信号与系统（中文班）

第一章 基本概念

系统基本性质：

1. 线性：每一项都有 x，每个 x 次数都是 1

Tips：

$X=\{x(t),y(0)\}\rightarrow Y=y(t)$

输入(input)　状态(state)

那么，它将是线性系统。我们把上述系统叫做增量线性系统(Incrementally Linear System)。

如下微分方程所描述的系统

$$\sum_{k=0}^{N}a_k\frac{d^ky(t)}{dt^k}=\sum_{k=0}^{M}b_k\frac{d^kx(t)}{dt^k}$$

不是线性系统。

但是，如果我们重新定义输入为：

$$X=\{x(t),y(0),y'(0),y''(0),\cdots,y^{(N-1)}(0)\}\rightarrow Y=y(t)$$

输入(input)　状态(state)

2. 时不变性：

所有 t 都在 x 括号内；

所有 t 只能是 t 本身

3. 记忆/无记忆：

y 括号和 x 括号一样

4. 因果性：

y 括号 $\le$ x 括号

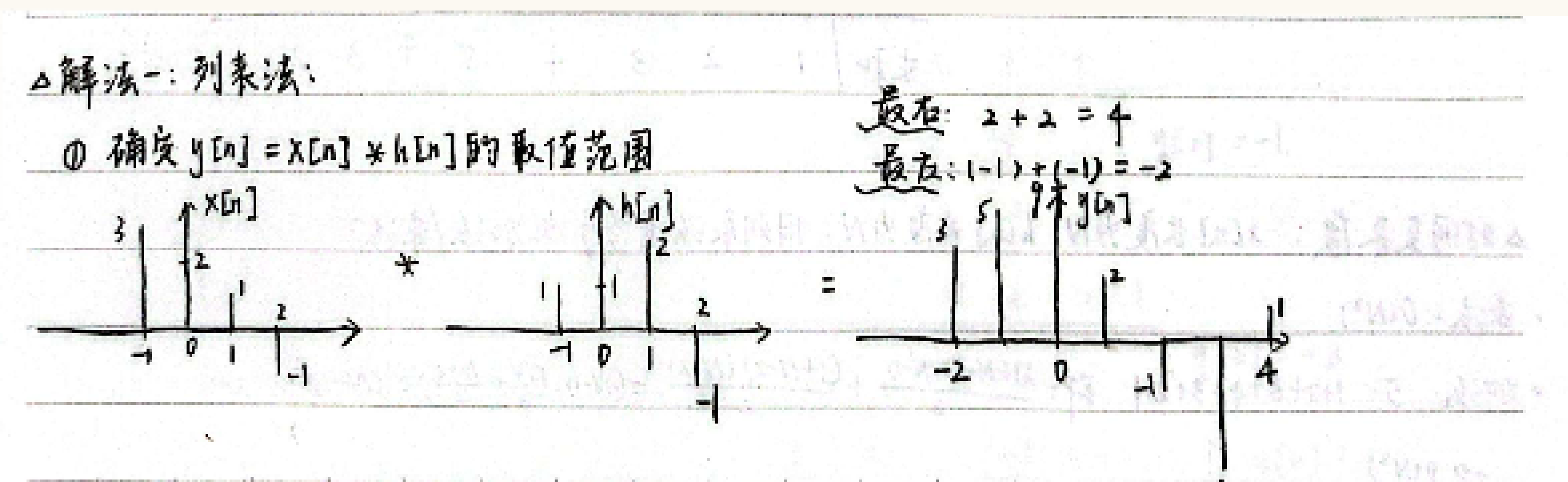
5. 稳定性：

输入有界 ⇒ 输出有界

第二章 LTI 系统

1. 离散卷积

① 列表法：



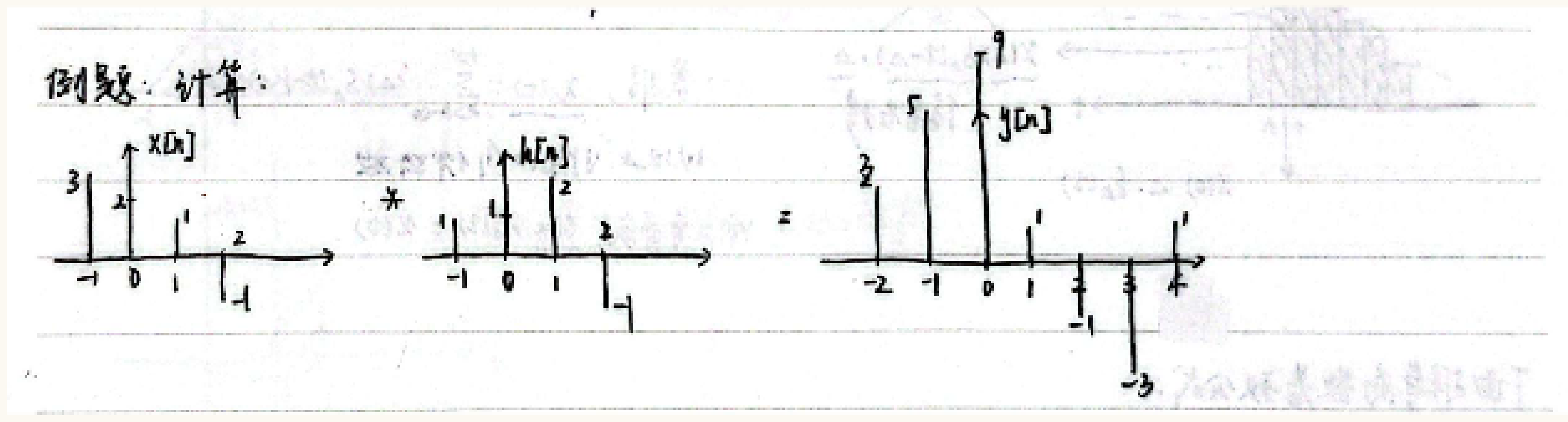
② 列表：

$x[n]$ ↓ \ $h[n]$ →	1	1	2	-1			
3	3	3	6	-2			
2		2	2	4	-2		
1			1	1	2	-1	
-1				-1	-1	-2	1
∴ $y[n]$	3	5	9	2	-1	-3	1

③ 画入原图↑

② 卷积公式法：

$$x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n-k]$$



① 翻转 $h[n]$：

$h[-n]$：-1, 2, 1, 1

② $x[n]$：3　2　1　-1

-1　2　1

3　　$y[-2]=3$

3　2　1　-1

-1　2

3+2　　$y[-1]=5$

3　2　1　-1

-1　2　1　1

6　2　1　　$y[0]=9$

3　2　1　-1

-1　2　1　1

-3+4+1　-1　=1　　$y[1]=1$

3　2　1　-1

-1　2　1　1

-2　2　-1　　$y[2]=-1$

3　2　1　-1

-1　2　1　1

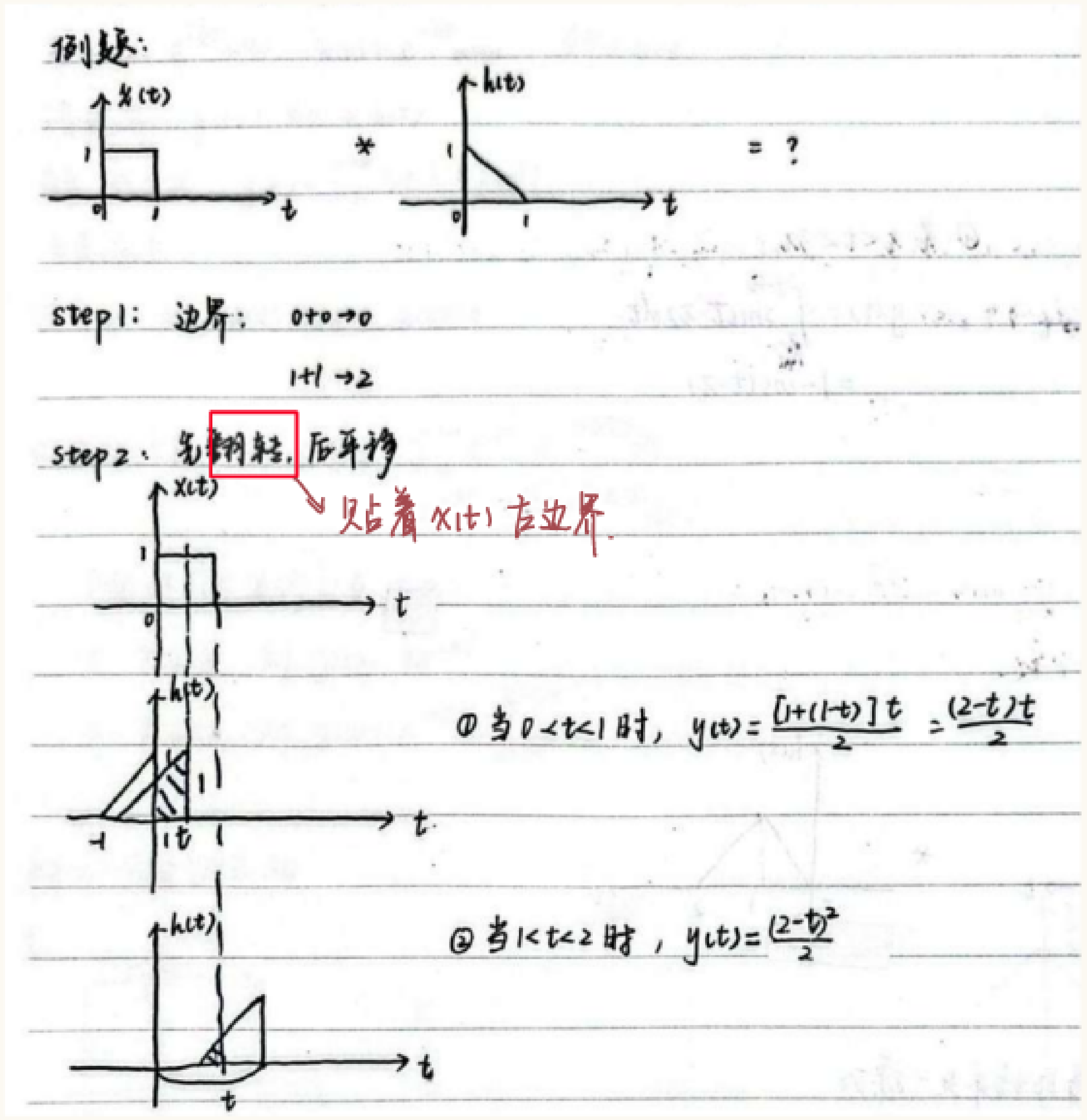
-1　-2　　$y[3]=-3$

3　2　1　-1　　$y[4]=1$

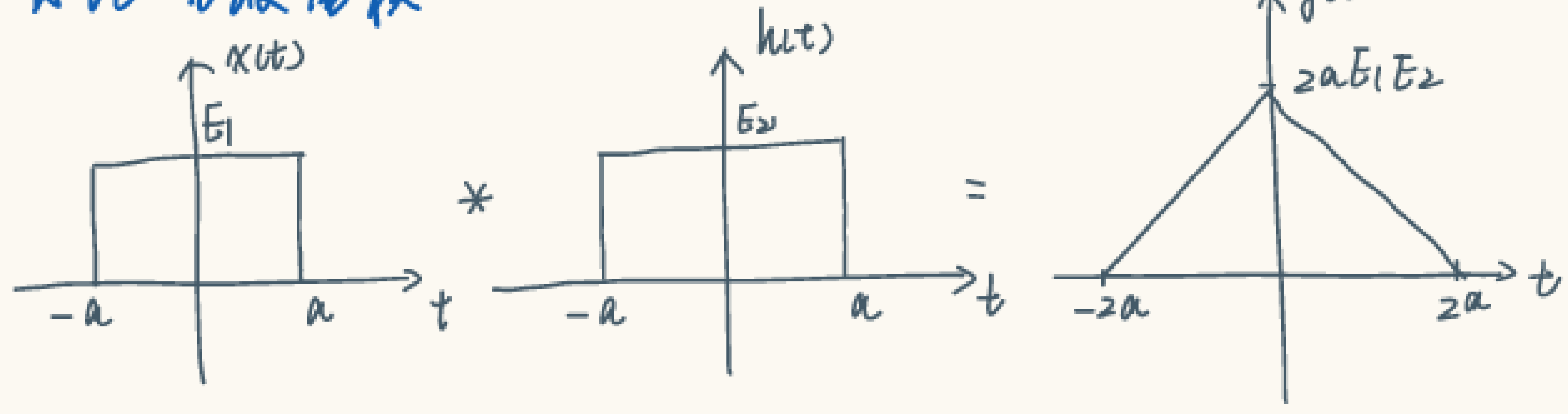
-1　2　1　1

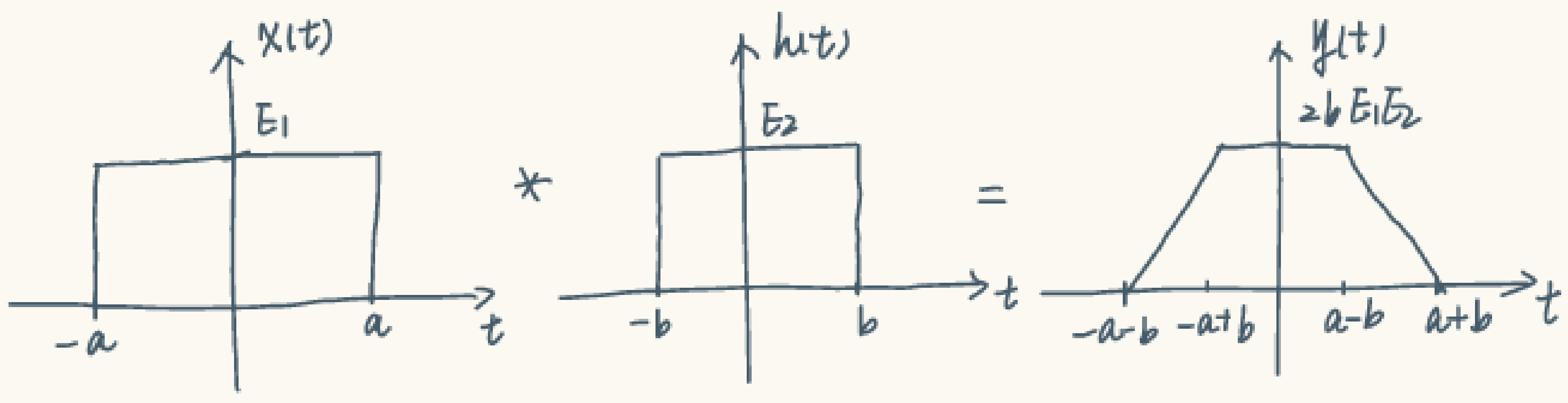
③ 作图

2. 连续卷积

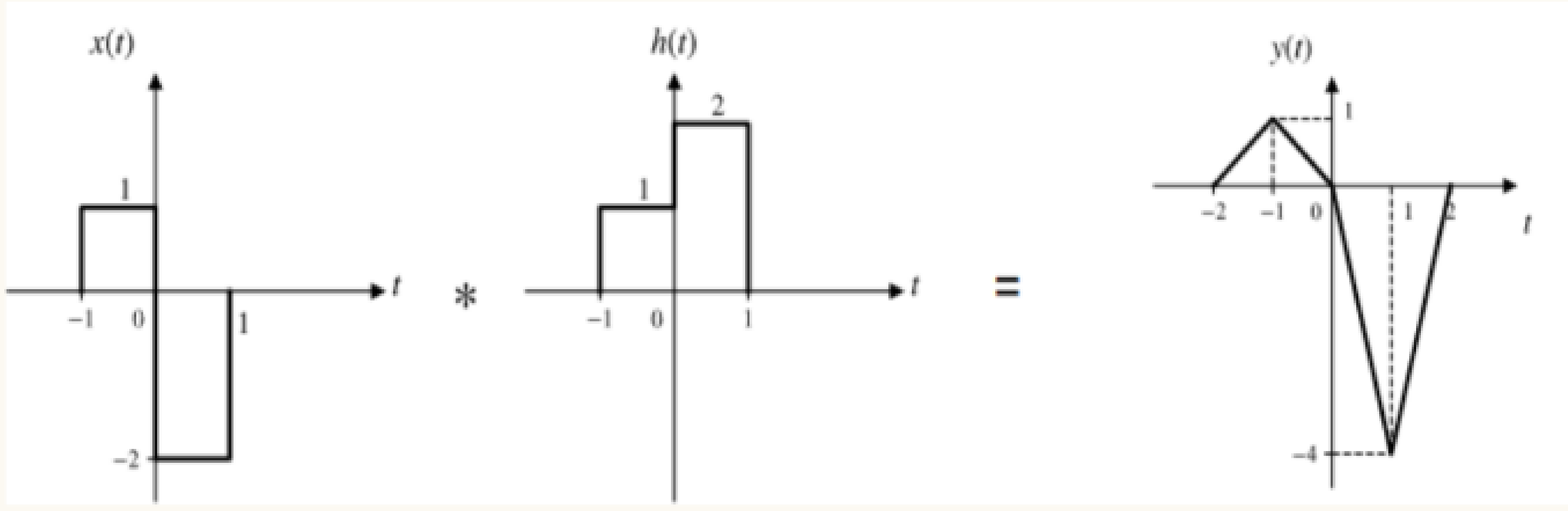


★记：方波卷积





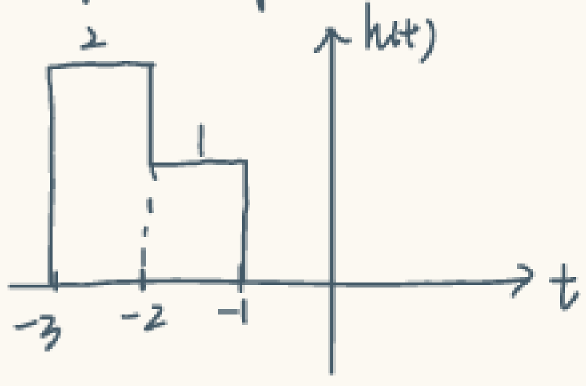
Tip2：其他方法卷积：连直线



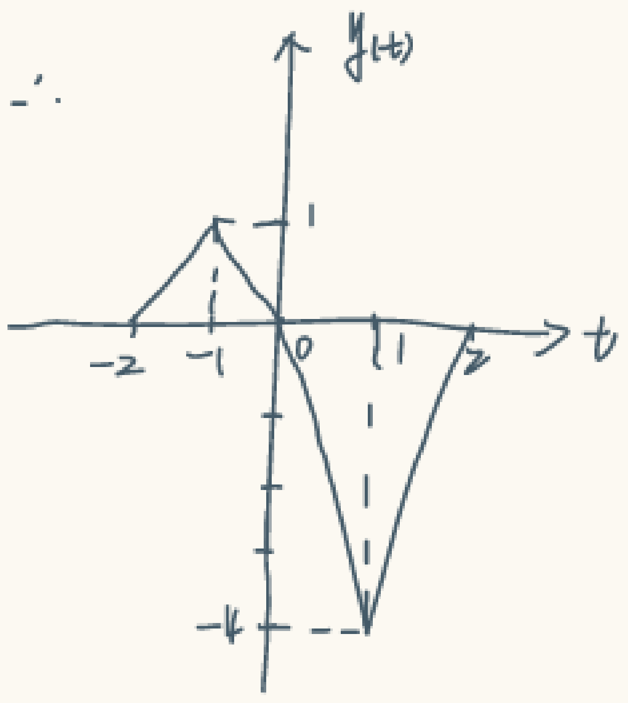
边界：-2, 2

解：先翻转：

$0\to1\to0\to-4\to0$



∴



3. $\delta(t)$性质

① $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$　　$\int_a^b \delta(t)dt = \begin{cases}1, & 若b>0, a<0\\ -1, & 若b<0, a>0\\ 0, & 其它\end{cases}$

② $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0)$，$\int_a^b x(t)\delta(t-t_0)dt \begin{cases} x(t_0), & 若b>0, a<0 \\ -x(t_0), & 若b<0, a>0. \\ 0, & 其它\end{cases}$

③ $x(t)\delta(t)=x(0)\delta(t)$.　$x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t)$

④ $\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$

Tips: $\lim_{w\to+\infty}\frac{\sin(wt)}{\pi t}=\delta(t)$

4. 性质

因果系统 $\xrightarrow{LTI}$ 因果

稳定：$\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt<+\infty$

$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|h[k]|<+\infty$

补充知识：

$x(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau \to x(t)*u(t+1)=\int_{-\infty}^{t+1}x(\tau)d\tau$.

$x[n]*u[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$

$x(t)*\delta(t-t_0)=x(t-t_0)$ / $x(t)*\delta(t)=x(t)$

$x(t+t_0)*h(t-t_0)=x(t)*h(t)$

$x(t)*\delta'(t)=\frac{dx(t)}{dt}$，$\int_{-\infty}^{+\infty}y(t)\delta'(t)dt=-y'(0)$

第三章 傅立叶级数 & 傅立叶变换 — 连续

一、傅立叶变换

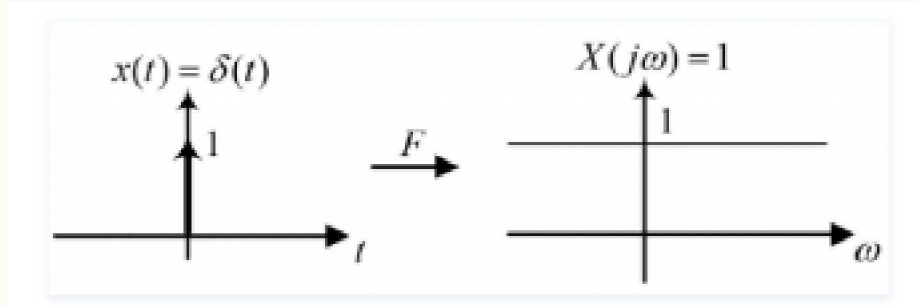
定义：$X(jw)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-jwt}dt$

反变换：$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(jw)e^{jwt}dt$

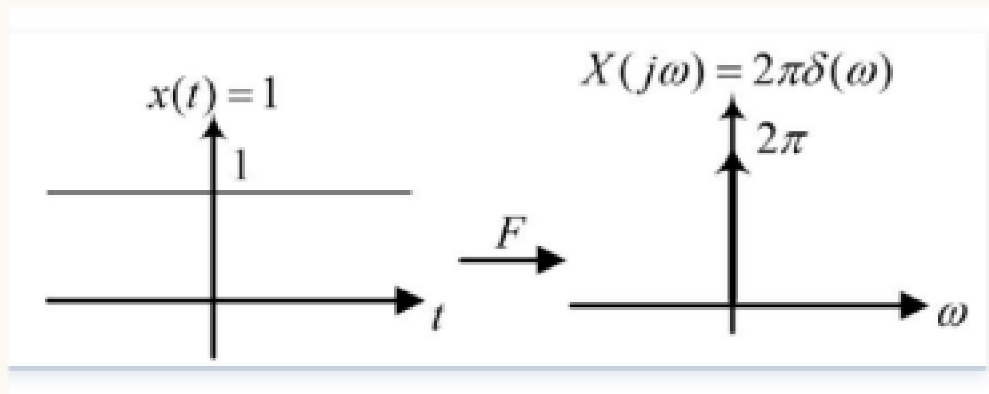
二、七个常用傅立叶变换对

1　$x(t)=e^{-at}u(t)\xrightarrow{F}X(jw)=\frac{1}{a+jw}$

2　$x(t)=\delta(t)\xrightarrow{F}X(jw)=1$



3　$x(t)=1\xrightarrow{F}X(jw)=2\pi\delta(w)$.

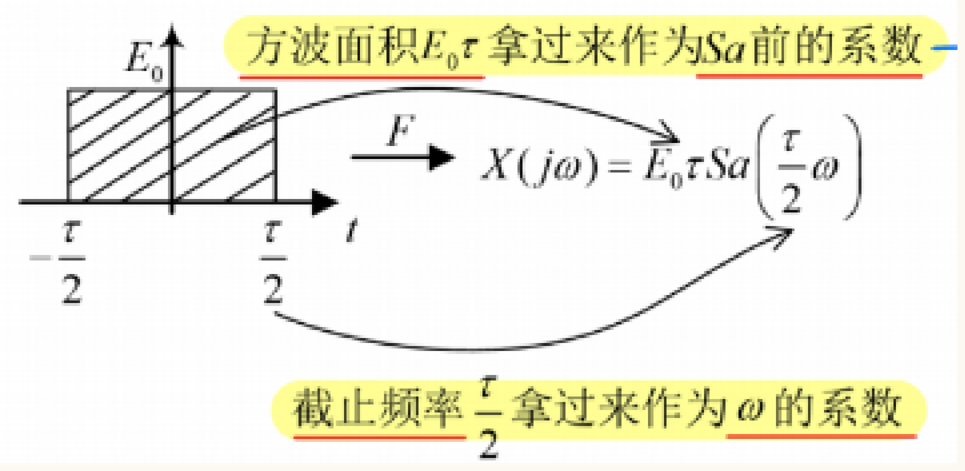


4☆　方波 $\xrightarrow{F}$ Sa

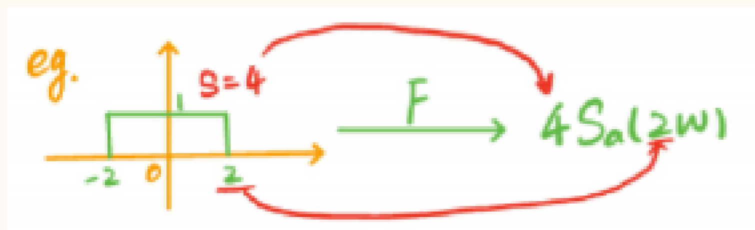
(4)　$x(t)=u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\xrightarrow{F}X(j\omega)=E_0\tau Sa\left(\frac{\tau}{2}\omega\right)$

记忆诀窍：

正：



eg.

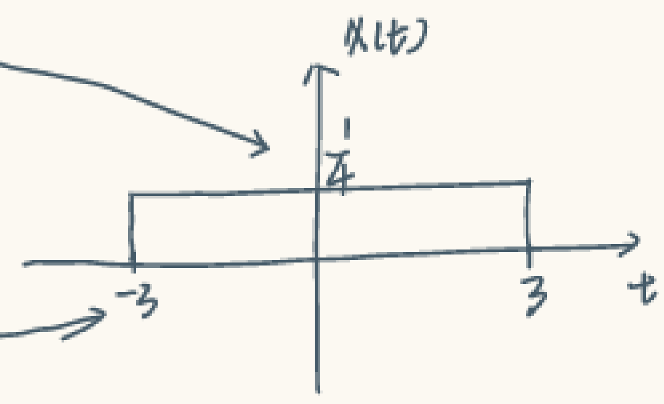


逆：

系数×$\frac{1}{2}$

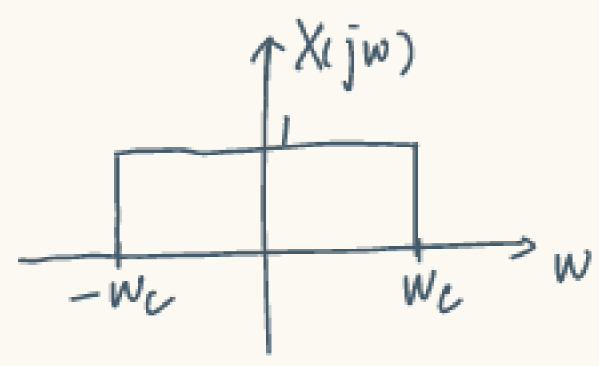
$\frac{\sin(3w)}{2w}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(3w)}{w}\xrightarrow{F^{-1}}$

截止频率



5　Sa $\xrightarrow{F}$ 方波

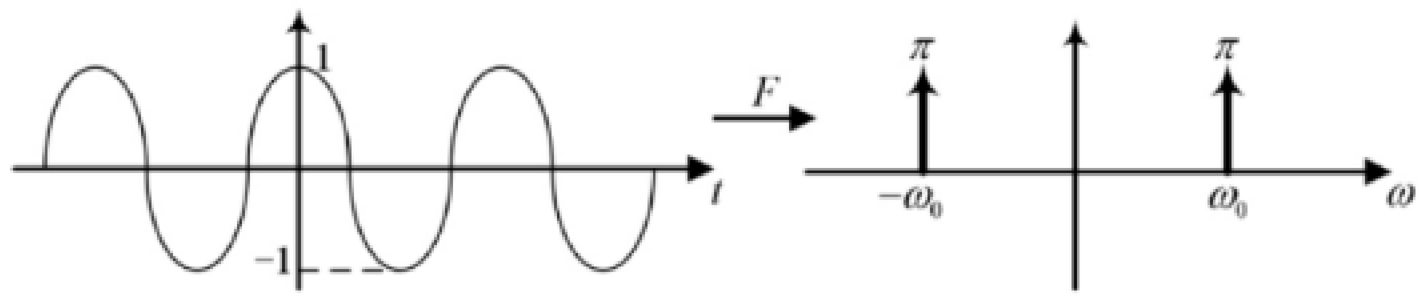
$x(t)=\frac{\sin(W_ct)}{\pi t}\longrightarrow$



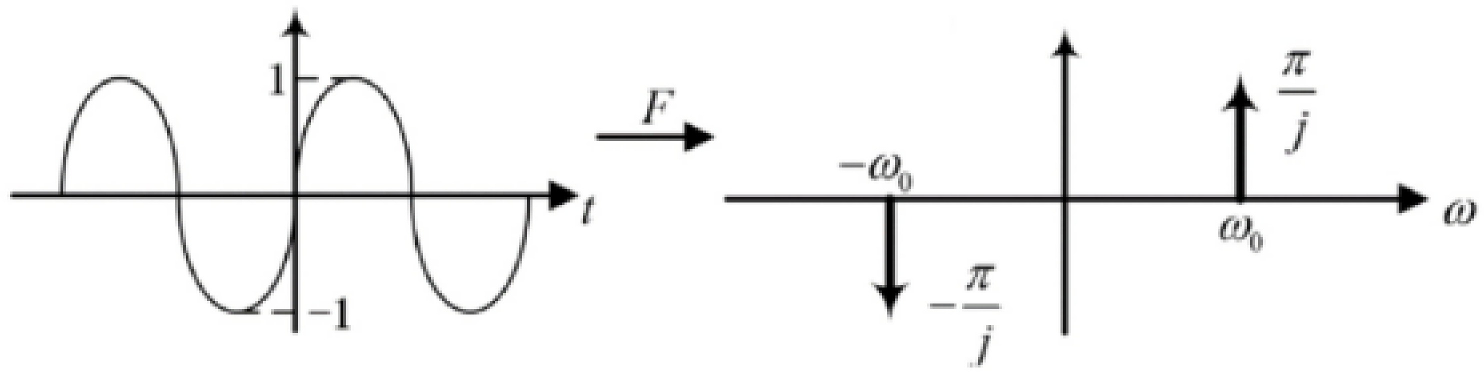
6　$x(t)=u(t)\xrightarrow{F}X(jw)=\frac{1}{jw}+\pi\delta(w)$

7 (7)

$$\cos(\omega_0 t) \xrightarrow{F} \pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$$



$$\sin(\omega_0 t) \xrightarrow{F} \frac{\pi}{j}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$$



三. 性质

1 线性

$$if\ \ x(t) \xrightarrow{F} X(j\omega)\ \ y(t) \xrightarrow{F} Y(j\omega)$$

$$then\ \ ax(t)+by(t) \xrightarrow{F} aX(j\omega)+bY(j\omega)$$

2 时移

$$x(t-t_0) \xrightarrow{F} e^{-jwt_0}X(jw)$$

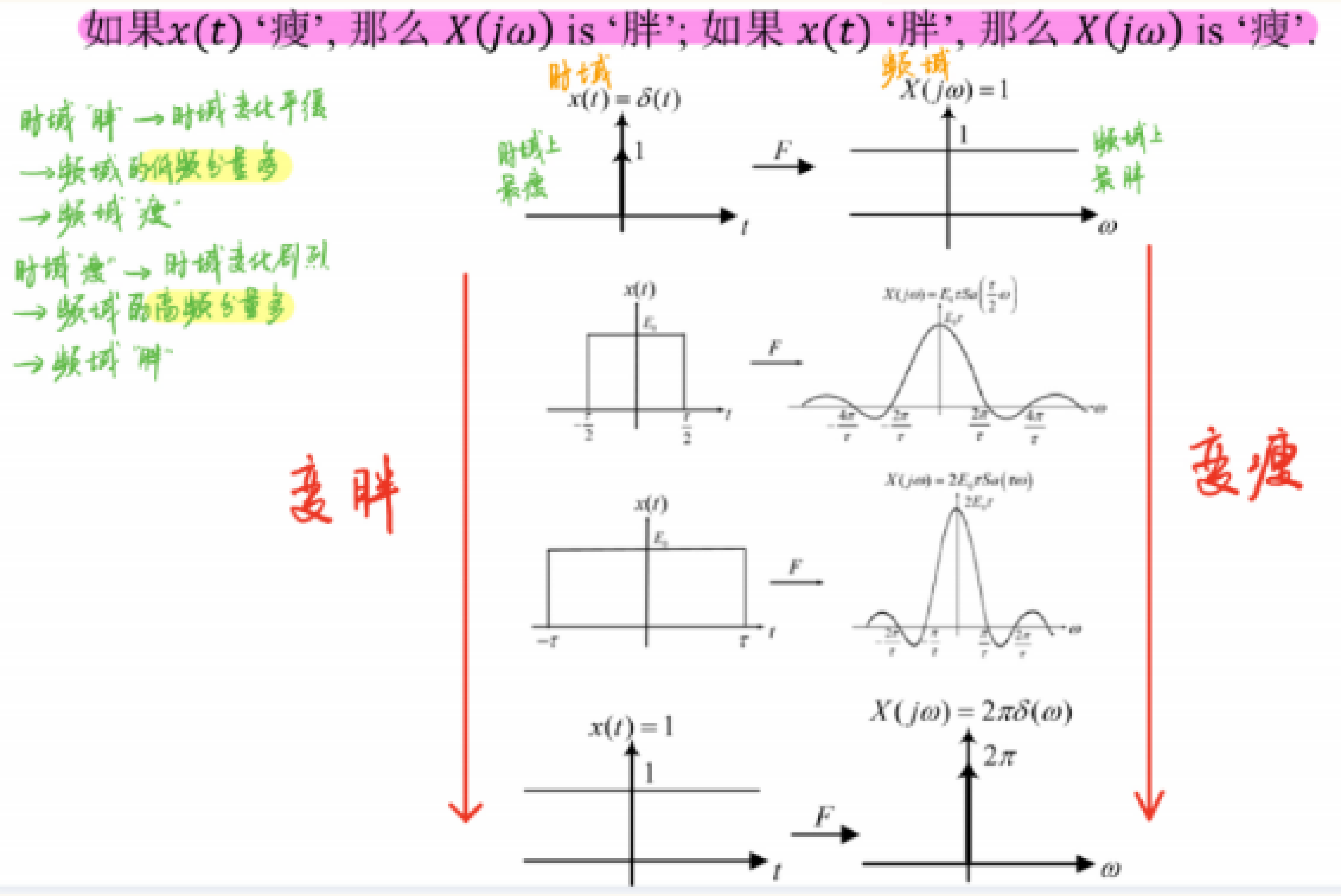
3 频移

$$x(t)e^{jw_0 t} \xrightarrow{F} X(j(w-w_0))$$

4 时域扩展

$$x(at) \xrightarrow{F} \frac{1}{|a|}X(j\cdot\frac{w}{a})$$

如果$x(t)$ '瘦', 那么 $X(j\omega)$ is '胖'; 如果 $x(t)$ '胖', 那么 $X(j\omega)$ is '瘦'.



推论: $x(-t) \xrightarrow{F} X(-jw)$.

5 共轭对称性.

实偶 $\xrightarrow{F/F^{-1}}$ 实偶

实奇 $\xrightarrow{F/F^{-1}}$ 虚奇

$$x(t) \xrightarrow{F} X^*(-jw)$$

6 时域微分

$$\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{F} jwX(jw) \qquad \frac{d^n x(t)}{dt^n} \xrightarrow{F} (jw)^n X(jw)$$

7 频域微分

$$tx(t) \xrightarrow{F} j\frac{dX(jw)}{dw}$$

8 卷积

$$if\ \ x(t) \xrightarrow{F} X(j\omega)\ \ h(t) \xrightarrow{F} H(j\omega)$$

$$then\ \ x(t)*h(t) \xrightarrow{F} X(j\omega)\cdot H(j\omega)$$

9 调制性质

$$x_1(t)\cdot x_2(t) \xrightarrow{F} \frac{1}{2\pi}X_1(jw)*H(jw)$$

解微分方程

例: 考察以下微分方程所表示的LTI系统

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+6y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+x(t)$$

1. 请计算该系统的冲激响应$h(t)$。
2. 如果$x(t)=te^{-t}u(t)$，计算$y(t)$。
3. 如果$x(t)=e^{-3t}u(t)$，计算$y(t)$。

解:

(1) 因为

$$[(j\omega)^2+5j\omega+6]Y(j\omega)=(j\omega+1)X(j\omega)$$

所以

$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{j\omega+1}{(j\omega)^2+5j\omega+6}=\frac{j\omega+1}{(j\omega+2)(j\omega+3)}=\frac{-1}{j\omega+2}+\frac{2}{j\omega+3}$$

所以

$$h(t)=(-e^{-2t}+2e^{-3t})u(t)$$

10 对偶性

$$x(t) \xrightarrow{F} X(jw)$$

$$X(jt) \xrightarrow{F} 2\pi x(-w)$$

11 帕斯瓦尔定理

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(jw)|^2dw$$

四. 周期信号傅立叶变换

设周期信号 $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jkw_0 t}$,

其中 $a_k=\frac{1}{T_0}\int_{T_0}x(t)e^{-jkw_0 t}dt$

$$\therefore\ x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jkw_0 t} \xrightarrow{F} X(jw)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k\delta(w-kw_0)$$

因此，周期信号的傅里叶变换是以ω_0为间隔的冲激串函数。

第四章 离散傅立叶变换

一、定义

对复指数响应: $e^{jW_0 n} \to \boxed{H(e^{jw})} \to H(e^{jW_0}) e^{jW_0 n}$

$x[n] \xrightarrow{F} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jwn}$

反变换: $x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{jwn}) e^{jwn} dw$

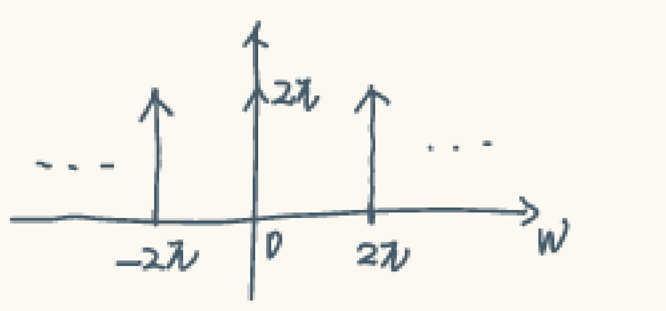
$X(e^{jw})$ 周期 2π.

二、典型变换

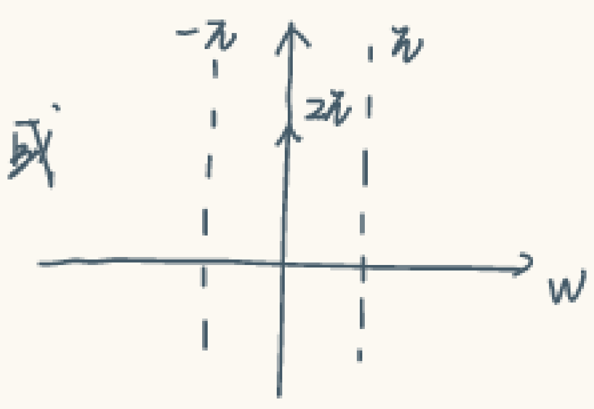
1 $a^n u[n] \xrightarrow{F} \frac{1}{1-ae^{-jw}}$ $(|a|<1)$

2 $\delta[n] \xrightarrow{F} 1$

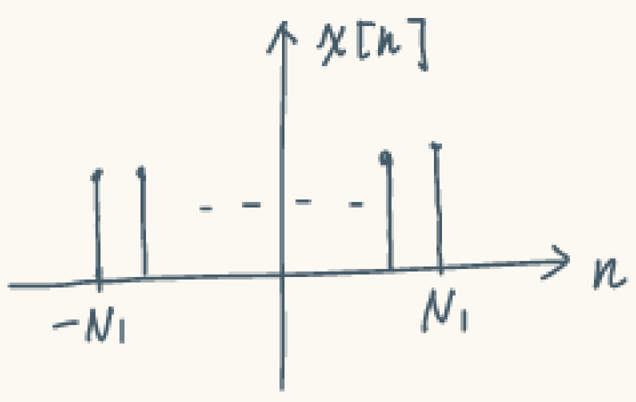
3 $1 \xrightarrow{F} 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(w-2k\pi)$



或

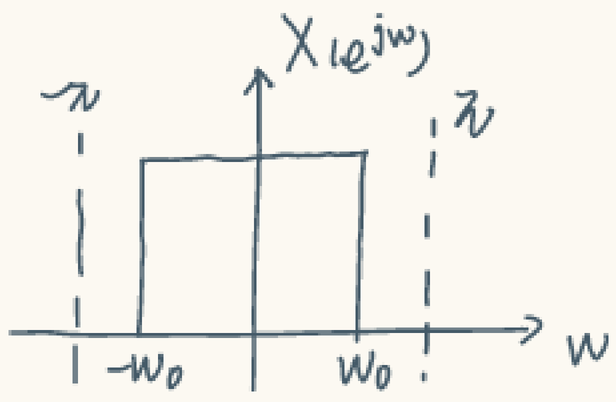


4



$\xrightarrow{F} \frac{\sin[(N_1+\frac{1}{2})w]}{\sin(\frac{1}{2}w)}$

5 $x[n] = \frac{\sin(W_0 n)}{\pi n} \xrightarrow{F}$



$(0 < W_0 < \pi)$

Tips: $\frac{\sin(-\frac{3}{4}\pi n)}{\pi n} = -\frac{\sin(\frac{3}{4}\pi n)}{\pi n}$

$\frac{\sin(\frac{5}{4}\pi n)}{\pi n} = \begin{cases} n=0, & \frac{5}{4} \\ n\neq 0 & -\frac{\sin(\frac{3}{4}\pi n)}{\pi n} \end{cases}$

$\therefore = -\sin(\frac{3}{4}\pi n) + \delta[n]$

6 $u[n] \xrightarrow{F} \frac{1}{1-e^{-jw}} + \pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(w-2k\pi)$

7 $\cos(W_0 n) \xrightarrow{F} \pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}[\delta(w-W_0-2k\pi)+\delta(w+W_0-2k\pi)]$

$\sin(W_0 n) \xrightarrow{F} \frac{\pi}{j}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}[\delta(w-W_0-2k\pi)-\delta(w-W_0-2k\pi)]$

$(-1)^n \xrightarrow{F} 2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(w-(2k+1)\pi)$

$=(\cos\pi n)$

三、性质:

1 线性

如果 $x_1[n] \xrightarrow{F} X_1(e^{j\omega})$和$x_2[n] \xrightarrow{F} X_2(e^{j\omega})$, 然后

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xrightarrow{F} aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$$

2 时域平移

如果 $x[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega})$, 然后

$$x[n-n_0] \xrightarrow{F} e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$$

3 频域平移

如果 $x[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega})$, 然后

$$e^{j\omega_0 n}x[n] \xrightarrow{F} X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

4 时域翻转 / 共轭

实偶 $\xrightarrow{F}$ 实偶

实奇 $\xrightarrow{F}$ 虚奇 $x^*[n] \xrightarrow{F} X^*(e^{-jw})$

定理: 如果$x[n]$是实函数, 并且$x[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega})$, 假设

$$X(e^{j\omega}) = Re\{X(e^{j\omega})\} + jIm\{X(e^{j\omega})\}$$

然后$Re\{X(e^{j\omega})\}$是偶函数, 且$Im\{X(e^{j\omega})\}$ 奇函数。

幅度谱 $|X(e^{jw})|$ 为实偶, 相位 $\theta(w)$ 为奇.

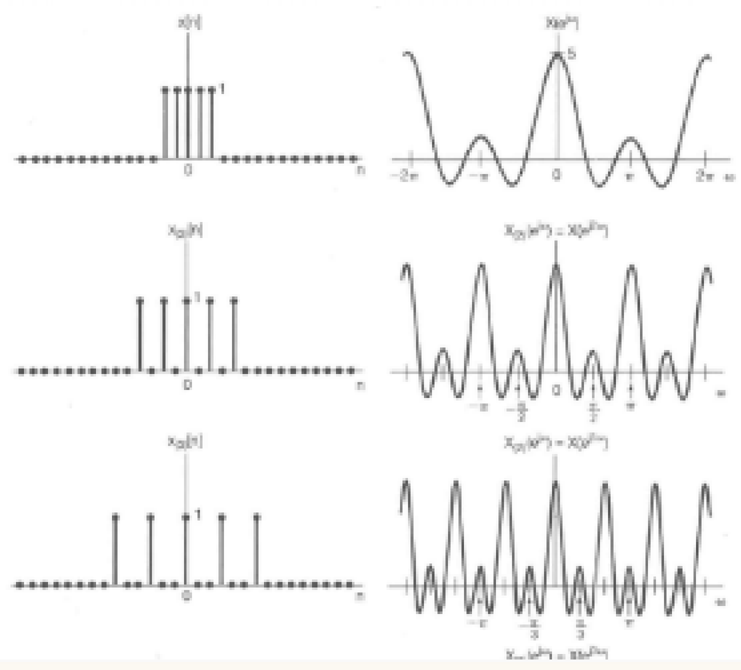
5 时域扩展 (好像用的很少)

时域扩展: 如果 $x[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega})$, 则有

$$x_{(k)}[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega k})$$

其中 $x_{(k)}[n]$ 是$x[n]$ 的时域扩展:

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{k}\right], & \text{当 } k \mid n \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } k \nmid n \text{时} \end{cases}$$



6 频域微分

$n x[n] \xrightarrow{F} j\frac{dX(e^{jw})}{dw}$

二级结论:

$$\frac{(n+r-1)!}{n!\,(r-1)!}a^n u[n] \xrightarrow{F} \frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^r}$$

7 帕斯瓦尔定理

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}|X(e^{jw})|^2 dw$

8 卷积性质

如果$x[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega})$, 和$h[n] \xrightarrow{F} H(e^{j\omega})$, 然后

$$x[n] * h[n] \xrightarrow{F} X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

差分方程:

例 5.19: 假设一个 LTI 系统具有如下差分方程的特征:

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 2x[n]$$

计算其单位脉冲响应$h[n]$ 。

解决方案:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{2}{1-\frac{3}{4}e^{-j\omega}+\frac{1}{8}e^{-j2\omega}} = \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)}$$

$$= \frac{4}{1-\frac{1}{2}e^{j\omega}} - \frac{2}{1-\frac{1}{4}e^{j\omega}}$$

所以:

$$h[n] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

9 求和性质:

$$\sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \xrightarrow{F} \frac{X(e^{j\omega})}{1-e^{-j\omega}} + \pi X(e^{j0})\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2k\pi)$$

10 调制性质

定义:周期卷积　设 $x(t)$, $h(t)$ 均为以T为周期的函数,

$x(t)=x(t+nT)$, $h(t)=h(t+nT)$, 则定义 $\boxed{\text{周期卷积:}}$

$$y(t)=x(t)\circledast h(t)=\int_T \underline{x(\tau)}\,\underline{h(t-\tau)}\,d\tau$$

$y(t)$ 也以T为周期 ⇐ 均以T为周期

调制性质: 若 $x_1[n] \xrightarrow{F} X_1(e^{j\omega})$, $x_2[n] \xrightarrow{F} X_2(e^{j\omega})$,

则 $x_1[n]x_2[n] \xrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} X_1(e^{j\omega})\circledast X_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$

Tips: 周期卷积的计算

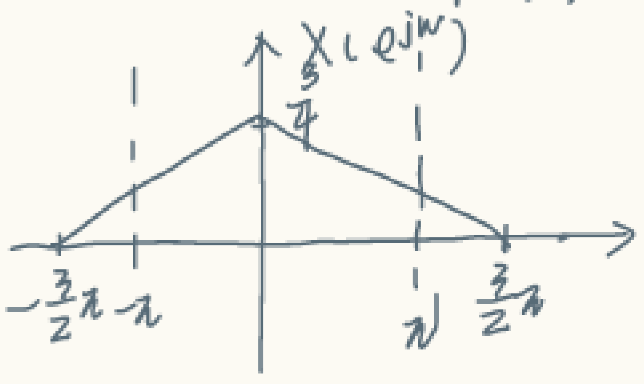
例：如果

$$x[n]=\left[\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{4}n\right)}{\pi n}\right]^2$$

计算其离散傅里叶变换$X(e^{j\omega})$。

$$x[n]=\frac{\sin\frac{3}{4}\pi n}{\pi n}\cdot\frac{\sin\frac{3}{4}\pi n}{\pi n}$$

一般地由方波卷积后,

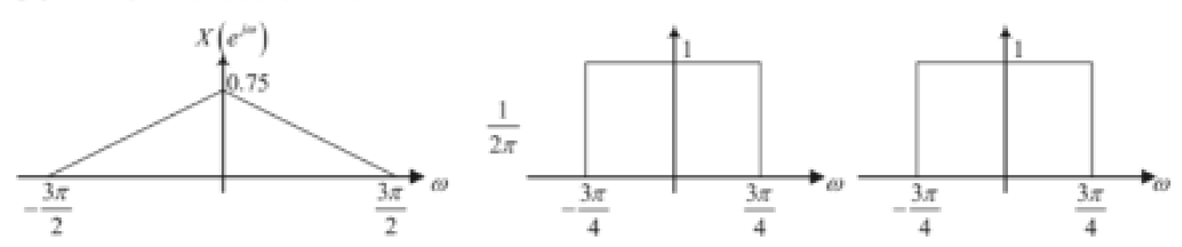


发现超出了 $[-\pi,\pi]$

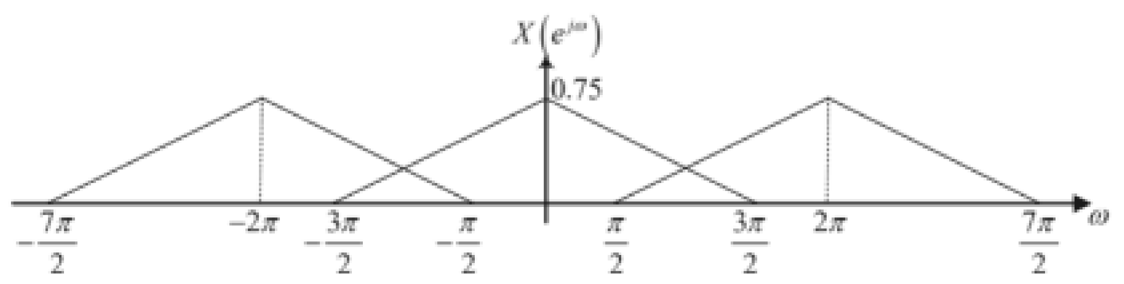
∴ 移动

（继续）解决上述问题的三个步骤。

步骤1：计算一个周期的卷积。



第 2 步：将上述信号延长一段时间2π。



步骤3：将重叠区域相加即可得到最终结果。