

常用展开式：

① $e^z=\sum_{z=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$

② $\cos z=\sum_{z=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$

③ $\sin z=\sum_{z=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

④ $\operatorname{sh} z=\sum_{z=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

⑤ $\operatorname{ch} z=\sum_{z=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$

⑥ $\ln(1+z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1}$ $(|z|<1)$

⑦ $\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$ $\quad\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$

No.
Date

4.3 解析函数孤立性及唯一性定理

1 零点种类 { 孤立零点

m级零点 $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$ $\varphi(z)=\frac{f^{(n)}(z)}{m!}$

↳ 在z_0处解析且$\varphi(z_0)\neq 0$

2 定理:) 设$f(z)$在D内解析, $\{z_n\}$两两不同, $f(z_n)=0$, $z_n\to z_0$, 则$f(z)\equiv 0$ (in D)

推论1: 不恒为零的解析函数零点必孤立.

推论2: 设$f(z)$和$g(z)$在D内解析, $\{z_n\}$两两不同, $f(z_n)=g(z_n)$, $z_n\to z_0$, 则$f(z)\equiv g(z)$

3 定理: 不恒为零的解析函数$f(z)$以z_0为m级零点的充要条件:

$f(z)=f'(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0)=0$, 但$f^{(m)}(z_0)\neq 0$

△判断零点级数

EX.4.2 $f(z)=\sin z^2\cdot(\cos z^2-1)$的零点$z=0$的级数为____

解: 直接展开.(这个$f(z)$太复杂了, 求高阶导不太现实)

$\sin(z^2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(z^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$\cos(z^2)-1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(z^2)^{2n}}{(2n)!}-1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(z^2)^{2n}}{(2n)!}$

∴ $f(z)$逐项都可表示为: $\left(-\frac{z^2}{1!}+\frac{z^6}{3!}-\frac{z^{10}}{5!}+\frac{z^{14}}{7!}-\cdots\right)\cdot\left(-\frac{z^4}{2!}+\frac{z^8}{4!}+\cdots\right)$

提出一个z^6, $f(z)=z^6\varphi(z)$, 其中$\varphi(z)=\left(-\frac{1}{1!}+\frac{z^4}{3!}-\frac{z^8}{5!}+\cdots\right)\left(-\frac{1}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots\right)\Rightarrow\varphi(0)\neq 0$

∴ 是六级零点

1 双边级数: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n(z-z_0)^n=\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}C_n(z-z_0)^n}_{\text{正幂部分}}+\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}C_{-n}(z-z_0)^{-n}}_{\text{负幂部分}}$

2 洛朗定理: 设函数在以z_0为中心, $R_1<|z-z_0|<R_2$内解析, 则在此圆环内, 函数可展开成级数 $f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}C_n(z-z_0)^n$, 其中 $C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta$

△注: 若$f(z)$在$|z-z_0|<R_2$内解析, 则 $C_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\begin{cases}0, & n\le -1\\ \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, & n\ge 0\end{cases}$

No.
Date

[EX.1.1 (1)] 将 $\frac{z+1}{z^2(z-1)}$ 展开成劳朗级数，$0<|z|<1$，$1<|z|<+\infty$.

解：对 $\frac{1}{z-1}$ 充分敏感：

$$\frac{z+1}{z^2(z-1)} = \frac{1}{z^2}\cdot\left(1+\frac{2}{z-1}\right) = \frac{1}{z^2} - 2\cdot\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1-z}$$

而 $\frac{1}{1-z} \overset{(0<|z|<1)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ ∴ 原式 $= \frac{1}{z^2} - 2\cdot\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{z^2} - \frac{2}{z^2}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$

而当 $1<|z|<+\infty$ 时，利用 $0<\frac{1}{|z|}<1$，将原式化作 $t=\frac{1}{z}$ 的形式

故 $\frac{z+1}{z^2(z-1)} = \frac{\frac{1}{t}+1}{\frac{1}{t^2}\cdot(\frac{1}{t}-1)} = \frac{t^2\cdot(1+t)}{1-t} = \underset{\sim\sim\sim}{t^2\cdot\left(-1+\frac{2}{1-t}\right)}$ 好像算错了？

∴ 原式 $= t^2 + 2t^2\cdot\sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \underset{\sim\sim\sim}{\frac{1}{z^2} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{z^{n+3}}}$

[yht 23-24 EX.2] 将 $f(z)=\frac{1}{z^2(z-i)}$ 在 $0<|z-i|<1$ 和 $1<|z-i|<+\infty$ 上展开成洛朗级数

解：$f(z) = \frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{-i}\cdot\frac{1}{1+iz}$

而 $\frac{1}{1+iz} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot(iz)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-i)^n z^n$ （若 $0<|z-i|<1$）

∴ 原式 $= \sum_{n=0}^{+\infty}(-i)^{n-1} z^{n-2}$

若 $1<|z-i|<+\infty$，则 $0<\left|\frac{1}{z-i}\right|<1$

∴ $\frac{1}{z} = \frac{1}{i+z-i} = \frac{1}{(z-i)\cdot\left(1+\frac{i}{z-i}\right)} = \frac{1}{z-i}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{i}{z-i}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{i^n}{(z-i)^{n+1}}$

∴ $\frac{1}{z^2} = \left(-\frac{1}{z}\right)' = \left[\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{i^n}{(z-i)^{n+1}}\right]' = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\cdot(-1)^n\cdot\frac{i^n}{(z-i)^{n+2}}$

故 $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)\cdot(-1)^n\cdot i^n}{(z-i)^{n+3}}$

[历年卷中的级数展开]

[17-18 EX.3.(1)] 求 $f(z)=\frac{1}{z^4(z-1)(z-2)}$ 在圆环 $1<|z|<2$ 内的洛朗级数

解：控制 $q<1$ 即可，即 $\frac{1}{2}<\frac{1}{|z|}<1$，$\frac{1}{2}<\frac{1}{2}|z|<1$

原式 $= \frac{1}{z^4}\cdot\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}\right)$

$\frac{1}{z^4}\cdot\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z^5(1-\frac{1}{z})}$ 有公式 $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$ $(0<|t|<1)$

$= \frac{1}{z^5}\cdot\left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z^{5+n}}$

$\frac{1}{z^4}\cdot\frac{1}{2-z} = \frac{1}{z^4}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{1}{z^4}\left(\frac{z}{2}\right)^n = \frac{z^{n-4}}{2^n}$ 综上，$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(z^{-n-5} + \frac{z^{n-4}}{2^n}\right)$

[17-18. Ex.3.(2)] 求 $f(z)=\tan z$ 的麦克劳林级数（写到 z^5 为止）并写出收敛半径.

解：$\sin z = z-\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{120}z^5+\cdots$

$\cos z = 1-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{24}z^4+\cdots$

∴ 待定系数法：设 $\tan z = a_1 z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + \cdots$

∴ $\left(1-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{24}z^4+\cdots\right)\left(a_1 z+a_3 z^3+a_5 z^5+\cdots\right)$ $R=\frac{\pi}{2}$

∴ $a_1=1$

$a_3-\frac{1}{2}a_1=-\frac{1}{6}$ $a_3=\frac{1}{3}$

$a_5-\frac{1}{2}a_3+\frac{1}{24}a_1=\frac{1}{120} \Rightarrow a_5=\frac{1}{120}+\frac{1}{6}-\frac{1}{24}=\frac{1+20-5}{120}=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$

∴ $\tan z = z+\frac{1}{3}z^3+\frac{2}{15}z^5+\cdots$

[21-22 三.(1)] $f(z)=z^2e^z$ 在 $z=1$ 处级数，并求 $f^{(4)}(1)$

令 $t=z-1$ $f(t)=(t+1)^2e^{t+1}$

$=\left[t^2e^t+2t\cdot e^t+e^t\right]\cdot e$

而 $e^t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}$ 故 $f(z)=e\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(z-1)^{n+2}}{n!}+\frac{2(z-1)^{n+1}}{n!}+\frac{(z-1)^n}{n!}\right]$

$f^{(4)}(1)$： ∵ $f(z)$ Taylor 展开：$f(z)=f(1)+f'(1)(z-1)+\frac{f''(1)}{2!}(z-1)^2+\cdots+\frac{f^{(4)}(1)}{4!}(z-1)^4+\cdots$

∴ 先求展开式中 $(z-1)^4$ 的系数：$\left(\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{1}{4!}\right)e=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{24}\right)e=\frac{21}{24}e$.

故 $f^{(4)}(1)=24\times\frac{21}{24}e=21e$.

[21-22 三.(2)] $f(z)=\frac{2z}{(1-z^2)^2}$ 在 $0<|z+1|<2$ 上的罗朗级数

解：先求 $F(z)=\frac{1}{1-z^2}=\frac{1}{1+z}\cdot\frac{1}{1-z}$ $=\cancel{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{1+z}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z+1}{2}}=\cancel{\frac{1}{2}}\cdot\cancel{\frac{1}{1+z}}+\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1+z}{2}\right)^{n-1}$.

$\cancel{\therefore f(z)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+z)^2}+}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n(1+z)^{n-1}}{2^{n+2}}$ ∴ $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n-1)(1+z)^{n-2}}{2^{n+1}}=\sum_{n=-2}^{+\infty}\frac{(n+1)(1+z)^n}{2^{n+3}}$

[15-16 三(1)] $f(z)=\frac{1}{z^7(1-z^2)^2}$ 展开，$1<|z|<+\infty$

解：先求 $g(z)=\frac{1}{1-z^2}=\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z^2}}=\frac{1}{z^2}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{z^2}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}z^{-2n-2}$

∴ $f(z)=\frac{1}{2z}g'(z)\cdot\frac{1}{z^7}=\frac{1}{2}\cdot z^{-8}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}(-2n-2)z^{-2n-3}$

$=(n+1)\sum_{n=0}^{+\infty}z^{-2n-11}$

No.
Date

第五章 留数

1 孤立奇点

1 奇点：函数不解析的点

孤立奇点：$f(z)$ 在 z_0 处不解析，但在去心邻域 $0<|z-z_0|<\delta$ 内解析

2 $f(z)$ 展开成罗朗级数：$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1} C_n(z-z_0)^n+\sum_{n=0}^{+\infty} C_n(z-z_0)^n$ $(0<|z-z_0|<\delta)$

此时可分类：

① 若主部为零，即 $C_n=0$ → 0个负幂项 → 可去奇点，如 $f(z)=\frac{\sin z}{z}$ ($m=1$，单极点)

② 若主部为有限项，$f(z)=\frac{C_{-m}}{(z-z_0)^m}+\cdots+\frac{C_{-1}}{(z-z_0)^{-1}}+\sum_{n=0}^{+\infty} C_n(z-z_0)^n$，$C_{-m}\neq 0$，→ 有限个负幂项 → m级极点

③ 若主部为无穷多项，称 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点 → 无限个负幂项

3 孤立奇点的性质

① 可去奇点（等价条件）

· $f(z)$ 在 z_0 点的邻域内有界

· $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 存在（且不为 ∞）→ $f(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=C_0$

· $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=0$

② m级奇点

· $f(z)$ 可表示为 $f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$ → $\varphi(z)$ 在 z_0 解析，$\varphi(z)\neq 0$

· z_0 是 $\frac{1}{f(z)}$ 的m级零点，$f^{(n)}(z)=f^{(n-1)}(z)\cdots=0$ ⇒ $(n+1)$ 级零点

· $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$

③ 本性奇点

· $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 不存在

☆ 极点的判别方法

对于 $f(z)=\frac{h(z)}{g(z)}$，若 $h(z)$，$g(z)$ 均在 z_0 解析，其中 z_0 分别是 $h(z)$，$g(z)$ 的m，n级零点，

则 $\begin{cases} m\geq n \text{ 时，} z_0 \text{ 是可去奇点} \\ m<n \text{ 时，} z_0 \text{ 是 } f(z) \text{ 的 } n-m \text{ 级极点} \end{cases}$

No.

Date

Ex.2.1 求有限奇点，并判断类型.

(1) $f(z)=\frac{1}{\sin z-\sin a}$ (a为常数)　　(2) $f(z)=\frac{(e^z-1)^3(z-3)^4}{(\sin\pi z)^4}$

解：三角函数的奇点：是孤立奇点，先进行表示

(1) $\sin z=\sin a \Rightarrow z=a+2k\pi$ 或 $z=\pi-a+2k\pi \Rightarrow z=k\pi+(-1)^k a$

$\lim\limits_{z\to a} f(z)=+\infty$ ∴判断m级奇点

又∵ $(\sin z-\sin a)'\Big|_{z=k\pi+(-1)^k a}=\cos[k\pi+(-1)^k a]=(-1)^k\cos a$

$(\sin z-\sin a)''\Big|_{z=k\pi+(-1)^k a}=-\sin[k\pi+(-1)^k a]=-\sin a$

∴ ①若 $\cos a\neq 0$，则为 $f(z)$ 的一阶奇点

②若 $\cos a=0$，则必然 $\sin a\neq 0$，为 $f(z)$ 的二阶奇点

(2) 考虑 $\frac{(\sin\pi z)^4}{(e^z-1)^3(z-3)^4}$：当 $z\neq 0$ 且 $z\neq 3$，即仅有分子取0时. $z\in\mathbb{Z}\setminus\{0,3\}$ 均为 $f(z)$ 的四阶奇点

$z=0$ 与 $z=3$ 分开考虑：

$z=0$：∵ $z=0$ 是 e^z-1 的三阶零点　∴ $z=0$ 是 $f(z)$ 的一阶奇点

$z=3$：使用性质判断：$\lim\limits_{z\to 3}(e^z-1)^3\cdot\frac{(z-3)^4}{\sin^4(\pi z)}=(e^3-1)^3\lim\limits_{z\to 3}\frac{(z-3)^4}{\sin^4(\pi z)}$

令 $z-3=t$

$\lim\limits_{t\to 0}\frac{t^4}{\sin^4(\pi t)}=\frac{1}{\pi^4}\cdot\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{\pi t}{\sin\pi t}\right)^4=\frac{1}{\pi^4}$　　∴原极限为 $\frac{(e^3-1)^3}{\pi^4}\neq 0$

∴ $z=3$ 是 $f(z)$ 的可去奇点

Ex.2.2 $z\cos\frac{1}{z}$

解：Attention：复变中三角函数不是有界的！∴不能用有界·无穷小来算

奇点 $z=0$　∵ $z\cos\frac{1}{z}=z\cdot\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{z}\right)^{2n}}{(2n)!}=z-\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z}+\frac{1}{4!}\frac{1}{z^3}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot\frac{1}{z^{2n-1}}+\cdots$　$(0<|z|<+\infty)$

有无穷多负幂项

∴ $z=0$ 是 $z\cos\frac{1}{z}$ 的本性奇点

No.

Date

2 留数定理

1 定义:

设 z_0 是 $f(z)$ 的孤立奇点，$f(z)$ 在 z_0 的去心邻域内 $C_\rho: |z-z_0|=\rho$ 上解析，则 $f(z)$ 在 z_0 处的留数

$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho} f(z)dz = \text{Res}[f(z);z_0]$，或 $\text{Res} f(z_0)$.　[罗朗级数中的 C_{-1}]

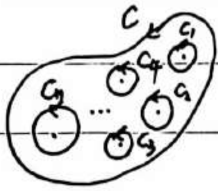
2. 留数定理:

z_k 在区域内部!

设 D 是边界 C 由有限条曲线围成的区域 $z_1, z_2 \cdots z_n \in D$，$f(z)$ 在 $\bar{D}\setminus\{z_1 \cdots z_n\}$ 上解析，

则 $\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}[f(z);z_k]$

求积分 → 求留数



3. 留数计算:

① 可去奇点：留数为零

② 本性奇点：罗朗展开，取 C_{-1}

③ m级极点：　若 z_0 是 $f(z)$ 的二级极点，则 $\text{Res}[f(z);z_0] = \frac{d}{dz}[(z-z_0)^2 f(z)]$

推论：$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$，$\varphi(z)$ 在 z_0 点解析，$\varphi(z_0)\neq 0$.

$\text{Res}[\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m};z_0] = \frac{1}{(m-1)!}\varphi^{(m-1)}(z_0)$

<1> 若 z_0 是 $f(z)$ 的单极点，则 $\text{Res}[f(z);z_0] = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$

<2> 若 z_0 是 $f(z)$ 的 m 级极点，$\text{Res}[f(z);z_0] = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-z_0)^m f(z)$

<3> 设 $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$，$P(z)$ 和 $Q(z)$ 在 z_0 处均解析. 若 z_0 不是 $P(z)$ 的零点，z_0 是 $Q(z)$ 的一级零点，则 z_0 是 $f(z)$ 的单极点，$\text{Res}[f(z);z_0] = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$

<4> z_0 是 $g(z)$ 的 k 级零点，是 $h(z)$ 的 k+1 级零点，则 z_0 是 $f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$ 的单极点，且 $\text{Res}[f(z);z_0] = (k+1)\frac{g^{(k)}(z_0)}{h^{(k+1)}(z_0)}$

<5> z_0 是 $g(z)$ 的非零点，是 $h(z)$ 的二级零点，则 z_0 是 $f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$ 的二级极点，且 $\text{Res}[f(z);z_0]$ $= 2\cdot\frac{g'(z_0)}{h''(z_0)} - \frac{2}{3}\cdot\frac{g(z_0)h'''(z_0)}{[h''(z_0)]^2}$

$h(z_0)=h'(z_0)=0$

Ex.1 求 $f(z)=e^{z+\frac{1}{z}}$ 奇点处留数

解：本性奇点，罗朗展开

$f(z)=e^z\cdot e^{\frac{1}{z}} = (1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots)\cdot(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots+\frac{1}{n!z^n}+\cdots)$　$(0<|z|<+\infty)$

所求留数 $\text{Res}[e^{z+\frac{1}{z}};0]=C_{-1}$，即 $z^{-1}=\frac{1}{z}$ 项系数. 即 $1\cdot 1+1\cdot\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!n!}+\cdots$

$=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k-1)!k!}$

No.
Date

Ex.2. 若 $z=0$ 是偶函数 $f(z)$ 的孤立奇点，证明：$Res[f(z);0]=0$

证：$f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} C_n z^n = f(-z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} C_n\cdot(-z)^n$

故 $f(z)=\frac{1}{2}\cdot[f(z)+f(-z)]\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}[z^n+(-z)^n]\cdot C_n=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}\cdot[(-1)^n+1]\cdot C_n z^n$.

$\therefore$ 取 $n=-1$ $[(-1)^{-1}+1]C_{-1}=0$.

$\therefore Res[f(z);0]=C_{-1}=0$

key：利用定义！

Ex.3. $\sin\frac{z}{z+1}$

解：$z=-1$ 为本性奇点

对 $\sin(\frac{z}{z+1})$ 作罗朗展开，$0<|z+1|<+\infty$

$\therefore \sin(\frac{z}{z+1})=\sin(1-\frac{1}{z+1})=\sin1\cos\frac{1}{z+1}-\cos1\sin\frac{1}{z+1}$ key：仅留下"$z+1$"一项.

而 $\sin\frac{1}{z+1}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k(\frac{1}{z+1})^{2k+1}}{(2k+1)!}$ $\cos\frac{1}{z+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(\frac{1}{n+1})^{2n}}{(2n)!}$

取 $k=0$ $\therefore C_{-1}=-\cos1$ 即 $Res[\sin\frac{z}{z+1};-1]=-\cos1$

3 留数定理在定积分上的应用

1. $\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$ 型积分.

$\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta=\oint_{|z|=1}f(z)dz=2\pi i\sum\{f(z)$ 在 $|z|<1$ 内极点的留数$\}$

其中 $f(z)=\frac{1}{iz}R(\frac{z^2+1}{2z},\frac{z^2-1}{2zi})$

（证明：令 $z=e^{i\theta}$ $\therefore \cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ $\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

$\oint_{|z|=1}f(z)dz=\int_0^{2\pi}\cdot\frac{1}{\cancel{i e^{i\theta}}}\cdot R\cdot(\cos\theta,\sin\theta)\,\cancel{i\cdot e^{i\theta}}\,d\theta=\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$.）

Ex.1. 计算 $I=\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta}$

解：先观察积分形式

$I=\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta}$. 中 $f(\theta)=\frac{1}{2+\cos\theta}$ $\therefore$ 是轴对称 (关于y轴)

$\therefore I=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta}=\oint_{|z|=1}f(z)dz$

将 $\cos z=\frac{z^2+1}{2z}$ 代入 $I=\frac{1}{2}\oint_{|z|=1}\frac{1}{2+\frac{z^2+1}{2z}}\cdot\frac{1}{iz}dz=\frac{1}{2i}\oint_{|z|=1}\frac{1}{2z+\frac{1}{2}\cdot(z^2+1)}dz=\frac{1}{i}\oint_{|z|=1}\frac{1}{z^2+4z+1}dz$

留数：奇点：$z^2+4z+1=0$ $z=\pm\sqrt{3}-2$ 奇点：$\sqrt{3}-2$ 为单极点 $\therefore Res[f(z):z_0]=\lim_{z\to z_0}f(z)$

$\therefore \oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2+4z+1} dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{z_0+\sqrt{3}+2}\Big|_{z_0=\sqrt{3}-2}$

原式 $= \frac{1}{i} \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi$.

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} R(z)dz$ 型积分

$R(z)$ 是 z 的有理函数，当分母次数至少比分子高2次时（$|z| \geq R$，$|R(z)| \leq \frac{M}{|z|^2}$）

则 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(z)dz = 2\pi i \sum \text{Res}[R(z); z_k]$　z_k 为 $R(z)$ 在上半平面内的极点

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{iax} dx$，$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos ax\, dx$，$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin ax\, dx$

$R(x)$ 是 x 的有理函数，当分母次数至少比分子高1次时，积分存在 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos ax\, dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin ax\, dx$

$= 2\pi i \sum \text{Res}[R(z)e^{iaz}; z_k]$

历年卷习题

17-18：$f(z) = \frac{1}{1-z}\sin\frac{1}{z}$ 的孤立奇点，并求孤立奇点处留数

解：$z_1 = 1$　为单极点

$\text{Res}[f(z); z_1=1] = -\sin 1$.

$z=0$ 为本性奇点　$\text{Res}[f(z); 0] = C_{-1}$

$\because$ 这里只求 C_{-1}

$\therefore \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$　$\sin\frac{1}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot (z^{-1})^{2k+1}}{(2k+1)!}$

$\therefore f(z) = \frac{1}{1-z}\sin\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot z^{-2k-1}}{(2k+1)!}$

取 $n=0$. $k=0$，$n=2$，$k=1$. ⋯

$\therefore C_{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} = \sin 1$.

15-16：$f(z) = \frac{z}{z+2} e^{\frac{1}{z+1}}$　$\text{Res}[f(z); -1]$

解：$\left[1 - 2\cdot\frac{1}{1+(z+1)}\right] e^{\frac{1}{z+1}}$

$\left\{1 - 2\sum_{k=0}^{+\infty}[-(z+1)]^k\right\} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+1)^{-n}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+1)^{-n}}{n!} - 2\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}[-(z+1)]^k \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+1)^{-n}}{n!}$

n 取 $k+1$. 即 $n=1 \to +\infty$，$k: 0 \to +\infty$

原式 $= 1 - 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 + 2\left(\frac{1}{e} - 1\right) = \frac{2}{e} - 2$

No.

Date

13-14.

一. (3) $f(x)=\frac{1}{z(z-2)}\sin\frac{1}{z-1}$ 奇点及对应留数

$z_1=0$ $z_2=2$, $z_3=1$

$z_1=0$ $-\frac{1}{2}\sin(-1)=\frac{1}{2}\sin 1$

$z_2=2$. $\frac{1}{2}\sin 1$

$z_3=1$, 展开: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z}\right)\sin\frac{1}{z-1}$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{-1}{1-(z-1)}-\frac{1}{1+(z-1)}\right]\cdot\sin\frac{1}{z-1}$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\cdot\left[(z-1)^k+(-1)^k\cdot(z-1)^k\right]\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^{-2n-1}}{(2n+1)!}$$

$k-2n-1=-1$. k为奇数, 系数为0,

k为偶数. $k=0,2,4\cdots$ $n=$ ~~1,2,3~~ $0,1,2$.

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\cancel{\Sigma}\,2\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}=-\sin 1.$$

物几

No.
Date

第六章 保角映射

△ 导数的几何意义

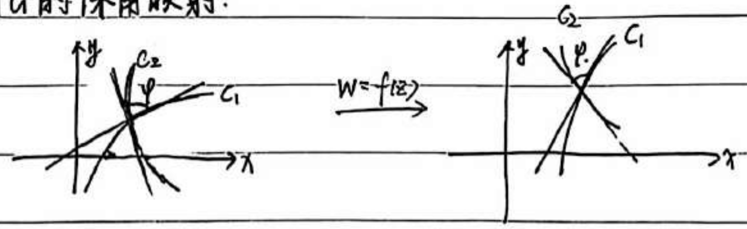
映射 $w=f(z)$: $z\to z_0$, $z_0+\Delta z\to w_0+\Delta w$

$\therefore |f'(z_0)| = \lim\limits_{\Delta z\to 0}\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right| \approx \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$，即 $|\Delta w| = |f'(z_0)|\cdot|\Delta z|$（当 $|\Delta z|$ 很小时）

※∴映射 $w=f(z)$ 将 z_0 处很小的线段伸缩了 $|f'(z_0)|$ 倍，称 $|f'(z_0)|$ 为 $w=f(z)$ 在 z_0 处的伸缩率

△ 经过映射后，曲线间夹角的大小方向保持不变（保角性）

1 保角映射的定义：设 $f(z)$ 是区域 D 到区域 G 的双射，且在 D 的每一点都具有保角性质，则称 $f(z)$ 是 D 到 G 的保角映射.



φ不变→保角

·保角映射的逆映射及复合映射仍是保角映射

黎曼映射定理 & 边界对应原理（字面意思：将区域的边界进行映射）

例1: 区域 $A=\{z: \mathrm{Re}(z)\cdot \mathrm{Im}z>1, \mathrm{Re}(z)>0, \mathrm{Im}z>0\}$ 在 $w=z^2$ 映射下的象区域是什么?

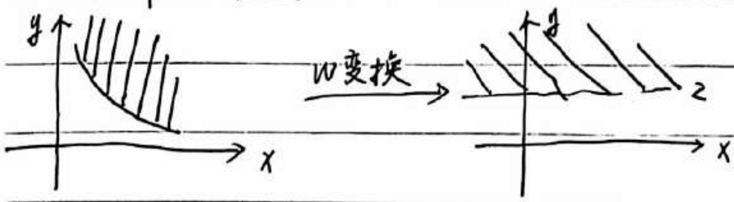
△ 解一: 记 $z=x+iy$, $w=u+iv$

由 $w=z^2$ 代入 $u+iv=(x+iy)^2 = x^2-y^2+2xy\cdot i$ $\therefore u=x^2-y^2$, $v=2xy$

A的边界 $xy=1\ (x>0, y>0) \xrightarrow{w} v=2$

取 z 中特殊点 $z=2+2i$ $w=z^2=4-4+8i=8i>0$ 取上半部分

故由$\boxed{\text{边界对应原理}}$，A的象区域是 $B=\{w: \mathrm{Im}w>2\}$



△解二: 记 $z=x+iy$, $w=u+iv$，将所给的A表达式进行转换: $A=\{x+iy: xy>1, x>0, y>0\}$

$\therefore u+iv=(x+iy)^2=x^2-y^2+2xyi$ $u=x^2-y^2$, $v=2xy>2$

$\therefore A\xrightarrow{w} B=\{u+iv: v>2\}$ 【坐标变换法】

6.2 初等函数确定的映射

① 整线性映射 $w=az+b$ $w'=a$. w为保角映射.

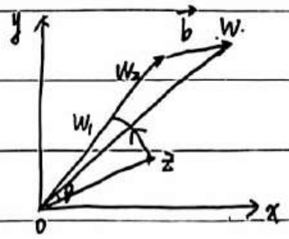
记 $a=re^{i\theta}$, 则 $w=re^{i\theta}\cdot z+b$

可分解为如下三映射的复合:

(1) $w_1=e^{i\theta}\cdot z$ (旋转映射)

(2) $w_2=r\cdot w_1$ (相似映射)

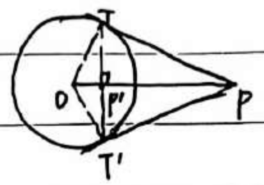
(3) $w=w_2+b$ (平移映射)



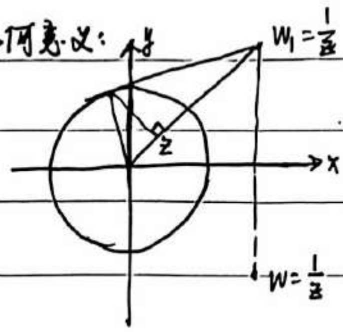
② 倒数映射 $w=\frac{1}{z}$

$w'=-\frac{1}{z^2}\neq 0$ ($z\neq 0$) 映射除原点外处处保角.

对称: 如图 P 与 P':



几何意义:



① 对称

② 共轭.

规定: $0 \xrightarrow{w_1=\frac{1}{z}} \infty$

保圆性(暂略)

③ 幂函数映射 常用: w^2. 象限域 → 半平面域

$w=z^n$ $w'=nz^{n-1}\neq 0$, $z\neq 0$. 局部保角性.

·逆映射: 根式函数. $w=\sqrt[n]{z}=r^{\frac{1}{n}}e^{\frac{\theta+2k\pi}{n}\cdot i}$ ($k=1,2\cdots n-1$)

若k固定, 则一对一映射

k=0 为单值分支 称主支

性质: 圆 $|z|=r_0 \xrightarrow{w}$ 圆 $w=r_0^n$ 角域 $D=\{(r,\theta):0<r<+\infty,\ 0<\theta<\theta_0<\frac{2\pi}{n}\}$

射线 $\theta=\theta_0 \xrightarrow{w}$ 射线 $\varphi=n\theta_0$ $\xrightarrow{w}$ 角域 $D'=\{(\rho,\varphi):0<\rho<+\infty,\ 0<\varphi<n\theta_0<2\pi\}$.

④指数和对数函数映射

△ 指数函数 $w=e^z$ ~~$w'=e^z\neq 0$. 全平面保角~~ 局部保角性，非双射！

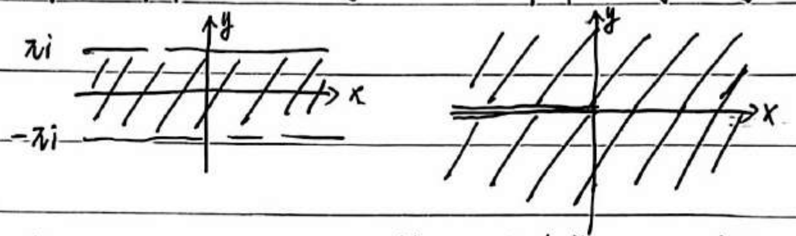
设 $z=x+iy$, $w=\rho e^{i\varphi}$ ∴ $\rho e^{i\varphi}=e^{x+iy}$ $\rho=e^x, \varphi=y$

直线 $x=x_0 \xrightarrow{w}$ 圆周 $|w|=e^{x}$

$y=y_0 \xrightarrow{w}$ 射线 $\varphi=y_0$

水平带域 $D=\{z| 0<\text{Im}z<\alpha<2\pi\} \xrightarrow{w} D=\{w|0<\arg w<\alpha<2\pi\}$ 角域

特别地，$\{z|-\pi<\text{Im}z<\pi\}\xrightarrow{w} D=\{w|-\pi<\arg w<\pi\}$



垂直带域 $D=\{z|x_1<\text{Re}z<x_2\}\xrightarrow{w} D'=\{w|e^{x_1}<|w|<e^{x_2}\}$ 圆环

△对数函数：指数的反函数

$w=\text{Ln}z=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)$ $(k=0,\pm1,\pm2)$

$k=0$ 为主支，此时 $w=\ln|z|+i\arg z$

例2: $w=e^{\frac{\pi i}{b-a}(z-a)}$ 带域 $D=\{z: a<\text{Re}z<b\}$ 映射为？

解：设 $z=x+iy$ 带域 $D:\{x+iy: a<x<b\}$

$z-a$: $0<x<b-a$,

$\frac{z-a}{b-a}$: $0<x<1$

$\pi\frac{z-a}{b-a}$: $0<x<\pi$

$\pi i\frac{z-a}{b-a}$: $0<y<\pi$.

$e^{\frac{\pi i}{b-a}(z-a)}$: $D:\{w|0<\arg w<\pi\}$ 即上半平面.

No.

Date

6.3 分式线性映射

$w=\frac{az+b}{cz+d}$　　逆映射 $z=\frac{-dw+b}{cw-a}$

几何性质：① 保角性

② 保圆性

③ 保对称点性

※ 三对点的对应唯一确定一个分式线性映射

$w=\frac{az+b}{cz+d}$ $(ad-bc\neq 0)$ 仅有三个独立常数：

不妨设 $a\neq 0, c\neq 0$，则 $w=\frac{a}{c}\cdot\frac{z+\frac{b}{a}}{z+\frac{d}{c}} \overset{记}{=} k\cdot\frac{z-\alpha}{z-\beta}$.

定理 三个相异的点 $z_1, z_2, z_3 \to w_1, w_2, w_3$ 存在唯一的分式线性映射

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$$

· 注：若有 ∞ 点，去掉含有该点的两项（视该两项的商在无穷远处极限为1）

若只有 $z_1\to w_1$，$z_2\to w_2$，则 $\frac{w-w_1}{w-w_2}=k\cdot\frac{z-z_1}{z-z_2}$

例如：若 $z_2=\infty$：$\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z_3-z_1}$

△ 若 $w_2=\infty$：$\frac{w-w_1}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$

△ 求线性分式映射　保圆性，保对称性！

试求 $1, -i, i$ 映为 w 平面上 $1, -1, 0$ 的分式线性映射.

法一：$w_1=1$. $w_2=-1$. $w_3=0$.

$z_1=1$. 和 $z_2=-i$, $z_3=i$

$$\therefore \frac{w-1}{w+1}\cdot\frac{-1}{1}=\frac{z-1}{z+i}\cdot\frac{i-1}{2i}=\frac{z-1}{z+i}\cdot\frac{1+i}{2}$$

$$w=\frac{-1+\frac{z-1}{z+i}\cdot\frac{1+i}{2}}{-\frac{z-1}{z+i}\cdot\frac{1+i}{2}-1}=\frac{-2(z+i)+(z-1)(1+i)}{-(z-1)(1+i)-2(z+i)}=\frac{(1-i)z+3i+1}{(i+3)z+i-1}$$

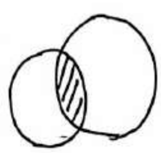
法二：设 $w=k\frac{z-\alpha}{z-\beta}$. 由已知 $i\xrightarrow{w}0$ · $\alpha=i$.

下面两个点待定系数求 k 和 β.

No.
Date

例4：中心分别在 $z=1,-1$. $r=\sqrt{2}$ 的两圆弧围成 D. 求 $w=\frac{z-1}{z+i}$ 下 D'

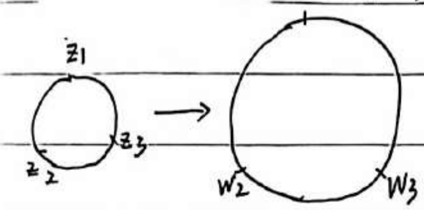
△ important "利用线性分式映射的几何性质！"



若没有点映射为无穷远点 →

若有一个点是无穷远：→

若一个交点无穷远 →



此题中：$w_1=0 \to z_1=i$，交点 i 无穷远 ∴ 射线

∴ 取 c_1 一点 $\sqrt{2}-1$，$w=\frac{\sqrt{2}-1-i}{\sqrt{2}-1+i}=\frac{(\sqrt{2}-1)^2-2i(\sqrt{2}-1)-1}{(\sqrt{2}-1)^2+1}=\frac{2-2\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}-2i\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{4-2\sqrt{2}}$

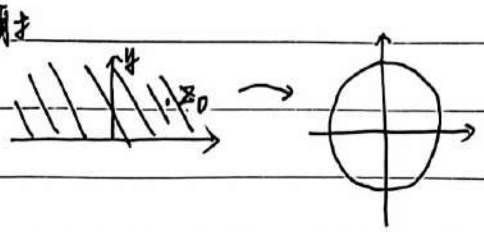
$=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}}=w=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$ 在 $y=-x$ 上.

c_2 一点 $z=1-\sqrt{2}$，$w=\frac{1-\sqrt{2}-i}{1-\sqrt{2}+i}$

$=\frac{(1-\sqrt{2}-i)^2}{(1-\sqrt{2})^2+1}=\frac{3+2\sqrt{2}+2(\sqrt{2}+1)i-1}{4-2\sqrt{2}}=\frac{2+2\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}+1}{2-\sqrt{2}}\cdot i$，在 $y=x$ 上.

※两个重要线性分式映射

① $w=e^{i\theta}\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$



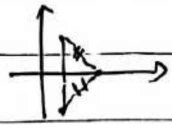
带→圆

证：$w=k\cdot\frac{z-\alpha}{z-\beta}$. $z_0 \to w=0$ 则 $\alpha=z_0$

保对称 $\bar{z}_0 \to w\to\infty$ ∴ $\beta=\bar{z}_0$

边界对应原理，$z=x$ 时，象为 $|w|=1$. ∴ $|k|\cdot\frac{|x-z_0|}{|x-\bar{z}_0|}=1 \Rightarrow |k|=1 \Rightarrow e^{i\theta}$

实轴 $\left|\frac{x-z_0}{x-\bar{z}_0}\right|=\frac{|x-z_0|}{|x-\bar{z}_0|}=\frac{|x-a-bi|}{|x-a+bi|}=\frac{\sqrt{(x-a)^2+b^2}}{\sqrt{(x-a)^2+b^2}}=1$



No.

Date

⑤ $w=e^{i\theta}\cdot\frac{z-z_0}{1-\bar{z_0}z}$ ($|z_0|<1$, θ为实数)

[将单位圆内部映射为单位圆内部]

[例9] 求将上半平面映射为圆域 $|w-w_0|<R$ 的分式线性映射 $w=f(z)$，且满足 $f(i)=w_0$, $f'(i)>0$.

解: ∵ $w=e^{i\theta}\cdot\frac{z-z_0}{1-\bar{z_0}z}$, $w=e^{i\theta}\cdot\frac{z-z_0}{z-\bar{z_0}}$.

第一步 ∵ 上半平面 → 圆. 即 $w_1=e^{i\theta}\cdot\frac{z-r}{z-\bar{r}}$

第二步: 从 $|w|<1$ 映射到 $|w-w_0|<R$ $w=Rw_1+w_0$

∴ $w=w_0+Re^{i\theta}\frac{z-r}{z-\bar{r}}$, $f(i)=w_0 \Rightarrow w=w_0+Re^{i\theta}\cdot\frac{z-i}{z+i}$

$f'(i)>0$ ∴ $e^{i\theta}\cdot\left(1-\frac{2i}{z+i}\right)'\Big|_{z=i}>0$ $e^{i\theta}\cdot(-\frac{1}{2})i>0$, 即 $e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}>0$ ∴ $e^{i(\theta-\frac{\pi}{2})}=1$ (实数) $\theta=\frac{\pi}{2}$

∴ $w=w_0+Re^{i\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{z-i}{z+i}$

[例7] $D=\{z:|z|<1, \mathrm{Im}z>0\}$ 映射为 $\{w:\mathrm{Im}w>0\}$

解: $|z|<1$ $\mathrm{Im}z>0$ $w_1=z^2$ ⇒ $|z|<1$ 的单位圆.

$w_1=\frac{w-i}{w+i}$ ∴ $w_1\cdot w+w_1 i=w-i$ ∴ $(1-w_1)\cdot w=(w_1+1)i$ $w=\frac{w_1+1}{1-w_1}\cdot i$

∴ $w=\frac{z^2+1}{1-z^2}i$

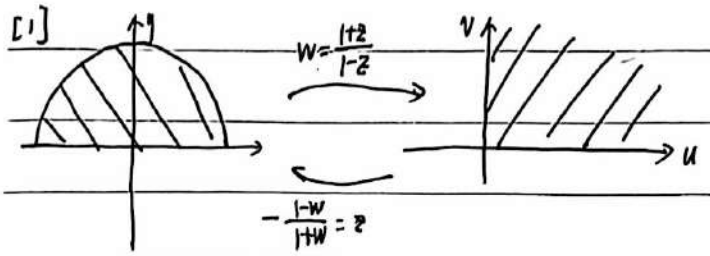
法二: 取 $w_1=\frac{z+1}{z-1}$ $-1\xrightarrow{w_1}0$ $1\xrightarrow{w_1}\infty$ 拉直边界 $0\to -1$. 为负实轴

i. $\frac{1+i}{i-1}=-i$ 下半虚轴.

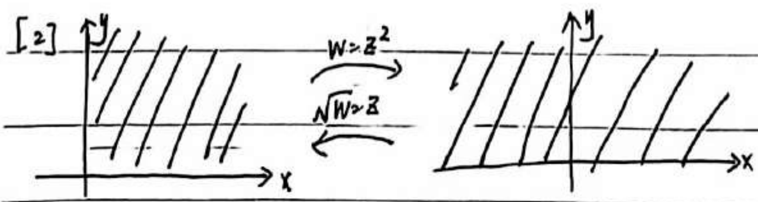
∴ $w=(-w_1)^2=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$

典型映射补充

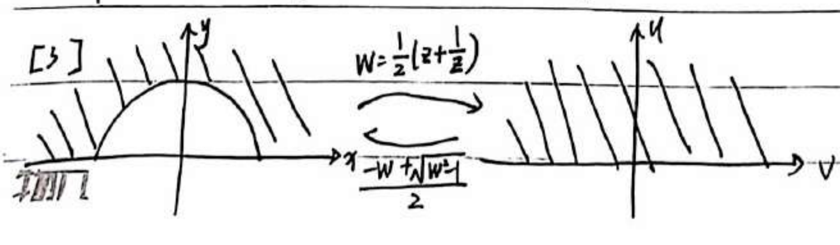
[1]



[2]



[3]



第六章 保角映射 习题

Ex.1. 习题六 1. 导数的几何意义：$\varphi_0=\theta_0+f'(z_0)$

Ex.2. 习题六 4.(5) $x^2+y^2+2x+2y+1=0$ 与 $w=\frac{1}{z}$.

解：法一：直接代

设 $z=x+iy$，$w=u+iv$

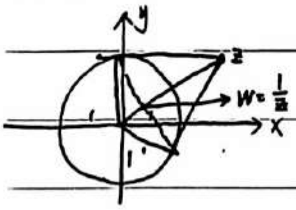
$\therefore \frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}$ $\therefore u=\frac{x}{x^2+y^2}$，$v=-\frac{y}{x^2+y^2}$

故 $u^2+v^2=\frac{1}{x^2+y^2}$ $\quad x=\frac{u}{u^2+v^2}$，$y=-\frac{v}{u^2+v^2}$

∴ 原曲线代入，有 $\frac{1}{u^2+v^2}+2\cdot\frac{u}{u^2+v^2}-\frac{2v}{u^2+v^2}+1=0$

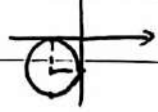
$(u^2+v^2)+2u-2v+1=0 \quad (u+1)^2+(v-1)^2=1 \Rightarrow |w-(-1+i)|=1$

法二：利用几何意义：$w=\frac{1}{z}$ 倒数映射，具有保圆性



$\therefore r=\frac{1}{r}=1$ → r已知，取2个点就可知O·第三个点用来判断方向

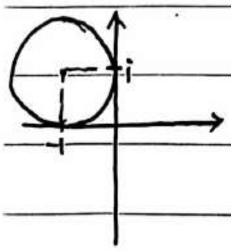
~~取三个点~~：原曲线：$(x+1)^2+(y+1)^2=1$



$z_1=-1$，$z_2=-i$，$z_3=-1-2i$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$w_1=-1$ $\quad w_2=i$，$w_3=\frac{2i-1}{5}$ 在 $y=x+1$ 下方



$\therefore |w-(-1+i)|=1$

Ex.3. 习题六 7(1)

*定理：存在唯一线性分式映射

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$$

法一：直接代：

$$\frac{w-1}{w-i}\cdot\frac{-1-i}{\cancel{2}}=\frac{z-2}{z-i}\cdot\frac{-2-i}{\cancel{4}2} \Rightarrow \frac{w-1}{w-i}=\frac{z-2}{z-i}\cdot\frac{i+2}{2(i+1)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{z-2}{z-i}\cdot(3-i)$$

$$w=\frac{1-i\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{z-2}{z-i}(3-i)}{1-\frac{1}{4}\cdot\frac{z-2}{z-i}(3-i)}=\frac{4(z-i)-i(3-i)(z-2)}{4(z-i)-(z-2)(3-i)}=\frac{(3-3i)z+2i+2}{(1+i)z+6-6i}=\frac{2-3iz}{z-6i}$$

No.
Date

法二：代一般表达式 $w=k\cdot\frac{z-\alpha}{z-\beta}$，这种在有一项 $w=0$ 时可以直接确定 α，这里略。

Ex.4 习题六 13.

解：映射到新的区域，反表示是最快的：

① 设 $z=x+iy$，$w=u+iv$

② 将 $w=\cdots z$ 表示为 $z=\cdots w$：

$w=\frac{1}{z+i}$　$\therefore z+i=\frac{1}{w}$　$z=\frac{1}{w}-i=\frac{1-iw}{w}$

③ 代入，写出 $x=\cdots$　$y=\cdots$

$\therefore z=\frac{1-i(u+iv)}{u+iv}=\frac{(v+1)-iu}{u+iv}=\frac{u(v+1)-iv(v+1)-iu^2-uv}{u^2+v^2}$

$\therefore x=\frac{u}{u^2+v^2}$，$y=-\frac{u^2+v^2+v}{u^2+v^2}$

④ 边界对应原理 or 写不等式

$\mathrm{Im}\,z>0$　$\therefore y>0$　$\therefore u^2+v^2+v<0$

$\Rightarrow u^2+(v+\frac{1}{2})^2<(\frac{1}{2})^2$

$\Rightarrow B=\{w;\ |w-\frac{1}{2}i|<\frac{1}{2}\}$

Ex.5 习题六 16.(1)(3)

※如果要求保角且单值，则只能用线性分式这种一一对应的。

指数 $e^{a+i\cdot 2k\pi}=e^{a}$ 不是单值，这里不能用；幂函数 z^2（偶数次）也不是单值！

解：(1) $\{z;\ 0<\mathrm{Re}\,z<a\}$：

先转换成水平：　$w_1=iz$　$\{w_1;\ 0<\mathrm{Im}\,w_1<ai\}$

$w_2=\frac{\pi}{a}w_1$　$\{w_2;\ 0<\mathrm{Im}\,w_2<\pi i\}$

$w_3=e^{w_2}$　[虚部 $(0,2\pi)$，可以一一对应]　$\{w_3;\ \mathrm{Im}\,w_3>0\}$

$w_4=\frac{w_3-i}{w_3+i}$　$\{w_4;\ 0<|w_4|<1\}$

$\therefore\ w=\frac{e^{\frac{\pi}{a}iz}-i}{e^{\frac{\pi}{a}iz}+i}$

(3) 不能直接 8 次！这样 $z=2e^{\frac{\pi}{4}i}$ 和 $z=2$ 都将映射到同一点 $w=2$

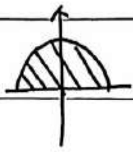
判准：$w=z^4$ 和 $w=z^8$ 都是周期函数：$T_1=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$　$T_2=\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$　图中 $\theta=\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$　$\therefore$ 选 $\frac{\pi}{2}$ ✓

物门

No.

Date

因此：$w_1=\left(\frac{z}{2}\right)^4$，$\{0<\arg z<\pi,\ |z|<1\}$



第二步：作 $w_2=\frac{1+w_1}{1-w_1}$ [其他重要映射]

第三步：作 $w_3=w_2^2$ [同上]　　$\operatorname{Im} w_3>0$

第四步：$w=\frac{w_3-i}{w_3+i}$

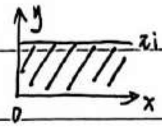
$$=\frac{\left(\frac{1+w_1}{1-w_1}\right)^2-i}{\left(\frac{1+w_1}{1-w_1}\right)^2+i}=\frac{(2^4+z^4)^2-i(z^4-2^4)^2}{(2^4+z^4)^2+i(z^4-2^4)^2}$$

Ex.6. 习题六 19.(2)

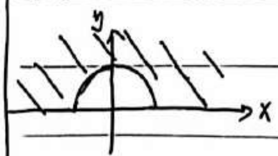
$\{z;\operatorname{Re}z>0,\ 0<\operatorname{Im}z<a\}\to\{w;\operatorname{Im}w>0\}$

解：注意：每一步都应是等价转换！

$w_1=\frac{\pi}{a}z$　$\{w_1;\operatorname{Re}w_1>0,\ 0<\operatorname{Im}w_1<\pi\}$



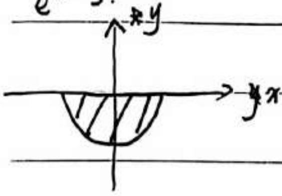
$w_2=e^{w_1}$　设 $w_1=x+iy$，$x>0,\ 0<y<\pi$　$|e^{w_1}|=|e^x|>1$.



$w_3=\frac{1}{w_2}=e^{-w_1}$

(其实这里意识到 e^w 不是一个好的映射(缺一块)，就应考虑 e^{-w}. 当然倒数映射是一种比较好的思想？)

e^{-x-iy}.



为什么不 $-w_3$：

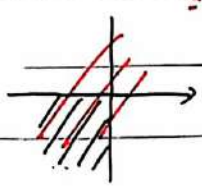
$w_4=\frac{1-w_3}{1+w_3}$..

$w_5=w_4^2=\left(\frac{1-e^{-w_1}}{1+e^{-w_1}}\right)^2=\left(\frac{1-e^{-\frac{\pi}{a}z}}{1+e^{-\frac{\pi}{a}z}}\right)^2$

$w_4=\frac{1+w_3}{1-w_3}$　把 $(0,-i)$ 代入一下，$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{2}=\frac{-2i}{2}=-i$

$$\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}=-1+\frac{2}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}=\cancel{-1+\frac{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}i-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\frac{1}{2}+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}}$$

$\cancel{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)<0}$　$\Rightarrow -(1+\sqrt{2})i$



∴ 是Ⅲ象限：

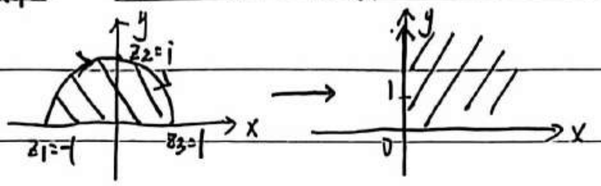
$w_5=i\,w_4$　　$w_6=w_5^2=-w_4^2=-\left(\frac{1+w_3}{1-w_3}\right)^2=-\left(\frac{1+e^{-w_1}}{1-e^{-w_1}}\right)^2=-\left(\frac{e^{\frac{\pi}{a}z}+1}{e^{\frac{\pi}{a}z}-1}\right)^2$

物力

No.
Date

保角映射难点：

· 将 $\{z;\ \mathrm{Im}z>0,\ |z|<1\}$ 映射到 $\{z;\ \mathrm{Re}z>0,\ \mathrm{Im}z>0\}$



解：可以直接记公式 $w=\frac{1+z}{1-z}$

原理上：$z_3=1\to$ 无穷远.

$z_1=-1\to$ 原点

$\therefore\ w=k\cdot\frac{z+1}{1-z}$　$z_2=i$，$w_2=k\cdot\frac{1+i}{1-i}=ik>0$. 取 $k>0$ 即可 $k=1$

$w=\frac{1+z}{1-z}$

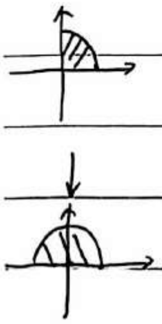
· 将：$\{z;\ \mathrm{Im}z<0,\ |z|<1\}$ 映射到 $\{z;\ \mathrm{Re}z>0, \mathrm{Im}z>0\}$

解：$k\cdot\frac{1-i}{1+i}>0$　$\therefore\ -ik>0$　$k<0$.

$\therefore\ w=\frac{z+1}{z-1}=-\frac{1+z}{1-z}$.

历年题中保角映射：

15-16 四.(1) $\{z;\ |z|<1,\ 0<\arg z<\frac{\pi}{2}\}\to\{w;\ |w|<1\}$



$w_1=z^2$　　$w=w_4=\frac{w_3-i}{w_3+i}$

$w_2=\frac{w_1+1}{w_1-1}$

$w_3=w_2^2$　　$\therefore\ w=\frac{w_2^2-i}{w_2^2+i}=\frac{(w_1+1)^2-i(w_1-1)^2}{(w_1+1)^2+i(w_1-1)^2}=\frac{(z^2+1)^2-i(z^2-1)^2}{(z^2+1)^2+i(z^2-1)^2}$

(2) $w=e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{z-\bar\alpha}$ ✗ → 这是上半平面→圆 不是圆→上半平面.　订正见 17-18后.

$\because\ w(i)=\frac{1}{2}$　$w(0)=1$

$\therefore\ e^{i\theta}(i-\alpha)=\frac{1}{2}(i-\bar\alpha)$

$e^{i\theta}\alpha=\bar\alpha$

$\therefore\ \bar\alpha(i-\alpha)=\alpha\cdot\frac{1}{2}(i-\bar\alpha)$

$ix+y-x^2-y^2=\frac{1}{2}ix-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2$,

$\begin{cases}x=0\\y=3\end{cases}$

$w=-\frac{z-3i}{z\pm 3i}$

$\therefore\ w=e^{i\theta}\cdot\frac{z-3i}{z+3i}$

$w(0)=1$

$\therefore\ e^{i(\theta-\pi)}=1$　$\theta=\pi$.

No.

Date

17-18 四.(1) $\{z; |z|<1, -\frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{\pi}{4}\}$ → 上半平面

$w_1 = z^2$ $\quad w_2 = iw_1$ $\quad w_3 = \frac{w_2+1}{w_2-1}$ $\quad w_4 = w_3^2$

$$w = \left(\frac{w_2+1}{w_2-1}\right)^2 = \left(\frac{iw_1+1}{iw_1-1}\right)^2 = \left(\frac{iz^2+1}{iz^2-1}\right)^2 = \left(\frac{z^2-i}{z^2+i}\right)^2$$

(2) 上半平面 → 单位圆 $w(1)=1$, $w(i)=\frac{1}{2}$

$w = e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}$, 代入,

$e^{i\theta}(1-\alpha) = 1-\bar{\alpha}$

$e^{i\theta}(i-\alpha) = \frac{1}{2}(i-\bar{\alpha})$

$\therefore \frac{1-\alpha}{i-\alpha} = \frac{2(1-\bar{\alpha})}{i-\bar{\alpha}}$ $\quad (1-\alpha)(i-\bar{\alpha}) = 2(i-\alpha)(1-\bar{\alpha})$

设 $\alpha = x+iy$

$i-\bar{\alpha}-i\alpha+x^2+y^2 = 2i-2i\bar{\alpha}-2\alpha+2x^2+2y^2$

左 $= i-(x-iy)-i(x+iy)+x^2+y^2 = i-x+iy-ix+y+x^2+y^2 = -x+x^2+y^2+(1-x)i$

右 $= 2i-2i(x-iy)-2(x+iy)+2x^2+2y^2 = 2i-2ix-2y-2x-2iy+2x^2+2y^2$

$\therefore \begin{cases} \cancel{-x}+\cancel{x^2}+\cancel{y^2} = -2y-\cancel{2x}^{-x}+\cancel{2x^2}^{x^2}+\cancel{2y^2}\,y^2 \Rightarrow x^2-x+y^2-2y=0 \\ 1-x = 2-2x-2y \Rightarrow 2y = 1-x \end{cases}$ $\quad x=1-2y$ $\quad (1-2y)^2-(1-2y)+y^2-2y$

$= 4y^2-4y+1-1+\cancel{2y}+y^2-\cancel{2y} = 5y^2+4y = 0$

$y = -\frac{4}{5}$ $\quad x = \frac{13}{5}$

用对称点三点映射!

$z_1 = 1$, $w_1 = 1$

$z_2 = i$, $w_2 = \frac{1}{2}$

$z_3 = -1$, $w_3 = -1$

$\therefore \frac{z-1}{z-i}\cdot\frac{-1-i}{-1-1} = \frac{w-1}{w-\frac{1}{2}}\cdot\frac{-\frac{3}{2}}{-2}$ $\quad (z-1)\cdot(i+1)(2w-1) = 3(w-1)(z-i)$

$\frac{z-1}{z-i}\cdot(i+1) = \frac{w-1}{w-\frac{1}{2}}\cdot\frac{3}{2}$ $\quad (2wz-z-2w+1)(i+1) = 3wz-3iw-3z+3i$

$2iwz-iz+\cancel{2iw}+\cancel{i}+\cancel{2wz}-\cancel{z}-2w+1 = \cancel{3wz}-\cancel{3iw}-\cancel{3z}+\cancel{3i}$ $\quad -2i \quad -wz+2z$

$2iwz-iz+iw-2i-wz+2z-2w+1=0$

$$w = \frac{iz+2i-2z-1}{2iz+i-z-2} = \frac{(i-2)z+(2i-1)}{(2i-1)z+i-2}.$$

15-16 (2) 订正: ~~上半平面→圆, $w(i)=\frac{1}{2}$, $w(0)=-1$~~ 错! 对称点应对于边界!

~~考虑 $w(\infty)=-1$ $\quad z_1=i$, $w_1=\frac{1}{2}$, $z_2=0$, $w_2=1$, $z_3=+\infty$, $w_3=-1$~~

$\therefore$ ~~$\frac{w-\frac{1}{2}}{w-1}\cdot\frac{-1-1}{-1-\frac{1}{2}} = \frac{z-i}{z} \Rightarrow (2w-1)\cdot z = 3(w-1)(z-i)$~~

~~$2wz-z = 3wz-3wi-3z+3i$~~

No.

Date

~~$wz - 3wi - 2z + 3i = 0$~~ ~~$w = \frac{2z-3i}{z-3i}$~~

$w(i) = \frac{1}{2}$ $w(0) = 1$

$w(i) = \frac{1}{2}$ 关于边界对称 ⇒ $w(-i) = 2$

$\therefore z_1 = i$, $w_1 = \frac{1}{2}$

$z_2 = 0$, $w_2 = 1$

$z_3 = -i$, $w_3 = 2$

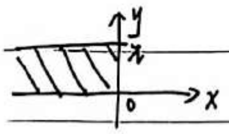
$\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1} = \frac{w-w_1}{w-w_2}\cdot\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}$

$\therefore \frac{z-i}{z}\cdot\frac{-i}{-2i}\,\frac{1}{2} = \frac{w-\frac{1}{2}}{w-1}\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}}$ ⇒ ~~$2z(w-\frac{1}{2}) = (z-i)(w-1)\cdot\frac{3}{2}$~~

$4z(w-\frac{1}{2}) = 3(z-i)(w-1)$ $4zw - 2z = 3zw - 3z - 3iw + 3i$

$\therefore zw + z + 3iw - 3i = 0$ $w = \frac{3i-z}{3i+z}$

21-22. 四1. $D = \{x+iy \mid x<0,\ 0<y<\pi\}$, $G = \{w \mid \mathrm{Im}\,w > 0\}$ $D \to G$



解: $w_1 = e^z$

$w_2 = \frac{1+w_1}{1-w_1}$

w ~~w_3~~ $= w_2^2 = \left(\frac{1+w_1}{1-w_1}\right)^2 = \left(\frac{1+e^z}{1-e^z}\right)^2$

13-14. 四1. $\{z \mid |z|<1\}$ 映射为上半平面, $w(0) = i$, $\arg w'(0) = \frac{\pi}{2}$

解: 设 $w = e^{i\theta}\cdot\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}$ $w(0) = i$. 代入 $e^{i\theta}\cdot\frac{\alpha^2}{|\alpha|^2} = i$ 神金! 又看反了! 是上半平面→圆是 $e^{i\theta}\cdot\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}$!

$w'(z) = e^{i\theta}\cdot\frac{(z-\bar{\alpha})-(z-\alpha)}{(z-\bar{\alpha})^2}$ $w'(0) = e^{i\theta}\cdot\frac{\alpha-\bar{\alpha}}{(\bar{\alpha})^2}$ $\because w(0) = i$ $\therefore w_1 = i$, $z_1 = 0$ $\therefore \alpha = i$

即 $z = e^{i\theta}\cdot\frac{w-i}{w+i}$ 两边对z求导

设 $\alpha = re^{i\beta}$ $e^{i(\theta+2\beta)} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ $w'(0) = e^{i\theta}\cdot\frac{\alpha^2}{r^2}\cdot(\alpha-\bar{\alpha})$

$= \frac{1}{r^2}\cdot e^{i\theta}\cdot(r^3 e^{3i\beta} - r^3 e^{i\beta})$

$z = e^{i\theta}\cdot\left(1-\frac{2i}{w+i}\right)$ $1 = e^{i\theta}\cdot(-2i)\cdot\left[-\frac{w'}{(w+i)^2}\right]$

将 $w(0)=i$ 代入:

$1 = e^{i\theta}\cdot\cancel{2i}\cdot\frac{w'}{\cancel{(2i)^2}\,2i}$ $e^{i\theta}\cdot w' = 2i = 2e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}$ $w' = 2\cdot e^{i\cdot(\frac{\pi}{2}-\theta)}$ ⇒ $\theta = 0$.

$\therefore z = \frac{w-i}{w+i}$ $\therefore w = \frac{iz+i}{1-z}$

No.
Date

第七章 拉普拉斯变换 Laplace 变换

一、基本概念

1. 定义：

$L[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$ 为 $f(t)$ 的 Laplace 变换（或象函数）

$f(t)$ 称为 $F(s)$ 的逆变换，记为 $f(t) = L^{-1}[F(s)]$

△常用1：单位阶跃函数 $u(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & t>0 \end{cases}$ $L[u(t)] = L[1] = \frac{1}{s}$

△常用2：△ $f(t) = e^{kt}u(t)$：

$f(t) = e^{(k-s)t}$ $t>0$. $F(s) = \int_0^\infty e^{(k-s)t} dt = \frac{1}{s-k}$，即 $L[e^{kt}u(t)] = \frac{1}{s-k}$

$L[e^{kt}] = \frac{1}{s-k}$

△常用3：$f(t) = t^a$ $(a>0)$ $L[f(t)] = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$，当 $Re(s)>0$.

a 为非负整数 n 时，$L[f(t)] = \frac{n!}{s^{n+1}}$

推导：若 $Re(s) = \sigma > 0$

$\int_0^\infty |t^a e^{-st}| dt = \int_0^\infty t^a e^{-\sigma t} dt \xlongequal{令 u=\sigma t} \frac{1}{\sigma^{a+1}} \cdot \int_0^\infty u^a e^{-u} du = \frac{\Gamma(a+1)}{\sigma^{a+1}}$

同理，$\int_0^\infty |\frac{d}{ds}(t^a e^{-st})| dt = \frac{\Gamma(a+2)}{\sigma^{a+2}}$

∴ 当 s 为实数时，　　由解析函数唯一性，

$F(s) = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$ 　$a>-1$. 　　对所有 s 都成立.

特别地，$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = \cdots n!$ 　∴ $L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$，$n = 0,1,2\cdots$，$Re(s)>0$

二、基本性质

7.2.1 线性性质

$L[k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)] = k_1 L[f_1(t)] = k_2 L[f_2(t)]$

或 $L^{-1}[k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)] = k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)$

No.
Date

△常用4. $L[\sin wt]=\frac{w}{s^2+w^2}$ $L[\cos wt]=\frac{s}{s^2+w^2}$, $Re(s)>0$.

证明: $L[\sin wt]=L\left[\frac{e^{iwt}-e^{-iwt}}{2i}\right]=\frac{1}{2i}\{L[e^{iwt}]-L[e^{-iwt}]\}$

$$=\frac{1}{2i}\cdot\left(\frac{1}{s-iw}-\frac{1}{s+iw}\right)=\frac{1}{2i}\cdot\frac{2iw}{s^2+w^2}=\frac{w}{s^2+w^2}$$

$L[\cos wt]=L\left[\frac{e^{iwt}+e^{-iwt}}{2}\right]=\frac{1}{2}\{L[e^{iwt}]+L[e^{-iwt}]\}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{s-iw}+\frac{1}{s+iw}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2s}{s^2+w^2}=\frac{s}{s^2+w^2}$

同理, $L[\mathrm{sh}\,wt]=\frac{w}{s^2-w^2}$, $L[\mathrm{ch}\,wt]=\frac{s}{s^2-w^2}$

7.2.2 平移性质

时移性: $L[f(t-t_0)]=e^{-st_0}F(s)$ 或 $L^{-1}[e^{-st_0}F(s)]=f(t-t_0)u(t-t_0)$

频移性: $L[e^{s_0t}f(t)]=F(s-s_0)$

7.2.3 微分性质

◇象原函数: 若 $L[f(t)]=F(s)$, 且 $f'(t)$ 也是象原函数,

则 $L[f'(t)]=sF(s)-f(0^+)$

证: $L[f'(t)]=\int_0^{\infty}f'(t)e^{-st}dt=\int_0^{\infty}e^{-st}d[f(t)]=e^{-st}f(t)\Big|_0^{\infty}+s\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}dt=-f(0^+)+sF(s)$

推论: $L[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0^+)-s^{n-2}f'(0^+)-\cdots-f^{(n-1)}(0^+)$

◇象函数: 若 $L[f(t)]=F(s)$, 则 $L[(-t)^nf(t)]=F^{(n)}(s)$, $n=0,1,2\cdots$

证: $F'(s)=\frac{d}{ds}\left[\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}dt\right]=\int_0^{\infty}f(t)\cdot(-t)e^{-st}dt=L[(-t)f(t)]$

7.2.4 积分性质

若 $L[f(t)]=F(s)$, $\int_s^{\infty}F(s)ds$ 收敛, 则 $L\left[\frac{f(t)}{t}\right]$ 存在, 且 $L\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_s^{\infty}F(u)du$ —象函数

若 $L[f(t)]=F(s)$, 则 $L\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right]=\frac{1}{s}F(s)$ —象原函数

(象原) 证: 记 $g(t)=\int_0^t f(\tau)d\tau$, 则 $L[g'(t)]=L[f(t)]=sL[g(t)]-g(0)=sL[g(t)]$

而 $F(s)=L[f(t)]=sL[g(t)]$ ∴ 原式 $=\frac{1}{s}F(s)$

推论: $L\Big[\underbrace{\int_0^t dt\cdots\int_0^t dt\int_0^t dt\int_0^t}_{n个} f(t)dt\Big]=\frac{1}{s^n}F(s)$

(续) 解：设 $L[\frac{f(t)}{t}] = G(s) = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} \cdot e^{-st} dt$.

$\therefore L[-f(t)] = G'(s) = \int_0^{+\infty} (-t) \frac{f(t)}{t} e^{-st} dt$.

$= -\int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = -F(s)$

$\therefore G(s) = \int_s^{\infty} F(u) du$

7.2.6 卷积性质

定义：$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$

卷积定理：设 $L[f(t)] = F(s)$，$L[g(t)] = G(s)$

则 $L[f(t) * g(t)] = F(s) \cdot G(s)$

或 $L^{-1}[F(s) \cdot G(s)] = f(t) * g(t)$

E.g. 若 $L[f(t)] = \frac{1}{(s^2+4s+13)^2}$，求 $f(t)$

解：$f(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+4s+13)^2}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4s+13} \cdot \frac{1}{s^2+4s+13}\right]$

$= \frac{1}{9} L^{-1}\left[\frac{3}{(s+2)^2+3^2}\right] * L^{-1}\left[\frac{3}{(s+2)^2+3^2}\right] = \frac{1}{9} (e^{-2t}\sin 3t) * (e^{-2t}\sin 3t)$

代入卷积公式，原式 $= \frac{1}{9} \cdot \int_0^t e^{-2\tau}\sin 3\tau \cdot e^{-2(t-\tau)} \sin[3(t-\tau)] d\tau$

$= \frac{1}{9} e^{-2t} \int_0^t \sin 3\tau \cdot \sin[3(t-\tau)] d\tau$

由和差化积公式，$\sin 3\tau \sin[3(t-\tau)] = \frac{1}{2}[\cos(6\tau-3t) - \cos 3t]$

$\therefore$ 原式 $= \frac{1}{9} e^{-2t} \int_0^t \frac{1}{2}[\cos(6\tau-3t) - \cos 3t] d\tau$

$= \frac{1}{9} e^{-2t} [2 \cdot \frac{1}{12} \sin(3t) - \frac{1}{2} t \cos 3t]$

$= \frac{1}{54} e^{-2t} \sin(3t) - \frac{1}{18} t e^{-2t} \cos(3t)$

7.3 拉氏逆变换　　$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$，$L^{-1}[F(s)] = f(t)$

定理：若 $F(s)$ 的全部奇点 $s_1, s_2 \cdots s_n$ 都在 $Re(s) < \delta$ 内，且 $\lim\limits_{s\to\infty} F(s) = 0$，则 $t>0$ 时，

$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \sum\limits_{k=1}^{n} Res[F(s)e^{st}; s_k]$

No.
Date

Eg. 用不同方法求 $F(s)=\frac{1}{s^2(s+1)}$ 的拉氏逆变换.

法一：利用 Laplace 线性性质（分解法）

$F(s)=-\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s+1}$ （方法：设 $\frac{1}{s^2(s+1)}=\frac{as+b}{s^2}+\frac{c}{s+1}$

$\therefore (as+b)(s+1)+cs^2=1 \Rightarrow \begin{cases}a+c=0\\a+b=0\\b=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-1\\b=1\\c=1\end{cases}$

$\therefore \frac{-s+1}{s^2}+\frac{1}{s+1}=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}$

$\therefore L^{-1}[F(s)]=L^{-1}[\frac{1}{s^2}]-L^{-1}[\frac{1}{s}]+L^{-1}[\frac{1}{s+1}]$

$\frac{1}{s^2}$：$n=1$. t　　$\frac{1}{s}$：1　　$\frac{1}{s+1}$，$\frac{1}{s}$ 频移，$e^{-t}\cdot 1=e^{-t}$

$\therefore L^{-1}[F(s)]=t-1+e^{-t}$

法二：留数法

$L^{-1}[F(s)]$：奇点：$s=0$，$s=-1$

$Res[\frac{e^{st}}{s^2(s+1)};0]=\lim_{s\to 0}[\frac{e^{st}}{s+1}]'$　　$[\frac{e^{st}}{s+1}]'=\frac{e^{st}(s+1)-e^{st}}{(s+1)^2}=\frac{(ts+t-1)e^{st}}{(s+1)^2}$

$\therefore Res[\frac{e^{st}}{s^2(s+1)};0]=t-1$

而 $Res[\frac{e^{st}}{s^2(s+1)};-1]=\lim_{s\to -1}[\frac{e^{st}}{s^2}]=e^{-t}$

故 $L^{-1}[F(s)]=t-1+e^{-t}$

法三：卷积法

$L^{-1}[F(s)]=L^{-1}[\frac{1}{s^2}]*L^{-1}[\frac{1}{s+1}]$

$L^{-1}[\frac{1}{s^2}]=t$　　$L^{-1}[\frac{1}{s+1}]=e^{-t}$

$\therefore$ 原式 $=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau=\int_0^t \tau e^{\tau-t}d\tau=[\tau e^{\tau-t}]_0^t-\int_0^t e^{\tau-t}d\tau=t-(1-e^{-t})=t-1+e^{-t}$

习题：

E.g.1. 习题七 Ex.9.(2) $F(s)=\frac{5s+3}{(s-1)(s^2+2s+5)}$

解：分解法：设 $F(s)=\frac{a}{s-1}+\frac{bs+c}{s^2+2s+5}$

$\therefore$ 分子：$a(s^2+2s+5)+(bs+c)(s-1)$

$=as^2+2as+5a+bs^2-bs+cs-c=(a+b)s^2+(c-b+2a)s+5a-c$

$\therefore \begin{cases}a+b=0\\c-b+2a=5 \Rightarrow c+a+2a=5,\\5a-c=3\end{cases}$　　$\therefore F(s)=\frac{1}{s-1}+\frac{-s+2}{s^2+2s+5}$

$3a+c=5 \Rightarrow a=1,\ b=-1$

$c=2$

No.

No.

Date

∴下面利用三角去分解：

$$F(s)=\frac{1}{s-1}+\frac{-s+2}{s^2+2s+5}=\frac{1}{s-1}-\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{(s+1)^2+2^2}$$

故 $f(t)=e^t-e^{-t}\cos 2t+\frac{3}{2}\cdot e^{-t}\sin 2t$

历年卷中计算：

15-16 (1) $f(t)=\int_0^T e^{\tau}\sin\tau\,d\tau$，$L[f(t)]$

$L[\sin t]=\frac{1}{s^2+1}$ $\quad L[e^{t}\sin t]=\frac{1}{(s-1)^2+1}$

$\therefore L[f(t)]=\frac{1}{s(s^2-2s+2)}$

(2) $F(s)=\frac{e^{-s}}{s^2+2s+1}$

$L[1]=\frac{1}{s}$ $\quad L[t]=\frac{1}{s^2}\Rightarrow L[te^{-t}]=\frac{1}{(s+1)^2}$

$L[(t-1)e^{1-t}]=\frac{e^{-s}}{s^2+2s+1}$

故 $f(t)=(t-1)e^{1-t}u(t-1)$

17-18 (1) $f(t)=t\int_0^t e^{t-\tau}\sin 2\tau\,d\tau$. 求 $L[f(t)]$

$L[\sin 2t]=\frac{2}{s^2+4}$ $\quad L[e^{-t}\sin 2t]=\frac{2}{(s+1)^2+4}$ $\quad L[\int_0^t e^{-\tau}\sin 2\tau\,d\tau]=\frac{2}{s[(s+1)^2+4]}$

$L[e^t\int_0^t e^{-\tau}\sin 2\tau\,d\tau]=\frac{2}{(s-1)(s^2+4)}$

$L[(-t)\int_0^t e^{t-\tau}\sin 2\tau\,d\tau]=\frac{(-2)\cdot[s^2+4+2s\cdot(s-1)]}{(s-1)^2(s^2+4)^2}=\frac{-2(3s^2-2s+4)}{(s-1)^2(s^2+4)^2}$ $\quad$ 原式 $=\frac{2[3s^2-2s+4]}{(s-1)^2(s^2+4)^2}$ ×

(2) $F(s)=\frac{e^{-s}}{s^2(s^2+1)}=e^{-s}\cdot(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+1})$

$L^{-1}[\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+1}]=t-\sin t$

$L^{-1}[\frac{e^{-s}}{s^2(s^2+1)}]=[t-1-\sin(t-1)]u(t-1)$

21-22 (1) $\frac{s}{2}-\frac{2s}{s^2+1}+[\frac{1}{s^2+1}]'=\frac{1}{2}s-\frac{2s}{s^2+1}-\frac{2s}{(s^2+1)^2}=\frac{2}{s(s^2+1)^2}$.

(2) 求 $F(s)=\frac{2s}{s^4-1}$ 逆

先求 $L^{-1}[\frac{1}{s^2+1}+\frac{1}{s^2-1}]=L^{-1}[\frac{2s^2}{s^4-1}]$

$L^{-1}[\frac{1}{s^2+1}]=\sin t$ $\quad L^{-1}[\frac{1}{s^2-1}]=\frac{1}{2}L^{-1}[\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}]=\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})$

No.

Date

$\therefore\ L^{-1}\left[\frac{2s^2}{s^4-1}\right] = \sin t + \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-t}$

$L^{-1}\left[\frac{2s}{s^4-1}\right] = \int_0^t (\sin x + \frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{2}e^{-x})\,dx$

$= -\cos t + \frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{2}e^{-t} = \mathrm{ch}t - \cos t.$

No.

Date

△ 容易忘的!!!

① 三角函数

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \quad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

$$\operatorname{sh} z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2} \quad \operatorname{ch} z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$$

② 调和函数:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

③ 设 $z=x+iy$, $f(z)=u+iv$

$\therefore f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$ 或 $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial y}-i\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$