☆【例 4-8】 考虑信号 $x[n]$，其傅里叶变换 $X(e^{j\omega})=|X(e^{j\omega})|e^{j\theta(\omega)}$，在 $-\pi\leqslant\omega\leqslant\pi$ 区间上如图 4-14 所示。请判断 $x[n]$ 是否是周期的、纯实的、奇对称的以及有限能量的？

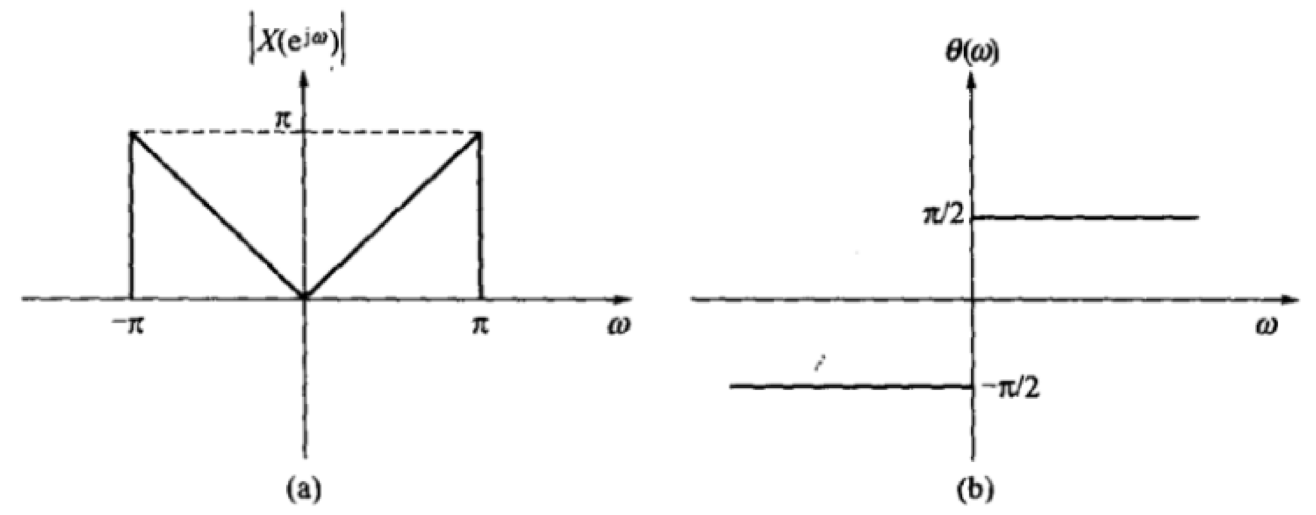


图 4-14 离散时间信号 $x[n]$ 的幅度谱与相位谱

解：① 周期性：非周期 ×

证明：反证法. 假设是周期的，由时域平移性质，

$X(e^{jw}) = \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jwn}\right)(1+e^{jwN}+e^{jw\cdot 2N}+\cdots)$

(周期内)

$= \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jwn}\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jwkN}\right)$

$= N\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta[n-mN]$ 矛盾.

② 纯实性/奇对称：✓

$w>0$, $X(e^{jw}) = |X(e^{jw})|e^{\frac{\pi}{2}j} = j|X(e^{jw})|$

$w<0$, $X(e^{jw}) = -j|X(e^{jw})|$

∴ $X(e^{jw})$ 是虚奇 ⇒ $x[n]$ 为实奇

③ 有限能量的：✓

由帕斯瓦尔定理, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}|X(e^{jw})|^2dw$. 由于 $|X(e^{jw})|$ 有限

⇒ 有限能量

性质9 卷积性质

$x[n] \xrightarrow{F} X(e^{jw})$, $h[n]\xrightarrow{F} H(e^{jw})$ $\quad x[n]*h[n] \xrightarrow{F} X(e^{jw})H(e^{jw})$

证明：假设

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]$$

然后

$$Y(e^{j\omega}) = F[y[n]] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]\right)e^{-j\omega n}$$
$$=\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h[n-k]e^{-j\omega(n-k)}\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]e^{-j\omega k}\right)$$
$$=X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

例：求差分器 $y[n]=x[n]-x[n-1]$ 的 $H(e^{jw})$

解：方法1：$Y(e^{jw}) = X(e^{jw}) - e^{-jw}X(e^{jw}) = (1-e^{-jw})X(e^{jw})$

(回顾时域平移，$x[n-n_0]\xrightarrow{F} e^{-jwn_0}X(e^{jw})$)

∴ $H(e^{jw}) = \frac{Y(e^{jw})}{X(e^{jw})} = 1-e^{-jw}$

法2：$h[n]$ 定义：输入为 $\delta[n]$ 时的输出

∴ $h[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$，据此求 $H(e^{jw})$

例2：求累加器 $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$，求 $H(e^{jw})$

法一：观察有 $y[n]=x[n]*u[n]=x[n]*h[n]$ ∴ $h[n]=u[n]$

∴ $H(e^{jw}) = F[u[n]] = \frac{1}{1-e^{-jw}} + \pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(w-2k\pi)$

法二：$h[n]$ 定义：输入 $\delta[n]$ 时输出

∴ $h[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta[k] = \begin{cases}1, & n\ge0\\0, & n<0\end{cases}$ 即 $u[n]$. 后同

例3：延时器 $y[n]=x[n-n_0]$，求 $H(e^{jw})$

解：两边傅立叶变换，$Y(e^{jw})=e^{-jwn_0}X(e^{jw})$

∴ $H(e^{jw})=e^{-jwn_0}$

法二：$h[n]=\delta[n-n_0]$，求傅立叶变换

例4：如果 $h[n]=\alpha^n u[n]$ ($|\alpha|<1$)，和 $x[n]=\beta^n u[n]$ ($|\beta|<1$)，计算 $y[n]=x[n]*h[n]$

解：$h[n]=\alpha^n u[n]\xrightarrow{F} H(e^{jw}) = \frac{1}{1-\alpha e^{-jw}}$

$x[n]=\beta^n u[n]\xrightarrow{F}X(e^{jw})=\frac{1}{1-\beta e^{-jw}}$

∴ $Y(e^{jw}) = \frac{1}{(1-\alpha e^{-jw})(1-\beta e^{-jw})}$ 下面逆FT.

① 若 $\alpha=\beta$，$Y(e^{jw})=\frac{1}{(1-\alpha e^{-jw})^2}$ ∴ $y[n]=(n+1)\alpha^n u[n]$

② 若 $\alpha\neq\beta$

$Y(e^{jw}) = \frac{1}{(1-\alpha e^{-jw})(1-\beta e^{-jw})} = \frac{A}{1-\alpha e^{-jw}} - \frac{B}{1-\beta e^{-jw}}$

$= \frac{A-B-(A\beta-B\alpha)e^{-jw}}{(1-\alpha e^{-jw})(1-\beta e^{-jw})}$

∴ $\begin{cases}A\beta=B\alpha\\A-B=1\end{cases} \Rightarrow \frac{\alpha-\beta}{\beta}B=1$

∴ $B=\frac{\beta}{\alpha-\beta}$ $\quad A=\frac{\alpha}{\alpha-\beta}$

∴ $Y(e^{jw}) = \frac{\alpha}{\alpha-\beta}\cdot\frac{1}{1-\alpha e^{-jw}} - \frac{\beta}{\alpha-\beta}\cdot\frac{1}{1-\beta e^{-jw}}$

$y[n] = \frac{\alpha}{\alpha-\beta}\cdot\alpha^n u[n] - \frac{\beta}{\alpha-\beta}\cdot\beta^n u[n]$ ⇒ $y[n]=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}u[n]$

(也可以用第三章教的公式，$A = \left.\frac{1}{1-\beta e^{-jw}}\right|_{(1-\alpha e^{-jw}=0)} = \frac{\alpha}{\alpha-\beta}$

$B=\frac{\beta}{\alpha-\beta}$

例5：因果LTI 输入 $x[n]=(\frac{1}{2})^n u[n]$，输出 $y[n]=3\cdot(\frac{1}{2})^n u[n] - 2\cdot(\frac{1}{3})^n u[n]$

求 $h[n]$.

解：$X(e^{jw})=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-jw}}$ $\quad Y(e^{jw})=\frac{3}{1-\frac{1}{2}e^{-jw}}-\frac{2}{1-\frac{1}{3}e^{-jw}}$

$=\frac{1}{(1-\frac{1}{2}e^{-jw})(1-\frac{1}{3}e^{-jw})}$ $\quad$ ∴ $H(e^{jw})=\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-jw}}$

$h[n]=(\frac{1}{3})^n u[n]$

☆例6：离散LTI系统，$h[n]\xrightarrow{F}H(e^{jw})$，输入 $x[n]=\cos(w_0 n)$. 求输出 $y[n]$.

解：利用离散LTI对复指数的响应：

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h[n]e^{-j\omega n}$$ （离散傅里叶变换）

$h[n]\xrightarrow{F}H(e^{j\omega})$ 或者 $F[h[n]]=H(e^{j\omega})$ 或者 $F^{-1}[H(e^{j\omega})]=h[n]$

然后我们有：

$$e^{j\omega_0 n}\longrightarrow\boxed{H(e^{j\omega})}\longrightarrow H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n}$$

$$e^{j\omega_0 n}\xrightarrow{LTI}H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 n}$$

由于输入是 $x[n]=\cos(w_0 n)=\frac{1}{2}e^{jw_0n}+\frac{1}{2}e^{-jw_0n}$

∴ $\cos(w_0n)\xrightarrow{F}\frac{1}{2}H(e^{jw_0})e^{jw_0n}+\frac{1}{2}H(e^{-jw_0})e^{-jw_0n}$

【例 4-17】 考虑一离散时间因果 LTI 系统，其差分方程为

$$y[n]-\frac{1}{6}y[n-1]-\frac{1}{6}y[n-2]=x[n]$$

试求：① 系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 和单位脉冲响应 $h[n]$；

② 当 $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$，求系统的零状态响应。

(1) 解: 两边DFT. $Y(e^{jw})-\frac{1}{6}e^{-jw}Y(e^{jw})-\frac{1}{6}e^{-j2w}Y(e^{jw})=X(e^{jw})$

$\therefore H(e^{jw})=\frac{Y(e^{jw})}{X(e^{jw})}=\frac{1}{1-\frac{1}{6}e^{-jw}-\frac{1}{6}e^{-j2w}}$ 因式分解

$x^2+x-6=(x+3)(x-2)$

$=\frac{1}{(1+\frac{1}{3}e^{-jw})(1-\frac{1}{2}e^{-jw})}=\frac{\frac{3}{5}}{1+\frac{1}{3}e^{-jw}}+\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{2}e^{-jw}}$

$\therefore h[n]=\frac{3}{5}\cdot(-\frac{1}{3})^n u[n]+\frac{2}{5}\cdot(\frac{1}{2})^n u[n]$

(2) $x[n]=(\frac{1}{2})^n u[n]$，$X(e^{jw})=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-jw}}$

$\therefore Y(e^{jw})=X(e^{jw})H(e^{jw})$

$=\frac{1}{(1-\frac{1}{2}e^{-jw})^2(1+\frac{1}{3}e^{-jw})}$

$=\frac{A}{(1-\frac{1}{2}e^{-jw})^2}+\frac{B}{1-\frac{1}{2}e^{-jw}}+\frac{C}{1+\frac{1}{3}e^{-jw}}$

$e^{-jw}=2$ $A=\frac{1}{1+\frac{2}{3}}=\frac{3}{5}$ $e^{-jw}=-3$ $C=\frac{1}{(1+\frac{3}{2})^2}=\frac{4}{25}$

观察常数项: $\frac{3}{5}+B+\frac{4}{25}=1$ $\therefore B=\frac{6}{25}$

$\therefore y[n]=\frac{3}{5}(n+1)(\frac{1}{2})^n u[n]+\frac{6}{25}\cdot(\frac{1}{2})^n u[n]+\frac{4}{25}\cdot(-\frac{1}{3})^n u[n]$

性质10 求和性质

若 $x[n]\xrightarrow{F}X(e^{jw})$，则 $\sum_{m=-\infty}^{n}x[m]\xrightarrow{F}\frac{X(e^{jw})}{1-e^{-jw}}+\pi X(e^{j0})\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(w-2k\pi)$

证明: 由 $\sum_{m=-\infty}^{n}x[m]=x[n]*u[n]$，利用卷积性质，两边傅立叶变换

$F[\sum_{m=-\infty}^{n}x[m]]=X(e^{jw})\left[\frac{1}{1-e^{-jw}}+\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(w-2k\pi)\right]$

$\because$ 由$\delta(w)$，$x(w)\delta(w-w_0)=x(w_0)\delta(w-w_0)$

$\therefore F[\sum_{m=-\infty}^{n}x[m]]=\frac{X(e^{jw})}{1-e^{-jw}}+\pi X(e^{j\cdot 2k\pi})\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(w-2k\pi)$

$=\frac{X(e^{jw})}{1-e^{-jw}}+\pi\underbrace{X(e^{j\cdot 0})}_{\text{周期性}}\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(w-2k\pi)$

性质11: 调制性质

定义: 周期卷积 设 $x(t)$. $h(t)$ 均为以T为周期的函数,

$x(t)=x(t+nT)$，$h(t)=h(t+nT)$，则定义 $\boxed{\text{周期卷积:}}$

$y(t)=x(t)\circledast h(t)=\int_T x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

$y(t)$ 也以T为周期 ⇐ 均以T为周期

调制性质: 若 $x_1[n]\xrightarrow{F}X_1(e^{jw})$，$x_2[n]\xrightarrow{F}X_2(e^{jw})$，

则 $x_1[n]x_2[n]\xrightarrow{F}\frac{1}{2\pi}X_1(e^{jw})\circledast X_2(e^{jw})=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(w-\theta)})d\theta$

证: 设 $Y(e^{jw})=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(w-\theta)})d\theta$

那么 $y[n]=F^{-1}[Y(e^{jw})]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}Y(e^{jw})e^{jwn}dw$

$=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(w-\theta)})d\theta\right)e^{jwn}dw$

二元积分问题:

$=\left(\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{2\pi}X_1(e^{j\theta})\cdot e^{j\theta n}d\theta\right)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X_2(e^{j(w-\theta)})e^{j(w-\theta)n}d(w-\theta)$

$=x_1[n]x_2[n]$

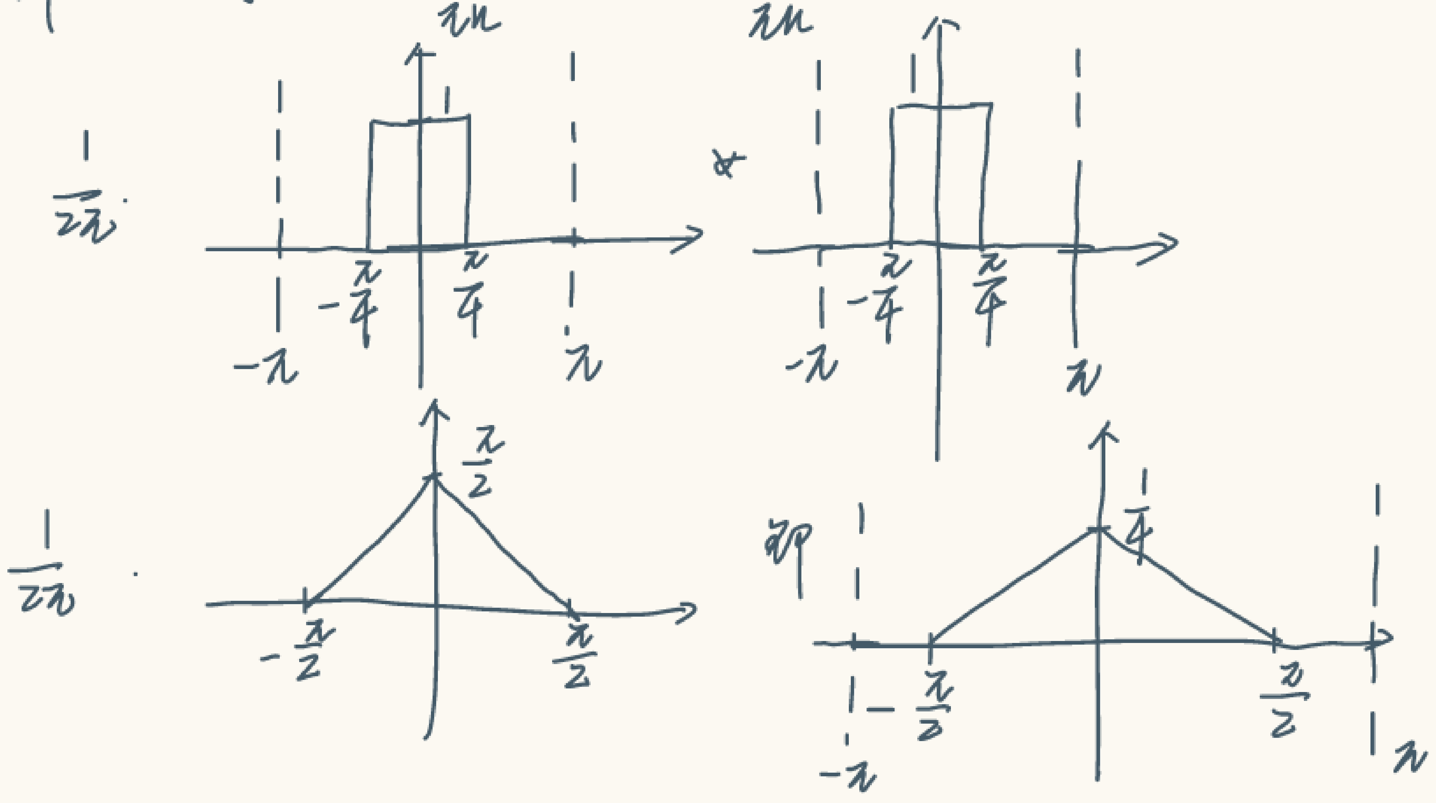
周期卷积的计算:

① 例：如果

$$x[n]=\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)}{\pi n}\right]^2$$

计算其离散傅里叶变换$X(e^{j\omega})$。

解: $x[n]=\frac{\sin\frac{\pi}{4}\pi n}{\pi n}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{4}\pi n}{\pi n}$ $\xrightarrow{F}$



② 截止频率 $>\frac{\pi}{2}$:

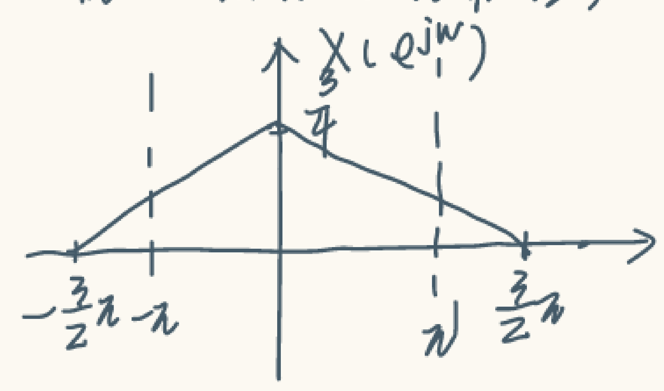
例：如果

$$x[n]=\left[\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{4}n\right)}{\pi n}\right]^2$$

计算其离散傅里叶变换$X(e^{j\omega})$。

$x[n]=\frac{\sin\frac{3}{4}\pi n}{\pi n}\cdot\frac{\sin\frac{3}{4}\pi n}{\pi n}$

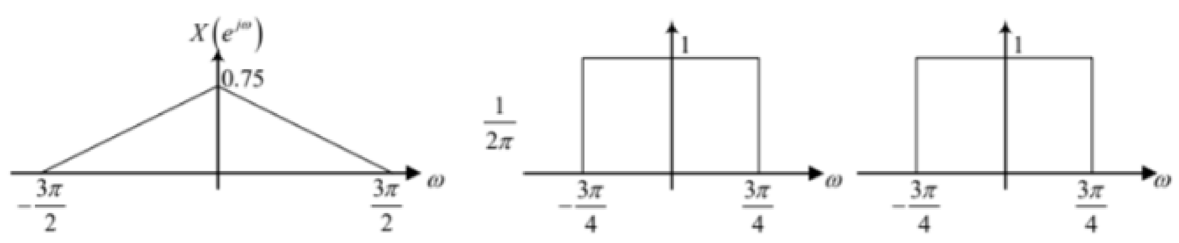
一般地由方波卷积后， 发现超出了 $[-\pi,\pi]$



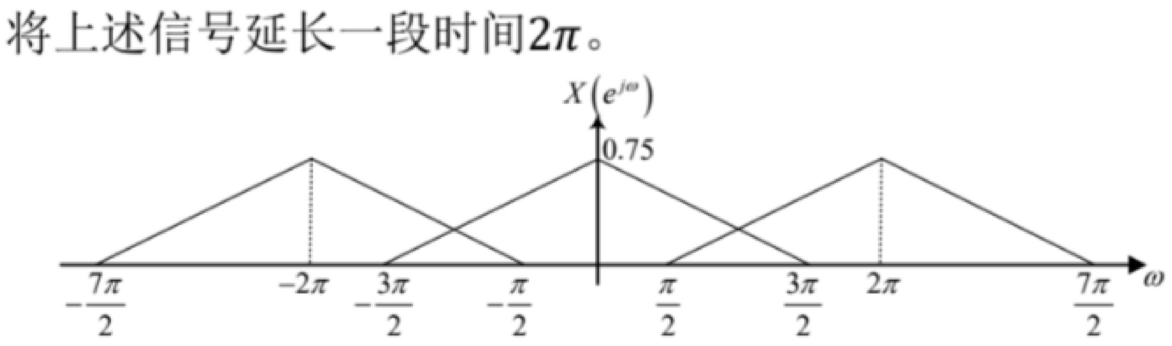
$\therefore$ 移动

（继续）解决上述问题的三个步骤。

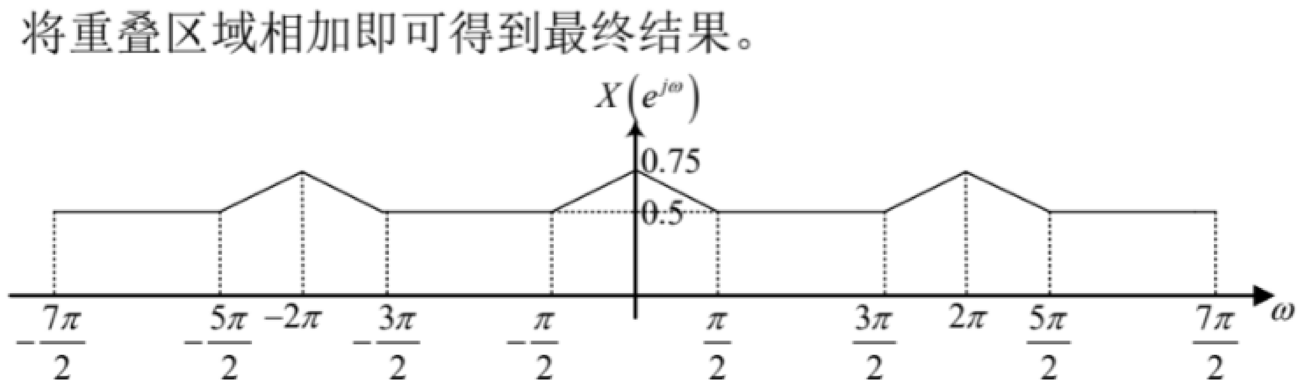
步骤1：计算一个周期的卷积。



第 2 步：将上述信号延长一段时间2π。



步骤3：将重叠区域相加即可得到最终结果。



离散时间的傅里叶级数

(考试不涉及,课程设计涉及)

① 连续周期信号的傅立叶变换:

$a_k=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}x(t)e^{-jkw_0t}dt,\quad x(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}a_ke^{jkw_0t},\ (w_0=\frac{2\pi}{T})$

$x(t)\xrightarrow{F.S.}a_k$ (连续→离散)
周期 非周期

② 连续信号的傅立叶变换:

$X(jw)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-jwt}dt$

$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(jw)e^{jwt}dw$

$x(t)\xrightarrow{F}X(jw)$ (连续→连续)
非周期 非周期

③ 离散信号的傅立叶变换

$X(e^{jw})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-jwn}$

$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{jw})e^{jwn}dw$

$x[n]\xrightarrow{F}X(e^{jw})$ (离散→连续)
非周期 周期

∴ 离散 → 离散 ✓
周期 周期

考查: $X(e^{jw})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-jwn}$: $X(e^{jw})=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-jwn}$:

假设x[n]只在0~N-1内有值:
下 x[n]的长度,其它可以平移

此时$X(e^{jw})$依旧不可解出x[n]. ($X(e^{jw})$是连续函数,含无限多个w)

下证:取$X(e^{jw})$中一个周期内N个点的值,有可能反解出x[n].

在$X(e^{j\omega})$的一个周期内任取N个点:

$$\omega_0,\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{N-1}\in[0,2\pi)$$

将以上这N个ω值分别代入公式4.53中并展开,可得:

$$\begin{cases}X(e^{j\omega_0})=x[0]+x[1]e^{-j\omega_0}+x[2]e^{-j2\omega_0}+\cdots+x[N-1]e^{-j(N-1)\omega_0}\\X(e^{j\omega_1})=x[0]+x[1]e^{-j\omega_1}+x[2]e^{-j2\omega_1}+\cdots+x[N-1]e^{-j(N-1)\omega_1}\\X(e^{j\omega_2})=x[0]+x[1]e^{-j\omega_2}+x[2]e^{-j2\omega_2}+\cdots+x[N-1]e^{-j(N-1)\omega_2}\\\cdots\\X(e^{j\omega_{N-1}})=x[0]+x[1]e^{-j\omega_{N-1}}+x[2]e^{-j2\omega_{N-1}}+\cdots+x[N-1]e^{-j(N-1)\omega_{N-1}}\end{cases}$$

以上公式构成一个N元1次线性方程组,可以将该方程组改写成矩阵形式如下:

$$\begin{bmatrix}X(e^{j\omega_0})\\X(e^{j\omega_1})\\X(e^{j\omega_2})\\\vdots\\X(e^{j\omega_{N-1}})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&e^{-j\omega_0}&e^{-j2\omega_0}&\cdots&e^{-j(N-1)\omega_0}\\1&e^{-j\omega_1}&e^{-j2\omega_1}&\cdots&e^{-j(N-1)\omega_1}\\1&e^{-j\omega_2}&e^{-j2\omega_2}&\cdots&e^{-j(N-1)\omega_2}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\1&e^{-j\omega_{N-1}}&e^{-j2\omega_{N-1}}&\cdots&e^{-j(N-1)\omega_{N-1}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x[0]\\x[1]\\x[2]\\\vdots\\x[N-1]\end{bmatrix}$$

当且仅当系数矩阵可逆时,此N元1次线性方程组有唯一解。

$X=E\cdot x$, $x=E^{-1}X$,

E可逆:

如果$\omega_0,\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{N-1}$取区间$[0,2\pi)$上两两不等的值,则有

$(v_i=e^{-j\omega_i})\neq(v_j=e^{-j\omega_j})$,当$0\le i<j\le N-1$时

此时范德蒙行列式$|V|\neq0$,因此矩阵V可逆。

证明:

我们定义系数矩阵

$$V=\begin{bmatrix}1&e^{-j\omega_0}&e^{-j2\omega_0}&\cdots&e^{-j(N-1)\omega_0}\\1&e^{-j\omega_1}&e^{-j2\omega_1}&\cdots&e^{-j(N-1)\omega_1}\\1&e^{-j\omega_2}&e^{-j2\omega_2}&\cdots&e^{-j(N-1)\omega_2}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\1&e^{-j\omega_{N-1}}&e^{-j2\omega_{N-1}}&\cdots&e^{-j(N-1)\omega_{N-1}}\end{bmatrix}$$

由线性代数的知识可知:矩阵V可逆的充要条件为其行列式$|V|\neq0$。为了验证V是否可逆,考察其行列式$|V|$。设

$$v_0=e^{-j\omega_0},v_1=e^{-j\omega_1},v_2=e^{-j\omega_2},\cdots,v_{N-1}=e^{-j\omega_{N-1}}$$

则有:

$$|V|=\begin{vmatrix}1&v_0&v_0^2&\cdots&v_0^{N-1}\\1&v_1&v_1^2&\cdots&v_1^{N-1}\\1&v_2&v_2^2&\cdots&v_2^{N-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\1&v_{N-1}&v_{N-1}^2&\cdots&v_{N-1}^{N-1}\end{vmatrix}=\prod_{0\le i<j\le N-1}(v_j-v_i)$$

如果$\omega_0,\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{N-1}$取区间$[0,2\pi)$上两两不等的值,则有

$(v_i=e^{-j\omega_i})\neq(v_j=e^{-j\omega_j})$,当$0\le i<j\le N-1$时

此时范德蒙行列式$|V|\neq0$,因此矩阵V可逆。

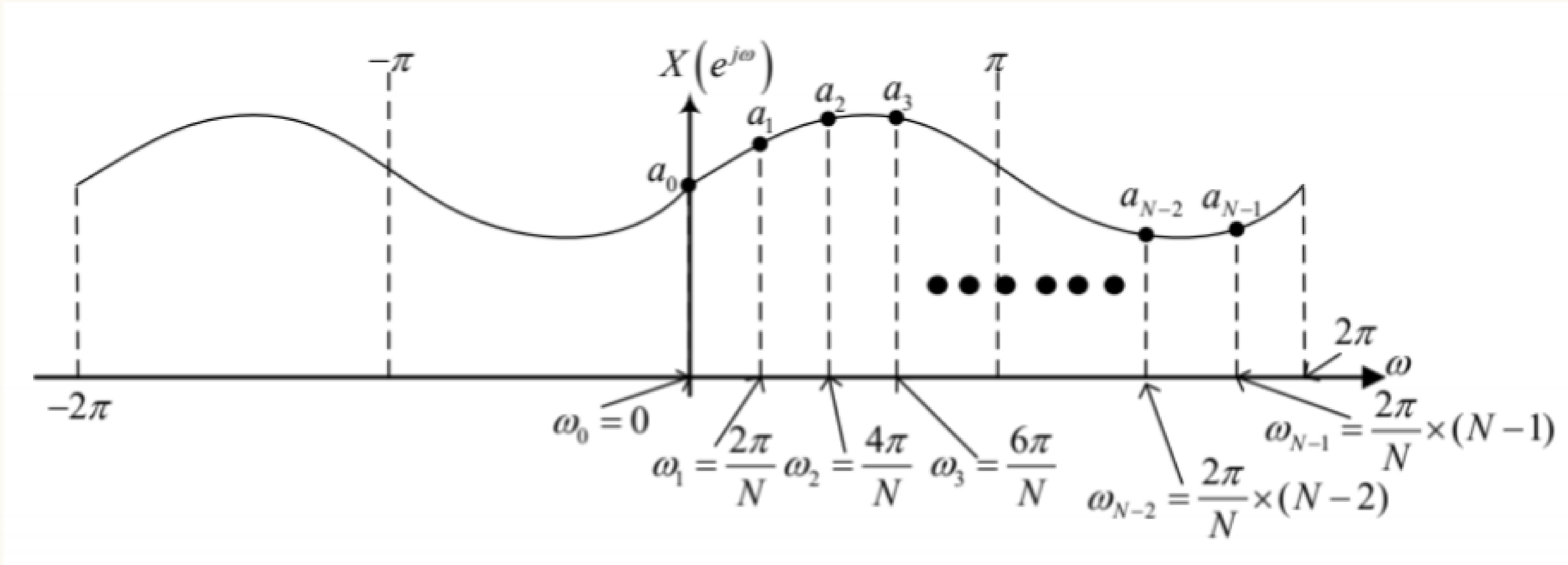
快速傅立叶变换:

·必要性: $x=E^{-1}X$

E^{-1}: 矩阵求逆 $O(N^{2.83})$

·方式: 但是,如果我们精心选择某些特殊的$\{\omega_i\}_{i=0\sim(N-1)}$,同时精心设计算法,那么以上矩阵求逆的时间复杂度就有可能降低到到$o(NlogN)$。 。

均匀采样:



$a_k=X(e^{jwk})=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot nk}$

现在,我们希望通过a_k就推得x[n].

结论:

如果:

$$a_k=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}\quad(k=0,1,2,\cdots,N-1)$$

则有:

$$x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}a_ke^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}\quad(n=0,1,2,\cdots,N-1)$$

推导:

对于周期离散信号$x[n]$(其周期为N),其中

$$x[n]=x[n+pN]\quad(p\in Z)$$

我们定义它的离散时间傅里叶级数(DFS)a_k 作为:

$$x[n]=\sum_{k=0}^{N-1}a_ke^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}$$

然后a_k 可以计算如下:

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk},(k=0,1,2,\cdots,N-1)$$

解: 我们首先证$\left[e^{j\cdot\frac{2\pi}{N}\cdot nk}\right]_{k=0\sim N-1}$是正交基.

定义内积 $<x[n],y[n]>=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]\overline{y[n]}$

计算 $<e^{j\cdot\frac{2\pi}{N}nk},e^{j\cdot\frac{2\pi}{N}nl}>=\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\cdot\frac{2\pi}{N}n(k-l)}$

① 当k=l时, $\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\cdot\frac{2\pi}{N}\cdot n\cdot0}=N$

② 当k≠l时, 原式$=\frac{1-e^{j\cdot2\pi\cdot(k-l)}}{1-e^{j\cdot\frac{2\pi}{N}\cdot(k-l)}}=0$

∴ $<e^{j\cdot\frac{2\pi}{N}\cdot k},e^{j\cdot\frac{2\pi}{N}\cdot l}>=\begin{cases}0,&k\neq l\\N,&k=l\end{cases}$ 即证成了正交基

回到原先要推导的式子,

记 $a_k=\frac{1}{N}\sum_{p=0}^{N-1}x[n]e^{-j\cdot(\frac{2\pi}{N})np}$, $(p=0,1,2\cdots N-1)$

则式子右边 $x[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{m}^{N-1}x[m]e^{-j\cdot(\frac{2\pi}{N})mk}\right)e^{j\cdot\frac{2\pi}{N}\cdot nk}$

$=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}x[m]\sum_{k=0}^{N-1}e^{j\cdot\frac{2\pi}{N}(n-m)k}=x[n]$

① 当n=m时, $\sum_{k=0}^{N-1}e^{j\cdot\frac{2\pi}{N}\cdot(n-m)k}=N$

② 当n≠m时, 原式=0 (由之前证的正交性)

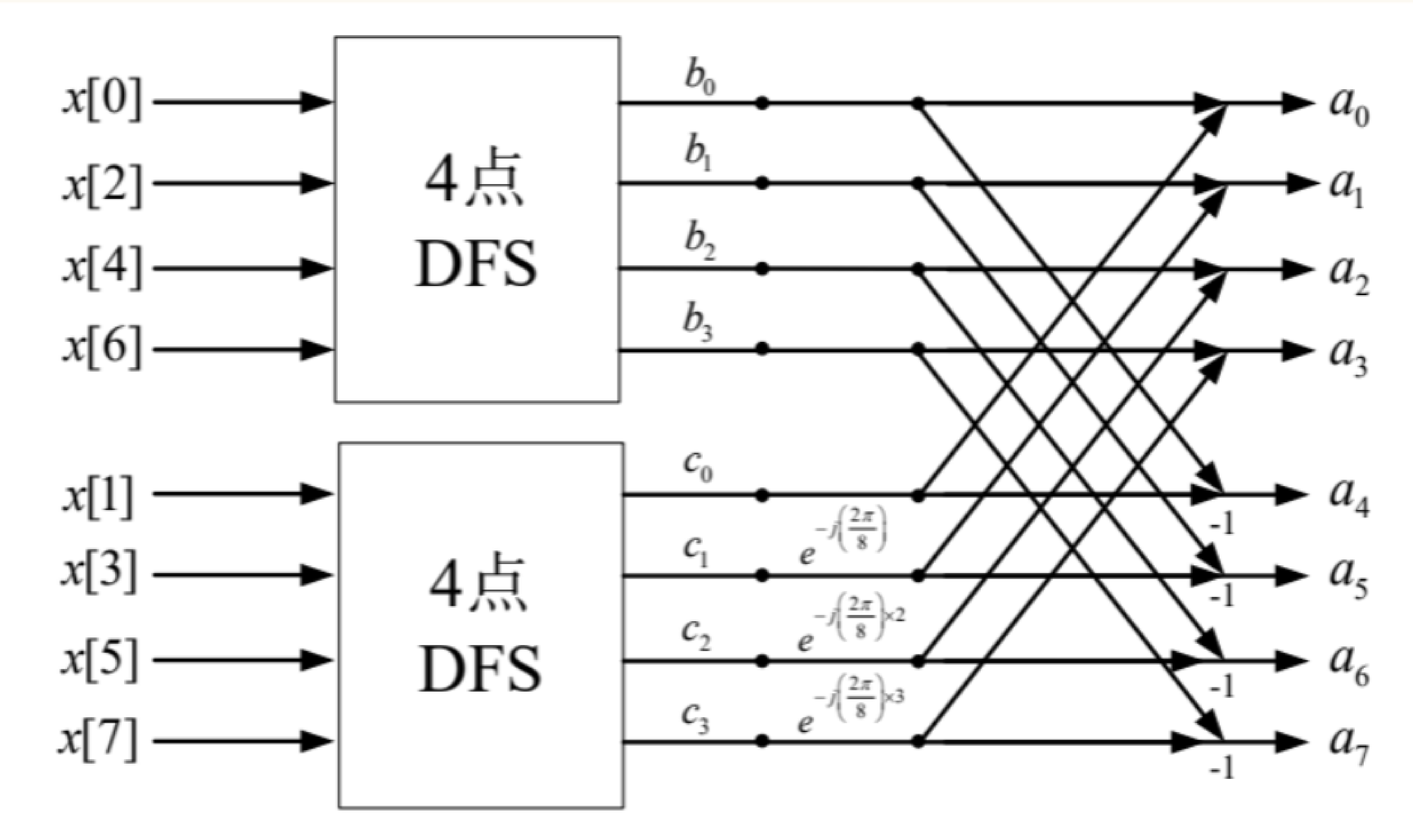
∴ 可以从a_k计算x[n]. 此时复杂度为$O(n^2)$

可以发现 $x[n]\Rightarrow a_k$, $a_k\Rightarrow x[n]$的计算是类似的

以N=8为例.

$$a_k=\sum_{n=0}^{7}x[n]e^{-j\left(\frac{2\pi}{8}\right)nk}$$
$$=x[0]+x[1]e^{-j\left(\frac{2\pi}{8}\right)\times k}+x[2]e^{-j\left(\frac{2\pi}{8}\right)\times 2k}+x[3]e^{-j\left(\frac{2\pi}{8}\right)\times 3k}+x[4]e^{-j\left(\frac{2\pi}{8}\right)\times 4k}$$
$$+x[5]e^{-j\left(\frac{2\pi}{8}\right)\times 5k}+x[6]e^{-j\left(\frac{2\pi}{8}\right)\times 6k}+x[7]e^{-j\left(\frac{2\pi}{8}\right)\times 7k}$$
$$=\left[x[0]+x[2]e^{-j\left(\frac{2\pi}{8}\right)\times 2k}+x[4]e^{-j\left(\frac{2\pi}{8}\right)\times 4k}+x[6]e^{-j\left(\frac{2\pi}{8}\right)\times 6k}\right]$$
$$+e^{-j\left(\frac{2\pi}{8}\right)\times k}\left[x[1]+x[3]e^{-j\left(\frac{2\pi}{8}\right)\times 2k}+x[5]e^{-j\left(\frac{2\pi}{8}\right)\times 4k}+x[7]e^{-j\left(\frac{2\pi}{8}\right)\times 6k}\right]$$
$$=\left[x[0]+x[2]e^{-j\left(\frac{2\pi}{4}\right)\times k}+x[4]e^{-j\left(\frac{2\pi}{4}\right)\times 2k}+x[6]e^{-j\left(\frac{2\pi}{4}\right)\times 3k}\right]$$
$$+e^{-j\left(\frac{2\pi}{8}\right)\times k}\left[x[1]+x[3]e^{-j\left(\frac{2\pi}{4}\right)\times k}+x[5]e^{-j\left(\frac{2\pi}{4}\right)\times 2k}+x[7]e^{-j\left(\frac{2\pi}{4}\right)\times 3k}\right]$$

8点DFS的信号流图:



我们可以将 8 个点的 DFS 分解为两个 4 个点的 DFS

解释: 对于以下式子:

$$a_k=\sum_{n=0}^{7}x[n]e^{-j\left(\frac{2\pi}{8}\right)nk}$$
$$=\left[x[0]+x[2]e^{-j\left(\frac{2\pi}{4}\right)\times k}+x[4]e^{-j\left(\frac{2\pi}{4}\right)\times 2k}+x[6]e^{-j\left(\frac{2\pi}{4}\right)\times 3k}\right] \text{①}$$
$$+e^{-j\left(\frac{2\pi}{8}\right)\times k}\left[x[1]+x[3]e^{-j\left(\frac{2\pi}{4}\right)\times k}+x[5]e^{-j\left(\frac{2\pi}{4}\right)\times 2k}+x[7]e^{-j\left(\frac{2\pi}{4}\right)\times 3k}\right] \text{②}$$

代入 $k=0$. 计算 a_0. ①得到 b_0 ② $\cdot\ e^{-j\cdot\frac{2\pi}{8}\cdot 0}\cdot c_0$

$\therefore\ a_0=b_0+c_0$

$k=1$: $a_1=b_1+e^{-j\left(\frac{2\pi}{8}\right)\cdot 1}\cdot c_1$

$k=2\ \cdots$ 同理.

a_4: $k=4$ 利用 $e^{-j\cdot\frac{2\pi}{N}\cdot(k+pN)}=e^{-j\cdot\frac{2\pi}{N}\cdot k}$ $(p\in\mathbb{Z})$

$(n\%N)$

$\therefore\ a_4=\left[x[0]+x[2]e^{-j\cdot\left(\frac{2\pi}{4}\right)\times 4}+x[4]e^{-j\cdot\left(\frac{2\pi}{4}\right)\times 8}+x[6]e^{-j\left(\frac{2\pi}{4}\right)\times 12}\right]$

$+e^{-j\cdot\frac{2\pi}{8}\cdot 4}\left[x[1]+x[3]e^{-j\cdot\left(\frac{2\pi}{4}\right)\times 4}+x[5]e^{-j\cdot\left(\frac{2\pi}{4}\right)\times 8}+x[7]e^{-j\left(\frac{2\pi}{4}\right)\times 12}\right]$

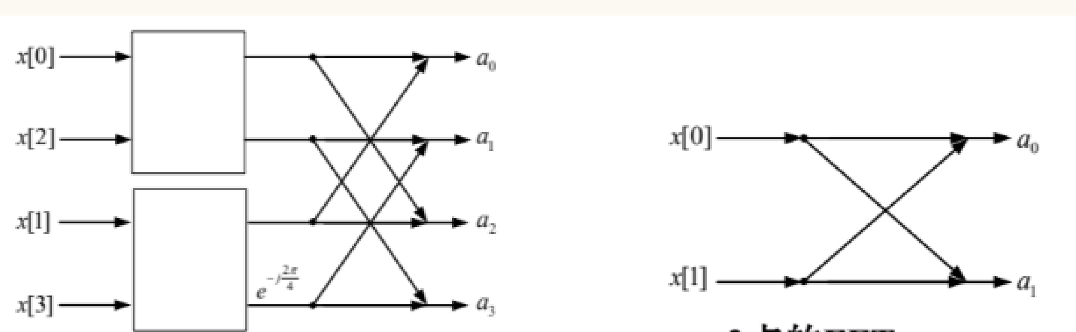
$\Rightarrow\ a_4=b_0-c_0$

$a_5=b_1-e^{-j\cdot\left(\frac{2\pi}{8}\right)\cdot 1}c_1$

$a_6=b_2-e^{-j\left(\frac{2\pi}{8}\right)\cdot 2}c_2$

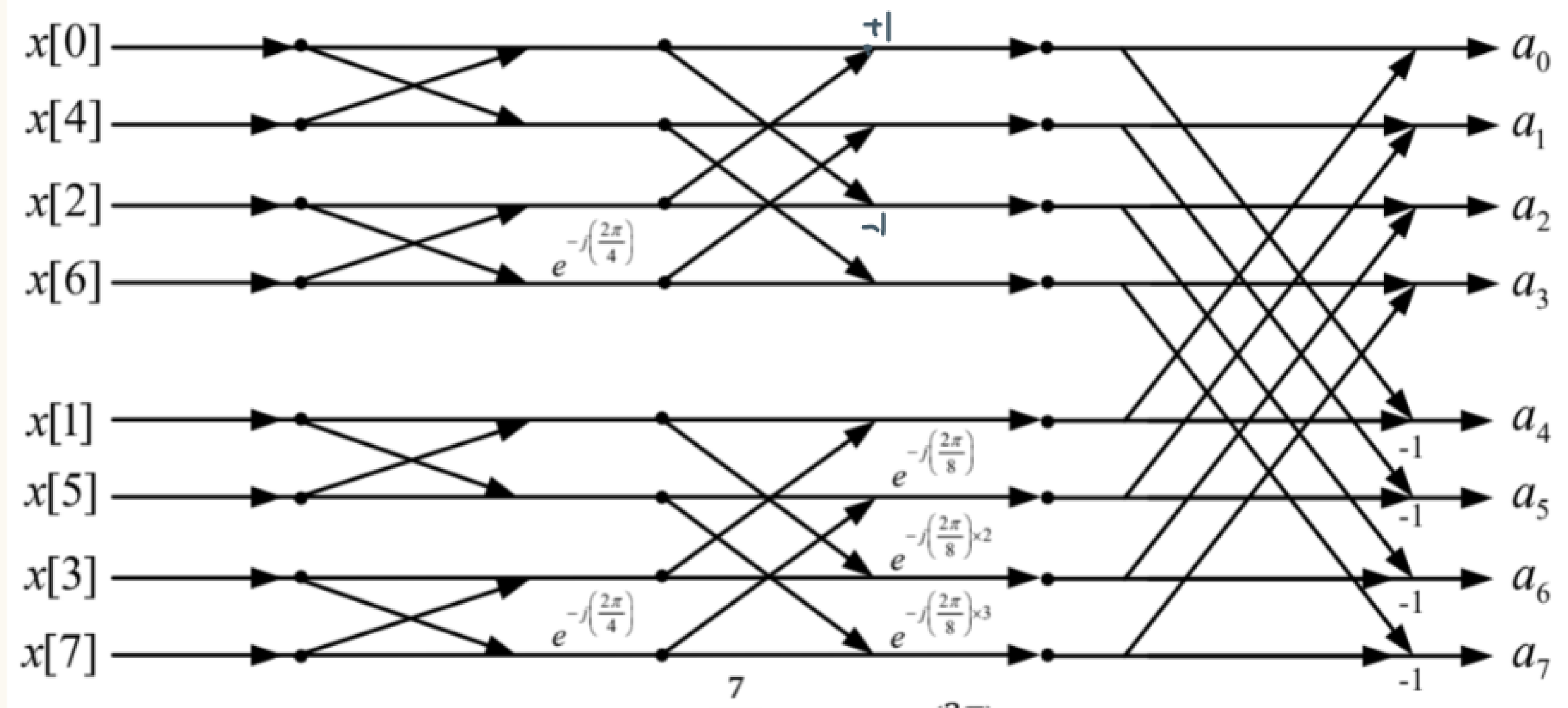
$a_7=b_3-e^{-j\left(\frac{2\pi}{8}\right)\cdot 3}c_3$

可以继续二分



4点FFT **2点的FFT**

∴完整的信号流图如下:



$$a_k=\sum_{n=0}^{7}x[n]e^{-j\left(\frac{2\pi}{8}\right)nk}$$

8点FFT的完整信号流图

时间复杂度: 设 $N=2^k$, 例如 $k=3$. $N=8$. 此时恰有 k 层

每层计算次数 $\propto N$

逆傅立叶变换(IFFT): $Nx[n]=\sum_{k=0}^{N-1}a_k e^{j\cdot\frac{2\pi}{N}\cdot nk}$

∴信号流图:

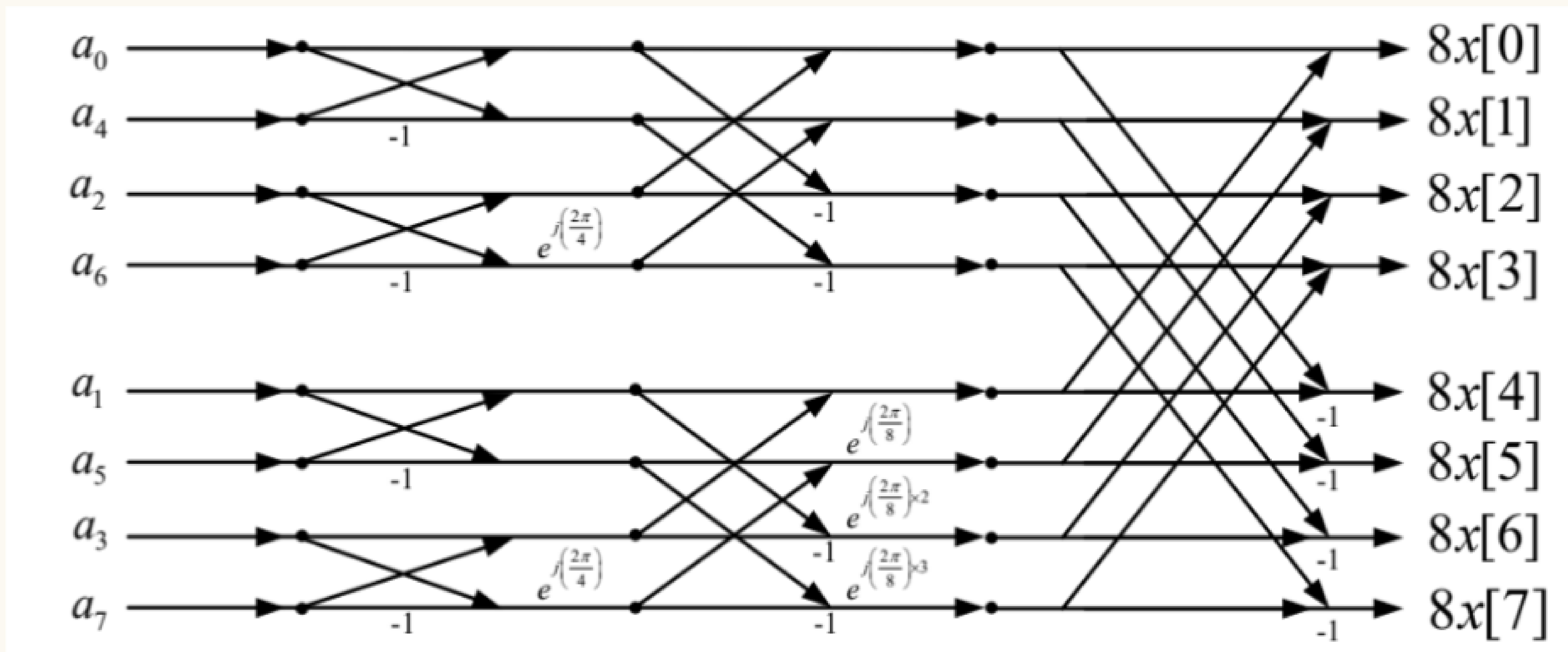
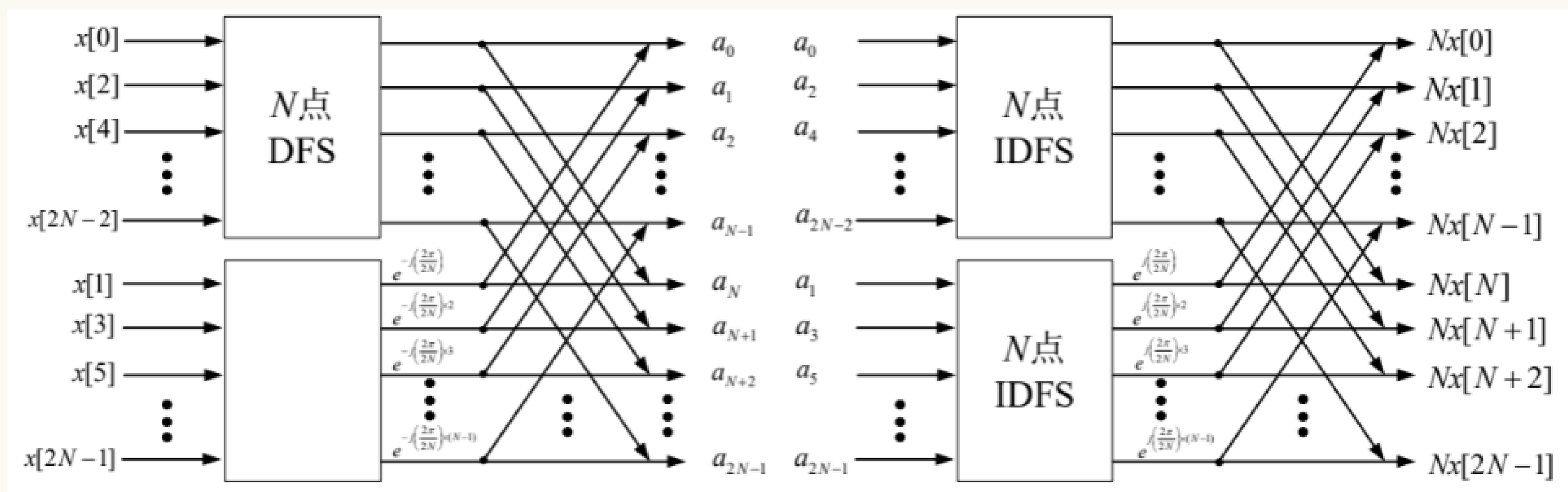


图 4.20 计算 8 点离散傅里叶级数反变换（IDFS）的信号流图

拓展到N, 对应图示如下.



信号流图2N 点FFT **信号流图2N 点IFFT**

$$a_k=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk} \qquad Nx[n]=\sum_{k=0}^{N-1}a_k e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}$$

Matlab编程 及 FFT计算卷积

迭代的推导:

$x[0]+x[4]e^{-j\cdot\frac{2\pi}{8}\cdot 4k}+e^{-j\cdot\frac{2\pi}{8}\cdot k}\left[x[1]+x[5]e^{-j\cdot\frac{2\pi}{8}\cdot 4k}\right]$

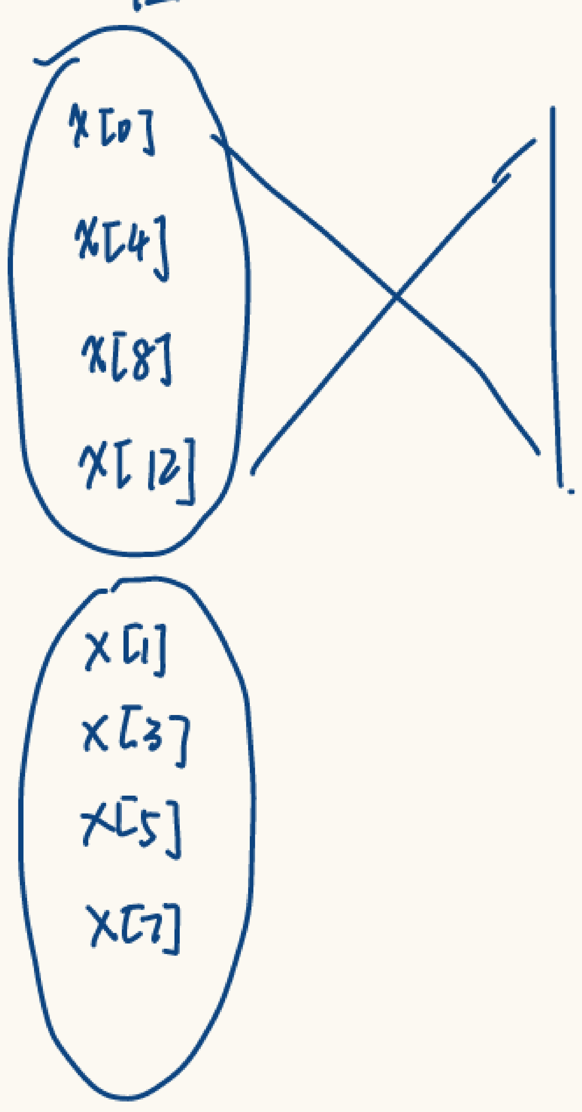
$+e^{-j\cdot\frac{2\pi}{8}\cdot 2k}\left[x[2]+x[6]\cdot e^{-j\cdot\frac{2\pi}{8}\cdot 4k}\right]+e^{-j\cdot\frac{2\pi}{8}\cdot 3k}\left[x[3]+x[7]e^{-j\cdot\frac{2\pi}{8}\cdot 4k}\right]$

$x'[0]+e^{-j\cdot\frac{2\pi}{8}\cdot k}x'[2]+e^{-j\cdot\frac{2\pi}{8}\cdot 2k}x'[4]+e^{-j\cdot\frac{2\pi}{8}\cdot 3k}x'[6]$

针对 $N=2^M$ 序列

$$a_k = x[0] + x[2]\cdot e^{-j\cdot\frac{2\pi}{16}\cdot 2} + x[4]\, e^{-j\cdot\frac{2\pi}{16}\cdot 4} + x[8]\, e^{-j\cdot\frac{2\pi}{16}\cdot 8} + x[10]$$

4位.



4进制位反转

1. Stockham 原理 + 实验. 规模界限在哪里?
2. SIMD 或 OPENMPI 优化
3. 卷积实现 + 优化
4. FFTW 及 FFT 内置比较.