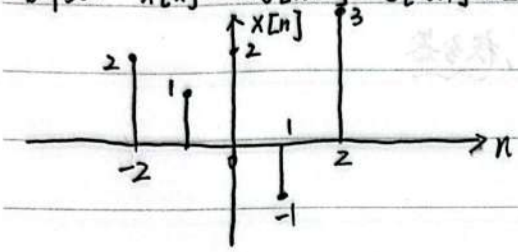
① $\begin{cases} \delta[n] = u[n] - u[n-1] \\ u[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-k] \end{cases}$ （设想不断右移的离散脉冲）

在这种理念下，一切离散序列都可由若干 $m\delta[k]$ 来表示.

例如: $x[n] = 2\delta[n+2] + \delta[n+1] + 2\delta[n] - \delta[n-1] + 3\delta[n-2]$



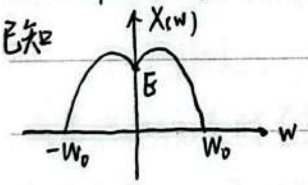
表示: $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-1]$

当 $n=k$ 时，$x[n]$ 的值.

同样的：方波也可以用 $u(t)$ 平移后作差表示.

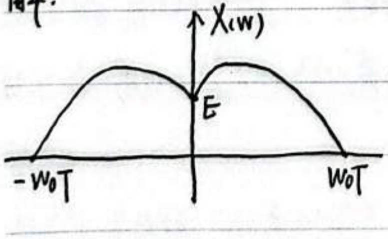
△第五章还有涉及自变量的公式:

已知



求 $X(\frac{w}{T})$ $(T>0)$ 的图象

解:



六. 系统的基本性质　　△系统: $x(t) \xleftrightarrow{\text{系统}} y(t)$

① 线性系统与非线性系统.

a. 齐次性: $\forall x(t) \to y(t)$, $ax(t) \to ay(t)$

b. 叠加性: 若 $\forall x_1(t) \to y_1(t)$, $\forall x_2(t) \to y_2(t)$

那么 $x_1(t) + x_2(t) \to y_1(t) + y_2(t)$

→ 线性.

第一章 信号与系统基本概念

一. 基本概念（一些新定义，其他延展微积分基本知识）

① 连续：$x(t)$　　连续周期：$x(t)=x(t+mT)$　　最小正值 T/N：基波周期

离散：$x[n]$　　$x[n]=x[n+mN]$

② $x(t)=x_e(t)+x_o(t)$

其中 $x_e(t)=\frac{1}{2}[x(t)+x(-t)]$　偶信号

$x_o(t)=\frac{1}{2}[x(t)-x(-t)]$　奇信号

③ 功率信号和能量信号

a. 无穷大区间内，

连续，$E=\lim\limits_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2dt=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt$

$P=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2dt$

离散，$E=\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=-N}^{N}|x[n]|^2=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2$

$P=\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum\limits_{n=-N}^{N}|x[n]|^2$

b. 两种信号定义：

能量信号：$0<E<\infty$，而 $P=0$

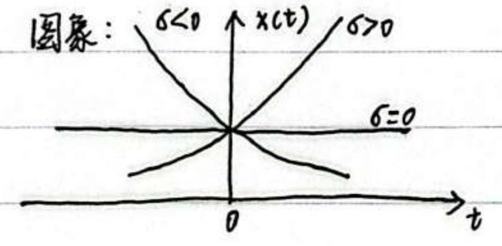
功率信号：$0<P<\infty$，而 $E=\infty$

二. 基本的连续/离散时间信号

① I. 实指数信号：

$x(t)=Ce^{st}$，c 和 s 均为实数.

图象：



No.

Date

解：利用欧拉公式，

先设 $f(a)=\int_0^{+\infty} Sa(t)e^{-at}dt$

$=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\cdot e^{-at}dt$　　代入 $\sin t=\frac{1}{2j}(e^{jt}-e^{-jt})$

$\therefore \frac{df(a)}{da}=(-t)\cdot\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}e^{-at}\cdot dt$

$=\frac{1}{2j}\cdot\int_0^{+\infty}\left[e^{-(a+j)t}-e^{-(a-j)t}\right]dt$

又 $\because \int_0^{+\infty}e^{-t}dt=\left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty}=1$

$\therefore$ 原式 $=\frac{1}{2j}\cdot\left(\frac{1}{a+j}-\frac{1}{a-j}\right)=\frac{1}{2j}\cdot\frac{-2j}{a^2+1}=-\frac{1}{a^2+1}$

$\therefore \frac{df(a)}{da}=\frac{-1}{a^2+1}$　　$f(a)=-\arctan(a)+C$ ①

又 $\because$ $a\to+\infty$. $\frac{\sin t}{t}<1$. 为有界量；而 $e^{-at}\to 0$，为无穷小量

$\therefore$ $t\to+\infty$, $f(t)\to 0$

$\therefore$ 代入①式中. $f(+\infty)=-\frac{\pi}{2}+C=0$　$\Rightarrow C=\frac{\pi}{2}$

$\therefore f(a)=-\arctan(a)+\frac{\pi}{2}$

故 $a=0$ 时，$\int_0^{+\infty}Sa(t)=\frac{\pi}{2}$，得证.

三. 信号运算与自变量代换

① 对应特殊点法

② 标准法.步骤：

1. 化成标准形式
2. 前有负号翻转
3. 系数大于1压缩，小于1拉伸
4. 加号左移，减号右移

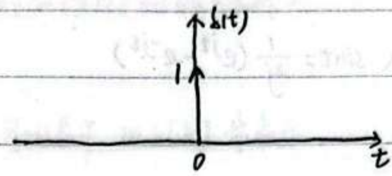
利用平移思想，也可以再理解两组公式：

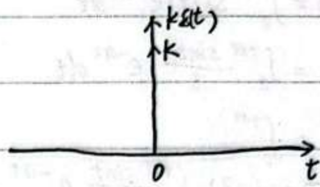
No.

Date

连续单位冲激信号

$$\delta(t)=\frac{du(t)}{dt}=\begin{cases}+\infty, & t=0\\ 0, & t\neq 0\end{cases}$$





$$\Rightarrow\ u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,d\tau.$$

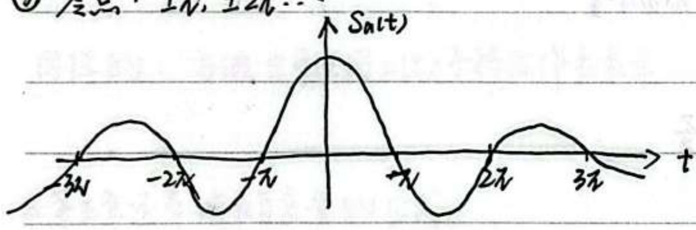
④ 抽样函数 $Sa(t)$

定义：$Sa(t)=\frac{\sin t}{t}$　　Matlab中，$\operatorname{sinc} t=\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$

① 由于 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$，故定义 $Sa(0)=1$.

② 偶函数

③ 零点：$\pm\pi, \pm 2\pi \cdots$



相关性质：

1. $\int_{-\infty}^{+\infty}Sa(t)\,dt=\pi$，$\int_{0}^{+\infty}Sa(t)\,dt=\frac{\pi}{2}$.

2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(W_0 t)}{t}\,dt=\begin{cases}\pi, & W_0>0\\ -\pi, & W_0<0\end{cases}$

△证：

原式 $=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(W_0 t)}{W_0 t}\cdot d(W_0 t)$

- 当 $W_0>0$ 时，$t\to-\infty$，$W_0 t\to-\infty$；$t\to+\infty$，$W_0 t\to+\infty$ $\Rightarrow$ 原式 $=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\pi$
- 当 $W_0<0$ 时，$t\to-\infty$，$W_0 t\to+\infty$；$t\to+\infty$，$W_0\to-\infty$ $\Rightarrow$ 原式 $=\int_{+\infty}^{-\infty}\frac{\sin t}{t}dt=-\pi$.

△证：$\int_{0}^{+\infty}Sa(t)\,dt=\frac{\pi}{2}$

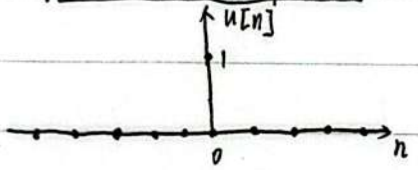
Ⅱ. 复指数信号

常用欧拉公式：

$$\begin{cases} e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t) \\ \sin\omega_0 t = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right) \\ \cos\omega_0 t = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right) \end{cases}$$

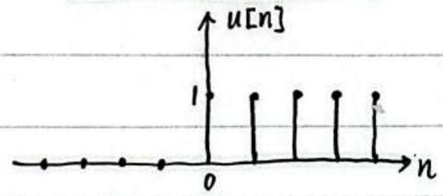
常用三角函数公式：共12个.

② 离散单位脉冲序列



$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n\neq 0 \end{cases}$$

离散单位阶跃序列



$$u[n] = \begin{cases} 0, & n<0 \\ 1, & n\geq 0 \end{cases}$$

两者关系： $\delta[n] = u[n] - u[n-1]$

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k] = \sum_{-\infty}^{n}\delta[k]$$

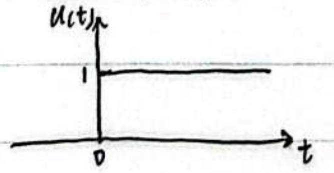
（证明 $u[n] = \sum_{-\infty}^{n}\delta[k]$：

对n进行分类：当$n<0$时，$\sum_{-\infty}^{n}\delta[k]=0$

当$n\geq 0$时，$\sum_{-\infty}^{n}\delta[k] = \delta[0] = 1$

与u[n]表达式一致，得证.）

③ 单位阶跃信号



$$u(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & t>0 \end{cases}$$

$t=0$处 $u(t)$无定义.

No.
Date

④ 因果系统和非因果系统

△因果性：输出仅取决于现在及过去的输入.

判据：y括号 ≤ x括号

⑤ 可逆系统与不可逆系统

可逆：不同输入→不同输出

不可逆：两个以上不同输入→相同输出

⑥ 稳定系统和不稳定系统

若输入有界 → 则输出有界

No.
Date

如下微分方程描述的系统：

② 时变系统与时不变系统

1. 定义：$\forall x(t) \to y(t)$，对 $\forall t_0 \in R$，都有 $\forall x(t-t_0) \to y(t-t_0)$，离散类似

(物理意义：系统不随时间变化而变化)

△判断：

例题：$y[n] = nx[n]$

解答：$\underset{\substack{\parallel \\ f[n]}}{x[n-n_0]} \longrightarrow nf[n] = nx[n-n_0]$，该为实际的输出

而若该系统是时不变，期望的输出是 $y[n-n_0] = (n-n_0)x[n-n_0]$

两者不同 ∴是时变系统

· 微分器 $y(t) = \frac{d[x(t)]}{dt}$ 是时不变

· 积分器 $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d(\tau)$ 是时不变

△性质：

时不变 $\begin{cases} \text{串联} \\ \text{并联} \end{cases}$ 仍是时不变

③ 记忆系统与无记忆系统

定义：输出 $\begin{cases} \text{仅取决于当下输入，} \boxed{\text{无记忆系统}} \xrightarrow{\text{判据}} y\text{括号内和}x\text{括号内一样} \\ \text{反之，记忆系统} \end{cases}$

No.

Date

△性质：两个线性系统串联还是线性系统
并联

线性系统$\boxed{判据}$

1. 每一项都有x

2. 每一项x的次数是1.

特殊：$\frac{dx(t)}{dt}$ 微分器，是线性系统，$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ 是线性系统，积分器

$g.\ e^{x(t)} = 1 + x(t) + \frac{x^2(t)}{2!} + \frac{x^3(t)}{3!} \cdots$ 次数不是1，非线性

$\sin x(t)$ 同理，$\sin x(t) = x(t) - \frac{x^3(t)}{3!} + \frac{x^5(t)}{5!} + \cdots$，非线性

延伸：增量线性系统

问：$\frac{dy(t)}{dt} = x(t)$ 是增量线性系统吗？

答：不是.

由原式，$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d(\tau) + C$，常数的存在使其非线性.

但若重新定义 $X = [x(t), y(0)] \rightarrow Y = y(t)$，则是线性系统.

证明：$\because y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau + C$

而 $y(0) = \int_{-\infty}^{0} x(\tau)d\tau + C \quad \therefore C = y(0) - \int_{-\infty}^{0} x(\tau)d\tau$

$\therefore$ 将C代入原式，

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau + y(0) - \int_{-\infty}^{0} x(\tau)d\tau$$
$$= \int_{0}^{t} x(\tau)d\tau + y(0)$$

此时 x(t) 为输入，y(0) 为状态. 下验证其线性性质：

a. 齐次性：$X = [x(t), y(0)] \rightarrow y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau + y(0)$

$aX = [ax(t), ay(0)] \rightarrow \int_0^t a x(\tau)d\tau + ay(0) = a\cdot\left[\int_0^t x(\tau)d\tau + y(0)\right] = ay(t)$

b. 叠加性：令 $X_1 = [x_1(t), y_1(0)] \rightarrow y_1(t) = \int_0^t x_1(\tau)d\tau + y_1(0)$

$X_2 = [x_2(t), y_2(0)] \rightarrow y_2(t) = \int_0^t x_2(\tau)d\tau + y_2(0)$

$\therefore X_1 + X_2 = [x_1(t) + x_2(t), y_1(0) + y_2(0)] \rightarrow y(t) = \int_0^t [x_1(t) + x_2(t)]d\tau + y_1(0) + y_2(0)$

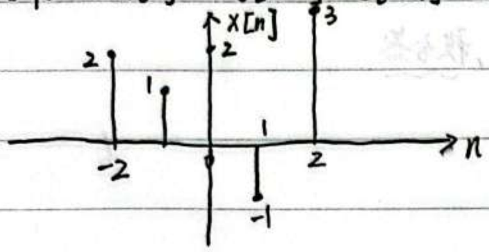
$= y_1(t) + y_2(t)$

$\therefore$ 原始输入和状态同时当作新的输入 → 增量线性系统.

$$\text{①}\begin{cases} \delta[n] = u[n] - u[n-1] \\ u[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-k] \end{cases}$$ （设想不断右移的离散脉冲）

在这种理念下，一切离散序列都可由若干 $m\delta[k]$ 来表示.

例如: $x[n] = 2\delta[n+2] + \delta[n+1] + 2\delta[n] - \delta[n-1] + 3\delta[n-2]$

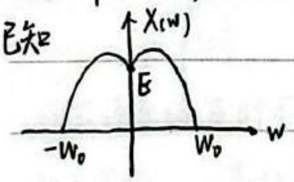


表示: $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{x[k]}_{\text{当}n=k\text{时，}x[n]\text{的值.}}\delta[n-1]$

同样的：方波也可以用 $u(t)$ 平移后作差表示.

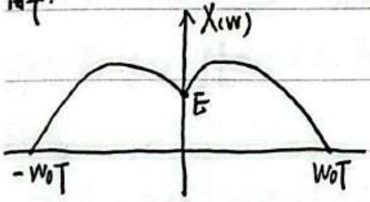
△第五章还有涉及自变量的公式:

已知



求 $X(\frac{w}{T})$ $(T>0)$ 的图象

解:



六. 系统的基本性质

△系统: $x(t) \xrightarrow{\text{系统}} y(t)$

① 线性系统与非线性系统.

a. 齐次性: $\forall x(t) \to y(t)$, $ax(t) \to ay(t)$

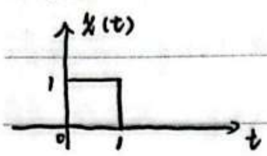
b. 叠加性: 若 $\forall x_1(t) \to y_1(t)$, $\forall x_2(t) \to y_2(t)$

那么 $x_1(t) + x_2(t) \to y_1(t) + y_2(t)$

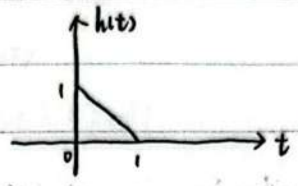
$\Big\} \to$ 线性.

[连续信号卷积 - 计算]

例题：



$*$

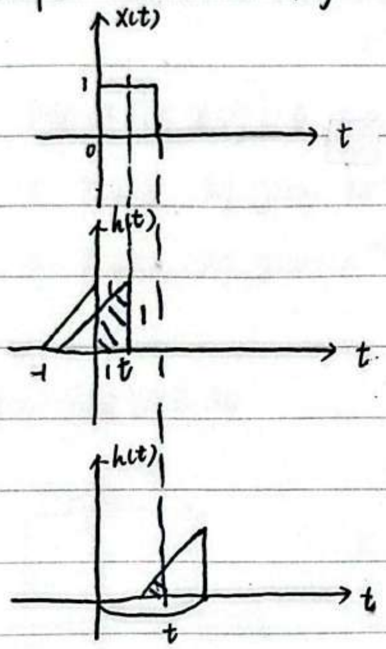


$= ?$

step1：边界：$0+0 \to 0$

$1+1 \to 2$

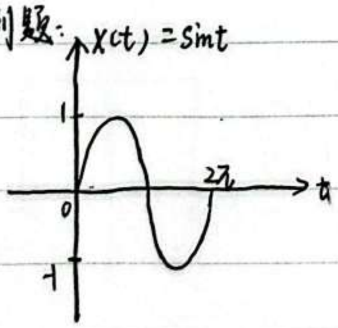
step2：先翻转，后平移



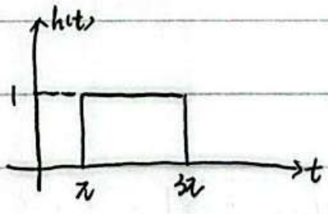
① 当 $0<t<1$ 时，$y(t)=\frac{[1+(1-t)]t}{2}=\frac{(2-t)t}{2}$

② 当 $1<t<2$ 时，$y(t)=\frac{(2-t)^2}{2}$

例题：



$*$



$=$

step1：边界：$0+\pi=\pi$. $2\pi+3\pi=5\pi$

step2：翻转后平移

No.

Date

△注意：

① h[n] 翻转！不是 x[n] 翻转！

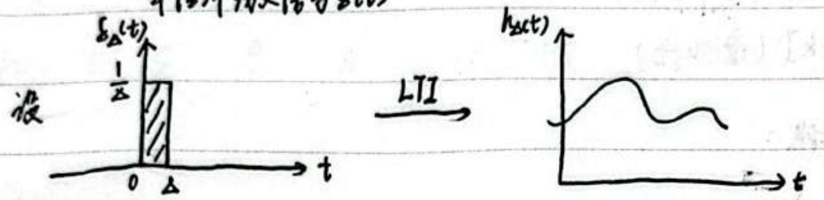
② 翻转谁，平移谁！

[连续信号卷积推导]

· 输入：若知道无限窄的方波对应的输出，则能知道所有输入对应的输出

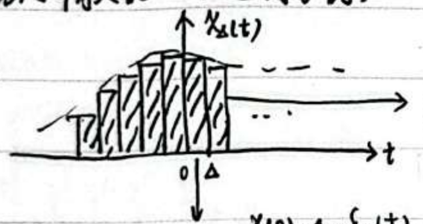
↓ 单位冲激信号 $\delta(t)$

设



则令 $\Delta t \to 0$，$\lim_{\Delta\to 0}\delta_\Delta(t) \xrightarrow{LTI} \lim_{\Delta\to 0} h_\Delta(t)$

先对输入的 $x(t)$ 进行分割.



$\frac{1}{\Delta}\cdot\Delta\cdot x(\Delta)$，即原 $x(t)$ 中的信号高度

$x(\Delta)\underbrace{\delta_\Delta(t-\Delta)}_{\text{信号右移}}\cdot\Delta$

… 类推，$x_\Delta(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\,\delta_\Delta(t-k\Delta)\cdot\Delta$

以Δ为间隔的阶梯函数

而又有事实，$\lim_{\Delta\to 0} x_\Delta(t) = x(t)$.

下面推导离散卷积公式：

[卷积公式完整陈述如下]

1. 离散：$y[k] = x[k] * h[k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n-k]$

2. 连续：$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,h(-(\tau-t))\,d\tau$

④积分 ③相乘 ①翻转 ②平移

△卷积公式： $x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]$

证明：

先证明：$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]\delta[n-k]$ （第一章中已证明）

又∵ $\delta[n]\xrightarrow{LTI}h[n]$

$\delta[n-k]\xrightarrow{LTI}h[n-k]$ （由时不变性）

$x[k]\delta[n-k]\xrightarrow{LTI}x[k]h[n-k]$ （线性：齐次性）

$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]\delta[n-k]\xrightarrow{LTI}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]$ （叠加性）

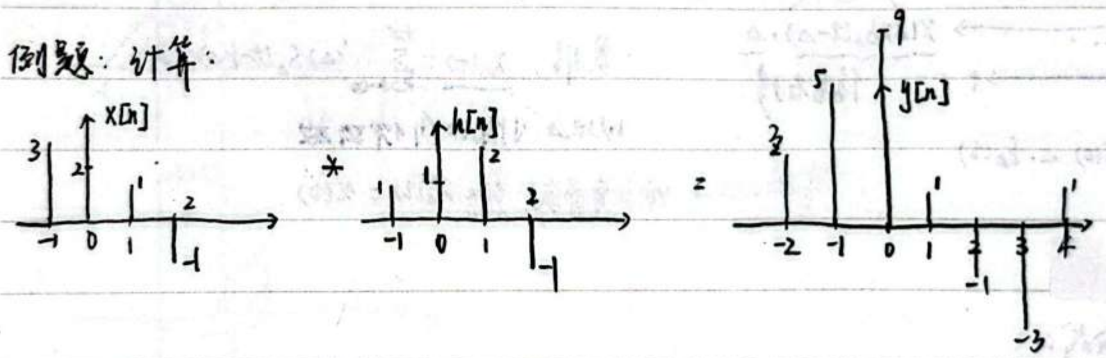
由此，可通过卷积公式法计算卷积：

$x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$

$=\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty}}_{④求和} \underbrace{x[k]\ h[-(k-n)]}_{③相乘}$

① 翻转 ② 平移

例题：计算：



① $h[-n]$：-1 2 1 1

② $x[n]$：3 2 1 -1

-1 2 1 1

3 2 1 -1

-1 2 1 1 ∴ $y[-2]=3$

$3\times1+2\times1=5$ ∴ $y[-1]=5$

3 2 1 -1

-1 2 1 1

$3\times2+2\times1+1\times1=6+2+1=9$ $y[0]=9$.

3 2 1 -1

-1 2 1 1

$-3+4+1-1=1$ $y[1]=1$

3 2 1 -1

-1 2 1 1

-2 2 -1 $y[2]=-1$

3 2 1 -1

-1 2 1 1

-1 -2 $y[3]=-3$

3 2 1 -1

-1 2 1 1 $y[4]=1$

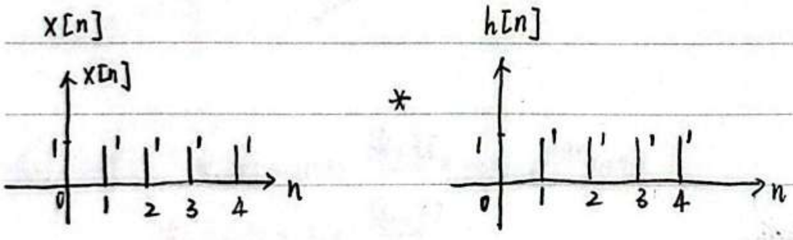
No.
Date

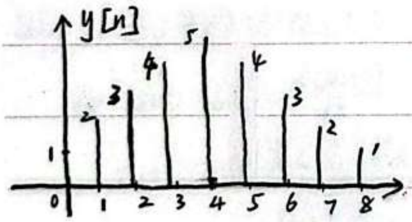
② 列表:

h[n] →	1	1	2	-1			
x[n] ↓ 3	3	3	6	-2			
2		2	2	4	-2		
1			1	1	2	-1	
-1				-1	-1	-2	1
y[n] 求和	3	5	9	2	-1	-3	1

∴画入原图(前)

例2:





h[n]	1	1	1	1	1				
1	1	1	1	1	1				
1		1	1	1	1	1			
1			1	1	1	1	1		
1				1	1	1	1	1	
1					1	1	1	1	1
求和	1	2	3	4	5	4	3	2	1

△时间复杂度: x[n] 长度为N, h[n] 长度为N, 用列表法用多少次加法/乘法?

· 乘法: $O(N^2)$

· 加法: 5: $1+2+3+4+3+2+1$ 即: $\frac{(1+N-1)(N-1)}{2}+\frac{(1+N-2)(N-2)}{2}=(N-1)\cdot(\frac{N}{2}+\frac{N-2}{2})=(N-1)^2$

$\rightarrow O(N^2)$

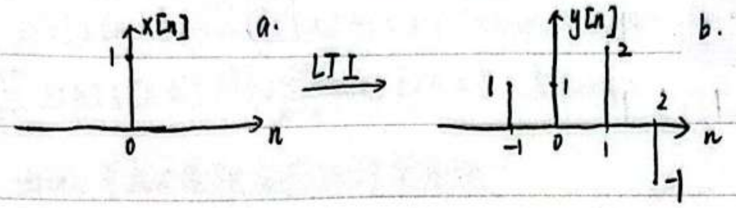
第二章 LTI系统时域分析

LTI: Linear Time-Invariant System. 线性时不变系统

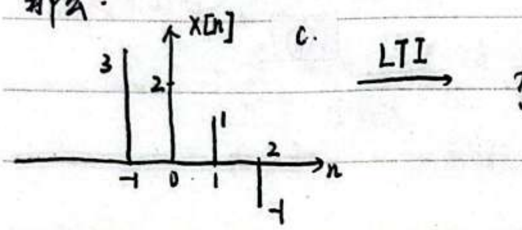
线性：对现实问题的类似

LTI满足：齐次性，叠加性，时不变性.

例：若 $x[n]=\delta[n]$，　　$x[n] \rightarrow \boxed{LTI} \rightarrow y[n]$



那么：



△一些定义：

① $\delta[n]$，单位脉冲序列

② 得到的输出 $y[n]$ 记作 $h[n]$，单位脉冲响应

③ $y[n] = x[n] * h[n]$，其中"*"称为卷积

∴这道题有了另一种表述，

b.信号：$h[n]$　　c.信号：$x[n]$　　即问 $x[n]*h[n]$；

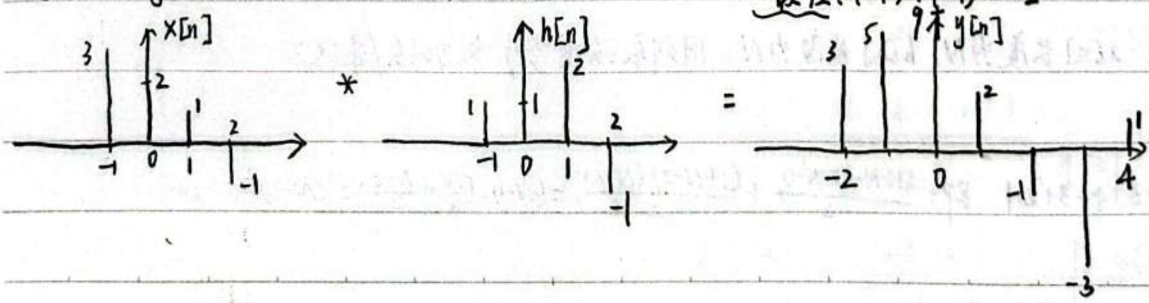
$h[n]$是LTI系统的唯一标识、

△解法一：列表法：

① 确定 $y[n]=x[n]*h[n]$ 的取值范围

最右：$2+2=4$

最左：$(-1)+(-1)=-2$



解: $x(t+3) * \delta(t-5) = x(t+3-5) * \delta(t-5+5)$ （补充3）

$= x(t-2) * \delta(t) = x(t-2)$

4. 记 $\delta'(t) = \frac{d[\delta(t)]}{dt}$

△ $\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\delta'(t)\,dt = -y'(0)$

证明: 分部积分, $\int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\,d[\delta(t)] = [y(t)\delta(t)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)y'(t)\,dt$.

又∵ $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)$ ∴ 原式 $= 0 - y'(0) = -y'(0)$

△ $\delta'(t) = -\delta'(-t)$ 偶函数的导数是奇函数.

△ $x(t) * \delta'(t) = \frac{d[x(t)]}{dt}$

证: 从定义上理解:

$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{微分器}} \longrightarrow \frac{d[x(t)]}{dt}$

$\delta(t) \longrightarrow \boxed{\text{微分器}} \longrightarrow \delta'(t)$

定义 $h(t)$: $\delta(t)$ 在LTI系统中输出 ∴ $h(t) = \delta'(t)$

而对于该系统, $y(t) = x(t) * h(t)$

∴ $x(t) * \delta'(t) = \frac{d[x(t)]}{dt}$

△ $\frac{d[x(t)*h(t)]}{dt} = \frac{d\,x(t)}{dt} * h(t) = x(t) * \frac{d\,h(t)}{dt}$

证: 由上式, $\frac{d[x(t)*h(t)]}{dt} = [x(t)*h(t)] * \delta'(t)$

（结合律） $= [x(t) * \delta'(t)] * h(t)$

$= \frac{dx(t)}{dt} * h(t) = x(t) * \frac{d\,h(t)}{dt}$ （上一步交换律即得）

③ 分配律: $x(t)*[h_1(t)+h_2(t)] = x(t)*h_1(t) + x(t)*h_2(t)$

$x[n]*[h_1[n]+h_2[n]] = x[n]*h_1[n] + x[n]*h_2[n]$

一些补充知识及等式

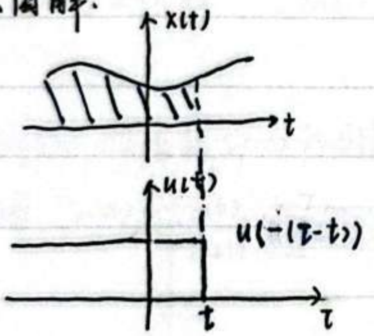
1. $\underbrace{x(t)*u(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau}$

证明: $x(t)*u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)u(t-\tau)d\tau$

由 $u(t-\tau)$ 的性质, 当且仅当 $\tau<t$ 时, $u(t-\tau)=1$

$\therefore$ 原式 $= \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$

△图解:



翻转, 右移 t.

同理, $x[n]*u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

2. $x(t)*\delta(t-t_0) = x(t-t_0)$　　($\delta(t)*h(t)=h(t)$, 即 $h(t)$ 的定义)

3. $\underline{x(t+t_0)*h(t-t_0) = x(t)*h(t)}$

离散也有类似结论.

Exercise:

Ex.1. $x(t+3)\delta(t-5)$

解: 先由 $x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$

$\therefore x(t+3)\delta(t+3-8) = x(8)\delta(t-5)$

Ex.2. $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t+3)\delta(t-5)dt$

解: 由性质2, 有 $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)$,

代入, 原式 $= x(8)$

Ex.3. $x(t+3)*\delta(t-5)$

例2：$\delta(\sin(t))$

解：先求零点，$\sin t=0$，$t=k\pi$．$f'(t)=\cos(t)$

$f'(2k\pi)=1$　　$f'[(2k+1)\pi]=-1$，$|f'(t)|=1$

$\therefore \delta(\sin(t))=\sum_{k\in N}\delta(t-k\pi)$

同理，$\delta(\cos(t))=\sum_{k\in N}\delta(t-k\pi-\frac{\pi}{2})$

例3：$\int_{-2\pi}^{2\pi}(1+t)\,\delta(\cos t)\,dt$

解：$\delta(\cos(2t))=\sum_{k\in N}\delta(t-k\pi-\frac{\pi}{2})$

而由 $\int_a^b x(t)\,\delta(t-t_0)\,dt=x(t_0)$

$k\pi+\frac{\pi}{2}$ 落在 $[-2\pi,2\pi]$ 内的点，$-\frac{3}{2}\pi$，$-\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}$，$\frac{3}{2}\pi$

$\therefore$ 原式 $=1-\frac{3}{2}\pi+1-\frac{\pi}{2}+1+\frac{\pi}{2}+1+\frac{3}{2}\pi=4$．

另一个表达式　$\lim_{w\to+\infty}\frac{\sin(wt)}{\pi t}=\delta(t)$

卷积和LTI系统的性质

① 交换律：　$x(t)*h(t)=h(t)*x(t)$

$x[n]*h[n]=h[n]*x[n]$

证明：$\because x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$

令 $\tau'=t-\tau$．　$\therefore$ 原式 $=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t-\tau')\,h(\tau')\,d\tau'$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau=h(t)*x(t)$

② 结合律：　$[x(t)*h_1(t)]*h_2(t)=[x(t)*h_2(t)]*h_1(t)$

$[x[n]*h_1[n]]*h_2[n]=[x[n]*h_2[n]]*h_1[n]$

证明：

系统1：$\underset{x(t)}{\delta(t)}\rightarrow\boxed{h_1(t)}\xrightarrow[x(t)*h_1(t)]{h_1(t)}\boxed{h_2(t)}\rightarrow\underset{y(t)}{h_1(t)*h_2(t)}$

系统2：$\underset{x(t)}{\delta(t)}\rightarrow\boxed{h_2(t)}\xrightarrow[x(t)*h_2(t)]{h_2(t)}\boxed{h_1(t)}\rightarrow\underset{y(t)}{h_2(t)*h_1(t)}$

要证系统1 = 系统2，即证它们对于相同的 $\delta(t)$ 输出相同．

又由交换律，$h_1(t)*h_2(t)=h_2(t)*h_1(t)$　$\therefore$ 结合律成立．

性质3：$x(t)\delta(t)=x(0)\delta(t)$，更一般的结论：$x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$

证明：$\int_{-\infty}^{+\infty}\underline{y(t)x(t)\delta(t-t_0)}\,dt=x(t_0)y(t_0)$ （利用性质2）

$\int_{-\infty}^{+\infty}y(t)x(t_0)\delta(t)\,dt=x(t_0)\int_{-\infty}^{+\infty}y(t)\delta(t)\,dt=x(t_0)y(t_0)$

∴ 左边=右边，$x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$

性质4：$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$，更一般的结论：$\delta(at+b)=\frac{1}{|a|}\delta(t+\frac{b}{a})$

证：设 $t'=at+b$ ∴ $t=\frac{t'-b}{a}$，$dt=\frac{1}{a}dt'$

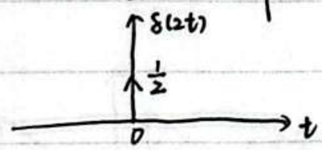
① 当 $a>0$ 时，左边 $=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}y(\frac{t'-b}{a})\delta(t')\,dt'=\frac{1}{a}y(-\frac{b}{a})$

右边 $=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}y(t)\delta(t+\frac{b}{a})=\frac{1}{a}y(-\frac{b}{a})$.

② 当 $a<0$ 时，左边 $=-\frac{1}{a}y(-\frac{b}{a})=\frac{1}{|a|}y(-\frac{b}{a})$

例题：请绘制 $\delta(2t)$ 的图象.

解：$\delta(2t)=\frac{1}{2}\delta(t)$，如下：



性质5（补充）：$\delta(f(t))=\sum_{\text{所有}t_0\text{使}f(t_0)=0}\frac{1}{|f'(t_0)|}\delta(t-t_0)$

① 性质4是5的特例：

设 $f(t)=at$，当且仅当 $t_0=0$ 时，$f(t_0)=0$

而 $f'(t)=a$ ∴ $f'(t_0)=a$

∴ $\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$

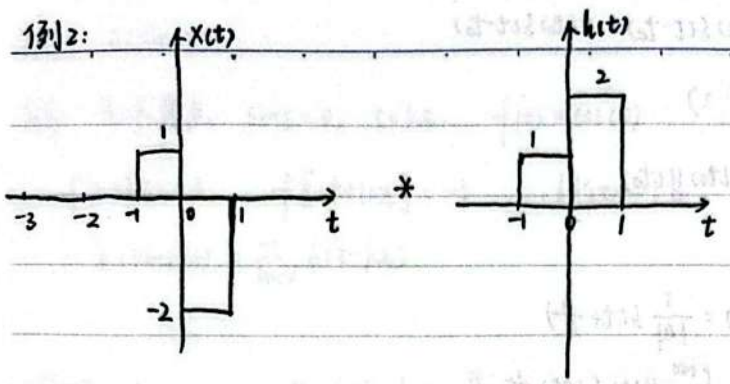
例1：$\delta(t^2+3t+2)$.

解：$t_1=-1$，$t_2=-2$，$f'(t)=2t+3$

$f'(t_1)=1$，$f'(t_2)=-1$

∴ $\delta(t^2+3t+2)=\delta(t+1)+\delta(t+2)$

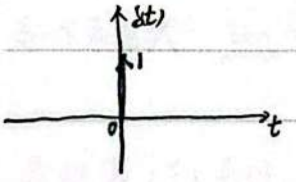
例2：



解：边界是 −2, 2，特殊点：t=1, 2

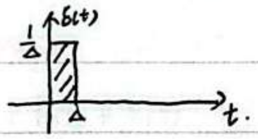
[δ(t)函数的性质]

性质1：$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,dt=1$



证明：$\delta(t)=\lim_{\Delta\to0}\delta_\Delta(t)$

已知，$\delta_\Delta(t)$：



$\therefore \lim_{\Delta\to0}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_\Delta(t)\,dt$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{\Delta\to0}\delta_\Delta(t)\,dt=1.$

→更一般的结论：

$$\int_a^b\delta(t)\,dt=\begin{cases}1, & 若a<0,\ b>0\\ -1, & 若a>0,\ b<0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

性质2：$\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\delta(t)\,dt=x(0)$，更一般的结论是 $\int_a^b x(t)\delta(t-t_0)\,dt=\begin{cases}x(t_0), & 当a<t_0且b>t_0\\ -x(t_0), & 当a>t_0且b<t_0.\\ 0\end{cases}$

证明：原式左边 $=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\left[\lim_{\Delta\to0}\delta_\Delta(t)\right]dt$

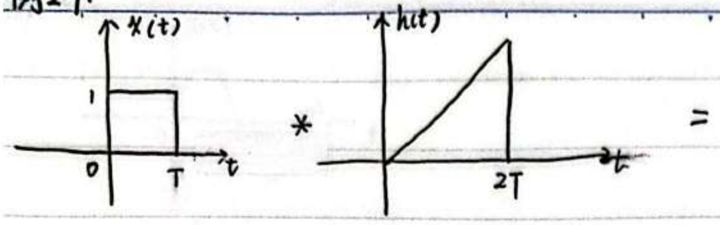
$=\lim_{\Delta\to0}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\frac{1}{\Delta}\,dt$

$=\lim_{\Delta\to0}\frac{1}{\Delta}\int_0^{\Delta}x(t)\,dt=\lim_{\Delta\to0}\frac{1}{\Delta}x(\xi)\cdot\Delta\quad(0\le\xi\le\Delta)$ （积分中值定理）

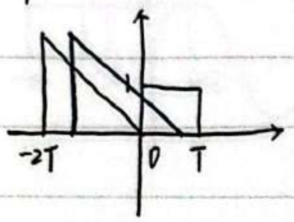
$=\lim_{\Delta\to0}x(\xi)\quad(0\le\xi\le\Delta)$

$=x(0)$

例2-7:



解：坐标范围：0→3T

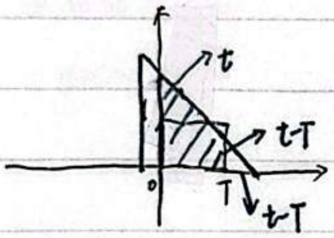


① 当 $0<t<T$ 时，$y(t)=\frac{1}{2}t^2$

检查：边界条件，

$t=T$ 时：① $y=\frac{1}{2}T^2$

② $y=\frac{1}{2}T^2$



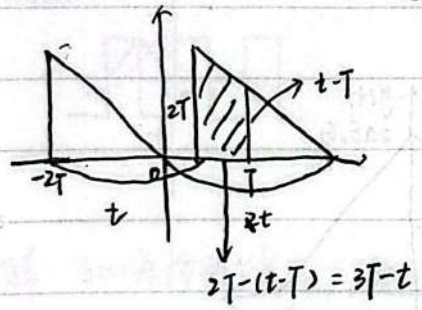
② 当 $T<t<2T$ 时，

$y(t)=\frac{1}{2}(t-T+t)\cdot T$

$=\frac{1}{2}(2t-T)\cdot T$

$t=2T$ 时：② $y=\frac{3}{2}T^2$

③ $y=\frac{3}{2}T^2$

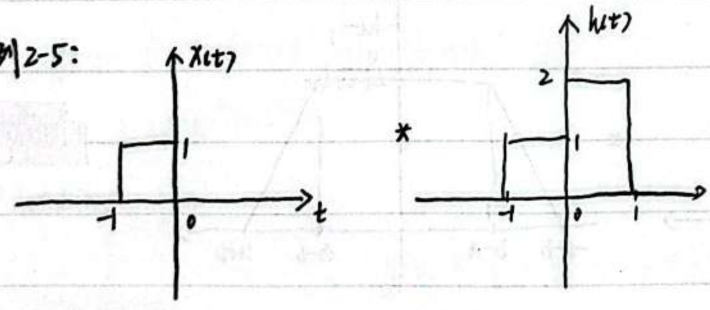


③ 当 $2T<t<3T$ 时

$y(t)=\frac{1}{2}(t+T)(3T-t)$

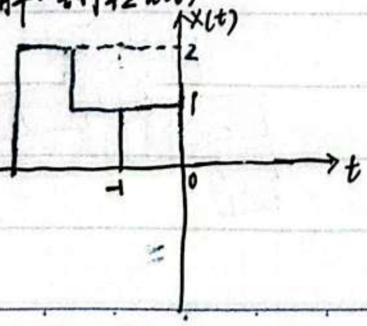
(或用减法来求)

例2-5:



tips: 方波卷积：核心即连接直线即可

解：要翻转 h(t)



边界：-2, 1

$t=-1$ 时，$y(t)=t\to1$

一道很经典的问题→

若 $x(t)=e^{-bt}u(t)$, $h(t)=e^{-at}u(t)$, 其中 $a,b>0$.

请计算: $y(t)=x(t)*h(t)$

解: 代公式, $y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$.

分类讨论:

① 当 $t<0$ 时, 此时 $x(t)=0$. $h(t)=0$

② 当 $t>0$ 时, 代入, $y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-b\tau}\cdot e^{-a(t-\tau)}d\tau$

$$=e^{-at}\cdot\int_0^{\tau}e^{(a-b)\tau}d\tau.$$

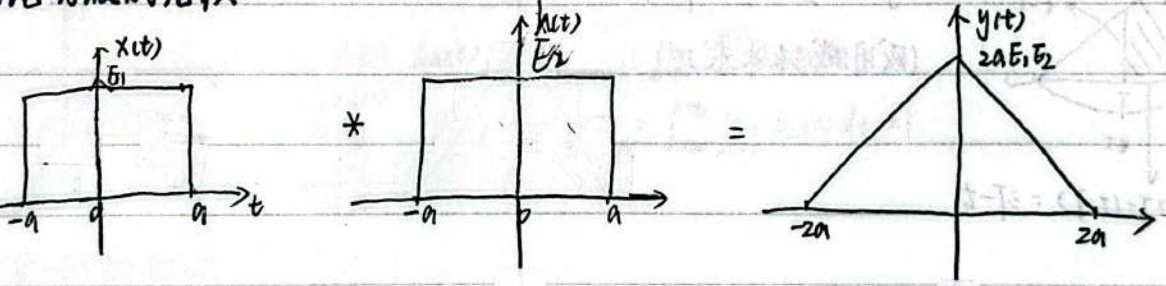
下面对 a.b 进行分类讨论:

I. 若 $a=b$, 则 $y(t)=te^{-at}$.

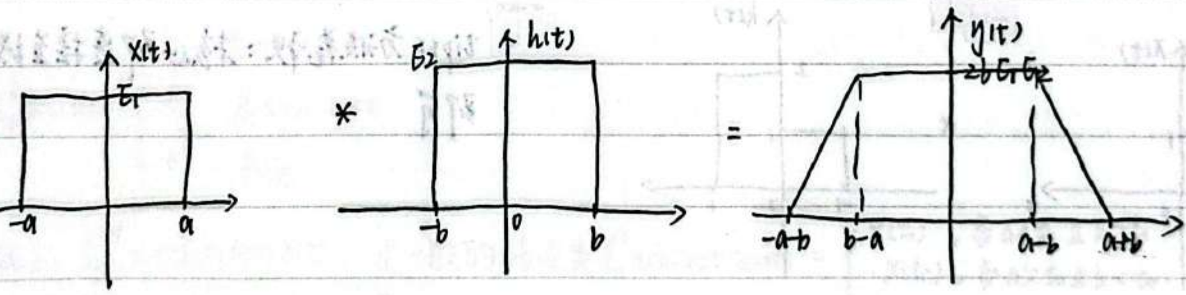
II. 若 $a\neq b$, 则 $y(t)=e^{-at}\cdot\frac{e^{(a-b)t}}{a-b}=$

推论: 方波的卷积

1.



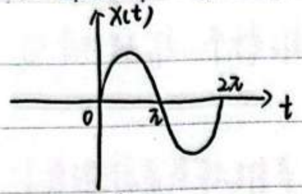
2.

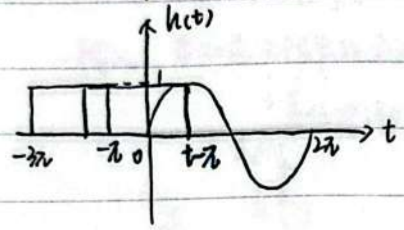


No.

Date

计算分界点：π, 3π, 5π. 分类讨论：





① 若 $\pi<t<3\pi$

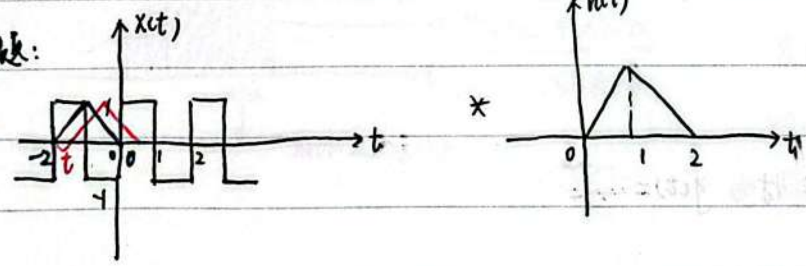
$\therefore y(t)=\int_0^{t-\pi}\sin\tau\,d\tau.$

$=1-\cos(t-\pi)$

② 若 $3\pi<t<5\pi$.

$y(t)=$

例题：



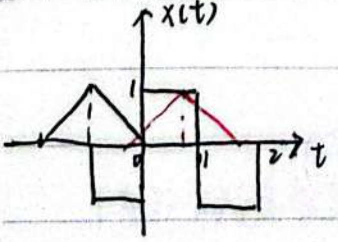
解：h(t)每移两个单位，所得的结果是一样的

① $0<t<1$

$y(t)=\frac{1}{2}(1-t)^2+\frac{1}{2}t^2-\left[1-\frac{1}{2}(1-t)^2-\frac{1}{2}t^2\right]$

$=(1-t)^2+t^2-1$

② $1<t<2$.



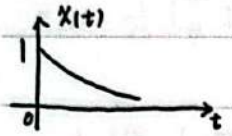
$y(t)=-\left[(2-t)^2+\ \ (t-1)^2-1\right]$

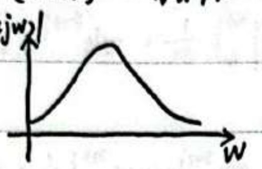
$=-4-2t^2+6t.$

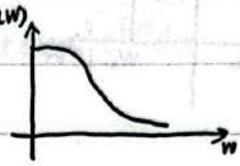
y(t) 是周期函数，T=2.

$X(jw)=\frac{1}{a+jw}=\frac{a-jw}{a^2+w^2}=\frac{a}{a^2+w^2}-j\cdot\frac{w}{a^2+w^2}$

$\therefore |X(jw)|=\sqrt{\frac{a^2}{(a^2+w^2)^2}+\frac{w^2}{(a^2+w^2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+w^2}}$, $\varphi=-\arctan(\frac{w}{a})$

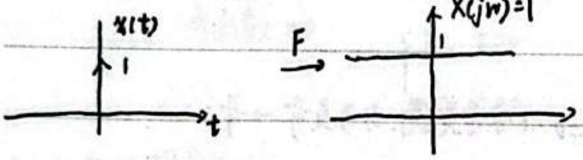






2. $\delta(t)\xrightarrow{F}1$

推导: $X(jw)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-jwt}dt=1$



3. $1\xrightarrow{F}2\pi\delta(w)$ ☆ 经常在推导中卡住的点

推导:

① 利用傅立叶反变换 ($x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(jw)e^{jwt}dt$):

$\therefore x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}2\pi\delta(w)e^{jwt}dt=1$ (筛选公式: $\int_{-\infty}^{+\infty}x(w)\delta(w)dw=x(0)$)

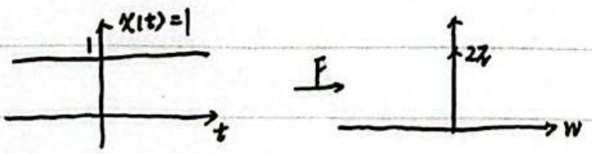
② 傅立叶变换:

$X(jw)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-jwt}dt=\frac{1}{-jw}\cdot[e^{-jwt}]_{-\infty}^{+\infty}=\frac{1}{-jw}\lim_{t\to+\infty}[e^{-jwt}-e^{jwt}]=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{jwt}-e^{-jwt}}{jw}$

$\because \frac{e^{jwt}-e^{-jwt}}{2j}=\sin(wt)$ $\therefore$ 原式 $=\lim_{t\to+\infty}\frac{2\sin(wt)}{w}$

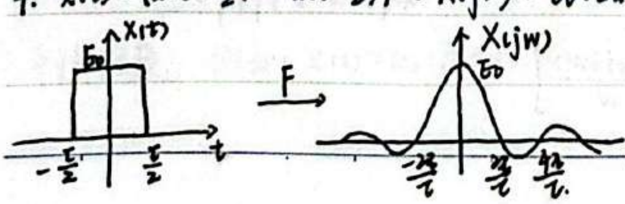
又 $\because \lim_{w\to+\infty}\frac{\sin(wt)}{\pi t}=\delta(t)$ $\therefore$ 把这里的 t 和 w 互换,

$\therefore \lim_{t\to+\infty}\frac{\sin(wt)}{\pi w}=\delta(w)$ $\therefore \lim_{t\to+\infty}\frac{2\sin(wt)}{w}=2\pi\delta(w)$



$\frac{e^{jw\cdot\frac{\tau}{2}}-e^{-jw\cdot\frac{\tau}{2}}}{2j}=\sin(\frac{\tau}{2}w)$

4. $x(t)=E_0(u(t+\frac{\tau}{2})-u(t-\frac{\tau}{2}))\xrightarrow{F}X(jw)=E_0\tau Sa(\frac{\tau}{2}w)$



推导: $X(jw)=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}E_0e^{-jwt}dt=\frac{E_0}{-jw}[e^{-jwt}]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}$

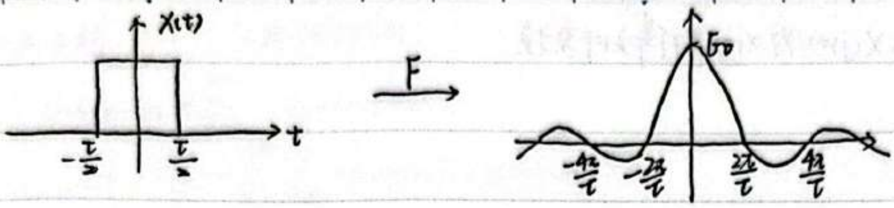
$=-\frac{E_0}{jw}(e^{-jw\cdot\frac{\tau}{2}}-e^{jw\cdot\frac{\tau}{2}})=\frac{2E_0}{w}\sin(\frac{\tau}{2}w)=E_0\frac{2}{w\tau}\sin(\frac{\tau}{2}w)$

$=E_0\tau Sa(\frac{\tau}{2}w)$

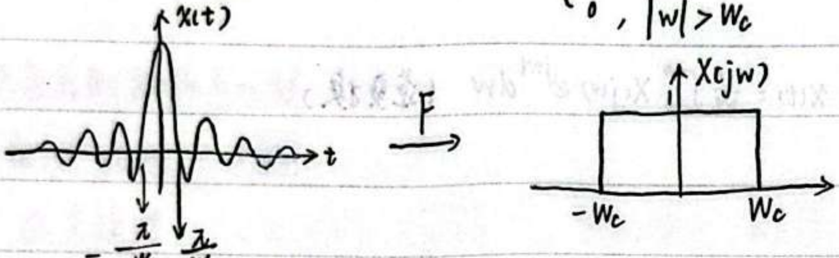
No.

Date

4 方波：$x(t)=u(t+\frac{\tau}{2})-u(t-\frac{\tau}{2}) \xrightarrow{F} X(jw)=E_0\tau Sa(\frac{\tau}{2}w)$



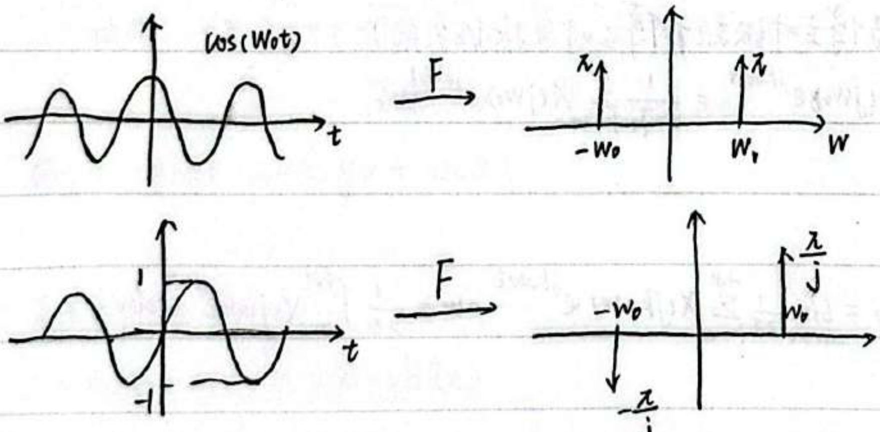
5 $x(t)=\frac{\sin(W_c t)}{\pi t} \xrightarrow{F} X(jw)=\begin{cases}1, & |w|<W_c\\ 0, & |w|>W_c\end{cases}$



6 $u(t) \xrightarrow{F} \frac{1}{jw}+\pi\delta(w)$

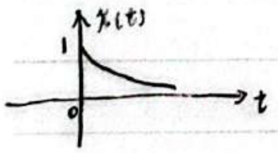
7 $\cos(W_0t) \xrightarrow{F} \pi[\delta(W-W_0)+\delta(W+W_0)]$

$\sin(W_0t) \xrightarrow{F} \frac{\pi}{j}[\delta(W-W_0)+\delta(W+W_0)]$



对上述傅立叶变换对的解释和证明：

1. $x(t)=e^{-at}u(t) \xrightarrow{F} X(jw)=\frac{1}{a+jw}\ (a>0)$



$X(jw)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-jwt}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-at}e^{-jwt}u(t)dt=\int_0^{+\infty}e^{-at}e^{-jwt}dt=-\frac{1}{a+jw}\left[e^{-(a+jw)t}\right]_0^{+\infty}$

$=\frac{1}{a+jw}$ （当且仅当 $a>0$）

No.

Date

傅立叶变换：

$X(jw)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-jwt}dt$ ，称 $X(jw)$ 为 $x(t)$ 的傅立叶变换

$x(t)\xrightarrow{F}X(jw)$

$F[x(t)]=X(jw)$

$F^{-1}[X(jw)]=x(t)$

傅立叶反变换公式

已知 $X(jw)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-jwt}dt$ ，求证 $x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(jw)e^{jwt}dw$ （逆变换）

方法1：从傅立叶级数推导傅立叶变换

（Tips：若 $x(t)$ 是非周期的，则它没有傅立叶级数，但 $x(t)$ 可看作 $T_0\to+\infty$ 的周期信号）

由 $a_k=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}x(t)e^{-jkw_0t}dt \Rightarrow T_0a_k=\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}x(t)e^{-jkw_0t}$

若 $T_0\to+\infty$，则有 $X(jkw_0)=T_0a_k=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-jkw_0t}$

若设 $X(jw)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-jwt}dt$ 　　则有 $a_k=\frac{1}{T_0}X(jw)$

（建立了傅立叶级数和傅立叶变换的关系）

$\because x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_ke^{jkw_0t}=\frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(jkw_0)e^{jkw_0t}=\frac{1}{w_0T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(jkw_0)e^{jkw_0t}w_0$

$\because w_0T_0=2\pi$

$\therefore x(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(jkw_0)e^{jkw_0t}w_0$

在上式中令 $w_0=\Delta w\to 0$ 　$\therefore x(t)=\lim_{\Delta w\to 0}\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(jk\Delta w)e^{jk\Delta wt}\cdot\Delta w=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(jw)e^{jwt}dw$

方法2：利用冲激函数 $\delta(t)$ ...

典型傅里叶变换对 →

1 $e^{-at}u(t)\xrightarrow{F}\frac{1}{a+jw}$ $(a>0)$

2 $\delta(t)\xrightarrow{F}1$

3 $1\xrightarrow{F}2\pi\delta(w)$

No.

Date

又由 $x(t)=a_0+\underbrace{a_1e^{jW_0t}+a_{-1}e^{-jW_0t}}_{2a_1\cos(W_0t)}+\underbrace{a_2e^{j2W_0t}+a_{-2}e^{-j2W_0t}}_{2a_2\cos(2W_0t)}+\cdots$

当 $a_k=a_{-k}$ 时，

$$\therefore x(t)=a_0+\sum_{k=1}^{+\infty}2a_k\cos(kW_0t)$$

$$=\frac{2T_1}{T}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2}{k\pi}\sin(kW_0T_1)\cos(kW_0t)$$

Matlab: $x_N(t)=\frac{2T_1}{T}+\sum_{k=1}^{N}\frac{2}{k\pi}\sin(kW_0T_1)\cos(kW_0t)$

正交基函数的信号分解：

1. 定义：内积 $\langle\cdot\rangle$

① 交换律，$\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$ 　共轭定义：$\overline{a+jb}=a-jb$

② 齐次性，$\langle\lambda x,y\rangle=\lambda\langle x,y\rangle$

③ 叠加性，$\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$

④ 非负性，$\langle x,x\rangle\geq0$，且 $\langle x,x\rangle=0$ 当且仅当 $x=0$ 时成立

2. 定理：

① $\langle x,\lambda y\rangle=\bar{\lambda}\langle y,x\rangle$

证明：$\langle x,\lambda y\rangle=\underbrace{\overline{\langle\lambda y,x\rangle}=\bar{\lambda}\,\overline{\langle y,x\rangle}}_{\text{复数共轭性质，}\overline{ab}=\bar{a}\bar{b}}=\bar{\lambda}\langle x,y\rangle$

② $\langle x,y+z\rangle=\langle x,y\rangle+\langle x,z\rangle$

3. 正交基函数定义：

$\langle e_k,e_l\rangle=0$：正交基（函数）

例如：定义正交运算 $\langle x(t),y(t)\rangle=\int_{T_0}x(t)\overline{y(t)}\,dt$，其中 $W_0=\frac{2\pi}{T_0}$，

则 $\{1,\cos(W_0t),\cos(2W_0t),\cdots\sin(W_0t),\sin(2W_0t)\cdots\}$ 是在该运算符下的正交基

$\{e^{jkW_0t}\}_{k=1\sim+\infty}$ 也是.（证：$\langle e^{jkW_0t},e^{jlW_0t}\rangle=\int_{T_0}e^{j(k-l)W_0t}dt=0$）

△若 $y(t)$ 是实函数，$\overline{y(t)}=y(t)$，此时 $\langle x(t),y(t)\rangle=\int_{T_0}x(t)\overline{y(t)}\,dt=\int_{T_0}x(t)y(t)\,dt$

综上所述，x(t)的复数形式为 ☆

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jkw_0 t} \\ a_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, e^{-jkw_0 t}\, dt \end{cases}$$

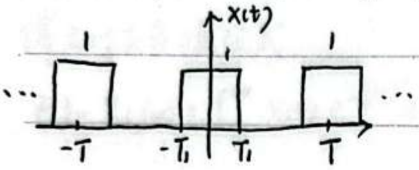
其中：$w_0 = \frac{2\pi}{T_0}$，为周期信号x(t)的基频

对比三角形式：

$$x(t) = B_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} B_k \cos(kw_0 t) + \sum_{k=1}^{+\infty} C_k \sin(kw_0 t)$$

$$\begin{cases} B_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\,dt \\ B_k = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} x(t)\cos(kw_0 t)\,dt \\ C_k = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} x(t)\sin(kw_0 t)\,dt \end{cases}$$

例：周期方波信号；求傅立叶级数



解：三角形式：

$$B_0 = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} 1\,dt = \frac{2T_1}{T}$$

$$B_k = \frac{2}{T}\int_{-T_1}^{T_1} 1\cdot\cos(kw_0 t)\,dt = \frac{2}{T}\frac{1}{kw_0}\left[\sin kw_0 t\right]_{-T_1}^{T_1}$$

$\because w_0 T = 2\pi \quad \therefore \frac{2}{T}\cdot\frac{1}{kw_0} = \frac{2}{k\cdot 2\pi} = \frac{1}{\pi k}$

又$\because \sin(kw_0T_1) - \sin[kw_0(-T_1)] = 2\sin(kw_0T_1)$

$\therefore B_k = \frac{2}{\pi k}\sin(kw_0T_1)$

$C_k = \frac{2}{T}\int_{-T_1}^{T_1} 1\cdot\sin(kw_0 t)\,dt \quad \because \sin(kw_0t)$是奇函数 $\therefore$积分是零 $\Rightarrow C_k = 0$

$\therefore x(t) = \frac{2T_1}{T} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2}{k\pi}\sin(kw_0T_1)\cos(kw_0 t)$

复数形式：

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} e^{-jkw_0 t}\,dt = \frac{1}{T}\cdot\frac{1}{-jkw_0}\left[e^{-jkw_0 t}\right]_{-T_1}^{T_1} = \frac{1}{jkw_0T}\left(e^{jkw_0T_1} - e^{-jkw_0T_1}\right)$$

$= \frac{1}{jk2\pi}\left(e^{jkw_0T_1} - e^{-jkw_0T_1}\right) = \frac{1}{k\pi}\sin(kw_0T_1)$ （欧拉公式）

$\therefore x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{k\pi}\sin(kw_0T_1)\, e^{jkw_0 t}$

补充：证明上述两种形式的x(t)相同：

$a_0 = \lim_{k\to 0}\frac{1}{k\pi}\cdot\sin(kw_0T_1) = \frac{kw_0T_1}{k\pi} = \frac{2T_1}{T}$

或：$B_0=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx$

$B_k=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(W_0x)\,dx$

$C_k=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(W_0x)\,dx$

$W_0=\frac{2\pi}{L}$

傅立叶级数的收敛性：(略)

傅立叶级数的复数表示：

我们有 $x(t)=B_0+\sum_{k=1}^{+\infty}B_k\cos(kW_0t)+\sum_{k=1}^{+\infty}C_k\sin(kW_0t)$

$\because \cos(kW_0t)=\frac{e^{jkW_0t}+e^{-jkW_0t}}{2}$, $\sin(kW_0t)=\frac{e^{jkW_0t}-e^{-jkW_0t}}{2j}$

$\therefore x(t)=B_0+\sum_{k=1}^{+\infty}(\frac{B_k-jC_k}{2})e^{jkW_0t}+(\frac{B_k+jC_k}{2})e^{-jkW_0t}$

将第二项的k换成-k

$\therefore x(t)=B_0+\sum_{k=1}^{+\infty}(\frac{B_k-jC_k}{2})e^{jkW_0t}+\sum_{k=-\infty}^{-1}(\frac{B_{-k}+jC_{-k}}{2})e^{jkW_0t}$

假设 $a_0=B_0$, $a_k=\frac{B_k-jC_k}{2}$, $a_{-k}=\frac{B_k+jC_k}{2}$, $k>0$

$\therefore x(t)=a_0+\sum_{k=1}^{+\infty}a_ke^{jkW_0t}+\sum_{k=-\infty}^{-1}a_ke^{jkW_0t}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_ke^{jkW_0t}$

又由 $\begin{cases}B_0=a_0\\B_k=a_{-k}+a_k\\C_k=j(a_k-a_{-k})\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a_0=B_0\\a_k=\frac{1}{2}(B_k-jC_k)\\a_{-k}=\frac{1}{2}(B_k+jC_k)\end{cases}$

上述三式可进一步化简：

(1) $a_0=B_0=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}x(t)\,dt$

(2) $a_k=\frac{B_k-jC_k}{2}=\frac{1}{2}(\frac{2}{T_0}\cdot\int_0^{T_0}x(t)\cos(kW_0t)\,dt-j\frac{2}{T_0}\cdot\int_0^{T_0}x(t)\sin(kW_0t)\,dt)$

$=\frac{1}{T_0}\cdot\int_0^{T_0}x(t)[\cos(kW_0t)-j\sin(kW_0t)]\,dt=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}x(t)e^{-jkW_0t}dt$

(3) $a_{-k}=\frac{B_k+jC_k}{2}=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}x(t)e^{jkW_0t}dt$

$\therefore$ 综上，$a_k=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}x(t)e^{-jkW_0t}dt$

No.

Date

第三章 傅里叶级数与傅里叶变换

$w_0 = \frac{2\pi}{L}$

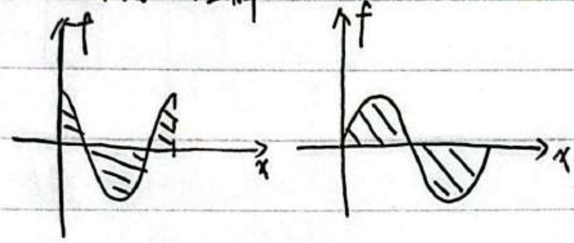
① $\int_0^L \cos(kw_0 x)\,dx = 0$

证明：左边 $= \int_0^L \cos(kw_0x)\,d(kw_0x)\cdot\frac{1}{kw_0}$

$= \left[-\sin(kw_0x)\right]_0^L\cdot\frac{1}{kw_0} = \frac{1}{kw_0}\cdot -\sin(kw_0L) = \frac{1}{kw_0}\cdot 0 = 0.$

② $\int_0^L \sin(kw_0x)\,dx$. 证明同理.

(①.② 从图象上理解：



③ $\int_0^L \cos(uw_0x)\cos(kw_0x)\,dx = 0.\ (u\neq k)$

证明：左边 $= \int_0^L \frac{1}{2}\{\cos[\underbrace{(u+k)w_0x}_{a}] + \cos[\underbrace{(u-k)w_0x}_{b}]\}\,dx$

又∵①中结论，且 $u+k$, $u-k \neq 0$ ∴两式积分均为0. 原式=0

④ $\int_0^L \sin(uw_0x)\sin(kw_0x)\,dx = 0.\ (u\neq k)$　　⑤ $\int_0^L \cos(uw_0x)\sin(kw_0x)\,dx = 0$

同理，都是积化和差.

⑥ $\int_0^L \cos^2(kw_0x)\,dx = \frac{L}{2}$

证明：$\cos^2(kw_0x) = \frac{1+\cos(2kw_0x)}{2}$

$\therefore$ 原式 $= \int_0^L \frac{1}{2}\,dx + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^L \cos(2kw_0x)\,dx}_{\text{由①的结论}} = \frac{L}{2} + 0 = \frac{L}{2}$

⑦ $\int_0^L \sin^2(kw_0x)\,dx = \frac{L}{2}$

⑧ $\int_0^L 1\,dx = L$

在这系列函数：

△取任意两个相乘再在0-L上积分即为0. → 正交的函数.

傅里叶级数：$f(x) = B_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} B_k\cos(kw_0x) + \sum_{k=1}^{+\infty} C_k\sin(kw_0x)$

计算 B_0, B_k, C_k：　$B_0 = \frac{w_0}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{w_0}} f(x)\,dx$　　$B_k = \frac{w_0}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{w_0}} f(x)\cos(kw_0x)\,dx$

$C_k = \frac{w_0}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{w_0}} f(x)\sin(kw_0x)\,dx$

No.

Date

即 $e^{jw_0t} \xrightarrow{LTI} H(jw_0)e^{jw_0t}$

③ 若 $x(t)=\sum_k a_k e^{s_k t}$ ， $x(t) \rightarrow \boxed{H(s)} \rightarrow y(t)$

那么 $y(t)=\sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t}$.

同理，若 $x(t)=\sum_k a_k e^{jw_k t}$ ， $x(t) \rightarrow \boxed{H(jw)} \rightarrow y(t)$

那么 $y(t)=\sum_k a_k H(jw_k) e^{jw_k t}$.

二. 离散情况下：

① 若定义 $H[z]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] z^{-n}$ （Z变换） $h[n] \xrightarrow{Z} H(z)$, $Z[h[n]]=H(z)$

则有 $a^n \rightarrow \boxed{H(z)} \rightarrow H(a)a^n$.

证明： $y[n]=a^n * h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] a^{n-k}=a^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] a^{-k}=H(a)a^n$

② 若定义 $H(e^{jw})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-jwn}$ 离散傅里叶变换， $h[n] \xrightarrow{F} H(e^{jw})$, $F(h[n])=H(e^{jw})$

则有 $e^{jw_0 n} \rightarrow \boxed{H(e^{jw})} \rightarrow H(e^{jw_0}) e^{jw_0 n}$

③ 若有 $x[n]=\sum_k a_k z_k^n$， $x[n] \rightarrow \boxed{H(z)} \rightarrow y[n]$

则有 $y[n]=\sum_k a_k H(z_k) z_k^n$

例3：一延时器系统, $y(t)=x(t-3)$.

(1) 求 $h(t)$ 和 $H(s)$

(2) 若 $x(t)=\cos(4t)+\cos(7t)$. 则 $y(t)=$?

解：(1) $h(t)=\delta(t-3)$. (物理意义

$H(s)$：代公式 ⇒

$H(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-3)e^{-st}dt=e^{-3s}$.

(利用性质：

$$\int_a^b x(t)\delta(t-t_0)dt=\begin{cases} x(t_0), & b>a \\ -x(t_0), & b<a \end{cases}$$

(2) 法一：直接代入

法二：利用 $x(t)=\sum_{k=1}^{n} a_k e^{s_k t} \rightarrow \boxed{H(s)} \rightarrow y(t)=\sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t}$

No.

Date

LTI系统稳定性:

· 充分必要条件: $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt<+\infty$ (连续情况), $\sum_{-\infty}^{+\infty}|h[k]|<+\infty$ (离散情况)

· 充分性: 由稳定性定义, 即证 $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt<+\infty \Rightarrow \forall t, |h(t)|<M$, 则 $\forall t, |y(t)|<N$

∴ 利用卷积定义, $|y(t)|=|x(t)*h(t)|=|\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau|$ (由绝对值不等式)

$$\le\int_{-\infty}^{+\infty}|x(\tau)||h(t-\tau)|d\tau \le M\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t-\tau)|d\tau<+\infty.$$

· 必要性: 若LTI系统稳定, 则 $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt<+\infty$.

证明: 由卷积交换率, $y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau$, $y(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)x(-\tau)d\tau$

设 $x(t)=\begin{cases}1, & 若 h(-\tau)\ge 0\\ -1, & 若 h(-\tau)<0\end{cases}$, 此时, $|x(t)|<1$, 是有界的

而又由 $|y(t)|<+\infty$ 取特殊的 $t=0$, $|y(0)|<+\infty$

即 $|\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)x(-\tau)d\tau|<+\infty$

· 一个稳定LTI系统的 冲激响应是一个稳定信号.

· 例子: ① $h(t)=e^{-at}u(t)$ 是稳定的

② $y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$ (积分器) 不稳定, ∵ $y(t)=x(t)*u(t)$, 而 $u(t)$ 是不稳定信号

③ $y(t)=tx(t)$ 有冲激响应 $h(t)=t\delta(t)\to 0$. 但它不是LTI系统, 无法据此判断.

LTI对复指数函数的响应.

一. 定义: $H(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)e^{-st}dt$. 拉普拉斯变换, 记作 $h(t)\xrightarrow{L}H(s)$. $L[h(t)]=H(s)$

那么有结论1:

① $e^{s_0t}\to\boxed{H(s)}\longrightarrow H(s_0)e^{s_0t}$

证明: $y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)e^{s_0(t-\tau)}d\tau$

$=e^{s_0t}\underline{\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)e^{-s_0\tau}d\tau}$ (由定义)

$=e^{s_0t}H(s_0)$

② 若定义 $H(jw)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)e^{-jwt}dt$, 即进行傅里叶变换, 记作 $h(t)\xrightarrow{F}H(jw)$, $F[h(t)]=H(jw)$

那么有 $e^{jw_0t}\to\boxed{H(jw)}\longrightarrow H(jw_0)e^{jw_0t}$

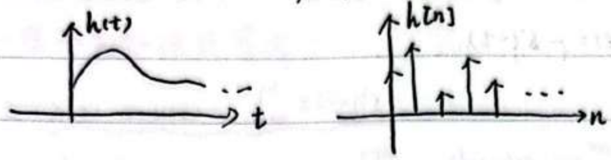
No.

Date

LTI 系统的因果性：

· 充分必要条件：

$h(t)=0$，当 $t<0$（连续）　$h[n]=0$，当 $n<0$.



证明：因果的充要条件：$\underline{y(t)\text{ 的左边}} \geq x(t)$ 的左边

$= x(t)$ 的左边 $+ h(t)$ 的左边

$\therefore h(t)$ 的左边 ≥ 0，$\therefore h(t)=0$，当 $t<0$.

定义：因果信号：$\begin{cases} h(t)=0, & \text{当 } t<0 \\ h[n]=0, & \text{当 } n<0 \end{cases}$

因果 LTI 系统冲激响应为因果信号.

推导: $te^{-at}u(t) \xrightarrow{F} j\cdot\frac{d[\frac{1}{a+jw}]}{dw} = j\cdot\left[-\frac{1}{(a+jw)^2}\right]\cdot j = \frac{1}{(a+jw)^2}$

$t^2e^{-at}u(t) \xrightarrow{F} j\cdot \frac{d[\frac{1}{(a+jw)^2}]}{dw} = \frac{2}{(a+jw)^3}$

⋮

∴ $t^n e^{-at}u(t) \xrightarrow{F} = \frac{n!}{(a+jw)^{n+1}}$

（解释：每次求导后都是 $-\frac{n!}{(a+jw)^{n+1}}\cdot j$

与外面的j相乘后，$(-j)\cdot j=1$ ）

(8) 卷积性质 → 时域卷积等于频域相乘

若 $x(t)\xrightarrow{F}X(jw)$. $h(t)\xrightarrow{F}H(jw)$. 则 $x(t)*h(t)\xrightarrow{F}X(jw)H(jw)$

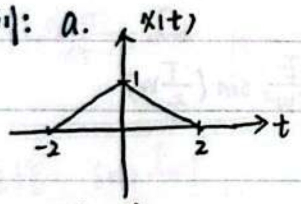
证明: $F[x(t)*h(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty}[x(t)*h(t)]e^{-jwt}dt$

代入卷积公式 $x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$，原式$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau\right]e^{-jwt}dt$

将e^{-jwt}拆成 $e^{-jw\tau}\cdot e^{-jw(t-\tau)}$，原式$=\left[\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-jwt}dt\right]\cdot\left[\int_{-\infty}^{+\infty}h(t-\tau)e^{-jw(t-\tau)}dt\right]$

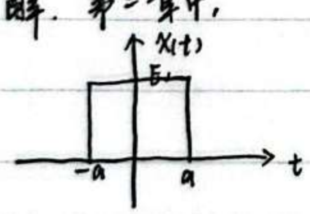
$= X(jw) \qquad H(jw)$

例: a.

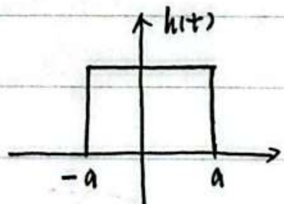


$\xrightarrow{F}$?

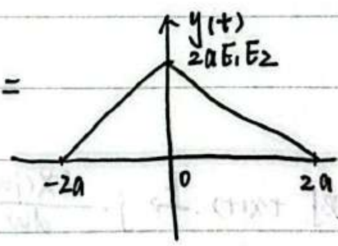
解. 第二章中,



$*$



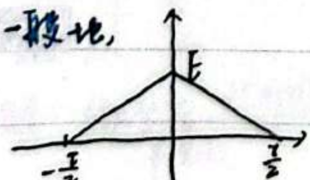
$=$

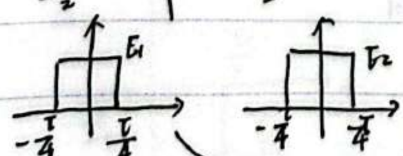


$a=1,\ E_1=\frac{1}{2},\ E_2=1\ ,\ t_0=2$

$x(t)\xrightarrow{F}Sa(w)\qquad h(t)\xrightarrow{F}2Sa(w)\qquad$ ∴ 原式 $=2Sa^2(w)=\frac{2\sin^2(w)}{w^2}$

一般地,

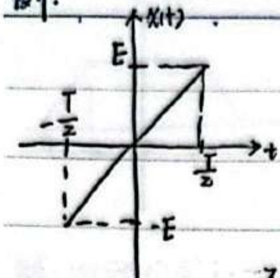




三角形面积

$\boxed{?}\,Sa(\frac{\tau}{4}w)\quad\cdot\quad Sa(\frac{\tau}{4}w)\quad=\frac{E\tau}{2}Sa(\frac{\tau}{4}w)$

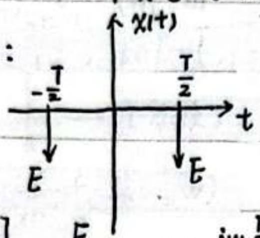
例:



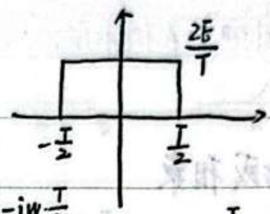
$\xrightarrow{F}$?

不要忽略了边界的两个δ(t)信号!

$\frac{d[x(t)]}{dt}$:



$+$



$\therefore \frac{d[x(t)]}{dt} \xrightarrow{F} -E(e^{jw\cdot\frac{T}{2}}+e^{-jw\cdot\frac{T}{2}}) + 2E\,Sa(\frac{T}{2}w)$

$= -2E\cos(\frac{T}{2}w) + 2E\,Sa(\frac{T}{2}w)$

$\therefore x(t) = \frac{2E}{jw}\cdot\left[\frac{\sin(\frac{T}{2}w)}{\frac{T}{2}w} - \cos(\frac{T}{2}w)\right] = \frac{4E}{jw^2}\sin(\frac{T}{2}w) - \frac{2E}{jw}\cos(\frac{T}{2}w)$

可以用公式法验证, $X(jw)=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\frac{2E}{T}te^{-jwt}dt = \frac{2E}{T}\cdot\frac{1}{-jw}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t\,d(e^{-jwt}) = \frac{2E}{T}\cdot\frac{j}{w}\left\{\left[te^{-jwt}\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} - \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}e^{-jwt}dt\right\}$

$=\frac{2E}{T}\cdot\frac{j}{w}\cdot\left[\frac{T}{2}e^{-jw\cdot\frac{T}{2}}+\frac{T}{2}e^{jw\cdot\frac{T}{2}}+\frac{1}{jw}(e^{-jw\cdot\frac{T}{2}}-e^{jw\cdot\frac{T}{2}})\right]$

$=\frac{2E}{T}\cdot\frac{j}{w}\left[\frac{T}{2}\cos(\frac{T}{2}w) - \frac{2}{w}\cdot\frac{1}{2j}\cdot(e^{jw\cdot\frac{T}{2}}-e^{-jw\cdot\frac{T}{2}})\right] = -\frac{2E}{jw}\cos(\frac{T}{2}w)+\frac{4E}{jw^2}\sin(\frac{T}{2}w)$

△ 实奇 → 虚奇

(7) 频域微分

若 $x(t) \xrightarrow{F} X(jw)$, 则 $tx(t) \xrightarrow{F} j\cdot\frac{dX(jw)}{dw}$

证明: $X(jw)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-jwt}dt$ ∴两边同时对w微分,

$\frac{dX(jw)}{dw}=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)(-jt)e^{-jwt}dt = -j\int_{-\infty}^{+\infty}tx(t)e^{-jwt}dt$. 两边同乘j

$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty}tx(t)e^{-jwt}dt = j\cdot\frac{dX(jw)}{dw}$, 即 $tx(t) \xrightarrow{F} j\frac{dX(jw)}{dw}$

例子: $e^{-at}u(t) \xrightarrow{F} \frac{1}{a+jw}$

$\therefore te^{-at}u(t) \xrightarrow{F} \frac{1}{(a+jw)^2}$ $\qquad t^ne^{-at}u(t) \xrightarrow{F} \frac{n!}{(a+jw)^{n+1}}$

$t^2e^{-at}u(t) \xrightarrow{F} \frac{2}{(a+jw)^3}$ $\quad \cdots$

$t^3e^{-at}u(t) \xrightarrow{F} \frac{6}{(a+jw)^4}$

No.

Date

发现 $x(t) = u(t) - u(-t)$

$\therefore$ 原式 $= \frac{2}{jw}$

补充：$X(jw) = Re[X(jw)] + j\,Im[X(jw)] = |X(jw)|e^{j\theta(w)}$

幅度谱：$|X(jw)| = \sqrt{(Re[X(jw)])^2 + (Im[X(jw)])^2}$

相位谱：$\theta(w) = \arctan\left(\frac{Im[X(jw)]}{Re[X(jw)]}\right)$

△定理：若 $x(t)$ 实函数，幅度谱偶函数，相位谱奇函数（由实部偶，虚部奇，易证）

△逆命题成立.

(6) 时域微分

若 $x(t) \xrightarrow{F} X(jw)$，则 $\frac{d\,x(t)}{dt} \xrightarrow{F} jwX(jw)$

证明：$\because x(t) \xrightarrow{F} X(jw)$，由傅立叶变换定义，$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(jw)e^{jwt}dw$

$\therefore \frac{d\,x(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi}\cdot jw\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} X(jw)e^{jwt}dw$

$\therefore \frac{d\,x(t)}{dt} \xrightarrow{F} jwX(jw)$

△约束条件：$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt = 0$ 时，才可用 $\frac{d[x(t)]}{dt}$ 推出 $x(t)$.

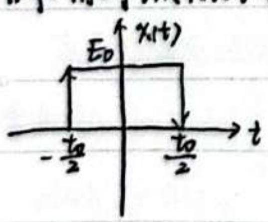
推论：$\delta(t) \xrightarrow{F} 1$

$\therefore \delta'(t) = \frac{d[\delta(t)]}{dt} \xrightarrow{F} jw$

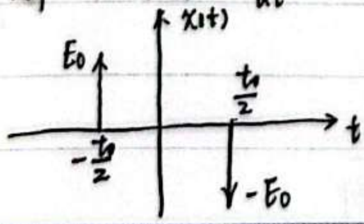
$\delta''(t) = \frac{d^2[\delta(t)]}{dt^2} \xrightarrow{F} (jw)^2 = -w^2$

$\delta^{(n)}(t) = \frac{d^n[\delta(t)]}{dt^n} \xrightarrow{F} (jw)^n$

例：用时域微分推方波傅立叶变换：



解：微分后 $\frac{d[x(t)]}{dt}$：



由于 $\delta(t) \xrightarrow{F} 1$ 由时域平移，$\frac{d[x(t)]}{dt} \xrightarrow{F} -E_0\cdot e^{-jw\cdot\frac{t_0}{2}} + E_0 e^{jw\cdot\frac{t_0}{2}}$

$\because \frac{e^{jw\cdot\frac{t_0}{2}} - e^{-jw\cdot\frac{t_0}{2}}}{2j} = \sin(\frac{1}{2}wt_0) \quad = E_0\cdot 2j\sin(\frac{wt_0}{2})$

$\therefore X(jw) = \frac{1}{jw}\cdot E_0\cdot 2j\sin\left(\frac{wt_0}{2}\right) = \frac{2E_0\sin(\frac{t_0}{2}w)}{w} = E_0t_0\,Sa(\frac{t_0}{2}w)$

Campus

例：证明 $x(t)=e^{-a|t|}\xrightarrow{F}X(jw)=\frac{2a}{a^2+w^2}\ (a>0)$ （双边指数信号）

解：原先我们有 $e^{-at}u(t)\xrightarrow{F}\frac{1}{a+jw}=\frac{a-jw}{a^2+w^2}$ 实部：$\frac{a}{a^2+w^2}$，虚部：$\frac{-jw}{a^2+w^2}$

↓偶 ↓奇

$\therefore \frac{x(t)+x(-t)}{2}\xrightarrow{F}Re\{X(jw)\}=\frac{a}{a^2+w^2}$

$\therefore \frac{e^{-at}u(t)+e^{at}u(-t)}{2}\xrightarrow{F}\frac{a}{a^2+w^2}$

分子：$e^{-at}u(t)+e^{at}u(-t)=e^{-a|t|}$

$\therefore e^{-a|t|}\xrightarrow{F}\frac{2a}{a^2+w^2}$

例：若实信号 $x(t)$ 满足：

(1) $x(t)$ 是因果信号，即 $t<0$ 时 $x(t)=0$；

(2) $x(t)$ 傅立叶变换 $X(jw)$ 实部 $Re\{X(jw)\}=\frac{1}{1+w^2}$

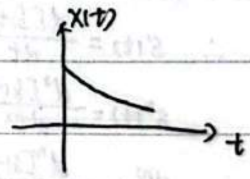
求 $x(t)$.

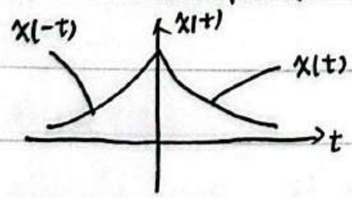
(1)解：$\frac{x(t)+x(-t)}{2}\xrightarrow{F}Re\{X(jw)\}=\frac{1}{1+w^2}$

$=\frac{1}{2}e^{-|t|}$

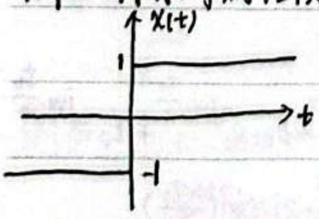
$\therefore x(t)+x(-t)=e^{-|t|}$

又∵ $x(t)$ 为因果信号，$t>0$ 时有值 $\therefore x(t)=e^{-t}u(t)$





例2：利用[奇偶性质]答：



$\xrightarrow{F}$?

解：$\because u(t)\xrightarrow{F}\frac{1}{jw}+\pi\delta(w)\Rightarrow \underbrace{\frac{u(t)+u(-t)}{2}}_{(偶)}+\underbrace{\frac{u(t)-u(-t)}{2}}_{(奇)}\xrightarrow{F}\underbrace{\pi\delta(w)}_{实部}+\underbrace{\frac{1}{jw}}_{虚部}$

No.

Date

(5) 共轭性和共轭对称性

若 $x(t) \xrightarrow{F} X(jw)$，那么 $x^*(t) \xrightarrow{F} X^*(-jw)$

证明：$F[x^*(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{-jwt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t)e^{jwt}]^* dt = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{jwt} dt\right]^* = [X(-jw)]^* = X^*(-jw)$

请注意：若 $x(t)$ 是实函数，那么 $x(t) = x^*(t)$，∴ 有 $X(jw) = X^*(-jw)$.

反之亦成立

△推论：

实偶 $\xrightarrow{F}$ 实偶 ①

实奇 $\xrightarrow{F}$ 虚奇 ②

反之亦成立!!

(tips: 实数：$a = a^*$，纯虚：$a = -a^*$)

△证明：

① $x(t) = x^*(t)$ ，$F\downarrow$ 得 $X(jw)$，$\downarrow F$ 得 $X^*(-jw)$

又由 $x^*(t)$ 偶 ⇒ $X^*(jw)$ 偶

∴ $X^*(jw) = X^*(-jw) = X(jw)$，证成

② $x(t) = x^*(t)$ ，$F\downarrow$ 得 $X(jw)$，$\downarrow F$ 得 $X^*(-jw)$

又由 $x^*(t)$ 奇 ⇒ $X^*(jw)$ 奇

∴ $X(jw) = X^*(-jw) = -X^*(jw)$

∴ $X(jw)$ 是纯虚数（形如 $a+jwb$ 形式中，$a=0$）

反之证明类似.

补充定理：

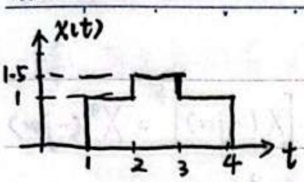
若 $x(t)$ 是实函数，设 $X(jw) = Re\{X(jw)\} + j\,Im\{X(jw)\}$，那么 $Re\{X(jw)\}$ 是偶函数，$Im\{X(jw)\}$ 是奇函数.

证明：$x(t) = \underbrace{\frac{x(t)+x(-t)}{2}}_{\text{偶信号：实偶}} + \underbrace{\frac{x(t)-x(-t)}{2}}_{\text{奇信号：实奇}} = Re\{X(jw)\} + Im\{X(jw)\}$

实偶 $\downarrow$ 实偶　　实奇 $\downarrow$ 虚奇

故：偶，奇

(d)



$\xrightarrow{F}$?

$3Sa(1.5w)\cdot e^{-2.5jw} + 0.5Sa(0.5w)e^{-2.5jw}$

$=[3Sa(1.5w)+0.5Sa(0.5w)]e^{-2.5jw}$

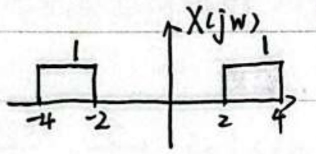
(3) 频移性质:

若 $x(t)\xrightarrow{F}X(jw)$，则 $x(t)e^{jw_0t}\xrightarrow{F}X(j(w-w_0))$

证明: $X(jw)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{jw_0t}\cdot e^{-jwt}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{j(w_0-w)t}dt=X(j(w_0-w))$

例:

? $\xrightarrow{F}$



(4) 时域扩展

若 $x(t)\xrightarrow{F}X(jw)$，则 $x(at)\xrightarrow{F}\frac{1}{|a|}X(jw)$

推导: 令 $t'=at$ ① 若 $a>0$

$\therefore X(jw)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(at)e^{-jwt}dt=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t')e^{-j\frac{w}{a}t'}dt'=\frac{1}{a}X(j\frac{w}{a})$

② 若 $a<0$，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt=\frac{1}{a}\int_{+\infty}^{-\infty}f(t')dt'=-\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t')dt'$

$\therefore X(jw)=-\frac{1}{a}X(j\frac{w}{a})$

综上, $F[x(at)]=\frac{1}{|a|}X(j\frac{w}{a})$

推论: 若 $x(t)\xrightarrow{F}X(jw)$，则 $x(-t)\xrightarrow{F}X(-jw)$

推导: (4)中结论当 $a=-1$ 时代入.

$\Rightarrow$ $x(t)$奇/偶 $\rightarrow$ $X(jw)$奇/偶. 即"奇对奇,偶对偶"

傅立叶变换的性质:

(1) 线性: 若 $x(t) \xrightarrow{F} X(jw)$, $y(t) \xrightarrow{F} Y(jw)$

则 $ax(t)+by(t) \xrightarrow{F} aX(jw)+bY(jw)$

→ 四种滤波器(略)

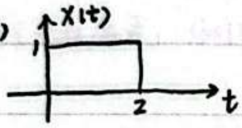
(2) 时域平移性质

若 $x(t) \xrightarrow{F} X(jw)$, 则 $x(t-t_0) \xrightarrow{F} e^{-jwt_0} X(jw)$

证: 令 $t'=t-t_0$,

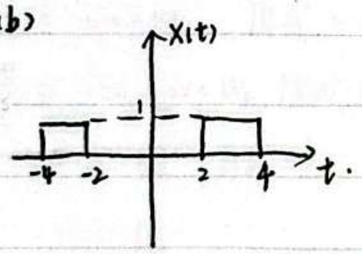
则 $F(x(t-t_0)) = F(x(t')) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{-jw(t'+t_0)} dt' = e^{-jwt_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{-jwt'} dt' = X(jw) e^{-jwt_0}$

例题:

(a) 

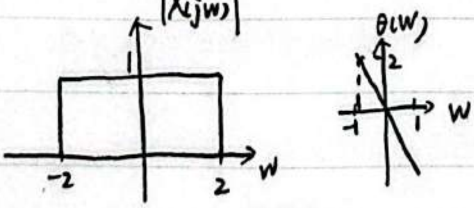
$\xrightarrow{F}$?

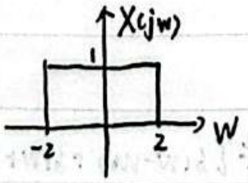
$: e^{-jw} \cdot 2Sa(w)$

(b) 

$\xrightarrow{F}$?

$e^{-3jw} \cdot 2Sa(w) + e^{3jw} \cdot 2Sa(w) = 4Sa(w)\cos(3w)$

(c) ? $\xrightarrow{F}$ 

解: $\because \frac{\sin(2t)}{\pi t} \xrightarrow{F}$ 

$\therefore \frac{\sin[2(t-2)]}{\pi(t-2)} \xrightarrow{F} e^{-2jw} X(jw)$ 相角 $\theta(w) = -2w$.

(频域上的线性相位往往对应时移)

6. $u(t) \xrightarrow{F} \frac{1}{jw} + \pi\delta(w)$

(a) 从 $X(jw)$ 推导 $x(t)$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(jw)e^{jwt}dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{jw}+\pi\delta(w)\right]e^{jwt}dw$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{jw}e^{jwt}dw + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\delta(w)e^{jwt}dw}_{=\frac{1}{2}\ \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(w)e^{jwt}dw = e^{0}=1\right)}$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(wt)}{w}dw}_{奇函数=0} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(wt)}{\pi w}dw}_{\begin{cases}\frac{1}{2}, & t>0\\ -\frac{1}{2}, & t<0\end{cases}} + \frac{1}{2}$$

$\therefore$ 原式 $=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$，即 $u(t)$

(b) 从 $x(t)$ 推导 $X(jw)$

$$X(jw) = \int_{-\infty}^{+\infty}u(t)e^{-jwt}dt = \int_{0}^{+\infty}e^{-jwt}dt = \frac{1}{-jw}\left[e^{-jwt}\right]_{0}^{+\infty} = \frac{1}{jw}\cdot\left(1-\lim_{t\to+\infty}e^{-jwt}\right)$$

$$= \frac{1}{jw} - \lim_{t\to+\infty}\frac{\cos(wt)-j\sin(wt)}{jw} = \frac{1}{jw} + \lim_{t\to+\infty}\frac{\sin(wt)}{w} - \lim_{t\to+\infty}\frac{\cos(wt)}{jw}$$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\sin(wt)}{w} = \pi\delta(w)$$

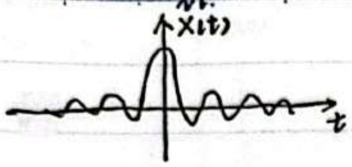
(Tips: 这是我们在傅立叶级数收敛性中证明,
$\lim_{w\to+\infty}\frac{\sin(wt)}{\pi t} = \delta(t)$)

下证 $\lim_{t\to+\infty}\frac{\cos(wt)}{w} = 0$

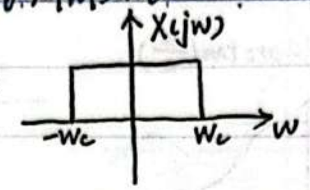
7. $\cos(w_0t) \xrightarrow{F} \pi[\delta(w-w_0)+\delta(w+w_0)]$ $\qquad$ $\sin(w_0t) \xrightarrow{F} \frac{\pi}{j}[\delta(w-w_0)+\delta(w+w_0)]$

平移性质: 例如: $x(t) = \cos(7t+\frac{\pi}{3}) \xrightarrow{F} X(jw) = \pi\left[e^{j\cdot\frac{\pi}{3}}\delta(w-7) + e^{-j\cdot\frac{\pi}{3}}\delta(w+7)\right]$

5. $x(t)=\frac{\sin(W_c t)}{\pi t} \xrightarrow{F} X(jw)=\begin{cases}1, & |w|<W_c\\ 0, & |w|>W_c\end{cases}$



$\xrightarrow{F}$



右→左.略.同4.

左→右 $X(jw)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(W_c t)}{\pi t}\cdot e^{-jwt}dt$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(W_c t)}{\pi t}\cdot(\cos(wt)-j\sin(wt))$ 欧拉公式

$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(W_c t)\cdot\cos(wt)}{\pi t}\boxed{-j\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(W_c t)\sin(wt)}{\pi t}}=0$.(分母是偶.分子是奇→奇)

对分母展开. $\sin(W_c t)\cos(wt)=\frac{1}{2}[\sin((W_c+w)t)+\sin((W_c-w)t)]$

∴原式 $=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(\frac{\sin(W_c+w)t}{t}+\frac{\sin(W_c-w)t}{t})dt$ 由第一章中证明公式, $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(W_0 t)}{t}\cdot dt=\begin{cases}\pi, & W_0>0\\ -\pi, & W_0<0\end{cases}$

(假设 $W_c>0$).

1. 当 $w<-W_c$. 原式 $=\frac{1}{2\pi}\times(\pi-\pi)=0$

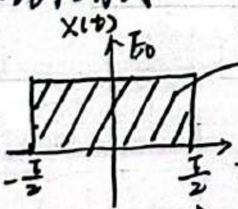
2. 当 $-W_c<w<W_c$ 原式 $=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi=1$

3. 当 $w>W_c$. 原式 $=0$

∴为方波

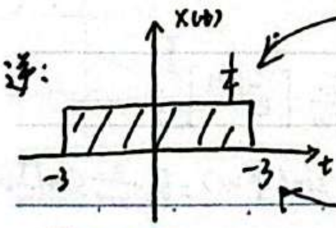
<记忆方式>

将方波面积作为Sa前系数

正: 

$\xrightarrow{F} X(jw)=E_0\tau Sa(\frac{\tau}{2}w)$

截止频率作w系数

逆: 

系数×$\frac{1}{2}$

(原理: 代入w=0即得)

$\xrightarrow{F} \frac{\sin(3w)}{3w}=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\sin(3w)}{w}\right]$

我们回顾傅立叶级数公式，与离散傅立叶变换有对偶性。

傅里叶级数：

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jkw_0 t} \\ a_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) e^{-jkw_0 t} dt \end{cases}$$

令 $T=2\pi$ $(W_0=1)$，有 $\begin{cases} x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{jnt} \\ a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} x(t) e^{-jnt} dt \end{cases}$

上述方程中，将 t 与 $-w$ 对调

$\therefore \begin{cases} x(-w) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{-jnw} \\ a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} x(-w) e^{jnw} dw \end{cases}$ 　　离散：$\begin{cases} X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jwn} \\ x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{jwn}) e^{jwn} dw \end{cases}$

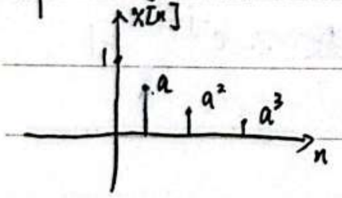
我们得到 $x(-w) \xleftrightarrow{\text{对偶}} X(e^{jw})$ 　　$a_n \xleftrightarrow{\text{对偶}} x[n]$

推导DFT：

1.（单边指数衰减信号）

$a^n u[n] \xrightarrow{F} \frac{1}{1-ae^{-jw}}$ 　$(|a|<1)$

解：$x[n]$：



$$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] e^{-jwn} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-jwn} = \sum_{n=0}^{+\infty} (ae^{-jw})^n \quad \text{等比数列求和}$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \frac{1-(ae^{-jw})^N}{1-ae^{-jw}} = \frac{1}{1-ae^{-jw}}$$

易知，由于 e^{-jw} 是以 2π 为周期的，依旧满足周期性。

若将 $X(e^{jw}) = |X(e^{jw})| e^{j\theta(w)}$，化简后有 $|X(e^{jw})| = \frac{1}{\sqrt{1+a^2-2a\cos(w)}}$，$\theta(w) = -\arctan\left[\frac{a\sin(w)}{1-a\cos(w)}\right]$

$|X(e^{jw})|$ 是幅度谱，$\theta(w)$ 是相位谱

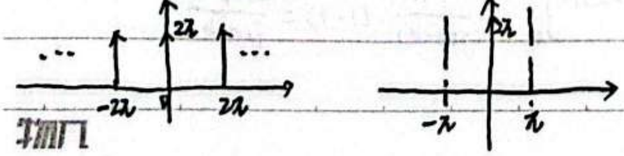
2. $\delta[n] \xrightarrow{F} 1$

解：$X(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] e^{-jwn} = 1\cdot e^{-jw\cdot 0} = 1$

（求和：以 2π 为周期，每个周期是一样的）

3. $1 \xrightarrow{F} 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(w-2k\pi)$

从右→左。



解：$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta(w) e^{jwn} dw$

由 $x(w)\delta(w) = x(0)\delta(w)$，$x[n] = \int_{-\pi}^{\pi} e^{jw\cdot 0}\delta(w) dw = 1$.

第四章 离散傅立叶变换

一.离散LTI系统对复指数的响应 → 定义

定义：$H(e^{jw})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h[n]e^{-jwn}$ （离散傅里叶变换）

记作 $h[n]\xrightarrow{F}H(e^{jw})$，$F[h[n]]=H(e^{jw})$　$F^{-1}[H(e^{jw})]=h[n]$

∴

$$e^{jw_0n}\longrightarrow\boxed{H(e^{jw})}\longrightarrow H(e^{jw_0})e^{jw_0n}$$

$$e^{jw_0n}\xrightarrow{LTI}H(e^{jw_0})e^{jw_0n}$$

对比连续和离散：

连续：$x(t)\xrightarrow{F}X(jw)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-jwt}dt$

离散：$x[n]\xrightarrow{F}X(e^{jw})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-jwn}$

注意区分记法，$F[x(t)]=X(jw)$，$F[x[n]]=X(e^{jw})$

二.离散傅立叶变换周期性

$X(e^{jw})$ 周期为 2π.

证明：∵ $X(e^{jw})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-jwn}$

$$X(e^{j(w+2k\pi)})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-j(w+2k\pi)n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-jwn}\cdot e^{-j\cdot 2kn\pi}$$　∵ k,n均为整数. ∴ $e^{-j\cdot 2kn\pi}=1$

三.离散傅里叶反变换

反变换方程：$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{jwn})e^{jwn}dw$

证明：利用定义：$X(e^{jw})=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]e^{-jwk}$

定义式代入右式，$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]e^{-jwk})e^{jwn}dw$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]\underline{\int_{2\pi}e^{jw(n-k)}dw}$$

① 当 $n=k$ 时　$\int_{2\pi}1dw=2\pi$

② 当 $n\neq k$ 时，$\int_{2\pi}e^{jw(n-k)}dw$　取 $0-2\pi$.

$$=\int_0^{2\pi}e^{j(n-k)w}dw=\frac{1}{j(n-k)}\cdot\left[e^{j(n-k)w}\right]_0^{2\pi}=\frac{1}{j(n-k)}\cdot(1-1)=\frac{1}{j(n-k)}$$

∴ 即证成了右式 $=\frac{1}{2\pi}\cdot x[n]\,2\pi=x[n]$

No.
Date

例: $g(t)=r(t)\cos(W_0t)$ (见讲义)

帕斯瓦尔定理: 若 $x(t)\xrightarrow{F}X(jw)$, 则 $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(jw)|^2dw$

证明: ∵ $\underline{\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt}=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\,\overline{x(t)}\,dt$.

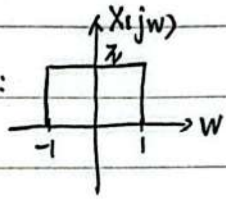
又∵ $\overline{x(t)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{[X(jw)e^{jwt}dw]}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{X(jw)}\,e^{-jwt}dw$

∴ $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{X(jw)}e^{-jwt}dw\right]dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{X(jw)}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-jwt}dt\right]dw$

$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{X(jw)}X(jw)dw=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(jw)|^2dw$

例题: 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\sin t}{t}\right]^2dt$

解: $x(t)=\frac{\sin t}{t}\xrightarrow{F}X(jw)$:



∴由上述定理,

$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\sin t}{t}\right]^2dt}_{\text{实函数}}$

周期信号的傅立叶变换:

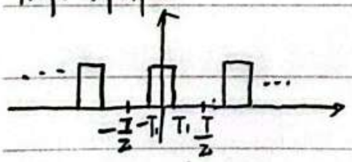
以T_0为周期的 $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_ke^{jkw_0t}$, 其中 $a_k=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}x(t)e^{-jkw_0t}dt$

又∵ $e^{jkw_0t}\xrightarrow{F}2\pi\delta(W-W_0)$

∴ $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_ke^{jkw_0t}\xrightarrow{F}X(jw)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k\delta(W-kW_0)$

∴周期信号的傅里叶变换是以W_0为间隔的冲激串函数

例: 计算:

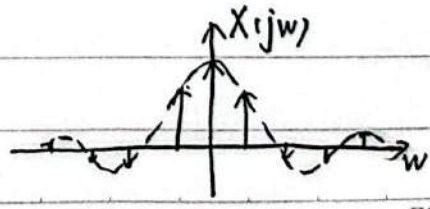


$\xrightarrow{F}$?

解: $a_k=\frac{1}{T}\int_{2T_1}x(t)e^{-jkW_0t}$. $W_0=\frac{2\pi}{T}$

方波变换: $X(jw)=2T_1Sa(kT_1W_0)=\frac{\sin(kW_0T_1)}{2\pi}$

∴ $X(jw)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k\delta(W-kW_0)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin(kW_0T_1)}{2\pi}\delta(W-kW_0)$



No.

Date

10. 调制性质

若 $x_1(t) \xrightarrow{F} X_1(jw)$，$x_2(t) \xrightarrow{F} X_2(jw)$，那么 $x_1(t)x_2(t) \xrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} X_1(jw) * X_2(jw)$

证明：对偶性，有 $X_1(jt) \xrightarrow{F} 2\pi x_1(-w)$，$X_2(jt) \xrightarrow{F} 2\pi x_2(-w)$

卷积性，$\underset{①}{x_1(t)} * \underset{②}{x_2(t)} \xrightarrow{F} X_1(jw)X_2(jw)$

上式利用对偶性，有 $X_1(jt)X_2(jt) \xrightarrow{F} 2\pi[\overset{①}{x_1(-w)} * \overset{②}{x_2(-w)}]$

$= \frac{1}{2\pi} \cdot [2\pi x_1(-w) * 2\pi x_2(-w)]$

波浪线三式已证成了调制性质（①·② $\xrightarrow{F} \frac{1}{2\pi}$·①*②.）

△Tips：利用对偶性质从时域微分 → 频域微分

证明：$x(t) \xrightarrow{F} X(jw)$，$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{F} Y(jw) = jwX(jw)$

由对偶性，$Y(jt) \xrightarrow{F} 2\pi y(-w)$，代入，有 $\underset{①}{jtX(jt)} \xrightarrow{F} 2\pi \frac{dx(-w)}{d(-w)} = \underset{②}{-\frac{d[2\pi x(-w)]}{dw}}$

另一方面，由 $X(jt) \xrightarrow{F} 2\pi x(-w)$　　$\therefore jtx(t) \xrightarrow{F} -\frac{dX(jw)}{dw}$（①.② 同时傅立叶）

$\therefore tx(t) \xrightarrow{F} j\frac{dX(jw)}{dw}$

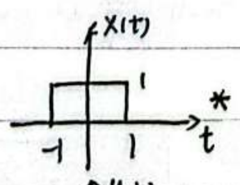
△Tips2：时域平移 → 频域平移

例题：$x(t) = \frac{\sin(t)\sin(\frac{t}{2})}{\pi t^2}$，计算 $X(jw)$

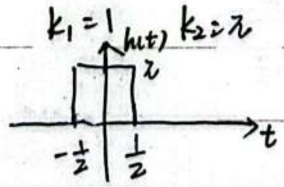
解：$x(t) = \frac{\sin(t)}{\pi t} \cdot \frac{\sin(\frac{t}{2})}{t}$　　$w_{c1} = 1$，$w_{c2} = \frac{1}{2}$

$k_1 = 1$　$k_2 = \pi$

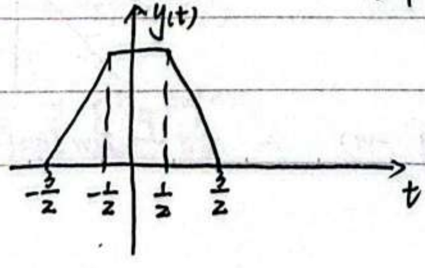
$X(jw) = \frac{1}{2\pi}$



*



=



$2 \times \frac{1}{2}\pi = \pi$

物门

例: $\frac{2}{1+t^2} \xrightarrow{?}$

解: 由双边指数信号 $e^{-|a|t} \xrightarrow{F} \frac{2a}{a^2+w^2}$

$\therefore x(t)=e^{-|a|t} \xrightarrow{F} X(jw)=\frac{2a}{a^2+w^2}$ a取±1

$X(jt)=\frac{2}{1+t^2} \xrightarrow{F} 2\pi x(w)=2\pi e^{-|w|}$

例: $\frac{1}{1+jt} \xrightarrow{?}$

解: $\because e^{-t}u(t) \xrightarrow{F} \frac{1}{1+jw}$

$\therefore \frac{1}{1+jt} \xrightarrow{F} 2\pi e^{w}u(-w)$

☆90°移相器 $\frac{1}{\pi t} \xrightarrow{F}$?

解: $u(t) \xrightarrow{F} \frac{1}{jw}+\pi\delta(w)$

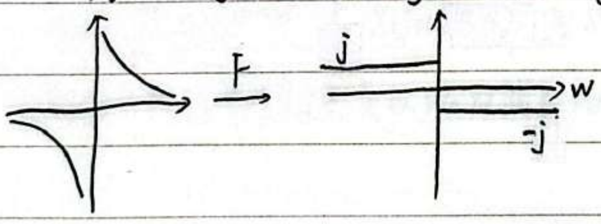
$1 \xrightarrow{F} 2\pi\delta(w)$ $\therefore \frac{1}{2} \xrightarrow{F} \pi\delta(w)$

$\therefore u(t)-\frac{1}{2} \xrightarrow{F} \frac{1}{jw}$

$\therefore x(t)=u(t)-\frac{1}{2} \xrightarrow{F} X(jw)=\frac{1}{jw}$

$\therefore X(jt)=\frac{1}{jt} \xrightarrow{F} 2\pi x(-w) = 2\pi(u(-w)-\frac{1}{2})$

$\therefore \frac{1}{\pi t} \xrightarrow{F} 2j(u(-w)-\frac{1}{2}) = 2ju(-w)-1 = j\,sgn(-w)$

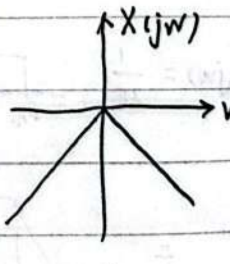


90°移相器: $h(t)=\frac{1}{\pi t} \xrightarrow{F} H(jw)$.

$x(t)*h(t) \Rightarrow X(jw)H(jw)$

① w<0 时, $jX(jw) = |X(jw)|e^{j\theta(w)}e^{j\cdot\frac{\pi}{2}}$

② w>0 时, $-jX(jw) = |X(jw)|e^{j\theta(w)}e^{-j\cdot\frac{\pi}{2}}$



由此,可以求 $\frac{1}{t^2} \xrightarrow{F}$?

$\frac{d(\frac{1}{\pi t})}{dt} = \frac{1}{\pi}\cdot(-\frac{1}{t^2}) \xrightarrow{F} (jw)\cdot j\,sgn(-w) = -w\,sgn(-w)$ $\therefore \frac{1}{t^2} \xrightarrow{F} \pi w\,sgn(-w)$

No.

Date

例2：LTI系统输入 $x(t)=e^{-2t}u(t)$，$y(t)=\frac{1}{2}(e^{-t}-e^{-3t})u(t)$，求 $h(t)$

解：$H(jw)=\frac{Y(jw)}{X(jw)}=\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{1+jw}-\frac{1}{3+jw})}{\frac{1}{2+jw}}=\frac{2+jw}{(1+jw)(3+jw)}=\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{1+jw}+\frac{1}{3+jw})$

$\therefore h(t)=\frac{1}{2}(e^{-t}+e^{-3t})u(t)$

变式：若 $y(t)$ 和 $x(t)$ 满足 $y''+3y'+2y=2x'+x$，求 $h(t)$

解：此时依旧有 $H(jw)=\frac{Y(jw)}{X(jw)}=\frac{2jw+1}{(1+jw)(2+jw)}$

对 $y''+3y'+2y=2x'+x$，等式左右傅立叶变换，

$(jw)^2Y(jw)+3jwY(jw)+2Y(jw)=2(jw)X(jw)+X(jw)$，交叉相乘与上公式一致

$\therefore H(jw)=\frac{-1}{jw+1}+\frac{3}{jw+2}\Rightarrow(3e^{-2t}-e^{-t})u(t)$

9. 对偶性

若 $x(t)\xrightarrow{F}X(jw)$，那么 $X(jt)\xrightarrow{F}2\pi x(-w)$

证明：$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(jw)e^{jwt}dw$　（逆傅里叶变换公式）

$\therefore 2\pi x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}X(jw)e^{jwt}dw$

将 w 和 t 替换，$2\pi x(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}X(jt)e^{jwt}dt$

$w\to -w$，

$2\pi x(-w)=\int_{-\infty}^{+\infty}X(jt)e^{-jwt}dt$

$\therefore X(jt)\xrightarrow{F}2\pi x(-w)$

应用：① 由于 $x(t)=\delta(t)\xrightarrow{F}X(jw)=1$

$\therefore X(jt)=1\xrightarrow{F}2\pi x(-w)=2\pi\delta(-w)=2\pi\delta(w)$

$\therefore 1\xrightarrow{F}2\pi\delta(w)$

② $x(t)=\begin{cases}1, & |t|<T\\ 0, & 其它\end{cases}\xrightarrow{F}2TSa(wT)$　$\therefore X(jt)=2W_cSa(W_ct)\xrightarrow{F}2\pi x(w)=\begin{cases}2\pi, & |w|<W_c\\ 0, & 0.其它\end{cases}$

化简后有，$\frac{\sin W_ct}{\pi t}\xrightarrow{F}\begin{cases}1, & |w|<W_c\\ 0, & 其它\end{cases}$

No.

Date

利用傅立叶变换求解微分方程

微分方程形式为：$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{m=0}^{M} b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m}$

例如：当N=M=2时，方程：$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_2 \cdot \frac{d^2 x(t)}{dt} + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$

该微分方程对应LTI系统，即 $x(t) \xrightarrow{LTI} y(t)$

证明：方程两侧均傅立叶变换，$Y(jw)\sum_{k=0}^{N} a_k (jw)^k = X(jw)\sum_{m=0}^{M} b_m (jw)^m$

$$\therefore \frac{Y(jw)}{X(jw)} = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m (jw)^m}{\sum_{k=0}^{N} a_k (jw)^k} = H(jw)$$

$$\therefore Y(jw) = X(jw)H(jw) \Rightarrow y(t) = x(t) * h(t)$$

例1：若 $x(t) = e^{-bt}u(t)$，$h(t) = e^{-at}u(t)$，$(a, b>0)$，计算 $y(t) = x(t) * h(t)$

解：$X(jw) = \frac{1}{b+jw}$，$H(jw) = \frac{1}{a+jw}$

$$\therefore Y(jw) = \frac{1}{(a+jw)(b+jw)}$$

① 当 $a=b$ 时，$Y(jw) = \frac{1}{(a+jw)^2}$　由于 $te^{-at}u(t) \xrightarrow{F} \frac{1}{(a+jw)^2}$

故 $y(t) = te^{-at}u(t)$

② 当 $a \neq b$ 时，将 $Y(jw)$ 裂项　$\because \frac{1}{a+jw} - \frac{1}{b+jw} = (b-a) \cdot \frac{1}{(a+jw)(b+jw)}$

$\therefore Y(jw) = \left(\frac{1}{a+jw} - \frac{1}{b+jw}\right) \cdot \frac{1}{b-a}$　（也可用待定系数法）

$\therefore y(t) = \frac{1}{b-a} \cdot (e^{-at} - e^{-bt})u(t)$

△卷积定义也可算.

Tips：快速计算 $Y(jw) = \frac{1}{(a+jw)(b+jw)} = \frac{A}{a+jw} + \frac{B}{b+jw}$

[盖起来，算其他]

$A = \left.\frac{1}{\cancel{(a+jw)}(b+jw)}\right|_{jw=-a}$（令盖住项为0）$= \frac{1}{b-a}$　　$B = \left.\frac{1}{a+jw}\right|_{jw=-b} = \frac{1}{a-b}$

↓

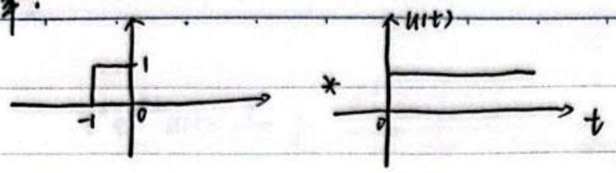
A下的分母

证明：$Y(jw) = \frac{1}{(a+jw)(b+jw)} = \frac{A}{a+jw} + \frac{B}{b+jw}$. 两式同乘 $(a+jw)$

$\therefore \frac{1}{b+jw} = A + B \cdot \frac{a+jw}{b+jw}$.　代入 $jw=-a$，则有 $\frac{1}{b-a} = A$

KOKUYO

解：



↓F　　　　↓F

$Sa(\frac{1}{2}w)e^{j\cdot\frac{w}{2}}$　　　　$\frac{1}{jw}+\pi\delta(w)$

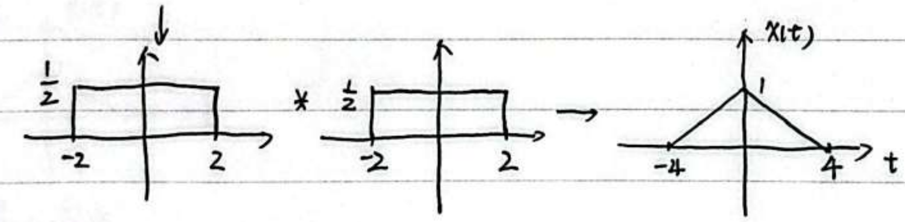
∴ 原式 $= \frac{Sa(\frac{w}{2})e^{j\cdot\frac{w}{2}}}{jw} + \pi\cdot \underline{Sa(\frac{w}{2})e^{j\cdot\frac{w}{2}}\cdot\delta(w)}$　　∵ $X(w)\delta(w)=X(0)\delta(w)$

$= \frac{Sa(\frac{w}{2})e^{j\cdot\frac{w}{2}}}{jw} + \pi\delta(w)$

（也可以用微分性质做）

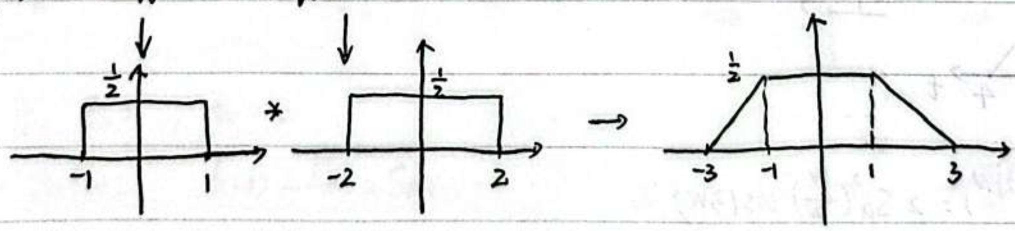
(e)　? $\xrightarrow{F}$ $\left[\frac{\sin(2w)}{w}\right]^2$

解：$X(jw) = \frac{\sin(2w)}{w}\cdot\frac{\sin(2w)}{w}$



(f)　? $\xrightarrow{F}$ $\frac{\sin(w)\sin(2w)}{w^2}$

解：$X(jw) = \frac{\sin(w)}{w}\cdot\frac{\sin(2w)}{w}$



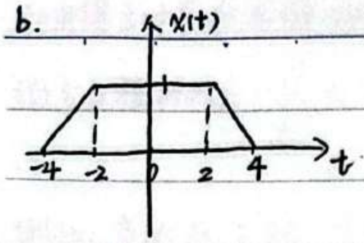
利用卷积性质，我们可以求解 h(t)：

$x(t) * h(t) = y(t)$，若已知 $x(t)$，$y(t)$，求 $h(t)$？

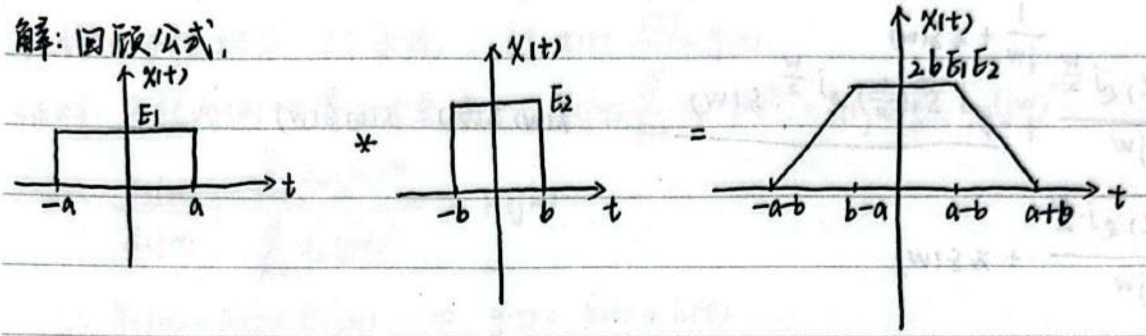
解：由 $X(jw)H(jw)=Y(jw)$，得出 $H(jw)=\frac{Y(jw)}{X(jw)}$，

再代入 $h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}H(jw)e^{jwt}dw$

b.



解：回顾公式，



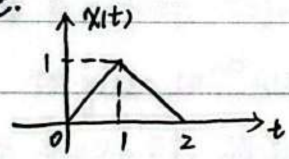
(a>b)

$\therefore \begin{cases} a-b=2 \\ a+b=4 \end{cases}$ $a=3,\ b=1.$

$\therefore\ 2aE_1 Sa(3w)\cdot 2bE_2 Sa(w) = \underset{\sim}{6} Sa(3w) Sa(w) = \cancel{6}.2\,\frac{\sin 3w \sin w}{3w^2} = 2\cdot\frac{\sin 3w \sin w}{w^2}$

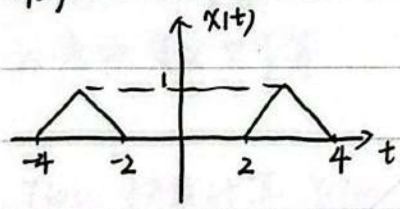
↑同样地，也可以用梯形面积来算

c.



解：$Sa^2\left(\frac{w}{2}\right)\cdot e^{-jw}$

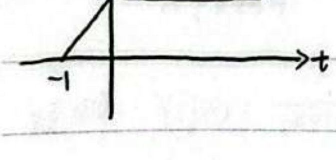
推广：



$\xrightarrow{F}$?

$Sa^2\left(\frac{w}{2}\right)\left(e^{-3jw}+e^{3jw}\right) = 2\,Sa^2\left(\frac{w}{2}\right)\cos(3w)$

d.



$\xrightarrow{F}$?