

第六章 拉普拉斯变换

回顾: Chap 2 中, LTI 对应指数响应

如果我们定义:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-st} dt \quad (\text{拉普拉斯变换})$$

$$h(t) \xrightarrow{L} H(s) \text{ 或者 } L[h(t)] = H(s) \text{ 或者 } L^{-1}[H(s)] = h(t)$$

那么有:

$$e^{s_0 t} \xrightarrow{} H(s) \xrightarrow{} H(s_0) e^{s_0 t}$$

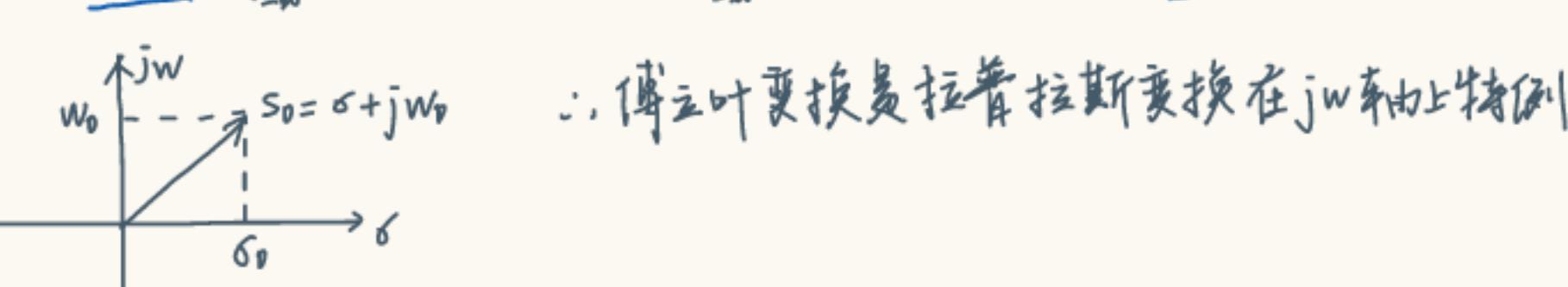
$$e^{s_0 t} \xrightarrow{LT} H(s_0) e^{s_0 t}$$

将原先的 $h(t)$ 换成 $X(t)$:

$$\text{拉普拉斯变换-定义: } X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) e^{-st} dt, \text{ 记作 } \xrightarrow{L} X(t) \xrightarrow{L} X(s). \quad L[X(t)] = X(s).$$

这里 $s = \sigma + j\omega$ 为复数;

$$\therefore X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) e^{-(\sigma+j\omega)t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [X(t) e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}[X(t) e^{-\sigma t}]$$



逆变换: $\because X(s) = \mathcal{F}[X(t) e^{-\sigma t}]$

$$\therefore X(t) e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(s) e^{j\omega t} dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(s) e^{(\sigma+j\omega)t} dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(s) e^{\sigma t} dw$$

由于 $s = \sigma + j\omega$ \therefore 当 $\sigma = 0$ 时, $ds = j\omega dw$

$$\therefore X(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{\sigma t} ds$$

$$\text{同时, } X(t) = -e^{-\sigma t} u(-t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+\sigma}, \text{ Re}\{s\} < -\sigma.$$

例6.1

$$x(t) = e^{-at} u(t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+a}, \text{ Re}\{s\} > -a, \text{ 且 } a \in \mathbb{R}, s = \sigma + j\omega.$$

$$\text{解: } X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at} u(t) \cdot e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s+a)t} dt = \left[-\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \right]_0^{+\infty}$$

$$= -\frac{1}{s+a} [e^{-(s+a)\cdot \infty} - 1]$$

△ Tips: a 为复数时也可以代

$$\therefore e^{-(s+a)\cdot \infty} = e^{-(\sigma+a)\cdot \infty} \cdot e^{-j\omega \cdot \infty}$$

$$\therefore \text{① } \sigma + a > 0, e^{-(\sigma+a)\cdot \infty} = e^{-\infty} = 0 \quad \therefore X(s) = \frac{1}{s+a}$$

② $\sigma + a < 0, e^{+\infty} \rightarrow \infty$. 不收敛.

$$\text{③ } \sigma + a = 0, e^{-(\sigma+a)\cdot \infty} = 1, e^{-j\omega \cdot \infty} = \cos[\omega \cdot (+\infty)] - j \sin[\omega \cdot (+\infty)].$$

若 $\omega \neq 0$, ③ 也不收敛.

例2:

$$\begin{aligned} u(t) &\xrightarrow{L} \frac{1}{s}, \text{ Re}\{s\} > 0 \\ -u(-t) &\xrightarrow{L} \frac{1}{s}, \text{ Re}\{s\} < 0 \end{aligned}$$

令 $a=0$ 即可.

$$\text{例3: } e^{-bt}|t| \xrightarrow{L} \frac{-2b}{s^2 - b^2}, -b < \text{Re}\{s\} < b$$

$$\text{解: } e^{-bt}|t| = e^{-bt} u(t) + e^{bt} u(-t)$$

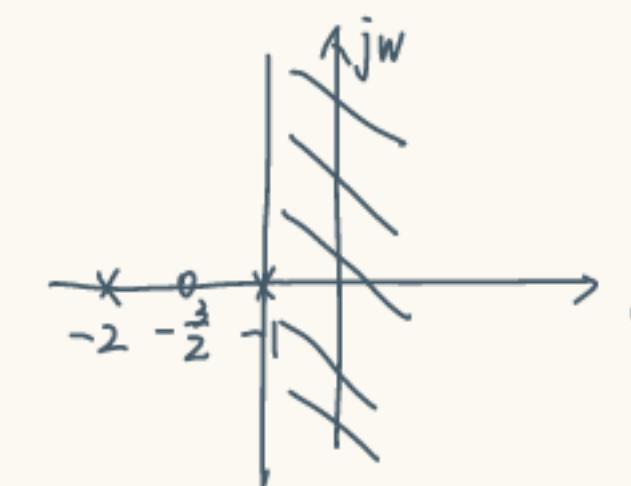
$$\therefore e^{-bt} u(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{s+b}, \text{ Re}\{s\} > -b$$

$$e^{bt} u(-t) \xrightarrow{L} -\frac{1}{s-b}, \text{ Re}\{s\} < b.$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{1}{s+b} - \frac{1}{s-b} = \frac{2b}{s^2 - b^2}, -b < \text{Re}\{s\} < b.$$

零极点图:

$$X(s) = \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)}, \text{ Re}\{s\} > -1$$



例:

$$s(t) \xrightarrow{L} 1, \text{ 收敛域整个S平面}$$

解: 由于 $\int_{-\infty}^{+\infty} X(t) dt = X(s)$

$$\therefore X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-st} dt = 1$$

由此, 可推导一系列变换:

$$\text{例1: } e^{-at} \sin(\omega_0 t) u(t) \xrightarrow{L} \frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}, \text{ Re}\{s\} > -a$$

$$\text{解: } e^{-at} \sin(\omega_0 t) u(t)$$

$$= \frac{1}{2j} e^{-at} e^{j\omega_0 t} u(t) - \frac{1}{2j} e^{-at} e^{-j\omega_0 t} u(t)$$

$$\therefore L[e^{-at} \sin(\omega_0 t) u(t)]$$

$$= \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{s+a-j\omega_0} - \frac{1}{s+a+j\omega_0} \right], \text{ Re}\{s\} > -a$$

$$\text{通过后, } e^{-at} \sin(\omega_0 t) u(t) \xrightarrow{L} \frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}, \text{ Re}\{s\} > -a$$

例2:

例:

$$e^{-at} \cos(\omega_0 t) u(t) \xrightarrow{L} \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}, \text{ Re}\{s\} > -a$$

推导:

$$e^{-at} \cos(\omega_0 t) u(t) = \frac{1}{2} e^{-at} e^{j\omega_0 t} u(t) + \frac{1}{2} e^{-at} e^{-j\omega_0 t} u(t)$$

所以,

$$L[e^{-at} \cos(\omega_0 t)] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s+a-j\omega_0} + \frac{1}{s+a+j\omega_0} \right], \text{ Re}\{s\} > -a$$

所以,

$$e^{-at} \cos(\omega_0 t) u(t) \xrightarrow{L} \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$$

$$\text{例3: } X(t) = e^{-2t} u(t) + e^{-t} \cos(3t) u(t)$$

$$\text{解: } X(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{s+1}{(s+1)^2 + 3^2} = \frac{2s^2 + 5s + 12}{(s+2)(s^2 + 2s + 10)}. \text{ Re}\{s\} > -1.$$

$$(Re\{s\} > -2) \quad (Re\{s\} > -1)$$

时域特性与拉氏变换收敛域的关系

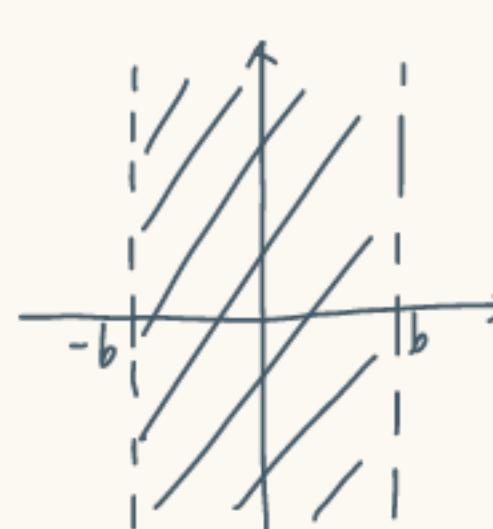
性质1: $X(s)$ 的收敛域在 S 平面上由平行于 $j\omega$ 轴 (虚轴) 的带状区域所组成。

性质2: 对于有理函数的拉氏变换 $X(s)$ 来说, 收敛域内不包含任何极点。

性质3: 如果 $x(t)$ 是有限时间信号 (时限信号), 即 $x(t)$ 只在有限长的时间区间有值,

不收敛点

且 $x(t)$ 绝对可积, 那么 $x(t)$ 的拉氏变换收敛域为整个 S 平面。



证明: 由 $x(t)$ 时限且绝对可积知:

$$\int_{T_1}^{T_2} |x(t)| dt < +\infty$$

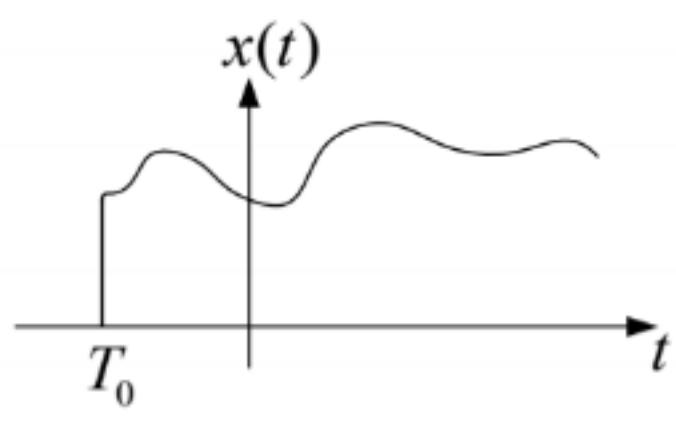
$$|X(s)| = \left| \int_{T_1}^{T_2} x(t) e^{-st} dt \right|$$

$$\leq \int_{T_1}^{T_2} |x(t)| |e^{-st}| |e^{-j\omega t}| dt \leq \max\{e^{-\sigma T_1}, e^{-\sigma T_2}\} \int_{T_1}^{T_2} |x(t)| dt < +\infty$$

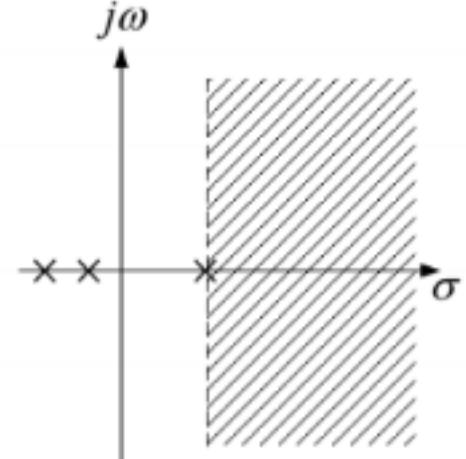
性质4: 如果 $x(t)$ 是右边信号, 即 $x(t)$ 只在区间 $(T_0, +\infty)$ 有值,

$$\begin{cases} x(t) \neq 0, & \text{当 } t \in [T_0, +\infty) \text{ 时} \\ x(t) = 0, & \text{当 } t \in (-\infty, T_0) \text{ 时} \end{cases}$$

且它的拉氏变换 $X(s)$ 存在, 则 $X(s)$ 的收敛域在其最右边极点的右边。



(a) 右边信号 $x(t)$



(b) $X(s)$ 的收敛域为最右边极点的右边

推论: 因果信号也是右边信号, 它的拉氏变换收敛域在其最右边极点的右边。

证明: 我们需要证明, 如果 $x(t)$ 仅在 $[T_0, +\infty)$ 有值, 且它的拉氏变换 $X(s)$ 对 σ_1 收敛, 则 $X(s)$ 对任意 $\sigma > \sigma_1$ 都收敛。

设 $\sigma > \sigma_1$, 那么当 $t \geq 0$ 时, 有 $e^{-\sigma t} \leq e^{-\sigma_1 t}$ 。我们分两种情况讨论:

(1) 若 $T_0 \geq 0$, 则有:

$$\int_{T_0}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt \leq \int_{T_0}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma_1 t} dt < +\infty$$

命题成立。

(2) 若 $T_0 < 0$, 则有:

$$\int_{T_0}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt = \int_{T_0}^0 |x(t)| e^{-\sigma t} dt + \int_0^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt$$

分别对以上两项进行分析。第一项 $\int_{T_0}^0 |x(t)| e^{-\sigma t} dt$, 我们可以将其看成是一个仅在 $[T_0, 0]$ 有值的时限信号, 那么根据性质3, 其收敛域为整个 S 平面, 所以有 $\int_{T_0}^0 |x(t)| e^{-\sigma t} dt < +\infty$ 。

再看第二项:

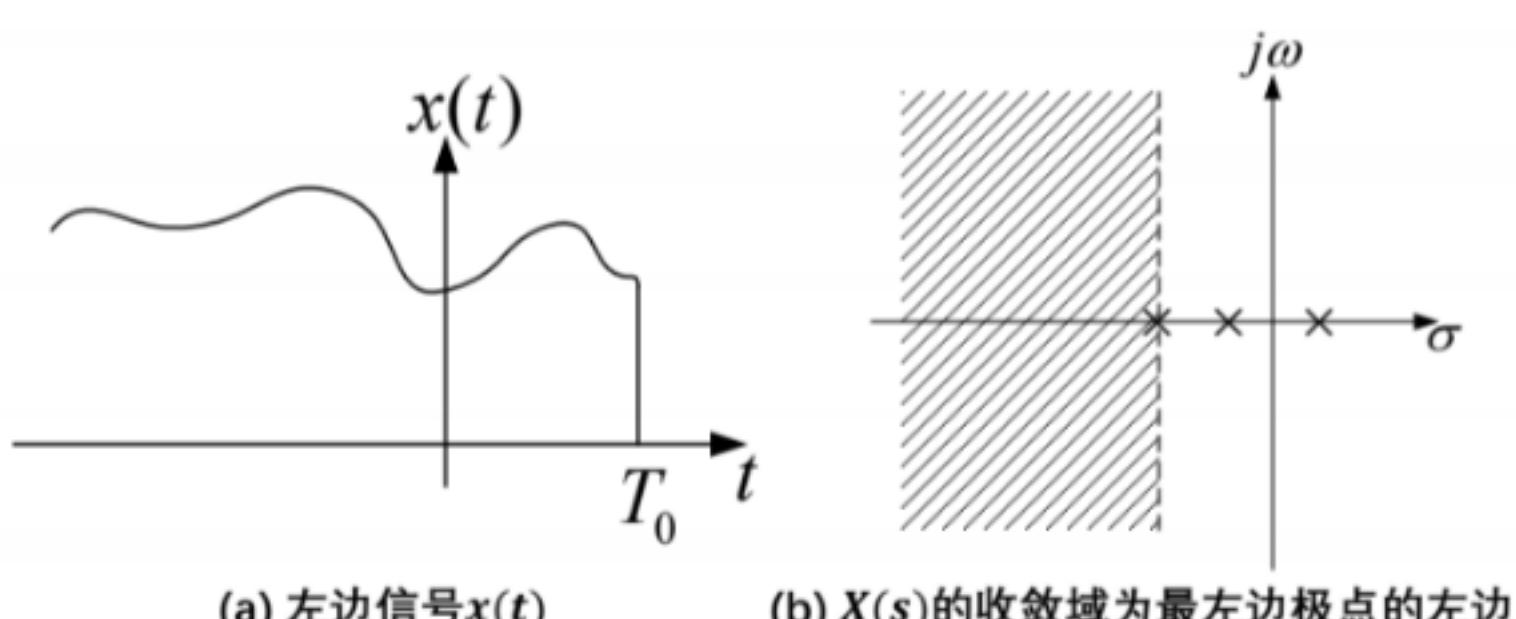
$$\int_0^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt \leq \int_0^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma_1 t} dt < +\infty$$

命题成立。

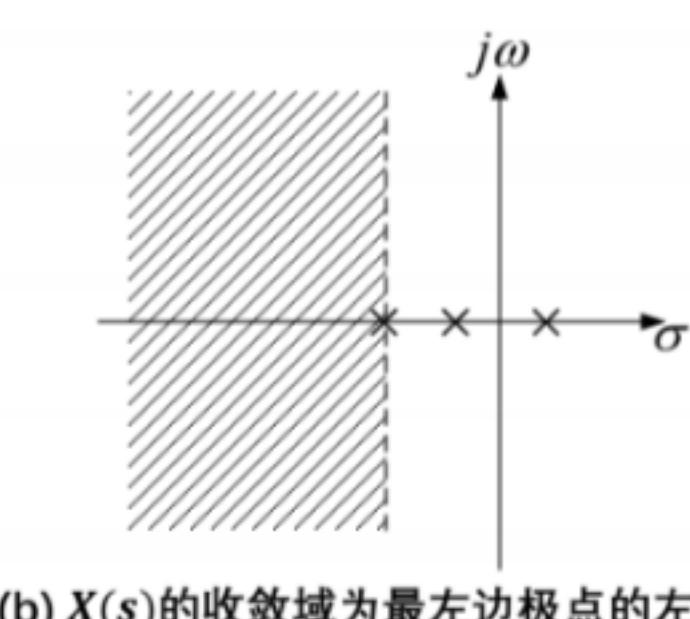
性质5: 如果 $x(t)$ 是左边信号, 即 $x(t)$ 只在区间 $(-\infty, T_0]$ 有值,

$$\begin{cases} x(t) \neq 0, & \text{当 } t \in (-\infty, T_0] \text{ 时} \\ x(t) = 0, & \text{当 } t \in (T_0, +\infty) \text{ 时} \end{cases}$$

且它的拉氏变换 $X(s)$ 存在, 则 $X(s)$ 的收敛域在其最左边极点的左边。



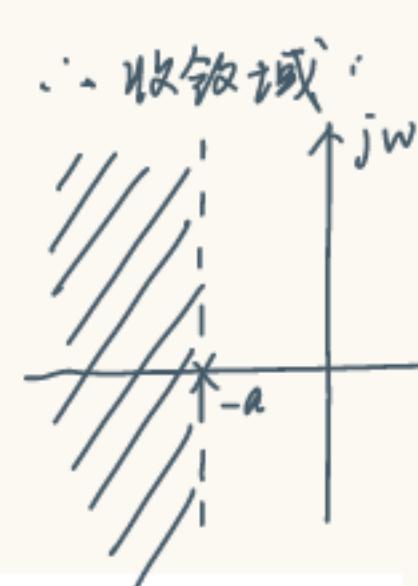
(a) 左边信号 $x(t)$



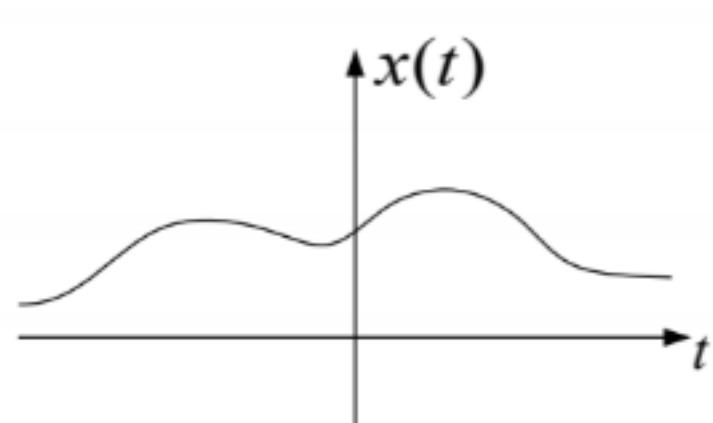
(b) $X(s)$ 的收敛域为最左边极点的左边

$$\text{例: } X(s) = -e^{-at} u(-t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+a}$$

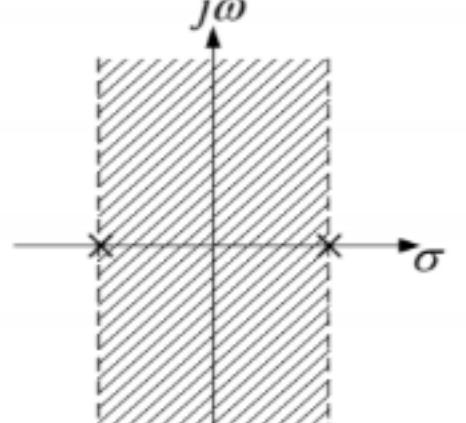
$x(t)$ 为左边信号, 极点 $s = -a$



性质6: 如果 $x(t)$ 是双边信号, 且它的拉氏变换 $X(s)$ 存在, 则 $X(s)$ 的收敛域是 S 平面上的带状区域。



(a) 双边信号 $x(t)$

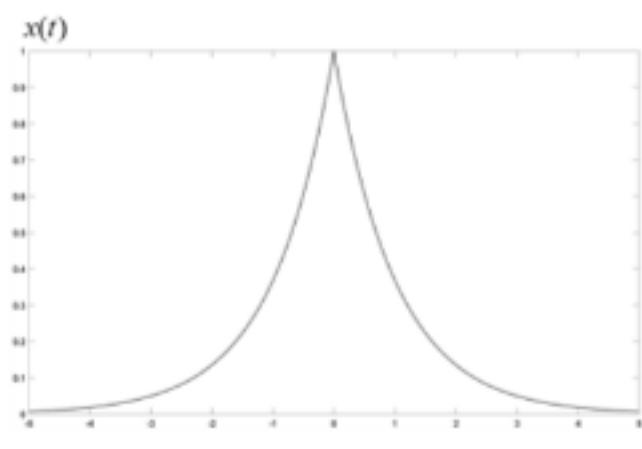


(b) $X(s)$ 的收敛域为带状区域

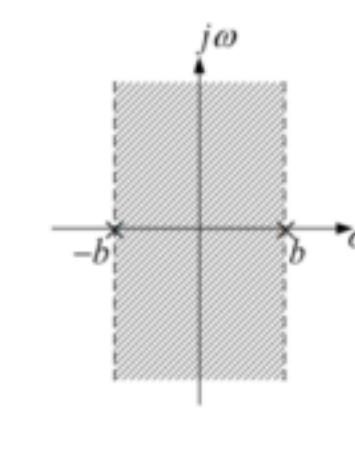
例:

$$x(t) = e^{-b|t|} \xrightarrow{L} X(s) = \frac{-2b}{s^2 - b^2}, \quad (-b < \operatorname{Re}\{s\} < b)$$

$x(t)$ 是双边信号, 因此它的收敛域是带状区域。



(a) $x(t) = e^{-b|t|}$ 的时域波形



(b) $X(s) = \frac{-2b}{s^2 - b^2}$ 的收敛域

性质7 $x(t)$ 稳定信号 + 拉氏变换 $X(s)$ 存在 \Rightarrow 收敛域包含 $j\omega$ 轴。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < +\infty$$

证明: $X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$. 在 $j\omega$ 轴上, $s = j\omega$.

$$\therefore X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\begin{aligned} |\mathcal{X}(s)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| \cdot |e^{-j\omega t}| dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < +\infty \end{aligned}$$

$\therefore X(s)$ 在 $j\omega$ 轴上始终收敛。(收敛域包含 $j\omega$ 轴)

反过来也对: 若 $X(s)$ 在 $j\omega$ 轴上始终收敛, 则 $X(s)$ 为稳定信号。

需要记住:

(1) 因果信号 \Rightarrow 右边信号 \Rightarrow 收敛域是最右边极点的右边。
请注意, 右边信号并不能保证系统是因果的。

(2) 稳定的 LTI 系统 $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty \Leftrightarrow$ 收敛域包含 $j\omega$ 轴。

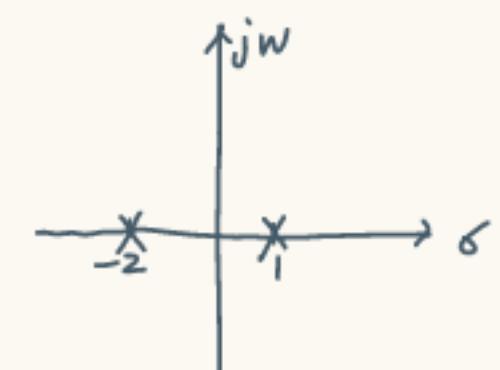
例题:

例1: 如果一个信号 $x(t)$ 的拉氏变换为:

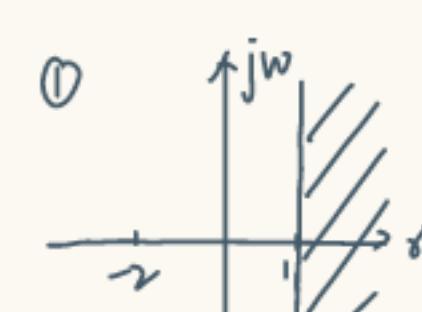
$$X(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)}$$

求该信号的表达式。

$$\begin{aligned} \text{解: 先拆 } X(s). \quad X(s) &= \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+2} \\ &= \frac{\frac{1}{3}}{s-1} - \frac{\frac{1}{3}}{s+2} \end{aligned}$$

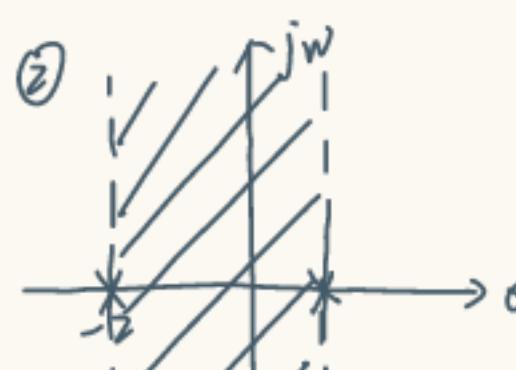


极点 -1, -2. 有三种可能:



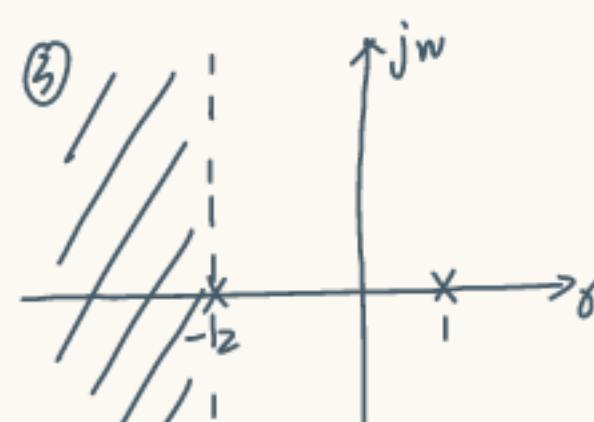
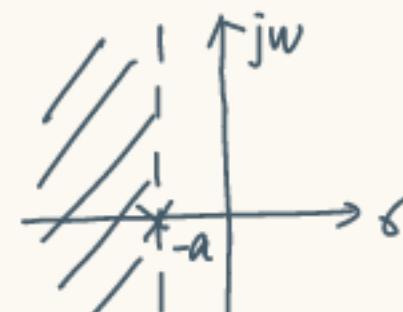
利用: $X(s) = e^{-at} u(t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+a}$, $\operatorname{Re}\{s\} > -a$.

$$\text{有: } x(t) = \frac{1}{3} e^t u(t) - \frac{1}{3} e^{-2t} u(t)$$



左边信号: $X(s) = -e^{-at} u(-t) \xrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+a}$

$$\therefore x(t) = -\frac{1}{3} e^t u(-t) - \frac{1}{3} e^{-2t} u(-t)$$



$$x(t) = -\frac{1}{3} e^t u(-t) + \frac{2}{3} e^{-2t} u(-t)$$

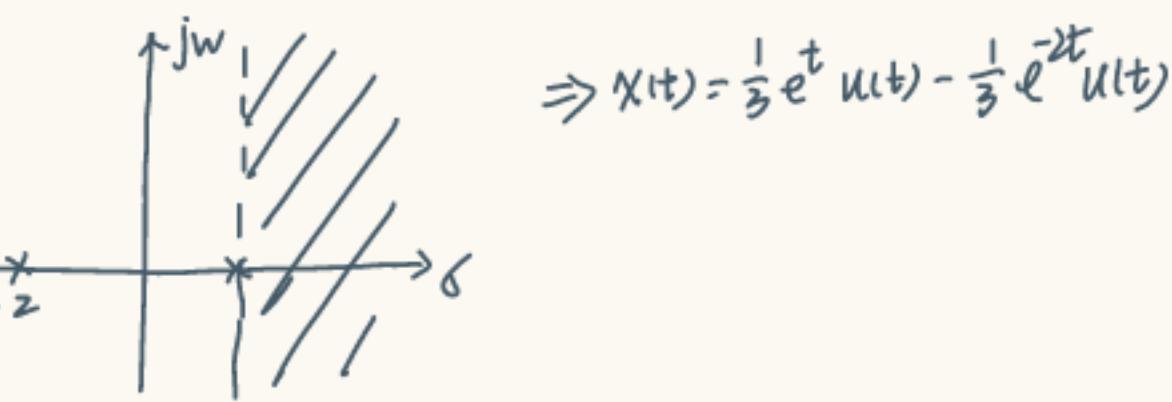
例2: 如果一个因果信号 $x(t)$ 的拉氏变换为:

$$X(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)}$$

求该信号的表达式。

解: 因果信号 \Rightarrow 右边信号 \Rightarrow 收敛域是右侧极点。

∴ 仅



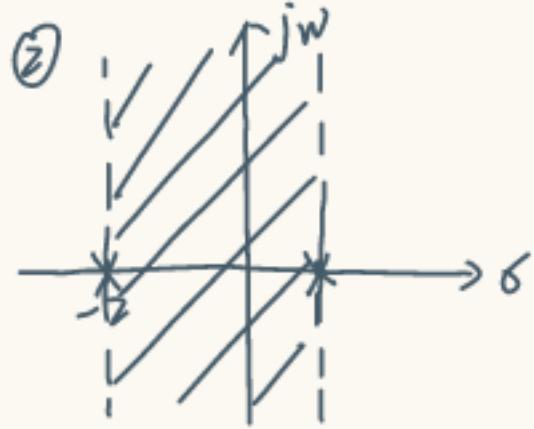
例3: 如果一个稳定信号 $x(t)$ 的拉氏变换为:

$$X(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)}$$

求该信号的表达式。

解: 利用稳定信号 \Rightarrow 收敛域包含 $j\omega$ 轴:

$$\text{仅 } \therefore X(t) = -\frac{1}{3}e^t u(-t) - \frac{1}{3}e^{-2t} u(t)$$



拉普拉斯变换的性质

1 线性性质:

如果

$$x_1(t) \xrightarrow{L} X_1(s), \quad ROC = R_1$$

$$x_2(t) \xrightarrow{L} X_2(s), \quad ROC = R_2$$

则有:

$$ax_1(t) + bx_2(t) \xrightarrow{L} aX_1(s) + bX_2(s)$$

ROC至少包含 $R_1 \cap R_2$ 。

收敛域可能扩大。

一个线性求和后收敛域扩大的例子如下。若 $x_1(t) = e^{-t}u(t)$, 其拉氏变换收敛域为 $Re\{s\} > -1$; $x_2(t) = -e^{-t}u(t)$, 其拉氏变换收敛域也为 $Re\{s\} > -1$ 。但 $x_1(t) + x_2(t) = 0$, 其拉氏变换收敛域却是整个S平面。

2 时域平移性质

若 $X(t) \xrightarrow{L} X(s)$, $ROC=R$, 则 $X(t-t_0) \xrightarrow{L} X(s)e^{-st_0}$, $ROC=R$.

对比傅立叶变换: ($s=j\omega$ 时特例)

若 $X(t) \xrightarrow{F} X(j\omega)$, 则 $X(t-t_0) \xrightarrow{F} X(j\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}$

证明: $L[X(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0) e^{-st} dt$. 换元, 令 $t' = t-t_0$

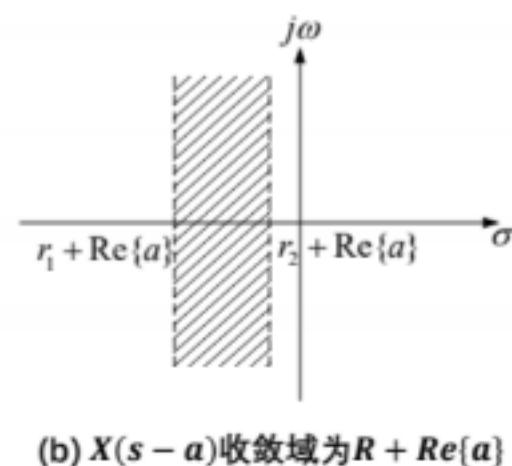
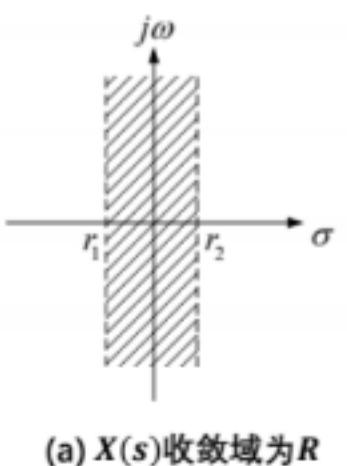
$$\therefore \text{原式} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{-s(t'+t_0)} \cdot e^{-st_0} dt' = e^{-st_0} \cdot X(s)$$

3 S域平移性质

若 $X(t) \xrightarrow{L} X(s)$, $ROC=R$, 则有 $e^{at} X(t) \xrightarrow{L} X(s-a)$, $ROC=R+Re\{a\}$

证明:

$$L[e^{at}x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{at}x(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-(s-a)t} dt = X(s-a)$$



4 尺度变换特性

若 $X(t) \xrightarrow{L} X(s)$, 那么 $X(at) \xrightarrow{L} \frac{1}{|a|} X(\frac{s}{a})$

$$ROC=R$$

$$ROC=Ra$$

5 时域微分性质

若 $X(t) \xrightarrow{L} X(s)$, $ROC=R$, 那么 $\frac{dX(t)}{dt} \xrightarrow{L} sX(s)$, ROC 至少包含 R .

(Tips: 收敛域扩大的原因: ← 原因: $s \cdot X(s)$ 过程中将 $s=0$ 的极点去掉)

$$sI(t) = \frac{d[X(t)]}{dt} \xrightarrow{L} s \cdot \frac{1}{s} = 1, \text{ 收敛域为整个平面.}$$

推论1: 复数微分, 有:

$$\frac{d^k X(t)}{dt^k} \xrightarrow{L} s^k X(s), \quad (ROC \text{至少包含 } R)$$

推论2:

$$\delta(t) \xrightarrow{L} 1, \quad \text{收敛域整个S平面}$$

$$\frac{d^k [\delta(t)]}{dt^k} \xrightarrow{L} s^k, \quad \text{收敛域整个S平面}$$

6 S域微分性质

若 $X(t) \xrightarrow{L} X(s)$, $ROC=R$, 则 $tX(t) \xrightarrow{L} -\frac{dX(s)}{ds}$

$$(对比傅立叶: $tX(t) \xrightarrow{F} j \cdot \frac{d(X(j\omega))}{d\omega} = -\frac{d(X(j\omega))}{d(j\omega)}$)$$

例1: 求 $te^{-at}u(t)$ 的拉氏变换

$$\text{解: } \because e^{-at}u(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{s+a}, \quad (Re\{s\} > -a)$$

$$\therefore te^{-at}u(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{(s+a)^2}, \quad (Re\{s\} > -a)$$

$$\therefore t^2 e^{-at}u(t) \xrightarrow{L} \frac{2}{(s+a)^3}, \quad (Re\{s\} > -a)$$

进一步, 我们可以利用S域平移性质得到如下公式:

$$te^{-at}u(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{(s+a)^2}, \quad Re\{s\} > -a$$

$$t^2 e^{-at}u(t) \xrightarrow{L} \frac{2}{(s+a)^3}, \quad Re\{s\} > -a$$

$$\frac{1}{n!} t^n e^{-at}u(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{(s+a)^{n+1}}, \quad Re\{s\} > -a$$

7 积分性质

若 $X_1(t) \xrightarrow{L} X_1(s)$, $X_2(t) \xrightarrow{L} X_2(s)$

$$ROC=R_1, \quad ROC=R_2.$$

那么 $X_1(t) * X_2(t) \xrightarrow{L} X_1(s)X_2(s)$, ROC 至少包含 $R_1 \cap R_2$.

Tips: 收敛域扩大: 零点和极点相消:

如果 $x_1(t) = u(t)$, 则有 $X_1(s) = \frac{1}{s}$, 收敛域为 $Re\{s\} > 0$;

如果 $x_2(t) = \delta'(t)$, 则有 $X_2(s) = s$, 收敛域为整个S平面。

此时有:

$$x_1(t) * x_2(t) = u(t) * \delta'(t) = \delta(t)$$

所以有:

$$L[x_1(t) * x_2(t)] = L[\delta(t)] = 1, \quad \text{收敛域为整个S平面}$$

8 时域积分性质

若 $X(t) \xrightarrow{L} X(s)$, $ROC=R$, 那么 $\int_{-\infty}^t X(\tau) d\tau \xrightarrow{L} \frac{1}{s} X(s)$.

收敛域至少包含 $R \cap \{Re\{s\} > 0\}$

证明: $\int_{-\infty}^t X(\tau) d\tau = X(t) * u(t)$

$$\therefore L[\int_{-\infty}^t X(\tau) d\tau] = L[X(t) * u(t)] = X(s) \cdot L[u(t)] = \frac{1}{s} X(s).$$

另一方面, 由于 $u(t)$ 拉氏变换收敛域为 $Re\{s\} > 0$, 所以 $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ 拉氏变换的收敛域至少包含 $R \cap \{Re\{s\} > 0\}$ 。

9 初值定理

初值定理: 如果 $x(t)$ 是一个因果信号, 且在原点处不包含脉冲或高阶奇点, 那么可以直接通过拉普拉斯变换计算出初始值 $x(0^+)$ 如下:

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sX(s)$$

证明: 首先, 我们把 $x(t)$ 进行泰勒展开:

$$x(t) = x(0^+) + x'(0^+)t + \frac{x''(0^+)}{2!}t^2 + \frac{x'''(0^+)}{3!}t^3 + \dots$$

因为 $x(t)$ 是一个因果信号, 所以我们有 $x(t) = x(t)u(t)$, 所以

$$x(t) = x(t)u(t) = x(0^+)u(t) + x'(0^+)tu(t) + \frac{x''(0^+)}{2!}t^2u(t) + \frac{x'''(0^+)}{3!}t^3u(t) + \dots$$

对等式两边进行拉普拉斯变换, 可得:

$$X(s) = \frac{x(0^+)}{s} + \frac{x'(0^+)}{s^2} + \frac{x''(0^+)}{s^3} + \frac{x'''(0^+)}{s^4} + \dots$$

以上公式两边同时乘以 s , 可得:

$$sX(s) = x(0^+) + \frac{x'(0^+)}{s} + \frac{x''(0^+)}{s^2} + \frac{x'''(0^+)}{s^3} + \dots$$

如果 $x(0)$ 的所有导数都是有限的, 则有:

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} sX(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \left[x(0^+) + \frac{x'(0^+)}{s} + \frac{x''(0^+)}{s^2} + \frac{x'''(0^+)}{s^3} + \dots \right] = x(0^+)$$

10 终值定理

终值定理: 如果 $x(t)$ 是一个因果信号, 且在原点处不包含脉冲或高阶奇点, 那么可以直接从拉普拉斯变换计算出 $x(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

证明: 考虑积分 $\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} x'(t)e^{-st} dt$

我们使用两种方法来计算这个积分。

(1)

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} x'(t)e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} x'(t)dt = \int_0^{+\infty} d[x(t)] = \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) - x(0)$$

(2)

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} x'(t)e^{-st} dt &= \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} e^{-st} d[x(t)] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} x(t)e^{-st} \Big|_{t=0}^{+\infty} - \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} x(t)d[e^{-st}] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} x(+\infty)e^{-s(+\infty)} - x(0) + \lim_{s \rightarrow 0} s \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st} dt \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) - x(0) \end{aligned}$$

比较 (1) 和 (2), 我们得到:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

例: $X(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-t}\cos(3t)u(t)$. 求 $x(10^t)$. 及 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$.

解:

根据例 9.4, 我们有

$$X(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{s+1}{(s+1)^2+9} = \frac{2s^2+5s+12}{(s+2)(s^2+2s+10)}, \text{Re}\{s\} > -1$$

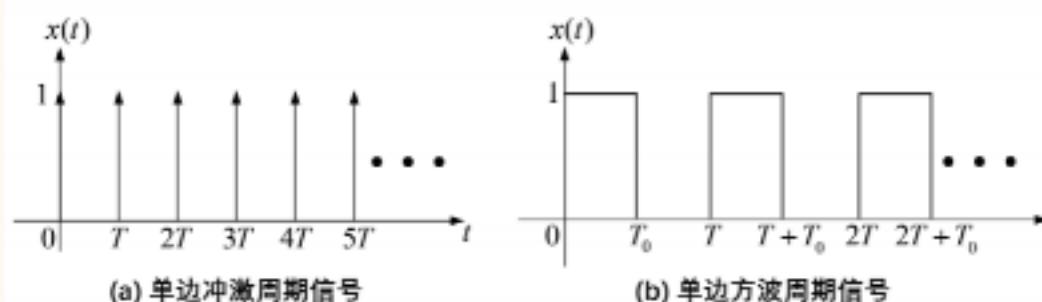
因此根据初值和终值定理, 我们有:

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sX(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{2s^3+5s^2+12s}{(s+2)(s^2+2s+10)} = 2$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2s^3+5s^2+12s}{(s+2)(s^2+2s+10)} = 0$$

周期信号的拉普拉斯变换

单边周期信号:



设单边周期信号的第一个周期的时间函数为 $x_1(t)$,

$$\text{那么 } X(t) = X_1(t) + X_1(t-T) + X_1(t-2T) + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} X_1(t-kT)$$

$$\therefore X(s) = X_1(s) + X_1(s)e^{-sT} + X_1(s)e^{-2sT} + \dots = X_1(s) \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-ksT}$$

利用等比数列求和公式可得:

$$X(s) = X_1(s) \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-ksT} = X_1(s) \frac{1 - \lim_{k \rightarrow +\infty} e^{-ksT}}{1 - e^{-sT}}$$

当 $\text{Re}\{s\} > 0$ 时, $\lim_{k \rightarrow +\infty} e^{-ksT} = 0$, 因此可得:

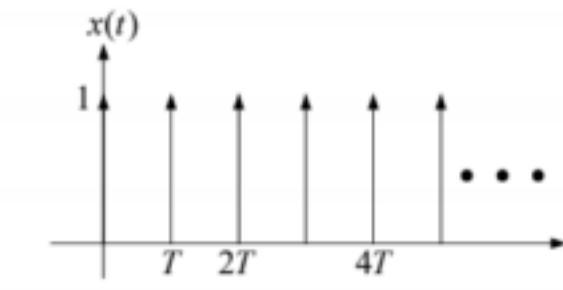
$$X(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} X_1(s), \quad \text{Re}\{s\} > 0$$

例题:

例 6.9: 求单边冲激周期信号

$$x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

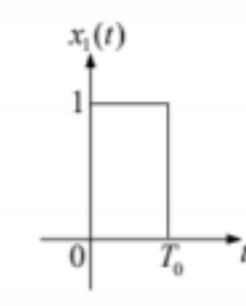
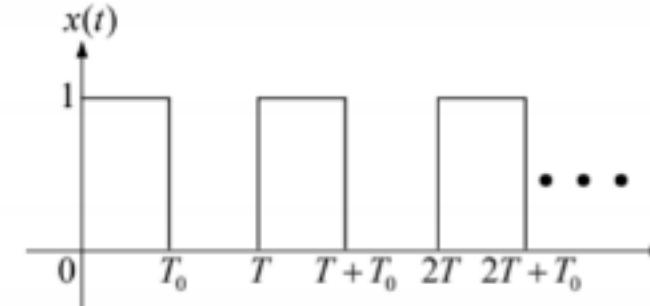
的拉氏变换 $X(s)$ 。



$$\text{解: } X_1(t) = \delta(t) \xrightarrow{s} X_1(s) = |$$

$$\therefore X(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}}, \quad \text{Re}\{s\} > 0$$

例 6.9: 求单边方波周期信号的拉氏变换 $X(s)$ 。



$$\text{解: } X_1(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-sT_0})$$

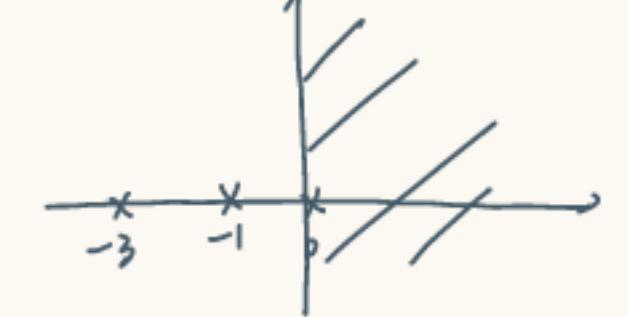
$$\therefore X(s) = \frac{1 - e^{-sT_0}}{s(1 - e^{-sT})}$$

拉普拉斯反变换习题

$$\text{例 1: } X(s) = \frac{(s+2)(s+3)}{s(s+1)(s+3)}. \quad \text{Re}\{s\} > 0.$$

收敛域:

$$\begin{aligned} \text{解: } X(s) &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+3} \\ &= \frac{100}{s} + \frac{-20}{s+1} + \frac{-\frac{10}{3}}{s+3} \end{aligned}$$



$$\therefore \text{都用 } e^{-at} u(t). \xrightarrow{s} \frac{1}{s+a}$$

$$\therefore x(t) = (100 - 20e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-3t})u(t)$$

例 2: 求下列函数的反变换。

$$X(s) = \frac{s^3 + 5s^2 + 9s + 7}{(s+1)(s+2)}, \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

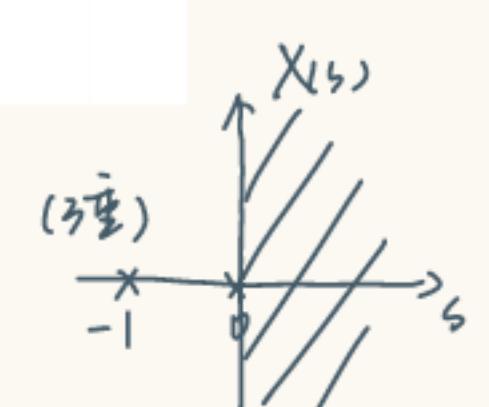
分子次数 > 分母次数, 不能直接拆.

$$\begin{aligned} \text{解: } X(s) &= \frac{s+2}{s^2+3s+2} + \frac{\frac{s+3}{s+2}}{(s+1)(s+2)} \\ &= s+2 + \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} \\ &\quad \frac{2s^2+6s+4}{s+3} \\ &\quad \frac{2s^2+6s+4}{s+3} \\ &\quad x(t) = s'(t) + 2s(t) + 2e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t). \end{aligned}$$

例 3: 求下列函数的反变换。

$$X(s) = \frac{s-2}{s(s+1)^3}, \quad \text{Re}\{s\} > 0$$

$$\begin{aligned} \text{解: } X(s) &= \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{(s+1)^3} + \frac{D}{s} \\ &= \frac{3}{(s+1)^3} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{s+1} - \frac{2}{s} \end{aligned}$$



B.C 未解: 代零点.

$$\begin{aligned} X(0) &= -1 + \frac{C}{3} + \frac{B}{9} + \frac{1}{9} \\ X(1) &= -\frac{1}{8} = \frac{3}{8} + \frac{B}{4} + \frac{C}{2} - 2 \\ \therefore B+3C &= 8 \\ B+2C &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{3}{(s+1)^3} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s} \\ &= \frac{3}{2}t^2e^{-t}u(t) + 2 \cdot te^{-t}u(t) + 2 \cdot e^{-t}u(t) - 2u(t). \end{aligned}$$

例14:

系统串联

例6.14: 求下列函数的反变换。

$$X(s) = \frac{s+3}{s^3 + 3s^2 + 7s + 5}, \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

$$\begin{aligned} -1+3-7+5 &= 0 \\ s+1 &\quad \begin{array}{c} s^2+2s+5 \\ \hline s^3+3s^2+7s+5 \\ s^3+s^2 \\ \hline 2s^2+7s+5 \\ 2s^2+2s \\ \hline 5s+5 \end{array} \\ \therefore X(s) &= \frac{s+3}{(s+1)(s^2+2s+5)} \end{aligned}$$

下面只能通过了: $-\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}$.

$$\therefore X(s) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{s+1} - \frac{s-1}{s^2+2s+5} \right)$$

$$\text{由 } e^{-at} \cos(\omega_0 t) u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}, \quad e^{-at} \sin(\omega_0 t) u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$$

$$\therefore \frac{s+1}{s^2+2s+5} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-t} \cos(2t) u(t)$$

$$\frac{z}{s^2+2s+5} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-t} \sin(2t) u(t)$$

$$\therefore X(t) = \frac{1}{2} [e^{-t} u(t) - e^{-t} \cos(2t) u(t) + e^{-t} \sin(2t) u(t)]$$

利用拉氏变换求解常系数微分方程.

$$\text{微分方程: } \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

对方程两侧拉氏变换: (时域微分性质)

$$Y(s) \cdot \sum_{k=0}^n a_k s^k = X(s) \cdot \sum_{k=0}^m b_k s^k$$

$$\therefore H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k s^k}{\sum_{k=0}^n a_k s^k}$$

$$\text{例1: 已知 } \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 2 \cdot \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{dx(t)}{dt} + 3 \cdot X(t)$$

$$\text{解: } (s^2 + 4s + 2) Y(s) = (2s^2 + s + 3) X(s)$$

$$\therefore H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2s^2 + s + 3}{s^2 + 4s + 2}$$

$$\text{例2: 已知 } H(s) = \frac{s}{s^2 + 4}, \text{ 求微分方程.}$$

$$y'' + 4y' = x'$$

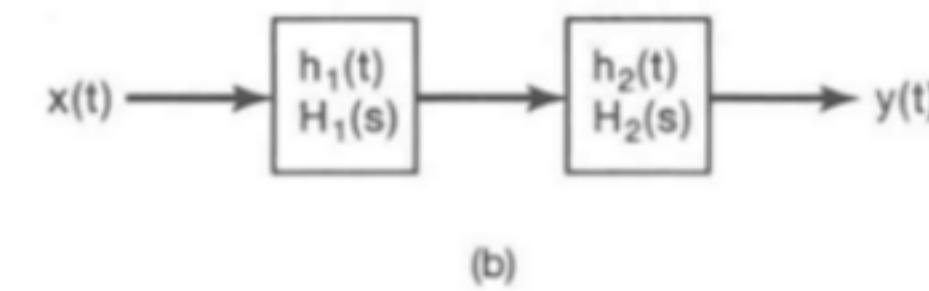
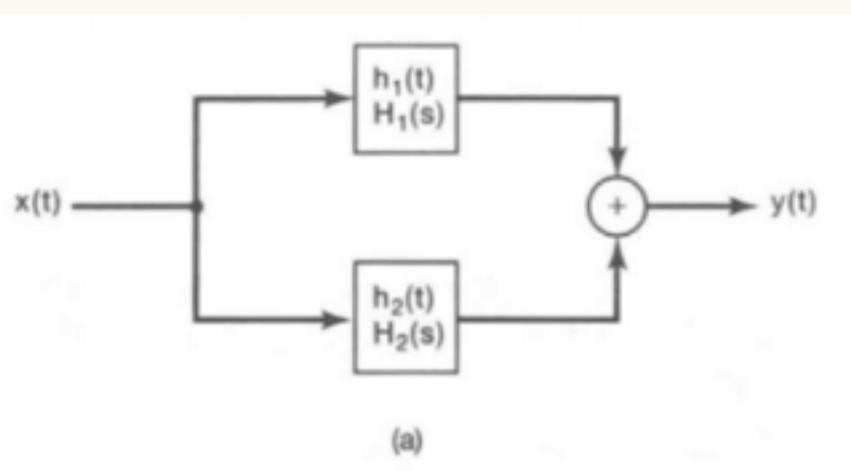
$$\text{例3: 已知 } H(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2s + 1}. \text{ 求微分方程.}$$

$$y'' + 2y' + y = x''$$

微分方程的框图表示

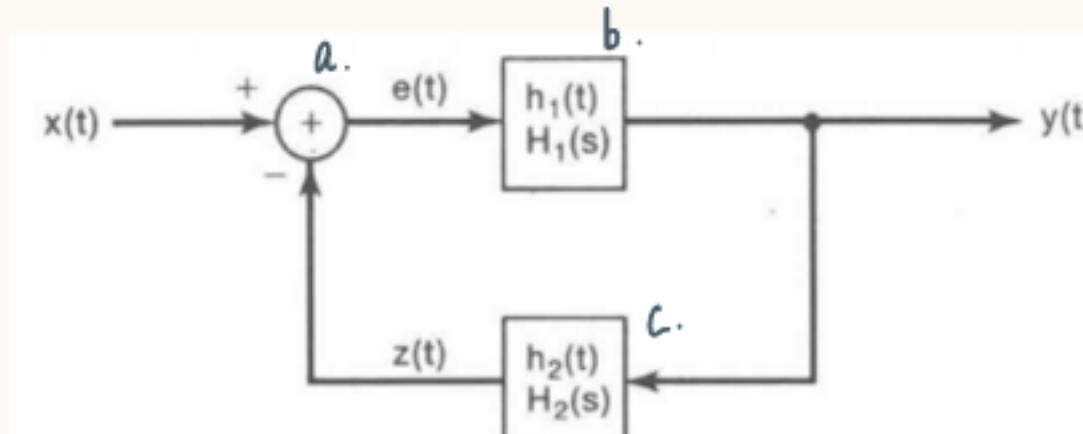
系统并联:

$$y(t) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) \text{ 或者 } Y(s) = X(s)H_1(s) + X(s)H_2(s)$$



$$y(t) = x(t) * h_1(t) * h_2(t) \text{ 或者 } Y(s) = X(s)H_1(s)H_2(s)$$

存在环路:



$$H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}$$

证明:

$$a. \quad E(s) = X(s) - Z(s).$$

$$b. \quad Y(s) = E(s) H_1(s).$$

$$c. \quad Z(s) = Y(s) H_2(s).$$

$\therefore b, c$ 代入 a. 消去 $E(s), Z(s)$, 有

$$\frac{Y(s)}{H_1(s)} = X(s) - Y(s) \cdot H_2(s)$$

$$\therefore \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{\frac{1}{H_1(s)} + H_2(s)} = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)} = H(s)$$

梅森公式(简化)

梅森公式(简化版): 如果一个框图满足以下两个条件:

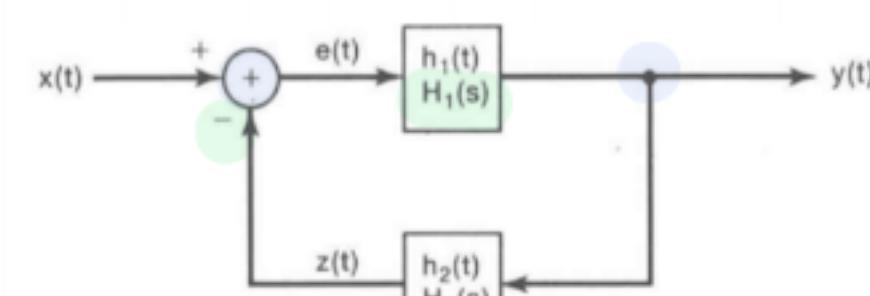
(1) 任何两条环路至少有一个共同的节点。

(2) 任何前向通路与任何环路都至少有一个共同的节点。

那么, 我们有: $X(t) \rightarrow y(t)$.

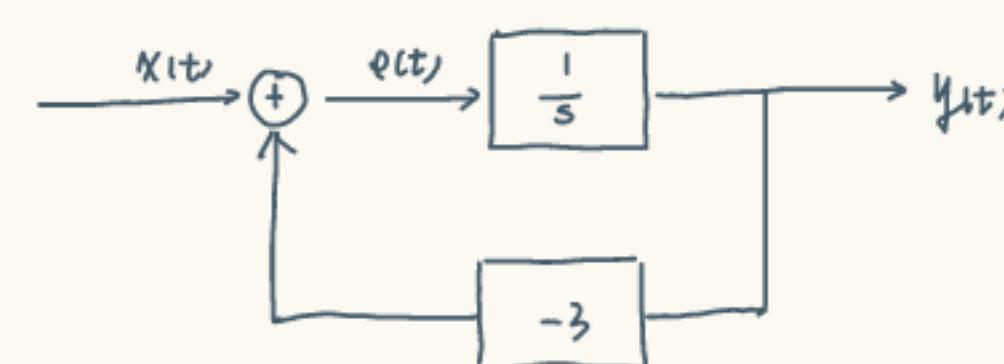
$$H(s) = \frac{\text{所有前向通路的增益和}}{1 - \text{所有环路的增益和}} \rightarrow H_1(s) \quad \rightarrow 1 - (-1) \cdot H_2(s) \cdot H_1(s)$$

例:



$$H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}$$

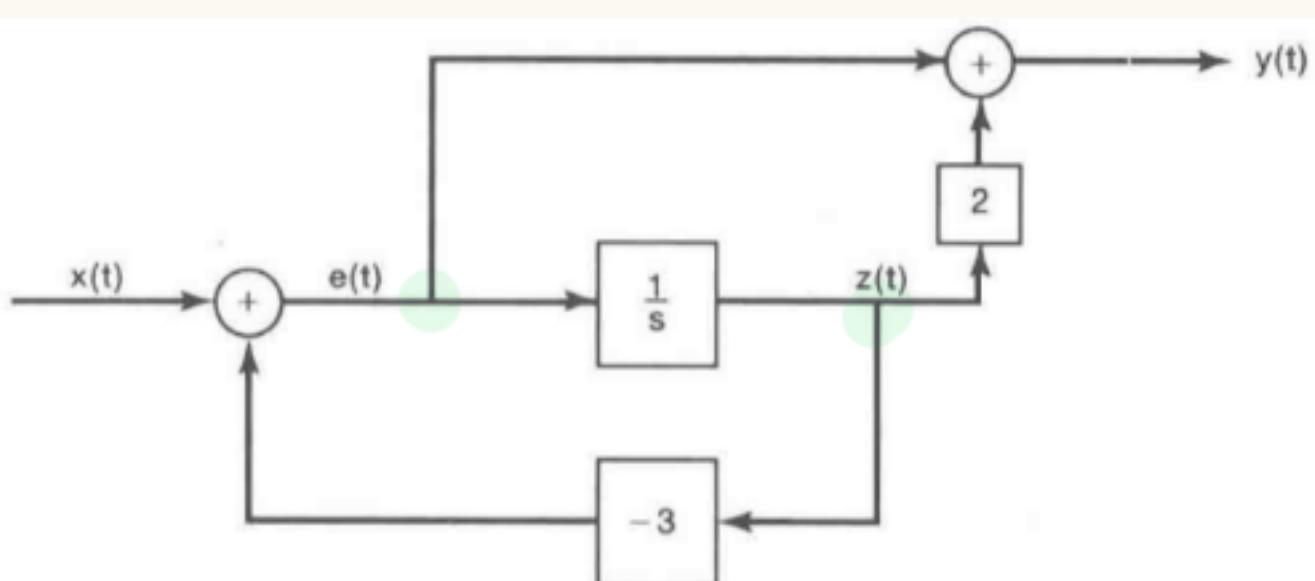
例: 导出 $H(s)$.



解: 符合梅森公式!

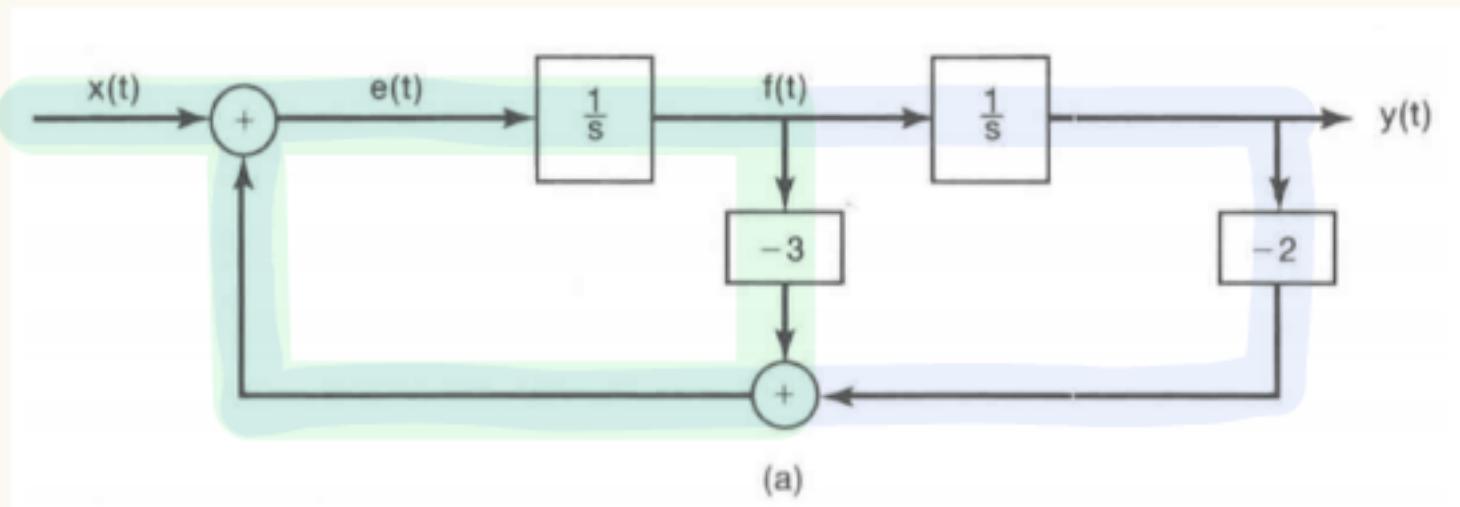
$$H(s) = \frac{\frac{1}{s}}{1 - \frac{1}{s} \cdot (-3)} = \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{3}{s}}$$

变式：



符合条件V

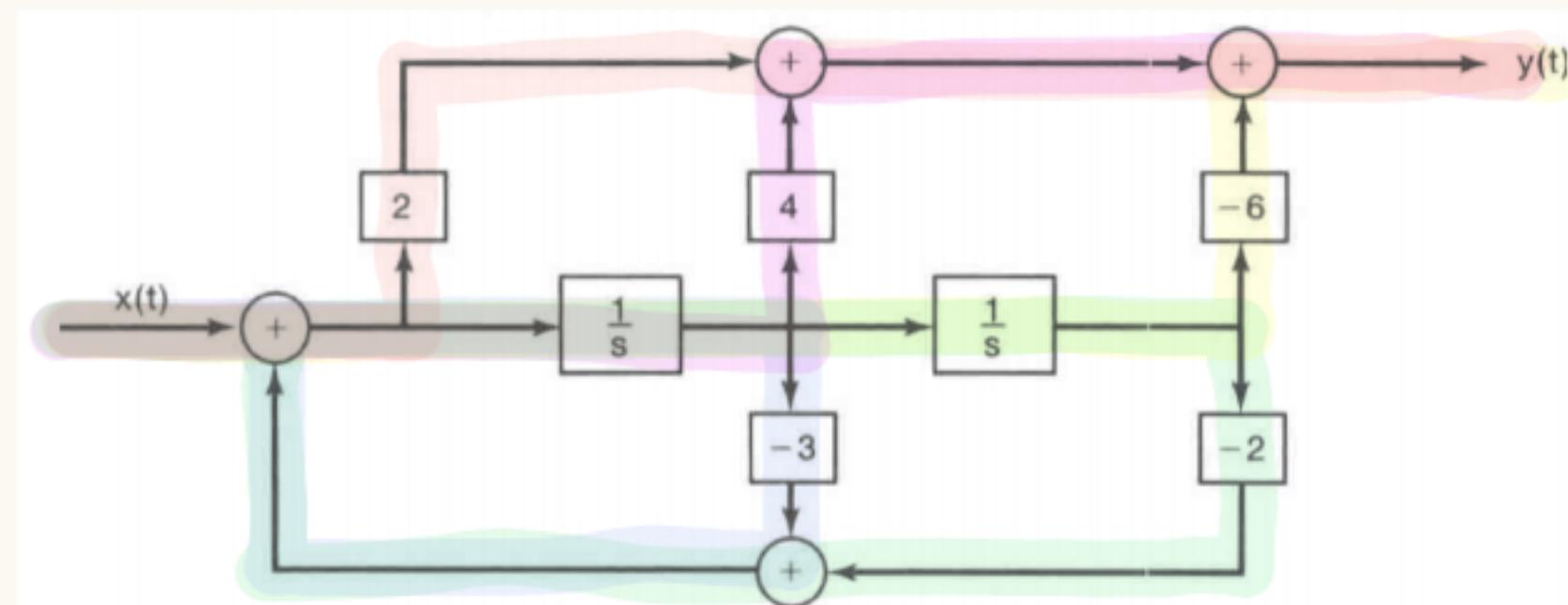
$$H(s) = \frac{1 + \frac{2}{s}}{1 - \frac{1}{s} \cdot (-3)} = \frac{s+2}{s+3}$$



$$H(s) = \frac{\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s}}{1 - \left[\frac{1}{s} \cdot (-3) + \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} \cdot (-2) \right]} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

微分方程表示：

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$



$$解: H(s) = \frac{2 + \frac{4}{s} - \frac{b}{s^2}}{1 - \left[\left(-\frac{3}{s} \right) + \frac{-2}{s^2} \right]} = \frac{2s^2 + 4s - b}{s^2 + 3s + 2}$$

微分方程表示：

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 2\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 4\frac{dx(t)}{dt} - 6x(t)$$

通用的微分方程框图表示

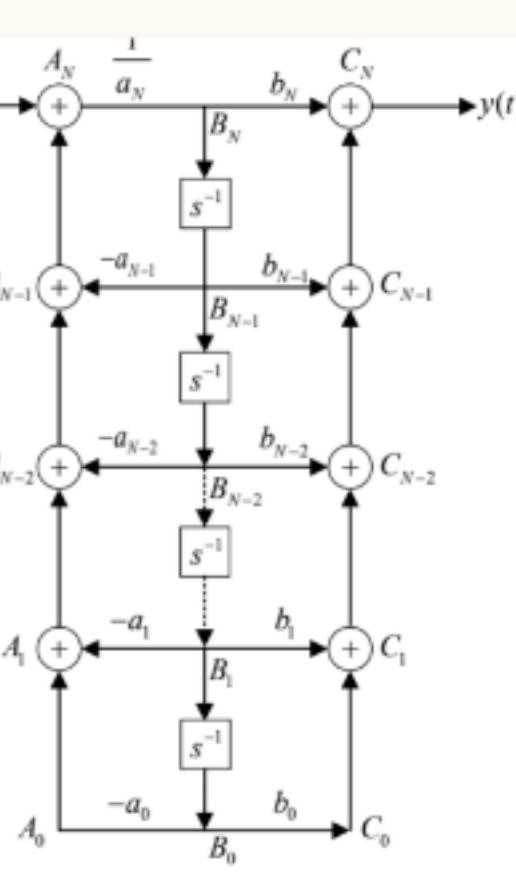
传递函数：

$$H(s) = \frac{\text{所有前向通路的增益和}}{1 - \text{所有环路的增益和}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{b_N + \frac{b_{N-1}}{a_N}s^{-1} + \frac{b_{N-2}}{a_N}s^{-2} + \dots + \frac{b_1}{a_N}s^{-(N-1)} + \frac{b_0}{a_N}s^{-N}}{1 + \frac{a_{N-1}}{a_N}s^{-1} + \frac{a_{N-2}}{a_N}s^{-2} + \dots + \frac{a_1}{a_N}s^{-(N-1)} + \frac{a_0}{a_N}s^{-N}} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^N b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} \end{aligned}$$

微分方程：

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^N b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$



微分方程的框图

例题：

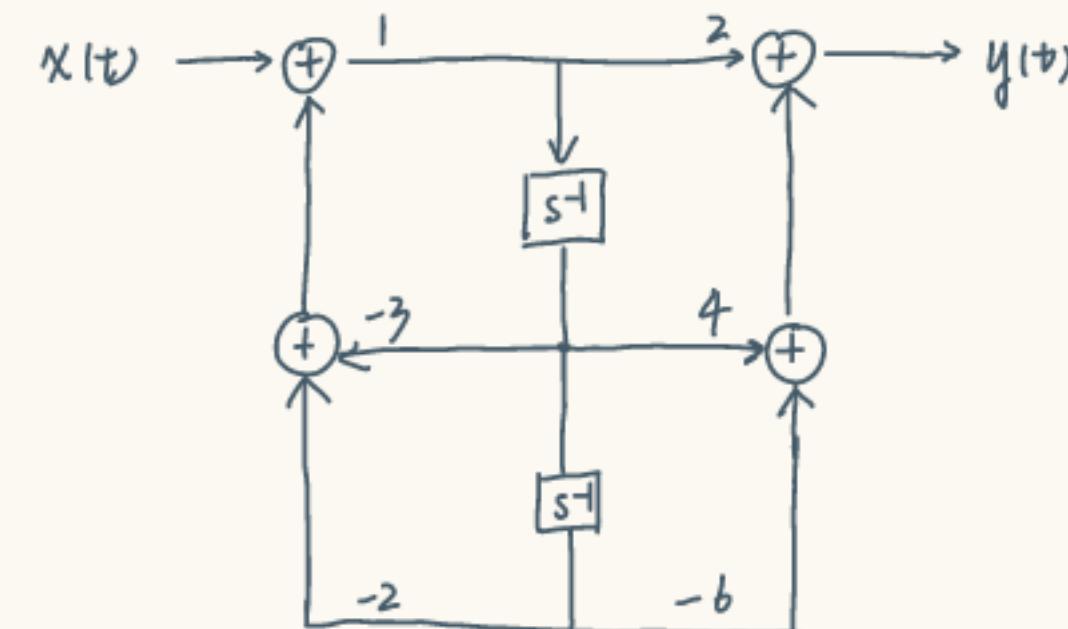
例 9.31：请画出下列微分方程的框图

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 2\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 4\frac{dx(t)}{dt} - 6x(t)$$

或者: $a_2 = 1, a_1 = 3, a_0 = 2, b_2 = 0, b_1 = 2, b_0 = 2$

$$H(s) = \frac{2s^2 + 4s - 6}{s^2 + 3s + 2}$$

解：几阶即几层



直接II型 (共用 s^{-1})

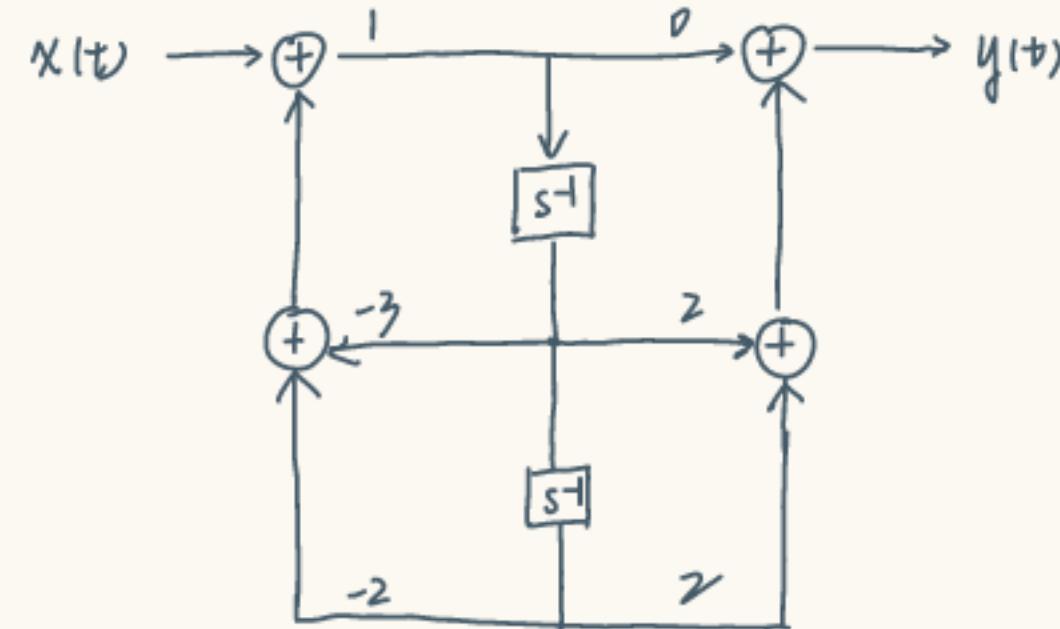
例：请画出下列微分方程的框图

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 2\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

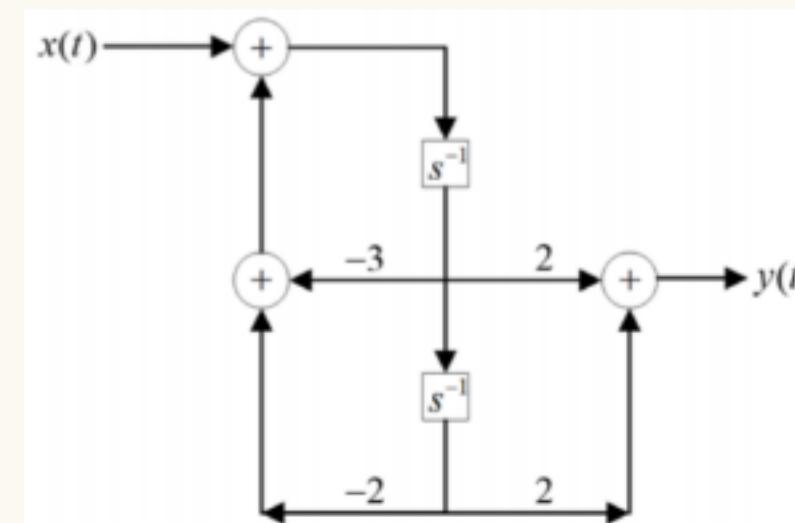
或者

$$H(s) = \frac{2s + 2}{s^2 + 3s + 2}$$

$$a_2 = 1, a_1 = 3, a_0 = 2, b_2 = 0, b_1 = 2, b_0 = 2$$



可简化为：

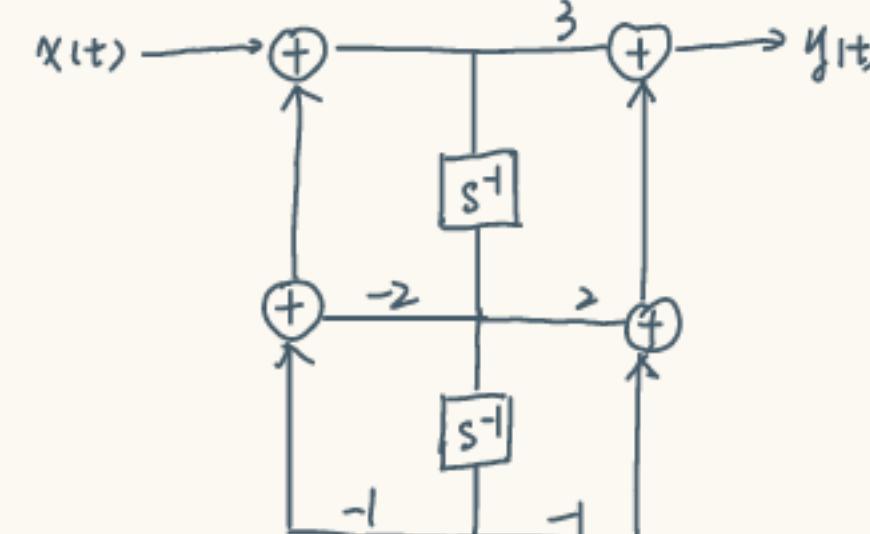


(b) 简化版本的系统模拟框图

注意：系数为1可以不写，系数为0可以不画。

例：

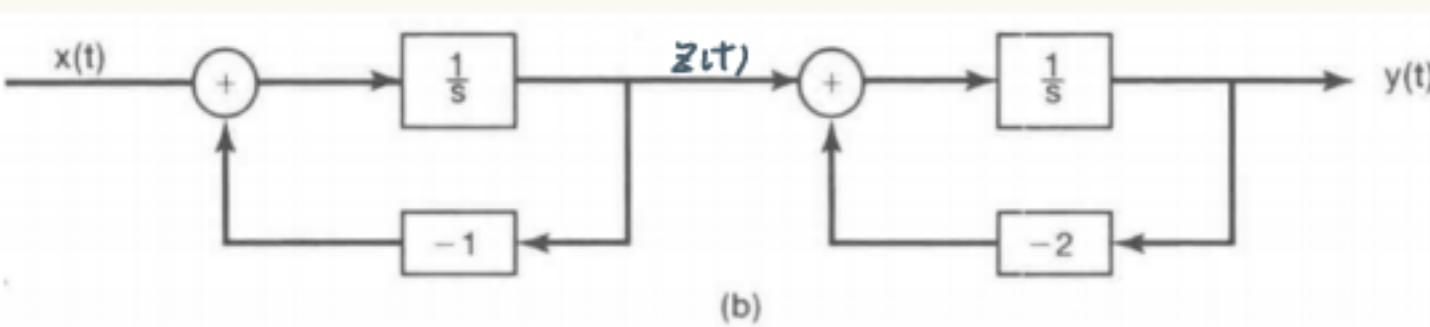
已知：



$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + \frac{dy(t)}{dt} = 3 \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2 \cdot \frac{dx(t)}{dt} - \frac{dx(t)}{dt}$$

串联框图:

例如:



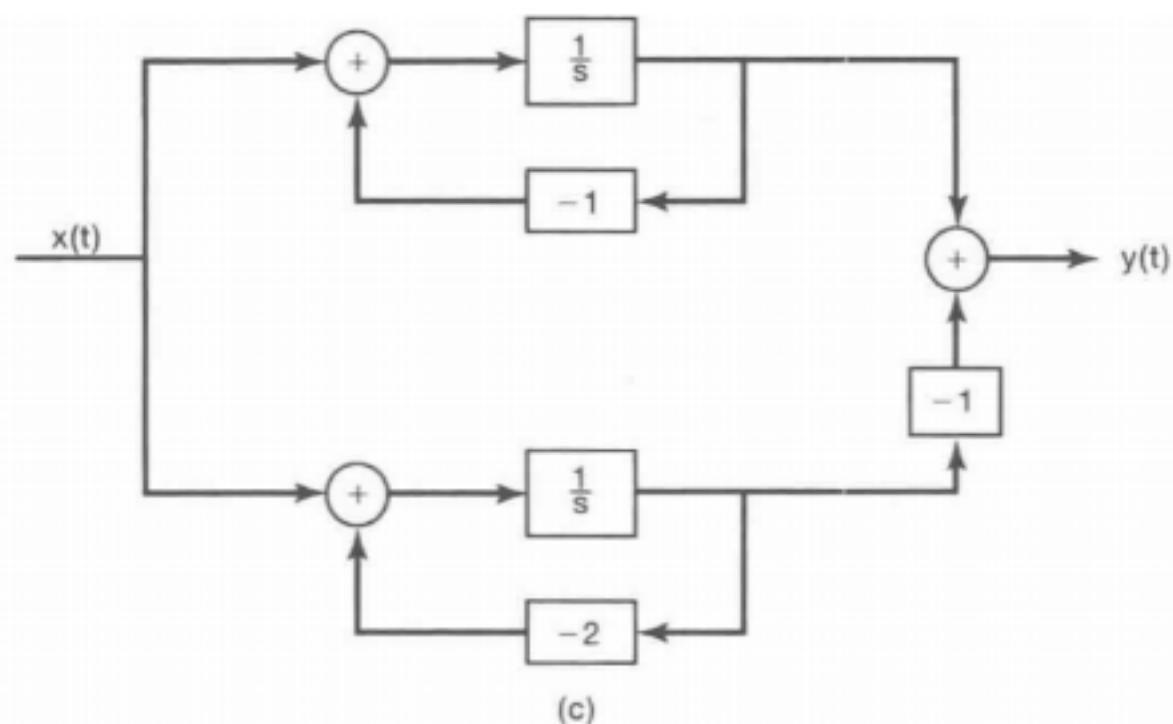
环路间没有反馈，不满足梅森公式。

$$H_1(s) = \frac{Z(s)}{X(s)} = \frac{\frac{1}{s}}{1 - (-1) \cdot \frac{1}{s}} = \frac{1}{s+1}$$

$$H_2(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$\therefore H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s+2}$$

并联框图(方法类似)



并联框图

$$H(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

微分方程表示:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

第一类微分方程的求解

例: 已知微分方程

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

试求当 $x(t) = e^{-t}u(t)$ 时，系统的零状态响应 $y(t)$ 。

解: (利用 拉普拉斯变换)

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+2}{s^2 + 4s + 3} = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)}$$

另外有:

$$X(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

所以有:

$$Y(s) = X(s)H(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2(s+3)} = \frac{\frac{1}{2}}{(s+1)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{s+1} - \frac{\frac{1}{4}}{s+3}$$

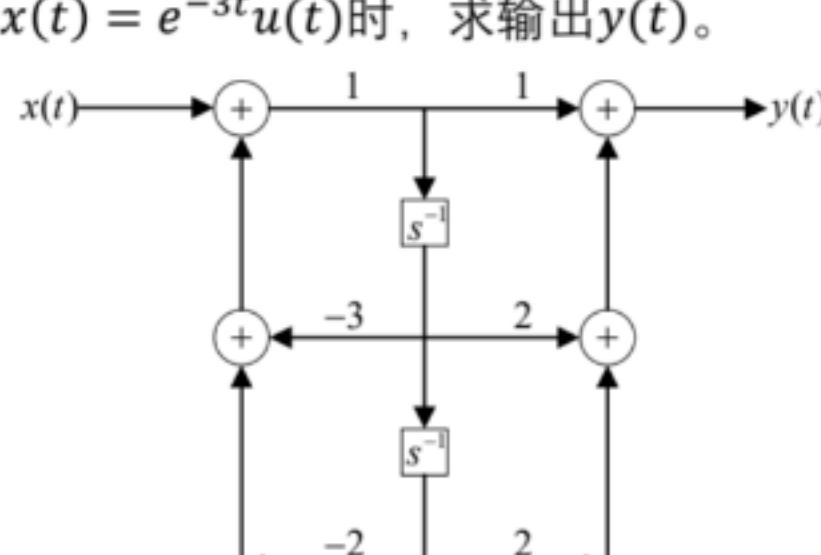
所以有:

$$y(t) = \frac{1}{2}te^{-t}u(t) + \frac{1}{4}e^{-t}u(t) - \frac{1}{4}e^{-3t}u(t)$$

有时会绘框图:

例: 一个因果LTI系统的系统框图如例6.35图所示。

- (1) 求该系统的系统函数 $h(t)$ 和 $H(s)$ 。
- (2) 写出该系统的微分方程。
- (3) 当输入 $x(t) = e^{-3t}u(t)$ 时，求输出 $y(t)$ 。



$$\text{解: } \frac{d^2x(t)}{dt^2} + 3 \cdot \frac{dx(t)}{dt} + 2 = \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + 2$$

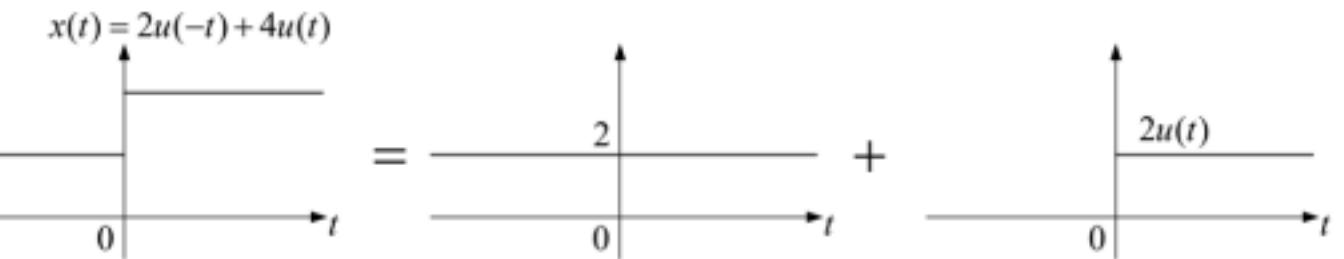
$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2 + 3s + 2}{s^2 + 2s + 2}$$

第二类微分方程求解

例2.14 设某因果LTI系统的微分方程如下:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} + 3x(t)$$

当输入 $x(t) = 2u(-t) + 4u(t)$ 时，如下图所示，求输出 $y(t)$ 。



解: $\because x(t) = z + z u(t)$

利用 $e^{st} \rightarrow [H(s)] \rightarrow H(s) e^{st}$

有 $z \rightarrow z H(s)$

$$H(s) = \frac{s^2 + 3}{s^2 + 4s + 3} \quad \therefore y_1(t) = z.$$

$$X_1(s) = 2u(s) \quad X_2(s) = \frac{2}{s}$$

$$\therefore Y_1(s) = \frac{2(s^2 + 3)}{s(s+1)(s+3)} = \frac{2}{s} - \frac{4}{s+1} + \frac{4}{s+3}$$

$$y_2(t) = 2u(t) - 4e^{-t}u(t) + 4e^{-3t}u(t)$$

$$\therefore y = y_1(t) + y_2(t) = 2 + 2u(t) - 4e^{-t}u(t) + 4e^{-3t}u(t)$$

单边拉氏变换:

仅在 $t \geq 0$ 时的拉普拉斯变换:

$$\tilde{X}(s) = \int_0^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

$$\text{记作: } x(t) \xrightarrow{uL} \tilde{X}(s), \quad uL[x(t)] = \tilde{X}(s)$$

由单边拉氏变换的定义可知，如果 $x(t)$ 为因果信号，即 $x(t) = 0$ 当 $t < 0$ 时，则 $x(t)$ 的单边拉氏变换等于其双边拉氏变换，即 $\tilde{X}(s) = X(s)$ 。

根据这一性质，可得:

$$e^{-at}u(t) \xrightarrow{uL} \frac{1}{s+a}, \quad \text{Re}\{s\} > -a$$

例: 求 $x(t) = e^{-a(t+t_0)}u(t+t_0)$ 的双边拉氏变换 $X(s)$ 限单边拉氏变换。

解:

$$\text{双边: } x_1(t) = e^{-at}u(t) \rightarrow \frac{1}{s+a}$$

$$\text{由时移性质: } \frac{e^s}{s+a}, \quad \text{Re}\{s\} > -a.$$

$$\text{单边: } \tilde{X}(s) = \int_0^{+\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-a(t+t_0)} u(t+t_0) e^{-st} dt$$

$$= e^{-a} \int_0^{+\infty} e^{-(s+a)t} dt = \frac{e^{-a}}{s+a}, \quad \text{Re}\{s\} > -a.$$

单边拉氏变换的时域微分性质

$$\text{若 } x(t) \xrightarrow{uL} \tilde{X}(s), \text{ 那么 } \frac{d x(t)}{dt} \xrightarrow{uL} s \tilde{X}(s) - x(0)$$

证明: 由单边拉氏变换定义,

$$uL\left[\frac{d x(t)}{dt}\right] = \int_0^{+\infty} \frac{d x(t)}{dt} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} d[x(t)]$$

$$\text{分离被积分} = \left[e^{-st} x(t) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x(t) d[e^{-st}]$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \tilde{X}(s) = 0. \quad = 0 - x(0) + s \cdot \int_0^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

$$= s \tilde{X}(s) - x(0)$$

由此，有下列一系列公式：

$$uL \left[\frac{dx(t)}{dt} \right] = s\tilde{X}(s) - x(0)$$

$$uL \left[\frac{d^2x(t)}{dt^2} \right] = s^2\tilde{X}(s) - sx(0) - x'(0)$$

$$uL \left[\frac{d^3x(t)}{dt^3} \right] = s^3\tilde{X}(s) - s^2x(0) - sx'(0) - x''(0)$$

$$uL \left[\frac{d^n x(t)}{dt^n} \right] = s^n\tilde{X}(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}x'(0) - \cdots - sx^{(n-2)}(0) - x^{(n-1)}(0)$$

由此，我们可以求解第三类微分方程：

第三类微分方程求解：

例6.22：设LTI系统的输入与输出可用如下微分方程描述：

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{3}{2} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{2}y(t) = 5e^{-3t}u(t)$$

已知 $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, 计算系统的零状态响应 $y_{zs}(t)$, 零输入响应 $y_{zi}(t)$ 和全响应 $y(t)$ 。

解：对两边分别进行单边拉普拉斯变换：

$$\therefore s^2\tilde{Y}(s) - sy(0) - y'(0) + \frac{3}{2}(s\tilde{Y}(s) - y(0)) + \frac{1}{2}\tilde{Y}(s) = 5 \cdot \frac{1}{s+3}, \text{以 } j\omega \text{ 代入。}$$

$$(s^2 + \frac{3}{2}s + \frac{1}{2})\tilde{Y}(s) = \frac{5}{s+3} + \frac{s + \frac{3}{2}}{s+3}$$

$$\tilde{y}_{zs} \quad \tilde{y}_{zi}$$

$$\therefore \tilde{Y}(s) = \frac{5}{(s+1)(s+3)\left(s + \frac{1}{2}\right)} + \frac{s + \frac{3}{2}}{(s+1)\left(s + \frac{1}{2}\right)}$$

最终我们得到：

$$y_{zs}(t) = (-5e^{-t} + e^{-3t} + 4e^{-\frac{1}{2}t})u(t), \quad y_{zi}(t) = (-e^{-t} + 2e^{-\frac{1}{2}t})u(t)$$

$$y(t) = y_{zs}(t) + y_{zi}(t) = (-6e^{-t} + 6e^{-\frac{1}{2}t} + e^{-3t})u(t)$$

利用拉氏变换作频域分析

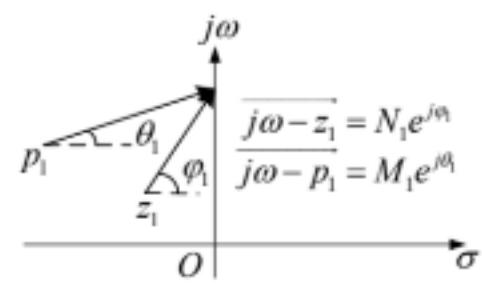
不懂……

根据系统函数 $H(s)$ 在S平面上的零极点分布，可以在S域上求出系统的频率响应 $H(j\omega)$ 。因为：

$$H(s) = A \frac{\prod_{i=1}^m s - z_i}{\prod_{i=1}^n s - p_i}$$

分子中任一因子 $s - p_i$ 相当于由极点 p_i 引向某点 s 的一个矢量，称为极点矢量；分子中任一因子 $s - z_i$ 相当于由零点 z_i 引向某点 s 的一个矢量，称为零点矢量。上式中，用 $j\omega$ 代入，即表示系统的频率响应：

$$H(j\omega) = A \frac{\prod_{i=1}^m j\omega - z_i}{\prod_{i=1}^n j\omega - p_i}$$



$$H(j\omega) = A \frac{\prod_{i=1}^m j\omega - z_i}{\prod_{i=1}^n j\omega - p_i}$$

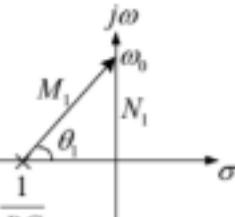
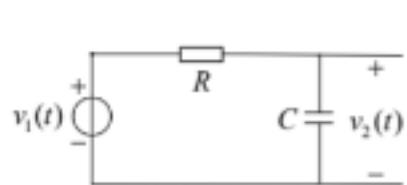
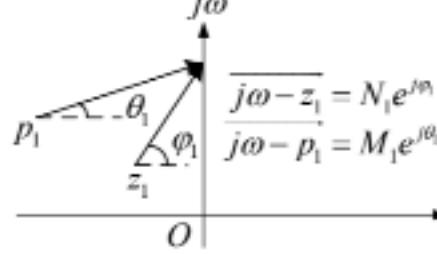
假设 N_i 为零点矢量 z_i 的模， M_i 为极点矢量 p_i 的模，而 φ_i 和 θ_i 分别表示它们与实轴 σ 正方向之间的夹角，即表示两个矢量的辐角，则以上矢量可以表示为：

$$\overrightarrow{j\omega - z_i} = N_i e^{j\varphi_i} \quad \overrightarrow{j\omega - p_i} = M_i e^{j\theta_i}$$

$$H(j\omega) = A \frac{N_1 N_2 \cdots N_m}{M_1 M_2 \cdots M_n} e^{j[(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_m) - (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)]} = |H(j\omega)| e^{j\rho(\omega)}$$

其中：

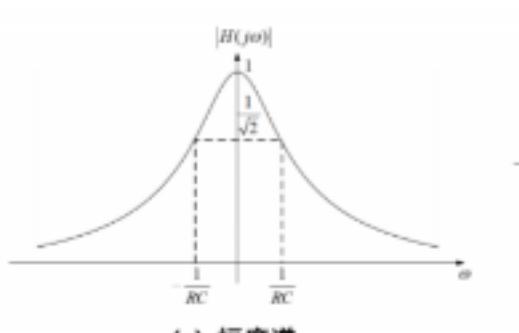
$$|H(j\omega)| = A \frac{N_1 N_2 \cdots N_m}{M_1 M_2 \cdots M_n} \quad \rho(\omega) = (\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_m) - (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)$$



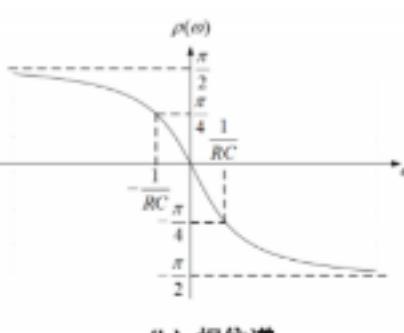
如上图所示的RC低通滤波器频响特性，该系统的系统函数可以写成：

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{1 + sRC}$$

$H(s)$ 有一个极点在 $-\frac{1}{RC}$ 处，

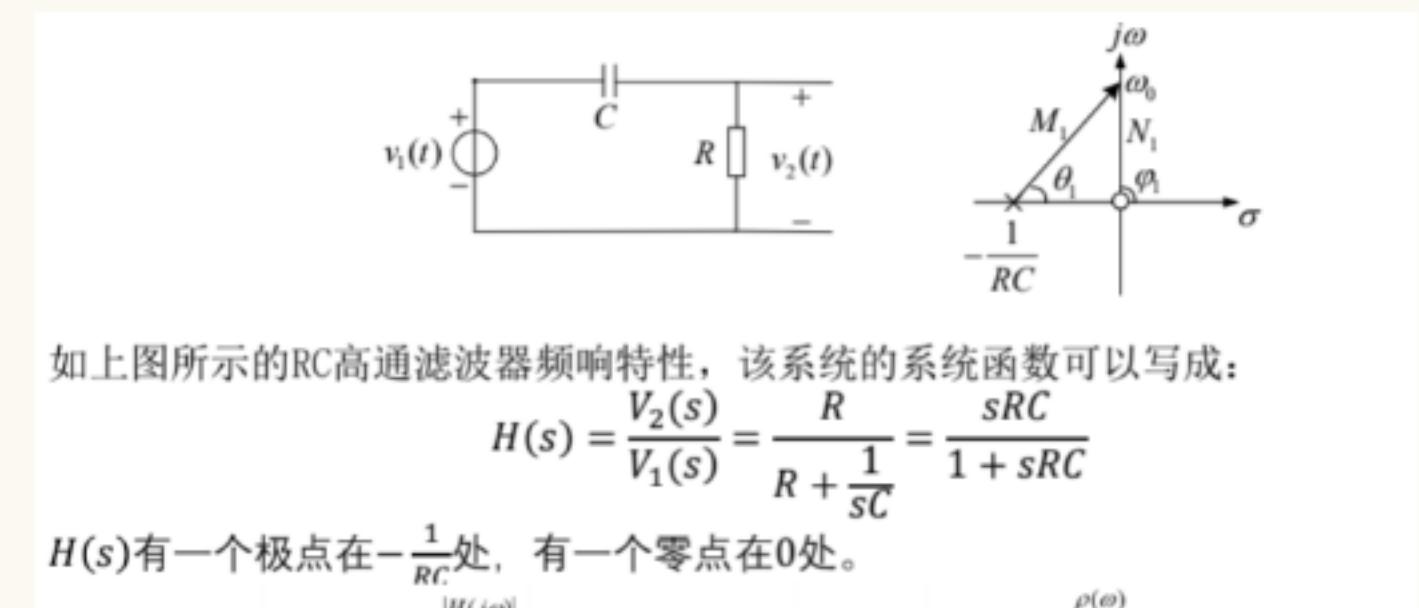


(a) 幅度谱



(b) 相位谱

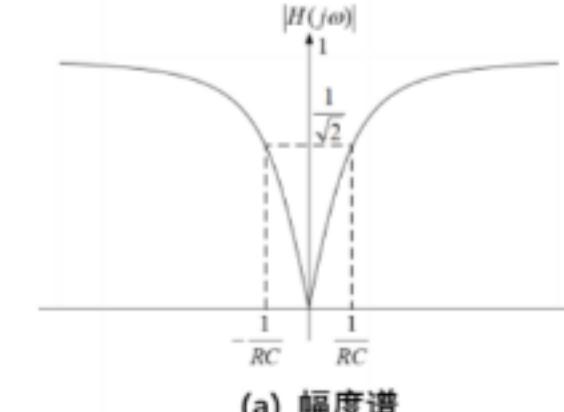
RC低通滤波器的幅度谱和相位谱 ($R = C = 1$)



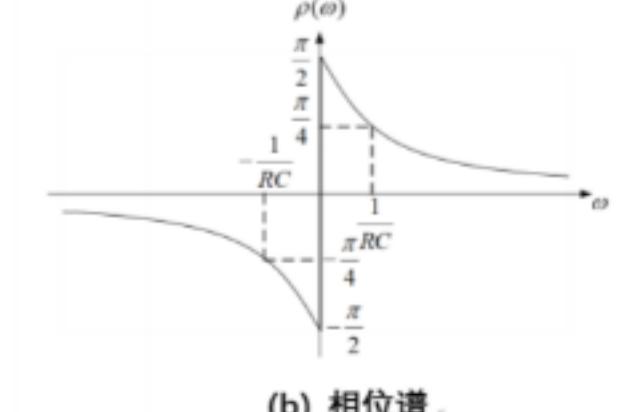
如上图所示的RC高通滤波器频响特性，该系统的系统函数可以写成：

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{sRC}{1 + sRC}$$

$H(s)$ 有一个极点在 $-\frac{1}{RC}$ 处，有一个零点在0处。



(a) 幅度谱



(b) 相位谱

RC高通滤波器的幅度谱和相位谱 ($R = C = 1$)